Тема:Баштапкы функция жана аныкталбаган интеграл

Аныкталбаган интегралдын касиеттери

1. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

   Турактуу санды интеграл белгисинин сыртына чыгарууга болот.

2. $\int[f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \int f_3(x)dx$

   Чектүү сандагы функциялардын алгебралык суммасынын интегралы алардын интегралдарынын суммасына барабар.

3. $d\int f(x)dx = f(x)dx$

   Интегралдын дифференциалы интеграл астындагы функцияга барабар.

4. $\int dF(x) = F(x) + C$

   Дифференциалдын интегралы дифференцирленүүчү функциядан турактуу санга айырмаланат.

5. $[\int f(x)dx]` = f(x)$

   Интегралдын туундусу интегралдануучу функцияга барабар.

Интегралдардын негизги таблицасы

1. $\int 0dx = C$
2. $\int du = u + C$
3. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
4. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$
5. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
6. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
7. $\int e^u du = e^u + C$
8. $\int \sin u\ du = -cosu + C$
9. $\int \cos u\ du = \sin u + C$
10. $\int \mathrm{tg}\, u\ du = -\ln|\cos u| + C$
11. $\int \mathrm{ctg}\, u\ du = \ln|\sin u| + C$
12. $\int \frac{du}{cos^2 u} = tg\ u + C$
13. $\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctg\ u + C$
14. а) $\int \frac{du}{1+u^2} = arctg\ u + C$ б) $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} arctg\ \frac{u}{a} + C$
15. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = arcsin\, u + C$
16. а) $\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C$ б) $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$
17. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$
18. $\int sh\, u\, du = ch\, u + C$
19. $\int ch\, u\, du = sh\, u + C$
20. $\int \frac{du}{ch^2 u} = th\, u + C$
21. $\int \frac{du}{sh^2 u} = -cth\, u + C$
22. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln|tg\frac{u}{2}| + C$
23. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)| + C$

1. *Интегралдоо таблицасын пайдаланып аныкталбаган интегралдарды чыгаруу.*

Бул темага берилген функцияларды интегралдоодон мурда элементардык өзгөртүүлөрдүн жардамында аларды таблицалык түргө келтирип алуу керек.

1.1. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx$, 1.2. $\int 6x^5 dx$, 1.3. $\int \left(5x^2 + 7x - \frac{x}{2}\right) dx$, 1.4. $\int \frac{x-4}{x^3} dx$,

1.5. $\int \frac{\left(x^2+1\right)^2}{x^3} dx$, 1.6. $\int \left(\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}\right) dx$

1.7. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}\right) dx$, 1.8. $\int \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}{x} dx$, 1.9. $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$,

1.10. $\int \frac{dx}{sin^2 x\, cos^2 x}$, 1.11. $\int \frac{5-2ctg^2 x}{cos^2 x} dx$, 1.12. $\int \frac{dx}{x^2+8}$,

1.13. $\int \frac{dx}{x^2-5}$, 1.14. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$, 1.15. $\int \frac{dx}{\sqrt{12-x^2}}$,

1.16. $\int tg^2 x\, dx$

Чыгаруу:

1.1. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx$ интегралын чыгаруу үчүн даражанын төмөнкү касиеттерин пайдаланып интегралды таблицалык түргө келтирип алабыз. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ жана $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$. Анда интеграл

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx = \int \left(\frac{x}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int x^{-\frac{3}{2}} dx$$

эки интегралынын суммасына келет. Мындан кийин 3-формуланы пайдаланабыз.

$$\int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = 2\sqrt{x} - 2\frac{1}{\sqrt{x}} + C$$

1.2. $\int 6x^5 dx$ интегралын чыгаруу үчүн 1-касиеттен жана 3-формуладан пайдаланабыз:

$$\int 6x^5 dx = 6\int x^5 dx = 6 \cdot \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = x^6 + C$$

1.3. $\int \left(5x^2 + 7x - \frac{x}{2}\right) dx$ интегралын чыгаруу үчүн 2-касиеттен, 1-касиеттен жана 3-формуладан пайдаланабыз:

$$\int \left(5x^2 + 7x - \frac{x}{2}\right) dx = \int 5x^2 dx + \int \left(7 - \frac{1}{2}\right) x dx =$$

$$= 5\int x^2 dx + 6{,}5 \int x dx = 5 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + 6{,}5 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{5}{3} x^3 + \frac{6{,}5}{2} x^2 + C$$

1.4. $\int \frac{x-4}{x^3} dx$ бул интегралды чыгаруу үчүн, алгач интеграл алдындагы туюнтманы мүчөлөп бөлүп алабыз. Андан кийин 2-касиетти, кийин 1-касиетти, акырында 3-формуланы колдонобуз:

$$\int \frac{x-4}{x^3} dx = \int \frac{x}{x^3} dx - \int \frac{4}{x^3} dx = \int x^{-2} dx - 4\int x^{-3} dx =$$

$$= -x^{-1} - 4\frac{x^{-3+1}}{-2} + C = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + C$$

1.5. $\int \frac{\left(x^2+1\right)^2}{x^3} dx$ бул учурда бөлчөктүн алымындагы туюнтманы квадратка көтөрүп, андан кийин бөлүмүнө мүчөлөп бөлүп, келип чыккан интегралдардын баштапкы функциясын табабыз:

$$\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3} dx = \int \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^3} dx = \int \frac{x^4}{x^3} dx + \int \frac{2x^2}{x^3} dx + \int \frac{1}{x^3} dx =$$

$$= \int x dx + 2\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x^3} dx = \frac{x^2}{2} + \ln x - \frac{1}{2x^2} + C$$

1.6. $\int \left(\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}\right) dx$

$$\int \left(\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}\right) dx = \int \sqrt{x} dx + 2\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx + 2\int x^{\frac{1}{3}} dx =$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2 \cdot \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} x^{\frac{4}{3}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^4} + C$$

1.7. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}\right) dx$

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx=\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx-\int\frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}dx=\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-2\cdot\frac{x^{-\frac{3}{4}+1}}{-\frac{3}{4}+1}+C=$$
$$=2\sqrt{x}-8\sqrt[4]{x}+C$$

1.8. $\int\frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x}dx$ бул учурда $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ формуласынан пайдаланууга туура келет.

$$\int\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}{x}dx=\int\frac{\sqrt{x}^3-3\sqrt{x}^2+3\sqrt{x}-1}{x}dx=$$
$$=\int\frac{\sqrt{x}^3}{x}dx-3\int\frac{\sqrt{x}^2}{x}dx+3\int\frac{\sqrt{x}}{x}dx-\int\frac{1}{x}dx=$$
$$=\int\sqrt{x}\,dx-3\int dx+3\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx-\int\frac{1}{x}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-3x+6\sqrt{x}-\ln x+C$$

1.9. $\int\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

$$\int\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}dx-\int\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int x^{\frac{1}{3}}dx-\int x^{-\frac{2}{3}}dx=$$
$$=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}-3\sqrt[3]{x}+C$$

1.10. $\int\frac{dx}{sin^2x\,cos^2x}$ бул учурда тригонометриялык негизги теңдештиктердин ичинен

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

формуласынан пайдалануу керек. Андан кийин 12- жана 13- формулалар пайдаланылат.

$$\int\frac{dx}{sin^2x\,cos^2x}=\int\frac{sin^2x+cos^2x}{sin^2x\,cos^2x}dx=\int\frac{sin^2xdx}{sin^2x\,cos^2x}+$$
$$+\int\frac{cos^2xdx}{sin^2x\,cos^2x}=\int\frac{dx}{cos^2x}+\int\frac{dx}{sin^2x}=tg\ x-ctg\ x+C$$

1.11. $\int\frac{5-2ctg^2x}{cos^2x}dx$ бул туюнтманын баштапкы функциясын табуу үчүн $ctg\ x=\frac{\cos x}{\sin x}$ формуласын пайдалануу керек.

$$\int\frac{5-2ctg^2x}{cos^2x}dx=\int\frac{5}{cos^2x}dx-\int\frac{2ctg^2x}{cos^2x}dx=5\int\frac{1}{cos^2x}dx-2\int\frac{\frac{cos^2x}{sin^2x}}{cos^2x}dx=$$
$$=5\int\frac{1}{cos^2x}dx-2\int\frac{1}{sin^2x}dx=5tg\ x+2ctg\ x+C$$

1.12. $\int\frac{dx}{x^2+8}$ бул учурда 14-формуланы колдонуу керек.

$$\int\frac{dx}{x^2+8}=\int\frac{dx}{x^2+\sqrt{8}^2}=\frac{1}{\sqrt{8}}arctg\frac{x}{\sqrt{8}}+C$$

1.13. $\int\frac{dx}{x^2-5}$ бул функцияны интегралдоо үчүн анык эмес интегралдардын таблицасындагы 16-формуланын экинчи жалпы учурунан пайдаланууга болот. Формула

$$\int\frac{du}{a^2-u^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+C$$

түрүндө болгондуктан, алгач бөлчөктүн бөлүмүндөгү туюнтмадан «-» белгисин интегралдын сыртына чыгарып жиберебиз. Андан кийин формуланы колдонсо болот.

$$\int\frac{dx}{x^2-5}=-\int\frac{dx}{5-x^2}=-\int\frac{dx}{\sqrt{5}^2-x^2}=-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+x}{\sqrt{5}-x}\right|+C$$

1.14. $\int\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$ бул учурда 17-формула колдонулат.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}=\ln\left|x+\sqrt{4+x^2}\right|+C$$

1.15. $\int\frac{dx}{\sqrt{12-x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{12-x^2}} = \ln\left|x+\sqrt{12-x^2}\right| + C$$

1.16. $\int tg^2x\,dx$ бул туюнтманы интегралдоо үчүн тригонометриялык теңдештиктерден пайдаланабыз.

$$\int tg^2x\,dx = \int \frac{sin^2x}{cos^2x}dx = \int \frac{1-cos^2x}{cos^2x}dx = \int \frac{1}{cos^2x}dx - \int dx = tg\ x - x + C$$

Тема2:Туюнтманы дифференциал ичине кийирүү же ордуна коюу методу менен интегралдоо.

Аталган темага берилген мисалдар эки түрдө болушат:

а) интегралдануучу функциянын кандайдыр бир бөлүгүн башка өзгөрмө менен белгилеп алып, дифференциалды да ошол өзгөрмө аркылуу туюнтуу;

б) интегралдануучу функциянын кандайдыр бир бөлүгүн дифференциал ичине кийирүү.

2.1. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x}}$, 2.2. $\int \frac{(1-3x)dx}{3+2x}$, 2.3. $\int \frac{2x+3}{2x+1}dx$,

2.4. $\int \frac{x^2+1}{x-1}dx$, 2.5. $\int \frac{xdx}{x^2-5}$, 2.6. $\int \frac{xdx}{(x+1)^2}$,

2.7. $\int \frac{x^2dx}{1+x^6}$, 2.8. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$, 2.9. $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$,

2.10. $\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}$, 2.11. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}$, 2.12. $\int \frac{xdx}{2x^2+3}$,

2.13. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^4-x^4}}$, 2.14. $\int \frac{x^3dx}{1+x^2}$, 2.15. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-1}}$, 2.16. $\int\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$, 2.17. $\int\frac{arctg\frac{x}{2}}{4+x^2}dx$, 2.18. $\int e^{-(x^2+1)}xdx$,

2.19. $\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$, 2.20. $\int\frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$, 2.21. $\int\frac{e^x}{e^x-1}dx$,

2.22. $\int\cos\sqrt{x}\frac{dx}{\sqrt{x}}$, 2.23. $\int\sin(\lg x)\frac{dx}{x}$, 2.24. $\int\frac{xdx}{cos^2x^2}$,

2.25. $\int x\sin(1-x^2)dx$, 2.26. $\int tg\ x\ dx$, 2.27. $\int ctg\ x\ dx$,

2.28. $\int sin^3 6x\cos 6x\ dx$, 2.29. $\int\frac{\sin 3x}{3+\cos 3x}dx$, 2.30. $\int\frac{\sqrt{tg\,x}}{\cos^2 x}dx$,

2.31. $\int\frac{ctg^{\frac{2}{3}}x}{sin^2x}dx$, 2.32. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+8}}$

Чыгаруу:

2.1. $\int\frac{e^xdx}{\sqrt{1+e^x}}$ бул туюнтманы интегралдоо үчүн $t=1+e^x$ ордуна коюусунан пайдаланабыз. Анда $dt=e^xdx$ болот. Ордуна койсок:

$$\int\frac{e^xdx}{\sqrt{1+e^x}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\int t^{-\frac{1}{2}}dt=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{1+e^x}+C$$

2.2. $\int\frac{(1-3x)dx}{3+2x}$ бул функцияны интегралдоодо бөлчөктүн алымын бөлүмү менен кыскара тургандай кылып кошулуучуларга ажыратып алуу керек.

$$\int\frac{(1-3x)dx}{3+2x}=\int\frac{(1-3x-5.5+5.5)dx}{2(1.5+x)}=\frac{1}{2}\int\frac{[-(4.5+3x)+5.5]dx}{1.5+x}$$

Андан кийин кыскарчу кошулуучуларды кыскартып, туруктуу сандарды интегралдын сыртына чыгарабыз.

$$\frac{3}{2}\int dx+\frac{5.5}{2}\int\frac{dx}{1.5+x}=-\frac{3}{2}x+\frac{5.5}{2}\ln(1.5+x)+C$$

2.3. $\int\frac{2x+3}{2x+1}dx$

$$\int\frac{2x+3}{2x+1}dx=\int\frac{2x+1+2}{2x+1}dx=\int\frac{2x+1}{2x+1}dx+\int\frac{2}{2x+1}dx=$$
$$=\int dx+2\int\frac{dx}{2x+1}=x+\ln(x+0.5)+C$$

2.4. $\int\frac{x^2+1}{x-1}dx$ бул функцияны интегралдоо үчүн бөлчөктүн алымынын даражасын бөлүмүнүн даражасынан кичине болгондой кылып өзгөртүп алабыз.

$$\int\frac{x^2+1}{x-1}dx=\int\frac{x^2+1-2+2}{x-1}dx=\int\frac{x^2-1+2}{x-1}dx=$$
$$=\int\frac{(x-1)(x+1)+2}{x-1}dx=\int(x+1)dx+\int\frac{2}{x-1}dx$$

Акырында келип чыккан интегралдардын суммасын интегралдардын таблицасынын жардамында интегралдоого болот.

$$\int(x+1)dx+\int\frac{2}{x-1}dx=\frac{x^2}{2}+x+2\ln(x-1)+C$$

2.5. $\int\frac{xdx}{x^2-5}$ бул функцияны интегралдоодо бөлчөктүн бөлүмүн жана дифференциялды башка өзгөрмө менен туюнтуп алабыз.

$$\int\frac{xdx}{x^2-5}=\begin{Bmatrix}t=x^2-5\\dt=2xdx\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln t+C=\frac{1}{2}\ln(x^2-5)+C=$$
$$=\ln\sqrt{x^2-5}+C$$

2.6. $\int\frac{xdx}{(x+1)^2}$ функциясын интегралдоо үчүн бөлчөктүн алымын өзгөртүп түзүү керек.

$$\int\frac{xdx}{(x+1)^2}=\int\frac{(x+1-1)dx}{(x+1)^2}=\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{(x+1)^2}=\begin{Bmatrix}x+1=t\\dx=dt\end{Bmatrix}=$$
$$=\ln(x+1)+\frac{1}{t}+C=\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}+C$$

2.7. $\int \frac{x^2dx}{1+x^6}$ функциясын интегралдоо үчүн бөлүмүнүн бир бөлүгүн башка өзгөрмө менен белгилеп алабыз. Көңүл буруу керек болгон жери, биз белгилеп алган бөлүктүн туундусу бөлчөктүн алымындагы дифференциалдан мурда турган көбөйтүндү менен кыскаруусу керек.

$$\int \frac{x^2dx}{1+x^6} = \begin{Bmatrix} x^3 = t \\ 3x^2dx = dt \end{Bmatrix} = \int \frac{x^2 \frac{dt}{3x^2}}{1+t^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{3}arctgt + C =$$
$$= \frac{1}{3}arctgx^3 + C$$

2.8. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$ функциясын интегралдоо үчүн тамыр астында турган туюнтманы башка өзгөрмө менен белгилеп алуу керек.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \begin{Bmatrix} x^2+1 = t \\ 2xdx = dt \end{Bmatrix} = \int \frac{x\frac{dt}{2x}}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2+1} + C$$

2.9. $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$ функциясын интегралдоодо 2-касиеттен пайдаланабыз:

$$\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx = \int \frac{\sqrt{x}}{x}dx + \int \frac{\ln x}{x}dx$$

Биринчи кошулуучуну кыскартсак интегралданууучу түргө келет. Экинчи кошулуучуну интегралдоо үчүн бөлчөктүн бөлүмүндө турган туюнтманы дифференциалдын ичине кийирип жиберүү керек.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x}dx + \int \frac{\ln x}{x}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int \ln x\, d(\ln x) = 2\sqrt{x} + \frac{ln^2 x}{2} + C$$

2.10. $\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}} = \sqrt{8}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{7}{8}+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{8}}\ln\left|x + \sqrt{\frac{7}{8}+x^2}\right| + C$$

2.11. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}} = \sqrt{5}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{7}{5}-x^2}} = -\sqrt{5}\ln\left|x + \sqrt{x^2-\frac{7}{5}}\right| + C$$

2.12. $\int \frac{xdx}{2x^2+3}$

$$\int \frac{xdx}{2x^2+3} = \begin{Bmatrix} t = 2x^2+3 \\ dt = 4xdx \end{Bmatrix} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\ln(2x^2+3) + C = \ln\sqrt[4]{2x^2+3} + C$$

2.13. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^4-x^4}}$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^4-x^4}} = \begin{Bmatrix} t = x^2 \\ dt = 2xdx \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{a^4-t^2}} = \frac{1}{2}\ln\left|t + \sqrt{a^4-t^2}\right| + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|t + \sqrt{a^4-x^4}\right| + C = \ln\sqrt{t + \sqrt{a^4-x^4}} + C$$

2.14. $\int \frac{x^3dx}{1+x^2}$ бул туюнтманы интегралдоо үчүн алгебра курсунун көп мүчөнү көп мүчөгө бөлүү теориясынан пайдаланабыз.

$$\int \frac{x^3dx}{1+x^2} = \int \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx = \int xdx - \int \frac{xdx}{1+x^2} =$$
$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C = \frac{x^2}{2} - \ln\sqrt{1+x^2} + C = \frac{x^2}{2} + \ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

2.15. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-1}}$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-1}} = \begin{Bmatrix} t = x^3 \\ dt = 3x^2dx \end{Bmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \frac{1}{3}\ln\left|t + \sqrt{t^2-1}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|x^3 + \sqrt{x^6 - 1}\right| + C$$

2.16. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$ функциясын интегралдоодо бөлчөктүн бөлүмүндөгү туюнтманы дифференциал ичине кийирип жиберүү керек.

$$\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx = \int \sqrt{\arcsin x}\, d(\arcsin x) = \frac{2}{3}\arcsin^{\frac{3}{2}} x + C$$

2.17. $\int \frac{arctg\,\frac{x}{2}}{4+x^2}dx$ бул учурда да жогорку мисал сыяктуу эле бөлчөктүн бөлүмүндөгү туюнтманы дифференциал ичине кийирүү керек.

$$\int \frac{arctg\,\frac{x}{2}}{4+x^2}dx = 2\int arctg\,\frac{x}{2} d\left(arctg\,\frac{x}{2}\right) = 2arctg^2\frac{x}{2} + C$$

2.18. $\int e^{-(x^2+1)}xdx$ функциясын интегралдоодо даражадагы туюнтманы башка өзгөрмө менен белгилеп алабыз.

$$\int e^{-(x^2+1)}xdx = \begin{Bmatrix} x^2+1=t \\ dt = 2xdx \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\int e^{-t}dt = -\frac{1}{2}e^{-t} + C =$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-(x^2+1)} + C$$

2.19. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$ бул мисал да жогорку мисал сыяктуу эле чыгарылат.

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = \begin{Bmatrix} \frac{1}{x} = t \\ dt = -\frac{1}{x^2}dx \end{Bmatrix} = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\frac{1}{x}} + C$$

2.20. $\int \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

$$\int \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \begin{Bmatrix} \sqrt{x} = t \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \end{Bmatrix} = 2\int 5^t dt = 2\frac{5^t}{\ln 5} + C = 2\frac{5^{\sqrt{x}}}{\ln 5} + C$$

2.21. $\int \frac{e^x}{e^x - 1}dx$

$$\int \frac{e^x}{e^x-1}dx = \begin{Bmatrix} e^x - 1 = t \\ e^x dx = dt \end{Bmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(e^x - 1) + C$$

2.22. $\int \cos\sqrt{x}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ бул функцияны интегралдоодо тригонометриялык функциянын аргументин башка өзгөрмө менен белгилеп, дифференциялды жаңы өзгөрмө аркылуу туюнтабыз.

$$\int \cos\sqrt{x}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \begin{Bmatrix} \sqrt{x} = t \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \end{Bmatrix} = 2\int \cos t\, dt = 2\sin t + C = 2\sin\sqrt{x} + C$$

2.23. $\int \sin(\lg x)\frac{dx}{x}$ бул учурда да жогорку 2.22-мисал сыяктуу тригонометриялык функциянын аргументин башка өзгөрмө менен белгилейбиз.

$$\int \sin(\lg x)\frac{dx}{x} = \begin{Bmatrix} \lg x = t \\ dt = \frac{dx}{x\ln 10} \end{Bmatrix} = \ln 10 \int \sin t\, dt = -\ln 10\cos t + C =$$
$$= -\ln 10\cos(\lg x) + C$$

2.24. $\int \frac{xdx}{cos^2 x^2}$ бул учурда да жогорку 2.22-мисал сыяктуу тригонометриялык функциянын аргументин башка өзгөрмө менен белгилейбиз.

$$\int \frac{xdx}{cos^2 x^2} = \begin{Bmatrix} x^2 = t \\ dt = 2xdx \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{2}tg\ t + C = \frac{1}{2}tg\ x^2 + C$$

2.25. $\int x\sin(1-x^2)\,dx$

$$\int x\sin(1-x^2)\,dx = \begin{Bmatrix} 1-x^2=t \\ dt=-2xdx \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2}\int \sin t\,dt = \frac{1}{2}\cos t + C =$$
$$= \frac{1}{2}\cos(1-x^2) + C$$

2.26. $\int tg\,x\,dx$ мындай түрдөгү функцияларды интегралдоодо негизги тригонометриялык теңдештиктерден пайдалануу керек.

$$\int tg\,x\,\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln(\cos x) + C$$

2.27. $\int ctg\,x\,\,dx$

$$\int ctg\,x\,\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln(\sin x) + C$$

2.28. $\int sin^3 6x\cos 6x\,\,dx$ бул түрдөгү функцияларды интегралдоодо кайсыл тригонометриялык функциянын даражасы бир болсо, ошону дифференциалдын ичине кийирүү керек.

$$\int sin^3 6x\cos 6x\,\,dx = \frac{1}{6}\int \sin^3 6x\,d(\sin 6x) = \frac{1}{24}\sin^4 6x + C$$

2.29. $\int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x}dx$ бул учурда бөлчөктүн бөлүмүн башка функция менен белгилеп алса да болот (а). Ошондой эле бөлчөктүн алымындагы туюнтманы дифференциал ичине кийирсе да болот (б). Экинчи учурда натыйжаны тригонометриялык функциянын аргументинин коэффициентине бөлүү керек.

$$\text{а)} \int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x}dx = \begin{Bmatrix} 3+\cos 3x = t \\ dt = -3\sin 3x\,dx \end{Bmatrix} = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{3}\ln(3+\cos 3x) + C$$
$$\text{б)} \int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{d(\cos 3x)}{3+\cos 3x} = -\frac{1}{3}\ln(3+\cos 3x) + C$$

2.30. $\int \frac{\sqrt{tg\,x}}{\cos^2 x}dx$ бул функциянын бөлүмүндөгү туюнтма алымындагы тамыр астындагы туюнтманын туундусуна барабар болгондуктан бөлүмүн дифференциал ичине кийирүү же $tg\,x = t$ деп белгилеп алуу керек. Эки учурда тең натыйжа бирдей болот.

$$1)\ \int \frac{\sqrt{tg\,x}}{\cos^2 x}dx = \begin{Bmatrix} tg\,x = t \\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{Bmatrix} = \int \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}tg^{\frac{3}{2}}x + C$$
$$2)\ \int \frac{\sqrt{tg\,x}}{\cos^2 x}dx = \int \sqrt{tg\,x}d(tg\,x) = \int \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}tg^{\frac{3}{2}}x + C$$

2.31. $\int \frac{ctg^{\frac{2}{3}}x}{sin^2 x}dx$

$$\int \frac{ctg^{\frac{2}{3}}x}{sin^2 x}dx = \begin{Bmatrix} ctg\,x = t \\ dt = -\dfrac{dx}{\sin^2 x} \end{Bmatrix} = -\int t^{\frac{2}{3}}dt = -\frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}} + C = -\frac{3}{5}ctg^{\frac{5}{3}}x + C$$

2.32. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+8}}$ бул интегралды чыгаруу үчүн толук квадратты бөлүп алуу методунан пайдаланабыз.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+1+4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+7}} =$$
$$= \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+7}} = \ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+7}\right| + C$$

Тема3: Бөлүктөп интегралдоо.

3.1. $\int e^x\cos x\,dx$, 3.2. $\int \ln x\,dx$, 3.3. $\int x\ln(x-1)\,dx$,
3.4. $\int(5x+6)\cos 2x\,dx$; 3.5. $\int x\,\,arctg\,x\,dx$, 3.6. $\int x\,e^{2x}dx$,
3.7. $\int e^x\sin x\,dx$, 3.8. $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$, 3.9. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$,
3.10. $\int \sqrt{1-x^2}dx$, 3.11. $\int \arcsin x\,dx$, 3.12. $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$,
3.13. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$, 3.14. $\int (\ln x)^2\,dx$, 3.15. $\int \frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{1+x}}$,
3.16. $\int \frac{x}{e^x}dx$, 3.17. $\int \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$, 3.18. $\int x\,2^{-x}dx$,

3.19. $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$, 3.20. $\int x\sin x\,dx$

Чыгаруу:

Бул мисалдарды чыгарууда $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ формуласы колдонулат. Бул формула көбөйтүндүнү дифференцирлөөнүн натыйжасында алынган.

$$d(uv) = du\cdot v + dv\cdot u$$

Барабардыктагы бардык кошулуучуларды интегралдасак

$$\int d(uv) = \int du\cdot v + \int dv\cdot u$$

барабардыгы келип чыгат. Муну

$$\int d(uv) = \int vdu + \int udv$$

көрүнүшүндө жазуу туура болот. Андан кийин анык эмес интегралдардын касиеттери боюнча

$$uv = \int vdu + \int udv$$

болот. Барабардыктагы интеграл астында турган туюнтмалардын бирин башкалары аркылуу туюнтуп алсак, анда

$$\int vdu = uv - \int udv \text{ же } \int udv = uv - \int vdu$$

формулалары келип чыгат. Акыркы барабардыктардын жардамында функцияларды бөлүктөп интегралдоого болот. Адатта алардын бири дифференцирленүүчү, экинчиси интегралдануучу болушу керек.

Эскертүү: бул функциялардын бири сөзсүз интегралдануучу экинчиси сөзсүз дифференцирленүүчү болушу керек. Көпчүлүк учурларда дифференцирленүүчү функция *u* деп, интегралдануучусу *dv* деп белгиленет.

3.1. $\int e^x\cos x\,dx$

$$\int e^x\cos x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = e^x & du = e^x dx \\ dv = \cos x\,dx & v = \sin x\,dx\end{matrix}\right\} =$$

$$= e^x\sin x - \int e^x\sin x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = \sin x & du = \cos x\,dx \\ dv = e^x dx & v = e^x\end{matrix}\right\} == e^x\sin x + e^x\cos x - \int e^x\cos x\,dx$$

Демек, $\int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x + e^x\cos x - \int e^x\cos x\,dx$ болгондуктан, интегралдарды барабардыктын бир жагына топтоштурабыз:

$$2\int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x + e^x\cos x + C$$

Акыркы барабардыктын эки жагын тең 2 ге бөлүп:

$$\int e^x\cos x\,dx = \frac{e^x\sin x + e^x\cos x}{2} + C$$

барабардыгын алабыз. Бул барабардык бизге берилген туюнтманын интегралы болот.

3.2. $\int \ln x\,dx$

$$\int \ln x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ dx = dv & x = v\end{matrix}\right\} = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C$$

3.3. $\int x\ln(x-1)\,dx$

$$\int x\ln(x-1)\,dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln(x-1) & du = \frac{1}{x-1}dx \\ dv = xdx & v = \frac{x^2}{2}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{x^2\ln(x-1)}{2} - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x-1}dx = \frac{x^2\ln(x-1)}{2} - \frac{1}{2}\int\frac{x^2-1+1}{x-1}dx =$$

$$= \frac{x^2\ln(x-1)}{2} - \frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x-1}dx - \frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}dx =$$

$$= \frac{x^2\ln(x-1)}{2} - \frac{1}{2}\int(x+1)dx - \frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}dx =$$

$$= \frac{x^2 \ln(x-1)}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|x-1| + C =$$

$$= \frac{x^2 \ln(x-1)}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|x-1| + C$$

3.4. $\int (5x+6) \cos 2x \, dx$

$$\int (5x+6)\cos 2x \, dx = \begin{Bmatrix} u = 5x+6 & du = 5dx \\ \cos 2x \, dx = dv & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}(5x+6)\sin 2x - \int \frac{5}{2}\sin 2x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}(5x+6)\sin 2x + \frac{5}{4}\cos 2x + C$$

3.5. $\int x \ arctg \ x \, dx$

$$\int x \ arctg \ x \, dx = \begin{Bmatrix} u = arctg \ x & du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ xdx = dv & v = \dfrac{x^2}{2} \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{x^2}{2} arctg \ x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2} arctg \ x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} arctg \ x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} arctg \ x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} arctgx + C$$

3.6. $\int x \, e^{2x} dx$

$$\int x \, e^{2x} dx = \begin{Bmatrix} u = x & du = dx \\ e^{2x}dx = dv & \frac{1}{2}e^{2x} = v \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x} \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

3.7. $\int e^x \sin x \, dx$

$$\int e^x \sin x \, dx = \begin{Bmatrix} u = e^x & du = e^x dx \\ \sin x \, dx = dv & v = -\cos x \end{Bmatrix} =$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx = \begin{Bmatrix} u = e^x & du = e^x dx \\ \cos x \, dx = dv & v = \sin x \end{Bmatrix} =$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

болгондуктан 3.1. мисал сыяктуу

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + \mathrm{C}$$

3.8. $\int \frac{x \, dx}{\sin^2 x}$

$$\int \frac{x \, dx}{\sin^2 x} = \begin{Bmatrix} u = x & du = dx \\ \dfrac{dx}{\sin^2 x} = dv & v = -ctg \ x \end{Bmatrix} = -x \ ctgx + \int ctgx \, dx =$$

$$= -x \ ctgx + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = -x \ ctg \ x + \ln|\sin x| + C$$

3.9. $\int \frac{x \, dx}{\cos^2 x}$

$$\int \frac{x \, dx}{\cos^2 x} = \begin{Bmatrix} u = x & du = dx \\ \dfrac{dx}{\cos^2 x} = dv & v = tg \ x \end{Bmatrix} = xtgx - \int tgxdx =$$

$$= xtgx - \ln|\cos x| + C$$

3.10. $\int \sqrt{1-x^2}dx$

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \begin{Bmatrix} u = \sqrt{1-x^2} & du = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dx = dv & x = v \end{Bmatrix} =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} + \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - \int \sqrt{1-x^2}dx$$

$\int \sqrt{1-x^2}dx = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - \int \sqrt{1-x^2}dx$ болгондуктан

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + \mathrm{C}$$

3.11. $\int \arcsin x \, dx$

$$\int \arcsin x \, dx = \begin{Bmatrix} u = \arcsin x & du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dx = dv & x = v \end{Bmatrix} =$$

$$= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{Bmatrix} 1-x^2 = t \\ dt = -2xdx \\ dx = -\dfrac{dt}{2x} \end{Bmatrix} =$$

$$= x \arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = x \arcsin x + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C == x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

3.12. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$

$$\int \frac{\ln x}{x^3} dx = \begin{Bmatrix} u = \ln x & du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = \dfrac{dx}{x^3} & v = -\dfrac{1}{2x^2} \end{Bmatrix} = -\frac{\ln x}{2x^2} + \int \frac{1}{2x^2} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$$

3.13. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \begin{Bmatrix} u = \ln x & du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = \dfrac{dx}{\sqrt{x}} & v = 2\sqrt{x} \end{Bmatrix} = 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \frac{\sqrt{x}}{x}dx =$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C$$

3.14. $\int (\ln x)^2 \, dx$

$$\int (\ln x)^2 \, dx = \begin{Bmatrix} u = \ln^2 x & du = 2\ln x \, \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{Bmatrix} = x\ln^2 x - 2\int x \ln x \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= x\ln^2 x - 2\int \ln x \, dx = \begin{Bmatrix} u = \ln x & du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = dx & v = x \end{Bmatrix} =$$

$$= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2\int dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$$

3.15. $\int \frac{\arcsin x \, dx}{\sqrt{1+x}}$

$$\int \frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{1+x}} = \left\{\begin{matrix} u = \arcsin x & du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = \dfrac{dx}{\sqrt{1+x}} & v = 2\sqrt{1+x} \end{matrix}\right\} =$$
$$= 2\sqrt{1+x}\arcsin x - 2\int \frac{\sqrt{1+x}dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= 2\sqrt{1+x}\arcsin x - 2\int \frac{\sqrt{1+x}dx}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} =$$
$$= 2\sqrt{1+x}\arcsin x - 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2\sqrt{1+x}\arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C$$

3.16. $\int \frac{x}{e^x} dx$

$$\int \frac{x}{e^x} dx = \left\{\begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \dfrac{dx}{e^x} & v = -e^{-x} \end{matrix}\right\} = -\frac{x}{e^x} + \int \frac{dx}{e^x} = -\frac{x}{e^x} - e^{-x} + C$$

3.17. $\int \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$

$$\int \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx = \left\{\begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \dfrac{\sin x\,dx}{\cos^2 x} & v = -\dfrac{1}{\cos x} \end{matrix}\right\} = -\frac{x}{\cos x} + \int \frac{dx}{\cos x} =$$
$$= -\frac{x}{\cos x} + \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

3.18. $\int x\, 2^{-x} dx$

$$\int x\, 2^{-x} dx = \left\{\begin{matrix} u = x & du = dx \\ 2^{-x}dx = dv & v = \dfrac{-2^{-x}}{\ln 2} \end{matrix}\right\} = \frac{-2^{-x}}{\ln 2}x + \frac{1}{\ln 2}\int 2^{-x} dx =$$
$$= \frac{-2^{-x}}{\ln 2}x - \frac{-2^{-x}}{(\ln 2)^2} + C$$

3.19. $\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx$

$$\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx = \left\{\begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \dfrac{\cos x\,dx}{\sin^2 x} & v = \dfrac{1}{\sin x} \end{matrix}\right\} = \frac{x}{\sin x} - \int \frac{dx}{\sin x} =$$
$$= \frac{x}{\sin x} - \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$$

3.20. $\int x \sin x\, dx$

$$\int x \sin x\, dx = \left\{\begin{matrix} u = x & du = dx \\ \sin x\, dx = dv & v = -\cos x \end{matrix}\right\} = -x\cos x + \int \cos x\, dx =$$
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

Тема4:Рационалдык функцияларды интегралдоо.

Рационалдык функциялардын эки түрү бар: алымындагы туюнтманын даражасы бөлүмүндөгү туюнтманын даражасынан кичине функциялар; алымындагы туюнтманын даражасы бөлүмүндөгү туюнтманын даражасынан чоң функциялар. Биринчи түрдөгү туюнтмаларды интегралдоодо төмөнкүдөй методдор колдонулат:

1) Эгерде алымындагы туюнтма бөлүмүндөгү туюнтманын туундусунан турактуу санга айырмаланса, анда бөлүмүн башка өзгөрмө менен белгилөө аркылуу интегралдоого болот;
2) Бөлчөктүн бөлүмүндөгү туюнтманын тамырлары чыныгы сандар болушса, анда бөлүмүн сызыктуу функциялардын көбөйтүндүсүнө ажыратып, бөлүмү сызыктуу функциялар болгон рационалдык функциялардын интегралдарынын суммасына келтирүүгө болот.
3) Бөлчөктүн бөлүмүндөгү туюнтманын тамырлары чыныгы сандар болушпаса, анда бөлүмүндөгү туюнтмадан толук квадратты бөлүп алып, анык эмес интегралдардын таблицасындагы (14-) же (16-) формулаларга келтирүүгө болот.

Ал эми, экинчи түрдөгү (алымындагы туюнтманын даражасы бөлүмүндөгү туюнтманын даражасынан чоң болгон) функцияларды интегралдоо үчүн алгебра курсундагы (көп мүчөнү көп мүчөгө бөлүү) усулдардын жардамында 1-түрдөгү функциялардын суммасына келтирип алууга болот.

4.1. $\int \frac{4x+6}{x^2+3x+2}dx$, 4.2. $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$, 4.3. $\int \frac{2x^4+5x^3+4x^2+5x+3}{2x^2+3x+1}dx$,

4.4. $\int \frac{x+2}{x^2+5x-6}dx$, 4.5. $\int \frac{x^3}{x-2}dx$, 4.6. $\int \frac{x^3}{x+3}dx$,

4.7. $\int \frac{x^4}{x^2+4}dx$, 4.8. $\int \frac{x^5}{x^3-8}dx$, 4.9. $\int \frac{dx}{(x+2)(x+3)}$,

4.10. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+3)}$, 4.11. $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx$, 4.12. $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}dx$,

4.13. $\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx$, 4.14. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}dx$, 4.15. $\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}dx$,

4.16. $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$, 4.17. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$, 4.18. $\int \frac{3x-2}{x^4-x^3}dx$,

4.19. $\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}dx$, 4.20. $\int \frac{400x-240}{100x^2-20x+17}dx$

4.21. $\int \frac{dx}{x^3+8}$, 4.22. $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$, 4.23. $\int \frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x+4}dx$,

4.24. $\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}dx$, 4.25. $\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3}dx$, 4.26. $\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^3}dx$,

4.27. $\int \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$, 4.28. $\int \frac{6x^2+10x+2}{2x^3+5x^2+2x}dx$.

Чыгаруу

4.1. $\int \frac{4x+6}{x^2+3x+2}dx$ бул функциянын алымындагы туюнтманын даражасы бөлүмүндөгү туюнтманын даражасынан кичине жана бөлүмүндөгү туюнтманын тамырлары чыныгы сандар. Ошондой эле, алымындагы туюнтма бөлүмүндөгү туюнтманын туундусуна барабар болгондуктан бөлүмүн башка өзгөрмө менен белгилеп алуу ыңгайлуу.

$$\int \frac{4x+6}{x^2+3x+2}dx = 2\int \frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx = \left\{ \begin{matrix} x^2+3x+2=t \\ (2x+3)dx=dt \\ dx=\dfrac{dt}{2x+3} \end{matrix} \right\} =$$

$$= 2\int \frac{(2x+3)\dfrac{dt}{2x+3}}{t} = 2\int \frac{dt}{t} = 2\ln|t| + C = 2\ln|x^2+2x+3| + C =$$
$$= \ln(x^2+2x+3)^2 + C$$

4.2. $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$ бул функцияда бөлчөктүн бөлүмүнүн тамырлары чыныгы сандар эмес. Ошондуктан бөлүмүнөн толук квадраты бөлүп алсак, анык эмес интег-ралдардын таблицасындагы (14-) формулага келет.

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C$$

4.3. $\int \frac{2x^4+5x^3+4x^2+5x+3}{2x^2+3x+1} dx$ Бул туюнтманы интегралдоодо жогорку алгебра курсунун көп мүчөнү көп мүчөгө бөлүү эрежесинен пайдаланабыз:

$$\begin{array}{r|l} -2x^4+5x^3+4x^2+5x+3 & 2x^2+3x+1 \\ \cline{2-2} \underline{2x^4+3x^3+x^2} & x^2+x \\ -2x^3+3x^2+5x+3 & \\ \underline{2x^3+3x^2+x} & \\ 4x+3 & \end{array}$$

Демек, интегралдануучу туюнтма:

$$\int \frac{2x^4+5x^3+4x^2+5x+3}{2x^2+3x+1} dx = \int \left(x^2+x+\frac{4x+3}{2x^2+3x+1}\right) dx$$

көрүнүшүнө келет. Бул туюнтманы интегралдоо үчүн 2-касиеттен пайдаланабыз:

$$\int \left(x^2+x+\frac{4x+3}{2x^2+3x+1}\right) dx = \int x^2 dx + \int x dx + \int \frac{4x+3}{2x^2+3x+1} dx$$

Ар бир кошулуучуну өзүнчө интегралдайбыз:

а) $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C_1$

б) $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C_2$

в) $\int \frac{4x+3}{2x^2+3x+1} dx = \left\{ \begin{array}{c} 2x^2+3x+1=t \\ (4x+3)dx = dt \\ dx = \frac{dt}{4x+3} \end{array} \right\} = \int \frac{(4x+3)\frac{dt}{4x+3}}{t} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C_3 =$

$$= \ln|2x^2+3x+1| + C_3$$

Акырында алынган натыйжаларды кошуп, берилген туюнтманын баштапкы функциясын табабыз. Мында $C_1 + C_2 + C_3 = C$ деп белгилесек анда:

$$\int \frac{2x^4+5x^3+4x^2+5x+3}{2x^2+3x+1} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \ln|2x^2+3x+1| + C$$

4.4. $\int \frac{x+2}{x^2+5x-6} dx$ бул туюнтманы интегралдоо үчүн бөлчөктүн бөлүмүндөгү көп мүчөнүн чыныгы тамырларын табып, көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз:

$$x^2+5x-6=0 => D = 25+24 = 1 => x_{1,2} = \frac{-5 \pm 7}{2} => x_1 = -6, x_2 = 1$$

$$x^2+5x+6 = (x+6)(x-1)$$

Демек,

$$\int \frac{x+2}{x^2+5x-6} dx = \int \frac{x+2}{(x+6)(x-1)} dx$$

Мындан кийин интегралдануучу туюнтманы бөлүмү сызыктуу болгон бөлчөктөрдүн суммасы түрүндө жазып алабыз:

$$\int \frac{x+2}{(x+6)(x-1)} dx = \int \frac{A}{x+6} dx + \int \frac{B}{x-1} dx$$

Барабардыктын оң жагындагы интеграл астында турган А жана В сандары белгисиз коэффициенттер. Аларды аныктап алуу үчүн пределдер теориясынан (а) жана сызыктуу теңдемелер системасынан (б) пайдаланса болот:

а) пределдер теориясынан пайдаланып белгисиз коэффициенттерди аныктоо. Бул методду колдонуу үчүн бөлчөктүн бөлүмүндөгү көп мүчөнүн тамырлары эселүү тамырлар болбошу шарт. Белгисиз коэффициентти аныктап алуу үчүн функциянын ошол коэффициенттин бөлүмүндөгү туюнтма менен болгон көбөйтүндүсүнүн, коэффициенттин бөлүмүн нөлгө айландыруучу өзгөрмөнүн маанисиндеги пределин эсептөө керек. Формула жалпы учурда

$$A_i = \lim_{x\to x_i} f(x)\cdot(x-x_i)$$

көрүнүшүндө болот. Демек,

$$A = \lim_{x\to -6}\frac{x+2}{x^2+5x-6}\cdot(x+6) = \lim_{x\to -6}\frac{x+2}{(x+6)(x-1)}(x+6) =$$

$$= \lim_{x\to -6}\frac{x+2}{x-1} = \frac{-6+2}{-6-1} = \frac{4}{7}$$

$$B = \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+5x-6}\cdot(x-1) = \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{(x+6)(x-1)}(x-1) =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+6} = \frac{1+2}{1+6} = \frac{3}{7}$$

б) Сызыктуу теңдемелер системасынан пайдаланып белгисиз коэффициенттерди аныктоо. Акыркы интегралдардын суммасын табуу үчүн аларды жалпы бөлүмгө келтирип, өзгөрмөнүн даражаларына карата топтоштурабыз:

$$\frac{x+2}{(x+6)(x-1)} = \frac{A}{x+6} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)}{(x+6)(x-1)} + \frac{B(x+6)}{(x+6)(x-1)}$$

Мындан кийин бөлчөктүн бөлүмүн карабайбыз. Алымын гана колдонууга болот. Барабардыктардын эки жагында тең бөлүмдөрү барабар болгондуктан алымдарын да барабар деп эсептейбиз.

$$A(x-1) + B(x+6) = x+2$$

$$Ax - A + Bx + 6B = x + 2$$

Акыркы барабардыкты өзгөрмөнүн даражаларына карата топтоштурсак

$$\begin{cases} Ax + Bx = x \\ 6B - A = 2 \end{cases}$$

Системадагы биринчи барабардыкты *x* ке бөлүп жиберсек

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 6B - A = 2 \end{cases}$$

сызыктуу теңдемелер системасы келип чыгат. Бул системаны чыгарып

$$\begin{cases} A = 1 - B \\ 6B - 1 + B = 2 \end{cases} => \begin{cases} A = 1 - B \\ 7B = 3 \end{cases} => \begin{cases} A = \frac{4}{7} \\ B = \frac{3}{7} \end{cases}$$

чечимдерин алабыз. Бул усулдун жардамында берилген функциядагы бөлчөктүн бөлүмүндөгү көп мүчөнүн тамырлары эселүү сандар болгон учурларда да коэффициенттерди аныктоого болот.
Коэффициенттерди акырында ордуна койсок:

$$\frac{4}{7}\int\frac{dx}{x+6} + \frac{3}{7}\int\frac{dx}{x-1} = \frac{4}{7}\ln|x+6| + \frac{3}{7}\ln|x-1| + C$$

Демек,

$$\int\frac{x+2}{x^2+5x-6}dx = \frac{4}{7}\ln|x+6| + \frac{3}{7}\ln|x-1| + C$$

4.5. $\int\frac{x^3}{x-2}dx$

$$\int\frac{x^3}{x-2}dx = \int\left(x^2 + 2x + 4 + \frac{2}{x-2}\right)dx =$$

$$= \int x^2dx + 2\int xdx + 4\int dx + 2\int\frac{dx}{x-2} = \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + 2\ln|x-2| + C =$$

$$= \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + \ln(x-2)^2 + C$$

4.6. $\int\frac{x^3}{x+3}dx$

$$\int\frac{x^3}{x+3}dx = \int\left(x^2 - 3x + 9 - \frac{27}{x+3}\right)dx =$$

$$= \int x^2dx - 3\int xdx + 9\int dx — 27\int \frac{dx}{x+3} =$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 9x - 27\ln|x+3| + C =$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 9x + \ln\frac{1}{(x+3)^{27}} + C$$

4.7. $\int \frac{x^4}{x^2+4}dx$

$$\int \frac{x^4}{x^2+4}dx = \int\left(x^2 - 4 + \frac{16}{x^2+4}\right)dx = \int x^2dx - 4\int dx + 16\int\frac{dx}{x^2+4} =$$
$$= \frac{x^3}{3} - 4x + 16\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2} + C = \frac{x^3}{3} - 4x + 8arctg\frac{x}{2} + C$$

4.8. $\int \frac{x^5}{x^3-8}dx$

$$\int \frac{x^5}{x^3-8}dx = \int\left(x^2 + \frac{8x^2}{x^3-8}\right)dx = \int x^2dx + 8\int\frac{x^2}{(x-2)(x^2+2x+2)}dx =$$
$$= \frac{x^3}{3} + 8\int f(x)dx$$

Барабардыктагы акыркы кошулуучуну төмөнкүдөй жол менен интегралдоого болот:

$$\int\frac{x^2}{(x-2)(x^2+2x+2)}dx = \int\frac{A}{x-2}dx + \int\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}dx$$

Белгисиз коэффициенттерди аныктап алуу үчүн:

$$A(x^2+2x+2) + (Bx+C)(x-2) = x^2$$
$$Ax^2 + 2Ax + 2A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C = x^2$$

Акыркы барабардыктан коэффициенттерди өзгөрмөнүн даражасына карата топтоштурабыз:

$$\begin{cases}(A+B)x^2 = x^2\\ 2A + 2B + C = 0\\ 2A - 2C = 0\end{cases}$$

Системадагы биринчи теңдемени x^2ка бөлүп жиберсе

$$\begin{cases}A + B = 1\\ 2A + 2B + C = 0\\ 2A - 2C = 0\end{cases}$$

болот. Бул системанын чечими: $A = -2,\ B = 3,\ C = -2$ болот. Демек,

$$\int f(x)dx = \int\frac{-2}{x-2}dx + \int\frac{3x-2}{x^2+2x+2}dx =$$
$$= -2\ln|x-2| + 3\int\frac{xdx}{(x+1)^2+1} - 2\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}$$

Мында

$$\int\frac{xdx}{(x+1)^2+1} = \int\frac{(x+1-1)dx}{(x+1)^2+1} = \int\frac{(x+1)dx}{(x+1)^2+1} - \int\frac{dx}{(x+1)^2+1} =$$
$$= \left\{\begin{matrix}(x+1)^2 = t\\ 2(x+1)dx = dt\\ dx = \dfrac{dx}{2(x+1)}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1} - \int\frac{dx}{(x+1)^2+1} =$$
$$= \frac{1}{2}arctg(x+1) - arctg(x+1) + C_1 = -\frac{1}{2}arctg(x+1) + C_1$$
$$\int\frac{dx}{(x+1)^2+1} = \left\{\begin{matrix}x+1 = t\\ dx = dt\end{matrix}\right\} = \int\frac{dt}{t^2+1} = arctgt + C_2 = arctg(x+1) + C_2$$

Акырында бардыгын ордуна койсок:

$$\int\frac{x^5}{x^3-8}dx = \frac{x^3}{3} + 8\left(-2\ln|x-2| - \frac{3}{2}arctg(x+1) - 2arctg(x+1)\right) + C =$$

$$=\frac{x^3}{3}-16\ln|x-2|-28arctg(x+1)+C$$

4.9. $\int\frac{dx}{(x+2)(x+3)}$

$$\int\frac{dx}{(x+2)(x+3)}=\int\frac{A}{x+2}dx+\int\frac{B}{x+3}dx$$

$$A=\lim_{x\to-2}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{-2+3}=1$$

$$B=\lim_{x\to-3}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{-3+2}=-1$$

$$\int\frac{1}{x+2}dx-\int\frac{1}{x+3}dx=\ln|x+2|-\ln|x+3|+C=\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|+C$$

$$\int\frac{dx}{(x+2)(x+3)}=\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|+C$$

4.10. $\int\frac{dx}{(x+1)(x+3)}$

$$\int\frac{dx}{(x+1)(x+3)}=\int\frac{A}{x+1}dx+\int\frac{B}{x+3}dx$$

$$A=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{-1+3}=\frac{1}{2}$$

$$B=\lim_{x\to-3}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{-3+1}=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+3}dx=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x+3|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|+C=\ln\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}+C$$

$$\int\frac{dx}{(x+1)(x+3)}=\ln\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}+C$$

4.11. $\int\frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx$

$$\int\frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx=\int\frac{A}{x-2}dx+\int\frac{B}{x-3}dx=I$$

$$A=\lim_{x\to2}\frac{x-4}{x-3}=\frac{-2}{2-3}=2$$

$$B=\lim_{x\to3}\frac{x-4}{x-2}=\frac{-1}{3-2}=-1$$

$$I=\int\frac{2}{x-2}dx-\int\frac{1}{x-3}dx=2\ln|x-2|-\ln|x-3|+C=$$

$$=\ln(x-2)^2-\ln|x-3|+C=\ln\left|\frac{(x-2)^2}{x-3}\right|+C$$

$$\int\frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx=\ln\left|\frac{(x-2)^2}{x-3}\right|+C$$

4.12. $\int\frac{2x+7}{x^2+x-2}dx=I$

$$D=1^2+4\cdot2=9$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm3}{2},x_1=-2,x_2=1$$

$$\int\frac{2x+7}{(x+2)(x-1)}dx=\int\frac{A}{x+2}dx-\int\frac{B}{x-1}dx=I$$

$$A=\lim_{x\to-2}\frac{2x+7}{(x+2)(x-1)}(x+2)=\frac{3}{-3}=-1$$

$$B=\lim_{x\to1}\frac{2x+7}{x+2}=\frac{9}{3}=3$$

$$I=-\ln|x+2|+3\ln|x-1|+C=\ln(x-1)^3-\ln|x+2|+C=$$

$$= \ln\left|\frac{(x-1)^3}{x+2}\right| + C$$

$$\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}dx = \ln\left|\frac{(x-1)^3}{x+2}\right| + C$$

4.13. $\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx$

$$\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx = \int \frac{3x^2+2x-3}{x(x-1)(x+1)}dx =$$

$$= \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{B}{x-1}dx + \int \frac{C}{x+1}dx = I$$

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2+2x-3}{x(x-1)(x+1)}x = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$B = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x-3}{x(x-1)(x+1)}(x-1) = \frac{2}{2} = 1$$

$$C = \lim_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-3}{x(x-1)(x+1)}(x+1) = \frac{-2}{2} = -1$$

$$I = 3\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1} = \ln x^3 + \ln|x-1| - \ln|x+1| + C == \ln\left|\frac{x^3(x-1)}{x+1}\right| + C$$

$$\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx = \ln\left|\frac{x^3(x-1)}{x+1}\right| + C$$

4.14. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}dx$

$$\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}dx = \int \frac{x+2}{x^2(x-2)}dx = \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{B}{x^2}dx + \int \frac{C}{x-2}dx = I$$

$$Ax^2 - 2Ax + Bx - 2B + Cx^2 = x + 2$$

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ -2A + B = 1 \\ -2B = 2 \end{cases} => \begin{cases} A + C = 0 \\ -2A = 2 \\ B = -1 \end{cases} => \begin{cases} C = 1 \\ A = -1 \\ B = -1 \end{cases}$$

$$I = -\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x-2} = -\ln x + \frac{1}{x} + \ln|x-2| + C = \ln\left|\frac{x-2}{x}\right| + \frac{1}{x} + C$$

$$\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}dx = \ln\left|\frac{x-2}{x}\right| + \frac{1}{x} + C$$

4.15. $\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}dx$

$$\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}dx = \int \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x(x-1)}dx = \int \left(x + 4 + \frac{7x+1}{x(x-1)}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{7x+1}{x(x-1)}dx = \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{B}{x-1}dx = I$$

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{7x+1}{x(x-1)}x = \frac{1}{-1} = -1$$

$$B = \lim_{x\to 1}\frac{7x+1}{x(x-1)}(x-1) = \frac{8}{1} = 8$$

$$I = \frac{x^2}{2} + 4x - \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{8}{x-1}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 4x - \ln|x| + 8\ln|x-1| + C = \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\left|\frac{(x-1)^8}{x}\right| + C$$

$$\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}dx = \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\left|\frac{(x-1)^8}{x}\right| + C$$

4.16. $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$

$$\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx = \int \left(5 - \frac{25x^2-20x+2}{x(x^2-5x+4)}\right)dx =$$

$$= \int \left(5 - \frac{25x^2-20x+2}{x(x-1)(x-4)}\right)dx =$$

$$= 5\int dx + \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{B}{x-1}dx + \int \frac{C}{x-4}dx = 5x + I$$

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{25x^2-20x+2}{x(x-1)(x-4)}x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$B = \lim_{x\to 1}\frac{25x^2-20x+2}{x(x-1)(x-4)}(x-1) = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}$$

$$C=\lim_{x\to 4}\frac{25x^2-20x+2}{x(x-1)(x-4)}(x-4)=\frac{322}{12}=\frac{161}{6}$$
$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}-\frac{7}{3}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{161}{6}\int\frac{dx}{x-4}=$$
$$=\frac{1}{2}\ln x-\frac{7}{3}\ln|x-1|+\frac{161}{6}\ln|x-4|+C$$
$$\int\frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx=5x+\frac{1}{2}\ln x-\frac{7}{3}\ln|x-1|+\frac{161}{6}\ln|x-4|+C$$

4.17. $\int\frac{dx}{x(x+1)^2}$ бул функцияда бөлчөктүн бөлүмүнүн тамырлары эселүү болушат.

$$\int\frac{dx}{x(x+1)^2}=\int\frac{A}{x}dx+\int\frac{B}{x+1}dx+\int\frac{C}{(x+1)^2}=I$$
$$Ax^2+2Ax+A+Bx^2+Bx+Cx=1$$
$$\begin{cases}A+B=0\\2A+B+C=0\\A=1\end{cases}=>\begin{cases}B=-1\\2A+B+C=0\\A=1\end{cases}=>\begin{cases}B=-1\\C=-1\\A=1\end{cases}$$
$$I=\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C$$
$$\int\frac{dx}{x(x+1)^2}=\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C$$

4.18. $\int\frac{3x-2}{x^4-x^3}dx$

$$\int\frac{3x-2}{x^4-x^3}dx=\int\frac{3x-2}{x^3(x-1)}dx=\int\frac{A}{x}dx+\int\frac{B}{x^2}dx+\int\frac{C}{x^3}dx+\int\frac{D}{x-1}dx=I$$
$$Ax^3-Ax^2+Bx^2-Bx+Cx-C+Dx^3=3x-2$$
$$\begin{cases}A+D=0\\-A+B=0\\-B+C=3\\C=2\end{cases}=>\begin{cases}D=1\\A=-1\\B=-1\\C=2\end{cases}$$
$$I=-\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\ln|x-1|+C=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+C$$
$$\int\frac{3x-2}{x^4-x^3}dx=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+C$$

4.19. $\int\frac{5x+2}{x^2+2x+10}dx$

$$\int\frac{5x+2}{x^2+2x+10}dx=\int\frac{5x+2+3-3}{x^2+2x+10}dx=$$
$$=\int\frac{5x+5}{x^2+2x+10}dx-\int\frac{3}{x^2+2x+10}dx=$$
$$=\frac{5}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+10}dx-3\int\frac{dx}{(x+1)^2+9}=$$
$$=\frac{5}{2}\ln|x^2+2x+10|-arctg\frac{x+1}{3}+C$$

4.20. $\int\frac{400x-240}{100x^2-20x+17}dx$

$$\int\frac{400x-240}{100x^2-20x+17}dx=\int\frac{400x-40-200}{100x^2-20x+17}dx=$$
$$=2\int\frac{200x-20}{100x^2-20x+17}dx-200\int\frac{dx}{100x^2-20x+17}=$$
$$=2\ln|100x^2-20x+17|-20\int\frac{dx}{(10x-1)^2+16}=$$
$$=2\ln|100x^2-20x+17|-5arctg\frac{10x-1}{4}+C$$

4.21. $\int\frac{dx}{x^3+8}$

$$\int\frac{dx}{x^3+8}=\int\frac{dx}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\int\frac{A}{x+2}dx+\int\frac{Bx+C}{x^2-2x+4}dx=I$$
$$Ax^2-2Ax+4A+Bx^2+2Bx+Cx+2C=1$$
$$\begin{cases}A+B=0\\-2A+2B+C=0\\4A+2C=1\end{cases}=>\begin{cases}A+B=0\\-2A+2B+C=0\\2A+C=1\end{cases}=>\begin{cases}B=-A\\-2A+2B+C=0\\C=1-2A\end{cases}=>$$
$$=>\begin{cases}B=-A\\-2A-2A+1-2A=0\\C=1-2A\end{cases}=>\begin{cases}B=-A\\6A=1\\C=1-2A\end{cases}=>\begin{cases}B=-\frac{1}{6}\\A=\frac{1}{6}\\C=\frac{2}{3}\end{cases}$$

$$I=\int\frac{\frac{1}{6}dx}{x+2}-\int\frac{\frac{1}{6}x-\frac{2}{3}}{x^2-2x+4}dx=\frac{1}{6}\ln|x+2|-\frac{1}{6}\int\frac{x-4}{x^2-2x+4}dx=$$
$$=\ln\sqrt[6]{x+2}-\frac{1}{6}\int\frac{x-1-3}{x^2-2x+4}dx=$$
$$=\ln\sqrt[6]{x+2}-\frac{1}{6}\int\frac{x-1}{x^2-2x+4}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2-2x+4}dx=I$$

Келип чыккан интегралдык суммадагы экинчи кошулуучуну бөлүмүн башка өзгөрмө менен белгилөө аркылуу, үчүнчү кошулуучуну толук квадратты бөлүп алуу аркылуу интегралдайбыз:

$$\int\frac{x-1}{x^2-2x+4}dx=\begin{Bmatrix}x^2-2x+4=t\\(2x-2)dx=dt\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\int\frac{(x-1)\frac{dt}{x-1}}{t}=$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C_1=\ln\sqrt{t}+C_1=\ln\sqrt{x^2-2x+4}+C_1$$
$$\int\frac{1}{x^2-2x+4}dx=\int\frac{1}{x^2-2x+1+3}dx=\int\frac{1}{(x-1)^2+3}dx=$$
$$=\begin{Bmatrix}x-1=t\\dx=dt\end{Bmatrix}=\int\frac{dt}{t^2+\sqrt{3}^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}}+C_2=\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C_2$$
$$I=\ln\sqrt[6]{x+2}-\frac{1}{6}\ln\sqrt{x^2-2x+4}+\frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$$

4.22. $\int\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$

$$\int\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx=\int\frac{A}{x+1}dx+\int\frac{B}{(x+1)^2}dx+\int\frac{Cx+D}{x^2+1}dx=I$$
$$Ax^3+Ax+Ax^2+A+Bx^2+B+Cx^3+2Cx^2+Cx+Dx^2+2Dx+D=$$
$$=3x^2+2x+1$$
$$\begin{cases}A+C=0\\A+B+2C+D=3\\A+C+2D=2\\A+B+D=1\end{cases}=>\begin{cases}A=-C\\-C+B+2C+D=3\\-C+C+2D=2\\-C+B+D=1\end{cases}=>\begin{cases}A=-C\\2B=2\\D=1\\C=B\end{cases}=>\begin{cases}A=-1\\B=1\\D=1\\C=1\end{cases}$$
$$I=-\int\frac{1}{x+1}dx+\int\frac{1}{(x+1)^2}dx+\int\frac{x}{x^2+1}dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx=$$
$$=-\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+arctg\,x+C==\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}-\frac{1}{x+1}+arctg\,x+C$$
$$\int\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}-\frac{1}{x+1}+arctg\,x+C$$

4.23. $\int\frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x+4}dx$ бул туюнтманы интегралдоодон мурда алгебранын негизги теоремасынан пайдаланып үчүнчү даражадагы көп мүчөнү көбөйтүүчүлөргө ажыратып алуу керек:

$$\int\frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x+4}dx=\int\frac{2x^2+x+4}{(x+1)(x^2+4)}dx=\int\frac{A}{x+1}dx+\int\frac{Bx+C}{x^2+4}dx=I$$
$$Ax^2+4A+Bx^2+Bx+Cx+C=2x^2+x+4$$
$$\begin{cases}A+B=2\\B+C=1\\4A+C=4\end{cases}=>\begin{cases}A=2-B\\C=1-B\\8-4B+1-B=4\end{cases}=>\begin{cases}A=2-B\\C=1-B\\-5B=-5\end{cases}=>\begin{cases}A=1\\C=0\\B=1\end{cases}$$
$$I=\int\frac{1}{x+1}dx+\int\frac{x}{x^2+4}dx=\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x^2+4|+C==\ln\left|(x+1)\sqrt{x^2+4}\right|+C$$
$$\int\frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x+4}dx=\ln\left|(x+1)\sqrt{x^2+4}\right|+C$$

4.24. $\int\frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}dx$

$$\int\frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}dx=\int\frac{7x-15}{x(x^2-2x+5)}dx=\int\frac{A}{x}dx+\int\frac{Bx+C}{x^2-2x+5}dx=I$$
$$Ax^2-2Ax+5A+Bx^2+Cx=7x-15$$
$$\begin{cases}A+B=0\\-2A+C=7\\5A=-15\end{cases}=>\begin{cases}B=3\\C=1\\A=-3\end{cases}$$
$$I=-3\int\frac{dx}{x}+\int\frac{3x+1}{x^2-2x+5}dx=-3\int\frac{dx}{x}+\int\frac{3x-3+4}{x^2-2x+5}dx=$$
$$=-3\int\frac{dx}{x}+\int\frac{3x-3}{x^2-2x+5}dx++\int\frac{4}{x^2-2x+5}dx=$$
$$=-3\int\frac{dx}{x}+3\int\frac{x-1}{x^2-2x+5}dx+4\int\frac{1}{x^2-2x+5}dx=$$
$$=-3\ln|x|+\frac{3}{2}\ln|x^2-2x+5|+2arctg\,\frac{x-1}{2}+C=$$

$$= \ln\frac{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{x^3} + 2arctg\ \frac{x-1}{2} + C$$
$$\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}dx = \ln\frac{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{x^3} + 2arctg\ \frac{x-1}{2} + C$$

4.25. $\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3}dx$ бул функцияны интегралдоодо бөлчөктүн бөлүмүн башка өзгөрмө менен белгилеп алабыз. Андан кийин дифференциалды да ошол өзгөрмө менен туюнтуп алабыз. Кийин бардык белгилөөлөрдү тиешелеш түрдө орду-ордуларына коёбуз.

$$\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3}dx = \left\{\begin{matrix} x^2-3x+2=t \\ dt=(2x-3)dx \\ dx=\dfrac{dt}{2x-3} \end{matrix}\right\} =$$
$$= \int \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2} + C = -\frac{1}{2(x^2-3x+2)^2} + C$$

4.26. $\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^3}dx$

$$\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^3}dx = \left\{\begin{matrix} x^2+2x+3=t \\ dt=(2x+2)dx \\ dx=\dfrac{dt}{2x+2} \end{matrix}\right\} =$$
$$= \int \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2} + C = -\frac{1}{2(x^2+2x+3)^2} + C$$

4.27. $\int \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$ бул функцияны интегралдоодо бөлчөктүн бөлүмүн жаңы өзгөрмө менен белгилеп алабыз:

$$\int \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = \left\{\begin{matrix} 1+x^2=t \\ 2xdx=dt \\ dx=\dfrac{dt}{2x} \end{matrix}\right\} = \int \frac{x\frac{dt}{2x}}{t^2} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{t} + C =$$
$$= -\frac{1}{2(1+x^2)} + C$$

4.28. $\int \frac{6x^2+10x+2}{2x^3+5x^2+2x}dx$

$$\int \frac{6x^2+10x+2}{2x^3+5x^2+2x}dx = \left\{\begin{matrix} 2x^3+5x^2+2x=t \\ (6x^2+10x+2)dx=dt \\ dx=\dfrac{dt}{6x^2+10x+2} \end{matrix}\right\} = \int\frac{dt}{t} =$$
$$= \ln|6x^2+10x+2| + C$$

Тема5:Тригонометриялык функцияларды интегралдоо.

Тригонометриялык туюнтмаларды интегралдоодо төмөнкүлөргө көңүл буруу керек:

а) $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ түрүндөгү тригонометриялык туюнтмаларды интералдоо үчүн:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2};\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \sin x\cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

формулалары колдонулат;

б) $\int \sin nx \cos mx\, dx,\quad \int \cos nx \cos mx\, dx,\quad \int \sin nx \sin mx\, dx$ түрүндөгү туюнтмаларды интегралдоо үчүн:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)];$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)];$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \sin(\alpha+\beta)];$$

в) $\int R(\sin x, \cos x)dx$ түрүндөгү тригонометриялык туюнтмаларды интегралдоо үчүн $tg\frac{x}{2} = t$ ордуна коюусунан пайдаланса болот, анда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, x = 2arctg\ t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2};$$

г) $\int R(-\sin x, -\cos x)dx = \int R(\sin x, \cos x)dx$ түрүндөгү тригонометриялык туюнтмаларды интегралдоо үчүн $tgx = t$ ордуна коюусунан пайдаланса болот, анда

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ x = arctg\ t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Көнүгүүлөр.

5.1. $\int cos^2x\, sin^2x\, dx$
5.2. $\int cos^4x\, sin^3x\, dx$
5.3. $\int sin^2\frac{x}{2}dx$
5.4. $\int cos^2\frac{x}{2}dx$
5.5. $\int cos^3x\, dx$
5.6. $\int sin^5x\, dx$
5.7. $\int \sin^2 x\cos^3 x\, dx$
5.8. $\int \sin^3\frac{x}{2}\cos^5\frac{x}{2}dx$
5.9. $\int \sin^4 x\, dx$
5.10. $\int \sin^2\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}dx$
5.11. $\int \sin^2 x\cos^4 x\, dx$
5.12. $\int \cos^3 6x\, dx$
5.13. $\int \sin^3 x\cos^3 x\, dx$
5.14. $\int \cos^7 x\, dx$
5.15. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$
5.16. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$
5.17. $\int \sin^3 x\, dx$
5.18. $\int \cos^5 x\, dx$
5.19. $\int x\sin^2 x^2\, dx$
5.20. $\int e^x\cos^2 e^x\, dx$
5.21. $\int \sin 3x\sin 5x\, dx$
5.22. $\int \sin 2x\cos 4x\, dx$
5.23. $\int \sin 10x\sin 15x\, dx$
5.24. $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx$
5.25. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$
5.26. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$
5.27. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$
5.28. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$
5.29. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$
5.30. $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx$
5.31. $\int \frac{1+tg\, x}{1-tg\, x}dx$
5.32. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$
5.33. $\int tg^4\, x\, dx$
5.34. $\int ctg^4\, x\, dx$
5.35. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$
5.36. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$
5.37. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}$
5.38. $\int \frac{dx}{\sin^5 x\cos^3 x}$
5.39. $\int tg^2\, 5xdx$
5.40. $\int ctg^3\, x\, dx$

Чыгаруу

5.1. $\int cos^2x\, sin^2x\, dx$ функциясын интегралдоодо (а) формулалар колдонулат.

$$\int cos^2x\, sin^2x\, dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=$$
$$=\frac{1}{4}\int(1-\cos^2 2x)dx=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{8}x—\frac{1}{8}\int\cos 4x\, dx=$$
$$=\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+C$$

5.2. $\int cos^4x\, sin^3x\, dx$ бул функцияны интегралдоо үчүн даражасы так болгон туюнтманы көбөйтүүчүлөргө ажыратып, андан кийин биринчи даражада турган туюнтманы дифференциал ичине кийирип жиберебиз.

$$\int cos^4x\, sin^3x\, dx=\int\cos^4 x\sin^2 x\sin x\, dx=$$
$$=-\int\cos^4 x\,(1-\cos^2 x)d(\cos x)=\{\cos x=t\}=$$
$$=-\int(t^4-t^6)\,dt=-\frac{t^5}{5}+\frac{t^7}{7}+C=-\frac{\cos^5 x}{5}+\frac{\cos^7 x}{7}+C$$

5.3. $\int sin^2\frac{x}{2}dx$

$$\int sin^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1-\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C$$

5.4. $\int cos^2\frac{x}{2}dx$

$$\int cos^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1+\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sin x+C$$

5.5. $\int cos^3x\, dx$

$$\int cos^3x\, dx=\int\cos^2 x\cos x\, dx=\int(1-\sin^2 x)d(\sin x)=$$

$$= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

5.6. $\int sin^5 x\, dx$

$$\int sin^5 x\, dx = -\int (1 - cos^2 x)^2 d(cos\, x) = -\int (1 - 2\, cos^2 x + cos^4 x) d(cos\, x) =$$

$$= -cos\, x + \frac{2}{3} cos^3 x - \frac{1}{5} cos^5 x + C$$

5.7. $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx$

$$\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx = -\int \sin^2 x\, (1 - \sin^2 x) d(\sin x) =$$

$$= -\int (\sin^2 x - \sin^4 x) d(\sin x) = -\frac{1}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

5.8. $\int \sin^3 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2} dx$ тиргонометриялык функциялардын экөөнүн тең даражасы так болгон учурда даражасы кичинесин көбөйтүүчүлөргө ажыратып, биринчи даражада турган көбөйтүндүнү дифференциал ичине кийиребиз.

$$\int \sin^3 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2} dx = \int \cos^5 \frac{x}{2} \sin^3 \frac{x}{2} dx =$$

$$= -2\int \cos^5 \frac{x}{2}\left(1 - \cos^2 \frac{x}{2}\right) d\left(\cos \frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{3}\cos^6 \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\cos^8 \frac{x}{2} + C$$

5.9. $\int \sin^4 x\, dx$ бул функцияны интегралдоодо (а) формуланы эки ирет пайдаланабыз.

$$\int \sin^4 x\, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}}{4} dx =$$

$$= \int \frac{3 - 4\cos 2x + \cos 4x}{8} dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

5.10. $\int \sin^2 \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2} dx$

$$\int \sin^2 \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2} dx = \int \sin^2 \frac{x}{2}\left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right) \cos \frac{x}{2} dx =$$

$$= \int \sin^2 \frac{x}{2}\left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right) d\left(\sin \frac{x}{2}\right) =$$

$$= 2\int \left(\sin^2 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}\right) d\left(\sin \frac{x}{2}\right) = \frac{2\sin^3 \frac{x}{2}}{3} - \frac{2\sin^5 \frac{x}{2}}{5} + C$$

5.11. $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2}\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \frac{1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - \cos 2x) \cdot (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - \cos 2x + 2\cos 2x - 2\cos^2 2x + \cos^2 2x - \cos^3 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1 + \cos 2x - \frac{1 + \cos 4x}{2} - \cos^3 2x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{8}\int \cos^3 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{8}\int \cos^2 2x \cos 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{16}\int \cos^2 2x\, d(\sin 2x) =$$

$$=\frac{1}{8}x+\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{16}\int(1-\sin^2 2x)d(\sin 2x)=$$
$$=\frac{1}{8}x+\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C=$$
$$=\frac{1}{16}x-\frac{1}{32}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$$

5.12. $\int\cos^3 6x\,dx$

$$\int\cos^3 6x\,dx=\int\cos^2 6x\cos 6x\,dx=\frac{1}{6}\int\cos^2 6x\,d(\sin 6x)=$$
$$=\frac{1}{6}\int(1-\sin^2 6x)d(\sin 6x)=\frac{1}{6}\sin 6x-\frac{1}{18}\sin^3 6x+C$$

5.13. $\int\sin^3 x\cos^3 x\,dx$

$$\int\sin^3 x\cos^3 x\,dx=\int\sin^3 x\cos^2 x\cos x\,dx=\int\sin^3 x\cos^2 x\,d(\sin x)=$$
$$=\int\sin^3 x\,(1-\sin^2 x)\,d(\sin x)=\int(\sin^3 x-\sin^5 x)\,d(\sin x)==\frac{\sin^4 x}{4}-\frac{\sin^6 x}{6}+C$$

5.14. $\int\cos^7 x\,dx$

$$\int\cos^7 x\,dx=\int\cos^6 x\cos x\,dx=\int(\cos^2 x)^3\cos x\,dx=$$
$$=\int(1-\sin^2 x)^3\cos x\,dx=\int(1-3\sin^2 x+3\sin^4 x-\sin^6 x)d(\sin x)=$$
$$=\sin x-\sin^3 x+\frac{3}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C$$

5.15. $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$

$$\int\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{\cos^2 x\cos x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}d(\sin x)=$$
$$=\int\frac{1}{\sin^2 x}d(\sin x)-\int d(\sin x)=-\frac{1}{\sin x}-\sin x+C$$

5.16. $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x\sin x}{\cos^2 x}dx=-\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}d(\cos x)=$$
$$=-\int\frac{1}{\cos^2 x}d(\cos x)+\int d(\cos x)=\frac{1}{\cos x}+\cos x+C$$

5.17. $\int\sin^3 x\,dx$

$$\int\sin^3 x\,dx=\int\sin^2 x\sin x\,dx=-\int(1-\cos^2 x)d(\cos x)=$$
$$=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$$

5.18. $\int\cos^5 x\,dx$

$$\int\cos^5 x\,dx=\int\cos^4 x\cos x\,dx=$$
$$=\int(1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)=\int(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)d(\sin x)=$$
$$=\sin x-\frac{2}{3}\sin^2 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C$$

5.19. $\int x\sin^2 x^2\,dx$ бул функцияны интегралдоодо тригонометриялык функциянын аргументин башка өзгөрмө менен белгилейбиз.

$$\int x\sin^2 x^2\,dx=\left\{\begin{matrix}x^2=t\\2xdx=dt\\dx=\dfrac{dt}{2x}\end{matrix}\right\}=\int x\sin^2 t\,\frac{dt}{2x}=$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\sin 2t + C = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}\sin 2x^2 + C$$

5.20. $\int e^x \cos^2 e^x\,dx$

$$\int e^x \cos^2 e^x\,dx = \left\{\begin{matrix} e^x = t \\ e^x dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{e^x} \end{matrix}\right\} = \int \cos^2 t\,dt =$$

$$= \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{4}\sin 2e^x + C$$

5.21. $\int \sin 3x \sin 5x\ \ dx$ бул мисалды чыгарууда

$$\sin \alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \sin(\alpha+\beta)]$$

формуласынан пайдаланабыз:

$$\int \sin 3x \sin 5x\ \ dx = \frac{1}{2}\int(\cos(3x-5x) - \sin(3x+5x))dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int(\cos 2x - \sin 8x)dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{16}\cos 8x + C$$

5.22. $\int \sin 2x \cos 4x\,dx$ бул мисалды чыгарууда

$$\sin \alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$$

формуласынан пайдаланабыз:

$$\int \sin 2x \cos 4x\,dx = \frac{1}{2}\int(\sin(2x-4x) + \sin(2x+4x))dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int(-\sin 2x + \sin 6x)dx = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{12}\cos 6x + C$$

5.23. $\int \sin 10x \sin 15x\,dx$

$$\int \sin 10x \sin 15x\,dx = \frac{1}{2}\int(\cos(10x-15x) - \sin(10x+15x))dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int(\cos 5x - \sin 25x)dx = \frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{50}\cos 25x + C$$

5.24. $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx$ бул мисалды чыгарууда

$$\cos \alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

формуласынан пайдаланабыз:

$$\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx = \frac{1}{2}\int\left(\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{3}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{3}\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{x}{6} + \cos\frac{5x}{6}\right)dx = 3\sin\frac{x}{6} + \frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6} + C$$

5.25. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$ бул тригономериялык туюнтманы интегралдоодо $tg\frac{x}{2} = t$ ордуна коюусунан пайдалансак, анда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ болот:

$$\int \frac{dx}{1+\sin x\ +\cos x} = \int \frac{1}{1+\sin x\ +\cos x}dx =$$

$$= \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{\frac{1+t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{1}{\frac{1+t^2+2t+1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} == \int \frac{1+t^2}{1+t^2+2t+1-t^2}\frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{1+t^2}{2+2t}\frac{2dt}{1+t^2} == \int \frac{1}{2+2t}2dt = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + C = \ln\left|1+tg\frac{x}{2}\right| + C$$

5.26. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$ бул мисалды иштөөдө $tgx = t$ ордуна коюусунан пайдалансак, анда

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ \ dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

болот.

$$\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{1}{1+t^2}}=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+1}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{2+t^2}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+C=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right)+C$$

5.27. $\int\frac{dx}{3+5\cos x}$ бул мисалды чыгарууда $tg\frac{x}{2}=t$ ордуна коюусунан пайдаланабыз.

$$\int\frac{dx}{3+5\cos x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+5\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{1+t^2}\frac{1}{\frac{3+3t^2}{1+t^2}+\frac{5-5t^2}{1+t^2}}=$$
$$=\int\frac{1+t^2}{8-2t^2}\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{2dt}{8-2t^2}=\int\frac{dt}{4-t^2}=-\int\frac{dt}{t^2-4}=$$
$$=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-2}{tg\frac{x}{2}+2}\right|+C$$

5.28. $\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}$

$$\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1+2t-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{1+t^2}{1+2t-t^2}\frac{2dt}{1+t^2}=$$
$$=\int\frac{2dt}{1+2t-t^2}=-2\int\frac{dt}{t^2-2t+1-2}=-2\int\frac{dt}{(t-1)^2-2}=$$
$$=\left\{\begin{matrix}t-1=v\\dt=dv\end{matrix}\right\}=-2\int\frac{dv}{v^2-2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right|+C=$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-1-1}{t-1+1}\right|+C=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-2}{t}\right|+C=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|1-\frac{2}{t}\right|+C=$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|1-\frac{2}{tg\frac{x}{2}}\right|+C$$

5.29. $\int\frac{\cos x}{1+\cos x}dx$

$$\int\frac{\cos x}{1+\cos x}dx=\int\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{1-t^2}{1+t^2}\frac{1+t^2}{2}\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{1-t^2}{1+t^2}dt=$$
$$=-\int\frac{t^2-1}{t^2+1}dt=-\int\frac{t^2+1-2}{t^2+1}dt=-\int\left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)dt=$$
$$=-t+2arctgt+C=-tg\frac{x}{2}+2arctg\left(tg\frac{x}{2}\right)+C$$

5.30. $\int\frac{\sin x}{1-\sin x}dx$

$$\int\frac{\sin x}{1-\sin x}dx=\int\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{2t}{1+t^2}\frac{1+t^2}{1-2t+t^2}\frac{2dt}{1+t^2}=$$
$$=\int\frac{4tdt}{(1-t)^2(1+t^2)}=\int\left(\frac{A}{1-t}+\frac{B}{(1-t)^2}+\frac{Ct+D}{t^2+1}\right)dt$$
$$A(1-t)(t^2+1)+B(t^2+1)+(Ct+D)(1-2t+t^2)=4t$$
$$At^2+A-At^3-At+Bt^2+B+Ct-2Ct^2+Ct^3+D-2Dt+Dt^2=4t$$
$$\begin{cases}-A+C=0\\A+B-2C+D=0\\-A+C-2D=4\\A+B+D=0\end{cases}=>\begin{cases}A=C\\A+B-2C+D=0\\-2D=4\\A+B+D=0\end{cases}=>\begin{cases}A=C\\A+B-2C=2\\D=-2\\A+B=2\end{cases}=>$$
$$=>\begin{cases}A=C\\2-2C=2\\D=-2\\A=2-B\end{cases}=>\begin{cases}A=0\\C=0\\D=-2\\B=2\end{cases}$$
$$I=\int\left(\frac{2}{(1-t)^2}-\frac{2}{t^2+1}\right)dt=-2\frac{1}{1-t}-2arctgt+C==-2\frac{1}{1-tg\frac{x}{2}}-2arctg\left(tg\frac{x}{2}\right)+C$$
$$\int\frac{\sin x}{1-\sin x}dx=-2\frac{1}{1-tg\frac{x}{2}}-2arctg\left(tg\frac{x}{2}\right)+C$$

5.31. $\int\frac{1+tg\,x}{1-tg\,x}dx$

$$\int \frac{1+tg\,x}{1-tg\,x}dx = \int \frac{1+\frac{\sin x}{\cos x}}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}dx = \int \frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\frac{\cos x}{\cos x - \sin x}dx =$$

$$= \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{\frac{1-t^2+2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2-2t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{1-t^2+2t}{1+t^2}\frac{1+t^2}{1-t^2-2t}\frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= -2\int \frac{1-t^2+2t}{1+t^2}\frac{dt}{t^2+2t-1} = -2\int \frac{1-t^2+2t}{(1+t^2)(t^2+2t-1)}dt = -2I$$

$$I = \int \left(\frac{At+B}{1+t^2}+\frac{Ct+D}{t^2+2t-1}\right)dt$$

$$At^3+2At^2-At+Bt^2+2Bt-B+Ct+Ct^3+D+Dt^2 = -t^2+2t+1$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 2A+B+D=-1 \\ -A+2B+C=2 \\ -B+D=1 \end{cases} => \begin{cases} A=-C \\ 2A+B+D=-1 \\ -A+2B+C=2 \\ D=1+B \end{cases} => \begin{cases} A=-C \\ -2C+B+1+B=-1 \\ 2+2B+C=2 \\ D=1+B \end{cases} =>$$

$$=> \begin{cases} A=-C \\ -2C+2B=-2 \\ 2B+C=0 \\ D=1+B \end{cases} => \begin{cases} A=-C \\ B-C=-1 \\ 2B+C=0 \\ D=1+B \end{cases} => \begin{cases} A=-C \\ B=C-1 \\ 2B+C=0 \\ D=1+B \end{cases} =>$$

$$=> \begin{cases} A=-C \\ B=C-1 \\ C=\frac{2}{3} \\ D=1+B \end{cases} => \begin{cases} A=-\frac{2}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \\ C=\frac{2}{3} \\ D=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$I = \int \left(\frac{-\frac{2}{3}t-\frac{1}{3}}{1+t^2}+\frac{\frac{2}{3}t+\frac{2}{3}}{t^2+2t-1}\right)dt =$$

$$= -\frac{2}{3}\int \frac{t}{1+t^2}dt - \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+t^2}dt + \frac{2}{3}\int \frac{t+1}{t^2+2t-1}dt = I_1 - I_2 + I_3$$

$$I_1 = -\frac{2}{3}\int \frac{t}{1+t^2}dt = \begin{Bmatrix} 1+t^2=v \\ 2tdt=dv \\ dt=\frac{dv}{2t} \end{Bmatrix} = -\frac{1}{3}\int \frac{dv}{v} = -\frac{1}{3}\ln|v| + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|1+t^2| + C_1 = \ln\sqrt[3]{\frac{1}{1+t^2}} + C_1 = \ln\sqrt[3]{\frac{1}{1+tg^2\frac{x}{2}}} + C_1$$

$$I_2 = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{3}arctgt + C_2 = \frac{1}{3}arctg\left(tg\frac{x}{2}\right) + C_2$$

$$I_3 = \frac{2}{3}\int \frac{t+1}{t^2+2t-1}dt = \frac{2}{3}\int \frac{t+1}{t^2+2t+1-2}dt = \frac{2}{3}\int \frac{t+1}{(t+1)^2-2}dt =$$

$$= \begin{Bmatrix} t+1=z \\ dt=dz \end{Bmatrix} = \frac{2}{3}\int \frac{z}{z^2-2}dz = \begin{Bmatrix} z^2-2=w \\ 2zdz=dw \\ dz=\frac{dw}{2z} \end{Bmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{dw}{w} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|w| + C_3 = \frac{1}{3}\ln|z^2-2| + C_3 =$$

$$= \ln\sqrt[3]{z^2-2} + C_3 = \ln\sqrt[3]{(t+1)^2-2} + C_3 = \ln\sqrt[3]{t^2+2t-1} + C_3 == \ln\sqrt[3]{tg^2\frac{x}{2}+2tg\frac{x}{2}-1} + C_3$$

$$I = I_1 - I_2 + I_3 = \ln\sqrt[3]{\frac{1}{1+tg^2\frac{x}{2}}} + C_1 - \frac{1}{3}arctg\left(tg\frac{x}{2}\right) - C_2 +$$

$$+ \ln\sqrt[3]{tg^2\frac{x}{2}+2tg\frac{x}{2}-1} + C_3 =$$

$$= \ln\sqrt[3]{\frac{tg^2\frac{x}{2}+2tg\frac{x}{2}-1}{1+tg^2\frac{x}{2}}} - \frac{1}{3}arctg\left(tg\frac{x}{2}\right) + (C_1 - C_2 + C_2) =$$

$$= \ln \sqrt[3]{\frac{tg^2 \frac{x}{2} + 2tg\frac{x}{2} - 1}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}} - \frac{1}{3} arctg\left(tg\frac{x}{2}\right) + C$$

$$\int \frac{1 + tg\, x}{1 - tg\, x} dx = -2\ln \sqrt[3]{\frac{tg^2 \frac{x}{2} + 2tg\frac{x}{2} - 1}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}} + \frac{2}{3} arctg\left(tg\frac{x}{2}\right) + C$$

5.32. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$

$$\int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1 + 3\frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{4+t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2} arctg\frac{t}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{2} arctg\frac{tgx}{2} + C$$

5.33. $\int tg^4\, x\, dx$

$$\int tg^4\, x\, dx = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^4}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^4} \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^4 (1+t^2)^2 \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2t^4 dt}{1+t^2} = 2\int \frac{t^4 dt}{1+t^2} =$$

$$= 2\int \frac{t^4 dt}{1+t^2} = 2\int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right) dt =$$

$$= \frac{2}{3}t^3 - 2t + arctgt + C = \frac{2}{3}tg^3 x - 2tgx + arctg(tgx) + C$$

5.34. $\int ctg^4\, x\, dx$

$$\int ctg^4\, x\, dx = \int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^4}{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^4} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{t^4}\frac{dt}{1+t^2} = I$$

$$I = \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t^3} + \frac{D}{t^4} + \frac{Et + F}{1+t^2}\right) dt$$

$$At^5 + At^3 + Bt^2 + Bt^4 + Ct^3 + Ct + Dt^2 + D + Et^5 + Ft^4 = 1$$

$$\begin{cases} A + E = 0 \\ B + F = 0 \\ A + C = 0 \\ B + D = 0 \\ C = 0 \\ D = 1 \end{cases} => \begin{cases} E = 0 \\ F = 1 \\ A = 0 \\ B = -1 \\ C = 0 \\ D = 1 \end{cases}$$

$$I = \int \left(-\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^4} + \frac{1}{1+t^2}\right) dt = \frac{1}{t} - \frac{1}{3t^3} + arctgt + C == \frac{1}{tgx} - \frac{1}{3tg^3 x} + arctg(tgx) + C$$

$$\int ctg^4\, x\, dx = \frac{1}{tgx} - \frac{1}{3tg^3 x} + arctg(tgx) + C$$

5.35. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^4} = \int \frac{(1+t^2)^2 dt}{t^4(1+t^2)} = \int \frac{(1+t^2)dt}{t^4} = I$$

$$I = \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t^3} + \frac{D}{t^4}\right) dt$$

$$At^3 + Bt^2 + Ct + D = 1 + t^2 => \begin{cases} D = 1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$I = \int \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^4}\right) dt = -\frac{1}{t} - \frac{1}{3t^3} + C = -\frac{1}{tgx} - \frac{1}{3tg^3 x} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\frac{1}{tgx} - \frac{1}{3tg^3 x} + C$$

5.36. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$

$$\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^6} = \int \frac{(1+t^2)^3 dt}{1+t^2} = \int (1+t^2)^2 dt =$$

$$= \int (1 + 2t^2 + t^4)dt = t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C =$$
$$= tgx + \frac{2}{3}tg^3x + \frac{1}{5}tg^5x + C$$

5.37. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2(1+t^2)}{(1+t^2)^2}} = \int \frac{(1+t^2)^2 \frac{dt}{1+t^2}}{t^2(1+t^2)} =$$
$$= \int \frac{(1+t^2)^2 dt}{t^2} = \int \frac{(1+2t^2+t^4)dt}{t^2} =$$
$$= \int \left(\frac{1}{t^2} + 2 + t^2\right)dt = -\frac{1}{t} + 2t + \frac{t^3}{3} + C = -\frac{1}{tgx} + 2tgx + \frac{tg^3x}{3} + C$$

5.38. $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x}$

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^5 \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^3} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^5}{(1+t^2)^4}} =$$
$$= \int \frac{(1+t^2)^3 dt}{t^5} = \int \frac{(1+3t^2+3t^4+t^6)dt}{t^5} =$$
$$= \int \frac{dt}{t^5} + 3\int \frac{dt}{t^3} + 3\int \frac{dt}{t} + \int tdt = -\frac{1}{4t^4} - \frac{3}{2t^2} + 3\ln|t| + \frac{t^2}{2} + C =$$
$$= -\frac{1}{4tg^4t} - \frac{3}{2tg^2t} + \ln(tg^3t) + \frac{tg^2t}{2} + C$$

5.39. $\int tg^2\, 5xdx$

$$\int tg^2\, 5xdx = \int \frac{\sin^2 5x}{\cos^2 5x}dx = \int \frac{1-\cos^2 5x}{\cos^2 5x}dx = \frac{1}{5}tg5x - x + C$$

5.40. $\int ctg^3\, x\, dx$

$$\int ctg^3\, x\, dx = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}dx = \int \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^3}{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^3}\frac{dt}{1+t^2} = \int \left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t\sqrt{1+t^2}}\right)^3 \frac{dt}{1+t^2} =$$
$$= \int \frac{dt}{t^3(1+t^2)} = \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t^3} + \frac{Dt+E}{t^2+1}\right)dt = I$$
$$At^4 + At^2 + Bt^3 + Bt + Ct^2 + C + Dt^4 + Et^3 = 1$$
$$\begin{cases} A + D = 0 \\ B + E = 0 \\ A + C = 0 \\ B = 0 \\ C = 1 \end{cases} => \begin{cases} D = 1 \\ E = 0 \\ A = -1 \\ B = 0 \\ C = 1 \end{cases}$$
$$I = \int \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t^3} + \frac{t}{t^2+1}\right)dt = \ln\left|\frac{1}{t}\right| - \frac{1}{2t^2} + \ln\sqrt{t^2+1} + C =$$
$$= \ln\left|\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\right| - \frac{1}{2t^2} + C = \ln\left|\frac{\sqrt{tg^2t+1}}{tgt}\right| - \frac{1}{2tg^2t} + C$$
$$\int ctg^3\, x\, dx = \ln\left|\frac{\sqrt{tg^2t+1}}{tgt}\right| - \frac{1}{2tg^2t} + C$$

Тема6: Айрым иррационалдык функцияларды интегралдоо.

6.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$ 6.2. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$ 6.3. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}dx$

6.4. $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$ 6.5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$ 6.6. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$

6.7. $\int \sqrt{9-x^2}dx$ 6.8. $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$ 6.9. $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$

6.10. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(9+x^2)^5}}$ 6.11. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$ 6.12. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

6.13. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-x^2}}$ 6.14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Чыгаруу:

6.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$ бул мисалды иштөөдө $2x - 1 = t$ ордуна коюусунан пайдаланабыз:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}} = \begin{Bmatrix} 2x-1=t^4 \\ 2dx=4t^3dt \\ dx=2t^3dt \end{Bmatrix} = 2\int \frac{t^3dt}{t^2-t} =$$
$$= 2\int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt = t^2+2t+2\ln|t-1|+C =$$
$$= \sqrt{2x-1}^2 + 2\sqrt[4]{2x-1} + \ln\left(\sqrt[4]{2x-1}-1\right)^2 + C$$

6.2. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx = \begin{Bmatrix} x-1=t^3 \\ dx=3t^2dt \end{Bmatrix} = 3\int \frac{(t^3+1)^3}{t}t^2dt = 3\int t(t^3+1)^3dt =$$
$$= 3\int (t^9+3t^6+3t^3+1)tdt = \frac{3}{10}t^{10}+\frac{9}{7}t^7+\frac{9}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2+C =$$
$$= \frac{3}{10}\sqrt[3]{x-1}^{10}+\frac{9}{7}\sqrt[3]{x-1}^{7}+\frac{9}{4}\sqrt[3]{x-1}^{4}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x-1}^{2}+C$$

6.3. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}dx$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}dx = \begin{Bmatrix} x=t^2 \\ dx=2tdt \end{Bmatrix} = \int \frac{t}{t^2+2}2tdt = 2\int \frac{t^2}{t^2+2}dt =$$
$$= 2\int \left(1-\frac{2}{t^2+2}\right)dt = 2t-\frac{4}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}+C =$$
$$= 2\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{2}}arctg\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}+C$$

6.4. $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

$$\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \begin{Bmatrix} 1-x=t^2 \\ dx=-2tdt \end{Bmatrix} = \int \frac{-2tdt}{(2-1+t^2)t} =$$
$$= -2\int \frac{dt}{1+t^2} = -2arctgt+C = -2arctg\sqrt{1-x}+C$$

6.5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}} = \begin{Bmatrix} x+1=t^2 \\ dx=2tdt \end{Bmatrix} = \int \frac{2tdt}{t+t^3} = 2\int \frac{dt}{1+t^2} =$$
$$= 2arctgt+C = 2arctg\sqrt{x+1}+C$$

6.6. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ бул мисалды чыгарууда $x = a\sin t$ ордуна коюусунан пайдаланабыз:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \begin{Bmatrix} x=a\sin t \\ t=\arcsin\frac{x}{a} \\ dx=a\cos t\,dt \end{Bmatrix} = \int \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t\,dt == \int a\cos t\ \ a\cos t\,dt$$
$$= a^2\int \cos^2 t\,dt =$$
$$= a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{a^2t}{2}+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C =$$
$$= \frac{a^2\arcsin\frac{x}{a}}{2}+\frac{a^2}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{a}\right)+C$$

6.7. $\int \sqrt{9-x^2}dx$

$$\int \sqrt{9-x^2}dx = \begin{Bmatrix} x=3\sin t \\ t=\arcsin\frac{x}{3} \\ dx=3\cos t\,dt \end{Bmatrix} = \int \sqrt{9-9\sin^2 t}\,3\cos t\,dt =$$
$$= \int 3\cos t\,3\cos t\,dt == 9\int \cos^2 t\,dt = 9\int \frac{1+\cos 2x}{2}dt =$$
$$= \frac{9}{2}t+\frac{9}{4}\sin 2t+C = \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{9}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{3}\right)+C$$

6.8. $\int\frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}=\left\{\begin{matrix} x=2\sin t\\ t=\arcsin\frac{x}{2}\\ dx=2\cos t\,dt\end{matrix}\right\}=\int\frac{2\cos t\,dt}{\sqrt{(4-4\sin^2 t)^3}}=\int\frac{2\cos t\,dt}{8\cos^3 t}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\cos^2 t}=\frac{1}{4}tg\ t+C=\frac{1}{4}tg\ \left(\arcsin\frac{x}{2}\right)+C$$

6.9. $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$

$$\int x^2\sqrt{4-x^2}dx=\left\{\begin{matrix} x=2\sin t\\ t=arcsin\frac{x}{2}\\ dx=2\cos t\end{matrix}\right\}=\int 4\sin^2 t\,2\cos t\,2\cos t\,dt=$$

$$=16\int\sin^2 t\cos^2 t\,dt=16\int\frac{1-\cos 2t}{2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=16\int\frac{1-\cos^2 2t}{4}dt=4\int(1-\cos^2 2t)dt=$$

$$=4\int\sin^2 2t\,dt=4\int\frac{1-\cos 4t}{2}dt=$$

$$=2\int(1-\cos 4t)dt=2t-\frac{1}{2}\sin 4t+C=$$

$$=2\left(arcsin\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(4arcsin\frac{x}{2}\right)+C$$

6.10. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(9-x^2)^5}}$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(9-x^2)^5}}=\left\{\begin{matrix} x=3\sin t\\ t=\arcsin\frac{x}{3}\\ dx=3\cos t\,dt\end{matrix}\right\}=\int\frac{9\sin^2 t}{\sqrt{(9-9\sin^2 t)^5}}=$$

$$=\frac{1}{27}\int\frac{3\sin^2 t\cos t\,dt}{\sqrt{(1-\sin^2 t)^5}}=\frac{1}{9}\int\frac{\sin^2 t\cos t\,dt}{\cos^5 t}=$$

$$=\frac{1}{9}\int\frac{\left(\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}\right)^2\frac{dv}{1+v^2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\right)^2}=\frac{1}{9}\int\frac{v^2(1+v^2)}{1+v^2}\frac{dv}{1+v^2}=\frac{1}{9}\int\frac{v^2dv}{1+v^2}=$$

$$=\frac{1}{9}\int\left(1-\frac{1}{1+v^2}\right)dv=\frac{1}{9}v-\frac{1}{9}arctgv+C=$$

$$=\frac{1}{9}tgt-\frac{1}{9}arctg(tgt)+C=\frac{1}{9}tg\left(\arcsin\frac{x}{3}\right)-\frac{1}{9}\arcsin\frac{x}{3}+C$$

6.11. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$ мындай мисалдарды чыгарууда $t=\frac{1}{x}$ ордуна коюусунан пайдаланабыз:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}=\left\{\begin{matrix} x=\frac{1}{t}\\ dx=-\frac{1}{t^2}dt\end{matrix}\right\}=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+4\frac{1}{t}-4}}=$$

$$=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}(1+4t-4t^2)}}=-\int\frac{dt}{t^2\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t}\sqrt{1+4t-4t^2}}=$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{-4\left(t^2-t+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{-4\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\right)}}=$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{4\left(\frac{1}{2} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2\right)}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{2} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2}} = \begin{Bmatrix} t - \frac{1}{2} = v \\ dt = dv \end{Bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dv}{\sqrt{\frac{1}{2} - v^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dv}{\sqrt{\frac{1}{2} - v^2}} = -\frac{1}{2}\arcsin v + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\arcsin\left(t - \frac{1}{2}\right) + C = -\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) + C$$

6.12. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \begin{Bmatrix} x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2}dt \end{Bmatrix} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}} = -\int \frac{\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{t^2 \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{t}\sqrt{1 - t^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = -\arcsin t + C = -\arcsin\frac{1}{x} + C$$

6.13. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-x^2}}$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x - x^2}} = \begin{Bmatrix} x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2}dt \end{Bmatrix} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}}} = -\int \frac{\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{t}\sqrt{2t - 1}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{2t - 1}} = \begin{Bmatrix} 2t - 1 = v \\ 2dt = dv \\ dt = \frac{dv}{2} \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2}\int \frac{dv}{\sqrt{v}} = -\sqrt{v} + C = -\sqrt{2t - 1} + C =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{x} - 1} + C$$

6.14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 2x - 1}} = \begin{Bmatrix} x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2}dt \end{Bmatrix} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t} - 1}} =$$

$$= -\int \frac{\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}(1 + 2t - t^2)}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1 + 2t - t^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{-(t^2 - 2t + 1 - 2)}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{2 - (t^2 - 2t + 1)}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{2 - (t - 1)^2}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \left(\frac{t - 1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \begin{Bmatrix} \frac{t - 1}{\sqrt{2}} = v \\ dt = \sqrt{2}dv \end{Bmatrix} = -\int \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = -\arcsin v + C =$$

$$= -\arcsin\frac{t - 1}{\sqrt{2}} + C = -\arcsin\frac{\frac{1}{x} - 1}{\sqrt{2}} + C$$

Тема: Анык интеграл.Анык интегралдардын касиеттери

1. Турактуу санды анык интегралдын сыртына чыгарууга болот.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

2. Бир нече функциялардын суммасынын анык интегралы ал функциялардын анык интегралдарынын суммасына барабар.

$$\int_a^b \big(f_1(x) \mp f_2(x) \pm f_3(x)\big)dx = \int_a^b f_1(x)dx \mp \int_a^b f_2(x)dx \pm \int_a^b f_3(x)dx$$

3. Анык интегралдын интегралдоо пределдери дал келсе, анда ал интеграл нөлгө барабар болот.

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

4. Анык интегралдын интегралдоо пределдерин алмаштырса анда, интег-ралдын белгиси карама-каршысына өзгөрөт.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

5. $[a,b]$ аралыгында аныкталган жана үзгүлтүксүз болгон $f(x)$ функ-циясынын анык интегралы ушул аралыктан алынган каалаган с чекитинен бөлүнгөн эки анык интегралдын суммасына барабар болот.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

6. $[-a,a]$ аралыгында аныкталган жана интегралдануучу $f(x)$ функциясы $x=0$ чекитинен бөлүнгөн жана $[0,a]$ аралыгында интегралдануучу $f(x)$ функциясынын анык интегралын экиге көбөйткөнгө барабар.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

7. Эгерде $\varphi(x) \geq f(x)$ болсо, анда бул функциялардын $[a, b]$ аралыгында аныкталган интегралдары да ушундай катышта болушат

$$\varphi(x) \geq f(x) => \int_{a}^{b} \varphi(x)dx \geq \int_{a}^{b} f(x)dx$$

7. Интегралдардын таблицасынын жардамында анык интегралдарды эсептөө

7.1. $\int_0^{\pi} \sin^2 x \ \cos x\, dx$; 7.2. $\int_1^3 x^3 dx$;

7.3. $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) dx$; 7.4. $\int_0^1 \sqrt{1+x}\, dx$;

7.5. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$; 7.6. $\int_1^4 \sqrt{x} dx$;

7.7. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 7.8. $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3)dx$;

7.9. $\int_0^8 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right)dx$; 7.10. $\int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^6+4}}$;

7.11. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2} dy$; 7.12. $\int_1^e \frac{1+\lg x}{x} dx$;

7.13. $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$; 7.14. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}$;

7.15. $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; 7.16. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x\, dx$;

7.17. $\int_0^{2\pi} \cos\frac{x}{2} dx$; 7.18. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \alpha\, d\alpha$;

7.19. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx$; 7.20. $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$;

7.21. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tg\ x\, dx$.

Чыгаруу

7.1. $\int_0^{\pi} \sin^2 x \ \cos x\, dx$;

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \ \cos x\, dx = \int_0^{\pi} \sin^2 x \ d(\sin x) = \left.\frac{\sin^3 x}{3}\right|_0^{\pi} == \frac{(\sin \pi)^3}{3} - \frac{(\sin 0)^3}{3} = 0$$

7.2. $\int_1^3 x^3 dx$;

$$\int_1^3 x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

7.3. $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) dx$;

$$\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) dx = \int_1^2 x^2 dx + \int_1^2 \frac{1}{x^4} dx =$$

$$= \left.\left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3x^3}\right)\right|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1}{3\cdot 2^3} - \frac{1^3}{3} + \frac{1}{3\cdot 1^3} =$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{24} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{64}{24} - \frac{1}{24} = \frac{63}{24}$$

7.4. $\int_0^1 \sqrt{1+x}\, dx$;

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\, dx = \begin{Bmatrix} 1+x = t \\ dx = dt \\ t_2 = 2 \\ t_1 = 1 \end{Bmatrix} = \int_1^2 \sqrt{t}\, dt = \left.\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_1^2 =$$

$$= \left.\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right|_1^2 = \frac{2}{3}\sqrt{2^3} - \frac{2}{3}\sqrt{1^3} = \frac{2}{3}\sqrt{8} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{8} - 1\right)$$

7.5. $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^3}$;

$$\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^3}=\left\{\begin{matrix}11+5x=t\\5dx=dt\\dx=\frac{dt}{5}\\t_1=1\\t_1=6\end{matrix}\right\}=\frac{1}{5}\int_{1}^{6}\frac{dt}{t^3}=$$

$$=-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2t^2}\bigg|_1^6=-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\cdot 6^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\cdot 1^2}=$$

$$=-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{72}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{72}\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{35}{72}=\frac{7}{72}$$

7.6. $\int_1^4\sqrt{x}dx$;

$$\int_1^4\sqrt{x}dx=\sqrt{x^3}\Big|_1^4=\sqrt{4^3}-\sqrt{1^3}=8-1=7$$

7.7. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1=arcsin\frac{1}{2}-arcsin0=\frac{\pi}{6}$$

7.8. $\int_1^2(x^2-2x+3)dx$;

$$\int_1^2(x^2-2x+3)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\bigg|_1^2=$$

$$=\frac{2^3}{3}-2^2+3\cdot 2-\frac{1^3}{3}+1^2-3=$$

$$=\frac{8}{3}-8+6-\frac{1}{3}+1-3=\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}-2=\frac{7}{3}-4=-\frac{5}{3}$$

7.9. $\int_0^8\left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$;

$$\int_0^8\left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx=\sqrt{2}\int_0^8\sqrt{x}dx+\int_0^8\sqrt[3]{x}dx=$$

$$=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\right)\bigg|_0^8=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{8^3}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{8^4}\right)-$$

$$-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{0^3}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{0^4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{2^9}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{2^{12}}=$$

$$=\frac{2^6}{3}+\frac{3\cdot 2^4}{4}=\frac{64}{3}+3\cdot 4=\frac{64+36}{3}=\frac{100}{3}$$

7.10. $\int_0^1\frac{y^2dy}{\sqrt{y^6+4}}$;

$$\int_0^1\frac{y^2dy}{\sqrt{y^6+4}}=\left\{\begin{matrix}y^3=t\\3y^2dy=dt\\dy=\frac{dt}{3y^2}\\t_1=0\\t_2=1\end{matrix}\right\}=\int_0^1\frac{y^2\frac{dt}{3y^2}}{\sqrt{t^2+4}}=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t^2+4}}=\frac{1}{3}\ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right|\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|1+\sqrt{1+4}\right|-\frac{1}{3}\ln\left|0+\sqrt{0+4}\right|=\ln\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

7.11. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}dy$;

$$\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}dy = \int_1^4 \frac{1}{y^2}dy + \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{y^3}}dy =$$
$$= \left(-\frac{1}{y} - \frac{2}{\sqrt{y}}\right)\Bigg|_1^4 = -\frac{1}{4} - \frac{2}{2} + \frac{1}{1} + \frac{2}{1} = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

7.12. $\int_1^e \frac{1+\lg x}{x}dx$ бул мисалды чыгарууда логарифманын касиеттеринен $\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10}$ формуласын пайдаланабыз:

$$\int_1^e \frac{1+\lg x}{x}dx = \int_1^e \frac{1}{x}dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x\ln 10}dx =$$
$$= \left(\ln x + \frac{(\ln x)^2}{2\ln 10}\right)\Bigg|_1^e = \ln e + \frac{(\ln e)^2}{2\ln 10} - \ln 1 - \frac{(\ln 1)^2}{2\ln 10} =$$
$$= 1 + \frac{1}{2\ln 10} - 0 - \frac{0}{2\ln 10} = \frac{2\ln 10 + 1}{2\ln 10}$$

7.13. $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$;

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = \left\{\begin{matrix} \frac{1}{x} = t \\ -\frac{1}{x^2}dx = dt \\ dx = -x^2dt \\ t_1 = 1 \\ t_2 = \frac{1}{2} \end{matrix}\right\} = -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{e^t}{x^2}x^2dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 e^t dt = e^t|_{\frac{1}{2}}^1 = e - \sqrt{e}$$

7.14. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}$;

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}} = \left\{\begin{matrix} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \\ dx = xdt \\ t_1 = 0 \\ t_2 = 1 \end{matrix}\right\} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right|\Big|_0^1 =$$
$$= \ln\left|1 + \sqrt{1+1}\right| - \ln\left|0 + \sqrt{1+0^2}\right| = \ln\left|1 + \sqrt{2}\right|$$

7.15. $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

$$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \left\{\begin{matrix} 1 + \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \\ dx = xdt \\ t_1 = 1 \\ t_2 = 4 \end{matrix}\right\} = \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_1^4 = 4 - 2 = 2$$

7.16. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x\, dx$;

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x\, dx = -\frac{1}{4}\cos 4x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{4}\cos 4\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\cos 0 =$$
$$= -\frac{1}{4}\cos\pi + \frac{1}{4}\cos 0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

7.17. $\int_0^{2\pi} \cos\frac{x}{2}dx$;

$$\int_0^{2\pi} \cos\frac{x}{2}dx = -2\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{2\pi} = -2\sin\frac{2\pi}{2} + -2\sin\frac{0}{2} = -2\sin\pi = 0$$

7.18. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\alpha\, d\alpha$;

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\alpha\, d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2\alpha}{2} d\alpha = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2\alpha) d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\alpha - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\alpha\, d\alpha = \left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}0 - \frac{1}{4}\sin 0 =$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

7.19. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx$;

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \sin x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, d(\cos x) =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x) d(\cos x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d(\cos x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, d(\cos x) =$$

$$= \left(\cos x - \frac{\cos^3 x}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} - \frac{\cos^3\frac{\pi}{2}}{3} - \cos 0 + \frac{\cos^3 0}{3} =$$

$$= -\cos 0 + \frac{\cos^3 0}{3} = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

7.20. $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$;

$$\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \left\{\begin{matrix} \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \\ dx = xdt \\ t_1 = 0 \\ t_2 = 1 \end{matrix}\right\} = \int_0^1 \sin t\, dt = \cos t|_0^1 =$$

$$= \cos 1 - \cos 0 = \cos 1 - 1$$

7.21. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tg\ x\, dx$.

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tg\ x\, dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$$

Бул интегралды чыгарууда анык интегралдын

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

касиетинен пайдаланабыз:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\, d(\cos x) =$$

$$=\begin{Bmatrix}\cos x=t\\ t_1=1\\ t_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{Bmatrix}=-2\ln t\Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\ln\frac{1}{t^2}\Bigg|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\ln\frac{1}{\frac{2}{4}}-\ln\frac{1}{1}=\ln 2$$

8. Анык интегралдарда өзгөрмөлөрдү алмаштыруу

8.1. $\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx$ 8.2. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ 8.3. $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$

8.4. $\int_1^2 \frac{xdx}{1+x^2}$ 8.5. $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+1}}$ 8.6. $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$

8.7. $\int_1^e \frac{x+\ln x}{x}dx$ 8.8. $\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x dx$ 8.9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$

8.10. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

Чыгаруу

8.1. $\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx$ бул функцияны интегралдоодо $x = rsin\, t$ жана $dx = r\cos t\, dt$ ордуна коюулуранан пайдаланабыз.

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx=\begin{Bmatrix}x=r\sin t\\ dx=r\cos t\,dt\\ t_1=0\\ t_2=\dfrac{\pi}{2}\end{Bmatrix}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}\,r\cos t\,dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2 t\,dt=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=\frac{r^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi r^2}{4}$$

8.2. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

$$\int_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\begin{Bmatrix}x=t^2\\ dx=2tdt\\ t_1=0\\ t_2=2\end{Bmatrix}=\int_0^2\frac{2tdt}{1+t}=2\int_0^2\frac{tdt}{1+t}=$$

$$=2\int_0^2\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=2(t-\ln|1+t|)_0^2=$$

$$=2(2-\ln|3|+\ln|0|)=6-\ln 9$$

8.3. $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$

$$\int_0^1\frac{xdx}{(x^2+1)^2}=\begin{Bmatrix}x^2+1=t\\ 2xdx=dt\\ dx=\dfrac{dt}{2x}\\ t_1=1\\ t_2=2\end{Bmatrix}=\int_1^2\frac{\frac{1}{2}dt}{t^2}=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{2t}\Big|_1^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

8.4. $\int_1^2 \frac{xdx}{1+x^2}$

$$\int_1^2\frac{xdx}{1+x^2}=\begin{Bmatrix}1+x^2=t\\ 2xdx=dt\\ t_1=2\\ t_2=5\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\int_2^5\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}(\ln 5-\ln 2)=\ln\sqrt{2.5}$$

8.5. $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+1}}$

$$\int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+1}} = \left\{\begin{matrix} e^x+1=t \\ e^x dx = dt \\ t_1 = 2 \\ t_2 = 4 \end{matrix}\right\} = \int_2^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\sqrt{t}\Big|_2^4 = \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{2}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

8.6. $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x\, dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} \frac{dx}{x} = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} d(\ln x) =$$

$$= \left\{\begin{matrix} \ln x = t \\ t_1 = 0 \\ t_2 = \frac{1}{2} \end{matrix}\right\} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \left\{\begin{matrix} 1-t^2 = v \\ -2tdt = dv \\ v_1 = 1 \\ v_2 = \frac{3}{4} \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}\int_1^{\frac{3}{4}} \frac{dv}{\sqrt{v}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{3}{4}} + 1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

8.7. $\int_1^e \frac{x+\ln x}{x} dx$

$$\int_1^e \frac{x+\ln x}{x} dx = \int_1^e \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) dx = \int_1^e dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx =$$

$$= \int_1^e dx + \int_1^e \ln x\, d(\ln x) = \left(x + \frac{(\ln x)^2}{2}\right)\Big|_1^e = e - 1 + \frac{1}{2} = e - \frac{1}{2}$$

8.8. $\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x dx$

$$\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x dx = \left\{\begin{matrix} e^x - 1 = t \\ e^x dx = dt \\ t_1 = 0 \\ t_2 = e-1 \end{matrix}\right\} = \int_0^{e-1} t^4 dt = \frac{t^5}{5}\Big|_0^{e-1} = \frac{(e-1)^5}{5}$$

8.9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x} = \left\{\begin{matrix} tg\frac{x}{2} = t \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ t_1 = 0 \\ t_2 = 1 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3 + 2\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{3+3t^2+2-2t^2}{1+t^2}} = 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+5} = \frac{2}{\sqrt{5}} arctg\frac{t}{\sqrt{5}}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} arctg\frac{2}{\sqrt{5}}$$

8.10. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \left\{\begin{matrix} tgx = t \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{matrix}\right\} = \int_0^1 \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{1}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{2+t^2} =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{1}{\sqrt{2}}$$

9. Анык интегралды бөлүктөп интегралдоо

9.1. $\int_0^{\pi} x\sin 2x\,dx$; 9.2. $\int_0^1 x\,e^{-x}dx$; 9.3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$;

9.4. $\int_1^e \ln x\,dx$; 9.5. $\int_0^{e-1}\ln(x+1)\,dx$; 9.6. $\int_0^{\pi} e^x\cos x\,dx$;

9.7. $\int_0^{\pi} e^x\sin x\,dx$; 9.8. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{xdx}{\sin^2 x}$; 9.9. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{xdx}{\cos^2 x}$.

Чыгаруу:

9.1. $\int_0^{\pi} x\sin 2x\,dx$

$$\int_0^{\pi} x\sin 2x\,dx=\begin{Bmatrix} u=x\ du=dx \\ \sin 2x\,dx=dv\ v=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{Bmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{2}x\cos 2x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2x\,dx=-\frac{1}{2}\pi\cos 2\pi+\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\pi}=$$

$$=-\frac{\pi}{2}\cos 2\pi+\frac{1}{4}\sin 2\pi=-\frac{\pi}{2}$$

9.2. $\int_0^1 x\,e^{-x}dx$

$$\int_0^1 x\,e^{-x}dx=\begin{Bmatrix} u=x\ \ du=dx \\ e^{-x}dx=dv\ \ v=-e^{-x}\end{Bmatrix}=-xe^{-x}|_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=$$

$$=-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+1=1-\frac{2}{e}$$

9.3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx=\begin{Bmatrix} u=x\ \ du=dx \\ \cos x\,dx=dv\ \ v=\sin x\end{Bmatrix}=x\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0=\frac{\pi}{2}-1$$

9.4. $\int_1^e \ln x\,dx$

$$\int_1^e \ln x\,dx=\begin{Bmatrix} u=\ln x\ \ \ du=\frac{1}{x}dx \\ dv=dx\ \ v=x\end{Bmatrix}=x\ln x|_1^e-\int_1^e dx=e-e+1=1$$

9.5. $\int_0^{e-1}\ln(x+1)\,dx$

$$\int_0^{e-1}\ln(x+1)\,dx=\begin{Bmatrix} \ln(x+1)=u\ \ du=\frac{1}{x+1}dx \\ dv=dx\ \ v=x\end{Bmatrix}=$$

$$=x\ln(x+1)|_0^{e-1}-\int_0^{e-1}\frac{x}{x+1}dx=e-1-\int_0^{e-1}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=$$

$$=e-1-(x-\ln(x+1))|_0^{e-1}=e-1-e-1=-2$$

9.6. $\int_0^{\pi} e^x\cos x\,dx$

$$\int_0^{\pi} e^x\cos x\,dx=\frac{e^x\sin x+e^x\cos x}{2}\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{e^{\pi}\sin\pi+e^{\pi}\cos\pi}{2}-\frac{e^0\sin 0+e^0\cos 0}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{e^{\pi}}{2}$$

9.7. $\int_0^{\pi} e^x\sin x\,dx$

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2}\Big|_0^{\pi} =$$
$$= \frac{e^{\pi} \sin \pi - e^{\pi} \cos \pi}{2} - \frac{e^0 \sin 0 - e^0 \cos 0}{2} = \frac{e^{\pi}}{2} - \frac{1}{2}$$

9.8. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x} = \left\{\begin{matrix} x = u \;\; dx = du \\ \frac{dx}{\sin^2 x} = dv \;\; v = -ctg\,x \end{matrix}\right\} = -x\,ctg\,x|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} ctg\,x\,dx =$$
$$= -x\,ctg\,x|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \ln(\sin x)|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} =$$
$$= -\frac{\pi}{3} ctg\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} ctg\frac{\pi}{4} + \ln\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) - \ln\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= -\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

9.9. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\cos^2 x}$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\cos^2 x} = \left\{\begin{matrix} u = x \;\; du = dx \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dv \;\; v = tg\,x \end{matrix}\right\} = x\,tg\,x|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} tg\,x\,dx =$$
$$= x\,tg\,x|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - \ln(\cos x)|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} tg\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} tg\frac{\pi}{4} - \ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) + \ln\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}$$

10. Анык интегралдын жардамында аянтты эсептөө

Аянтты эсептөөгө берилген маселелер үч түрдүү болушат:

а) фигураны жогору жана төмөн жактарынан чектеп турган сызыктардын функциялары гана берилген маселелер. Мындай маселелерди чыгаруу үчүн алгач ал функциялардын графиктерин сызып алабыз. Андан кийин ошол графиктердин жардамында аянтты сол жагынан жана оң жагынан чектеп турган чекиттерди аныктап алабыз. Аныкталган чекиттер анык интегралдын жогорку жана төмөнкү пределдери болушат.

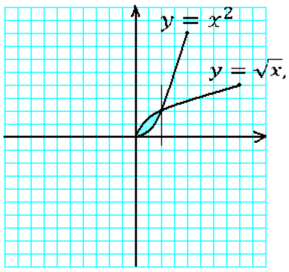
б) Фигураны эки жагынан чектеп турган сызыктардын функциялары жана оң же сол жагындагы пределдик чекити берилген болот. Мындай маселелерди чыгарууда да алгач берилген функциялардын графиктери сызылат. Андан кийин сызылган графиктердин жардамында фигуранын экинчи пределдик чекити аныкталат.

в) Фигураны чектеп турган сызыктардын функциялары да пределдик чекиттери да белгилүү болот. Мындай маселелерди чыгарууда фигураны жогору жагынан чектеген сызыктын анык интегралынан төмөн жагынан чектеген сызыктын анык интегралын кемитүү керек.

10.1. $y = \sqrt{x}, y = x^2$;
10.2. $y = 4 - x^2, y = 0$;
10.3. $y = 16 - x^4, y = 0$;
10.4. $y = 4x - x^2, y = 0$;
10.5. $y = -2 + 3x - x^2, y = 0$;
10.6. $y = \sin x\,, y = 0, 0 \le x \le \pi$;
10.7. $y = \mathrm{tg}\,x\,, y = 0, x = \frac{\pi}{3}$;
10.8. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$;
10.9. $x^2 + y^2 = 16$;
10.10. $y^2 = x^3, x = 3$;
10.11. $y^2 = 2x + 4, x = 0$;
10.12. $y = x^2, y = 2 - x^2$;
10.13. $y = x^2 + 4x, e = x + 4$;
10.14. $y = \ln x\,, x = e, y = 0$;

10.15. $y = x\sin x, y = 0, 0 \le x \le \pi.$

Чыгаруу



10.1. $y = \sqrt{x}, y = x^2$ Бул сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын табуу үчүн алгач берилген функциялардын графиктерин сызып алуу керек. Графиктер

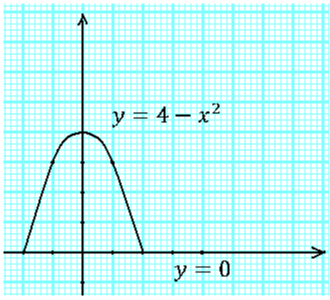
$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 1$$

чекиттеринде кесилишет. Бул чекиттер анык интегралдын жогорку жана төмөнкү пределдери болушат.

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{2+1}}{2+1}\right|_0^1 = \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3}\right|_0^1 =$$

$$= \frac{2 \cdot 1^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1^3}{3} - \frac{2 \cdot 0^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{0^3}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

10.2. $y = 4 - x^2, y = 0$



$$\int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx = 2\int_0^2 (4 - x^2)dx =$$

$$= 2\int_0^2 4dx - 2\int_0^2 x^2dx$$

$$= 8\int_0^2 dx - 2\int_0^2 x^2dx =$$

$$= \left(8x - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^2 =$$

$$= 8 \cdot 2 - \frac{2}{3} \cdot 2^3 - 8 \cdot 0 + \frac{2}{3}0^3 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$$

10.3. $y = 16 - x^4, y = 0$ бул функциялар менен чектелген фигуранын аянтын табуу үчүн алгач $y = 16 - x^4$ функциясынын Ох огун кесип өткөн чекиттерин табып алабыз.

$$16 - x^4 = (4 - x^2)(4 + x^2) = (2 - x)(2 + x)(4 + x^2)$$

Демек, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ болгондуктан аныкталган пределдик чекиттерди анык интегралга коюуп

$$S = \int_{-2}^{2} (16 - x^4)dx$$

формуласын алабыз. Анык интегралдын (6-) касиетинен пайдаланып

$$S = \int_{-2}^{2} (16 - x^4)dx = 2\int_0^2 (16 - x^4)dx$$

барабардыгын алабыз. Акыркы анык интегралды эсептеп берилген сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын табып алабыз.

$$S = 2\int_0^2 (16 - x^4)dx = 2\left(16x - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2 = 2\left(16 \cdot 2 - \frac{2^5}{5}\right) =$$

$$= 2\left(32 - \frac{32}{5}\right) = 51{,}2$$

10.4. $y = 4x - x^2, y = 0$ алгач функциянын Ох огун кесип өткөн чекиттерин табып алабыз.

$$4x - x^2 = x(4 - x) => x_1 = 0, x_2 = 4$$

$$\int_0^4 (4x - x^2)dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4 = 2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} = 32 - \frac{64}{3} =$$

$$= \frac{96}{3} - \frac{64}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$$

Бул мисалды анык интегралдын касиетинен пайдаланып төмөнкүдөй усул менен да чыгарса болот:

$$\int_0^4 (4x - x^2)dx = 2\int_2^4 (4x - x^2)dx = 2\left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_2^4 =$$

$$= 2\left(2\cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} - 2\cdot 2^2 + \frac{2^3}{3}\right) = 2\left(32 - \frac{4^3}{3} - 8 + \frac{2^3}{3}\right) =$$

$$= 2\left(24 - \frac{64}{3} + \frac{8}{3}\right) = 2\left(24 - \frac{56}{3}\right) = 2\left(\frac{72}{3} - \frac{56}{3}\right) = 2\cdot\frac{16}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$$

10.5. $y = -2 + 3x - x^2, y = 0$

$$-2 + 3x - x^2 = 0 => D = 9 - 8 = 1 => x_1 = 2, x_2 = 1$$

$$\int_2^1 (-2 + 3x - x^2)\,dx = \left(-2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right|_2^1 =$$

$$= -2\cdot 1 + \frac{3}{2}\cdot 1^2 - \frac{1^3}{3} + 2\cdot 2 - \frac{3}{2}\cdot 2^2 + \frac{2^3}{3} =$$

$$= -2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 4 - 6 + \frac{8}{3} = -4 + \frac{3}{2} + \frac{8}{3} = -\frac{24}{6} + \frac{9}{6} + \frac{16}{6} = \frac{1}{6}$$

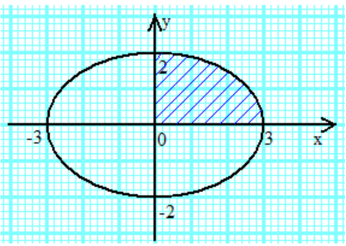
10.6. $y = \sin x\,, y = 0, 0 \le x \le \pi$

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$$

10.7. $y = \operatorname{tg} x\,, y = 0, x = \frac{\pi}{3}$ бул функциялар менен чектелген фигуранын аянтын табууда алгач $y = \operatorname{tg} x$ функциясы кайсыл чекитте $y = 0$ сызыгы менен кесилишээрин билип алуу керек. $\operatorname{tg} x = 0$ болушу үчүн $x = 0$ болушу керек. Демек, $x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{3}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} tg\,x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}dx = \ln\frac{1}{\cos x}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} - \ln\frac{1}{\cos 0} = \ln\frac{1}{\frac{1}{2}} = \ln 2$$

10.8. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ бул функция менен чектелген фигуранын аянтын табуу үчүн алгач берилген



функция жөнүндөгү маалыматтарды билишибиз керек. Каралып жаткан функция аналитикалык геометрия курсунда экинчи тартиптеги ийрилердин ичинен эллипс деген аталыш менен белгилүү. Ал Ох огун -3 жана 3 чекиттеринде, Оу огун -2 жана 2 чекиттеринде кесип өтөт. Анын аянтын анык интегралдын жардамында табуу үчүн эллипсти х тен көз каранды функция катары туюнтуп алуу керек.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Алгач барабардыктын сол жагындагы биринчи кошулуучуну барабардыктын экинчи жагына алып өтөбүз:

$$\frac{y^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{9}$$

Андан кийин барабардыктын эки жагын тең 4 кө көбөйтөбүз:

$$y^2 = 4 - \frac{4x^2}{9}$$

Акырында барабардыктын эки жагынан тең квадраттык тамыр чыгарабыз:

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{4 - \frac{4x^2}{9}} => y = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$$

$$S=4\int_0^3\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\,dx=\frac{8}{3}\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx=\left\{\begin{matrix}x=3\sin t\\ dx=3\cos t\,dt\\ t=\arcsin\frac{x}{3}\\ t_1=0\\ t_2=\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9-9\sin^2 t}\,3\cos t\,dt=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9(1-\sin^2 t)}3\cos t\,dt=$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sqrt{1-\sin^2 t}\,3\cos t\,dt=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}9\cos^2 t\,dt=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt$$

$$=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt+12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\,dt=(12t+6\sin 2t)|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=12\frac{\pi}{2}+6\sin 2\frac{\pi}{2}-12\cdot 0+6\sin 0=6\pi$$

10.9. $x^2+y^2=16$ бул функция радиусу 4 болгон, борбору координаталар башталышы болгон айлананы берет

$$x^2+y^2=16 \Rightarrow y^2=16-x^2 \Rightarrow y=\sqrt{16-x^2} \Rightarrow x_1=-4, x_2=4$$

$$\int_{-4}^4\sqrt{16-x^2}\,dx=4\int_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx=\left\{\begin{matrix}x=4\sin t\\ dx=4\cos t\,dt\\ t=\arcsin\frac{x}{4}\\ t_1=0\\ t_2=\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right\}=$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{16-16\sin^2 t}\,4\cos t\,dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sqrt{1-\sin^2 t}\,4\cos t\,dt=$$

$$=64\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt=64\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=32\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=$$

$$=(32t+16\sin 2t)|_0^{\frac{\pi}{2}}=16\pi+16\sin\pi-32\cdot 0-16\sin 0=16\pi$$

Аянтты туура тапканыбызды текшерүү үчүн бизде мурдатан белгилүү болгон айлананын аянтын табуучу формуланы колдонсок болот:

$$S=\pi r^2=\pi\cdot 4^2=16\pi$$

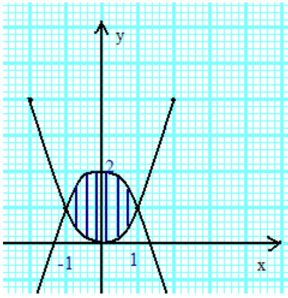
10.10. $y^2=x^3, x=3$

$$\int_0^3\sqrt{x^3}dx=\int_0^3 x^{\frac{3}{2}}dx=\left.\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\right|_0^3=\left.\frac{2\sqrt{x^5}}{5}\right|_0^3=\frac{2\sqrt{3^5}}{5}-\frac{2\sqrt{0^5}}{5}=\frac{2\sqrt{3^5}}{5}$$

10.11. $y^2=2x+4, x=0$ биринчи теңдеменин тамыры x=-2 болот.

$$\int_{-2}^0(2x+4)dx=(x^2+4x)|_{-2}^0=-(-2)^2-4(-2)=-4+8=4$$

10.12. $y = x^2, y = 2 - x^2$ биринчи теңдеменин тамыры $x = 0$ экинчи теңдеменин тамыры $x = \pm\sqrt{2}$.

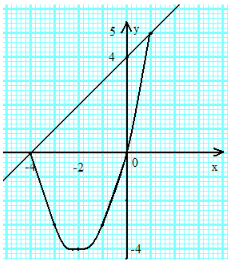


Ал эми бул функциялардын графиктери $x_1 = -1$ жана $x_2 = 1$ чекиттеринде кесилишет. Демек, анык интегралдын жогорку жана төмөнкү пределдери: $x_1 = -1,\ x_2 = 1$

$$\int_{-1}^{1} (-x^2 + 2 - x^2)dx = -4\int_{0}^{1} (x^2 - 1)dx =$$

$$= -4\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Bigg|_0^1 = -4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

10.13. $y = x^2 + 4x, \text{y} = x + 4$ алгач бул функциялар-дын графиктерин сызып, алардын кесилиш чекиттерин табып алабыз:



$$\int_{-4}^{1} \big(x + 4 - (x^2 + 4x)\big)dx =$$

$$= \int_{-4}^{1} (-3x + 4 - x^2)dx$$

$$= \left(-\frac{3x^2}{2} + 4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-4}^{1} =$$

$$= -\frac{3 \cdot 1^2}{2} + 4 \cdot 1 - \frac{1^3}{3} + \frac{3 \cdot (-4)^2}{2} - 4 \cdot (-4) + \frac{(-4)^3}{3} =$$

$$= -\frac{3}{2} + 4 - \frac{1}{3} + \frac{3 \cdot 16}{2} + 16 - \frac{64}{3} = 20 + \frac{45}{2} - \frac{65}{3} =$$

$$= 20 + \frac{135}{6} - \frac{130}{6} = 20\frac{5}{6}$$

10.14. $y = \ln x\,, x = e, y = 0$

$$\int_{1}^{e} \ln x\, dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x \ \ du = \dfrac{1}{x}dx \\ dx = dv\ v = x \end{matrix}\right\} = x\ln x|_1^e - \int_{1}^{e} dx =$$

$$= e\ln e - 1\ln 1 - e + 1 = 1$$

10.15. $y = xsin\,x, y = 0, 0 \leq x \leq \pi$

$$\int_{0}^{\pi} x\sin x\, dx = \left\{\begin{matrix} u = x\ \ du = dx \\ dv = \sin x\, dx\ v = -\cos x \end{matrix}\right\} =$$

$$= -x\cos x|_0^{\pi} + \int_{0}^{\pi} \cos x\, dx = -\pi\cos\pi + 0\cos 0 + \sin\pi - \sin 0 = \pi$$

11. Анык интегралдын жардамында көлөмдү эсептөө

Анык интегралдын жардамында көлөмдөрдү эсептөөдө алгач берилген сызыктардын графиктерин тегиздикте тургузуп алабыз. Андан кийин ал графиктердин жардамында анык интегралдын төмөнкү жана жогорку пределдерин табып алабыз. Андан кийин

$$V = \pi\int_{a}^{b} f^2(x)\, dx$$

формуласынан пайдаланып берилген функциялар менен чектелген телонун көлөмүн табууга болот.

11.1. $y^2 = 9x, y = 3x;$ 11.2. $y = 4x - x^2,\ y = x;$

11.3. $x^2 + y^2 = 25;$ 11.4. $y^2 = 2x, x = 1;$

11.5. $y = x^2, y^2 = x;$ 11.6. $y^2 = 8x, 1 \leq x \leq 2;$

11.7. $y^2 - x^2 = 9, x - 2y + 6 = 0;$

11.8. $y^2 = (x + 4)^3, x = 0;$ 11.9. $y^2 = 4 - x, x = 0;$

11.10. $y = x\sqrt{-x}, x = -4, y = 0.$

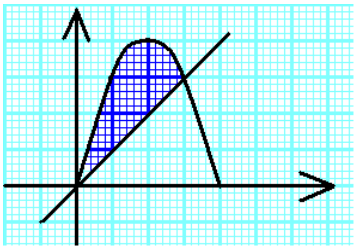
Чыгаруу

11.1. $y^2 = 9x, y = 3x$ берилген функцияларды $y = 3\sqrt{x}, y = 3x$ көрүнүшүндө жазып алууга болот. Бул функциялардын графиктери $x = 0$ жана $x = 1$ чекиттеринде кесилишет. Демек:

$$V = \pi\int_0^1 \left[\left(3\sqrt{x}\right)^2 - (3x)^2\right] dx = \pi\int_0^1 [9x - 9x^2]\, dx =$$

$$= 9\pi\int_0^1 [x - x^2]\, dx = 9\pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 9\pi\left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3}\right) - 9\pi\left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$$



11.2. $y = 4x - x^2,\ \ y = x$

$V = \pi\int_0^3((4x - x^2)^2 - x^2)\, dx =$

$$= \pi\int_0^3 (16x^2 - 8x^3 + x^4 - x^2)\, dx =$$

$$= \pi\left(5x^3 - 2x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^3 = \pi\left(5\cdot 3^3 - 2\cdot 3^4 + \frac{3^5}{5}\right) =$$

$$= \pi\left(5\cdot 27 - 2\cdot 81 + \frac{243}{5}\right) = 21{,}6\pi$$

11.3. $x^2 + y^2 = 25$ бул функциянын графиги радиусу 5 ке барабар болгон, борбору координаталар башталышында жаткан айлана болот. Демек:

$$-5 \le x \le 5, y = \sqrt{25 - x^2}$$

$$V = \pi\int_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2}^{\,2}\, dx = \pi\int_{-5}^{5} (25 - x^2)\, dx =$$

$$= \pi\int_{-5}^{5} 25\, dx - \pi\int_{-5}^{5} x^2\, dx = \pi\left(25x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-5}^{5} =$$

$$= \pi\left(25\cdot 5 - \frac{5^3}{3}\right) - \pi(25\cdot(-5) — 5)33 =$$

$$= \pi\left(125 - \frac{125}{3}\right) - \pi\left(-125 + \frac{125}{3}\right) =$$

$$= 125\pi - \frac{125}{3}\pi + 125\pi - \frac{125}{3}\pi = 250\pi - \frac{250}{3}\pi = \frac{500}{3}\pi$$

11.4. $y^2 = 2x, x = 1$

$$V = \pi\int_0^1 (2x - x^2)dx = 2\pi\int_0^1 x dx + \pi\int_0^1 x^2 dx = \left(\pi x^2 + \frac{\pi x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4\pi}{3}$$

11.5. $y = x^2, y^2 = x$

$$V = \pi\int_0^1 (x^2 - x^4)dx = \left(\frac{\pi x^3}{3} - \frac{\pi x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{15}$$

11.6. $y^2 = 8x, 1 \le x \le 2$

$$V = \pi\int_1^2 8x\, dx = 4\pi x^2|_1^2 = 16\pi - 4\pi = 12\pi$$

11.7. $y^2 - x^2 = 9, x - 2y + 6 = 0$ бул функцияларды алгач

$$y = \sqrt{9 + x^2}, y = \frac{x + 6}{2}$$

көрүнүшүндө жазып алабыз. Андан кийин бул функциялардын графиктерин түзүп алабыз.

$$V = \pi \int_0^4 \left(\left(\frac{x + 6}{2} \right)^2 - 9 - x^2 \right) dx = \pi \int_0^4 \frac{x^2 + 12x + 36 - 36 - 4x^2}{4} dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^4 (-3x^2 + 12x) dx = \left(-\frac{\pi}{4} \cdot x^3 + \frac{6x^2\pi}{4} \right) \Bigg|_0^4 = -\frac{\pi}{4} \cdot 64 + \frac{96\pi}{4} =$$

$$= \frac{32\pi}{4} = 8\pi$$

11.8. $y^2 = (x + 4)^3, x = 0$

$$V = \pi \int_{-4}^{0} (x + 4)^3 dx = \pi \int_0^4 t^3 dt = \frac{t^4\pi}{4} \Bigg|_0^4 = 64\pi$$

11.9. $y^2 = 4 - x, x = 0$

$$V = \pi \int_0^4 (4 - x) dx = \left(4x\pi - \frac{x^2\pi}{2} \right) \Bigg|_0^4 = 16\pi - 8\pi = 8\pi$$

11.10. $y = x\sqrt{-x}, x = -4, y = 0$

$$V = \pi \int_{-4}^{0} -x^3 dx = -\frac{\pi x^4}{4} \Bigg|_{-4}^{0} = \frac{\pi(-4)^4}{4} =$$

Лекция №1

Тема1. Дифференциалдык теңдемелер түшүнүгү.

План:1. Дифференциалдык теңдемелер түшүнүгү.
2. Дифференциалдык теңдемеге алып келинүүчү маселелер

Дифференциал – функциянын өсүндүсүнүн башкы сызыктуу бөлүгү. Эгерде бир өзгөрмөлүү $y=f(x)$ функциясы x чекитинин аймагында аныкталса жана бул чекиттеги анын $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ өсүндүсү $\Delta y=A\cdot\Delta x+\alpha$ (1) түрүндө туюнтулса, анда ал функция ушул чекитте дифференцирленүүчү деп аталат, мында A - кандайдыр бир сан, α–Δxке салыштырмалуу жогорку тартиптеги чексиз кичине чоңдук.

Аныктама: x эркин өзгөрмөсүнөн, андан көз каранды болгон $y=f(x)$ функциясынан жана $y=f(x)$ функциясынын туундуларынан турган барабардык дифференциалдык теңдеме деп аталат. Анын жалпы түрү $f(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0$ көрүнүшүндө болот. (2)-теңдемедеги функциянын туундусунун тартибине жараша дифференциалдык теңдеменин тартиби аныкталат.

Эгерде 2-теңдеме $f(y,y',y'',...,y^{(n)})=0$ (3) түрүндө болсо, анда 3-теңдеме жогорку тартиптеги бир тектүү дифференциалдык теңдеме деп аталат.

Эгерде 2-теңдемеде белгисиз функциянын биринчи тартиптеги туундусуна чейинки белгисиздер болсо, анда ал теңдеме $f(x,y,y')=0$ (4) түрүндө болот жана ал биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме деп аталат.

Эгерде 4-теңдемени $y'=f(x,y)$ (5) түрүндө жазууга мүмкүн болсо, анда ал туундусуна карата чечилүүчү дифференциалдык теңдеме деп аталат.

Эгерде 4-теңдемеде изилденүүчү функция жана анын туундусу биринчи даражада жолукса, анда ал биринчи тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдеме деп аталат.

Эгерде 5-барабардыктын оң жагындагы туюнтма жалаң гана xтен жана yтен көз каранды болгон туюнтмалардын көбөйтүндүсү түрүндө турса, б.а. $y'=f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$ (6) түрүндө болсо, анда 6-барабардык өзгөрмөлөрү ажыралуучу дифференциалдык теңдеме деп аталат.

Эгерде 6-барабардыкта $x=k\cdot x$ жана $y=k\cdot y$ ордуна коюларынан пайдаланганда, б.а. $y'=f(kx,ky)=k^n\cdot f(x,y)$ (7) туюнтмадан k^n жалпы көбөйтүндүсү ажыраса, анда 7-теңдеме n-тартиптеги бир тектүү дифференциалдык теңдеме деп аталат.

Дифференциалдык теңдемеге алып келинүүчү маселелер.

Маселе: Массасы m болгон тело кандайдыр бийиктиктен ташталган. Эгерде абанын каршылыгы телонун түшүү ылдамдыгына пропорционалдуу болсо, анда бул телонун түшүү ылдамдыгынын өзгөрүү законун тапкыла. Башкача айтканда $v=f(t)$ ны табуу керек.

Чыгаруу: Ньютондун экинчи закону боюнча $m\frac{dv}{dt}=F$ болот. Мында $\frac{dv}{dt}$- телонун түшүү ылдамдануусу, F- кыймылдын багыты боюнча телого таасир эткен күч. Бул күч mg - оордук күчүнөн жана kv - абанын каршылыгынан турат. Демек, ордуна койсок $m\frac{dv}{dt}=mg-kv$ (1) барабардыгы келип чыгат.

Биз белгисиз функция v жана анын туундусунан көз каранды болгон катышты, белгисиз функция v га карата дифференциалдык теңдемени алдык. Бул теңдеменин чечимин алуу – берилген катышты туура барабардыка айландыруучу $v=f(t)$ функциясын табуу дегени. Мындай функциялардын саны чексиз көп. Алардын жалпы түрү

$$v=Ce^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k} \quad (2)$$

болот. Бул функция теңдемени канааттандыраарын текшерүү жеңил. Бул функциялардын кайсынысы изделип жаткан t дан v функцияны берет? Аны табуу үчүн кошумча шарттарды пайдаланабыз: телону таштоодо ага v_0 баштапкы ылдамдык берилген. Аны белгилүү деп кабыл алалы. Анда изделүүчү функция $v=f(t)$, $t=0$ болгон учурда $v=v_0$ болушу керек. (2-) формулага $t=0$, $v=v_0$ барабардыктарын коюп С ны табууга болот. $v_0=C+\frac{mg}{k}$ мындан $C=v_0-\frac{mg}{k}$ болот.

Демек, акыркы табылган С нын маанисин (2-) формулага коюп $v=(v_0-\frac{mg}{k})e^{-\frac{kt}{m}}+\frac{mg}{k}$ барабардыгын алабыз.

Мындан убакыттын өтө чоң маанилеринде ылдамдык v_0 дон анча көз каранды болбойт.

Эскертүү: Эгерде $k=0$ болсо, анда (2-) теңдеме $v=v_0+gt$ түрүндө болот. Бул теңдеме (1-) барабардыкты канааттандырат.

Көнүгүүлөр:

1. Жанымалары жануу чекитинде тең экиге бөлүнүүчү жана (2,3) чекити аркылуу өткөн ийрини тапкыла.
2. Нормалынын узундугу турактуу а санына барабар болгон сызыкты тапкыла.
3. Материалдык чекит түз сызыктуу кыймылда жана убакыттын $\vartheta \geq t$ моментине чейин анын кинетикалык энергиясы орточо ылдамдыгына түз пропорциялаш. Эгерде $t=0$ болгон учурда $S=0$болсо, анда кыймыл бир калыпта болоорун көрсөткүлө.
4. Жаныманын жануу чекити менен абцисса огунун арасындагы кесиндиси ордината огу менен кесилишинде тең экиге бөлүнгөн сызыктарды тапкыла.

Лекция №2

Тема2. Биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелер.

Аныктама: Эркин өзгөрмөдөн, белгисиз функциядан жана белгисиз функциянын 1-тартиптеги туундусунан турган барабардык биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме деп аталат.

Биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдеменин жалпы түрү $f(x,y,y')=0$ (1) көрүнүшүндө болот.

Эгерде бул теңдемени y'ке карата туюнтууга мүмкүн болсо, анда (1-) теңдеме туундусуна карата чечилүүчү дифференциалдык теңдеме деп аталат жана $y'=f(x,y)$ (2) түрүндө белгиленет. Мындай мисалдардын чечимдери үчүн төмөнкү теорема (Коши маселеси) ар дайым орун алат.

Теорема: Эгерде $f(x,y)$ функциясы $a<x<b,\quad c<y<d$ интервалдарында үзгүлтүксүз болсо, жана $y'\neq 0$ болсо, анда ушул областтын $M(x_0,y_0)$ чекити аркылуу (2-) теңдеменин чыгарылышы өтүп ал жалгыз болот.

Бизге $y'=f(x)$ теңдемеси берилсин. Бул теңдемени чыгаруу үчүн $y'=\dfrac{dy}{dx}$ барабардыгын пайдаланабыз.

$$\frac{dy}{dx}=f(x)$$

Акыркы барабардыктын эки жагын тең dx ке көбөйтүп

$$\frac{dy}{dx}dx=f(x)dx$$

$$dy=f(x)dx$$

барабардыгын алабыз. Бул барабардыктын сол жагын y боюнча, оң жагын x боюнча интегралдап

$$\int dy=\int f(x)dx \quad \Rightarrow \quad y=F(x)+C$$

барабардыгын алабыз. Акыркы барабардык берилген дифференциалдык теңдеменин жалпы чечими болот.

Көнүгүүлөр:

5. $y'=\sin x$	6. $y'=tgx$	7. $y'=e^x$
8. $y'=\dfrac{\ln x}{x}$	9. $y'=\dfrac{1}{\sin x}$	10. $y'=a^x$
11. $y'=tgx\cdot ctgx$	12. $y'=\dfrac{x^2}{x^6+4}$	13. $y'=\dfrac{x}{x+4}$
14. $y'=\dfrac{e^{2x}-1}{e^x}$	15. $y'=\dfrac{x+3}{3-x}$	16. $y'=\dfrac{(1-x)^2}{x^2+1}$
17. $y'=\dfrac{x^4}{x^2+1}$	18. $y'=\dfrac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}$	
19. $y'=\cos^2 x$	20. $y'=\sin^2 x$	21. $y'=\dfrac{\cos^3 x}{\sin^4 x}$
22. $y'=\cos^3 x$	23. $y'=x\cos^2 x$	24. $y'=x\sin 2x$
25. $y'=x\cos x$	26. $y'=xe^x$	27. $y'=xarctgx$
28. $y'=\cos^2 x$	29. $y'=\ln\lvert x^2+1\rvert$	
30. $y'=e^x\sin x$	31. $y'=\dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}$	

32. $y' = chx$ 33. $y' = sh2x$

Лекция №3
Тема. Өзгөрмөлөрү ажыралуучу дифференциалдык теңдемелер.

Бизге туундусуна карата чечилүүчү $y' = f(x,y)$ (1) дифференциалдык теңдемеси берилсин.

Эгерде (1-) теңдеменин оң жагын $f(x,y) = g(y) \cdot h(x)$ түрүндө жазууга мүмкүн болсо, анда (1-) теңдеме өзгөрмөлөрү ажыралуучу дифференциалдык теңдеме деп аталат. Демек, өзгөрмөлөрү ажыралуучу дифференциалдык теңдеме $y' = g(y) \cdot h(x)$ (2) көрүнүшүндө болот. Бул теңдеменин жалпы чечимин алуу үчүн изилденүүчү функциянын туундусун $y' = \dfrac{dy}{dx}$ менен алмаштырабыз.

$$\frac{dy}{dx} = g(y) \cdot h(x) \quad (3)$$

(3-) барабардыктын эки жагын тең $\dfrac{dx}{g(y)}$ туюнтмасына көбөйтүп $\dfrac{dy}{g(y)} = h(x)dx$ (4) барабардыгын алабыз. (4-) барабардыктын эки жагын тең интегралдап

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)dx$$

$$G(y) = H(x) + C$$

барабардыгына ээ болобуз. Акыркы барабардыкты у ке карата туюнтуп, (2-) теңдеменин жалпы чечимин алабыз.

$$y = F(x) + C$$

Мисал: $y' = -\dfrac{y}{x}$ теңдемесинин $M(2,4)$ Коши маселесин канааттандырган жекече чечимин тапкыла.

Чыгаруу: Бул теңдеменин жалпы чечимин алуу үчүн барабардыктын сол жагындагы белгисиз функциянын туундусун $y' = \dfrac{dy}{dx}$ менен алмаштырабыз: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$. Андан кийин барабардыктын эки жагын тең $\dfrac{dx}{y}$ ке көбөйтөбүз.

$$\frac{dy}{dx}\frac{dx}{y} = -\frac{y}{x}\frac{dx}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

Эми келип чыккан барабардыктын сол жагын у боюнча, оң жагын х боюнча интегралдайбыз.

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln y = -\ln|x| + \ln C$$

Мындан логарифманын касиети боюнча $\ln y = \ln\left|\dfrac{C}{x}\right|$ болот. Логарифманы потенцирлөөнүн натыйжасында $y = \dfrac{C}{x}$ болоору келип чыгат. Акырында Коши маселесин канааттандыруучу берилген теңдеменин жекече чеминин табуу үчүн белгисиздердин ордуна маанилерин коюп турактуу сан канчага барабар экенин аныктап алабыз.

$$4 = \frac{C}{2} \quad \Rightarrow \quad C = 8$$

Демек, берилген теңдеменин Коши маселесин канааттандырган жекече чечими $y=\frac{8}{x}$ болот.

Жообу: $y=\frac{8}{x}$

Көнүгүүлөр:

35. $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$
36. $xyy'=1-x^2$
37. $y'tgx-y=0$
38. $yy'=\frac{1-2x}{y}$
39. $xy'+y=y^2$
40. $y'=\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$
41. $\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0$
42. $e^{-y}(1+\frac{dy}{dx})=0$
43. $y'=10^{x+y}$
44. $y'+\sin\frac{x+y}{2}=\sin\frac{x-y}{2}$
45. $y'\sin x=y\ln y$
46. $y'=\frac{1+y^2}{1+x^2}$
47. $\frac{y}{x}y'=\frac{1+y^2}{1+x^2}$
48. $y'\sin x=y$
49. $\sin y\cos xdy=\cos y\sin xdx$

Лекция №4

Тема4. Бир тектүү, биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелер

Аныктоо: λ саны үчүн $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ (1) барабардыгы аткарылса, анда $f(x, y)$ функциясы n-даражадагы бир тектүү функция деп аталат.

1-мисал: $f(x, y) = \sqrt[n]{x^n + y^n}$ функциясы бир тектүү функция болоорун текшергиле.

Чыгаруу:

$$f(x, y) = \sqrt[n]{x^n + y^n} = \sqrt[n]{(\lambda x)^n + (\lambda y)^n} = \sqrt[n]{\lambda^n x^n + \lambda^n y^n} =$$
$$= \sqrt[n]{\lambda^n (x^n + y^n)} = \sqrt[n]{\lambda^n}\sqrt[n]{x^n + y^n} = \lambda\sqrt[n]{x^n + y^n}$$

Демек, берилген функция 1-даражадагы бир тектүү функция болот.

Аныктоо: Эгер $f(x, y)$ функциясы x жана y ке карата нөлүнчү даражадагы бир тектүү функция болсо, анда

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2)$$

биринчи тартиптеги теңдемеси да x жана y ке карата нөлүнчү даражадагы бир тектүү дифференциалдык теңдеме болот.

Бир тектүү биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелерди чыгаруу.

Шарт боюнча $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ болот. Бул барабардыкта $\lambda = \frac{1}{x}$ деп алсак, анда $f(x, y) = f(1, \frac{y}{x})$ барабардыгын алабыз.

Демек, бир тектүү биринчи тартиптеги теңдеме аргументтердин барөөнөн гана көз каранды болот. Бул учурда (2-) теңдеме

$$\frac{dy}{dx} = f(1, \frac{y}{x}) \quad (3)$$

көрүнүшүнө келет.

Экинчи теңдемеде $u = \frac{y}{x}$ ордуна коюусунан пайдалансак, $y = ux$ жана $du = u + \frac{du}{dx}x$ болот. Бул туюнтмаларды (3-) гө коюп $u + \frac{du}{dx}x = f(1, u)$ барабардыгын алабыз. Акыркы барабардык өзгөрмөлөрү ажыралуучу дифференциалдык теңдемеге келет.

$$x\frac{du}{dx} = f(1, u) - u \quad \Rightarrow \quad \int\frac{du}{f(1, u) - u} = \int\frac{dx}{x} + C$$

Акыркы барабардыкты интегралдагандан кийин u нун ордуна $\frac{y}{x}$ ти койсок, (3-) теңдеменин жалпы чечими келип чыгат.

Мисал: $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ теңдемеси берилсин.

Теңдеменин оң жагы нөлүнчү даражадагы бир тектүү дифференциалдык теңдеме. Төмөнкүдөй өзгөртүп түзүү жүргүзөйлү:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{xy}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}} = \frac{\frac{y}{x}}{1 - \frac{y^2}{x^2}}$$

Эми $y = ux$ жана $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$ ордуна коюларынан пайдалансак $x\frac{du}{dx} + u = \frac{u}{1-u^2}$ теңдемесин алабыз. Мындан өзгөрмөлөрдү топтоштуу аркылуу

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u}{1-u^2} - u \quad \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = \frac{u - u + u^3}{1-u^2} \quad \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = \frac{u^3}{1-u^2}$$

барабардыгын алабыз. Бул барабардыктын алгач эки жагын $\frac{u^3}{1-u^2}$ туюнтмасына бөлүп, кийин $\frac{dx}{x}$ туюнтмасына көбөйтөбүз. Натыйжада $\frac{(1-u^2)du}{u^3}=\frac{dx}{x}$ барабадыгына ээ болобуз. Эми келип чыккан барабардыктын оң жагын du боюнча сол жагын dx боюнча интегралдайбыз: $\int\frac{(1-u^2)du}{u^3}=\int\frac{dx}{x}$

1) $\int\frac{(1-u^2)du}{u^3}=\int\left(\frac{1}{u^3}-\frac{1}{u}\right)du=\int\frac{1}{u^3}du-\int\frac{1}{u}du=-\frac{1}{2u^2}-\ln u$

2) $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+\ln C=\ln|Cx|$

Демек, $-\frac{1}{2u^2}-\ln u=\ln|Cx| \;\Rightarrow\; -\frac{1}{2u^2}=\ln|Cxu|$ болот. Мында $y=ux$ барабардыгынан пайдаланып, барабардыктагы xти y аркылуу туюнтсак, анда төмөнкүгө ээ болобуз.

$$-\frac{1}{2\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\ln|Cy| \quad\Rightarrow\quad x=y\sqrt{\ln\frac{1}{(Cy)^2}}$$

Эскертүү: $\frac{N(x,y)dy}{M(x,y)dx}-1=0$ түрүндөгү теңдеме бир тектүү болушу үчүн бир эле учурда $N(x,y)$ да $M(x,y)$ да бирдей даражадагы бир тектүү функциялар болушу керек.

Көнүгүүлөр:

50. $y'=\frac{y^2}{x^2}-2$

51. $xdy-ydx=ydy$

52. $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$

53. $y^2+x^2y'=xyy'$

54. $xy'=y\ln\frac{y}{x}$

55. $y'=\frac{x+y}{x-y}$

56. $y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$

57. $xy'=\sqrt{x^2+y^2}+y$

58. $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$

59. $\frac{x^2}{y^3}y'=\frac{1}{y}\ln\frac{y}{x}$

Төмөнкү теңдемелердин бир тектүү болоорун көрсөткүлө:

60. $f(x,y)=xy-y^2$

61. $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{xy}$

62. $(2x+2y)dx+(x-2y)dy=0$

63. $(x^2+y^2)dx-2xydy=0$

64. $(3y^2+3xy+x^2)dx=-(x^2+2xy)dy$

. Бир тектүү теңдемеге келтирилүүчү дифференциалдык теңдемелер.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1} \quad (1)$$

(1-) түрдөгү теңдемелер бир тектүү дифференциалдык теңдемелерге келтирилүүчү теңдемелер болушат. Бир эле учурда $c=c_1=0$ болсо, анда (1-) теңдеме бир тектүү дифференциалдык теңдеме болоору белгилүү.

Эгерде c да c_1 да нөлдөн айырмалуу болсо, анда бул теңдемени чыгаруу үчүн төмөнкүдөй ордуна коюлардан пайдалансак болот:

$$\begin{cases} x=x_1+h \\ y=y_1+k \\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy_1}{dx_1} \end{cases} \quad (2)$$

(2-) теңдемедеги белгилөөлөрдү (1-) теңдемеге коюп

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{ax_1+by_1+ah+bk+c}{a_1x_1+b_1y_1+a_1h+b_1k+c_1} \quad (3)$$

теңдемесин алабыз. Бул теңдемеде

$$\begin{cases} ah+bk+c=0 \\ a_1h+b_1k+c_1=0 \end{cases} \quad (4)$$

шарты аткарылгандай h жана k сандарын тапдап алабыз. (4-) система аткарылган учурда (3-) теңдеме

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{ax_1+by_1}{a_1x_1+b_1y_1}$$

бир тектүү дифференциалдык теңдемеге келет. Бул теңдемедеги барабардыктын оң жагындагы коэффициенттерден турган $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$ аныктагычтын маанисине жараша теңдемени түрдүү жолдор менен чыгарууга болот.

$$1)\ \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\neq 0$$

болгон учурду карайлы.

Мисал: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y-3}{x-y-1}$

Бул теңдемени чыгаруу үчүн $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$ системасынан x жана y тин маанилерин табабыз.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2 \qquad \Delta x=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-4$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2 \qquad x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-4}{-2}=2$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{-2}{-2}=1$$

Демек, $x_1 = x-2, \quad y_1 = y-1$. Эми ордуларына коюп эсептейбиз. $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1+y_1}{x_1-y_1}$. Акыркы барабардыктын оң жагындагы туюнтманын алымын да бөлүмүн да x_1 ге бөлүп жиберебиз:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\frac{x_1}{x_1}+\frac{y_1}{x_1}}{\frac{x_1}{x_1}-\frac{y_1}{x_1}} = \frac{1+\frac{y_1}{x_1}}{1-\frac{y_1}{x_1}}.$$

Эми $\frac{y_1}{x_1} = u$ деп белгилесек, анда $\frac{dy_1}{dx_1} = u + x_1\frac{du}{dx_1}$ болот. Буларды акыркы теңдемеге коюп $u + x_1\frac{du}{dx_1} = \frac{1+u}{1-u}$ теңдемесин алабыз. Бул келип чыккан теңдеме өзгөрмөлөрү ажыралуучу дифференциалдык теңдеме. Аны чыгарабыз: $x_1\frac{du}{dx_1} = \frac{1+u}{1-u} - u$

Барабардыктын оң жагын жалпы бөлүмгө келтирип $x_1\frac{du}{dx_1} = \frac{1+u^2}{1-u}$ барабардыгын алабыз. Анын эки жагын тең интегралдап

$$\int\frac{(1-u)du}{1+u^2} = \int\frac{dx_1}{x_1}$$

$$\int\frac{(1-u)du}{1+u^2} = \int\frac{du}{1+u^2} - \frac{udu}{1+u^2} = arctgu - \frac{1}{2}\ln\left|1+u^2\right|$$

$$\int\frac{dx_1}{x_1} = \ln|x_1| + \ln C = \ln|Cx_1|$$

$$arctgu - \frac{1}{2}\ln\left|1+u^2\right| = \ln|Cx_1|$$

барабардыгына ээ болобуз. Келип чыккан барабардыкты топтоштуруп, жөнөкөйлөтүүнүн натыйжасында

$$arctgu = \ln|Cx_1| + \frac{1}{2}\ln\left|1+u^2\right|$$

$$arctgu = \ln|Cx_1| + \ln\sqrt{1+u^2}$$

$$arctgu = \ln\left|Cx_1\sqrt{1+u^2}\right|$$

$$Cx_1\sqrt{1+u^2} = e^{arctgu}$$

барабардыгын алабыз. Эми $x_1 = x-2, \quad y_1 = y-1$ ордуна коюларынан пайдланып жалпы чечимди жазабыз.

$$C(x-2)\sqrt{1+\left(\frac{y-1}{x-2}\right)^2} = e^{arctg\frac{y-1}{x-2}}$$

2) $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$ болгон учурду карайлы. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y-1}{4x+2y+5}$ теңдемесинин жалпы чечимин табайлы.

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 4x+2y=-5 \end{cases}$$

системасы чексиз көп чыгарылышка ээ болот. Башкача айтканда $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ болот.

Демек, $2x + y = z$ деп белгилеп алууга болот. Анда $y = z - 2x$ жана $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 2$ болот. Бул маанилерди теңдемедеги ордуларына койсок,

$$\frac{dz}{dx} - 2 = \frac{z-1}{2z+5}.$$

барабардыгы келип чыгат. Бул барабардык өзгөрмөлөрү ажыралуучу болгондуктан

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z-1}{2z+5} + 2$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{5z+9}{2z+5}$$

$$\frac{(2z+5)dz}{5z+9} = dx$$

болот. Акыркы барабардыктын эки жагын тең интегралдайбыз. $\int \frac{(2z+5)dz}{5z+9} = \int dx$

Бул барабардыктын сол жагындагы интеграл

$$\int \frac{(2z+5)dz}{5z+9} = \frac{2}{5}\int \frac{(z+2,5)dz}{z+1,8} = \frac{2}{5}\int \frac{(z+1,8+0,7)dz}{z+1,8} =$$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{(z+1,8+0,7)dz}{z+1,8} = \frac{2}{5}\int \left(1 + \frac{0,7}{z+1,8}\right)dz = \frac{2}{5}z + \frac{7}{25}\ln|z+1,8|$$

болот. Ал эми оң жагы $\int dx = x + C$ болгондуктан $\frac{2}{5}z + \frac{7}{25}\ln|z+1,8| = x + C$.

барабардыгы келип чыгат. Бул барабардыкта $2x + y = z$ болгондуктан аны ордуна коюп

$$\frac{4x+2y}{5} + \frac{7}{25}\ln|2x+y+1,8| = x + C$$

барабардыгын алабыз. Акыркы барабардык берилген теңдеменин жалпы чечими болот.

Көнүгүүлөр:

65. $\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 + 3xy + x^2}{x^2 + 2xy}$

66. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+2y}{x-2y}$

67. $(xy' - y)arctg\frac{y}{x} = x$

68. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$

69. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}$

70. $y\frac{dy}{dx} + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0$

71. $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$

72. $(x-2y)\frac{dy}{dx} = x + y$

Лекция№5.

Тема. Биринчи тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдемелер.

Аныктоо: Эгерде дифференциалдык теңдемеде изделүүчү функция жана анын туундулары биринчи даражада болсо, анда мындай теңдемелер сызыктуу дифференциалдык теңдемелер деп аталат жана жалпы учурда $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ (1) көрүнүшүндө болот. Мында $P(x)$ жана $Q(x)$ (мындан кийин P жана Q) функциялары x тен көз каранды үзгүлтүксүз функциялар.

Сызыктуу теңдеменин чечими.

Сызыктуу теңдеменин чечимин алуу үчүн белгисиз функцияны эки функциянын көбөйтүндүсү түрүндө карайбыз.

$$y(x)=v(x)\cdot u(x) \quad (2)$$

Бул көбөйтүндүдөгү функциялардын бири эркин тандалып, экинчиси ошол тандалып алынган функциянын негизинде келип чыгат.

(2-) теңдемени дифференцирлеп төмөнкүнү алабыз:

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx} \text{ же } y'=u'v+v'u$$

Алынган барабардыктарды биринчи теңдемеге коюп, $u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}+Puv=Q$ (3) теңдемесин алабыз. (3-) теңдемеден функциялардын бирин топтоштурабыз.

$$u\left(\frac{dv}{dx}+Pv\right)+v\frac{du}{dx}=Q \quad (4)$$

Мындан v функциясын $\frac{dv}{dx}+Pv=0$ барабардыгын канааттандыргандай тандап алабыз. Анда

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx}+Pv=0 \\ v\frac{du}{dx}=Q \end{cases}$$

болот. Алгач, системадагы биринчи теңдемеден v функциясын аныктап алалы. $\frac{dv}{dx}+Pv=0$ болгондуктан

$$\frac{dv}{dx}=-Pv$$

$$\frac{dv}{v}=-Pdx$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int Pdx$$

$$\ln|v|=-\int Pdx+\ln C$$

$$\ln|v|-\ln C=-\int Pdx$$

$$\ln\left|\frac{v}{C}\right|=\ln|C_1v|=-\int Pdx$$

$v=Ce^{-\int Pdx}=v(x)$ болот. Эми бул функцияны системадагы экинчи теңдемеге коюп u функциясын аныктап алабыз.

$v\frac{du}{dx}=Q$ болгондуктан $v(x)\frac{du}{dx}=Q$ болот. Мындан

$$du = \frac{Q}{v(x)}dx$$

$$\int du = \int \frac{Q}{v(x)}dx$$

$$u = \int \frac{Q}{v(x)}dx + C(x) = u(x)$$ болот.

Демек, $y(x) = v(x) \cdot u(x)$ (2) болгондуктан, бул функцияларды ордуларына койсок, белгисиз функция – $y(x) = Ce^{-\int Pdx}\left[\int \frac{Q}{v(x)}dx + C(x)\right]$ болот.

Мисал: $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$

Берилген теңдеменин жалпы чечимин алуу үчүн (2-) жана (3-) формулалардан пайдаланабыз:

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} - \frac{2uv}{x+1} = (x+1)^3$$

$$u\left(\frac{dv}{dx} - \frac{2v}{x+1}\right) + v\frac{du}{dx} = (x+1)^3$$

Келип чыккан теңдемедеги биринчи кошулуучуну нөлгө барабарлап v ны аныктап алабыз.

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx} - \frac{2v}{x+1} = 0 \\ v\frac{du}{dx} = (x+1)^3 \end{cases}$$

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2v}{x+1} = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x+1}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{2dx}{x+1}$$

$$\ln|v| = 2\ln|x+1| + \ln C$$

$$\ln|v| = \ln\left|C(x+1)^2\right|$$

$$v = C(x+1)^2$$

$$v\frac{du}{dx} = (x+1)^3$$

Бул функцияны системадагы экинчи теңдемеге коюп, u ну аныктап алабыз.

$$C(x+1)^2\frac{du}{dx} = (x+1)^3$$

$$du = \frac{(x+1)}{C}dx$$

$$\int du = \int \frac{(x+1)}{C}dx$$

$$u = \int \frac{(x+1)}{C}dx = \frac{1}{2C}x^2 + \frac{x}{C} + C_1$$

Аныкталган функцияларды көбөйтүп белгисиз функцияны табабыз.

$$y = C(x+1)^2\left[\frac{1}{2C}x^2 + \frac{x}{C} + C_1\right]$$

Көнүгүүлөр:

73. $y'+2y=4x$

74. $y'+\frac{1-2x}{x^2-x}y=1$

75. $y'+y=\cos x$

76. $y'+y=\sin x$

77. $2ydx+(y-6x)dy=0$

78. $xy'+y=e^x$

79. $x(y'-y)=(1+x^2)e^x$

80. $y'+2xy=xe^{-x}$

81. $(1-x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$

82. $y'+yx=e^{mx}$

83. $y'-ytgx=\frac{1}{\sin x}$

84. $xy'-\frac{y}{x+1}=x$

85. $xy'-y=x$

86. $xy'-y=3$

87. $ydx+(2y-3x)dy=0$

Толук дифференциалдагы теңдемелер.

Бизге $U(x,y)=0$ функциясы менен туюнтулуучу кыймылдын теңдемеси берилсин. Бул функция эки аргументтен көз каранды болгондуктан анын толук дифференциалы жекече туундуларынын суммасына барабар болот. Тактык үчүн $U'_x=M(x,y)$ жана $U'_y=N(x,y)$ деп белгилейли, анда теңдеме

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \quad (1)$$

түрүндө болот. Бул темага берилген көнүгүүлөр (1-) көрүнүшүндө болот. Мындай түрдөгү теңдеме толук дифференциалдагы теңдеме болушу үчүн изилденип жаткан функциядан алынган экинчи тартиптеги аралаш туундулары барабар болушу шарт. Демек (1-) түрдө берилген теңдеменин жалпы чечимин изилдөөнүн алдында анын толук дифференциалдагы теңдеме боло орун текшерип алуу керек. Ал үчүн биринчи кошулуучудан y боюнча, экинчи кошулуучудан x боюнча жекече туундуларын алабыз:

$$\begin{cases} M'_y=\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} \\ N'_x=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x} \end{cases}$$

Эгерде бул экинчи тартиптеги аралаш туундулар өз ара барабар болушса, башкача айтканда

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x} \quad (*)$$

шарты аткарылса, анда берилген теңдеменин жалпы чечимин изилдөөнү баштаса болот.

Эгерде

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\neq\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$$

болсо, анда берилген теңдемени кошумча изилдөөгө туура келет. Мындай теңдемелерге кийинчерээк токтолобуз.

Алгач $\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$ болгон учурду карайлы. Бул учурда (1-) теңдеменин жалпы чечимин алуу үчүн: барабардыктын оң жагындагы бир кошулуучуну өзү дифференцирленген өзгөрмө боюнча интегралдап, экинчи кошулуучуну башка өзгөрмөдөн көз каранды кошулуучу катары карайбыз. Биринчи кошулуучуну интегралдоо учурунда биринчи кошулуучудагы экинчи өзгөрмө турактуу сан катары каралат. Натыйжада

$$\begin{cases} U(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y) \\ U(x,y) = \psi(x) + \int N(x,y)dy \end{cases}$$

системасындагы теңдемелердин бирөөн чыгарууга туура келет. Биринчи учурун карайлы:

$$\int M(x,y)dx + \varphi(y) = U(x,y) \quad (2)$$

болот. Эми бул функциядан y боюнча алынган туунду (1-) теңдемедеги экинчи кошулуучуга барабар болгондуктан

$$\left(\int M(x,y)dx\right)'_y + \varphi'(y) = N(x,y)$$

болот. Акыркы барабардыктан белгисиз функция $\varphi'(y)$ ти табып алабыз: $\varphi'(y) = N(x,y) - \left(\int M(x,y)dx\right)'_y$

Келип чыккан барабардыктан $\varphi(y)$ функциясын табуу үчүн бул барабардыктын оң жагын y боюнча интегралдайбыз. Интегралдаган учурда интегралданып жаткан туюнтмадагы x өзгөрмөсү турактуу сан катары каралат.

$$\varphi(y) = \int\left[N(x,y) - \left(\int M(x,y)dx\right)'_y\right]dy + C$$

Аныкталган $\varphi(y)$ функциясынын маанисин (2-) барабардыка коюп, изилденип, жаткан

$$U(x,y) = \int M(x,y)dx + \int\left[N(x,y) - \left(\int M(x,y)dx\right)'_y\right]dy + C$$

функциясын алабыз. Бул функция берилген (1-) теңдеменин жалпы чечими болот.

Мисал: $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$ дифференциалдык теңдемесинин жалпы чечимин табалы. Ал үчүн алгач (*) шартынын аткарылышын текшерели.

Демек,

$$M(x,y) = \frac{2x}{y^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4}$$

$$N(x,y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4}$$

Мындан көрүнүп тургандай (*) шарты аткарылды. Эми теңдеменин жалпы чечимин издөөнү баштайбыз. Алгач барабардыктын сол жагындагы биринчи кошулуучуну өзү дифференцирленген өзгөрмө боюнча интегралдайлы, анда экинчи кошулуучу кийинки өзгөрмөдөн көз каранды функция катары каралат.

$$U(x,y) = \int \frac{2x}{y^3}dx + C(y) = \frac{2}{y^3}\int x dx + C(y) = \frac{2}{y^3}\frac{x^2}{2} + C(y) = \frac{x^2}{y^3} + C(y) \quad (**)$$

Толук туундунун шарты боюнча ушул натыйжадан (экинчи өзгөрмө y боюнча) алынган туунду $N(x,y)$ ке барабар болушу керек.

$$N(x,y) = \left(\frac{x^2}{y^3} + C(y)\right)'_y = -\frac{3x^2}{y^4} + C'(y)$$

Демек, $-\frac{3x^2}{y^4} + C'(y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$ болоору келип чыгат. Мындан $C'(y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} + \frac{3x^2}{y^4} = \frac{1}{y^2}$

$$C(y)=\int\frac{1}{y^2}dy=-\frac{1}{y}$$

Бул натыйжаны (**) барабардыгындагы ордуна коюп $U(x,y)=\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}$ функциясын алабыз. Бул функция берилген дифференциалдык теңдеменин жалпы чечими болот.

Көнүгүүлөр:

88. $(2x^2-xy^2)dx+(2y^2-x^2y)dy=0$
89. $\frac{xdy}{x^2+y^2}=(\frac{y}{x^2+y^2}-1)dx$
90. $e^y dx+(xe^y-2y)dy=0$
91. $yx^{y-1}dx+x^y\ln xdy=0$
92. $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{ydx-xdy}{x^2}$
93. $\frac{2x}{y}dx-\frac{y^2}{x^2}dx-\frac{x^2}{y^2}dy+\frac{2y}{x}dy=0$
94. $y\sin 2xydx+x\sin 2yxdy=0$
95. $(3x^2y+y^2)dx+(x^3+2xy)dy=0$
96. $(y^4+2xy)dx+(4y^3x+x^2)dy=0$
97. $2ydx+(e^y+2x)dy=0$

Интегралдоочу көбөйтүндү жана анын түрлөрү.

Бизге

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \quad (1)$$

теңдемеси берилсин. Алдынкы темада $\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2U}{\partial y\partial x}$ (*) болгон учурду карадык. Эми

$$\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}\neq\frac{\partial^2U}{\partial y\partial x} \quad (1^*)$$

болгон, башкача айтканда

$$\frac{\partial M(x,y)}{dy}\neq\frac{\partial N(x,y)}{dx}$$

болгон учурларга токтололу. Шарттан көрүнүп тургандай белгисиз функциянын экинчи тартиптеги аралаш туундулары барабар эмес. Биздин негизги максатыбыз берилген теңдемеге көбөйткөндө, ушул экинчи тартиптеги аралаш туундулары барабар болотургандай интегралдоочу көбөйтүндүнү табуу. Аны биз шарттуу түрдө $\mu(x,y)$ деп белгилейли. Анда

$$\frac{\partial[\mu(x,y)M(x,y)]}{dy}=\frac{\partial[\mu(x,y)N(x,y)]}{dx} \quad (2)$$

болушу керек. Демек,

$$\frac{\partial\mu(x,y)}{dy}M(x,y)+\frac{\partial M(x,y)}{dy}\mu(x,y)=$$
$$=\frac{\partial\mu(x,y)}{dx}N(x,y)+\frac{\partial N(x,y)}{dx}\mu(x,y)$$

Теңдемебиз жөнөкөй көрүнүштө болушу үчүн мындан ары $\mu(x,y)=\mu$, $M(x,y)=M$ жана $N(x,y)=N$ барабардыктарынан пайдаланалы. Анда,

$$\frac{\partial\mu}{dy}M+\frac{\partial M}{dy}\mu=\frac{\partial\mu}{dx}N+\frac{\partial N}{dx}\mu$$

болот. Мындан,

$$\frac{\partial M}{dy}\mu-\frac{\partial N}{dx}\mu=\frac{\partial\mu}{dx}N-\frac{\partial\mu}{dy}M$$

$$\left(\frac{\partial M}{dy}-\frac{\partial N}{dx}\right)\mu=\frac{\partial\mu}{dx}N-\frac{\partial\mu}{dy}M$$

болот. Эки акыркы барабардыктын эки жагын μ га бөлүп,

$$\frac{\partial M}{dy}-\frac{\partial N}{dx}=\frac{\partial\mu}{\mu dx}N-\frac{\partial\mu}{\mu dy}M$$

$$\frac{\partial M}{dy}-\frac{\partial N}{dx}=\frac{N\partial\ln\mu}{dx}-\frac{M\partial\ln\mu}{dy}\quad(3)$$

барабардыктарына ээ болобуз.

(3-) теңдемеде $\mu(x,y)$ функциясынын кайсыл өзгөрмөдөн көз каранды болушуна жараша эки түрдүү болот. Алар:

Эгерде y тен гана көз каранды болсо, анда $\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}=0$ болот;

Эгерде x тен гана көз каранды болсо, анда $\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}=0$ болот.

а) Демек, (3-) теңдемеде $\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}=0$ болсун дейли, анда теңдеме

$$\frac{\partial M}{dy}-\frac{\partial N}{dx}=-\frac{M\partial\ln\mu}{dy}$$

түрүнө келет. Бул барабардыктын эки жагын $-M$ ге бөлүп,

$$\frac{\frac{\partial N}{dx}-\frac{\partial M}{dy}}{M}=\frac{\partial\ln\mu}{dy}\quad(4)$$

барабардыгын алабыз. Келип чыккан барабардыктын эки жагын тең y боюнча интегралдап

$$\ln\mu=\int\frac{\frac{\partial N}{dx}-\frac{\partial M}{dy}}{M}dy\quad(5)$$

барабардыгына ээ болобуз. Бул барабардыкты потенцирлеп

$$\mu=e^{\int\frac{\frac{\partial N}{dx}-\frac{\partial M}{dy}}{M}dy}\quad(6)$$

барабардыгын алабыз. Акыркы келип чыккан (6-) барабардык интегралдоочу көбөйтүндү болот. (1-) теңдемедеги ар бир кошулуучуну μ га көбөйтсөк, анда (1-) теңдеме толук дифференциалдагы теңдемеге айланат. Аны чыгарууну алдынкы темада караганбыз.

б) Эми (3-) теңдемеде $\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}=0$ болсун дейли, анда теңдеме

$$\frac{\partial M}{dy}-\frac{\partial N}{dx}=\frac{N\partial\ln\mu}{dx}$$

түрүнө келет. Бул барабардыктын эки жагын $-N$ ге бөлүп,

$$\frac{\dfrac{\partial M}{dy}-\dfrac{\partial N}{dx}}{N}=\frac{\partial\ln\mu}{dx}\quad(4^*)$$

барабардыгын алабыз. Келип чыккан барабардыктын эки жагын тең y боюнча интегралдап

$$\ln\mu=\int\frac{\dfrac{\partial M}{dy}-\dfrac{\partial N}{dx}}{N}dx\quad(5^*)$$

барабардыгына ээ болобуз. Бул барабардыкты потенцирлеп

$$\mu=e^{\int\frac{\frac{\partial M}{dy}-\frac{\partial N}{dx}}{N}dx}\qquad(6^*)$$

барабардыгын алабыз. Акыркы келип чыккан (6*-) барабардык интегралдоочу көбөйтүндү болот. (1-) теңдемедеги ар бир кошулуучуну μ га көбөйтсөк, анда (1-) теңдеме толук дифференциалдагы теңдемеге айланат. Аны чыгарууну да алдынкы темада карагaнбыз.

Мисал: $(y+xy^2)dx-xdy=0$ теңдемесинин жалпы интегралын тапкыла.
Чыгаруу:
Демек,

$$\frac{\partial U}{\partial x}=M(x,y)=y+xy^2\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial^2U}{\partial xdy}=\frac{\partial M(x,y)}{dy}=1+2xy$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=N(x,y)=-x\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial^2U}{\partial ydx}=\frac{\partial N(x,y)}{dx}=-1$$

Мындан (*) шарты аткарылбаганы көрүнүп турат. Эми бул теңдеменин жалпы интегралын табуу үчүн интегралдоочу көбөйтүндүнү табышыбыз керек.

$$\ln\mu=\int\frac{\dfrac{\partial N}{dx}-\dfrac{\partial M}{dy}}{M}dy=\int\frac{-1-1-2xy}{y+xy^2}dy=\int\frac{-2(1+xy)}{y(1+xy)}dy=$$

$$=-2\int\frac{(1+xy)}{y(1+xy)}dy=-2\int\frac{1}{y}dy=-2\ln|y|=\ln\left|\frac{1}{y^2}\right|$$

Мындан

$$\ln\mu=\ln\left|\frac{1}{y^2}\right|\quad\Rightarrow\quad\mu=\frac{1}{y^2}$$

Эми келип чыккан туюнтманы берилген теңдемеге көбөйтөбүз: $\frac{1}{y^2}\left((y+xy^2)dx-xdy\right)=0$

$$\left(\frac{1}{y}+x\right)dx-\frac{x}{y^2}dy=0\quad(a)$$

Келип чыккан теңдеме үчүн (*) шартын текшерели:

$$\mu\frac{\partial U}{\partial x}=\mu M(x,y)=\frac{1}{y}+x\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial^2U}{\partial xdy}=\frac{\partial\mu M(x,y)}{dy}=-\frac{1}{y^2}$$

$$\mu\frac{\partial U}{\partial y}=\mu N(x,y)=-\frac{x}{y^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial^2U}{\partial ydx}=\frac{\partial\mu N(x,y)}{dx}=-\frac{1}{y^2}$$

Демек, келип чыккан теңдеме (*) шартын канааттандырат.

Эми (a) теңдемесиндеги биринчи кошулуучуну x боюнча интегралдап, экинчи кошулуучуну y тен көз каранды функция катары карайбыз.

$$U(x,y)=\int\left(\frac{1}{y}+x\right)dx+C(y)=\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}+C(y) \quad (b)$$

Эми белгисиз кошулуучу $C(y)$ ти аныктап алалы.

$$\frac{\partial U}{dy}=N(x,y)=-\frac{x}{y^2}$$

болгондуктан

$$U'_y(x,y)=\left(\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}+C(y)\right)'_y=-\frac{x}{y^2}+C'(y)$$

болот. Демек,

$$-\frac{x}{y^2}+C'(y)=-\frac{x}{y^2}$$

Мындан

$$C'(y)=\frac{x}{y^2}-\frac{x}{y^2}=0 \quad \Rightarrow \quad C(y)=C_1.$$

$C(y)$тин аныкталган маанисин (b) теңдемесине коюп, берилген дифференциалдык теңдеменин жалпы интегралын аныктайбыз:

$$U(x,y)=\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}+C$$

Жообу: $U(x,y)=\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{2}+C$

Көнүгүүлөр:

98. $\left(\dfrac{2x^2}{y^2}-x\right)dx+\left(2y+\dfrac{x^2}{y}\right)dy=0$

99. $\dfrac{x}{y(x^2+y^2)}dx=\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{1}{y}\right)dy$

100. $\dfrac{e^y}{y}dx+\left(\dfrac{x}{y}e^y-2\right)dy=0$

101. $\dfrac{x^{y-1}}{y^2}dx+\dfrac{x^y}{y^3}\ln x dy=0$

102. $(x^2+y)dx-xdy=0$

103. $y(1+yx)dx-xdy=0$

104. $(x^2+y^2+2x)dx+2ydy=0$

105. $\dfrac{y}{x}dx+(y^3-\ln x)dy=0$

106. $(3x^2+y)dx+\left(\dfrac{x^3}{y}+2x\right)dy=0$

107. $2dx+(e^y+2x)dy=0$

Биринчи тартипке келтирилүүчү айрым экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелер.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \quad (1)$$

(1-) теңдеме изделүүчү $y(x)$ функциясын айкын түрдө өзүндө камтыбайт. Мындай теңдемелерди параметрдин жардамында туундусуна карата чечилүүчү теңдемеге келтирсе болот.

$$\frac{dy}{dx} = p \quad (2)$$

(1-) теңдемеге (2-) барабардыкты пайдалансак анда, берилген теңдеме

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p) \quad (3)$$

түрүнө келет. $p = \frac{dy}{dx}$ болгондуктан $p' = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx}$ (*) же $p' = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$ (**) ордуна коюларынын бирин мисалдын берилишине жараша тандап алууга болот.

Эгерде теңдеме жалаң гана изделүүчү функция менен анын туундуларынан турса анда (*) ордуна коюсунан пайдалануу ыңгайлуу.

Эгерде теңдеме эркин өзгөрмө менен изделүүчү функция жана анын туундуларынан турса анда (**) ордуна коюсунан пайдалануу ыңгайлуу.

(3-) барабардыкты интегралдап $p = p(x, C_1)$ жалпы интегралына ээ болобуз. $\frac{dy}{dx} = p$ болгондуктан келип чыккан жалпы интегралды дагы бир ирет интегралдап $y = \int p(x, C_1)dx + C_2$ (4) теңдемесин алабыз. (4-) функция берилген дифференциалдык теңдеменин жалпы чечими болот.

Мисал:

$y'' = \sqrt{1 + (y')^2}$ теңдемесинин жалпы чечимин тапкыла.

Чыгаруу: Берилген теңдемени чыгаруу үчүн (*) ордуна коюсунан пайдаланабыз: $p' = \sqrt{1 + p^2}$ же

$$\frac{dp}{dx} = \sqrt{1 + p^2}$$

Келип чыккан барабардыктын эки жагын тамыр астындагы туюнтмага бөлүп

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = dx$$

барабардыгын алабыз. Эми анын эки жагын тең интегралдайлы:

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \int dx$$

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \ln\left|p + \sqrt{1 + p^2}\right|$$

$\int dx = x + C_1$ натыйжада $\ln\left|p + \sqrt{1 + p^2}\right| = x + C_1$ туюнт-масын потенцирлөө аркылуу $p + \sqrt{1 + p^2} = e^{x + C_1}$ барабар-дыгын алабыз. Параметр гиперболалык синусту $p = sh(x + C_1)$ берээри белгилүү болгондон кийин, гиперболалык синусту көрсөткүчтүү формада ордуна коюп $p = \frac{1}{2}\left(e^{x + C_1} - e^{-x - C_1}\right)$ барабардыгын алабыз. Эми (2-) ордуна коюдан пайдаланып $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{x + C_1} - e^{-x - C_1}\right)$ барабардыгына ээ болобуз. Акыркы барабардыкты интегралдоо менен

$$\int dy = \int \frac{1}{2}\left(e^{x+C_1} - e^{-x-C_1}\right)dx$$

$$y = \frac{e^{x+C_1}}{2} - \frac{e^{-x-C_1}}{2} + C_2$$

Жалпы интегралына ээ болобуз. Бул жалпы интеграл берилген дифференциалдык теңдеменин жалпы чечими болот.

Көнүгүүлөр:

108. $yy'' + (y')^2 = 0$
109. $y'' + y'tgx = \sin 2x$
110. $y'' + 2y(y')^3 = 0$
111. $y''x\ln x = y'$
112. $y''tgy = 2(y')^2$
113. $xy'' + y' = e^x x^2$
114. $y'' + 2y'x = 0$
115. $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$
116. $(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$
117. $y'' - y^3 = 1$
118. $2yy'' = (y')^2$
119. $xy'' + y' + x = 0$
120. $2yy'' = 1 + (y')^2$
121. $y''tgx = y' + 1$

Лекция№6.
Тема: Экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү турактуу коэффициенттүү дифференциалдык теңдемелер.

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (1)$$

(1-) теңдемеси турактуу коэффициенттүү экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме деп аталат. Мында p жана q турактуу сандар. Бул теңдеменин жалпы чечими жекече чечимдеринин сызыктуу комбинациясынан турат. Башкача айтканда $y_1 = f_1(x), \quad y_2 = f_2(x)$ болсо, анда $y = k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)$ түрүндө болот.

Берилген (1-) теңдеменин жалпы чечимин алуу үчүн алгач бул дифференциалдык теңдеменин мүнөздүк теңдемесин түзүп алуу керек. Ал үчүн берилген теңдемени канааттандыруучу жекече чечим $y = e^{kx}$ түрүндө болсун деп болжолдойлу. (1-) теңдеме белгисиз функциянын туундуларын да камтыгандыктан жекече чечимдин туундуларынан пайдаланабыз. Демек,

$$y = e^{kx}$$

$$y' = ke^{kx}$$

$$y'' = k^2 e^{kx}$$

$$y''' = k^3 e^{kx}$$

$$\ldots$$

$$y^{(n)} = k^n e^{kx}$$

болот.

Бул жекече чечимдин туундуларын (1-) теңдемедеги тиешелүү ордуларына коюп,

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0 \quad (2)$$

барабардыгын алабыз. Бул барабардыктан e^{kx} туюнтмасын жалпы кашаанын сыртына чыгарып, ушул туюнтмага бөлүп жиберебиз:

$$e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0$$

$$k^2 + pk + q = 0 \quad (3)$$

Натыйжада бир өзгөрмөлүү алгебралык теңдеме келип чыкта. Бул теңдеме (1-) дифференциалдык теңдеменин мүнөздүк теңдемеси деп аталат.

(3-) теңдеменин чечимдерине жараша (1-) теңдеменин чечимдери түрдүүчө болушат:

а) алгебралык теңдеменин дискриминанты $D > 0$ болсо, анда алгебралык теңдеме тиешелүү түрдө $k_1 \neq k_2$ тамырларына ээ болот. Ошондой эле (1-) теңдеменин жалпы чечими $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ (*) түрүндө болот;

б) алгебралык теңдеменин дискриминанты $D = 0$ болсо, анда алгебралык теңдеме $k = k_1 = k_2$ эселүү тамырларына ээ болот. Тиешелүү түрдө (1-) теңдеменин жалпы чечими $y = C_1 x e^{kx} + C_2 e^{kx}$ (**) түрүндө болот.

в) алгебралык теңдеменин дискриминанты $D < 0$ болсо, анда алгебралык теңдеме $k = a \pm ib$ комплекстик тамырларына ээ болот. Мында $a = \frac{-p}{2}$ жана $b = \pm\frac{\sqrt{-D}}{2} i$. Ошондой эле (1-) дифференциалдык теңдеменин жалпы чечими $y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$ (***) түрүндө болот.

Мисалдар:

1) Алгач мүнөздүк теңдеменин тамырлары чыныгы жана түрдүү болгон учурду карайлы: $y'' + 7y' + 10y = 0$

теңдемеси берилсин. Бул теңдеменин жалпы чечимин алуу үчүн анын мүнөздүк теңдемесин түзүп алабыз. Ал $k^2 + 7k + 10 = 0$ болот. Мүнөздүк теңдемени канааттандыруучу k нын маанилерин (алгебралык квадраттык теңдеменин тамырларын) аныктап алалы.

$$D = b^2 - 4ac = 49 - 40 = 9$$

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-7 \pm 3}{2}$$

$$k_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-7-3}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

$$k_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-7+3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$k_1 \neq k_2$ болгондуктан (*) формуласы боюнча берилген дифференциалдык теңдеменин жалпы чечими $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-2x}$ функциясы болот.

Жообу: $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-2x}$

2) Мүнөздүк теңдеменин тамырлары чыныгы жана эселүү болгон учурду карайлы. $y'' + 8y' + 16 = 0$ теңдемесинин жалпы чечимин табайлы. Бул теңдеменин мүнөздүк теңдемеси $k^2 + 8k + 16 = 0$ болот. Мүнөздүк теңдеменин тамырларын аныктайлы.

$$D = b^2 - 4ac = 64 - 64 = 0$$

мындан $k_1 = k_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2} = -4$. $k_1 = k_2$ болгондуктан (**) формуласы боюнча берилген дифференциалдык теңдеменин жалпы чечими

$$y = C_1 x e^{-4x} + C_2 e^{-4x}$$

функциясы болот.

Жообу: $y = C_1 x e^{-4x} + C_2 e^{-4x}$

3) Мүнөздүк теңдеменин тамырлары комплекстик сандар болгон учурду карайлы. $y'' + 5y' + 9y = 0$ теңдемеси берилсин. Анын мүнөздүк теңдемеси $k^2 + 5k + 9 = 0$. Бул мүнөздүк теңдеменин тамырлары

$$D = b^2 - 4ac = 25 - 36 = -11$$

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{11} i}{2} = \frac{-7}{2} \pm \frac{\sqrt{11}}{2} i \text{ болот.}$$

$k = a \pm ib$ болгондуктан (***) формуласы боюнча берилген дифференциалдык теңдеменин жалпы чечими

$$y = e^{-\frac{7}{2}x}(C_1 \cos\frac{\sqrt{11}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{11}}{2}x)$$

функциясы болот.

Жообу: $y = e^{-\frac{7}{2}x}(C_1 \cos\frac{\sqrt{11}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{11}}{2}x)$

Көнүгүүлөр:

122. $y'' + y' + \frac{1}{4} y = 0$
123. $y'' + 2y' + y = 0$
124. $y'' + 3y' + 2y = 0$
125. $y'' + 3y' - 2y = 0$
126. $y'' + 7y' + 9y = 0$
127. $y'' + 9y' - 7y = 0$
128. $y'' + y' + 2y = 0$
129. $y'' + 2y' + 4y = 0$
130. $y'' + 4y' + 3y = 0$
131. $y'' + 2y' + 3y = 0$
132. $y'' + 5y' + 4y = 0$
133. $y'' - 5y' + 4y = 0$
134. $y'' - 7y' + 10y = 0$
135. $y'' - 7y' + 6y = 0$
136. $y'' + 4y' - 4y = 0$
137. $y'' - 6y' - 8y = 0$

138. $y''-5y'+6y=0$

139. $y''+3y'+7y=0$

140. $y''+4y'=0$

141. $y''+4y=0$

142. $y''-4y=0$

143. $y''-6y=0$

144. $y''+3y=0$

145. $y''+2y=0$

146. $y''+3y'=0$

147. $y''+9y'=0$

148. $y'+4y=0$

149. $2y''-y=0$

150. $4y''+9y=0$

151. $3y''=4y'+3y$

Лекция №7.

Тема:Катарлар тушунугу. Сандык катарлар

Сандык катарлар жана алардын жыйналуучулугу

Сандардын чексиз удаалаштыгы берилсин:

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

n- мүчөсү жалпы формуласы менен берилсе, анда сан удаалаштыгы (катар) берилди деп айтууга болот. Эми ушул сан удаалаштыгынын алгачкы n мүчөсүнүн суммасын табайлы:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

Берилген сан катарынын андан кийинки мүчөлөрүн да ушундай эле жол менен кошулуучуларга топтоштуруп алабыз. Анда төмөнкү катарлардын суммасынан турган жаңы бир катар келип чыгат:

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$$

Эгерде акыркы келип чыккан сан катары туруктуу санга умтулса, анда берилген сан катары жыйналуучу болот жана аны

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

түрүндө жазууга болот.Башкача айтканда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

барабардыгы аткарылса, анда берилген чексиз сандык катар жыйналуучу болот.

Тескерисинче

$$\lim_{n\to\infty} S_n \neq S$$

барабарсыздыгы аткарылса, анда берилген чексиз сан катары таралуучу болот.

1.2. Жыйналуучу катарлардын касиеттери

1-теорема: Эгерде

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots u_{k-1} + u_k + u_{k+1} + u_{n-1} + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1)$$

сандык катары жыйналуучу болсо, анда

$$u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{n-1} + u_n + \cdots = \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n \quad (2)$$

сандык катары да жыйналуучу болот.

Далилдөө: (1-) сан катары жыйналуучу болсун дейли. Анда каралып жаткан катардын суммасы

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

барабардыгы менен табылат. (1-) катардын калтырып кетилген мүчөлөрүнүн суммасын S_k деп белгилейли. Ал эми σ_{n-k} аркылуу (2-) катардыналгачкы n-k мүчөсүнүн суммасын белгилейли. Анда

$$S_n = S_k + \sigma_{n-k} \quad (3)$$

барабардыгы келип чыгат. Мында S_k – пден көз каранды болбогон кандайдыр бир сан.

(3-) барабардыктан

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{n-k} = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_k) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_k = S - S_k$$

болоору келип чыгат. Тагыраак айтканда (2-) катардын $\{\sigma_{n-k}\}$ бөлүгүнүн суммасы туруктуу сан болгондуктан (2-) катар жыйналуучу болот.

Эми (2-) катар жыйналуучу болуп, суммасы σ га барабар болсун дейли. Анда, (3-) барабардыктан

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(S_k + \sigma_{n-k}) = \lim_{n\to\infty} S_k + \lim_{n\to\infty} \sigma_{n-k} = S_k + \sigma$$

болоору келип чыгат. Акыркы барабардыктан (1-) катардын жыйналуучу болушу далилденет.

1-касиет: Ар кандай жыйналуучу катардын каалаган бөдүкчө катары да жыйналуучу болот.

Эскертүү: Жыйналуучу катарлардын үстүнөн каалаган арифметикалык амалды аткарууга болот.

2-теорема: Эгерде

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

катары жыйналуучу болсо, анда

$$cu_1 + cu_2 + cu_3 + \cdots + cu_n + \cdots$$
катары да жыйналуучу болуп суммасы cSга барабар болот.
Далилдөө:Теореманын шарты боюнча
$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$
катары жыйналуучу болот. Эми экинчи катарды карайлы:
$$cu_1 + cu_2 + cu_3 + \cdots + cu_n + \cdots =$$
$$= c(u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots) = c\lim_{n\to\infty} S_n = cS$$
2-касиет: Каалагандай сан катарын кандайдыр бир нөлдөн айырмалуу болгон турактуу санга көбөйтүү үчүн, ал сан катарынын суммасын (n чексизге умтулган кездеги пределин) ошол санга көбөйтүү жетиштүү.
3-теорема:Эгерде
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
жана
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$
сандык катарлары жыйналуучу болуп, тиешелеш түрдө алардын суммалары S жана σболсо, анда
$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$$
катары да жыйналуучу болуп, суммасы $S \pm \sigma$болот.
Далилдөө:S_nжана σ_n тиешелеш түрдө
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
жана
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$
сандык катарларынын бөлүкчөлөрүнүн суммалары, ал эми τ_n-
$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$$
катарынын бөлүкчөсүнүн суммасы болсун. Анда
$$\tau_n = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots + (a_n \pm b_n) =$$
$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = S_n \pm \sigma_n$$
Акыркы алынган натыйжадан $n \to \infty$кезинде пределге өтсөк, анда
$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \lim_{n\to\infty} (S_n \pm \sigma_n) = \lim_{n\to\infty} S_n \pm \lim_{n\to\infty} \sigma_n = S \pm \sigma$$
Демек,
$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$$
катарынын бөлүкчөсүнүн суммасы $\{\tau_n\}$ - $S \pm \sigma$ суммасына жыйналгандыктан берилген катар да ушул суммага жыйналаары келип чыгат.
3-касиет: Каалагандай эки жыйналуучу катардын мүчөлөрүнүн алгебралык суммасынан түзүлгөн катар да жыйналуучу болот.
Көнүгүүлөр:
1.1. $\frac{3}{1\cdot 4} + \frac{5}{4\cdot 9} + \frac{7}{9\cdot 16} + \cdots$катарынын суммасын табып, жыйналуучу болушун далилдегиле.
1.2. Аныктаманы пайдаланып
$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{4n+3}{4n-1}$$

катарынын таралуучу болушун далилдегиле.

1.3.Катардын жалпы мүчөсүн жөнөкөй формада жазгыла:

$$\frac{4}{3}+\frac{7}{4}+\frac{10}{5}+\frac{13}{6}+\cdots$$

1.4. Катардын жалпы мүчөсүн жөнөкөй формада жазгыла:

$$\frac{3}{5}+\frac{8}{10}+\frac{15}{17}+\frac{24}{26}+\cdots$$

1.5. Катардын жалпы мүчөсүн жөнөкөй формада жазгыла:

$$\frac{2}{5}+\frac{4}{9}+\frac{6}{13}+\frac{8}{17}+\cdots$$

1.6. Геометриялык прогрессиянын элементтеринен түзүлгөн катарды жыйналуучулукка текшергиле:

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$$

1.7. Төмөнкү катардын суммасын тапкыла:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

Төмөнкү катарлардын бөлүкчөлөрүнүн суммаларын тапкыла. Эгерде катар жыйналуучу болсо, анда жалпы катардын суммасын тапкыла:

1.8. $\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\cdots$ 1.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}$

1.10. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}+\cdots$

1.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ 1.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6n+1}{(3n-1)^2(3n+2)^2}$

1.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{5n-3}{5n+2}\right)$

Чыгаруу

1.1. $\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+\cdots$катарынын суммасын табып, жыйналуучу болушун далилдегиле.

Берилген катардын мүчөлөрү рационалдык сандар. Бул катардын мүчөлөрү натуралдык сандардын катарын кандайдыр өзгөртүп түзүүдөн алынган дейли. Бөлчөктүн алымындагы сандар жалаң так сандар болуп турушат. Ошондуктан катардын n- жалпы мүчөсүнүн алымын

$$a_n=2n+1$$

деп туюнтууга болот. Себеби, каралып жаткан катардагы эң кичине так сан 3 болуп турат. Ал эми бөлүмүндөгү сандарды төмөнкүчө өзгөртүп түзүп алалы:

$$b_1=1^2\cdot 2^2, b_2=2^2\cdot 3^2, b_3=3^2\cdot 4^2 \ldots$$

Демек, өзгөртүп түзүүдөн көрүнүп тургандай, каралып жаткан удаалаштыктын ар бир мүчөсү натуралдык сан катарынын ошол номердеги мүчөсү менен өзүнөн кийинки мүчөсүнүн квадраттарынын көбөйтүндүсү түрүндө туюнтулуп турат. Ошондуктан берилген катардын жалпы мүчөсүнүн бөлүмүн

$$b_n=n^2(n+1)^2$$

деп жазсак болот. Анда булл эки катардын катышы берилген катардын жалпы мүчөсү болгондуктан ал

$$u_n=\frac{a_n}{b_n}=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

формуласы менен туюнтулуп калат.

Эми булл катардын алгачкы n мүчөсүнүн суммасын табабыз:

$$S_n=\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

Алгач катардын ар бир мүчөсүн төмөнкүдөй өзгөртүп алабыз:

$$S_n = \frac{4-1}{1\cdot 4} + \frac{9-4}{4\cdot 9} + \frac{16-9}{9\cdot 16} + \cdots + \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2}$$

Эми келип чыккан ар бир кошулуучуну мүчөлөп бөлүп алабыз:

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

Эми ар бир кашааларды ачып чыгабыз:

$$S_n = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

Акыркы барабардыктан көрүнүп тургандай кошулуучулардын биринчиси менен акыркысынан башка бардыгы жоюшуп кетет да, натыйжада төмөнкү сумма келип чыгат:

$$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

Акыркы сумманын $n \to \infty$ кездеги пределин тапсак, ал

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1$$

Демек, берилген катар жыйналуучу болот.

1.2. Аныктаманы пайдаланып

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{4n+3}{4n-1}$$

катарынын таралуучу болушун далилдегиле.

Алгач сумманы катарга ажыратып алабыз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{4n+3}{4n-1} = \ln\frac{7}{3} + \ln\frac{11}{7} + \ln\frac{15}{11} + \cdots + \ln\frac{4n+3}{4n-1} + \cdots$$

Бул катардын алгачкы n мүчөсүнүн суммасы:

$$S_n = \ln\frac{7}{3} + \ln\frac{11}{7} + \ln\frac{15}{11} + \cdots + \ln\frac{4n+3}{4n-1}$$

Логарифманын касиети боюнча:

$$S_n = \ln\left(\frac{7}{3}\cdot\frac{11}{7}\cdot\frac{15}{11}\cdot\ldots\cdot\frac{4n+3}{4n-1}\right)$$

барабардыгы келип чыгат. Логарифманын аргументиндеги көбөйтүүчүлөрдүн биринчисинин алымы менен кийинкисинин бөлүмү кыскарат да акырында

$$S_n = \ln\left(\frac{4n+3}{3}\right)$$

барабардыгы калат.

Эми ушул барабардыктын $n \to \infty$ кездеги пределин эсептейбиз:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{4n+3}{3}\right) = \infty$$

Демек каралып жаткан катар таркалуучу болот.

1.3. Катардын жалпы мүчөсүн жөнөкөй формада жазгыла:

$$\frac{4}{3} + \frac{7}{4} + \frac{10}{5} + \frac{13}{6} + \cdots$$

Бөлчөктүн бөлүмүндөгү сандар 3 төн кичине болбогон натуралдык сандар болгондуктан $b_n = n + 2$ болот. Ал эми алымындагы сандардан бирди кемитсек жалаң үчкө эселүү сандар келип чыгат. Демек, $a_n = 3n + 1$. Акырында берилген катардын жалпы мүчөсүнүн жөнөкөй формасы:

$$u_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{3n+1}{n+2}$$

1.4. Катардын жалпы мүчөсүн жөнөкөй формада жазгыла:

$$\frac{3}{5} + \frac{8}{10} + \frac{15}{17} + \frac{24}{26} + \cdots$$

Катарды түзгөн рационалдык сандардын бөлүмүндөгү сандар алымындагы сандардан эки гечоң, демек $b_n = a_n + 2$ болот. Ал эми аламындагы сандар коңшу болбогон эки удаалаш жуп же так сандардын көбөйтүндүсүнө ажырайт. Анда

$$a_n = n(n+2) = n^2 + 2n$$

Акырында берилген катардын жалпы мүчөсүнүн жөнөкөй формасы:

$$u_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n}{a_n + 2} = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 2}$$

1.5. Катардын жалпы мүчөсүн жөнөкөй формада жазгыла:

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{9} + \frac{6}{13} + \frac{8}{17} + \cdots$$

Студенттердин өз алдынча иштөөсүнө. Жообу:

$$u_n = \frac{2n}{4n+1}$$

1.6. Геометриялык прогрессиянын элементтеринен түзүлгөн катарды жыйналуучулукка текшергиле:

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$$

Студенттердин өз алдынча иштөөсүнө. Жообу:

$$S = \frac{a}{1-q}$$

1.7. Төмөнкү катардын суммасын тапкыла:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

Студенттердин өз алдынча иштөөсүнө. (1.1-көнүгүүгө аналогиялуу түрдө чыгарылат). Жообу:

$$S_n = \frac{n}{n+1} \text{ жана } S = 1$$

Төмөнкү катарлардын бөлүкчөлөрүнүн суммаларын тапкыла. Эгерде катар жыйналуучу болсо, анда жалпы катардын суммасын тапкыла:

1.8. $\frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \cdots$

Катардын жалпы мүчөсү: $a_n = \frac{3}{2^n}$

Катардын бөлүкчөсүнүн суммасы:

$$S_n = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \cdots + \frac{3}{2^n} = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) =$$

$$= 3\left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right)\right) =$$

$$= 3\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 3\left(\frac{2^n - 1}{2^n}\right)$$

$$S = \lim_{n\to\infty} 3\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 3 \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 3 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 3$$

1.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + .$$

Катардын алгачкы n мүчөсүнүн суммасын табабыз:

$$S_n = \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+2)(n+3)} =$$

$$= \frac{4-3}{3\cdot 4} + \frac{5-4}{4\cdot 5} + \frac{6-5}{5\cdot 6} + \cdots + \frac{n+3-n-2}{(n+2)(n+3)} =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \cdots +$$

$$+ \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

$$S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right)=\frac{1}{3}-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right)=\frac{1}{3}$$

1.10. $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+2)}+\cdots$

Каралып жаткан катардын алгачкы n мүчөсүнүн суммасын табабыз:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}=$$

$$=\frac{3-1-1}{1\cdot 3}+\frac{4-2-1}{2\cdot 4}+\frac{5-3-1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{n+2-n-1}{n(n+2)}$$

Келип чыккан катардын мүчөлөрүнүн алымындагы биринчи эки кошулуучуну өзүнчө кийинки (үчүнчү) кошулуучуну өзүнчө бөлчөктүн бөлүмүнө бөлүп алабыз:

$$S_n=\left(\frac{3-1}{1\cdot 3}-\frac{1}{1\cdot 3}\right)+\left(\frac{4-2}{2\cdot 4}-\frac{1}{2\cdot 4}\right)+\cdots+\left(\frac{n+2-n}{n(n+2)}-\frac{1}{n(n+2)}\right)$$

Эми келип чыккан катарды төмөнкүдөй эки катардын суммасына ажыратып алабыз:

$$S_n=\left[\frac{3-1}{1\cdot 3}+\frac{4-2}{2\cdot 4}+\cdots+\frac{n+2-n}{n(n+2)}\right]-\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}\right]$$

Экинчи чарчы кашаанын ичиндеги сумма

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n(n+2)}$$

бөлүкчө катарын берет. Демек,

$$S_n=\left[\frac{3-1}{1\cdot 3}+\frac{4-2}{2\cdot 4}+\cdots+\frac{n+2-n}{n(n+2)}\right]-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n(n+2)}$$

Мисалдын башталышында

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$$

болгондуктан, акыркы сумманын ордуна койсок

$$S_n=\left[\frac{3-1}{1\cdot 3}+\frac{4-2}{2\cdot 4}+\cdots+\frac{n+2-n}{n(n+2)}\right]-S_n$$

болоору келип чыгат. Акыркы барабардыкты суммага карата топтоштуруп

$$S_n=\frac{1}{2}\left[\frac{3-1}{1\cdot 3}+\frac{4-2}{2\cdot 4}+\cdots+\frac{n+2-n}{n(n+2)}\right]$$

барабардыгын алабыз. Кийинки баскычта чарчы кашаанын ичиндеги кошулуучуларды мүчөлөп бөлөбүз:

$$S_n=\frac{1}{2}\left[\frac{3-1}{1\cdot 3}+\frac{4-2}{2\cdot 4}+\cdots+\frac{n+2-n}{n(n+2)}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right]$$

Чарчы кашаанын ичиндеги кошулуучуларды жалпы бөлүмгө келтирип кошуп жиберсек:

$$\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{3n^2-13n+12}{2n^2-6n+4}\right]$$

барабардыгы келип чыгат. Демек берилген катардын алгачкы n мүчөсүнүн суммасы:

$$S_n=\frac{3n^2-13n+12}{4n^2-12n+8}$$

Эми катардын суммасын табабыз:

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-13n+12}{4n^2-12n+8}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n^2}{n^2}-\frac{13n}{n^2}+\frac{12}{n^2}}{\frac{4n^2}{n^2}-\frac{12n}{n^2}+\frac{8}{n^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{13}{n}+\frac{12}{n^2}}{4-\frac{12}{n}+\frac{8}{n^2}}=\frac{3-\frac{13}{\infty}+\frac{12}{\infty^2}}{4-\frac{12}{\infty}+\frac{8}{\infty^2}}=\frac{3-0+0}{4-0+0}=\frac{3}{4}$$

1.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

Студенттердин өз алдынча иштөөсүнө. Жообу: $S=\frac{1}{3}$

1.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6n+1}{(3n-1)^2(3n+2)^2}$

Алгач сумманы катарга ажыратып, андан кийин бөлүкчө катардын суммасын табабыз:

$$S_n=\frac{7}{2^2 5^2}+\frac{13}{5^2 8^2}+\frac{19}{8^2 11^2}+\cdots+\frac{6n+1}{(3n-1)^2(3n+2)^2}=$$
$$=\frac{2+5}{2^2 5^2}+\frac{5+8}{5^2 8^2}+\frac{8+11}{8^2 11^2}+\cdots+\frac{3n-1+3n+2}{(3n-1)^2(3n+2)^2}=$$
$$=\left(\frac{2}{2^2 5^2}+\frac{5}{2^2 5^2}\right)+\left(\frac{5}{5^2 8^2}+\frac{8}{5^2 8^2}\right)+\left(\frac{8}{8^2 11^2}+\frac{11}{8^2 11^2}\right)+\cdots+$$
$$+\left(\frac{3n-1}{(3n-1)^2(3n+2)^2}+\frac{3n+2}{(3n-1)^2(3n+2)^2}\right)=$$
$$=\left(\frac{2}{2^2 5^2}+\frac{5}{5^2 8^2}+\frac{8}{8^2 11^2}+\cdots+\frac{3n-1}{(3n-1)^2(3n+2)^2}\right)+$$
$$+\left(\frac{5}{2^2 5^2}+\frac{8}{5^2 8^2}+\frac{11}{8^2 11^2}+\cdots+\frac{3n+2}{(3n-1)^2(3n+2)^2}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{2\cdot 5^2}+\frac{1}{5\cdot 8^2}+\frac{1}{8\cdot 11^2}+\cdots+\frac{1}{(3n-1)\cdot(3n+2)^2}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{2^2\cdot 5}+\frac{1}{5^2\cdot 8}+\frac{1}{8^2\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(3n-1)^2\cdot(3n+2)}\right)=$$
$$=\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{(3n-1)\cdot(3n+2)^2}+\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{(3n-1)^2\cdot(3n+2)}$$

Теңдеш өзгөртүүлөрдүн натыйжасында, суммасы изилденип жаткан катар эки катардын суммасы түрүндө туюнтулуп калгандыктан, алардын ар биринин суммасын өз-өзүнчө табабыз:

$$S_{n_1}=\frac{1}{2\cdot 5^2}+\frac{1}{5\cdot 8^2}+\frac{1}{8\cdot 11^2}+\cdots+\frac{1}{(3n-1)\cdot(3n+2)^2}$$
$$S_{n_2}=\frac{1}{2^2\cdot 5}+\frac{1}{5^2\cdot 8}+\frac{1}{8^2\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(3n-1)^2\cdot(3n+2)}$$

Алгач S_{n_1} катарынын суммасын табабыз:

$$S_{n_1}=\frac{1}{2\cdot 5^2}+\frac{1}{5\cdot 8^2}+\frac{1}{8\cdot 11^2}+\cdots+\frac{1}{(3n-1)\cdot(3n+2)^2}=$$
$$=\frac{5-2}{3\cdot 2\cdot 5^2}+\frac{8-5}{3\cdot 5\cdot 8^2}+\cdots+\frac{3n+2-3n+1}{3\cdot(3n-1)\cdot(3n+2)^2}=$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\cdot 5}-\frac{1}{5^2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5\cdot 8}-\frac{1}{8^2}\right)+\cdots+$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(3n-1)\cdot(3n+2)}-\frac{1}{(3n+2)^2}\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\cdots+\frac{1}{(3n-1)\cdot(3n+2)}\right)-$$
$$-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots+\frac{1}{(3n+2)^2}\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3n-1)\cdot(3n+2)}-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3n+2)^2}$$

Акыркы эки сумманы да өз-өзүнчө эсептесек:

$$S_{k_1}=\frac{1}{3}\left(\frac{5-2}{3\cdot 2\cdot 5}+\frac{8-5}{3\cdot 5\cdot 8}+\cdots+\frac{3n+2-3n+1}{3\cdot(3n-1)\cdot(3n+2)}\right)=$$
$$=\frac{1}{3^2}\left(\frac{5-2}{2\cdot 5}+\frac{8-5}{5\cdot 8}+\cdots+\frac{3n+2-3n+1}{(3n-1)\cdot(3n+2)}\right)=$$

$$=\frac{1}{3^2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{3^2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right]=\frac{1}{3^2}\frac{3n+2-2}{6n+4}$$
$$S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^2}\frac{3n+2-2}{6n+4}=\frac{1}{18}$$
$$S_{k_2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots+\frac{1}{(3n+2)^2}\right)$$

Эми кийинки катардын суммасын табабыз:

$$S_{n_2}=\frac{1}{2^2\cdot 5}+\frac{1}{5^2\cdot 8}+\frac{1}{8^2\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(3n-1)^2\cdot(3n+2)}=$$
$$=\frac{5-2}{3\cdot 2^2\cdot 5}+\frac{8-5}{3\cdot 8\cdot 5^2}+\cdots+\frac{3n+2-3n+1}{3\cdot(3n-1)^2\cdot(3n+2)}=$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2\cdot 5}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5^2}-\frac{1}{5\cdot 8}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8^2}-\frac{1}{8\cdot 11}\right)+\cdots+$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(3n-1)^2}-\frac{1}{3n+2}\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots+\frac{1}{(3n-1)^2}\right)-$$
$$-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\cdots+\frac{1}{(3n-1)\cdot(3n+2)}\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3n-1)^2}-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3n-1)\cdot(3n+2)}$$

Акыркы эки сумманы да өз өзүнчө эсептесек:

$$S_{k_4}=\frac{1}{3}\left(\frac{5-2}{3\cdot 2\cdot 5}+\frac{8-5}{3\cdot 5\cdot 8}+\cdots+\frac{3n+2-3n+1}{3\cdot(3n-1)\cdot(3n+2)}\right)=$$
$$=\frac{1}{3^2}\left(\frac{5-2}{2\cdot 5}+\frac{8-5}{5\cdot 8}+\cdots+\frac{3n+2-3n+1}{(3n-1)\cdot(3n+2)}\right)=$$
$$=\frac{1}{3^2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{3^2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right]=\frac{1}{3^2}\frac{3n+2-2}{6n+4}$$
$$S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^2}\frac{3n+2-2}{6n+4}=\frac{1}{18}$$
$$S_{k_3}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots+\frac{1}{(3n-1)^2}\right)$$
$$S=\lim_{n\to\infty}S_{n_1}+\lim_{n\to\infty}S_{n_2}=\lim_{n\to\infty}S_{k_1}-\lim_{n\to\infty}S_{k_2}+\lim_{n\to\infty}S_{k_3}-\lim_{n\to\infty}S_{k_4}$$

Акыркы барабардыктагы

$$\lim_{n\to\infty}S_{k_1}=\lim_{n\to\infty}S_{k_4}=\frac{1}{18}$$

болгондуктан

$$S=\lim_{n\to\infty}S_{n_1}+\lim_{n\to\infty}S_{n_2}=\lim_{n\to\infty}S_{k_3}-\lim_{n\to\infty}S_{k_2}$$

болоору келип чыгат. Демек, берилген катардын суммасы:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_{k_3}-\lim_{n\to\infty}S_{k_2}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots+\frac{1}{(3n-1)^2}\right)-$$
$$-\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots+\frac{1}{(3n+2)^2}\right)=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{(3n+2)^2}\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}=\frac{1}{12}$$

1.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{5n-3}{5n+2}\right)$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{5k-3}{5k+2}\right)=\ln\frac{2}{7}+\ln\frac{7}{12}+\ln\frac{12}{17}+\cdots+\ln\left(\frac{5n-3}{5n+2}\right)$$

Логарифманын касиети боюнча

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{5k-3}{5k+2}\right)=\ln\left(\frac{2}{5n+2}\right)$$

болоору белгилүү. Ал эми катардын жалпы суммасы:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{5k-3}{5k+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{2}{5n+2}\right)=$$

$$=\ln\left(\frac{2}{5\infty+2}\right)=\ln 0=-\infty$$

Лекция №8
Тема: Катарлардын жыйналуучулугунун зарыл шарты

Зарыл шарты. Катарларды окуп үйрөнүүдө эки маселе пайда болот:

1) катарды жыйналуучулука изилдөө;

2) катардын жыйналуучулугу белгилүү болгон учурда анын суммасын табуу. Көпчүлүк учурларда теориялык жактан маанилүү болгон биринчи маселени карайбыз. Катарлардын жыйналуучу болушунун зарыл шартын үйрөнүп чыгабыз.

Теорема: эгерде берилген катар жыйналуучу болсо, анда ал катарды туюнтуучу жалпы мүчөсү нөлгө умтулат:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

Далилдөө:Шарт боюнча

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

катары жыйналуучу болот. S аркылуу булл катардын суммасын белгилейбиз. Андан кийин катардын бөлүкчө катарларынын төмөнкү суммаларын карайбыз:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$
$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$$

Акыркы эки барабардыктан

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

болоору келип чыгат.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Биз караган

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

шарты катардын жыйналуучулугунун зарыл шарты болуп эсептелет, бирок катардын жыйналуучу болушуна бул шарттын өзү гана жетишсиз.

Мисал: төмөнкү бир мисалды (гармоникалык катарды) карап көрөлү. Ал катарда

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

шарты аткарылса да, катар жыйналуучу болбойт:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Бул катардын таркалуучу болушун далилдейли. Эгерде бул катар жыйналуучу болгондо, анда анын суммасын S менен белгилөө аркылуу төмөнкү барабардыкты алууга болоор эле:

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$$

Бирок

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Тагыраак айтканда

$$S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}$$

Акыркы барабарсызыктан

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$$

барабардыгы туура эместиги келип чыгат. Ошондуктан берилген катар жыйналуучу эмес таралуучу болот.

Көнүгүүлөр:

2.1. Катардын жыйналуучулугунун зарыл шартын текшергиле:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg n}{\ln n + 2}$$

2.2. Катардын жыйналуучулугунун зарыл шартын текшергиле:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n}}$$

Төмөнкү катарларда катарлардын жыйналуучулугунун зарыл шартын текшергиле:

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+6}{100n-1}$ 2.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n^3}-25}{\sqrt{n}+50}$ 2.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{4n^2+1}}{5n^2-3}$

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{n}$ 2.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{n^2+1}$ 2.8. $\sum_{n=1}^{\infty}n\ln\frac{3n}{3n-1}$

Чыгаруу:

2.1. Катардын жыйналуучулугунун зарыл шартын текшергиле:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lg n}{\ln n+2}$$

Катардын жыйналуучулугун текшерүү үчүн $n\to\infty$ кездеги катардын жалпы мүчөсүнүн пределин эсептейбиз:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lg n}{\ln n+2}=\frac{\lg\infty}{\ln\infty+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Аныксыздыктарды жоюу жөнүндөгү эрежелердин ичинен Лопиталдын эрежесин пайдаланабыз. n жалаң натуралдык сандарды кабыл алгандыктан, Лопиталдын эрежесин пайдалануу үчүн n ди үзгүлтүксүз чоңдук болгон x менен алмаштырып алабыз:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\lg x}{\ln x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\lg x)'}{(\ln x+2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x\ln 10}}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{\ln 10}\neq 0$$

Катар таркалуучу болот.

2.2. Катардын жыйналуучулугунун зарыл шартын текшергиле:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n}}$$

Берилген катардын жыйналуучулугун текшерүү үчүн алгач аны жөнөкөйлөтүп алабыз:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{n}}:\left(n+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+\frac{1}{n}}\right)^{n+\frac{1}{n}}\left(n+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{\frac{n^2+1}{n}}\right)^{\frac{n^2+1}{n}}\left(\frac{n^2+1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+1}{n}}\left(\frac{n^2+1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Акыркы катардын пределин эсептейбиз:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+1}{n}}\left(\frac{n^2+1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1-1}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+1}{n}}\left(\frac{n^2+1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+1}{n}}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n^2+1}\right)^{-(n^2+1)}\right]^{\frac{-1}{n}}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=e^{0}\cdot 1=1$$

Төмөнкү катарларда катарлардын жыйналуучулугунун зарыл шартын текшергиле:

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+6}{100n-1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n+6}{100n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5n}{n}+\frac{6}{n}}{\frac{100n}{n}-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5+\frac{6}{n}}{100-\frac{1}{n}} = \frac{5+\frac{6}{\infty}}{100-\frac{1}{\infty}} =$$
$$= \frac{5}{100} = 0{,}05$$

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n^3}-25}{\sqrt{n}+50}$

Алгач радикалды даража менен алмаштырып алабыз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n^3}-25}{\sqrt{n}+50} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{3}{4}}-25}{n^{\frac{1}{2}}+50}$$

Эми келип чыккан катардын $n \to \infty$ кездеги пределин татабыз:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{3}{4}}-25}{n^{\frac{1}{2}}+50} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^{\frac{3}{4}}}{n^{\frac{3}{4}}}-\frac{25}{n^{\frac{3}{4}}}}{\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{3}{4}}}+\frac{50}{n^{\frac{3}{4}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{25}{n^{\frac{3}{4}}}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}+\frac{50}{n^{\frac{3}{4}}}} = \frac{1-\frac{25}{\infty}}{\frac{1}{\infty}+\frac{50}{\infty}} = \frac{1}{0} = \infty$$

2.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{4n^2+1}}{5n^2-3}$

Алгач бөлчөктүн алымында радыкал сыртында турган өзгөрүлмөнү радикалбелгисинин ичине киргизип алабыз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{4n^2+1}}{5n^2-3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4n^4+n^2}}{5n^2-3}$$

Келип чыккан катардын $n \to \infty$ кездеги пределин татабыз:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^4+n^2}}{5n^2-3}$$

$\sqrt{n^4} = n^2$ болгондуктан бөлчөктүн алымын $\sqrt{n^4}$ ка бөлүмүн n^2 ка бөлөбүз:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{4n^4+n^2}}{\sqrt{n^4}}}{\frac{5n^2-3}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{4n^4+n^2}{n^4}}}{\frac{5n^2-3}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}{5-\frac{3}{n^2}} = \frac{\sqrt{4+\frac{1}{\infty}}}{5-\frac{3}{\infty}} =$$
$$= \frac{\sqrt{4+0}}{5-0} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^n$

Бул мисал пределдер теориясындагы экинчи сонун пределге келет.Экинчи сонун предел :

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}718281 \ldots$$

Мисалды булл түргө келтирүү үчүн төмөнкүдөй өзгөртүүлөрдү жасоо керек. Алгач кашаанын ичин өзгөртүп түзүп алабыз:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-3+4}{2n-3}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^n$$

Кашаанын ичиндеги экинчи кошулуучу менен даражадагы туюнтма өз ара тескери пропорциялаш болушу керек. Башкача айтканда көбөйтүндүсү бирге барабар болушу керек. Алгач даражаны 2ге көбөйтөбүз. Туюнтманын мааниси өзгөрбөшү үчүн кайра дагы 2 ге бөлөбүз:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{\frac{2n}{2}}$$
Эми даражанын алымынан 3тү кемитип кайра кошобуз:
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{\frac{2n}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{\frac{2n-3+3}{2}}$$
Эми даражанын касиетинен пайдаланып даражаны көбөйтүндү түрүндө жазып алабыз:
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{\frac{2n-3+3}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{\frac{2n-3}{2}+\frac{3}{2}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{\frac{2n-3}{2}}\left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{\frac{3}{2}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{\frac{2n-3}{2}}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{\frac{3}{2}}$$
Эми биринчи пределдин даражасын 2 ге бөлүп кайра көбөйтөбүз:
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{\frac{2n-3}{2\cdot 2}}\right]^2\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{\frac{3}{2}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{\frac{2n-3}{4}}\right]^2\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{\frac{3}{2}}$$
Экинчи сонун предел боюнча биринчи предел:
$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{\frac{2n-3}{4}}\right]^2 = e^2$$
болот. Ошол эле учурда экинчи предел:
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(1+\frac{4}{2\infty-3}\right)^{\frac{3}{2}} = (1+0)^{\frac{3}{2}} = 1^{\frac{3}{2}} = 1$$
Демек, берилген катардын предели:
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{\frac{2n-3}{4}}\right]^2\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{2n-3}\right)^{\frac{3}{2}} =$$
$$= e^2\cdot 1 = e^2$$
Натыйжада катар таркалуучу болушу келип чыгат.

2.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{n^2+1}$
$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi n}{n^2+1}$$
Тригонометриялык функциянын аргументинин алымын да бөлүмүн да өзгөрмөнүн эң чоң даражасына бөлөбүз:
$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\sin\frac{\frac{\pi n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\sin\frac{\frac{\pi}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n} = \sin\frac{\pi}{\infty} = \sin 0 = 0$$
Катар жыйналуучу болот.

2.8. $\sum_{n=1}^{\infty} n\ln\frac{3n}{3n-1}$

Студенттердин өз алдынча иштөөсүнө. Жообу: катар таркалуучу болот.

3. Катарларды салыштыруу

1-теорема: n дин ар бир мааниси үчүн $a_n \le b_n$ барабарсыздыгы аткарыла тургандай оң мүчөлүү

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ жана } \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

катарлары берилсин. Анда,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

катарынын таралуучу болушунан

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

катарынын да таралуучу болушу келип чыгат.

Далилдөө: берилген катарлардын бөлүкчөлөрүнүн суммаларын тиешелеш түрдө S_n жана σ_n деп белгилейли. Анда $a_n \le b_n$ барабарсыздыгынан $S_n \le \sigma_n$ болоору келип чыгат. Эгерде b_n катары жыйналуучу болсо, анда a_n катары да сөзсүз жыйналуучу катар болот. Тескерисинче a_n катары таркалуучу катар болсо, анда $S_n \le \sigma_n$ барабарсыздыгынан b_n катарынын да таркалуучу болушу келип чыгат.

Көнүгүүлөр:

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$ 3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3+5}{(n^2+1)^2}$ 3.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

3.4. $\sum_{n=1}^{\infty} n^4\left(e^{\frac{1}{n^3}}-1\right)^2$ 3.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n^2-5}$ 3.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+7}{3n^3+11}$

3.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}}$ 3.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$ 3.9. $\sum_{n=1}^{\infty} tg\,\frac{\pi}{n+1}$

3.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+2n}{n^3+5n-5}$ 3.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

3.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+7}}{n^5+12}$ 3.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+3)}$

3.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(3^n-4)}$ 3.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+3)}{n^2}$

3.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}\ln(n+1)}$ 3.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^3}\ln(n+1)}$

3.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{4^n}{5^n+n}$ 3.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(1-\cos\frac{1}{n^2}\right)$

Чыгаруу:

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$

Бул катардын жыйналуучулугун салыштыруу аркылуу аныктаса болот. Тригонометриялык функциянын аргументи

$$0 < \frac{\pi}{2^n} \le \frac{\pi}{2}$$

болгондуктан

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$$

катарын

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$$

катары менен салыштырууга болот.

$$\sin\frac{\pi}{2^n} < \frac{\pi}{2^n}$$

болгондуктан, берилген катар жыйналуучу болот.

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3+5}{(n^2+1)^2}$

Алгач берилген катарды жөнөкөйлөтүп алабыз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3+5}{(n^2+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3+5}{n^4+2n^2+1}$$

Бул катарды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

катары менен салыштырууга болот.

$$\frac{4n^3+5}{n^4+2n^2+1} > \frac{1}{n}$$

Болгондуктан берилген катар таркалуучу болот. Себеби гармоникалык катар таркалуучу болушу бардыгыбызга белгилүү.

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

Алгач берилген катардын жалпы мүчөсүнүн алымын да бөлүмүн да алымынын түйүндөшүнө көбөйтүп алабыз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

Эми катардын жалпы мүчөсүнөн чоң болгон төмөнкү катарды карайлы:

$$\frac{1}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} : \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$$

3.4. $\sum_{n=1}^{\infty} n^4\left(e^{\frac{1}{n^3}}-1\right)^2$

Берилген катар таркалуучу болот. Себеби:

$$\lim_{n\to\infty} n^4\left(e^{\frac{1}{n^3}}-1\right)^2 = \lim_{n\to\infty} n^4 \lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n^3}}-1\right)^2 = \infty\cdot 0$$

3.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3n^2-5}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{3n^2-5}:\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{3n^2-5}=\frac{2}{3}$$

Берилген катар жыйналуучу болот.

3.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+7}{3n^3+11}$

Студенттердин өз алдынча иштөөсүнө. Жообу: катар жыйналуучу болот.

3.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}}$

Студенттердин өз алдынча иштөөсүнө. Жообу: катар жыйналуучу болот.

3.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}:\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$

Катар таркалуучу болот.

Бул катардын таркалуучу болушун башка жол менен да көрсөтсө болот. Далилдөө үчүн $n=t^2$ деп белгилеп алсак, анда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{t^2+1}{t^3}$$

Келип чыккан катарды эки катардын суммасына ажыратабыз:

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{t^2+1}{t^3}=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{t^2}{t^3}+\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{t^3}=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{t}+\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{t^3}$$

Биринчи катар гармоникалык катарды берээри жана ал таркалуучу катар экендиги белгилүү. Ал эми экинчи катар жыйналуучу катар болот. Жыйналуучу катарлардын 3-касиети боюнча бул эки катардын суммасы таркалуучу катар болушу келип чыгат.

3.9. $\sum_{n=1}^{\infty}tg\ \frac{\pi}{n+1}$

Студенттердин өз алдынча иштөөсүнө. Жообу: катар таркалуучу болот.

3.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+2n}{n^3+5n-5}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+2n}{n^3+5n-5}:\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n^2}{n^3+5n-5}=3$$

Катар таркалуучу болот.

3.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{\infty}\right)=\ln(1+0)=\ln 1=0$$

Катар жыйналуучу болот.

3.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+7}}{n^5+12}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2+7}}{n^5+12}:\frac{1}{n^4}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^{10}+7n^8}}{n^5+12}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{n^{10}}{n^{10}}+\frac{7n^8}{n^{10}}}}{\frac{n^5}{n^5}+\frac{12}{n^5}}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{7n^8}{n^{10}}}}{1+\frac{12}{n^5}} = 1$$

Катар жыйналуучу болот.

3.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+3)}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln(n+3)} : \frac{1}{\ln n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)'}{(\ln(n+3))'} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n} = 1$$

Катар жыйналуучу болот.

3.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(3^n-4)}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n}{n(3^n-4)} : \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n}{3^n-4}\right) = 1$$

Катар таркалуучу болот.

3.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+3)}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n+3)}{n^2} : \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln(n+3) = \infty$$

Берилген катар таркалуучу болот.

3.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}\ln(n+1)}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}\ln(n+1)} : \frac{1}{\sqrt{n^3}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0$$

Катар таркалуучу болот.

3.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^3}\ln(n+1)}$

Студенттердин өз алдынча иштөөсүнө. Жообу: Катар таркалуучу болот.

3.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{4^n}{5^n+n}$

Студенттердин өз алдынча иштөөсүнө. Жообу: Катар жыйналуучу болот.

3.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(1-\cos\frac{1}{n^2}\right)$

Студенттердин өз алдынча иштөөсүнө. Жообу: Катар жыйналуучу болот.

Лекция№9.Тема: Даламбердинбелгиси.Абсалюттук жыйналуучулук.

Теорема:Эгерде оң мүчөлүү

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

катары берилип, анын предели

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$$

жашаса, анда

а) $\rho<1$ болгондо катар жыйналуучу болот;

б) $\rho>1$ болгондо катар таралуучу болот.

Далилдөө: $\rho<1$ жана $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ болсун дейли. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ катары – нын жыйналуучу болушун далилдейли. Сан удаалаштыгынын аныктамасы боюнча каалаган $\varepsilon>0$ саны үчүн $n\geq N$ болгон сан табылып, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-\rho\right|<\varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылат. Мындан

$$\rho-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<\rho+\varepsilon\ (*)$$

барабарсыздыгы келип чыгат. $\rho<1$ болгондуктан $\rho+\varepsilon<1$ барабарсыздыгы аткарыла тургандай чексиз кичине ε санын тандап алууга болот. (*) барабарсыздыгынын оң жагындагы туюнтманы $\rho+\varepsilon=q$ деп белгилеп алсак, анда

$$n=N,N+1,N+2,\dots$$

сандары үчүн

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<q \text{ же } a_{n+1}<a_nq$$

Барабарсыздыгы аткарылат. n дин ордуна жогоруда көрсөтүлгөн маанилерди коюу аркылуу төмөнкүлөрдү алабыз:

$$a_{N+1}<a_Nq$$
$$a_{N+2}<a_{N+1}q<a_Nq^2$$
$$a_{N+3}<a_{N+2}q<a_Nq^3$$
$$\dots..$$

Башкача айтканда төмөнкү катардын мүчөлөрүн алабыз:

$$a_{N+1}+a_{N+2}+a_{N+3}+\cdots$$

Алынган катардын мүчөлөрүнөн тиешелеш түрдө чоң болгон мүчөлөрдөн түзүлгөн катарды карайлы. Ал геометриялык прогрессия болот:

$$a_Nq+a_Nq^2+a_Nq^3+\cdots$$

Теореманы шартында $\rho<1$ болгондуктан геометриялык прогрессия жыйналуучу болот. Ошондуктан ар бир мүчөсү тиешелеш түрдө геометриялык прогрессиянын мүчөлөрүнөн кичине болгон катар жыйналуучу болот.

б) $\rho>1$ болгон учурда катардын таралуучу болушун далилдөө үчүн ε санын (*) барабарсыздыгынын сол жагындагы $\rho-\varepsilon>1$ барабарсыздыгы аткарыла тургандай N номерин тандап алсак, анда $n\geq N$ номеринен баштап $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ барабарсыздыгы аткарылат. Ушундай жол менен кандайдыр бир N номеринен баштап берилген катардын элементтеринин кийинкиси мурункусунан чоң боло баштайт. Тагыраак айтканда $n\to\infty$ кездеги катардын мүчөсү нөлгө умтулбайт. Катардын жыйналуучулугунун зарыл шарты жөнүндөгү теореманын негизинде каралып жаткан катар таркалуучу болот.

Көнүгүүлөр:

4.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 4.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$ 4.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n+7}$

4.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^n}{5^n+12}$ 4.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3-5}$ 4.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n(n+1)}$

4.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$ 4.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$ 4.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$

4.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n+n}$ 4.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,3^n}{n^n}$ 4.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n+n^2}$

4.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n+2^n}$ 4.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{5n+4}\right)^n$ 4.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^{-2n^2}$

4.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{3^n}$ 4.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{n^2+5}\right)^n$

Чыгаруу:

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$

$$a_n=\frac{n}{2^n},\quad a_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}}$$

Теорема боюнча

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2\cdot 2^n}\frac{2^n}{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1$$

Каралган катар жыйналуучу болот.

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$

$$a_n=\frac{3^n n!}{n^n},\qquad a_{n+1}=\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3\cdot 3^n n!\,(n+1)}{(n+1)^n(n+1)}}{\frac{3^n n!}{n^n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 3^n n!\,(n+1)}{(n+1)^n(n+1)}\frac{n^n}{3^n n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^n}{(n+1)^n}=3\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n=3\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1-1}=$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-1}=3e^{-1}\cdot 1=\frac{3}{e}>1$$

Берилген катар таркалуучу болот.

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n+7}$

$$a_n=\frac{2n}{3^n+7},\qquad a_{n+1}=\frac{2n+2}{3\cdot 3^n+7}$$

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+2}{3\cdot 3^n+7}}{\frac{2n}{3^n+7}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{3\cdot 3^n+7}\frac{3^n+7}{2n}=$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(3^n+7)(n+1)}{(3\cdot 3^n+7)n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n+7}{3\cdot 3^n+7}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3\cdot 3^n+7}\lim_{n\to\infty}\frac{7}{3\cdot 3^n+7}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{3}\cdot 0\cdot 1 = 0 < 1$$

Катар жыйналуучу болот.

4.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^n}{5^n+12}$

$$a_n = \frac{n2^n}{5^n+12},\qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)2^{n+1}}{5^{n+1}+12}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)2^{n+1}}{5^{n+1}+12}}{\frac{n2^n}{5^n+12}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^{n+1}}{5^{n+1}+12}\frac{5^n+12}{n2^n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^{n+1}}{n2^n}\frac{5^n+12}{5^{n+1}+12} = \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{n}\frac{5^n+12}{5^{n+1}+12} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{n}\frac{5^n+12}{5(5^n+2{,}4)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+12}{5^n+2{,}4} =$$
$$= 1\cdot\frac{2}{5}\cdot 1 = \frac{2}{5} < 1$$

Каралган катар жыйналуучу болот.

4.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3-5}$

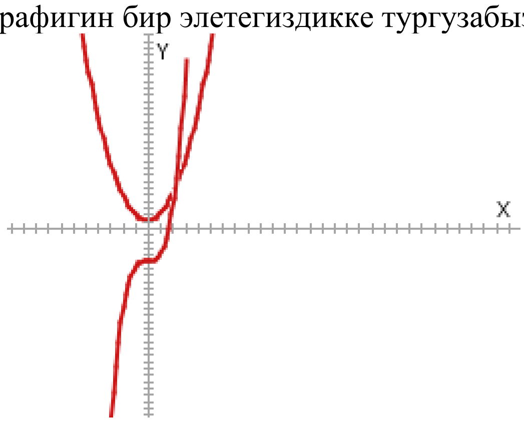
$$a_n = \frac{n^2+1}{n^3-5},\qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^3-5}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^3-5}}{\frac{n^2+1}{n^3-5}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^3-5}\frac{n^3-5}{n^2+1} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+2}{n^3+3n^2+3n-4}\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-5}{n^2+1} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n+2)(n^3-5)}{(n^3+3n^2+3n-4)(n^2+1)} = 1$$

Катарды кошумча изилдөөгө туура келет. Катардын n – жалпы мүчөсүн үзгүлтүксүз эки функциянын катышы түрүндө карайлы.

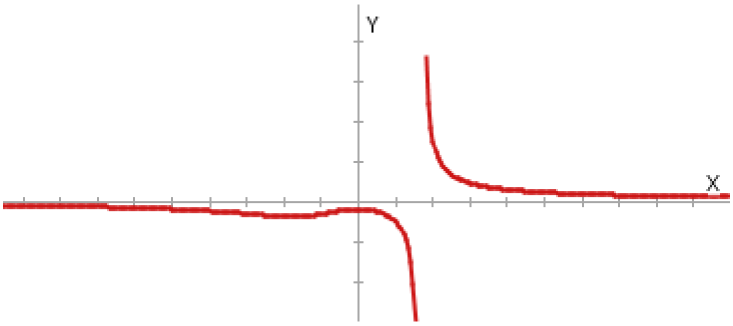
Анда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3-5} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{g(n)}$$

Булфункциялардын кайсы бири мурдараак чексизге умтулаарын аныктап алабыз. Ал үчүн функциялардын экөөнүн тең графигин бир элетегиздикке тургузабыз:



Графиктерден көрүнүп тургандай $n \in [3, +\infty)$ аралыгынан алынган каалагандай n саны үчүн $f(n) < g(n)$ болгондуктан берилген катар жыйналуучу болот. Берилген катардын өзүн функция катары карасак жана n ди үзгүлтүксүз чоңдук десек, анда жалпы мүчөнү функция катары карагандагы график



көрүнүшүндө болот. Графиктен көрүнүп тургандай $n \to \infty$ кездеги функциянын мааниси $a_n \to 0$ болот. Мындан сырткары аргументтин бүтүн маанисинде функция үзүлүү чекитине ээ болбойт.Демек, берилген катар жыйналуучу болот.

4.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n(n+1)}$

$$a_n = \frac{n!}{3^n(n+1)}, a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}(n+2)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}(n+2)}}{\frac{n!}{3^n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{3^{n+1}(n+2)} \frac{3^n(n+1)}{n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,(n+1)}{3\cdot 3^n(n+2)} \frac{3^n(n+1)}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3(n+2)} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{n+2} = \frac{1}{3} \cdot \infty = \infty$$

Берилген катар таркалуучу болот.

4.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n}$

$$a_n = \frac{n(n+1)}{3^n}, a_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{3^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)(n+2)}{3^{n+1}}}{\frac{n(n+1)}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{3^{n+1}} \frac{3^n}{n(n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{3\cdot 3^n} \frac{3^n}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}+\frac{2}{n}}{\frac{3n}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{3} = \frac{1+\frac{2}{\infty}}{3} = \frac{1+0}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

Катар жыйналуучу болот.

4.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$

$$a_n = \frac{n!}{10^n}, a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}}{\frac{n!}{10^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{10^{n+1}} \frac{10^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,(n+1)}{10\cdot 10^n} \frac{10^n}{n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{10} = \infty$$

Берилген катар таркалуучу болот.

4.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}$

$$a_n = \frac{n^3}{(n+1)!}, a_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{(n+2)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{(n+2)!}}{\frac{n^3}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(n+2)!} \frac{(n+1)!}{n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(n+1)!\,(n+2)} \frac{(n+1)!}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3(n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2+3n+1}{n^4+2n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^3}{n^4} + \frac{3n^2}{n^4} + \frac{3n}{n^4} + \frac{1}{n^4}}{\frac{n^4}{n^4} + \frac{2n^3}{n^4}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{3}{n^3} + \frac{1}{n^4}}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{\frac{1}{\infty} + \frac{3}{\infty} + \frac{3}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{2}{\infty}} = \frac{0+0+0+0}{1+0} =$$

$$= \frac{0}{1} = 0 < 1$$

Катар жыйналуучу болот.

4.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n + n}$

Студенттердин өз алдынча иштөөсүнө. Жообу: катар жыйналуучу болот.

4.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,3^n}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{3}{n}\right)^n$

$$a_n = n! \left(\frac{3}{n}\right)^n, a_{n+1} = (n+1)! \left(\frac{3}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \left(\frac{3}{n+1}\right)^{n+1}}{n! \left(\frac{3}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} (n+1)! \left(\frac{3}{n+1}\right)^{n+1} \frac{n^n}{n!\,3^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)!\,3^n}{(n+1)(n+1)^n} \frac{n^n}{n!\,3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^n}{(n+1)^n} = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = 3 \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n =$$

$$= 3 \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{(-1)}{n+1}\right)^{\frac{n+1-1}{(-1)}} =$$

$$= 3 \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{(-1)}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{(-1)}} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{(-1)}{n+1}\right) = 3e^{-1} = \frac{3}{e} > 1$$

Берилген катар таркалуучу болот.

4.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n + n^2}$

Студенттендин өз алдынча иштөөсүнө. Жообу: катар таркалуучу болот.

4.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n+2^n}$

Студенттердин өз алдынча иштөөсүнө. Жообу:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n^n+2^n}=\frac{1}{2}<1$$

Катар жыйналуучу болот.

4.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{5n+4}\right)^n$

$$a_n=\left(\frac{2n+1}{5n+4}\right)^n,a_{n+1}=\left(\frac{2n+3}{5n+9}\right)^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2n+3}{5n+9}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2n+1}{5n+4}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{5n+9}\right)\left(\frac{2n+3}{5n+9}\right)^n\left(\frac{5n+4}{2n+1}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{5n+9}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{5n+9}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+4}{2n+1}\right)^n=$$

$$=\frac{2}{5}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{5n+9}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+4}{2n+1}\right)^n=$$

$$=\frac{2}{5}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{10n^2+23n+12}{10n^2+23n+9}\right)^n=\frac{2}{5}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{10n^2+23n+9}\right)^n=$$

$$=\frac{2}{5}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{10n^2+23n+9}\right)^{\frac{10n^2+23n+9}{n}-23-\frac{9}{n}}=$$

$$=\frac{2}{5}\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{10n^2+23n+9}\right)^{\frac{10n^2+23n+9}{3}}\right]^{\frac{3}{n}}*$$

$$*\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{10n^2+23n+9}\right)^{-23}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{10n^2+23n+9}\right)^{-\frac{9}{n}}=$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\mathrm{e}^0\cdot1\cdot1=\frac{2}{5}$$

Берилген катар жыйналуучу болот.

4.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^{-2n^2}$

Студенттердин өз алдынча иштөөсүнө. Жообу: катар жыйналуучу болот.

4.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{3^n}$

Студенттердин өз алдынча иштөөсүнө. Жообу: катар жыйналуучу болот.

4.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{n^2+5}\right)^n$

Студенттердин өз алдынча иштөөсүнө. Жообу: катар жыйналуучу болот.

5. Кошинин радикалдык белгиси

Теорема: Эгерде

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

оң мүчөлүү сандык катарынын n-мүчөсүнөн алынган n-даражадагы тамыр бирден кичине (чоң) болсо, анда катар жыйналуучу (таркалуучу) болот.

Далилдөө:удаалаштыктын пределинин аныктоосу боюнча, каалагандай $\varepsilon > 0$ саны үчүн кандайдыр бир n>N номеринен башталып $\left|\sqrt[n]{u_n - l}\right| < \varepsilon$ болгондуктан

$$(l-\varepsilon)^n < a_n < (l+\varepsilon)^n$$

барабарсыздыгы аткарылаары белгилүү.

1. Алгач $l < 1$ болгон учурду далилдейли. $q = l + \varepsilon < 1$ барабарсыздыгы аткарыла тургандай кылып, ε санын чексиз кичине чоңдук катары тандап алабыз. Анда $a_n < q^n$ болоору келип чыгат. Акыркы алынган барабарсыздык $q < 1$ болгондо жыйналуучу геометриялык катарды берет. Ошондуктан катарларды салыштыруу теоремасы боюнча берилген катар жыйналуучу болот.

2. Эми $l > 1$ болгон учурду далилдейли. $q = l + \varepsilon > 1$ барабарсыздыгы аткарыла тургандай кылып, ε санын чексиз кичине чоңдук катары тандап алабыз. Анда $a_n > q^n$ болоору келип чыгат. Акыркы алынган барабарсыздык n дин маанилеринин жогорулашы менен катардын элементтери жогорулашын билдирет. Ошондуктан катардын жыйналуучулугунун зарыл шарты аткарылбайт да катар таркалуучу болот.

Көнүгүүлөр:

5.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ 5.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^{\mathrm{n}}(n+1)}$

5.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^n$ 5.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$

4.2-көнүгүүнү Кошинин радикалдык белгиси менен чыгаргыла.
4.14-көнүгүүнү Кошинин радикалдык белгиси менен чыгаргыла.
4.15-көнүгүүнү Кошинин радикалдык белгиси менен чыгаргыла.
4.17-көнүгүүнү Кошинин радикалдык белгиси менен чыгаргыла.

Чыгаруу:

4.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$
$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1-1} =$$
$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)} \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = \frac{1}{3}\cdot e^{-1}\cdot 1 = \frac{1}{3e}$$

Берилген катар жыйналуучу болот.

5.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^{\mathrm{n}}(n+1)}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^{\mathrm{n}}(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln\infty} = 0 < 1$$

Берилген катар жыйналуучу болот.

5.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{3n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}-\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n^2}} = \frac{2+\frac{1}{\infty}}{3-\frac{1}{\infty}} = \frac{2+0}{3-0} = \frac{2}{3} < 1$$

Берилген катар жыйналуучу болот.

5.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}{3} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{3}e = \frac{e}{3} < 1$$

Берилген катаржыйналуучу болот.

4.2-көнүгүүнү Кошинин радикалдык белгиси менен чыгаргыла.

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n^n}}\sqrt[n]{n!} = 3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} = 3\cdot 0\cdot\infty$$

Акыркы натыйжа аныксыздык болгондуктар катар таркалуучу болот.

4.14-көнүгүүнү Кошинин радикалдык белгиси менен чыгаргыла.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{5n+4}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{5n+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{5n}{n}+\frac{4}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{5+\frac{4}{n}} =$$

$$= \frac{2+\frac{1}{\infty}}{5+\frac{4}{\infty}} = \frac{2+0}{5+0} = \frac{2}{5} < 1$$

Берилген катар жыйналуучу болот.

4.15-көнүгүүнү Кошинин радикалдык белгиси менен чыгаргыла.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^{-2n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^{-2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{-2n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{\frac{6n+2}{-3}+\frac{2}{3}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{(3n+1)\frac{2}{-3}+\frac{2}{3}} =$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{(3n+1)}\right]^{-\frac{2}{3}} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}\cdot 1 = \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}} < 1$$

Берилген катар жыйналуучу болот.

4.17-көнүгүүнү Кошинин радикалдык белгиси менен чыгаргыла.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{n^2+5}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n^2+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n}{n^2}-\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{5}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{5}{n^2}} =$$

$$= \frac{\frac{2}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{1+\frac{5}{\infty}} = \frac{0-0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0 < 1$$

Каралган катар жыйналуучу болот.

6. Кошинин интегралдык белгиси

Теорема: $x \geq 1$ маанилеринде аныкталып, үзгүлтүксүз болгон $f(x)$ функциясы берилсин. Анда

$$f(1) = a_1, f(2) = a_2, f(3) = a_3, \dots, f(n) = a_n \quad (1)$$

маанилеринен түзүлгөн

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

катары жыйналуучу болушу үчүн

$$\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$$

өздүк эмес интегралы жыйналуучу болушу зарыл жана жетиштүү.

Далилдөө: төмөнкү катарды карайлы:

$$\int_{1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{3} f(x)dx + \dots + \int_{n}^{n+1} f(x)dx + \dots \quad (2)$$

Бул катардын n мүчөсүнөн турган бөлүкчөсүнүн суммасы

$$S_n = \int_{1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{3} f(x)dx + \dots + \int_{n}^{n+1} f(x)dx = \int_{n}^{n+1} f(x)dx \quad (3)$$

болот. (3-) катардын пределинин жашашынан (2-) катардын жыйналуучу болушу, тагыраак айтканда

$$\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$$

өздүк эмес интегралынын жыйналуучу болушу келип чыгат.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \int_{1}^{n+1} f(x)dx = \int_{1}^{\infty} f(x)dx$$

$f(x)$ функциясы монотондуу болгондуктан (1-) барабардыдыкты эске алсак, анда каалагандай $[n, n+1]$ кесиндисинде

$$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$$

барабарсыздыгы аткарылат.

$$a_n \geq f(x) \geq a_{n+1} (4)$$

Акыркы алынган (4-) барабарсыздыкты $[n, n+1]$ кесиндисинде интегралдап

$$\int_{1}^{n+1} a_n dx \geq \int_{1}^{n+1} f(x)dx \geq \int_{1}^{n+1} a_{n+1} dx$$

барабарсыздыгын алабыз. Бул барабарсыздыктан

$$a_n \geq \int_{1}^{n+1} f(x)dx \geq a_{n+1} \quad (4)$$

болоору келип чыгат. Катарларды салыштыруу белгиси боюнча: эгерде (4-) барабарсыздыктагы биринчи барабарсыздык аткарылса, анда берилген катар жыйналуучу болот. Эгерде (4-) барабарсыздыктагы экинчи барабарсыздык аткарылса, анда берилген катар таркалуучу болот.

Көнүгүүлөр:

6.1. $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}$ 6.2. $\sum_{x=2}^{\infty} \frac{1}{x \ln x}$ 6.3. $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{(3x+2)\ln(3x+2)}$

6.4. $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\ln x}{x}$ 6.5. $\sum_{x=2}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt[3]{\ln^5 x}}$

Чыгаруу:

6.1. $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}$

$$f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$$
функциясы $x>0$ болгон учурда оң жана кемүүчү функция болот. Ошондуктан берилген катардын жыйналуучулугун

$$\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$$

интегралын чыгаруу аркылуу аныктап алсак болот. Эгерде каралып жаткан өздүк эмес интеграл жыйналуучу болсо, анда берилген катар да жыйналуучу болот.

$$\lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}x^{-\alpha}dx=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\bigg|_{1}^{b}\right)=$$
$$=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}-\frac{1^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right)=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)=$$
$$=\frac{\infty^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Эгерде $\alpha>1$ болсо катар жыйналуучу болот, ал эми $\alpha\leq 1$ болсо, анда катар таркалуучу болот.

6.2. $\sum_{x=2}^{\infty}\frac{1}{x\ln x}$

$$\lim_{b\to\infty}\int_{2}^{b}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to\infty}\int_{2}^{b}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\lim_{b\to\infty}\ln(\ln x)|_{2}^{b}=$$
$$=\lim_{b\to\infty}(\ln(\ln b)-\ln(\ln 2))=\lim_{b\to\infty}\ln\left(\frac{\ln b}{\ln 2}\right)=\lim_{b\to\infty}\ln(\log_2 b)=$$
$$=\ln(\log_2\infty)=\ln\infty$$

Берилген катар таркалуучу болот.

6.3. $\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{(3x+2)\ln(3x+2)}$

Студенттердин өз алдынча иштөөсүнө. Жообу: катар таркалуучу болот.

6.4. $\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\ln x}{x}$

Студенттердин өз алдынча иштөөсүнө. Жообу: катар таркалуучу болот.

6.5. $\sum_{x=2}^{\infty}\frac{1}{x\sqrt[3]{\ln^5 x}}$

Студенттердин өз алдынча иштөөсүнө. Жообу: катар таркалуучу болот.

Лекция №10.
Тема: Белгиси кезектешүүчү сандык катарлар
Лейбництин белгиси

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$$

катары белгиси кезектешүүчү (өзгөрүүчү) катар деп аталат.
Теорема (Лейбництин белгиси): Эгерде белгиси кезектешүүчү катардын мүчөлөрү абсолюттук чоңдугу боюнча кийинки мүчөсү мурунку мүчөсүнөн кичине болуп, $n \to \infty$ кездеги жалпы мүчөсүнүн предели нөлгө умтулса:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

анда каралган катар жыйналуучу болотжана анын суммасы биринчи мүчөсүнөн ашпайт:

$$S \le a_1$$

Далилдөө: Катардын $n = 2m$ болгондогу бөлүкчөсүнүн суммасын карайлы:

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m})$$

$n = 2m$болгондо жалаң оң белгилүү кошулуучулар болуп, чектүү болот. Ошол эле учурда каралып жаткан катар өсүүчү да болот. Муну төмөнкү барабардыктан көрүүгө болот:

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}$$

Акыркы барабардыктан$S_{2m} < a_1$ барабарсыздыгы аткарылаары келип чыгат. Удаалаштыктын преленинин жашашы жөнүндөгү белгинин негизинде:

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S$$

болоору белгилүү.

Акыркы предлелдин жыйынтыгынан көрүнүп тургандай $m \to \infty$ кездеги удаалаштыктын предели $S_{2m} < a_1$ болгондуктан $S \le a_1$ болоору келип чыгат.

Эми удаалаштыктын $n = 2m + 1$ болгондогу так мүчөлөрүнүн суммасын карайлы.

$$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$$

болгондуктан, катардын жыйналуучулугунун зарыл шартын эске алсак, анда

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = S + 0 = S$$

болоору келип чыгат.

Мындан сырткары катардын мүчөлөрүнүн ичинен жуп номердегилери катардын суммасына сол жагынан ал эми так номердеги мүчөлөрү оң жагынан жакындашаары белгилүү.

Белгиси кезектешүүчү катарлардын жыйналуучулугунун жалпы жетиштүү шарты

Теорема: белгиси кезектешүүчү катардын мүчөлөрүнүн абсолюттук маанилеринен (модулдарынан) түзүлгөн катар жыйналуучу болсо, анда берилген катар да жыйналуучу болот.
Далилдөө: белгиси кезектешүүчү катардын жана ал катардын мүчөлөрүнүн модулдарынан түзүлгөн катардын мүчөлөрүнүн жардамында түзүлгөн катарды карайлы.
Белгиси кезектешүүчү катар:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots$$

Бул катардын мүчөлөрүнүн модулдарынан түзүлгөн катар:

$$|a_1| + |-a_2| + |a_3| + |-a_4| + \cdots + |(-1)^{n-1}a_n| + \cdots$$

Бул катарлардын суммасынан түзүлгөн катар:

$$(a_1 + |a_1|) + (-a_2 + |-a_2|) + \cdots + ((-1)^{n-1}a_n + |(-1)^{n-1}a_n|) + \cdots =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}((-1)^{n-1}a_n + |(-1)^{n-1}a_n|)$$

Сандык катардын каалаган n-мүчөсү үчүн

$$0 \le (-1)^{n-1}a_n + |(-1)^{n-1}a_n| \le 2|(-1)^{n-1}a_n|$$

барабарсыздыгы аткарылаары белгилүү. Бирок сандык катарлардын биринчи касиети боюнча

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2|(-1)^{n-1}a_n| = 2\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}a_n|$$

катары жыйналуучу болот. Ошондой эле катарларды салыштыруу белгиси боюнча да

$$\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^{n-1}a_n + |(-1)^{n-1}a_n|)$$

катары жыйналуучу болот. Каралып жаткан катарды канчалык түрдүү ыкма менен эки жыйналуучу катардын айырмасы түрүндө тандап алсак да жыйналуучу сандык катардын экинчи касиети боюнча жыйналуучу болоберет. Бирок, белгиси кезектешүүчү сандык катар жыйналуучу болгон учурлардын бардыгында, жыйналуучу катардын мүчөлөрүнүн модулдарынан түзүлгөн катар жыйналуучу боло бербейт.

Абсолюттук жана шарттуу жыйналуучу катарлар

Эгерде катардын мүчөлөрүнүн модулдарынан түзүлгөн катар жыйналуучу болсо, анда берилген катар абсолюттук жыйналуучу катар болот.

Эгерде катар өзү жыйналуучу болуп, катардын мүчөлөрүнүн модулдарынан түзүлгөн катар жыйналуучу болбосо, анда берилген катар шарттуу жыйналуучу катар болот.

Абсолюттук жыйналуучу катарлардын негизги касиеттери

1. Абсолюттук жыйналуучу катардын суммасы S ке барабар болсо, анда ал катардын мүчөлөрүнүн ордуларын каалагандай өзгөртсө да жыйналуучу катар келип чыгат жана суммасы S ке барабар болот (Дирихленин теоремасы).
2. Абсолюттук жыйналуучу катарлардын алгебралык суммасы да абсолюттук жыйналуучу катар болот.
3. Абсолюттук жыйналуучу катарлардын көбөйтүндүсү да абсолюттук жыйналуучу катар болуп, суммасы ал катарлардын суммаларынын көбөйтүндүсүнө барабар болот.

Көнүгүүлөр: Төмөнкү катарлардын жыйналуучу болушун текшергиле. Эгерде жыйналуучу болсо, анда суммасын 0,001 тактыкта алуу үчүн канча мүчөсүн кошуу керектигин аныктагыла.

7.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 7.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^7}{7n^6+3}$ 7.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \ln n}{2n-1}$

7.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos\frac{\pi n}{3}}{n^2+1}$ 7.5. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 7.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{5n+7}$

7.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^3+4}$ 7.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(4n+1)^n}$ 7.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{4^n+7}$

7.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{10-n3^n}$ 7.11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+4}{3n-7}\right)^n$

Чыгаруу:

7.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{\infty}=0$$

Берилген катар жыйналуучу болот.

7.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^7}{7n^6+3}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^7}{7n^6+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^7}{n^7}}{\frac{7n^6}{n^7}+\frac{3}{n^7}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{7}{n}+\frac{3}{n^7}}=\frac{1}{\frac{7}{\infty}+\frac{3}{\infty}}=\frac{1}{0}=\infty$$

Берилген катар таркалуучу болот.

7.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \ln n}{2n-1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)'}{(2n-1)'}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\infty}=0$$

Берилген катар жыйналуучу болот.

7.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{\pi n}{3}}{n^2+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{\pi n}{3}}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\cos\frac{\pi n}{3}\right)'}{(n^2+1)'}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi n}{3}\right)'}{(2n)'}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{\pi^2}{9}\cos\frac{\pi n}{3}\right)'}{2}=-\frac{\pi^2}{18}\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi n}{3}=-\frac{\pi^2}{18}$$

Берилген катар таркалуучу болот.

7.5. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

Студенттердин өз алдынча иштөөсүнө. Жообу: катар жыйналуучу болот.

7.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{5n+7}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{5n+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{5n+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{5n}{n}+\frac{7}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5+\frac{7}{n}}=$$
$$=(-1)^{\infty}\frac{1}{5+\frac{7}{\infty}}=\frac{1}{5}$$

Берилген катар таркалуучу болот.

7.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^3+4}$

Студенттердин өз алдынча иштөөсүнө. Жообу: катар жыйналуучу болот.

7.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(4n+1)^n}$

Студенттердин өз алдынча иштөөсүнө. Жообу: катар жыйналуучу болот.

7.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{4^n+7}$

Студенттердин өз алдынча иштөөсүнө. Жообу: катардын жыйналуучулугун текшерүү үчүн катарларды салыштыруудан пайдаланса болот. Катар жыйналуучу болот.

7.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{10-n3^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{10-n3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^n}{3^n}}{\frac{10}{3^n}-\frac{n3^n}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{10}{3^n}-n}=\frac{1}{\frac{10}{\infty}-\infty}=\frac{1}{-\infty}=0$$

Берилген катар жыйналуучу болот.

7.11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+4}{3n-7}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+4}{3n-7}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+4}{3n-7}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-7+11}{3n-7}\right)^n=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{11}{3n-7}\right)^{\left(\frac{3n-7}{11}+\frac{7}{11}\right)\frac{11}{3}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{11}{3n-7}\right)^{\frac{3n-7}{11}\cdot\frac{11}{3}+\frac{7}{3}}=$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{11}{3n-7}\right)^{\frac{3n-7}{11}}\right]^{\frac{11}{3}} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{11}{3n-7}\right)^{\frac{7}{3}} =$$

$$= e^{\frac{11}{3}} \cdot 1 = e^{\frac{11}{3}}$$

Берилген катар таркалуучу болот.

Лекция№11.
Тема:.Даражалуу катарлар
Функционалдык катарлар

Мүчөлөрү x тен функциялар болгон

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = a_1(x) + a_2(x) + \cdots + a_n(x) + \cdots$$

катары функцияоналдык катар деп аталат.

Функционалдык катардагы өзгөрүлмөнүн ордуна конкреттүү маанилерди берүү менен (мисалы: $x = x_0$) сандык катарды алабыз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0) = a_1(x_0) + a_2(x_0) + \cdots + a_n(x_0) + \cdots$$

Алынган катар биз мурдатан билгендей эле же жыйналуучу же таркалуучу болушу мүмкүн.

Эгерде алынган сандык катар жыйналуучу болсо, анда $x = x_0$ чекити функционалдык катардын **жыйналуу чекити** деп аталат.

Эгерде таркалуучу сандык катар болсо, анда $x = x_0$ чекитит функционалдык катардын таркалуу чекити деп аталат.

Функционалдык катар жыйналуучу болгон $x = x_0, x = x_1, \ \ldots, x = x_n$ чекиттеринин көптүгү функционалдык катардын **жыйналуу областы** деп аталат.

Жыйналуу областындагы функционалдык катардын маанилеринин суммасы кандайдыр бир $S = S(x)$ функциясы болот. Ал функция жыйналуу областында төмөнкү формула менен табылат:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

Бул барабардыктагы

$$S_n(x) = a_1(x) + a_2(x) + \cdots + a_n(x)$$

бөлүкчө катарынын суммасы болот.

Функционалдык катарлардын ичинен математикада жана анын колдонулуштарында эң көп пайдаланыла турган катар бул - мүчөлөрү өзгөрүлмөнүн даражалары аркылуу туюнтулган **даражалуу** катарлар. Ал төмөнкүдөй жазылат:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Абелдин теоремасы (даражалуу катардын жыйналуучулугу):

Эгерде даражалуу катар өзгөрүлмөнүн $x = x_0 \neq 0$ маанисинде жыйналуучу болсо, анда $|x| < |x_0|$ барабарсыздыгын канааттандырган x тин баардык маанилеринде абсолюттук жыйналуучу болот.

Далилдөө: теореманын шарты боюнча

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$$

катары жыйналуучу болот. Удаалаш эле жыйналуучулуктун шарты боюнча

$$\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$$

болоору белгилүү. Акыркы барабардыктан $a_n x_0^n$ чоңдугу чектелген болушу келип чыгат. Анда,

$$|a_n x_0^n| \leq M$$

деп жазууга болот.

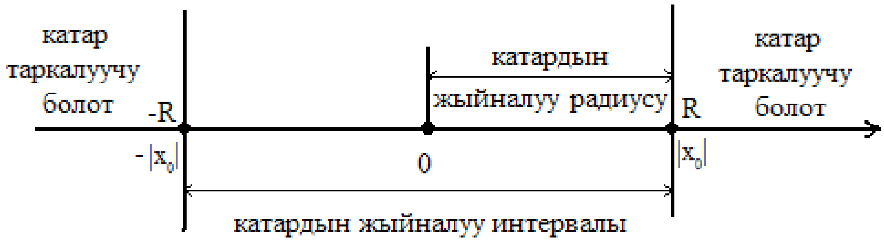
$|x| < |x_0|$ деп алсак, анда $q = \left|\frac{x}{x_0}\right|$ жана $q < 1$ болуп:

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x^n}{x_0^n}\right| \leq M q^n$$

болоору келип чыгат. Тагыраак айтканда, катардын ар бир мүчөсүнүн модулу жыйналуучу болгон геометриялык прогрессиянын тиешелеш мүчөлөрүнөн ашып кетпейт жана берилген катар абсолюттук жыйналуучу болот. Ошондуктан катарларды салыштыруу белгиси боюнча $|x| < |x_0|$ болгондо каралып жаткан катар абсолюттук жыйналуучу болот.

Даражалуу катарлардын жыйналуу интервалы жана жыйналуу радиусу

Абелдин теоремасы боюнча, $x_0 \neq 0$ нөлдөн айырмалуу саны даражалуу катардын жыйналуу чекити болсо, анда $(-|x_0|, |x_0|)$ интервалы толугу менен бул катар жыйналуучу болгон чекиттерден турат. Ал эми өзгөрүлмөнүн бул интервалдын сырттагы маанилеринде даражалуу катар таркалуучу болот.



Даражалуу катардын жыйналуу радиусун табуу үчүн, алгач берилген катардын мүчөлөрүнүн модулдарынан турган катарды түзүп алабыз:

$$|a_0x^0| + |a_1x^1| + |a_2x^2| + \cdots + |a_nx^n| + \cdots$$

Келип чыккан катарды катарлардын жыйналуучулугунун жетиштүү шарттарынын (катарларды салыштыруу, Даламбердин белгиси, Кошинин радикалдык белгиси, Кошинин интегралдык белгиси) бири менен текшеребиз. Бул учурда x тен көз каранды болгон туюнтманы пределдин алдына турактуу сан катары чыгарабыз. Келип чыккан натыйжаны бирден кичине деп барабарсыздыкты чыгарсак, каралып жаткан даражалуу катардын жыйналуу радиусу келип чыгат. Катардын берилишине карата төмөнкү эки формуланын бири колдонулат:

$$1) \quad R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad (*)$$

$$2) \quad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \qquad (**)$$

Эгерде даражалуу катарда өзгөрүлмөнүн ордуна $x = x_0$ конкреттүү маанини койгондо келип чыккан сандык катарды жыйналуучулукка текшерүүдө Даламбердин белгиси колдонулса, анда (*) формула колдонулат. Ал эми даражалуу катарда өзгөрүлмөнүн ордуна $x = x_0$ конкреттүү маанини койгондо келип чыккан сандык катарды жыйналуучулукка текшерүүдө Кошинин радикалдык белгиси колдонулса, анда (**) формула колдонулат

Даражалуу катарлардын касиеттери

1. Даражалуу катардын суммасы берилген катардын жыйналуу радиусунда үзгүлтүксүз функция болот.
2. Жыйналуучу даражалуу катарларды мүчөлөп кошкондо, көбөйткөндө жана кемиткенде келип чыккан катардын жыйналуу радиусу берилген катарлардын жыйналуу радиустарынын кесилишине барабар болот.
3. Жыйналуучу даражалуу катарды өзүнүн жыйналуу интервалында мүчөлөп дифференцирлөөгө болот.
4. Жыйналуучу даражалуу катарды өзүнүн жыйналуу интервалынан алынган каалаган аралыгында мүчөлөп интегралдоого болот.

Көнүгүүлөр:

8.1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 8.2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1}$ 8.3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}$

8.4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 8.5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{2n}$ 8.6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$

8.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 8.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt{2^n}}$ 8.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n-1}}$

8.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ 8.11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{3^{n-1}n\sqrt{n}}$

8.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{3^{n^2}}(x-1)^n$ 8.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-5)^n}{(n+1)^2 2^{n+2}}$

8.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$ 8.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$

Чыгаруу:

8.1. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

Берилген катардын жыйналуу радиусун табуу үчүн (*) формуласынан пайдаланабыз:

$$a_n=\frac{x^n}{n!},\qquad a_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^n}{n!}}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{n!}\frac{(n+1)!}{x^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{n!}\frac{n!\,(n+1)}{x\cdot x^n}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)}{x}\right|=\frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}|n+1|=\frac{1}{x}\cdot\infty=\infty$$

Каралган катар бүткүл сан огунда абсолюттук жыйналуучу болот.

8.2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1}$

Берилген даражалуу катарда өзгөрмөнүн даражалары жалаң так сандар болушат. Ошондуктан бул катардын жыйналуу радиусун табуу үчүн Даламбердин белгисин пайдалануу керек:

$$a_n=\left|\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right|,\qquad a_{n+1}=\left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}{\frac{x^{2n-1}}{2n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\frac{2n-1}{x^{2n-1}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2\cdot x^{2n-1}}{2n+1}\frac{2n-1}{x^{2n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2(2n-1)}{2n+1}\right|=$$

$$=x^2\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n-1}{2n+1}\right|=x^2$$

Берилген катар Даламбердин белгиси боюнча жыйналуучу болушу үчүн $x^2<1$ барабарсыздыгы аткарылышы керек. Демек, берилген катардын жыйналуу интервалы $-1<x<1$. Ошондой эле даражалуу катардын жыйналуу радиусу $R=1$.

8.3. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}}{\frac{1}{(n+1)2^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}\frac{(n+1)2^n}{1}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}\frac{2(n+1)2^{n-1}}{1}\right|=2\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)2^{n-1}}{n\cdot 2^{n-1}}\right|=$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=2$$

Өзгөрмө $-2<x+2<2$ барабарсыздыгын канааттандырганда катар жыйналуучу болот. Бул барабарсыздыкты жөнөкөйлөтсөк:

$$-4 < x < 0$$
катардын жыйналуу интервалы келип чыгат.

8.4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n} \frac{n+1}{1} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 1$$

8.5. $\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2x^2)^n$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^n}{2^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^n}{2 \cdot 2^n} \right| = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^n}{2^n} \right| = \frac{1}{2}$$

8.6. $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!}{n!\,(n+1)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = 0$$

8.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{(n+1)(n+2)}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} \right| = 1$$

8.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{2^n}}$

Эгерде өзгөрмөнүн ордуна конкреттүү бир санды койсок, анда сандык катар келип чыгат. Келип чыккан катардын жыйналуучу болушун Кошинин радикалдык белгиси менен текшеребиз. Ошондуктан берилген фукционалдык катардын жыйналуу радиусун (**) формула менен эсептейбиз.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{3^n}{\sqrt{2^n}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{3}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

8.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n-1}}$

Студенттердин өз алдынча иштөөсүнө. Жообу: $R = 2$

8.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$

Студенттердин өз алдынча иштөөсүнө. Жообу: $R = \frac{1}{e}$

8.11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{3^{n-1} n\sqrt{n}}$

Студенттердин өз алдынча иштөөсүнө. Жообу: $R = \frac{1}{3}$

8.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{3^{n^2}} (x-1)^n$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n!}{3^{n^2}}}{\frac{(n+1)!}{3^{(n+1)^2}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{3^{n^2}}\frac{3^{(n+1)^2}}{(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{3^{n^2}}\frac{3^{n^2}3^{2n}3}{n!\,(n+1)}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{2n}3}{n+1}\right|=3\lim_{n\to\infty}\left|\frac{9^n}{n+1}\right|=3\cdot\infty=\infty$$

8.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-5)^n}{(n+1)^2 2^{n+2}}$

Студенттердин өз алдынча иштөөсүнө. Жообу: $R=2$, катардын жыйналуу интервалы: $3<x<7$.

8.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{2n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n+1}{2n-1}\right|=1$$

Катардын жыйналуу интервалын аныктоо үчүн

$$-1<x-4<1$$

барабарсыздыгын чыгарабыз:

$$3<x<5$$

8.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}{\frac{\left((n+1)!\right)^2}{\left(2(n+1)\right)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n!)^2}{(2n)!}\frac{\left(2(n+1)\right)!}{\left((n+1)!\right)^2}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n!)^2}{(2n)!}\frac{(2n)!\,(2(n+1))}{(n!)^2(n+1)^2}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n+2}{(n+1)^2}\right|=0$$