Практические занятия по Математике

Тема 1-2. Матрицы и действия с матрицами

Данное методическое пособие поможет Вам научиться выполнять **действия с матрицами**: сложение (вычитание) матриц, транспонирование матрицы, умножение матриц, нахождение обратной матрицы. Весь материал изложен в простой и доступной форме, приведены соответствующие примеры, таким образом, даже неподготовленный человек сможет научиться выполнять действия с матрицами. Для самоконтроля и самопроверки Вы можете **бесплатно скачать матричный калькулятор >>>**.

Я буду стараться минимизировать теоретические выкладки, кое-где возможны объяснения «на пальцах» и использование ненаучных терминов. Любители основательной теории, пожалуйста, не занимайтесь критикой, наша задача – **научиться выполнять действия с матрицами**.

Для СВЕРХБЫСТРОЙ подготовки по теме (у кого «горит») есть интенсивный pdf-курс **Матрица, определитель и зачёт!**

Начнем.

Матрица – это прямоугольная таблица каких-либо **элементов**. В качестве **элементов** мы будем рассматривать числа, то есть числовые матрицы. **ЭЛЕМЕНТ** – это термин. Термин желательно запомнить, он будет часто встречаться, не случайно я использовал для его выделения жирный шрифт.

Обозначение: матрицы обычно обозначают прописными латинскими буквами $A, B, C, \ldots$

Пример: рассмотрим матрицу «два на три»:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Данная матрица состоит из шести **элементов**:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Все числа (элементы) внутри матрицы существуют сами по себе, то есть ни о каком вычитании речи не идет:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \cancel{5} & \cancel{-17} \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Это просто таблица (набор) чисел!

Также договоримся **не переставлять** числа, если иного не сказано в объяснениях. У каждого числа свое местоположение, и перетасовывать их нельзя!

Рассматриваемая матрица имеет две строки:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

и три столбца:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -17\\ -1 & 0 & 10\end{pmatrix}$$

СТАНДАРТ: когда говорят о размерах матрицы, то **сначала** указывают количество строк, а только потом – количество столбцов. Мы только что разобрали по косточкам матрицу «два на три».

Если количество строк и столбцов матрицы совпадает, то матрицу называют **квадратной**, например: $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ -5 & 4 & -7\\ 6 & -4 & -6\end{pmatrix}$ – матрица «три на три».

Если в матрице один столбец $C=\begin{pmatrix}-2\\ 4\\ 0\end{pmatrix}$ или одна строка $D=\begin{pmatrix}7 & 3 & -12 & 0 & 34\end{pmatrix}$, то такие матрицы также называют **векторами**.

На самом деле понятие матрицы мы знаем еще со школы, рассмотрим, например точку с координатами «икс» и «игрек»: $K(-1;7)$. По существу, координаты точки K записаны в матрицу «один на два». Кстати, вот Вам и пример, почему порядок чисел имеет значение: $K(-1;7)$ и $L(7;-1)$ – это две совершенно разные точки плоскости.

Теперь переходим непосредственно к изучению **действий с матрицами**:

1) Действие первое. Вынесение минуса из матрицы (внесение минуса в матрицу).

Вернемся к нашей матрице $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ -5 & 4 & -7\\ 6 & -4 & -6\end{pmatrix}$. Как вы наверняка заметили, в данной матрице слишком много отрицательных чисел. Это очень неудобно с точки зрения выполнения различных действий с матрицей, неудобно писать столько минусов, да и просто в оформлении некрасиво выглядит.

Вынесем минус за пределы матрицы, сменив у КАЖДОГО элемента матрицы знак:

$$B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ -5 & 4 & -7\\ 6 & -4 & -6\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 5 & -4 & 7\\ -6 & 4 & 6\end{pmatrix}$$

У нуля, как Вы понимаете, знак не меняется, ноль – он и в Африке ноль.

Обратный пример: $E=-\begin{pmatrix}-4 & 13 & -6\\ -17 & 5 & 7\\ -3 & -4 & -15\end{pmatrix}$. Выглядит безобразно.

Внесем минус в матрицу, сменив у КАЖДОГО элемента матрицы знак:

$$E=-\begin{pmatrix}-4 & 13 & -6\\ -17 & 5 & 7\\ -3 & -4 & -15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -13 & 6\\ 17 & -5 & -7\\ 3 & 4 & 15\end{pmatrix}$$

Ну вот, гораздо симпатичнее получилось. И, самое главное, выполнять какие-либо действия с матрицей будет ПРОЩЕ. Потому что есть такая математическая народная примета: **чем больше минусов – тем больше путаницы и ошибок**.

2) **Действие второе. Умножение матрицы на число**.

Пример:

$$3\cdot\begin{pmatrix}12 & -1\\ 7 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 12 & 3\cdot(-1)\\ 3\cdot 7 & 3\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}36 & -3\\ 21 & 0\end{pmatrix}$$

Всё просто, для того чтобы умножить матрицу на число, нужно **каждый** элемент матрицы умножить на данное число. В данном случае – на тройку.

Еще один полезный пример:

$-\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 14 & -8\\ -10 & -3\end{pmatrix}$ – умножение матрицы на дробь

Сначала рассмотрим то, чего делать **НЕ НАДО**:

$$\cancel{-\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 14 & -8\\ -10 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{7} & 0\\ -2 & \frac{8}{7}\\ \frac{10}{7} & \frac{3}{7}\end{pmatrix}}$$

Вносить дробь в матрицу НЕ НУЖНО, во-первых, это только затрудняет дальнейшие действия с матрицей, во-вторых, затрудняет проверку решения преподавателем (особенно, если $-\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 14 & -8\\ -10 & -3\end{pmatrix}$ – окончательный ответ задания).

И, тем более, **НЕ НАДО** делить каждый элемент матрицы на минус семь:

$$\cancel{-\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 14 & -8\\ -10 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}285714285 & 0\\ -2 & 1{,}142857143\\ 1{,}428571429 & 0{,}428571428\end{pmatrix}}$$

Из статьи **Математика для чайников или с чего начать**, мы помним, что десятичных дробей с запятой в высшей математике стараются всячески избегать.

Единственное, что *желательно* сделать в этом примере – это внести минус в матрицу:

$$-\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 14 & -8\\ -10 & -3\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ -14 & 8\\ 10 & 3\end{pmatrix}$$

А вот если бы **ВСЕ** элементы матрицы делились на 7 **без остатка**, то тогда можно (и нужно!) было бы поделить.

Пример:

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 14 & 8\\ -10 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 7 & 4\\ -5 & 1\end{pmatrix}$$

В этом случае можно и **НУЖНО** умножить все элементы матрицы на $\frac{1}{2}$, так как все числа матрицы делятся на 2 **без остатка**.

Примечание: в теории высшей математики школьного понятия «деление» нет. Вместо фразы «это поделить на это» всегда можно сказать «это умножить на дробь». То есть, деление – это частный случай умножения.

3) Действие третье. Транспонирование матрицы.

Для того чтобы транспонировать матрицу, нужно ее строки записать в столбцы транспонированной матрицы.

Пример:

Транспонировать матрицу $D=\begin{pmatrix}7 & 3 & -12 & 0 & 34\end{pmatrix}$

Строка здесь всего одна и, согласно правилу, её нужно записать в столбец:

$$D^T=\begin{pmatrix}7\\ 3\\ -12\\ 0\\ 34\end{pmatrix}$$ – транспонированная матрица.

Транспонированная матрица обычно обозначается надстрочным индексом ^{T} или штрихом справа вверху.

Пошаговый пример:

Транспонировать матрицу $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ -5 & 4 & -7\\ 6 & -4 & -6\end{pmatrix}$

Сначала переписываем первую строку в первый столбец:

$$B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ -5 & 4 & -7\\ 6 & -4 & -6\end{pmatrix}$$

$$B^T=\begin{pmatrix}-1 & * & *\\ 0 & * & *\\ -2 & * & *\end{pmatrix}$$

Потом переписываем вторую строку во второй столбец:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -5 & 4 & -7 \\ 6 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} -1 & -5 & * \\ 0 & 4 & * \\ -2 & -7 & * \end{pmatrix}$$

И, наконец, переписываем третью строку в третий столбец:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -5 & 4 & -7 \\ 6 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 6 \\ 0 & 4 & -4 \\ -2 & -7 & -6 \end{pmatrix}$$

Готово. Образно говоря, транспонировать – это значит взять матрицу за правый верхний угол и аккуратно повернуть её «на себя» по диагонали, «стряхивая» числа в столбцы транспонированной матрицы. Такая вот у меня ассоциация.

4) Действие четвертое. Сумма (разность) матриц.

Сумма матриц действие несложное.
НЕ ВСЕ МАТРИЦЫ МОЖНО СКЛАДЫВАТЬ. Для выполнения сложения (вычитания) матриц, необходимо, чтобы они были ОДИНАКОВЫМИ ПО РАЗМЕРУ.

Например, если дана матрица «два на два», то ее можно складывать только с матрицей «два на два» и никакой другой!

$$\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -5 & 4 & -7 \\ 6 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

<u>Пример:</u>

Сложить матрицы $F = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ и $G = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 15 & 7 \end{pmatrix}$

Для того чтобы сложить матрицы, необходимо сложить их соответствующие элементы:

$$F + G = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+(-4) & -1+(-3) \\ -5+15 & 0+7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12-4 & -1-3 \\ -5+15 & 0+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$$

Для разности матриц правило аналогичное, **необходимо найти разность соответствующих элементов**.

<u>Пример:</u>

Найти разность матриц $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -17\\ -1 & 0 & 10\end{pmatrix}$, $H=\begin{pmatrix}-4 & 3 & -15\\ -5 & -7 & 0\end{pmatrix}$

$$A-H=\begin{pmatrix}3 & 5 & -17\\ -1 & 0 & 10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4 & 3 & -15\\ -5 & -7 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-(-4) & 5-3 & -17-(-15)\\ -1-(-5) & 0-(-7) & 10-0\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}3+4 & 5-3 & -17+15\\ -1+5 & 0+7 & 10-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 2 & -2\\ 4 & 7 & 10\end{pmatrix}$$

А как решить данный пример проще, чтобы не запутаться? Целесообразно избавиться от лишних минусов, для этого внесем минус в матрицу H:

$$A-H=\begin{pmatrix}3 & 5 & -17\\ -1 & 0 & 10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4 & 3 & -15\\ -5 & -7 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 5 & -17\\ -1 & 0 & 10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -3 & 15\\ 5 & 7 & 0\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}3+4 & 5-3 & -17+15\\ -1+5 & 0+7 & 10-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 2 & -2\\ 4 & 7 & 10\end{pmatrix}$$

Примечание: в теории высшей математики школьного понятия «вычитание» нет. Вместо фразы «из этого вычесть это» всегда можно сказать «к этому прибавить отрицательное число». То есть, вычитание – это частный случай сложения.

5) Действие пятое. Умножение матриц.

Чем дальше в лес, тем толще партизаны. Скажу сразу, правило умножения матриц выглядит очень странно, и объяснить его не так-то просто, но я все-таки постараюсь это сделать, используя конкретные примеры.

Какие матрицы можно умножать?

Чтобы матрицу K можно было умножить на матрицу L нужно, **чтобы число столбцов матрицы K равнялось числу строк матрицы L**.

<u>Пример:</u>

Можно ли умножить матрицу $K=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 5 & 4\end{pmatrix}$ на матрицу $L=\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}$?

$$KL=\overbrace{\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 5 & 4\end{pmatrix}}^{\substack{m=2\\ \text{2 столбца}}}\cdot\left.\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}\right\}_{n=2\ \text{строки}}$$

$m=n$, значит, умножать данные матрицы можно.

А вот если матрицы переставить местами, то, в данном случае, умножение уже невозможно!

$$LK=\overbrace{\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}}^{\substack{m=1\\ \text{столбец}}}\cdot\left.\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 5 & 4\end{pmatrix}\right\}_{n=2\ \text{строки}}$$

$m\neq n$, следовательно, выполнить умножение невозможно:

$$\cancel{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}}$$

Не так уж редко встречаются задания с подвохом, когда студенту предлагается умножить матрицы, умножение которых заведомо невозможно.

Следует отметить, что в ряде случаев можно умножать матрицы и так, и так.

Например, для матриц, $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ и $N = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ возможно как умножение MN, так и умножение NM

Как умножить матрицы?

Умножение матриц лучше объяснить на конкретных примерах, так как строгое определение введет в замешательство (или помешательство) большинство читателей.

Начнем с самого простого:

Пример:

Умножить матрицу $K = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ на матрицу $L = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Я буду сразу приводить формулу для каждого случая:

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_1 + b_1c_2 \\ a_2c_1 + b_2c_2 \end{pmatrix}$ – попытайтесь сразу уловить закономерность.

$$KL = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \\ 5 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Пример сложнее:

Умножить матрицу $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ на матрицу $N = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

Формула: $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_1 + b_1c_2 & a_1d_1 + b_1d_2 \\ a_2c_1 + b_2c_2 & a_2d_1 + b_2d_2 \end{pmatrix}$

$$MN = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 9 - 3 \cdot 6 & 2 \cdot (-6) - 3 \cdot (-4) \\ 4 \cdot 9 - 6 \cdot 6 & 4 \cdot (-6) - 6 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В результате получена так называемая нулевая матрица.

Попробуйте самостоятельно выполнить умножение NM (правильный ответ $\begin{pmatrix} -6 & 9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$).

Обратите внимание, что $MN \neq NM$! Это почти всегда так!

Таким образом, **при умножении переставлять матрицы нельзя!**

Если в задании предложено умножить матрицу M на матрицу N, то и умножать нужно именно в таком порядке. Ни в коем случае не наоборот.

Переходим к матрицам третьего порядка:

Умножить матрицу $P = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$ на матрицу $R = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Формула очень похожа на предыдущие формулы:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1d_1 + b_1d_2 + c_1d_3 \\ a_2d_1 + b_2d_2 + c_2d_3 \\ a_3d_1 + b_3d_2 + c_3d_3 \end{pmatrix}$$

$$PR = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 + 8 \cdot (-3) - 4 \cdot 1 \\ 6 \cdot 2 + 9 \cdot (-3) - 5 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 + 7 \cdot (-3) - 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -20 \\ -16 \end{pmatrix}$$

А теперь попробуйте самостоятельно разобраться в умножении следующих матриц:

Умножьте матрицу $P = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$ на матрицу $S = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Вот готовое решение, но постарайтесь сначала в него не заглядывать!

$$PS = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 + 8 \cdot 4 - 4 \cdot 9 & 5 \cdot 2 + 8 \cdot (-1) - 4 \cdot 6 & 5 \cdot 5 + 8 \cdot 3 - 4 \cdot 5 \\ 6 \cdot 3 + 9 \cdot 4 - 5 \cdot 9 & 6 \cdot 2 + 9 \cdot (-1) - 5 \cdot 6 & 6 \cdot 5 + 9 \cdot 3 - 5 \cdot 5 \\ 4 \cdot 3 + 7 \cdot 4 - 3 \cdot 9 & 4 \cdot 2 + 7 \cdot (-1) - 3 \cdot 6 & 4 \cdot 5 + 7 \cdot 3 - 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$$

Тема 3-4. Как найти ранг матрицы?

Знание ранга матрицы повысит ваш ранг =)

На сегодняшнем уроке мы познакомимся с понятием ранга **алгебраической матрицы**, научимся находить ранг матрицы *методом окаймляющих миноров* и **методом Гаусса**, а также рассмотрим важное практическое приложение темы: **исследование системы линейных уравнений на совместность**.

Что такое ранг матрицы?

В юмористическом эпиграфе статьи содержится большая доля истины. Само слово «ранг» у нас обычно ассоциируется с некоторой иерархией, чаще всего, со служебной лестницей. Чем больше у человека знаний, опыта, способностей, блата и т.д. – тем выше его должность и спектр возможностей. Выражаясь по молодёжному, под рангом подразумевают общую степень «крутизны».

И братья наши математические живут по тем же принципам. Выведем на прогулку несколько произвольных *нулевых матриц*:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задумаемся, если в матрице *одни нули*, то о каком ранге может идти речь? Всем знакомо неформальное выражение «полный ноль». В обществе матриц всё точно так же:

Ранг нулевой матрицы θ любых размеров равен нулю.

***Примечание**: нулевая матрица обозначается греческой буквой «тета»*

В целях лучшего понимания ранга матрицы здесь и далее я буду привлекать на помощь материалы **аналитической геометрии**. Рассмотрим нулевой **вектор** $\overline{0}(0;\,0;\,0)$ нашего трёхмерного пространства, который не задаёт определённого направления и бесполезен для построения **аффинного базиса**. С алгебраической точки зрения координаты данного вектора записаны в **матрицу** «один на три» и логично *(в указанном геометрическом смысле)* считать, что ранг этой матрицы равен нулю.

Теперь рассмотрим несколько <u>ненулевых</u> *векторов-столбцов* и *векторов-строк*:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В каждом экземпляре есть хотя бы один ненулевой элемент, и это уже кое-что!

Ранг любого ненулевого вектора-строки (вектора-столбца) равен единице

И вообще – **если в матрице <u>произвольных размеров</u> есть хотя бы один ненулевой элемент, то её ранг <u>не меньше</u> единицы**.

Алгебраические векторы-строки и векторы-столбцы в известной степени абстрактны, поэтому снова обратимся к геометрической ассоциации. Ненулевой **вектор** $\overline{a} = (1;\,-1;\,2)$ задаёт вполне определённое направление в пространстве и годится для построения **базиса**, поэтому ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ будем считать равным единице.

***Теоретическая справка**: в линейной алгебре вектор – это элемент векторного пространства (определяемое через 8 аксиом), который, в частности, может представлять собой упорядоченную строку $\overline{v}$ (или столбец) действительных чисел $v_1;\, v_2;\, v_3;\ldots;\, v_n$ с определёнными для них операциями сложения $\overline{v}+\overline{w} = (v_1;\, v_2;\, v_3;\ldots;\, v_n)+(w_1;\, w_2;\, w_3;\ldots;\, w_n) = (v_1+w_1;\, v_2+w_2;\, v_3+w_3;\ldots;\, v_n+w_n)$ и умножения на действительное число $\lambda\overline{v} = \lambda(v_1;\, v_2;\, v_3;\ldots;\, v_n) = (\lambda v_1;\, \lambda v_2;\, \lambda v_3;\ldots;\, \lambda v_n)$. С более подробной информацией о векторах можно ознакомиться в статье **Линейные преобразования**.*

Рассмотрим матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, строки которой *линейно зависимы* (выражаются друг через друга). С геометрической точки зрения во вторую строку записаны координаты коллинеарного вектора $2\overline{a} = (2; -2; 4)$, который ничуть не продвинул дело в построении **трёхмерного базиса**, являясь в этом смысле лишним. Таким образом, ранг данной матрицы тоже равен единице.

Перепишем координаты векторов в столбцы (**транспонируем матрицу**):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Что изменилось с точки зрения ранга? Ничего. Столбцы пропорциональны, значит, ранг равен единице. Кстати, обратите внимание, что все три строки тоже пропорциональны. Их можно отождествить с координатами **трёх** коллинеарных векторов плоскости, из которых **только один** полезен для построения «плоского» базиса. И это полностью согласуется с нашим геометрическим смыслом ранга.

Из вышеприведённого примера следует важное утверждение:

Ранг матрицы по строкам равен рангу матрицы по столбцам. Об этом я уже немного упоминал на уроке об эффективных **методах вычисления определителя**.

Примечание*: из линейной зависимости строк следует линейная зависимость столбцов (и наоборот). Но в целях экономии времени, да и в силу привычки я почти всегда буду говорить о линейной зависимости строк.*

Продолжим дрессировать нашего любимого питомца. Добавим в матрицу третьей строкой координаты ещё одного коллинеарного вектора $-\overline{a} = (-1; 1; -2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Помог ли он нам в построении трёхмерного базиса? Конечно, нет. Все три вектора гуляют туда-сюда по одной дорожке, и ранг матрицы равен единице. Можно взять сколько угодно коллинеарных векторов, скажем, 100, уложить их координаты в матрицу «сто на три» и ранг такого небоскрёба всё равно останется единичным.

Познакомимся с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, строки которой *линейно независимы*. Пара неколлинеарных векторов $\overline{a} = (1; -1; 2), \overline{b} = (0; 1; -1)$ пригодна для построения трёхмерного базиса. Ранг этой матрицы равен двум.

А чему равен ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$? Строки вроде не пропорциональны…, значит, по идее трём. Однако ранг этой матрицы тоже равен двум. Я сложил первые две строки и записал результат внизу, то есть *линейно выразил* третью строку через первые две. Геометрически строки матрицы соответствуют координатам трёх **компланарных векторов**, причём среди этой тройки существует пара неколлинеарных товарищей.

Как видите, *линейная зависимость* в рассмотренной матрице не очевидна, и сегодня мы как раз научимся выводить её «на чистую воду».

Думаю, многие догадываются, что такое ранг матрицы!

Рассмотрим матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, строки которой *линейно независимы*. Векторы $\bar{a} = (1; -1; 2), \bar{b} = (0; 1; -1), \bar{c} = (1; 1; 1)$ образуют **аффинный базис**, и ранг данной матрицы равняется трём.

Как вы знаете, любой четвёртый, пятый, десятый вектор трёхмерного пространства будет линейно выражаться через базисные векторы. Поэтому, если в матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ добавить любое количество строк, то её ранг **всё равно будет равен трём**.

Аналогичные рассуждения можно провести для матриц бОльших размеров (понятно, уже без геометрического смысла).

Определение: **ранг матрицы – это максимальное количество линейно независимых строк**. Или: **ранг матрицы – это максимальное количество линейно независимых столбцов**. Да, их количество всегда совпадает.

Из вышесказанного также следует важный практический ориентир: **ранг матрицы не превосходит её минимальной размерности**. Например, в матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ четыре строки и пять столбцов. Минимальная размерность – четыре, следовательно, ранг данной матрицы заведомо не превзойдёт 4.

Обозначения: в мировой теории и практике не существует общепринятого стандарта для обозначения ранга матрицы, наиболее часто можно встретить: $rank, \quad rang, \quad rg, \quad r$ – как говорится, англичанин пишет одно, немец другое. Поэтому давайте по мотивам известного анекдота про американский и русский ад обозначать ранг матрицы родным словом. Например: $\text{Ранг}(\Theta) = 0, \text{Ранг}(A) = 4$. А если матрица «безымянная», коих встречается очень много, то можно просто записать $\text{Ранг} = \ldots$.

Как найти ранг матрицы с помощью миноров?

На уроках о **вычислении определителя** и нахождении **обратной матрицы** нам уже встречались миноры второго порядка, получаемые вычёркиванием строк и столбцов в матрице «три на три». Сейчас мы расширим понятие минора и дадим его определение… да не вздыхайте так тяжко, тут с картинками =)

Минором прямоугольной матрицы называется **определитель**, составленный из чисел, которые находятся на пересечении различных k строк и различных k столбцов матрицы. Число k называют **порядком минора**.

Заметьте, что сама матрица не обязана быть квадратной. Рассмотрим конкретный пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & -5 & 3 \\ 2 & 5 & -3 & 9 & 4 \\ 3 & -2 & 8 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Как получить какой-нибудь минор 2-го порядка? Нужно выбрать две произвольные строки, например, **2-ю и 4-ю**, два произвольных столбца, например, **3-й и 5-й**, и числа, находящиеся на их пересечении

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & -5 & 3 \\ 2 & 5 & \boxed{-3} & 9 & \boxed{4} \\ 3 & -2 & 8 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & \boxed{-4} & 2 & \boxed{6} \end{pmatrix}$$

записать в минор второго порядка: $M_2 = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}$.

Сколько всего миноров 2-го порядка? Много. Существуют специальные комбинаторные формулы для подсчёта количества миноров, но в рамках данного занятия это малополезная информация.

Получим какой-нибудь минор третьего порядка. Рассматриваем три произвольные строки, например, **1-ю, 3-ю и 4-ю**, три произвольных столбца, например, **1-й, 2-й и 4-й** и с их пересечения

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & 7 & \boxed{-5} & 3 \\ 2 & 5 & -3 & 9 & 4 \\ \boxed{3} & \boxed{-2} & 8 & \boxed{1} & 5 \\ \boxed{4} & \boxed{6} & -4 & \boxed{2} & 6 \end{pmatrix}$$

«снимаем» минор 3-го порядка: $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$.

Что касается миноров 4-го порядка, то здесь выбор уже невелик: необходимо задействовать все 4 строки и четыре произвольных столбца, например, все столбцы, за исключением 3-го:

$$M_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 & 3 \\ 2 & 5 & 9 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

Алгоритм нахождения ранга матрицы с помощью миноров

В качестве примера возьмём ту же матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & -5 & 3 \\ 2 & 5 & -3 & 9 & 4 \\ 3 & -2 & 8 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. Поскольку в матрице есть ненулевые элементы, то её ранг не меньше единицы и, очевидно, что он не превосходит 4. Как действовать дальше?

Дальше необходимо начать перебор и вычисление миноров 2-го порядка. Если ВСЕ миноры 2-го порядка окажутся нулевыми, то ранг матрицы равен единице. Но это крайне маловероятно, рано или поздно (чаще всего рано), встретится ненулевой минор $M_2 \neq 0$, и данный факт означает, что ранг матрицы **не менее двух**.

На следующем шаге последовательно перебираем и рассчитываем миноры 3-го порядка. Если ВСЕ эти миноры равны нулю, то $\text{Ранг} = 2$. Если же встретился минор $M_3 \neq 0$, то делаем вывод о том, что ранг матрицы **не менее трёх** и переходим к следующему шагу.

Перебор и вычисление миноров 4-го порядка. Если ВСЕ миноры 4-го порядка равны нулю, то $\text{Ранг} = 3$, если встретился минор $M_4 \neq 0$, то $\text{Ранг} = 4$.

Таким образом, **ранг матрицы равен максимальному порядку ненулевого минора**.

Схему «перебора в лоб» часто критикуют, но как ни странно, во многих случаях она даёт неплохие результаты. Тем не менее, следует отметить длительность процесса и в целях сокращения количества вычислений разработан:

метод окаймляющих миноров

Алгоритм в общем виде, боюсь, будет мало кому понятен, гораздо проще разобрать его на конкретной задаче:

<u>Пример 1</u>

Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: дана квадратная матрица «четыре на четыре» и, понятно, её ранг не больше четырёх.

Заряжаем:

Поскольку в матрице есть ненулевые элементы, то её ранг **не менее единицы**.

Проверку миноров 2-го порядка начинаем с так называемого *углового минора* $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 5 \\ -1 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -2 & -4 \\ 1 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$.

$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$, поэтому переходим к минору $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 5 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} -4 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$:

$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1 \neq 0$, значит, ранг матрицы **не менее двух**. Что было бы нужно сделать, если бы и этот минор оказался нулевым? В этом случае рассматриваем

минор $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, и если он тоже равен нулю, едем дальше:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

При необходимости (когда получились одни нули), следует продолжить перебор миноров по аналогичной схеме у:

1-й и 3-й строк;
1-й и 4-й строк;
2-й и 3-й строк;
2-й и 4-й строк;
3-й и 4-й строк – до тех пор, пока не повстречается минор, отличный от нуля.

Если все миноры 2-го порядка оказались нулевыми, то $\text{Ранг} = 1$.

Но в нашем случае уже на втором шаге обнаружен «хороший» минор, и теперь мы переходим к рассмотрению миноров третьего порядка. Приделываем ноги младшему коллеге $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$, **который будет входить во все рассматриваемые миноры высших порядков**:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Вопрос «третьим будешь?» может быть адресован либо красному, либо зелёному товарищу:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Был бы пятый столбец – нашёлся бы ещё один друг.

Начнём с красного:

$$M_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & -1\\ -2 & -4 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-4+4+4-4=0$$

Не помогло. Теперь сообразим с зелёным:

$$M_3=\begin{vmatrix}1 & 0 & 5\\ 2 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 0\end{vmatrix}=5\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=5\cdot(2-2)=0$$

Тоже плохо. Свешиваем ноги ниже и последовательно берём в компанию «малиновые» и «коричневые» числа:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 5\\ 2 & 4 & -1 & 0\\ -2 & -4 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Сначала «синие» с «малиновыми»:

$$M_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 4 & -1\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-2-0+2\cdot(4-4)=-2\neq 0$$

, значит, ранг матрицы **не менее трёх**.
Если бы этот минор оказался равным нулю, то следовало бы вычислить определитель из «синих» и «коричневых» чисел. **Других миноров 3-го порядка, которые содержат младший ненулевой минор** $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}$ **– нет**. И если бы «сине-коричневый» определитель тоже съел бублик, то $\text{Ранг}=2$.

Миноров 3-го порядка на самом деле больше, и рассматриваемый метод в данном случае позволяет сократить вычисления, максимум, до четырёх определителей. Успех нас поджидал на 3-м шаге, и «хороший» ненулевой минор $M_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}$ удостаивается ботинок:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 5\\ 2 & 4 & -1 & 0\\ -2 & -4 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Теперь «синие» и «малиновые» столбцы **должны входить во все миноры высших порядков**. В данном случае это единственный минор 4-го порядка, совпадающий с определителем матрицы:

$$M_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(т.к. 2-я и 3-я строки пропорциональны – см. **свойства определителя**)

Если бы у ~~бабушки~~ нас в матрице был пятый столбец, то следовало бы вычислить ещё один минор 4-го порядка («синие», «малиновый» + 5-й столбец).

Вывод: максимальный порядок ненулевого минора равен трём, значит, $\text{Ранг} = 3$.

Возможно, не все до конца осмыслили данную фразу: минор 4-го порядка равен нулю, но среди миноров 3-го порядка нашёлся ненулевой – поэтому максимальный порядок **ненулевого** минора и равен трём.

Возникает вопрос, а почему бы сразу не вычислить определитель? Ну, во-первых, в большинстве заданий матрица не квадратная, а во-вторых, даже если у вас и получится ненулевое значение, то задание с высокой вероятностью забракуют, так как оно обычно подразумевает стандартное решение «снизу вверх». А в рассмотренном примере нулевой определитель 4-го порядка и вовсе позволяет утверждать, что ранг матрицы лишь меньше четырёх.

Должен признаться, разобранную задачу я придумал сам, чтобы качественнее объяснить метод окаймляющих миноров. В реальной практике всё проще:

Пример 2

Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 11 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение и ответ в конце урока.

Когда алгоритм работает быстрее всего? Вернёмся к той же матрице «четыре на четыре» $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$. Очевидно, решение будет самым коротким в случае «хороших» *угловых миноров*:

$$M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

И, если $M_4 \neq 0$, то $\text{Ранг} = 4$, в противном случае – $\text{Ранг} = 3$.

Размышление совсем не гипотетично – существует немало примеров, где всё дело и ограничивается только угловыми минорами.

Однако в ряде случаев более эффективен и предпочтителен другой способ:

Как найти ранг матрицы с помощью метода Гаусса?

Параграф рассчитан на читателей, которые уже знакомы с **методом Гаусса** и мало-мальски набили на нём руку.

С технической точки зрения метод не отличается новизной:

1) с помощью элементарных преобразований приводим матрицу к ступенчатому виду;

2) ранг матрицы равен количеству строк.

Совершенно понятно, что **использование метода Гаусса не меняет ранга матрицы**, и суть здесь предельно проста: согласно алгоритму, в ходе элементарных преобразований выявляются и удаляются все лишние пропорциональные (линейно зависимые) строки, в результате чего остаётся «сухой остаток» – максимальное количество линейно независимых строк.

Преобразуем старую знакомую матрицу с координатами трёх коллинеарных векторов:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на –2. К третьей строке прибавили первую строку.

(2) Нулевые строки удаляем.

Таким образом, осталась одна строка, следовательно, $\text{Ранг} = 1$. Что и говорить, это гораздо быстрее, чем рассчитать девять нулевых миноров 2-го порядка и только потом сделать вывод.

Напоминаю, что в самой по себе **алгебраической матрице** ничего менять нельзя, и преобразования выполняются только с целью выяснения ранга! Кстати, остановимся ещё раз на вопросе, почему нельзя? Исходная матрица $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ несёт информацию, которая принципиально отлична от информации матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и строки $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. В некоторых математических моделях (без преувеличения) разница в одном числе может быть вопросом жизни и смерти. …Вспомнились школьные учителя математики начальных и средних классов, которые безжалостно срезали оценку на 1-2 балла за малейшую неточность или отклонение от алгоритма. И было жутко обидно, когда вместо, казалось бы, гарантированной «пятёрки» получалось «хорошо» или того хуже. Понимание пришло намного позже – а как иначе доверить человеку спутники, ядерные боеголовки и электростанции? Но вы не беспокойтесь, я не работаю в этих сферах =)

Перейдём к более содержательным заданиям, где помимо прочего познакомимся с важными вычислительными приёмами **метода Гаусса**:

Пример 3

Найти ранг матрицы с помощью элементарных преобразований
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 8 \\ 7 & 1 & -2 & -1 & 12 \\ 11 & 1 & -3 & 0 & 16 \\ 2 & 2 & -1 & -5 & 12 \end{pmatrix}$$

Решение: дана матрица «четыре на пять», значит, её ранг заведомо не больше, чем 4.

В первом столбце, отсутствует 1 или –1, следовательно, необходимы дополнительные действия, направленные на получение хотя бы одной единицы. За всё время существования сайта мне неоднократно задавали вопрос: «Можно ли в ходе элементарных преобразований переставлять столбцы?». Вот здесь – переставили первый-второй столбец, и всё отлично! В большинстве задач, где используется **метод Гаусса**, столбцы действительно переставлять можно. НО НЕ НУЖНО. И дело даже не в возможной путанице с переменными, дело в том, что в классическом курсе обучения высшей математике данное действие традиционно не рассматривается, поэтому на такой реверанс посмотрят ОЧЕНЬ криво (а то и заставят всё переделывать).

Второй момент касается чисел. В ходе решения полезно руководствоваться следующим эмпирическим правилом: **элементарные преобразования по возможности должны уменьшать числа матрицы**. Ведь с единицей-двойкой-тройкой работать значительно легче, чем, например, с 23, 45 и 97. И первое действие направлено не только на получение единицы в первом столбце, но и на ликвидацию чисел 7 и 11.

Сначала полное решение, потом комментарии:
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 8 \\ 7 & 1 & -2 & -1 & 12 \\ 11 & 1 & -3 & 0 & 16 \\ 2 & 2 & -1 & -5 & 12 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 0 & 6 & -8 \\ -1 & 1 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -1 & -2 & 8 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\rightarrow}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & -11 & 20 \end{pmatrix}$$

(1) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на –2. К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на –3. И до кучи: к 4-й строке прибавили 1-ю строку, умноженную на –1.

(2) Последние три строки пропорциональны. Удалили 3-ю и 4-ю строки, вторую строку переместили на первое место.

(3) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на –3.

В приведённой к ступенчатому виду матрице две строки.

Ответ: $\text{Ранг} = 2$

Теперь ваша очередь мучить матрицу «четыре на четыре»:

Пример 4

Найти ранг матрицы методом Гаусса

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

Напоминаю, что **метод Гаусса** не предполагает однозначной жёсткости, и ваше решение, скорее всего, будет отличаться от моего решения. Краткий образец оформления задачи в конце урока.

Какой метод использовать для нахождения ранга матрицы?

На практике зачастую вообще не сказано, какой метод необходимо использовать для нахождения ранга. В такой ситуации следует анализировать условие – для одних матриц рациональнее провести решение через миноры, а для других значительно выгоднее применить элементарные преобразования:

<u>Пример 5</u>

Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение: первый способ как-то сразу отпадает =)

Чуть выше я советовал не трогать столбцы матрицы, но когда есть нулевой столбец, либо пропорциональные/совпадающие столбцы, то всё же стОит провести ампутацию:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Пятый столбец нулевой, удалим его из матрицы. Таким образом, ранг матрицы не больше четырёх. Первую строку умножили на –1. Это ещё одна фирменная фишка метода Гаусса, превращающая следующее действие в приятную прогулку:

(2) Ко всем строкам, начиная со второй, прибавили первую строку.

(3) Первую строку умножили на –1, третью строку разделили на 2, четвёртую строку разделили на 3. К пятой строке прибавили вторую строку, умноженную на –1.

(4) К пятой строке прибавили третью строку, умноженную на –2.

(5) Последние две строки пропорциональны, пятую удаляем.

В результате получено 4 строки.

Ответ: $\text{Ранг} = 4$

Стандартная пятиэтажка для самостоятельного исследования:

Пример 6

Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} -4 & 7 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 9 & 8 & 1 \\ 5 & 15 & 6 \\ -1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Краткое решение и ответ в конце урока.

Следует отметить, что словосочетание «ранг матрицы» не так часто встретишь на практике, и в большинстве задач можно вообще обойтись без него. Но существует одно задание, где рассматриваемое понятие является главным действующим лицом, и в заключение статьи мы рассмотрим это практическое приложение:

Как исследовать систему линейных уравнений на совместность?

Нередко помимо решения **системы линейных уравнений** по условию предварительно требуется исследовать её на совместность, то есть доказать, что какое-либо решение вообще существует. Ключевую роль в такой проверке играет *теорема Кронекера-Капелли*, которую я сформулирую в необходимом виде:

Если ранг **матрицы системы** равен рангу **расширенной матрицы системы**, то система совместна, причём, если данное число совпадает с количеством неизвестных, то решение единственно.

Таким образом, для исследования системы на совместность нужно проверить равенство $\text{Ранг}(A) = \text{Ранг}(A|b)$, где A – *матрица системы* (вспоминаем терминологию из урока **Метод Гаусса**), а $(A|b)$ – *расширенная матрица системы* (т.е. матрица с коэффициентами при переменных + столбец свободных членов).

Всё просто:

Пример 7

Исследовать систему на совместность и найти её решение, если система совместна

$$\text{а)} \begin{cases} 3x + 2y - 5z = -1 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ x + 2y - z = 9 \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1 \end{cases} \quad \text{в)} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3 \end{cases}$$

А когда системы уже прорешаны – просто вдвойне… нет – втройне =)

Решение: тем не менее, обратим внимание на строгую верхнюю строчку – по условию, **в первую очередь**, требуется проверить систему на совместность. Как начать решение? **В любом случае** записываем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приводим её к ступенчатому виду:

а) Пример № 1 статьи о **методе исключения неизвестных**:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \ldots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) = (A|b)$$

Элементарные преобразования не меняют ранга матриц, поэтому в результате выполненных действий получены эквивалентные исходным матрица системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и расширенная матрица системы $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$.

Обе матрицы имеют *ступенчатый вид*, причём в каждой матрице три стоки.

Вывод: $\text{Ранг}\,(A) = \text{Ранг}\,(A|b) = 3$, значит, по теореме Кронекера-Капелли, система совместна; и поскольку количество переменных (x, y, z – 3 шт.) совпадает с рангом, то система имеет единственное решение.

Что дальше? Дальше следует непосредственно решить систему. Если по условию не предложен способ, то, конечно же, раскручиваем обратный ход **метода Гаусса**. Если требуется решить систему **методом Крамера** или **с помощью обратной матрицы**, ну что поделать….

б) Пример № 1 статьи о **несовместных системах и системах с общим решением**:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 2 & -1 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right) \to \ldots \to \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 9 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) = (A|b)$$

В результате элементарных преобразований получена эквивалентная матрица системы $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и расширенная матрица системы $(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 9 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$.

Приведём *матрицу системы* к ступенчатому виду, удалив нулевую строку:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

– количество строк равно двум, поэтому $\text{Ранг}\,(A) = 2$.

Расширенная же *матрица системы* имеет ступенчатый вид и количество её строк равно трём, а посему $\text{Ранг}\,(A|b) = 3$.

Вывод: $\text{Ранг}(A) \neq \text{Ранг}(A|b)$, значит, по теореме Кронекера-Капелли, система несовместна.

Следует заметить, что обоснование этого факта можно провести и через миноры:

Максимальный порядок ненулевого минора *матрицы системы* равен двум, например:
$M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) = 1 \neq 0$, поэтому $\text{Ранг}(A) = 2$

Максимальный порядок ненулевого минора *расширенной матрицы системы* равен трём, например:
$M_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 14 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) \cdot 2 = 2 \neq 0$ *(взяли первые два столбца + обязательно столбец свободных членов).*

Таким образом, $\text{Ранг}(A|b) = 3$.

Вывод: $\text{Ранг}(A) \neq \text{Ранг}(A|b)$, значит, по теореме Кронекера-Капелли, система несовместна.

И обращаю внимание, что если по условию **не** требуется исследовать систему на совместность, то вполне достаточно ограничиться стандартным ответом (см. решение Примера 1).

в) Пример № 3 той же статьи:
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 8 & 12 & -9 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 9 & -7 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \ldots \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 \end{array}\right) = (A|b)$$

В результате элементарных преобразований получена эквивалентная матрица системы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ и расширенная матрица системы $(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 \end{array}\right)$.

Обе матрицы имеют ступенчатый вид и в каждой из них две строки.

Вывод: $\text{Ранг}(A) = \text{Ранг}(A|b) = 2$, значит, по теореме Кронекера-Капелли, система совместна.

Поскольку ранг меньше количества переменных (x_1, x_2, x_3, x_4 – 4 шт.), то система имеет бесконечно много решений.

Далее находим общее решение по стандартной схеме.

Приведу также альтернативное доказательство с помощью миноров, которое встречается в некоторых методичках:

Максимальный порядок ненулевого минора *матрицы системы* равен двум, например:
$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 = 10 \neq 0$, следовательно, $\text{Ранг}(A) = 2$.

Максимальный порядок ненулевого минора *расширенной матрицы системы* также равен двум, например *(обязательно включаем столбец свободных членов)*:

$M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 = 3 \neq 0$, поэтому $\text{Ранг}\,(A|b) = 2$

Второй абзац можно полностью заменить хитрой лаконичной фразой: «по этой же причине $\text{Ранг}\,(A|b) = 2$».

Вывод: $\text{Ранг}\,(A) = \text{Ранг}\,(A|b) = 2$,... и далее по тексту (см. выше).

Готово.

+ Образец исследования системы на совместность можно ещё посмотреть в начале Примера № 1 урока о **нахождении различных базисных решений системы**.

…Всё-таки иногда удивительно обманываются ожидания – порой думаешь, что статья получится огромной, а она оказывается весьма компактной, а иногда, как сейчас – наоборот. Посмотрел статистику и жутко удивился добрым 20 тысячам символов. Поэтому всем высокого ранга и до скорых встреч!

Решения и ответы:

*Пример 2: **Решение**: поскольку в матрице есть ненулевые элементы, то её ранг не меньше единицы.*

$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0$*, значит, ранг матрицы не менее двух.*

Рассмотрим миноры 3-го порядка, при этом в них обязательно должен содержаться ненулевой минор $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$*. Таких миноров два:*

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 10 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (12 - 14) + 10 \cdot (4 - 3) = -10 + 10 = 0$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 1 & 2 & 7 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (21 - 22) + 5 \cdot (4 - 3) = -5 + 5 = 0$$

Максимальный порядок ненулевого минора равен двум.

***Ответ**:* $\text{Ранг} = 2$

*Пример 4: **Решение**: с помощью элементарных преобразований приведем матрицу к ступенчатому виду:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & 7 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 5 & -12 \\ 0 & 3 & 3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 5 & -12 \\ 0 & 0 & 18 & -41 \end{pmatrix}$$

Тема 5-6.Как решить систему линейных уравнений?

На данном уроке мы рассмотрим методы решения системы линейных уравнений. В курсе высшей математики системы линейных уравнений требуется решать как в виде отдельных заданий, например, «Решить систему по формулам Крамера», так и в ходе решения остальных задач. С системами линейных уравнений приходится иметь дело практически во всех разделах высшей математики.

Сначала немного теории. Что в данном случае обозначает математическое слово «линейных»? Это значит, что в уравнения системы **все** переменные входят **в первой степени**: $x, y, z, \ldots$ без всяких причудливых вещей вроде $x^2, y^3, x^4y, xyz, \ldots$ и т.п., от которых в восторге бывают только участники математических олимпиад.

В высшей математике для обозначения переменных используются не только знакомые с детства буквы $x, y, z, \ldots$.

Довольно популярный вариант – переменные с индексами: $x_1, x_2, x_3, \ldots$.
Либо начальные буквы латинского алфавита, маленькие и большие: $a, b, c, \ldots \quad A, B, C, \ldots$
Не так уж редко можно встретить греческие буквы: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ – известные многим «альфа, бета, гамма». А также набор с индексами, скажем, с буквой «мю»: $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$

Использование того или иного набора букв зависит от раздела высшей математики, в котором мы сталкиваемся с системой линейных уравнений. Так, например, в системах линейных уравнений, встречающихся при решении интегралов, дифференциальных уравнений традиционно принято использовать обозначения $A, B, C, \ldots$

Но как бы ни обозначались переменные, принципы, методы и способы решения системы линейных уравнений от этого не меняются. Таким образом, если Вам встретится что-нибудь страшное типа $\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{13}, \ldots$, не спешите в страхе закрывать задачник, в конце концов, вместо ξ_{11} можно нарисовать солнце, вместо ξ_{12} – птичку, а вместо ξ_{13} – рожицу (преподавателя). И, как ни смешно, систему линейных уравнений с данными обозначениями тоже можно решить.

Что-то у меня есть такое предчувствие, что статья получится довольно длинной, поэтому небольшое оглавление. Итак, последовательный «разбор полётов» будет таким::

– **Решение системы линейных уравнений методом подстановки («школьный метод»)**;
– **Решение системы методом почленного сложения (вычитания) уравнений системы**;
– **Решение системы по формулам Крамера**;
– **Решение системы с помощью обратной матрицы**;
– **Решение системы методом Гаусса**.

С системами линейных уравнений все знакомы из школьного курса математики. По сути дела, начинаем с повторения.

Решение системы линейных уравнений методом подстановки

Данный метод также можно назвать «школьным методом» или методом исключения неизвестных. Образно говоря, его еще можно назвать «недоделанным методом Гаусса».

Пример 1

Решить систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x-y+5=0 \\ 2x+y+7=0 \end{cases}$$

Здесь у нас дана система двух уравнений с двумя неизвестными. Обратите внимание, что свободные члены (числа 5 и 7) расположены в левых частях уравнений. Вообще говоря, без разницы, где они находятся, слева или справа, просто в задачах по высшей математике нередко они расположены именно так. И такая запись не должна приводить в замешательство, при желании систему можно записать «как обычно»: $\begin{cases} x-y=-5 \\ 2x+y=-7 \end{cases}$. Не забываем, что при переносе слагаемого из части в часть у него нужно поменять знак.

Что значит решить систему линейных уравнений? **Решить систему уравнений – это значит найти множество её решений. Решение системы представляет собой набор значений всех входящих в неё переменных, который обращает КАЖДОЕ уравнение системы в верное равенство. Кроме того, система может быть *несовместной*** *(не иметь решений)*. Не тушуйтесь, это общее определение =) У нас же будет всего лишь одно значение «икс» и одно значение «игрек», которые удовлетворяют каждому уравнению с-мы.

Существует графический метод решения системы, с которым можно ознакомиться на уроке **Простейшие задачи с прямой**. Там же я рассказал о геометрическом смысле системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Но сейчас на дворе эра алгебры, и числа-числа, действия-действия.

Решаем: из первого уравнения выразим: $x=y-5$

Полученное выражение $x=y-5$ подставляем во второе уравнение:
$$2(y-5)+y+7=0$$

Раскрываем скобки, приводим подобные слагаемые и находим значение y:
$$2y-10+y+7=0$$
$$3y-3=0$$
$$3y=3$$
$$y=1$$

Далее вспоминаем про то, от чего плясали: $x=y-5$

Значение y нам уже известно, осталось найти: $x=1-5=-4$

Ответ: $x=-4, y=1$

После того, как решена ЛЮБАЯ система уравнений ЛЮБЫМ способом, настоятельно рекомендую выполнить проверку *(устно, на черновике либо калькуляторе)*. Благо, делается это легко и быстро.

1) Подставляем найденный ответ $x=-4, y=1$ в первое уравнение $x-y+5=0$:
$$-4-1+5=0$$
$0=0$ – получено верное равенство.

2) Подставляем найденный ответ $x=-4, y=1$ во второе уравнение $2x+y+7$:

$2\cdot(-4)+1+7=0$

$-8+8=0$

$0=0$ – получено верное равенство.

Или, если говорить проще, «всё сошлось»

Рассмотренный способ решения не является единственным, из первого уравнения можно было выразить y, а не x.

Можно наоборот – что-нибудь выразить из второго уравнения $2x+y=-7$ и подставить в первое уравнение. Кстати, заметьте, самый невыгодный из четырех способов – выразить x из второго уравнения:

$2x=-y-7$

$x=-\frac{1}{2}y-\frac{7}{2}$

Получаются дроби, а оно зачем? Есть более рациональное решение.

Тем не менее, в ряде случаев без дробей всё-таки не обойтись. В этой связи обращаю Ваше внимание на то, КАК я записал выражение. Не так: $x=-\frac{1}{2}y-3\frac{1}{2}$, и ни в коем случае не так: $x=-0{,}5y-3{,}5$.

Если в высшей математике Вы имеете дело с дробными числами, то все вычисления старайтесь проводить в обыкновенных неправильных дробях.

Именно $\frac{7}{2}$, а не $3\frac{1}{2}$ или $3{,}5$!

Запятую можно использовать лишь иногда, в частности, если $3{,}5$ – это окончательный ответ какой-нибудь задачи, и с этим числом больше не нужно выполнять никаких действий.

Многие читатели наверняка подумали «да зачем такое подробное объяснение, как для класса коррекции, и так всё понятно». Ничего подобного, вроде бы такой простой школьный пример, а сколько ОЧЕНЬ важных выводов! Вот еще один:

Любое задание следует стремиться выполнить самым рациональным способом. Хотя бы потому, что это экономит время и нервы, а также снижает вероятность допустить ошибку.

Если в задаче по высшей математике Вам встретилась система двух линейных уравнений с двумя неизвестными, то всегда можно использовать метод подстановки (если не указано, что систему нужно решить другим методом) Ни один преподаватель не ~~подумает, что ты лох~~ снизит оценку за использование «школьного метода».
Более того, в ряде случаев метод подстановки целесообразно использовать и при большем количестве переменных.

Пример 2

Решить систему линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 8A+4B+6C=8 \\ 15A+3B+5C=0 \end{cases}$$

Похожая система уравнений часто возникает при использовании так называемого метода неопределенных коэффициентов, когда мы находим **интеграл от дробно-рациональной функции**. Рассматриваемая система взята мной как раз оттуда.

При нахождении интеграла – цель *быстро* найти значения коэффициентов A, B, C, а не изощряться формулами Крамера, методом обратной матрицы и т.д. Поэтому, в данном случае уместен именно метод подстановки.

Когда дана любая система уравнений, в первую очередь желательно выяснить, а нельзя ли ее как-нибудь СРАЗУ упростить? Анализируя уравнения системы, замечаем, что второе уравнение системы можно разделить на 2, что мы и делаем:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 8A+4B+6C=8 \\ 15A+3B+5C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ 4A+2B+3C=4 \\ 15A+3B+5C=0 \end{cases}$$

Справка: математический знак $\Rightarrow$ обозначает «из этого следует это», он часто используется в ходе решения задач.

Теперь анализируем уравнения, нам нужно выразить какую-нибудь переменную через остальные. Какое уравнение выбрать? Наверное, Вы уже догадались, что проще всего для этой цели взять первое уравнение системы:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 8A+4B+6C=8 \\ 15A+3B+5C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ 4A+2B+3C=4 \\ 15A+3B+5C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-A-B \\ 4A+2B+3C=4 \\ 15A+3B+5C=0 \end{cases}$$

Здесь без разницы, какую переменную выражать, можно было с таким же успехом выразить A или B.

Далее, выражение для C подставляем во второе и третье уравнения системы:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 8A+4B+6C=8 \\ 15A+3B+5C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ 4A+2B+3C=4 \\ 15A+3B+5C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-A-B \\ 4A+2B+3C=4 \\ 15A+3B+5C=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C=-A-B \\ 4A+2B+3(-A-B)=4 \\ 15A+3B+5(-A-B)=0 \end{cases}$$

Раскрываем скобки и приводим подобные слагаемые:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 8A+4B+6C=8 \\ 15A+3B+5C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ 4A+2B+3C=4 \\ 15A+3B+5C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-A-B \\ 4A+2B+3C=4 \\ 15A+3B+5C=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C=-A-B \\ 4A+2B+3(-A-B)=4 \\ 15A+3B+5(-A-B)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-A-B \\ A-B=4 \\ 10A-2B=0 \end{cases}$$

Третье уравнение делим на 2:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 8A+4B+6C=8 \\ 15A+3B+5C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ 4A+2B+3C=4 \\ 15A+3B+5C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-A-B \\ 4A+2B+3C=4 \\ 15A+3B+5C=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C=-A-B \\ 4A+2B+3(-A-B)=4 \\ 15A+3B+5(-A-B)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-A-B \\ A-B=4 \\ 10A-2B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-A-B \\ A-B=4 \\ 5A-B=0 \end{cases} \Rightarrow$$

Из второго уравнения выразим B и подставим в третьей уравнение:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 8A+4B+6C=8 \\ 15A+3B+5C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ 4A+2B+3C=4 \\ 15A+3B+5C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-A-B \\ 4A+2B+3C=4 \\ 15A+3B+5C=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C=-A-B \\ 4A+2B+3(-A-B)=4 \\ 15A+3B+5(-A-B)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-A-B \\ A-B=4 \\ 10A-2B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-A-B \\ A-B=4 \\ 5A-B=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C=-A-B \\ B=A-4 \\ 5A-B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-A-B \\ B=A-4 \\ 5A-(A-4)=0 \end{cases}$$

Практически всё готово, из третьего уравнения находим: $4A+4=0 \Rightarrow A=-1$

Из второго уравнения: $B=-1-4=-5$

Из первого уравнения: $C=1+5=6$

Ответ: $A=-1;\ B=-5;\ C=6$

Проверка: Подставим найденные значения переменных в левую часть каждого уравнения системы:

1) $-1-5+6=0$

2) $8\cdot(-1)+4\cdot(-5)+6\cdot 6=-8-20+36=8$

3) $15\cdot(-1)+3\cdot(-5)+5\cdot 6=-15-15+30=0$

Получены соответствующие правые части уравнений, таким образом, решение найдено верно.

<u>Пример 3</u>

Решить систему линейных уравнений с 4 неизвестными

$$\begin{cases} A+C=2 \\ -A+B-2C+D=-2 \\ 4A+C-2D=0 \\ -4A+4B+D=5 \end{cases}$$

Это пример для самостоятельного решения (ответ в конце урока).

Решение системы методом почленного сложения (вычитания) уравнений системы

В ходе решения систем линейных уравнений нужно стараться использовать не «школьный метод», а метод почленного сложения (вычитания) уравнений системы. Почему? Это экономит время и упрощает вычисления, впрочем, сейчас станет всё понятнее.

<u>Пример 4</u>

Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ 2x + y + 7 = 0 \end{cases}$$

Я взял ту же систему, что и первом примере.

Анализируя систему уравнений, замечаем, что коэффициенты при переменной y одинаковы по модулю и противоположны по знаку (–1 и 1). В такой ситуации уравнения можно сложить почленно:

$$\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & 5 & = & 0 \\ + & & + & & + & & \\ 2x & + & y & + & 7 & = & 0 \\ \downarrow & & \| & & \downarrow & & \\ & & 0 & & & & \\ 3x & & & + & 12 & = & 0 \end{array}$$

Действия, обведенные красным цветом, выполняются МЫСЛЕННО.

Как видите, в результате почленного сложения у нас пропала переменная y. В этом, собственно, и состоит **суть метода – избавиться от одной из переменных**.

Теперь всё просто: $3x + 12 = 0 \Rightarrow x = -4$ – подставляем в первое уравнение системы (можно и во второе, но это не так выгодно – там числа больше):

$-4 - y + 5 = 0 \Rightarrow y = 1$

В чистовом оформлении решение должно выглядеть примерно так:

$$\begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ 2x + y + 7 = 0 \end{cases} + \Rightarrow 3x + 12 = 0 \Rightarrow x = -4$$

$-4 - y + 5 = 0 \Rightarrow y = 1$

Ответ: $x = -4,\ y = 1$

У некоторых явно возник вопрос: «Зачем все эти изыски, если можно просто выразить одну переменную через другую и подставить во второе уравнение?».

<u>Пример 5</u>

Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 2 = 0 \\ 4x - 3y - 11 = 0 \end{cases}$$

В данном примере можно использовать «школьный» метод, но большой минус состоит в том, что когда мы будем выражать какую-либо переменную из любого уравнения, то получим решение в обыкновенных дробях. А возня с дробями займет время, к тому же, если у Вас не «набита рука» на действиях с дробями, то велика вероятность допустить ошибку.

Поэтому целесообразно использовать почленное сложение (вычитание) уравнений. Анализируем коэффициенты при соответствующих переменных:

$$\begin{cases}3x+4y-2=0\\4x-3y-11=0\end{cases}$$

Как видим числа в парах (3 и 4), (4 и –3) – разные, поэтому, если сложить (вычесть) уравнения прямо сейчас, то от переменной мы не избавимся. Таким образом, хотелось бы видеть в одной из пар одинаковые по модулю числа, например, 20 и 20 либо 20 и –20.

Будем рассматривать коэффициенты при переменной x:

$$\begin{cases}3x+4y-2=0\\4x-3y-11=0\end{cases}$$

Подбираем такое число, которое делилось бы и на 3 и на 4, причем оно должно быть как можно меньше. В математике такое число называется *наименьшим общим кратным*. Если Вы затрудняетесь с подбором, то можно просто перемножить коэффициенты: $3\cdot 4=12$

Далее:

Первое уравнение умножаем на $\frac{12}{3}=4$

Второе уравнение умножаем на $\frac{12}{4}=3$

В результате:

$$\begin{cases}3x+4y-2=0\\4x-3y-11=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}12x+16y-8=0\\12x-9y-33=0\end{cases}$$

Вот теперь **из первого уравнения почленно вычитаем второе**. На всякий случай привожу еще раз действия, которые проводятся мысленно:

$$\begin{cases}12x+16y-8=0\\12x-9y-33=0\end{cases}$$

$$0 \qquad 25y+25=0$$

Следует отметить, что можно было бы наоборот – из второго уравнения вычесть первое, в результате получится равносильное уравнение с противоположными знаками.

$$\begin{cases}3x+4y-2=0\\4x-3y-11=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}12x+16y-8=0\\12x-9y-33=0\end{cases}-\Rightarrow 25y+25=0;\ y=-1$$

Теперь подставляем найденное значение y в какое-нибудь из уравнений системы, например, в первое:

$3x-4-2=0\Rightarrow x=2$

Ответ: $x=2,\ y=-1$

Решим систему другим способом. Рассмотрим коэффициенты при переменной y

$$\begin{cases} 3x + 4y - 2 = 0 \\ 4x - 3y - 11 = 0 \end{cases}$$

Очевидно, что вместо пары коэффициентов (4 и –3) нам нужно получить 12 и –12.
Для этого первое уравнение умножаем на 3, второе уравнение умножаем на 4:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 2 = 0 \\ 4x - 3y - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x + 12y - 6 = 0 \\ 16x - 12y - 44 = 0 \end{cases}$$

Почленно **складываем** уравнения и находим значения переменных:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 2 = 0 \\ 4x - 3y - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x + 12y - 6 = 0 \\ 16x - 12y - 44 = 0 \end{cases} + \Rightarrow 25x - 50 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$6 + 4y - 2 = 0 \Rightarrow y = -1$$

Ответ: $x = 2, y = -1$

Второй способ несколько рациональнее, чем первый, так как складывать проще и приятнее чем вычитать.

В высшей математике всегда стремимся складывать и умножать, а не вычитать и делить.

Пример 6

Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 = 49 \\ 4x_1 + 5x_2 = 10 \end{cases}$$

Тема -7-8. Как найти обратную матрицу?

Цель: Повторить определение определителя второго и третьего порядка, правило их вычисления. Закрепить на практике вычисление определителей.
Форма проведения – коллективное решение задач.
Теоретические вопросы:
1. Определитель n-го порядка. Свойства определителей.
2. Вычисление определителя второго и третьего порядка.
3. Миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы.
4. Обратная матрица и способы ее нахождения.

Контрольные вопросы:
1. Что называется определителем 2 и 3 порядков?
2. Методы вычисления определителей 2 и 3 порядков.
3. Что называется алгебраическим дополнением?
4. Что такое минор?
5. Какими способами нужно найти обратную матрицу?

Продолжаем разговор о действиях с матрицами. А именно – в ходе изучения данной лекции вы научитесь находить обратную матрицу. Научитесь. Даже если с математикой туго.

Что такое обратная матрица? Здесь можно провести аналогию с обратными числами: рассмотрим, например, оптимистичное число 5 и обратное ему число $\frac{1}{5} = 5^{-1}$. Произведение данных чисел равно единице: $5 \cdot 5^{-1} = 1$. С матрицами всё похоже! Произведение матрицы A на обратную ей матрицу A^{-1} равно $A \cdot A^{-1} = E$ – *единичной матрице*, которая является матричным аналогом числовой единицы. Однако обо всём по порядку – сначала решим важный практический вопрос, а именно, научимся эту самую обратную матрицу находить.

Что необходимо знать и уметь для нахождения обратной матрицы? Вы должны уметь решать **определители**. Вы должны понимать, что такое **матрица** и уметь выполнять некоторые действия с ними.

Есть? Тогда поехали дальше. А хотя… ехать могут все, если что-то не знаете, я буду ставить нужную ссылку по ходу объяснений.

Существует два основных метода нахождения обратной матрицы:
с помощью *алгебраических дополнений* и **с помощью элементарных преобразований**.

Сегодня мы изучим первый, более простой способ.

Начнем с самого ужасного и непонятного. Рассмотрим **квадратную** матрицу A. **Обратную матрицу A^{-1} можно найти по следующей формуле**:

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A_*^T$, где $|A|$ – определитель матрицы A, A_*^T – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A.

Понятие обратной матрицы существует только для квадратных матриц, матриц «два на два», «три на три» и т.д.

Обозначения: Как вы уже, наверное, заметили, обратная матрица обозначается надстрочным индексом $^{-1}$

Начнем с простейшего случая – матрицы «два на два». Чаще всего, конечно, требуется найти обратную матрицу для матрицы «три на три», но, тем не менее, настоятельно рекомендую изучить более простое задание, для того чтобы усвоить общий принцип решения.

<u>Пример:</u>

Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Решаем. Последовательность действий удобно разложить по пунктам.

1) Сначала находим определитель матрицы.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$$

Если с пониманием сего действа плоховато, ознакомьтесь с материалом **Как вычислить определитель?**

Важно! В том случае, если определитель матрицы равен **НУЛЮ** – обратной матрицы **НЕ СУЩЕСТВУЕТ**.

В рассматриваемом примере, как выяснилось, $|A| = -2 \neq 0$, а значит, всё в порядке.

2) Находим матрицу миноров M.

Для решения нашей задачи не обязательно знать, что такое минор, однако, желательно ознакомиться со статьей **Как вычислить определитель**.

Матрица миноров имеет такие же размеры, как и матрица A, то есть в данном случае $M = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$.
Дело за малым, осталось найти четыре числа и поставить их вместо звездочек.

Возвращаемся к нашей матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
Сначала рассмотрим левый верхний элемент:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Как найти его **минор**?
А делается это так: МЫСЛЕННО вычеркиваем строку и столбец, в котором находится данный элемент:

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{3} & 4 \end{pmatrix}$$

Оставшееся число и является **минором данного элемента**, которое записываем в нашу матрицу миноров:

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{3} & \boxed{4} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

Рассматриваем следующий элемент матрицы A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Мысленно вычеркиваем строку и столбец, в котором стоит данный элемент:

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} \\ 3 & \cancel{4} \end{pmatrix}$$

То, что осталось, и есть минор данного элемента, который записываем в нашу матрицу:

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} \\ \boxed{3} & \cancel{4} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ * & * \end{pmatrix}$$

Аналогично рассматриваем элементы второй строки и находим их миноры:

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Готово.

$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица миноров соответствующих элементов матрицы A.

3) Находим матрицу алгебраических дополнений A_* .

Это просто. В матрице миноров нужно **ПОМЕНЯТЬ ЗНАКИ** у двух чисел:

$$M = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

Именно у этих чисел, которые я обвел в кружок!

$A_* = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A
.

И всего-то лишь…

4) Находим транспонированную матрицу алгебраических дополнений A_*^T .

Что такое транспонирование матрицы, и с чем это едят, смотрите в лекции **Действия с матрицами**.

$A_*^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A.

5) Ответ.

Вспоминаем нашу формулу $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot A_*^T$
Всё найдено!

Таким образом, обратная матрица:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ лучше оставить в таком виде. **НЕ НУЖНО** делить каждый элемент матрицы на 2, так как получатся дробные числа. Более подробно данный нюанс рассмотрен в той же статье **Действия с матрицами**.

Как проверить решение?

Необходимо выполнить матричное умножение AA^{-1} либо $A^{-1}A$

Проверка:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 2\cdot(-3) & 1\cdot(-2)+2\cdot 1 \\ 3\cdot 4 + 4\cdot(-3) & 3\cdot(-2)+4\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Получена уже упомянутая **единичная матрица** – это матрица с единицами на *главной диагонали* и нулями в остальных местах.

Таким образом, обратная матрица найдена правильно.

Если провести действие $A^{-1}A$, то в результате тоже получится единичная матрица. Это один из немногих случаев, когда умножение матриц перестановочно, более подробную информацию можно найти в статье **Свойства операций над матрицами. Матричные выражения**. Также заметьте, что в ходе проверки константа (дробь) выносится вперёд и обрабатывается в самом конце – после матричного умножения. Это стандартный приём.

Переходим к более распространенному на практике случаю – матрице «три на три»:

Пример:

Найти обратную матрицу для матрицы $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Алгоритм точно такой же, как и для случая «два на два».

Обратную матрицу найдем по формуле: $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot B_*^T$, где B_*^T – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы B.

1) Находим определитель матрицы.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(-9+8) - 5\cdot(-18-20) + 7\cdot(-12-15) = -2+190-189 = -1$$

Здесь определитель раскрыт **по первой строке**.

Также не забываем, что $|B| = -1 \neq 0$, а значит, всё нормально – **обратная матрица существует**.

2) Находим матрицу миноров M.

Матрица миноров имеет размерность «три на три» $M = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$, и нам нужно найти девять чисел.

Я подробно рассмотрю парочку миноров:

Рассмотрим следующий элемент матрицы:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

МЫСЛЕННО вычеркиваем строку и столбец, в котором находится данный элемент:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Оставшиеся четыре числа записываем в определитель «два на два»

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$$

Этот определитель «два на два» и **является минором данного элемента**. Его нужно вычислить:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - (-2) \cdot 4 = -9 + 8 = -1$$

Всё, минор найден, записываем его в нашу матрицу миноров:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - (-2) \cdot 4 = -9 + 8 = -1$$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Как вы, наверное, догадались, необходимо вычислить девять определителей «два на два». Процесс, конечно, муторный, но случай не самый тяжелый, бывает хуже.

Ну и для закрепления – нахождение еще одного минора в картинках:

$$B=\begin{pmatrix} \boxed{2} & \cancel{5} & \boxed{7} \\ \boxed{6} & \cancel{3} & \boxed{4} \\ \cancel{5} & \cancel{-2} & \cancel{-3} \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot4-6\cdot7=8-42=-34$$

$$M=\begin{pmatrix} -1 & * & * \\ * & * & * \\ * & -34 & * \end{pmatrix}$$

Остальные миноры попробуйте вычислить самостоятельно.

Окончательный результат:

$$M=\begin{pmatrix} -1 & -38 & -27 \\ -1 & -41 & -29 \\ -1 & -34 & -24 \end{pmatrix}$$ – матрица миноров соответствующих элементов матрицы B.

То, что все миноры получились отрицательными – чистая случайность.

3) Находим матрицу алгебраических дополнений B_*.

В матрице миноров необходимо **СМЕНИТЬ ЗНАКИ** строго у следующих элементов:

$$M=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

В данном случае:

$$B_*=\begin{pmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & 34 & -24 \end{pmatrix}$$ – матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы B.

4) Находим транспонированную матрицу алгебраических дополнений B_*^T.

$$B_*^T=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}$$ – транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы B.

5) Ответ:

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot B_*^T=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$BB^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot 1+5\cdot(-38)+7\cdot 27 & 2\cdot(-1)+5\cdot 41+7\cdot(-29) & 2\cdot 1+5\cdot(-34)+7\cdot 24\\ 6\cdot 1+3\cdot(-38)+4\cdot 27 & 6\cdot(-1)+3\cdot 41+4\cdot(-29) & 6\cdot 1+3\cdot(-34)+4\cdot 24\\ 5\cdot 1-2\cdot(-38)-3\cdot 27 & 5\cdot(-1)-2\cdot 41-3\cdot(-29) & 5\cdot 1-2\cdot(-34)-3\cdot 24\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

Таким образом, обратная матрица найдена правильно.

Как оформить решение на чистовик? Примерный образец чистового оформления задания можно найти на странице **Правило Крамера. Метод обратной матрицы** в параграфе, где идет речь о матричном методе решения системы линейных уравнений. По существу, основная часть упомянутой задачи – и есть поиск обратной матрицы.

Нахождение обратной матрицы для матрицы «четыре на четыре» не рассматриваем, так как такое задание может дать только преподаватель-садист (чтобы студент вычислил один определитель «четыре на четыре» и 16 определителей «три на три»). В моей практике встретился только один такой случай, и заказчик контрольной работы заплатил за мои мучения довольно дорого =).

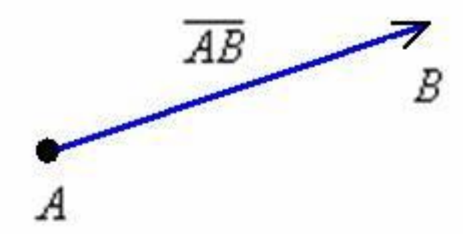
В ряде учебников, методичек можно встретить несколько другой подход к нахождению обратной матрицы, однако я рекомендую пользоваться именно вышеизложенным алгоритмом решения. Почему? Потому что вероятность запутаться в вычислениях и знаках – гораздо меньше.

Иногда **обратную матрицу требуется найти методом Гаусса-Жордана**, но второй способ доступен для студентов с приличной техникой **элементарных преобразований**.

Желаю успехов!

Прак. занятия-9-10. Понятие вектора. Свободный вектор

Сначала повторим школьное определение вектора. **Вектором** называется направленный отрезок, для которого указано его начало и конец:



В данном случае началом отрезка является точка A, концом отрезка – точка B. Сам вектор обозначен через $\overline{AB}$. **Направление** имеет существенное значение, если переставить стрелку в другой конец отрезка, то получится вектор $\overline{BA}$, и это уже **совершенно другой вектор**.

Понятие вектора удобно отождествлять с движением физического тела: согласитесь, зайти в двери института или выйти из дверей института – это совершенно разные вещи.

Отдельные точки плоскости, пространства удобно считать так называемым *нулевым вектором* $\overline{0}$. У такого вектора конец и начало совпадают.

!!! Примечание: *Здесь и далее можете считать, что векторы лежат в одной плоскости или можете считать, что они расположены в пространстве – суть излагаемого материала справедлива и для плоскости и для пространства.*

Обозначения: Многие сразу обратили внимание на палочку без стрелочки в обозначении $\overline{AB}$ и сказали, там же вверху еще стрелку ставят! Верно, можно записать со стрелкой: $\vec{AB}$, но допустима и **запись** $\overline{AB}$ **, которую я буду использовать в дальнейшем**. Почему? Видимо, такая привычка сложилась из практических соображений, слишком разнокалиберными и мохнатыми получались мои стрелки в школе и ВУЗе. В учебной литературе иногда вообще не заморачиваются клинописью, а выделяют буквы жирным шрифтом: $\mathbf{AB}$, подразумевая тем самым, что это вектор.

То была стилистика, а сейчас о способах записи векторов:

1) Векторы можно записать двумя большими латинскими буквами:
$\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}, \ldots$ и так далее. При этом первая буква **обязательно** обозначает точку-начало вектора, а вторая буква – точку-конец вектора.

2) Векторы также записывают маленькими латинскими буквами:
$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots$ В частности, наш вектор $\overline{AB}$ можно для краткости переобозначить маленькой латинской буквой $\overline{a}$.

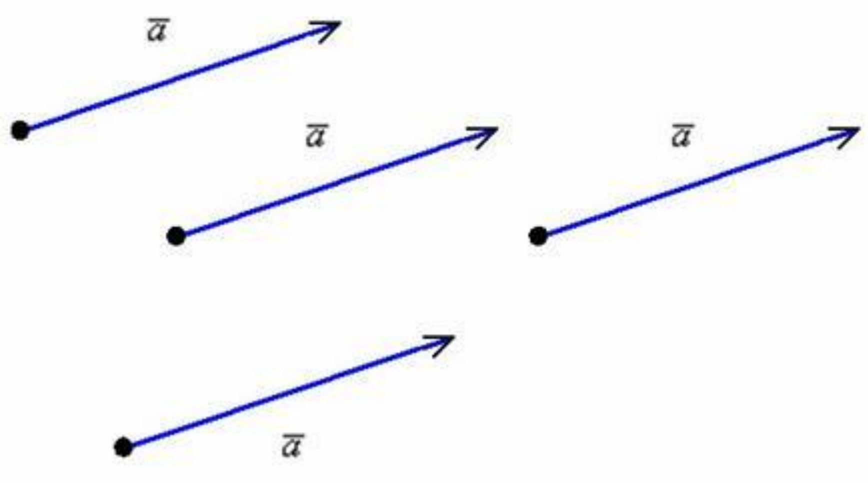
Длиной или **модулем** ненулевого вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB. Длина нулевого вектора $\overline{0}$ равна нулю. Логично.

Длина вектора обозначается знаком модуля: $\left|\overline{AB}\right|$, $|\overline{a}|$

Как находить длину вектора мы узнаем (или повторим, для кого как) чуть позже.

То были элементарные сведения о векторе, знакомые всем школьникам. В аналитической же геометрии рассматривается так называемый **свободный вектор**.

Если совсем просто – **вектор можно отложить от любой точки**:



Такие векторы мы привыкли называть равными (определение равных векторов будет дано ниже), но чисто с математической точки зрения это ОДИН И ТОТ ЖЕ ВЕКТОР или **свободный вектор**. Почему свободный? Потому что в ходе решения задач вы можете «пристроить» тот или иной «школьный» вектор в ЛЮБУЮ, нужную вам точку плоскости или пространства. Это очень крутое свойство! Представьте направленный отрезок произвольной длины и направления – его можно «клонировать» бесконечное количество раз и в любой точке пространства, по сути, он существует ВЕЗДЕ. Есть такая студенческая присказка: Каждому лектору в ж**у по вектору. Ведь не просто остроумная рифма, всё почти корректно – направленный отрезок можно пристроить и туда. Но не спешите радоваться, чаще страдают сами студенты =)

Итак, **свободный вектор** – это **множество** одинаковых направленных отрезков. Школьное определение вектора, данное в начале параграфа: «Вектором называется направленный отрезок…», подразумевает конкретный направленный отрезок, взятый из данного множества, который привязан к определённой точке плоскости или пространства.

Следует отметить, что с точки зрения физики понятие свободного вектора в общем случае некорректно, и точка приложения имеет значение. Действительно, прямой удар одинаковой силы по носу или по лбу ~~хватит развивать мой дурацкий пример~~ влёчет разные последствия. Впрочем, *несвободные* векторы **встречаются** и в курсе вышмата (не ходите туда :)).

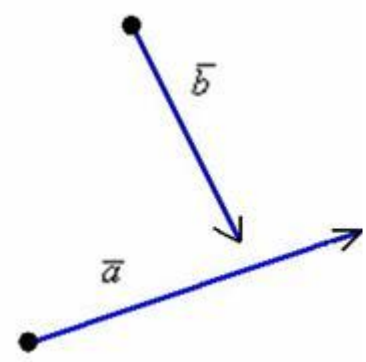
Далее, если не оговаривается иное, речь пойдёт только о свободных векторах.

Действия с векторами. Коллинеарность векторов

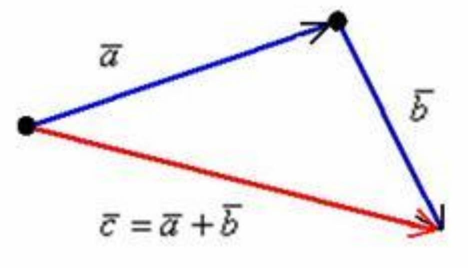
В школьном курсе геометрии рассматривается ряд действий и правил с векторами: *сложение по правилу треугольника, сложение по правилу параллелограмма, правило разности векторов, умножения вектора на число, скалярное произведение векторов и др.* Для затравки повторим два правила, которые особенно актуальны для решения задач аналитической геометрии.

Правило сложения векторов по правилу треугольников

Рассмотрим два произвольных ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$:



Требуется найти сумму данных векторов. В силу того, что все векторы считаются свободными, отложим вектор $\bar{b}$ от *конца* вектора $\bar{a}$:



Суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ является вектор $\bar{c}$. Для лучшего понимания правила в него целесообразно вложить физический смысл: пусть некоторое тело совершило путь по вектору $\bar{a}$, а затем по вектору $\bar{b}$. Тогда сумма векторов $\bar{a}+\bar{b}$ представляет собой вектор результирующего перемещения $\bar{c}$ с началом в точке отправления и концом в точке прибытия. Аналогичное правило формулируется для суммы любого количества векторов. Как говорится, тело может пройти свой путь сильно поддатым по зигзагу, а может и на автопилоте – по результирующему вектору суммы.

Кстати, если вектор $\bar{b}$ отложить от *начала* вектора $\bar{a}$, то получится эквивалентное *правило параллелограмма* сложения векторов.

Умножение вектора на число

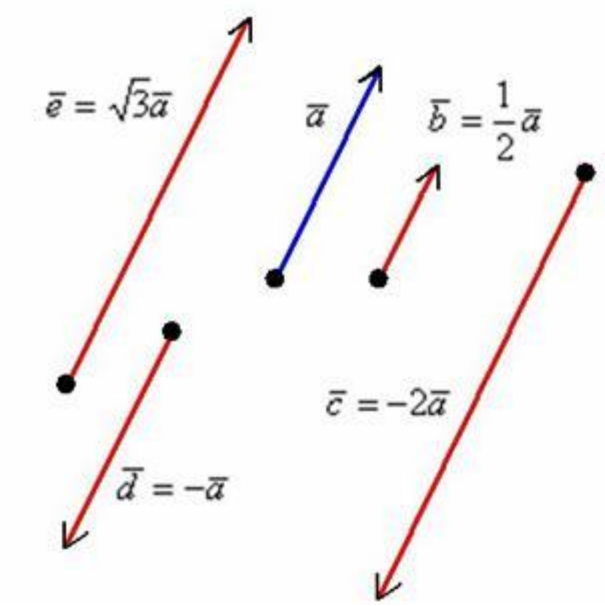
Сначала о коллинеарности векторов. Два вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Грубо говоря, речь идёт о параллельных векторах. Но применительно к ним всегда используют прилагательное «коллинеарные».

Представьте два коллинеарных вектора. Если стрелки данных векторов направлены в одинаковом направлении, то такие векторы называются **сонаправленными**. Если стрелки смотрят в разные стороны, то векторы будут **противоположно направлены**.

Обозначения: коллинеарность векторов записывают привычным значком параллельности: $\bar{a} \parallel \bar{b}$, при этом возможна детализация: $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ (векторы сонаправлены) или $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$ (векторы направлены противоположно).

Произведением ненулевого вектора $\bar{a}$ на число λ является такой вектор $\bar{b}$, длина которого равна $|\lambda| \cdot |\bar{a}|$, причём векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправлены при $\lambda \geq 0$ и противоположно направлены при $\lambda < 0$.

Правило умножения вектора на число легче понять с помощью рисунка:



Разбираемся более детально:

1) Направление. Если множитель λ отрицательный, то вектор **меняет направление** на противоположное.

2) Длина. Если множитель заключен в пределах $-1 < \lambda < 0$ или $0 < \lambda < 1$, то длина вектора <u>уменьшается</u>. Так, длина вектора $\bar{b} = \frac{1}{2}\bar{a}$ в два раза меньше длины вектора $\bar{a}$. Если множитель λ по модулю больше единицы, то длина вектора <u>увеличивается</u> в λ раз.

3) Обратите внимание, что **все векторы коллинеарны**, при этом один вектор выражен через другой, например, $\bar{c} = -2\bar{a}$. **Обратное тоже справедливо**: если один вектор можно выразить через другой, то такие векторы обязательно коллинеарны. Таким образом: **если мы умножаем вектор на число, то получится коллинеарный** (по отношению к исходному) **вектор**.

4) Векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{e}$ сонаправлены. Векторы $\bar{c}$ и $\bar{d}$ также сонаправлены. Любой вектор первой группы противоположно направлен по отношению к любому вектору второй группы.

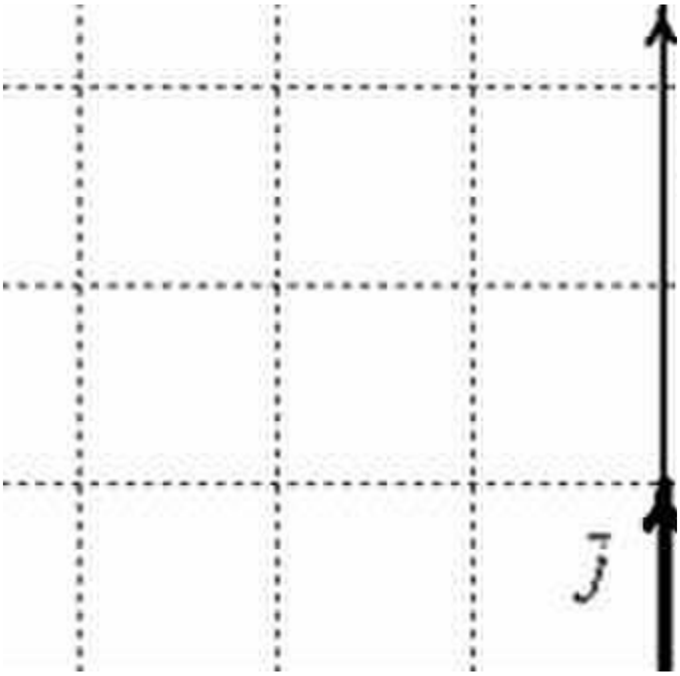
Какие векторы являются равными?

Два вектора равны, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину. Заметьте, что сонаправленность подразумевает коллинеарность векторов. Определение будет неточным (избыточным), если сказать: «Два вектора равны, если они коллинеарны, сонаправлены и имеют одинаковую длину».

С точки зрения понятия свободного вектора, равные векторы – это один и тот же вектор, о чём уже шла речь в предыдущем параграфе.

Координаты вектора на плоскости и в пространстве

Первым пунктом рассмотрим векторы на плоскости. Изобразим декартову прямоугольную систему координат и от начала координат отложим **единичные** векторы $\bar{i}$ и $\bar{j}$:



Векторы $\bar{i}$ и $\bar{j}$ **ортогональны**. Ортогональны = Перпендикулярны. Рекомендую потихоньку привыкать к терминам: вместо параллельности и перпендикулярности используем соответственно слова *коллинеарность* и *ортогональность*.

Обозначение: ортогональность векторов записывают привычным значком перпендикулярности, например: $\bar{i} \perp \bar{j}$.

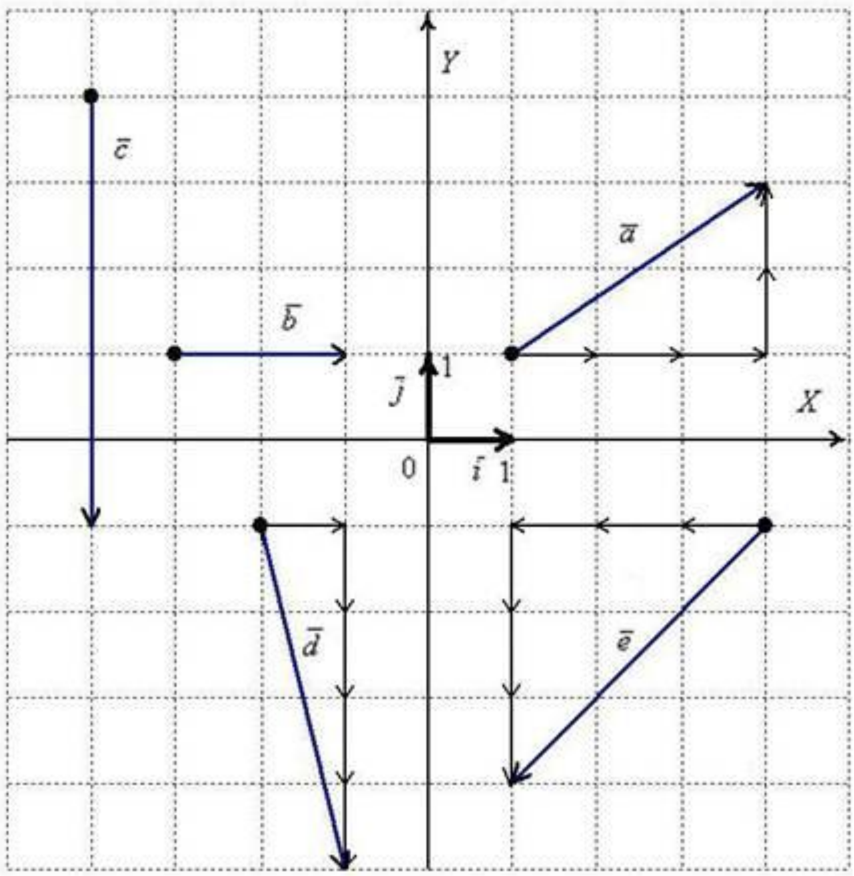
Рассматриваемые векторы называют **координатными векторами** или **ортами**. Данные векторы образуют **базис** на плоскости. Что такое базис, думаю, интуитивно многим понятно, более подробную информацию можно найти в статье [Линейная (не) зависимость векторов. Базис векторов](). Простыми словами, базис и начало координат задают всю систему – это своеобразный фундамент, на котором кипит полная и насыщенная геометрическая жизнь.

Иногда построенный базис называют *ортонормированным* базисом плоскости: «орто» – потому что координатные векторы ортогональны, прилагательное «нормированный» означает единичный, т.е. длины векторов базиса равны единице.

Обозначение: базис обычно записывают в круглых скобках, внутри которых **в строгой последовательности** перечисляются базисные векторы, например: $(\bar{i};\bar{j})$. Координатные векторы **нельзя** переставлять местами.

Любой вектор $\bar{v}$ плоскости **единственным образом** выражается в виде: $\bar{v} = v_1 \cdot \bar{i} + v_2 \cdot \bar{j}$, где v_1, v_2 – **числа**, которые называются **координатами вектора** в данном базисе. А само выражение $\bar{v} = v_1 \cdot \bar{i} + v_2 \cdot \bar{j}$ называется **разложением вектора** $\bar{v}$ **по базису** $(\bar{i};\bar{j})$.

Ужин подан:



! ВСЕМ настоятельно рекомендую прочитать ВСЁ!

Начнем с первой буквы алфавита: $\bar{a} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$. По чертежу хорошо видно, что при разложении вектора по базису используются только что рассмотренные:

1) правило умножения вектора на число: $3\bar{i}$ и $2\bar{j}$;

2) сложение векторов по правилу треугольника: $3\bar{i} + 2\bar{j}$.

А теперь мысленно отложите вектор $\bar{a}$ от любой другой точки плоскости. Совершенно очевидно, что его разложение $3\bar{i} + 2\bar{j}$ будет «неотступно следовать за ним». Вот она, свобода вектора – вектор «всё носит при себе». Это свойство, разумеется, справедливо для любого вектора. Забавно, что сами базисные (свободные) векторы $\bar{i}, \bar{j}$ не обязательно откладывать от начала координат, один можно нарисовать, например, слева внизу, а другой – справа вверху, и от этого ничего не изменится! Правда, делать так не нужно, поскольку преподаватель тоже проявит оригинальность и нарисует вам «зачтено» в неожиданном месте.

Векторы $\bar{b} = 2\bar{i}$, $\bar{c} = -5\bar{j}$ иллюстрируют в точности правило умножения вектора на число, вектор $\bar{b} = 2\bar{i}$ сонаправлен с базисным вектором $\bar{i}$, вектор $\bar{c} = -5\bar{j}$ направлен противоположно по отношению к базисному вектору $\bar{j}$. У данных векторов одна из координат равна нулю, дотошно можно записать так:

$\bar{b} = 2\bar{i} + 0 \cdot \bar{j}$

$\bar{c} = 0 \cdot \bar{i} - 5\bar{j}$

А базисные векторы, к слову, так: $\bar{i} = 1 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j}, \quad \bar{j} = 0 \cdot \bar{i} + 1 \cdot \bar{j}$ (по сути, они выражаются сами через себя).

И, наконец: $\bar{d} = \bar{i} - 4\bar{j}$, $\bar{e} = -3\bar{i} - 3\bar{j}$. Кстати, что такое вычитание векторов, и почему я не рассказал о правиле вычитания? Где-то в линейной алгебре, уже не помню где, я отмечал, что вычитание – это частный случай сложения. Так, разложения векторов «дэ» и «е» преспокойно записываются в виде суммы: $\bar{d} = \bar{i} + (-4\bar{j})$, $\bar{e} = -3\bar{i} + (-3\bar{j})$. Проследите по чертежу, как чётко в этих ситуациях работает старое доброе сложение векторов по правилу треугольника.

Рассмотренное разложение вида $\bar{v} = v_1 \cdot \bar{i} + v_2 \cdot \bar{j}$ иногда называют разложением вектора *в системе орт* (т.е. в системе единичных векторов). Но это не единственный способ записи вектора, распространён следующий вариант:

$\bar{a}(3;\,2)$

$\bar{b}(2;\,0)$

$\bar{c}(0;\,-5)$

$\bar{d}(1;\,-4)$

$\bar{e}(-3;\,-3)$ Или со знаком равенства:

$\bar{a} = (3;\,2)$

$\bar{b} = (2;\,0)$

$\bar{c} = (0;\,-5)$

$\bar{d} = (1;\,-4)$

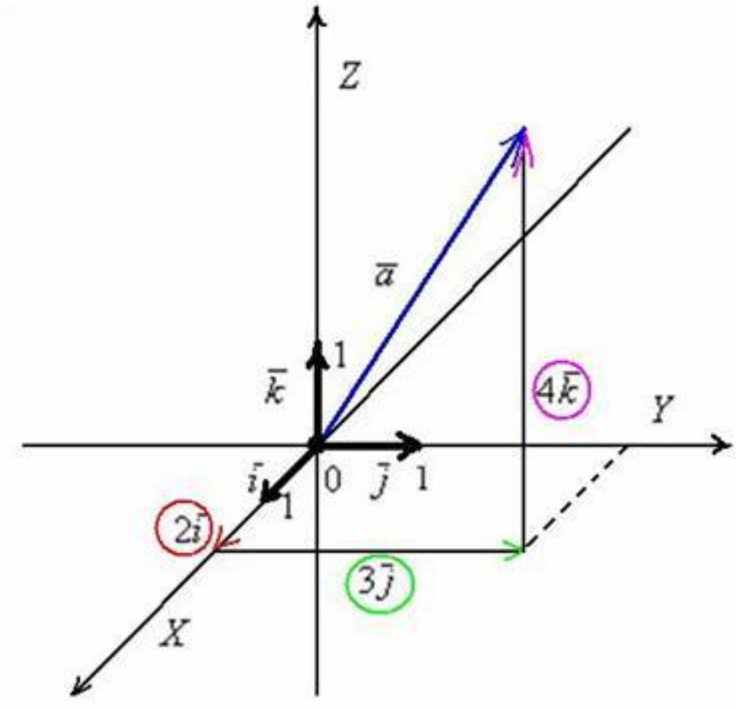
$\bar{e} = (-3;\,-3)$

Сами базисные векторы записываются так: $\bar{i}(1;\,0)$ и $\bar{j}(0;\,1)$

То есть, в круглых скобках указываются координаты вектора. В практических задачах используются все три варианта записи.

Сомневался, говорить ли, но всё-таки скажу: **координаты векторов переставлять нельзя**. **Строго на первом месте** записываем координату, которая соответствует единичному вектору $\bar{i}$, **строго на втором месте** записываем координату, которая соответствует единичному вектору $\bar{j}$. Действительно, $\bar{v}(1;\,5)$ и $\bar{w}(5;\,1)$ – это ведь два разных вектора.

С координатами на плоскости разобрались. Теперь рассмотрим векторы в трехмерном пространстве, здесь практически всё так же! Только добавится ещё одна координата. Трехмерные чертежи выполнять тяжко, поэтому ограничусь одним вектором, который для простоты отложу от начала координат:



Перед вами *ортонормированный* базис $(\bar{i};\bar{j};\bar{k})$ трехмерного пространства и прямоугольная система координат, единичные векторы $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ данного базиса попарно ортогональны: $\bar{i}\perp\bar{j},\bar{i}\perp\bar{k}$ и $\bar{j}\perp\bar{k}$. Ось OX наклонена под углом 45 градусов только для того, чтобы складывалось визуальное впечатление пространства. О том, как правильно выполнять плоские и трехмерные чертежи на клетчатой бумаге, читайте в самом начале методички <u>**Графики и свойства функций**</u>.

Любой вектор $\bar{v}$ трехмерного пространства можно **единственным способом** разложить по ортонормированному базису $(\bar{i};\bar{j};\bar{k})$:
$\bar{v}=v_1\cdot\bar{i}+v_2\cdot\bar{j}+v_3\cdot\bar{k}$, где v_1,v_2,v_3 – координаты вектора $\bar{v}$ (числа) в данном базисе.

Пример с картинки: $\bar{a}=2\bar{i}+3\bar{j}+4\bar{k}$. Давайте посмотрим, как здесь работают правила действий с векторами. Во-первых, умножение вектора на число: $2\bar{i}$ (красная стрелка), $3\bar{j}$ (зеленая стрелка) и $4\bar{k}$ (малиновая стрелка). Во-вторых, перед вами пример сложения нескольких, в данном случае трёх, векторов: $2\bar{i}+3\bar{j}+4\bar{k}$. Вектор суммы $\bar{a}$ начинается в исходной точке отправления (начало вектора $2\bar{i}$) и утыкается в итоговую точку прибытия (конец вектора $4\bar{k}$).

Все векторы трехмерного пространства, естественно, тоже свободны, попробуйте мысленно отложить вектор $\bar{a}$ от любой другой точки, и вы поймёте, что его разложение $2\bar{i}+3\bar{j}+4\bar{k}$ «останется при нём».

Аналогично плоскому случаю, помимо записи $\bar{a}=2\bar{i}+3\bar{j}+4\bar{k}$ широко используются версии со скобками: $\bar{a}(2;3;4)$ либо $\bar{a}=(2;3;4)$.

Если в разложении отсутствует один (или два) координатных вектора, то вместо них ставятся нули. Примеры:
вектор $\bar{b}=-\bar{i}+3\bar{k}$ (дотошно $\bar{b}=-\bar{i}+0\cdot\bar{j}+3\bar{k}$) – запишем $\bar{b}(-1;0;3)$;

вектор $\bar{c} = 2\bar{j} - 5\bar{k}$ (дотошно $\bar{c} = 0 \cdot \bar{i} + 2\bar{j} - 5\bar{k}$) – запишем $\bar{c}(0;\ 2;\ -5)$;
вектор $\bar{d} = 3\bar{k}$ (дотошно $\bar{d} = 0 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + 3\bar{k}$) – запишем $\bar{d}(0;\ 0;\ 3)$.

Базисные векторы записываются следующим образом:
$\bar{i}(1;\ 0;\ 0)$
$\bar{j}(0;\ 1;\ 0)$
$\bar{k}(0;\ 0;\ 1)$

Вот, пожалуй, и все минимальные теоретические знания, необходимые для решения задач аналитической геометрии. Возможно многовато терминов и определений, поэтому чайникам рекомендую перечитать и осмыслить данную информацию ещё раз. Да и любому читателю будет полезно время от времени обращаться к базовому уроку для лучшего усвоения материала. Коллинеарность, ортогональность, ортонормированный базис, разложение вектора – эти и другие понятия будут часто использоваться в дальнейшем. Отмечу, что материалов сайта недостаточно для сдачи теоретического зачета, коллоквиума по геометрии, так как все теоремы (к тому же без доказательств) я аккуратно шифрую – в ущерб научному стилю изложения, но плюсом к вашему пониманию предмета. Для получения обстоятельной теоретической справки прошу следовать на поклон к профессору Атанасяну.

А мы переходим к практической части:

Простейшие задачи аналитической геометрии. Действия с векторами в координатах

Задания, которые будут рассмотрены, крайне желательно научиться решать на полном автомате, а формулы **запомнить наизусть**, даже специально не запоминать, сами запомнятся =) Это весьма важно, поскольку на простейших элементарных примерах базируются другие задачи аналитической геометрии, и будет досадно тратить дополнительное время на поедание пешек. Не нужно застёгивать верхние пуговицы на рубашке, многие вещи знакомы вам со школы.

Изложение материала пойдет параллельным курсом – и для плоскости, и для пространства. По той причине, что все формулы… сами увидите.

Как найти вектор по двум точкам?

Если даны две точки плоскости $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$, то вектор $\overline{AB}$ имеет следующие координаты:
$\overline{AB}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$

Если даны две точки пространства $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то вектор $\overline{AB}$ имеет следующие координаты:
$\overline{AB}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$

То есть, **из координат конца вектора** нужно вычесть соответствующие координаты **начала вектора**.

<u>Задание:</u> Для тех же точек запишите формулы нахождения координат вектора $\overline{BA}$. Формулы в конце урока.

<u>Пример 1</u>

Даны две точки плоскости $A(2;\,1)$ и $B(-2;\,3)$. Найти координаты вектора $\overline{AB}$

Решение: по соответствующей формуле:
$\overline{AB}(-2-2;\,3-1) = \overline{AB}(-4;\,2)$

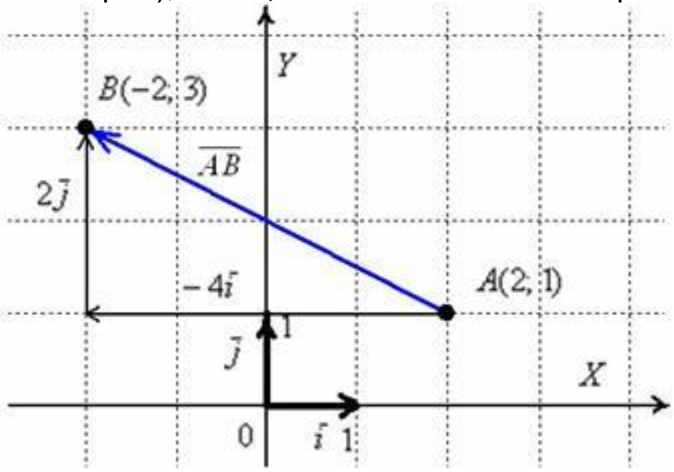
Как вариант, можно было использовать следующую запись:
$\overline{AB} = (-2-2;\,3-1) = (-4;\,2)$

Эстеты решат и так: $\overline{AB} = (-2-2)\bar{i} + (3-1)\bar{j} = -4\bar{i} + 2\bar{j}$

Лично я привык к первой версии записи.

Ответ: $\overline{AB}(-4;\,2)$

По условию не требовалось строить чертежа (что характерно для задач аналитической геометрии), но в целях пояснения некоторых моментов чайникам, не поленюсь:



Обязательно нужно понимать **различие между координатами точек и координатами векторов**:

Координаты точек – это обычные координаты в прямоугольной системе координат. Откладывать точки на координатной плоскости, думаю, все умеют ещё с 5-6 класса. Каждая точка обладает строгим местом на плоскости, и перемещать их куда-либо нельзя.

Координаты же вектора – это его разложение по базису $(\bar{i};\,\bar{j})$, в данном случае $\overline{AB} = -4\bar{i} + 2\bar{j}$. Любой вектор является свободным, поэтому при желании или необходимости мы легко можем отложить его от какой-нибудь другой точки плоскости (во избежание путаницы переобозначив, например, через $\bar{a}$). Интересно, что для векторов можно вообще не строить оси, прямоугольную систему координат, нужен лишь базис, в данном случае ортонормированный базис плоскости $(\bar{i};\,\bar{j})$.

Записи координат точек и координат векторов вроде бы схожи: $A(2;\,1),\ B(-2;\,3),\ \overline{AB}(-4;\,2)$,
а **смысл координат** абсолютно **разный**, и вам следует хорошо понимать эту разницу. Данное отличие, разумеется, справедливо и для пространства.

Дамы и господа, набиваем руку:

<u>Пример 2</u>

а) Даны точки $A(-4;\,5)$ и $B(1;\,-3)$. Найти векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$.

б) Даны точки $A(2;\,0),\ B(-7;\,1)$ и $C(4;\,1)$. Найти векторы $\overline{AB},\ \overline{AC}$ и $\overline{BC}$.

в) Даны точки $F(-2;\,-1;\,0)$ и $E(0;\,-1;\,-2)$. Найти векторы $\overline{FE}$ и $\overline{EF}$.

г) Даны точки $A_1(10;\,5;\,-4),\ A_2(-8;\,6;\,3),\ A_3(1;\,1;\,-1),\ A_4(0;\,0;\,1)$. Найти векторы $\overline{A_1A_2},\ \overline{A_1A_3},\ \overline{A_1A_4}$.

Пожалуй, достаточно. Это примеры для самостоятельного решения, постарайтесь ими не пренебрегать, окупится ;-). Чертежи делать не нужно. Решения и ответы в конце урока.

Что важно при решении задач аналитической геометрии? Важно быть ПРЕДЕЛЬНО ВНИМАТЕЛЬНЫМ, чтобы не допустить мастерскую ошибку «два плюс два равно нулю». Сразу извиняюсь, если где ошибся =)

Как найти длину отрезка?

Длина, как уже отмечалось, обозначается знаком модуля.

Если даны две точки плоскости $A(x_1;\,y_1)$ и $B(x_2;\,y_2)$, то длину отрезка AB можно вычислить по формуле $|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Если даны две точки пространства $A(x_1;\,y_1;\,z_1)$ и $B(x_2;\,y_2;\,z_2)$, то длину отрезка AB можно вычислить по формуле $|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

Примечание: *Формулы останутся корректными, если переставить местами соответствующие координаты:* $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ *и* $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$*, но более стандартен первый вариант*

<u>Пример 3</u>

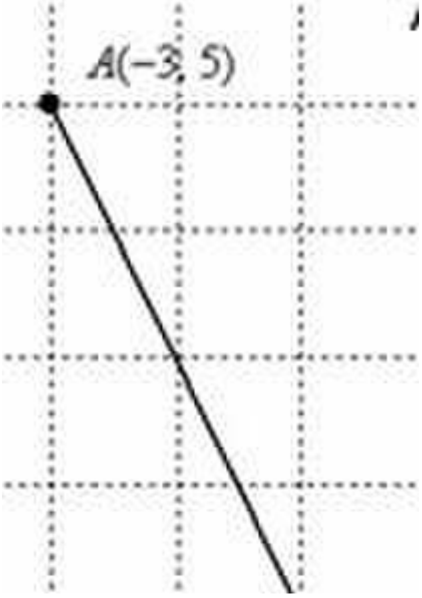
Даны точки $A(-3;\,5)$ и $B(1;\,-3)$. Найти длину отрезка AB.

Решение: по соответствующей формуле:

$$|AB|=\sqrt{(1-(-3))^2+(-3-5)^2}=\sqrt{4^2+(-8)^2}=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$$

Ответ: $|AB|=4\sqrt{5}$ ед. $\approx 8{,}94$ ед.

Для наглядности выполню чертёж



Отрезок AB – **это не вектор**, и перемещать его куда-либо, конечно, нельзя. Кроме того, если вы выполните чертеж в масштабе: 1 ед. = 1 см (две тетрадные клетки), то полученный ответ $|AB| \approx 8{,}94$ ед. можно проверить обычной линейкой, непосредственно измерив длину отрезка.

Да, решение короткое, но в нём есть ещё пара важных моментов, которые хотелось бы пояснить:

Во-первых, в ответе ставим размерность: «единицы». В условии не сказано, ЧТО это, миллиметры, сантиметры, метры или километры. Поэтому математически грамотным решением будет общая формулировка: «единицы» – сокращенно «ед.».

Во-вторых, повторим школьный материал, который полезен не только для рассмотренной задачи:

Читаем!!!

Обратите внимание на **важный технический приём** – **вынесение множителя из-под корня**. В результате вычислений у нас получился результат $\sqrt{80}$ и хороший математический стиль предполагает вынесение множителя из-под корня (если это возможно). Подробнее процесс выглядит так: $\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$. Конечно, оставить ответ в виде $\sqrt{80}$ не будет ошибкой – но недочетом-то уж точно и весомым аргументом для придирки со стороны преподавателя.

Вот другие распространенные случаи:

$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$

$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$

$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$

$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$

$\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6}$

$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$

Нередко под корнем получается достаточно большое число, например $\sqrt{5904}$. Как быть в таких случаях? На калькуляторе проверяем, делится ли число на 4: $\frac{5904}{4}=1476$. Да, разделилось нацело, таким образом: $5904=4\cdot 1476$. А может быть, число 1476 ещё раз удастся разделить на 4? $\frac{1476}{4}=369$. Таким образом: $5904=4\cdot 4\cdot 369$. У числа 369 последняя цифра нечетная, поэтому разделить в третий раз на 4 явно не удастся. Пробуем поделить на девять: $\frac{369}{9}=41$. В результате:

$\sqrt{5904}=\sqrt{4\cdot 4\cdot 9\cdot 41}=2\cdot 2\cdot 3\sqrt{41}=12\sqrt{41}$ Готово.

Вывод: если под корнем получается неизвлекаемое нацело число, то пытаемся вынести множитель из-под корня – на калькуляторе проверяем, делится ли число на: 4, 9, 16, 25, 36, 49 и т.д.

В ходе решения различных задач корни встречаются часто, всегда пытайтесь извлекать множители из-под корня во избежание более низкой оценки да ненужных заморочек с доработкой ваших решений по замечанию преподавателя.

Давайте заодно повторим возведение корней в квадрат и другие степени:

$$(4\sqrt{2})^2=4^2\cdot(\sqrt{2})^2=16\cdot 2=32$$

$$(-5\sqrt{3})^2=(-1)^2\cdot 5^2\cdot(\sqrt{3})^2=1\cdot 25\cdot 3=75$$

$$(\sqrt{3})^3=\sqrt{3^3}=\sqrt{9\cdot 3}=3\sqrt{3}$$

$$(2\sqrt{2})^4=2^4\cdot\sqrt{2^4}=16\cdot 4=64$$

$$(\sqrt[3]{4})^2=\sqrt[3]{4^2}=\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^3\cdot 2}=2\cdot\sqrt[3]{2}$$

Правила действий со степенями в общем виде можно найти в школьном учебнике по алгебре, но, думаю, из приведённых примеров всё или почти всё уже ясно.

Задание для самостоятельного решения с отрезком в пространстве:

Пример 4

Даны точки $A(2;\,3;\,-1)$ и $B(-5;\,3;\,0)$. Найти длину отрезка AB.

Решение и ответ в конце урока.

Как найти длину вектора?

Если дан вектор плоскости $\bar{v}(v_1;\,v_2)$, то его длина вычисляется по формуле $|\bar{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2}$.

Если дан вектор пространства $\bar{v}(v_1;\,v_2;\,v_3)$, то его длина вычисляется по формуле $|\bar{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$.

Данные формулы (как и формулы длины отрезка) легко выводятся с помощью небезызвестной теоремы Пифагора.

Пример 5

Даны точки $A(-3;\,5)$ и $B(1;\,-3)$. Найти длину вектора $\overline{AB}$.

Я взял те же точки, что и в Примере 3.

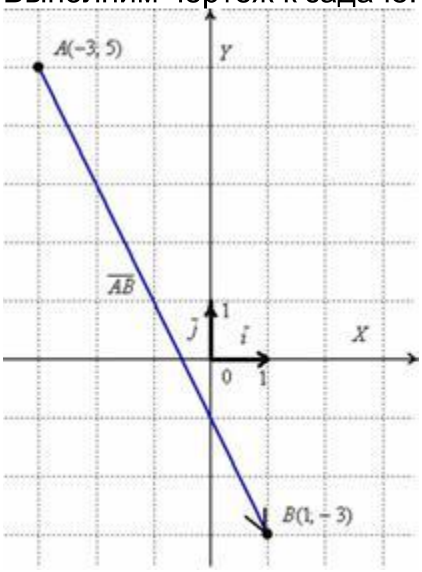
Решение: Сначала найдём вектор $\overline{AB}$:
$\overline{AB}(1-(-3);\,-3-5)=\overline{AB}(4;\,-8)$

По формуле $|\overline{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2}$ вычислим длину вектора:
$|\overline{AB}|=\sqrt{4^2+(-8)^2}=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

Ответ: $|\overline{AB}|=4\sqrt{5}$ ед. $\approx 8{,}94$ ед.

Не забываем указывать размерность – «единицы»! Всегда ли, кстати, нужно рассчитывать приближенное значение (в данном примере 8,94), если этого не требуется в условии? С моей точки зрения, лишним не будет, отсутствие приближенного значения тянет на придирку. Округление целесообразно проводить до 2-3 знаков после запятой.

Выполним чертеж к задаче:



В чём принципиальное отличие от Примера 3? Отличие состоит в том, что **здесь речь идёт о векторе**, а не об отрезке. Вектор можно переместить в любую точку плоскости, при этом его лучше переобозначить, например, через $\overline{a}$.

А в чём сходство Примера 3 и Примера 5? Геометрически очевидно, что длина отрезка AB равна длине вектора $\overline{AB}$. Так же очевидно, что длина вектора $\overline{BA}$ будет такой же.
По итогу: $|AB|=|\overline{AB}|=|\overline{BA}|$

Задачу 3 можно было решить и вторым способом, повторю условие: Даны точки $A(-3;\,5)$ и $B(1;\,-3)$. Найти длину отрезка AB .

Вместо применения формулы $|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, поступаем так:

1) Находим вектор $\overline{AB}(1-(-3);\,-3-5)=\overline{AB}(4;\,-8)$.

2) А теперь ссылаемся на то, что длина отрезка AB равна длине вектора $\overline{AB}$:
$|AB|=|\overline{AB}|=\sqrt{4^2+(-8)^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$ ед. $\approx 8{,}94$ ед.

Этот способ широко практикуется в ходе решений задач аналитической геометрии.

Вышесказанное справедливо и для пространственного случая

Для тренировки:

Пример 6

а) Даны точки $A(0;\,2;\,5)$ и $B(-4;\,7;\,15)$. Найти длину вектора $\overline{BA}$.

б) Даны векторы $\overline{a}(-2;\,6)$, $\overline{b}(-4\sqrt{2};\,2;\,0)$, $\overline{c}=4\overline{i}+\sqrt{2}\overline{j}$ и $\overline{d}=4\overline{j}-3\overline{k}$. Найти их длины.

Решения и ответы в конце урока.

Действия с векторами в координатах

В первой части урока мы рассматривали правила сложения векторов и умножения вектора на число. Но рассматривали их с принципиально-графической точки зрения. Посмотрим, как данные правила работают аналитически – когда заданы координаты векторов:

1) **Правило сложения векторов**. Рассмотрим два вектора плоскости $\overline{v}=(v_1;\,v_2)$ и $\overline{w}=(w_1;\,w_2)$. Для того, чтобы сложить векторы, нужно **сложить их соответствующие координаты**: $\overline{v}+\overline{w}=(v_1+w_1;\,v_2+w_2)$. Как просто. На всякий случай запишу частный случай – формулу разности векторов: $\overline{v}-\overline{w}=(v_1-w_1;\,v_2-w_2)$. Аналогичное правило справедливо для суммы любого количества векторов, добавим например, вектор $\overline{s}=(s_1;\,s_2)$ и найдём сумму трёх векторов: $\overline{v}+\overline{w}+\overline{s}=(v_1+w_1+s_1;\,v_2+w_2+s_2)$

Если речь идёт о векторах в пространстве, то всё точно так же, только добавится дополнительная координата. Если даны векторы $\overline{v}=(v_1;\,v_2;\,v_3),\ \overline{w}=(w_1;\,w_2;\,w_3)$, то их суммой является вектор $\overline{v}+\overline{w}=(v_1+w_1;\,v_2+w_2;\,v_3+w_3)$.

2) **Правило умножения вектора на число.** Ещё проще! Для того чтобы вектор $\overline{v}=(v_1;\,v_2)$ умножить на число λ, нужно каждую координату данного вектора умножить на число λ:

$\lambda\overline{v}=(\lambda v_1;\,\lambda v_2)$.

Для пространственного вектора $\overline{v}=(v_1;\,v_2;\,v_3)$ правило такое же:

$\lambda\overline{v}=(\lambda v_1;\,\lambda v_2;\,\lambda v_3)$

Приведённые факты строго доказываются в курсе аналитической геометрии.

Примечание: *Данные правила справедливы не только для ортонормированных базисов $(\overline{i};\,\overline{j})$, $(\overline{i};\,\overline{j};\,\overline{k})$ но и для произвольного аффинного базиса плоскости или пространства. Более подробно о базисах читайте в статье* ***Линейная (не) зависимость векторов. Базис векторов***.

Пример 7

Даны векторы $\overline{a}(1;\,-2)$ и $\overline{b}(2;\,3)$. Найти $2\overline{a}$, $\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{a}-\overline{b}$

Решение чисто аналитическое:

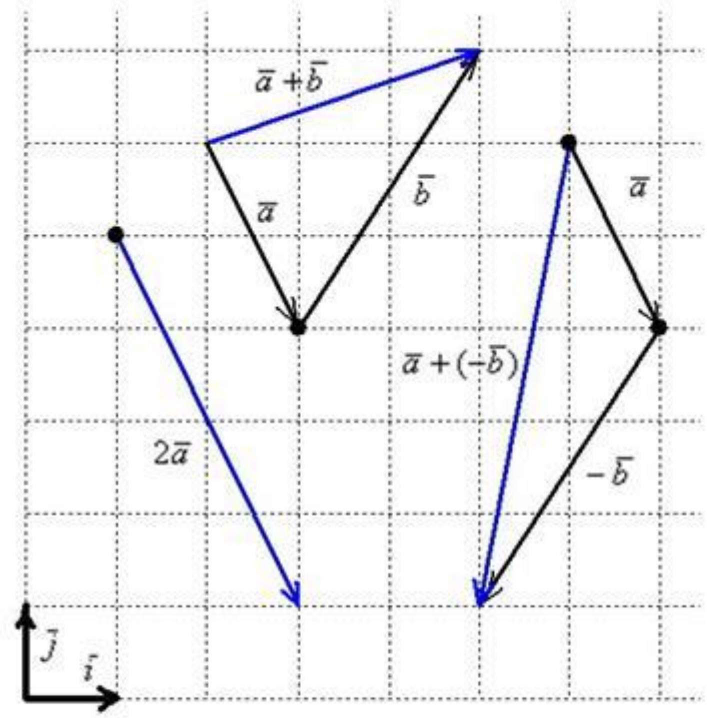
$2\overline{a}=2(1;\,-2)=(2;\,-4)$

$\overline{a}+\overline{b}=(1;\,-2)+(2;\,3)=(1+2;\,-2+3)=(3;\,1)$

$\overline{a}-\overline{b}=(1;\,-2)-(2;\,3)=(1-2;\,-2-3)=(-1;\,-5)$

Ответ: $2\overline{a} = (2; -4), \quad \overline{a} + \overline{b} = (3; 1), \quad \overline{a} - \overline{b} = (-1; -5)$

Чертеж в подобных задачах строить не надо, тем не менее, геометрическая демонстрация будет весьма полезной. Если считать, что векторы заданы в ортонормированном базисе $(\overline{i}; \overline{j})$, то графическое решение задачи будет таким:



Коль скоро речь идет **только** о векторах в ортонормированном базисе, то оси рисовать не обязательно. Достаточно начертить базисные векторы, причём, где угодно. Ну, и координатную сетку для удобства. Строго говоря, ранее я допустил небольшой огрех – в некоторых чертежах урока тоже можно было не чертить декартову прямоугольную систему координат. Векторам она не нужна, им нужен базис. Впрочем, лучше всегда рисуйте, а то напугаете всех своими знаниями =)

Как видите, графический способ решения привёл к тем же результатам, что и аналитический способ решения. Ещё раз заметьте свободу векторов: любую из трёх «конструкций» можно переместить в любую точку плоскости.

Для векторов в пространстве можно провести аналогичные выкладки. Но там чертежи строить значительно сложнее, поэтому ограничусь аналитическим решением (на практике, собственно, бОльшего и не надо):

<u>Пример 8</u>

Даны векторы $\overline{a}(0; 4; -7)$ и $\overline{b}(7; -9; 1)$. Найти $3\overline{a} - 2\overline{b}$ и $-\overline{a} + 4\overline{b}$

Решение: Для действий с векторами справедлив обычный алгебраический приоритет: сначала умножаем, потом складываем:

$3\overline{a} - 2\overline{b} = 3(0; 4; -7) - 2(7; -9; 1) = (0; 12; -21) - (14; -18; 2) =$

$= (0 - 14; 12 - (-18); -21 - 2) = (-14; 30; -23)$

$-\overline{a} + 4\overline{b} = -(0; 4; -7) + 4(7; -9; 1) = (0; -4; 7) + (28; -36; 4) =$

$= (0 + 28; -4 - 36; 7 + 4) = (28; -40; 11)$

Ответ: $3\overline{a}-2\overline{b}=(-14;\,30;\,-23),\quad -\overline{a}+4\overline{b}=(28;\,-40;\,11)$

И в заключение занятный пример с векторами на плоскости:

Пример 9

Даны векторы $\overline{a}(1;\,-2),\,\overline{b}\,(2;\,0),\,\overline{c}\,(-4;\,2)$. Найти $3\overline{a}-5\overline{b}+\frac{1}{2}\overline{c}$ и $-2(\overline{a}-2\overline{c})+4\overline{b}$

Это задача для самостоятельного решения.

Какой вывод? Многие задачи аналитической геометрии прозрачны и просты, главное, не допустить вычислительных ошибок. Следующие рекомендуемые к изучению уроки:

!!! Скалярное произведение векторов
Линейная (не) зависимость векторов. Базис векторов
Векторное и смешанное произведение векторов

Это, так скажем, вектор-минимум студента =)

Любите векторы, и векторы полюбят вас!

Решения и ответы:

Задание: $\overline{BA}(x_1-x_2;\,y_1-y_2)$, $\overline{BA}(x_1-x_2;\,y_1-y_2;\,z_1-z_2)$

Пример 2: ***Решение:***
а)
$\overline{AB}(1-(-4);\,-3-5)=\overline{AB}(5;\,-8)$

$\overline{BA}(-4-1;\,5-(-3))=\overline{BA}(-5;\,8)$
б)
$\overline{AB}(-7-2;\,1-0)=\overline{AB}(-9;\,1)$

$\overline{AC}(4-2;\,1-0)=\overline{AC}(2;\,1)$

$\overline{BC}(4-(-7);\,1-1)=\overline{BC}(11;\,0)$
в)
$\overline{FE}(0-(-2);\,-1-(-1);\,-2-0)=\overline{FE}(2;\,0;\,-2)$

$\overline{EF}(-2-0;\,-1-(-1);\,0-(-2))=\overline{EF}(-2;\,0;\,2)$
г)
$\overline{A_1A_2}(-8-10;\,6-5;\,3-(-4))=\overline{A_1A_2}(-18;\,1;\,7)$

$\overline{A_1A_3}(1-10;\,1-5;\,-1-(-4))=\overline{A_1A_3}(-9;\,-4;\,3)$

$\overline{A_1A_4}(0-10;\,0-5;\,1-(-4))=\overline{A_1A_4}(-10;\,-5;\,5)$

Пример 4: ***Решение:***
По соответствующей формуле: $A(2;\,3;\,-1)$ и $B(-5;\,3;\,0)$
$$|AB|=\sqrt{(-5-2)^2+(3-3)^2+(0-(-1))^2}=\sqrt{(-7)^2+0^2+1^2}=\sqrt{49+0+1}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$
Ответ: $|AB|=5\sqrt{2}$ ед. $\approx 7{,}07$ ед.

Практика-11-12. Графики и основные свойства элементарных функций

Данный методический материал носит справочный характер и относится к широкому кругу тем. В статье приведен обзор графиков основных элементарных функций и рассмотрен важнейший вопрос – **как правильно и БЫСТРО построить график**. В ходе изучения высшей математики без знания графиков основных элементарных функций придётся тяжело, поэтому очень важно вспомнить, как выглядят графики параболы, гиперболы, синуса, косинуса и т.д., запомнить некоторые значения функций. Также речь пойдет о некоторых свойствах основных функций.

Я не претендую на полноту и научную основательность материалов, упор будет сделан, прежде всего, на практике – тех вещах, с которыми **приходится сталкиваться буквально на каждом шагу, в любой теме высшей математики**. Графики для чайников? Можно сказать и так.

По многочисленным просьбам читателей **кликабельное оглавление**:

И сразу начинаем:

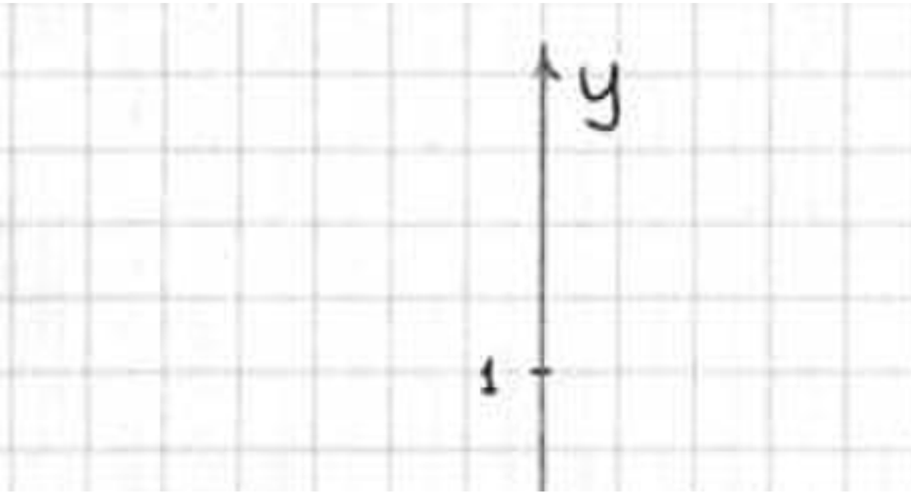
Как правильно построить координатные оси?

На практике контрольные работы почти всегда оформляются студентами в отдельных тетрадях, разлинованных в клетку. Зачем нужна клетчатая разметка? Ведь работу, в принципе, можно сделать и на листах А4. А клетка необходима как раз для качественного и точного оформления чертежей.

Любой чертеж графика функции начинается с координатных осей.

Чертежи бывают двухмерными и трехмерными.

Сначала рассмотрим двухмерный случай *декартовой прямоугольной системы координат*:



1) Чертим координатные оси. Ось OX называется ***осью абсцисс***, а ось OY – ***осью ординат***. Чертить их всегда стараемся **аккуратно и не криво**. Стрелочки тоже не должны напоминать бороду Папы Карло.

2) Подписываем оси большими буквами «икс» и «игрек». **Не забываем подписывать оси**.

3) Задаем масштаб по осям: **рисуем ноль и две единички**. При выполнении чертежа самый удобный и часто встречающийся масштаб: 1 единица = 2 клеточки (чертеж слева) – по возможности придерживайтесь именно его. Однако время от времени случается так, что чертеж не вмещается на тетрадный лист – тогда масштаб уменьшаем: 1 единица = 1 клеточка (чертеж справа). Редко, но бывает, что масштаб чертежа приходится уменьшать (или увеличивать) еще больше

НЕ НУЖНО «строчить из пулемёта» …-5, -4, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, …. Ибо координатная плоскость – не памятник Декарту, а студент – не голубь. Ставим **ноль** и **две единицы по осям**. Иногда **вместо** единиц удобно «засечь» другие значения, например, «двойку» на оси абсцисс и «тройку» на оси ординат – и эта система (0, 2 и 3) тоже однозначно задаст координатную сетку.

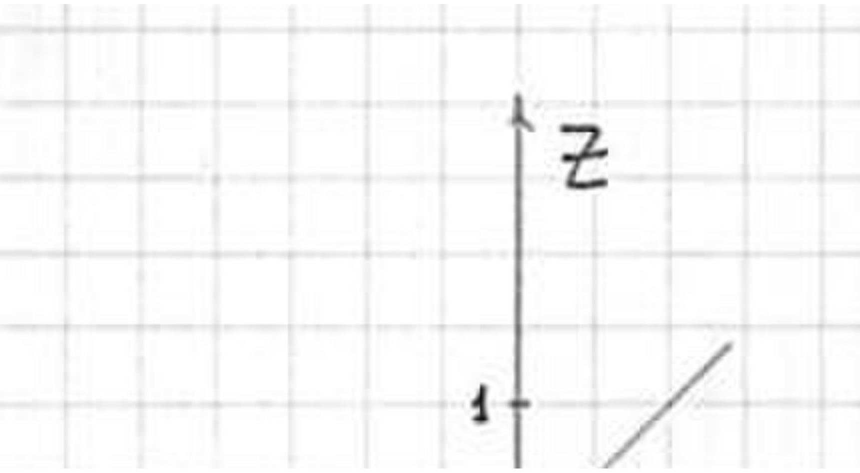
Предполагаемые размеры чертежа лучше оценить ещё ДО построения чертежа. Так, например, если в задании требуется начертить треугольник с вершинами $A(9;-3)$, $B(-7;-15)$, $C(0;9)$, то совершенно понятно, что популярный масштаб 1 единица = 2 клеточки не подойдет. Почему? Посмотрим на точку $B(-7;-15)$ – здесь придется отмерять пятнадцать сантиметров вниз, и, очевидно, что чертеж не вместится (или вместится еле-еле) на тетрадный лист. Поэтому сразу выбираем более мелкий масштаб 1 единица = 1 клеточка.

Кстати, о сантиметрах и тетрадных клетках. Правда ли, что в 30 тетрадных клетках содержится 15 сантиметров? Отмерьте в тетради для интереса 15 сантиметров линейкой. В СССР, возможно, это было правдой… Интересно отметить, что если отмерить эти самые сантиметры по горизонтали и вертикали, то результаты (в клетках) будут разными! Строго говоря, современные тетради не клетчатые, а прямоугольные. Возможно, это покажется ерундой, но, чертить, например, окружность циркулем при таких раскладах очень неудобно. Если честно, в такие моменты начинаешь задумываться о правоте товарища Сталина, который отправлял в лагеря за халтуру на производстве, не говоря уже об отечественном автомобилестроении, падающих самолетах или взрывающихся электростанциях.

К слову о качестве, или краткая рекомендация по канцтоварам. На сегодняшний день большинство тетрадей в продаже, плохих слов не говоря, полное гомно. По той причине, что они промокают, причём не только от гелевых, но и от шариковых ручек! На бумаге экономят. Для оформления контрольных работ рекомендую использовать тетради Архангельского ЦБК (18 листов, клетка) или «Пятёрочку», правда, она дороже. Ручку желательно выбрать гелевую, даже самый дешевый китайский гелевый стержень намного лучше, чем шариковая ручка, которая то мажет, то дерёт бумагу. Единственной «конкурентоспособной» шариковой ручкой на моей памяти является «Эрих Краузе». Она пишет чётко, красиво и стабильно – что с полным стержнем, что с практически пустым.

Дополнительно: вИдение прямоугольной системы координат глазами аналитической геометрии освещается в статье **Линейная (не) зависимость векторов. Базис векторов**, подробную информацию о координатных четвертях можно найти во втором параграфе урока **Линейные неравенства**.

Трехмерный случай



Здесь почти всё так же.

1) Чертим координатные оси. Стандарт: ***ось аппликат*** OZ – направлена вверх, ось OY – направлена вправо, ось OX – влево вниз **строго** под углом 45 градусов.

2) Подписываем оси.

3) Задаем масштаб по осям. **Масштаб по оси** OX **– меньше, чем масштаб по другим осям**. Также обратите внимание, что на правом чертеже я использовал нестандартную «засечку» по оси OX *(о такой возможности уже упомянуто выше)*. С моей точки зрения, так точнее, быстрее и эстетичнее – не нужно под микроскопом выискивать середину клетки и «лепить» единицу впритык к началу координат.

При выполнении трехмерного чертежа опять же – отдавайте приоритет масштабу *1 единица = 2 клетки* по осям OY и OZ (чертеж слева) и *1 единица = диагональ одной клетки* – по оси OX.

...Для чего нужны все эти правила? Правила существуют для того, чтобы их нарушать. Чем я сейчас и займусь. Дело в том, что последующие чертежи статьи будут выполнены мной в

Экселе, и, координатные оси будут выглядеть некорректно с точки зрения правильного оформления. Я бы мог начертить все графики от руки, но ~~чертить их на самом деле жуть как неохота~~ Эксель их начертит гораздо точнее.

Графики и основные свойства элементарных функций

График линейной функции

Линейная функция задается уравнением $y = ax + b$. График линейной функций представляет собой **прямую**. Для того, чтобы построить прямую достаточно знать две точки.

<u>Пример 1</u>

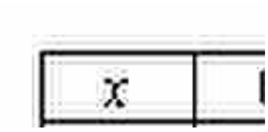
Построить график функции $y = 2x + 1$. Найдем две точки. В качестве одной из точек выгодно выбрать ноль.

Если $x = 0$, то $y = 2 \cdot 0 + 1 = 1$

Берем еще какую-нибудь точку, например, 1.

Если $x = 1$, то $y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

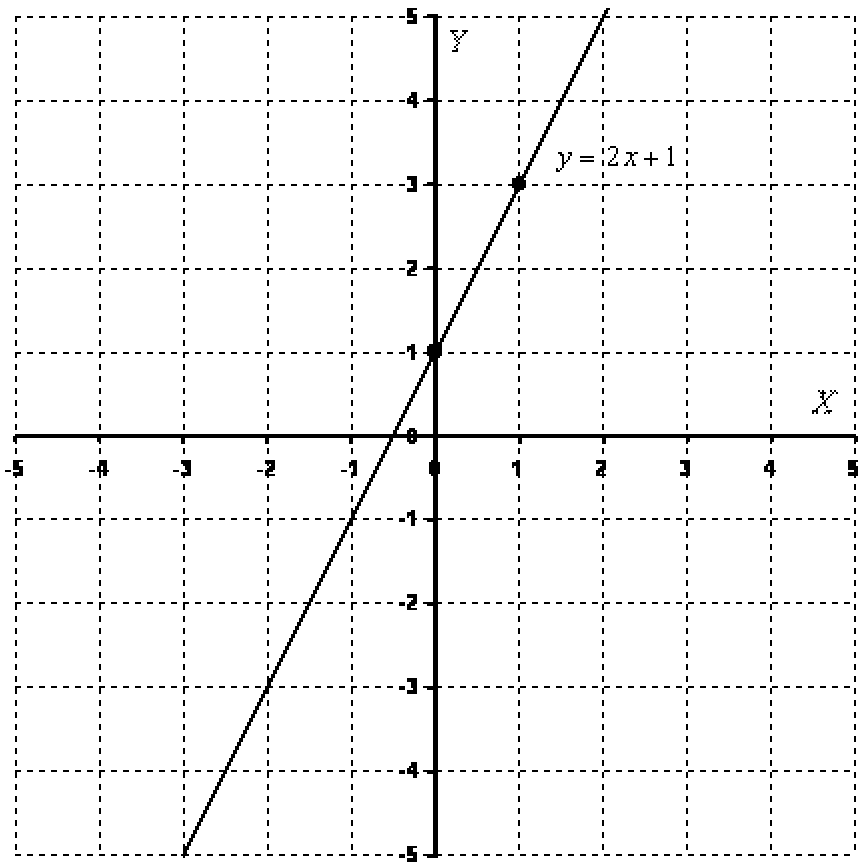
При оформлении заданий координаты точек обычно сводятся в таблицу:



x	

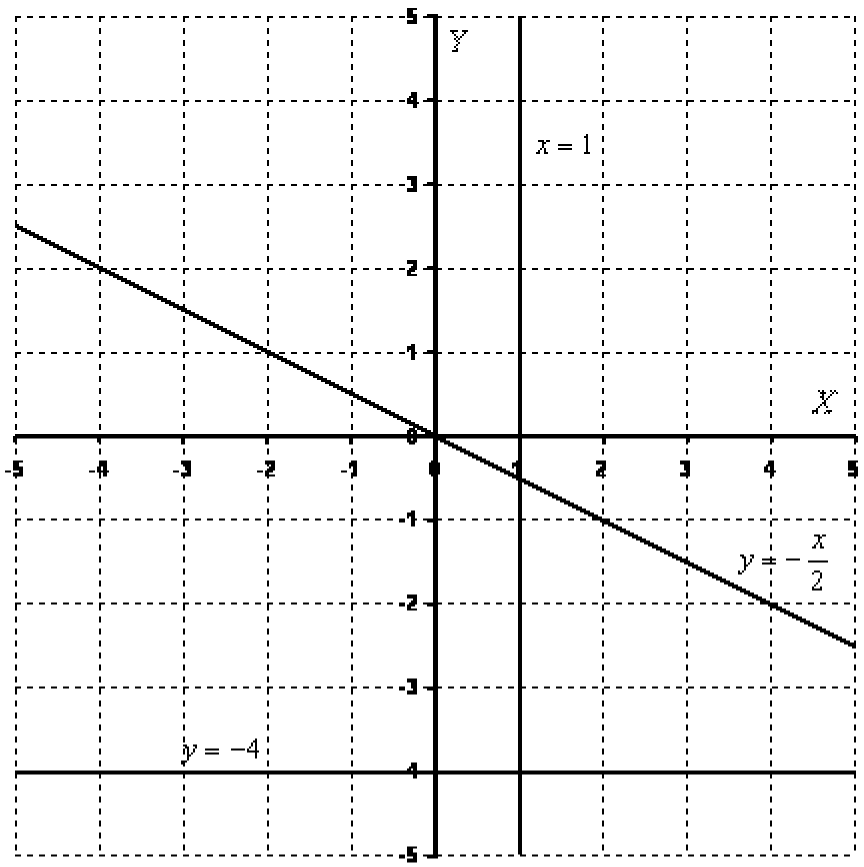
А сами значения рассчитываются устно или на черновике, калькуляторе.

Две точки найдены, выполним чертеж:



При оформлении чертежа всегда подписываем графики.

Не лишним будет вспомнить частные случаи линейной функции:



Обратите внимание, как я расположил подписи, **подписи не должны допускать разночтений при изучении чертежа**. В данном случае крайне нежелательно было поставить подпись рядом с точкой пересечения прямых $y = -4$, $x = 1$ или справа внизу между графиками.

1) Линейная функция вида $y = ax$ ($a \neq 0$) называется прямой пропорциональностью.

Например, $y = -\frac{x}{2}$. График прямой пропорциональности всегда проходит через начало координат. Таким образом, построение прямой упрощается – достаточно найти всего одну точку.

2) Уравнение вида $y = b$ задает прямую, параллельную оси OX, в частности, сама ось OX задается уравнением $y = 0$. График функции строится сразу, без нахождения всяких точек. То есть, запись $y = -4$ следует понимать так: «игрек всегда равен –4, при любом значении икс».

3) Уравнение вида $x = b$ задает прямую, параллельную оси OY, в частности, сама ось OY задается уравнением $x = 0$. График функции также строится сразу. Запись $x = 1$ следует понимать так: «икс всегда, при любом значении игрек, равен 1».

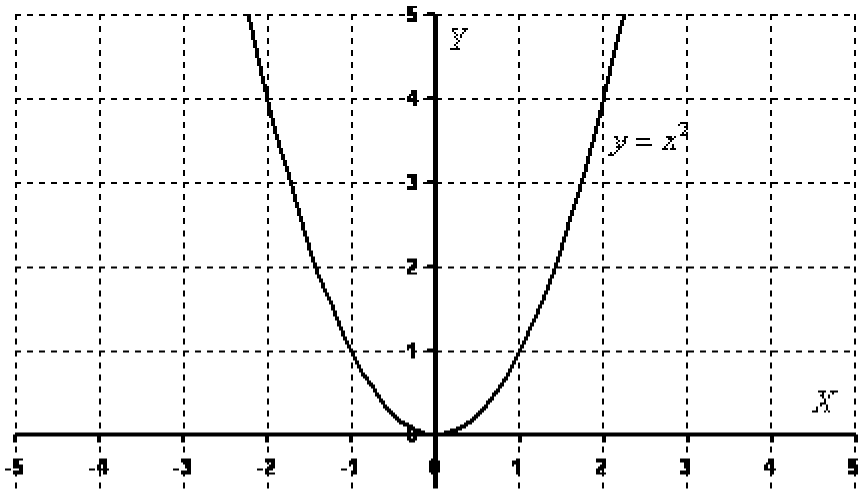
Некоторые спросят, ну зачем вспоминать 6 класс?! Так-то оно, может и так, только за годы практики я встретил добрый десяток студентов, которых ставила в тупик задача построения графика вроде $y = -4$ или $x = 1$.

Построение прямой – самое распространенное действие при выполнении чертежей.

Прямая линия детально рассматривается в курсе аналитической геометрии, и желающие могут обратиться к статье Уравнение прямой на плоскости.

График квадратичной, кубической функции, график многочлена

Парабола. График квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) представляет собой параболу. Рассмотрим знаменитый случай: $y = x^2$



Вспоминаем некоторые свойства функции $y = x^2$.

Область определения – любое действительное число (любое значение «икс»). Что это значит? Какую бы точку на оси OX мы не выбрали – для каждого «икс» существует точка параболы. Математически это записывается так: $D(f) = \Re$. Область определения любой функции стандартно обозначается через $D(f)$ или $D(y)$. Буква $\Re$ обозначает множество действительных чисел или, проще говоря, «любое икс» (когда работа оформляется в тетради, пишут не фигурную букву $\Re$, а жирную букву **R**).

Область значений – это множество всех значений, которые может принимать переменная «игрек». В данном случае: $E(f) = [0; +\infty)$ – множество всех положительных значений, включая ноль. Область значений стандартно обозначается через $E(f)$ или $E(y)$.

Функция $y = x^2$ является **чётной. Если функция является чётной, то ее график симметричен относительно оси** OY. Это очень полезное свойство, которое заметно упрощает построение графика, в чём мы скоро убедимся. Аналитически чётность функции выражается условием $f(-x) = f(x)$. Как проверить любую функцию на чётность? **Нужно вместо** x **подставить в уравнение** $-x$. В случае с параболой проверка выглядит так: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, значит, функция $y = x^2$ является четной.

Функция $y = x^2$ **не ограничена сверху**. Аналитически свойство записывается так: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (x^2) = +\infty$. Вот вам, кстати, и пример геометрического смысла предела функции: если мы будем уходить по оси OX (влево или вправо) на бесконечность, то ветки параболы (значения «игрек») будут неограниченно уходить вверх на «плюс бесконечность».

При **изучении пределов функций** желательно понимать геометрический смысл предела.

Я не случайно так подробно расписал свойства функции, все вышеперечисленные вещи полезно знать и помнить при построении графиков функций, а также при исследовании графиков функций.

Пример 2

Построить график функции $f(x) = -x^2 + 2x$.

В этом примере мы рассмотрим важный технический вопрос: **Как быстро построить параболу?** В практических заданиях необходимость начертить параболу возникает очень часто, в частности, при вычислении **площади фигуры с помощью определенного интеграла**. Поэтому чертеж желательно научиться выполнять быстро, с минимальной потерей времени. Я предлагаю следующий алгоритм построения.

Сначала находим вершину параболы. Для этого берём первую производную и приравниваем ее к нулю:

$$f'(x) = (-x^2 + 2x)' = -2x + 2 = 0$$

Если с производными плохо, следует ознакомиться с уроком **Как найти производную?**

Итак, решение нашего уравнения: $x = 1$ – именно в этой точке и находится вершина параболы. Почему это так, можно узнать из **теоретической статьи о производной** и урока об **экстремумах функции**. А пока рассчитываем соответствующее значение «игрек»:

$$f(1) = -1^2 + 2\cdot 1 = -1 + 2 = 1$$

Таким образом, вершина находится в точке $(1;\,1)$

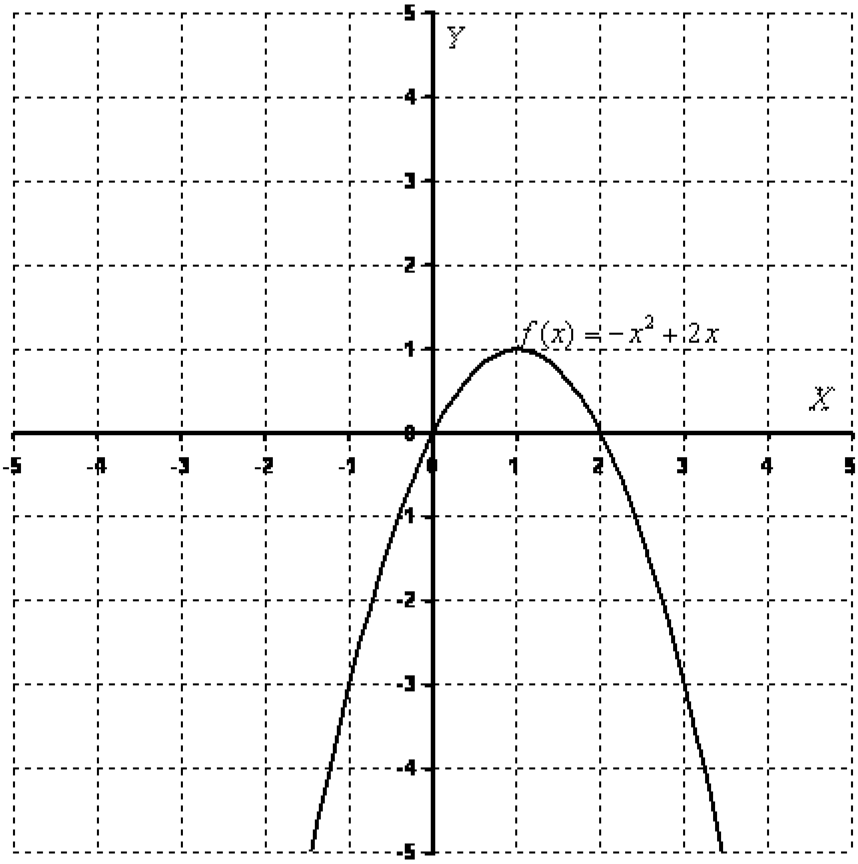
Теперь находим другие точки, при этом нагло пользуемся симметричностью параболы. Следует заметить, что функция $f(x) = -x^2 + 2x$ – **не является чётной**, но, тем не менее, симметричность параболы никто не отменял.

В каком порядке находить остальные точки, думаю, будет понятно из итоговой таблицы:

x	1	0	2

Данный алгоритм построения образно можно назвать «челноком» или принципом «туда-сюда» ~~с Анфисой Чеховой~~.

Выполним чертеж:



Из рассмотренных графиков вспоминается еще один полезный признак:

Для квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) справедливо следующее:

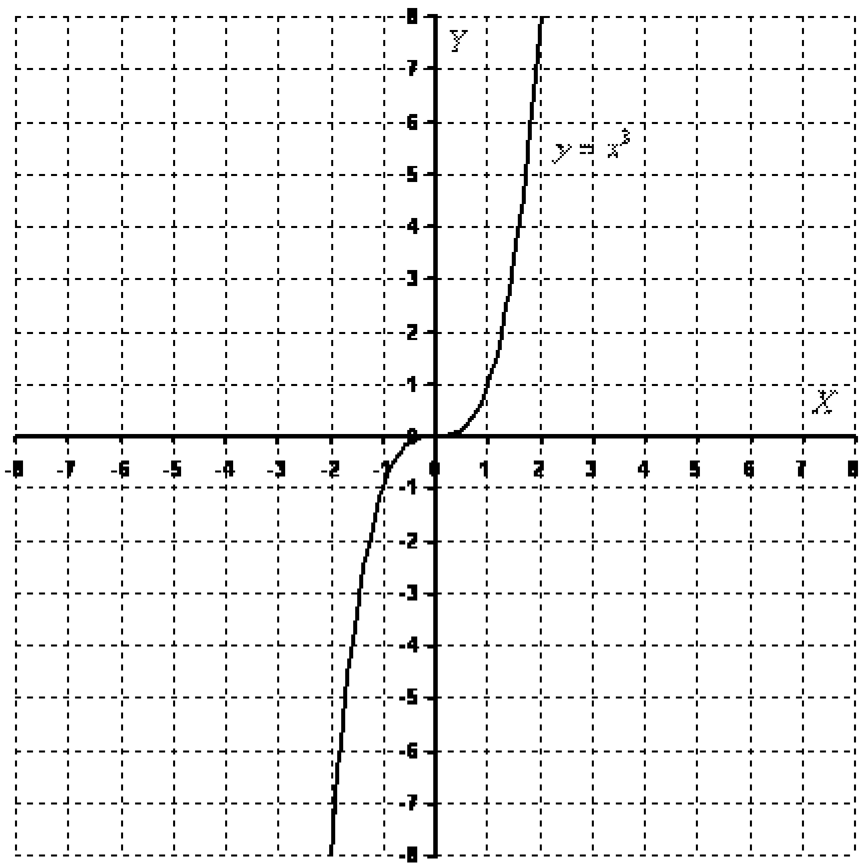
Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх.

Если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

Углублённые знания о кривой можно получить на уроке **Гипербола и парабола**.

Кубическая парабола

Кубическая парабола задается функцией $y = x^3$. Вот знакомый со школы чертеж:



Перечислим основные свойства функции $y = x^3$

Область определения – любое действительное число: $D(f) = \Re$.

Область значений – любое действительное число: $E(f) = \Re$.

Функция $y = x^3$ является **нечётной. Если функция является нечётной, то ее график симметричен относительно начала координат**. Аналитически нечётность функции выражается условием $f(-x) = -f(x)$. Выполним проверку для кубической функции, для этого вместо «икс» подставим «минус икс»:
$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -(x^3) = -f(x)$, значит, функция $y = x^3$ является нечетной.

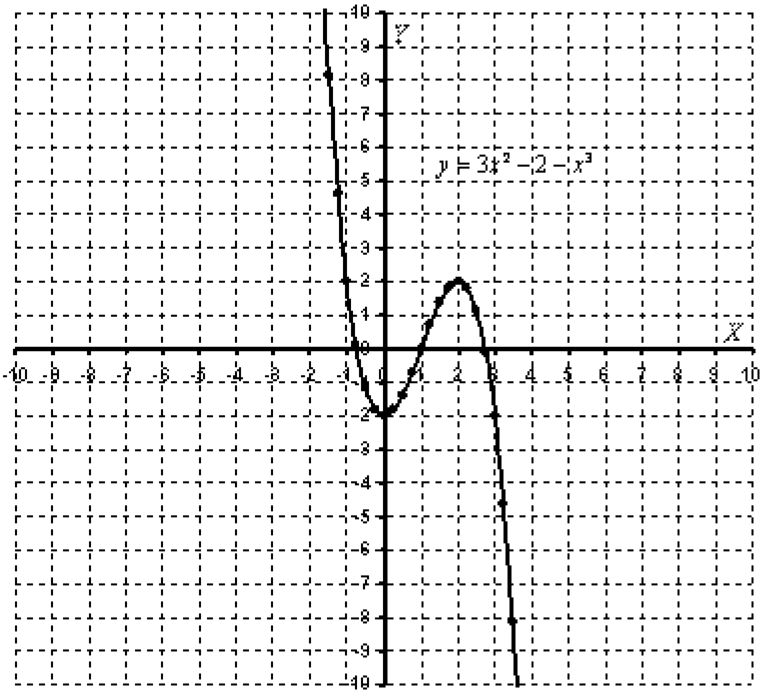
Функция $y = x^3$ **не ограничена**. На языке пределов функции это можно записать так: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3) = -\infty$

Кубическую параболу тоже удобнее строить с помощью алгоритма «челнока»:

x	0	1	

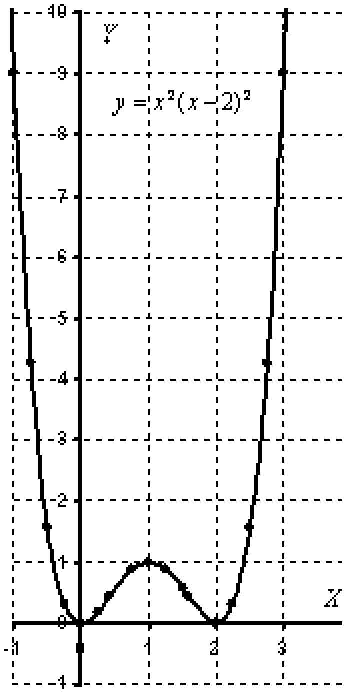
Наверняка, вы заметили, в чем ещё проявляется нечетность функции. Если мы нашли, что $f(6) = 6^3 = 216$, то при вычислении $f(-6)$ уже не нужно ничего считать, автоматом записываем, что $f(-6) = -216$. Эта особенность справедлива для любой нечетной функции.

А теперь поговорим о графиках функций-многочленов высоких степеней чуть более подробно. График функции $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) принципиально имеет следующий вид:



В этом примере коэффициент при старшей степени $a < 0$, поэтому график развёрнут «наоборот». Принципиально такой же вид имеют графики функций-многочленов 5-й, 7-й, 9-й и других нечетных степеней. Чем выше степень, тем больше промежуточных «загибулин».

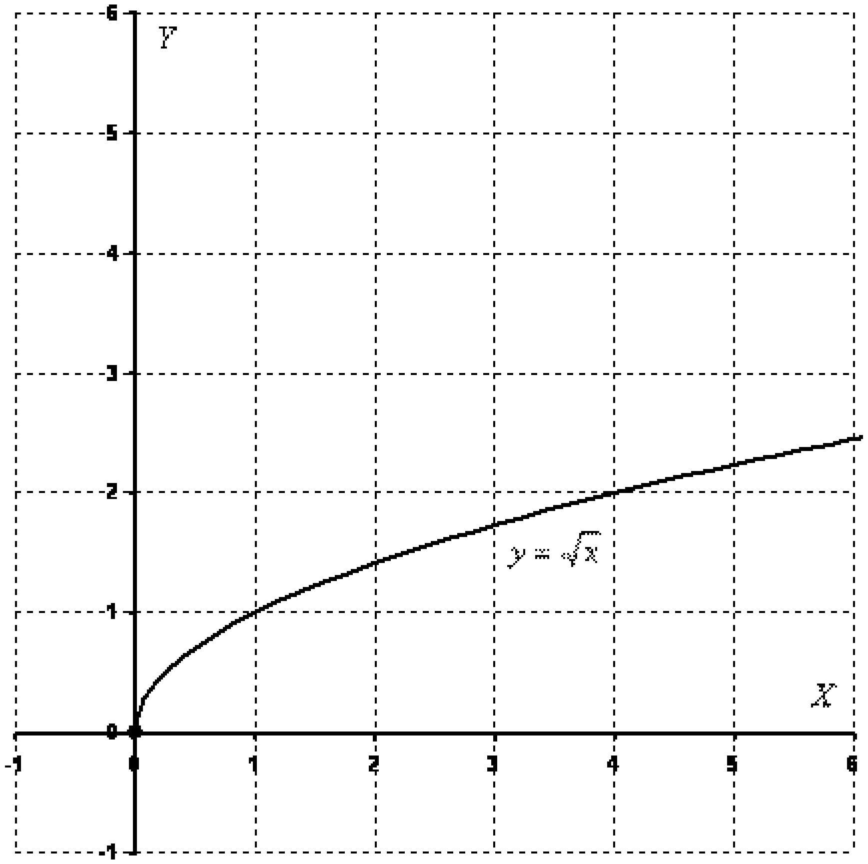
Функции-многочлены 4-й, 6-й и других четных степеней имеют график принципиально следующего вида:



Эти знания полезны при **исследовании графиков функций**.

График функции $y = \sqrt{x}$

Он представляет собой одну из ветвей **параболы**. Выполним чертеж:



Основные свойства функции $y = \sqrt{x}$:

Область определения: $D(f) = [0; +\infty)$.

Область значений: $E(f) = [0; +\infty)$.

То есть, график функции полностью находится в первой координатной четверти.

Функция $y = \sqrt{x}$ **не ограничена сверху**. Или с помощью предела: $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x}) = +\infty$

При построении простейших графиков с корнями также уместен поточечный способ построения, при этом выгодно подбирать такие значения «икс», чтобы корень извлекался нацело:

x	0	1

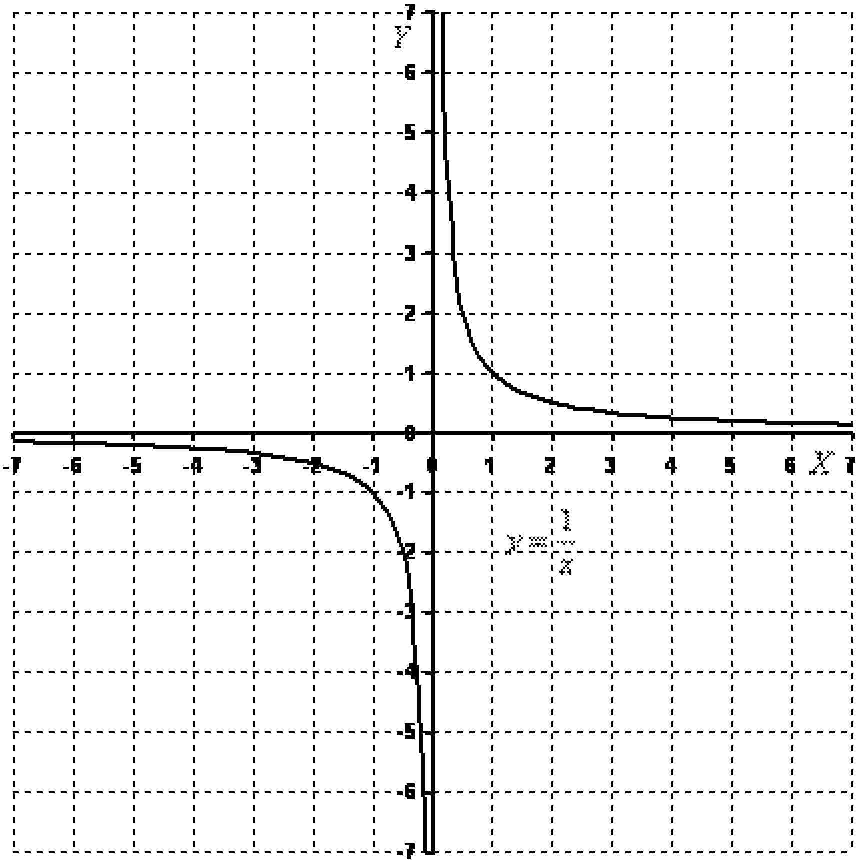
На самом деле хочется разобрать еще примеры с корнями, например, $y = \sqrt[3]{x}$, но они встречаются значительно реже. Сейчас я ориентируюсь на более распространенные случаи, и, как показывает практика, что-нибудь вроде $y = \sqrt{2x}$ приходиться строить значительно чаще.

Однако унывать не нужно, в других статьях я рассмотрю самые разнообразные функции и их графики, корни в том числе.

График гиперболы

Опять же вспоминаем тривиальную «школьную» гиперболу $y = \frac{1}{x}$.

Выполним чертеж:



Основные свойства функции $y = \frac{1}{x}$:

[**Область определения**]: $D(f) = \Re \setminus \{0\}$.

Область значений: $E(f) = \Re \setminus \{0\}$.

Запись $\Re \setminus \{0\}$ обозначает: «любое действительное число, исключая ноль»

В точке $x = 0$ функция терпит [**бесконечный разрыв**]. Или с помощью **односторонних** пределов: $\lim\limits_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$. Немного поговорим об односторонних пределах. Запись $x \to 0-0$ обозначает, что мы **бесконечно близко** приближаемся по оси OX к нулю **слева**. Как при этом ведёт себя график? Он уходит вниз на минус бесконечность, **бесконечно близко** приближаясь к оси OY . Именно этот факт и записывается пределом $\lim\limits_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$. Аналогично, запись $x \to 0+0$ обозначает, что мы **бесконечно близко** приближаемся по оси OX к нулю **справа**. При этом ветвь гиперболы уходит вверх на плюс бесконечность, **бесконечно близко** приближаясь к оси OY . Или коротко: $\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$.

Такая прямая (к которой бесконечно близко приближается график какой-либо функции) называется ***асимптотой***.

В данном случае ось OY является ***вертикальной асимптотой*** для графика гиперболы при $x \to 0$.

Будет ГРУБОЙ ошибкой, если при оформлении чертежа по небрежности допустить пересечение графика с асимптотой.

Также односторонние пределы $\lim\limits_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$ говорят нам о том, что гипербола **не ограничена сверху** и **не ограничена снизу**.

Исследуем функцию на бесконечности: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$, то есть, если мы начнем уходить по оси OX влево (или вправо) на бесконечность, то «игреки» стройным шагом будут **бесконечно близко** приближаться к нулю, и, соответственно, ветви гиперболы **бесконечно близко** приближаться к оси OX .

Таким образом, ось OX является ***горизонтальной асимптотой*** для графика функции $y = \frac{1}{x}$, если «икс» стремится к плюс или минус бесконечности.

Функция $y = \frac{1}{x}$ является **нечётной**, а, значит, гипербола симметрична относительно начала координат. Данный факт очевиден из чертежа, кроме того, легко проверяется аналитически: $f(-x) = \frac{1}{(-x)} = -\frac{1}{x} = -\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

График функции вида $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) представляет собой две ветви гиперболы.

Если $a > 0$, то гипербола расположена в первой и третьей координатных четвертях (см. рисунок выше).

Если $a < 0$, то гипербола расположена во второй и четвертой координатных четвертях.

Указанную закономерность места жительства гиперболы нетрудно проанализировать с точки зрения **геометрических преобразований графиков**.

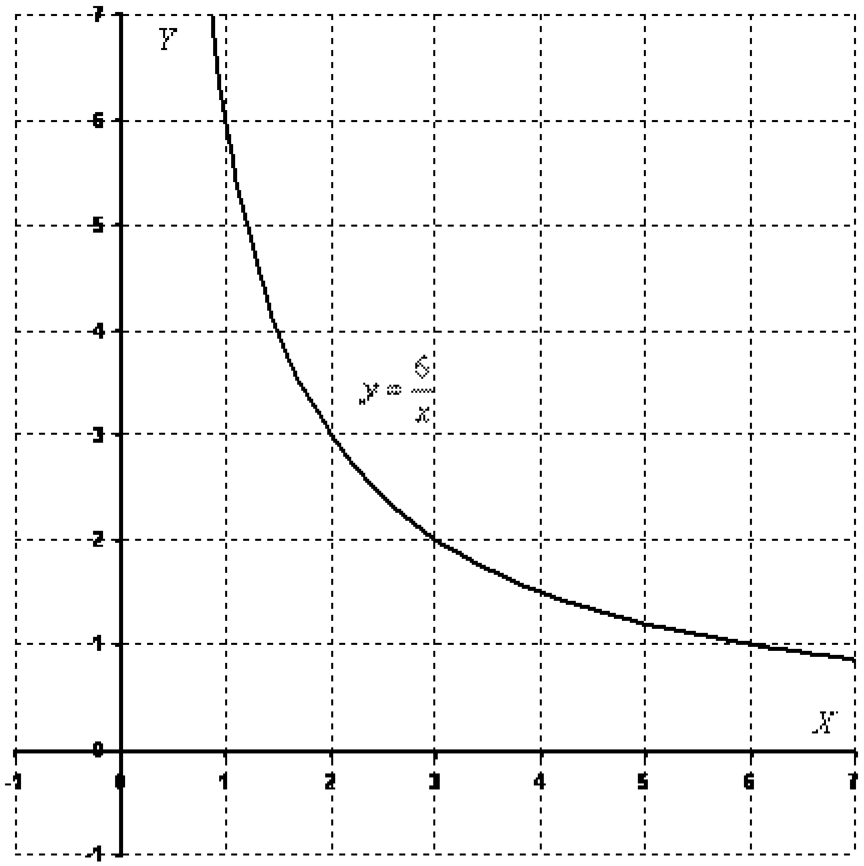
Пример 3

Построить правую ветвь гиперболы $y = \frac{6}{x}$

Используем поточечный метод построения, при этом, значения x выгодно подбирать так, чтобы делилось нацело:

x	1	2

Выполним чертеж:



Не составит труда построить и левую ветвь гиперболы, здесь как раз поможет нечетность функции. Грубо говоря, в таблице поточечного построения мысленно добавляем к каждому числу минус, ставим соответствующие точки и прочерчиваем вторую ветвь.

Детальную геометрическую информацию о рассмотренной линии можно найти в статье **[Гипербола и парабола]**.

График показательной функции

В данном параграфе я сразу рассмотрю экспоненциальную функцию $y = e^x$, поскольку в задачах высшей математики в 95% случаев встречается именно экспонента.

Напоминаю, что e – это иррациональное число: $e \approx 2{,}718...$, это потребуется при построении графика, который, собственно, я без церемоний и построю. Трёх точек, пожалуй, хватит:

x	-1

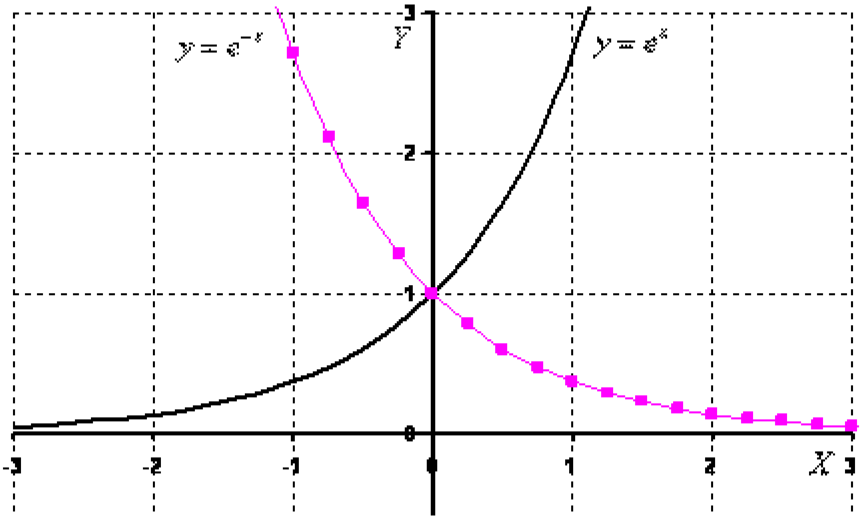


График функции $y = e^{-x}$ пока оставим в покое, о нём позже.

Основные свойства функции $y = e^{x}$:

Область определения: $D(f) = \Re$ – любое «икс».

Область значений: $E(f) = (0;+\infty)$. Обратите внимание, что ноль не включается в область значений. Экспонента – функция **положительная**, то есть *для любого* «икс» справедливо неравенство $y = e^{x} > 0$, а сам график экспоненты полностью расположен в верхней полуплоскости.

Функция не ограничена сверху: $\lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$, то есть, если мы начнем уходить по оси OX вправо на плюс бесконечность, то соответствующие значения «игрек» стройным шагом будут тоже уходить вверх на $+\infty$ по оси OY. Кстати, график экспоненциальной функции будет «взмывать» вверх на бесконечность очень быстро и круто, уже при $x = 10$ $y = e^{10} \approx 22026{,}47$

Исследуем поведение функции на минус бесконечности: $\lim_{x\to-\infty} e^{x} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = 0$. Таким образом, ось OX является ***горизонтальной асимптотой*** для графика функции $y = e^{x}$, если $x \to -\infty$

Принципиально такой же вид имеет любая показательная функция $y = a^{x}$, если $a > 1$. Функции $y = 2^{x}$, $y = 3^{x}$, $y = 10^{x}$ будут отличаться только крутизной наклона графика, причем, чем больше основание, тем круче будет график.

Обратите внимание, что во всех случаях графики проходят через точку $(0;1)$, то есть $a^{0} = 1$. **Это значение должен знать даже «двоечник»**.

Теперь рассмотрим случай, когда основание $0 < a < 1$. Снова пример с экспонентой $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$ – на чертеже соответствующий график прочерчен малиновым цветом? Что произошло? Ничего особенного – та же самая экспонента, только она «развернулась в другую сторону». Об этой метаморфозе можно получить подробную информацию в статье **Построение графиков с помощью геометрических преобразований**.

Принципиально так же выглядят графики функций $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$, $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x = 7^{-x}$ и т. д.

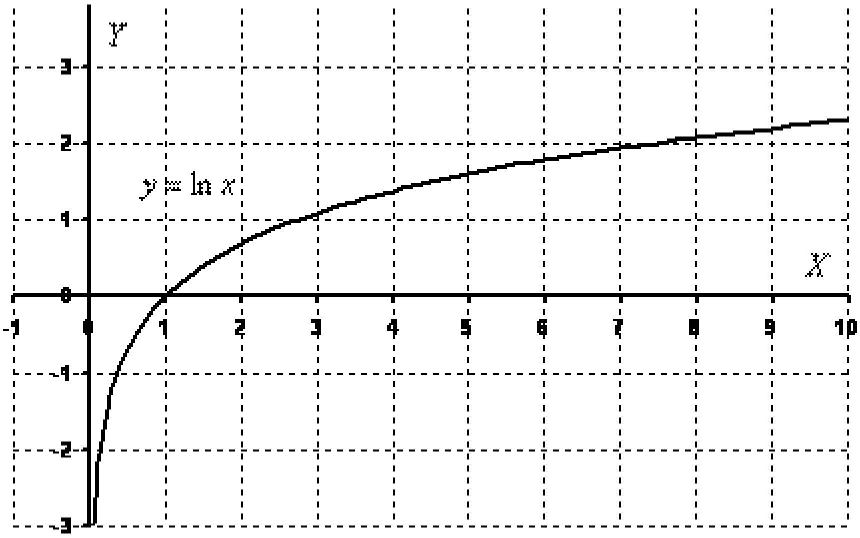
Должен сказать, что второй случай встречается на практике реже, но он встречается, поэтому я счел нужным включить его в данную статью.

График логарифмической функции

Рассмотрим функцию с натуральным логарифмом $y = \ln x$.
Выполним поточечный чертеж:

x	$e^{-1} \approx 0{,}37$	1

Если позабылось, что такое логарифм, пожалуйста, обратитесь к школьным учебникам.



Основные свойства функции $y = \ln x$:

Область определения: $D(f) = (0; +\infty)$

Область значений: $E(f) = \Re$.

Функция не ограничена сверху: $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x) = +\infty$, пусть и медленно, но ветка логарифма уходит вверх на бесконечность.

Исследуем поведение функции вблизи нуля справа: $\lim\limits_{x \to 0+0} (\ln x) = -\infty$. Таким образом, ось OY является **[вертикальной асимптотой]** для графика функции $y = \ln x$ при «икс» стремящемся к нулю справа.

Обязательно нужно знать и помнить типовое значение логарифма: $\log_a 1 = 0$.

Принципиально так же выглядит график логарифма при основании $a > 1$: $y = \log_2 x$, $y = \log_4 x$, $y = \lg x$ (десятичный логарифм по основанию 10) и т.д. При этом, чем больше основание, тем более пологим будет график.

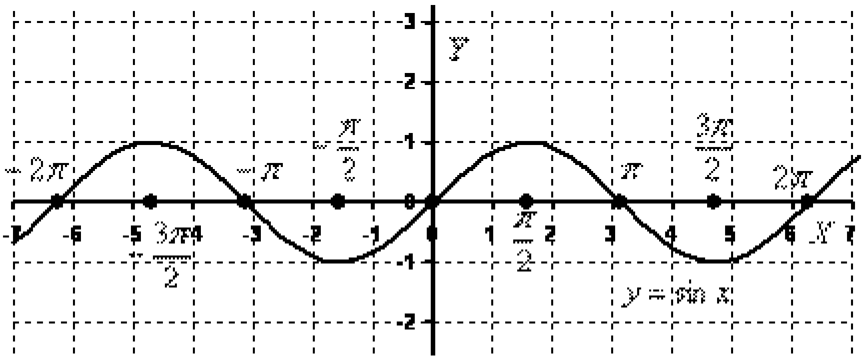
Случай $0 < a < 1$ рассматривать не будем, что-то я не припомню, когда последний раз строил график с таким основанием. Да и логарифм вроде $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ в задачах высшей математики ооочень редкий гость.

В заключение параграфа скажу еще об одном факте: **Экспоненциальная функция** $y = e^x$ **и логарифмическая функция** $y = \ln x$ **– это две взаимно обратные функции**. Если присмотреться к графику логарифма, то можно увидеть, что это – та же самая экспонента, просто она расположена немного по-другому.

Графики тригонометрических функций

С чего начинаются тригонометрические мучения в школе? Правильно. С синуса

Построим график функции $y = \sin x$



Данная линия называется *синусоидой*.

Напоминаю, что «пи» – это иррациональное число: $\pi \approx 3{,}14$, и в тригонометрии от него в глазах рябит.

Основные свойства функции $y = \sin x$:

Данная функция является **периодической** с периодом 2π. Что это значит? Посмотрим на отрезок $[0;2\pi]$. Слева и справа от него бесконечно повторяется точно такой же кусок графика.

[Область определения]: $D(f) = \Re$, то есть для любого значения «икс» существует значение синуса.

Область значений: $E(f) = [-1;1]$. Функция $y = \sin x$ является **ограниченной**: $-1 \le \sin x \le 1$, то есть, все «игреки» сидят строго в отрезке $[-1;1]$.

Такого не бывает: $\sin x = 1{,}5$ или $\sin x = -2$, точнее говоря, бывает, но указанные уравнения не имеют решения.

Синус – это функция нечетная, синусоида симметричная относительно начала координат, и справедлив следующий факт: $\sin(-x) = -\sin x$. Таким образом, если в вычислениях встретится, например, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, то **минус терять здесь ни в коем случае нельзя!** Он выносится: $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2}$

Как ведет себя синус на бесконечности? Попробуем провести исследование с помощью пределов:
$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin x) = ?$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sin x) = ?$ Чему равны такие пределы? Запомните, **данных пределов не существует**. По вполне понятным причинам, график синуса ~~болтается как~~ как неприкаянный, то дойдет единицы, то уйдет к минус единице и так до бесконечности.

Вот вам пример, когда предела не существует. В высшей математике это можно встретить не очень часто, но такое понятие, как **«предела не существует»** – существует!

В практических вычислениях желательно (и даже обязательно) знать и помнить следующие значения синуса: $\sin 0 = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin\pi = 0$. Другие значения синуса (а также остальных тригонометрических функций) можно найти в методическом материале **Тригонометрические таблицы**.

График косинуса

Построим график функции $y = \cos x$

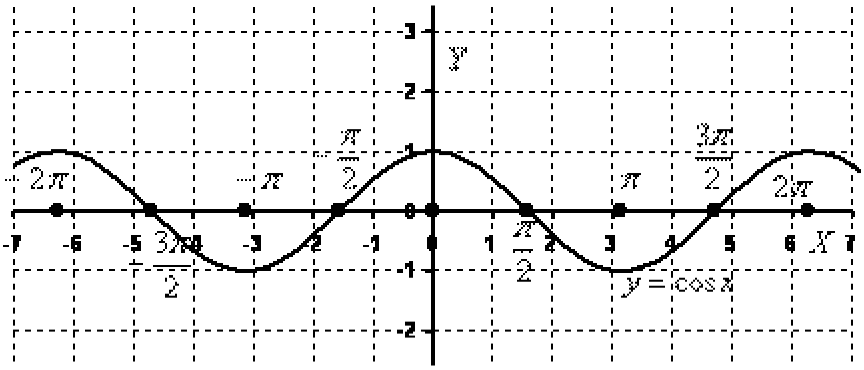


График косинуса – это та же самая синусоида, сдвинутая вдоль оси OX на $\frac{\pi}{2}$ влево (см. также Пример 8 урока **о геометрических преобразованиях графиков**).

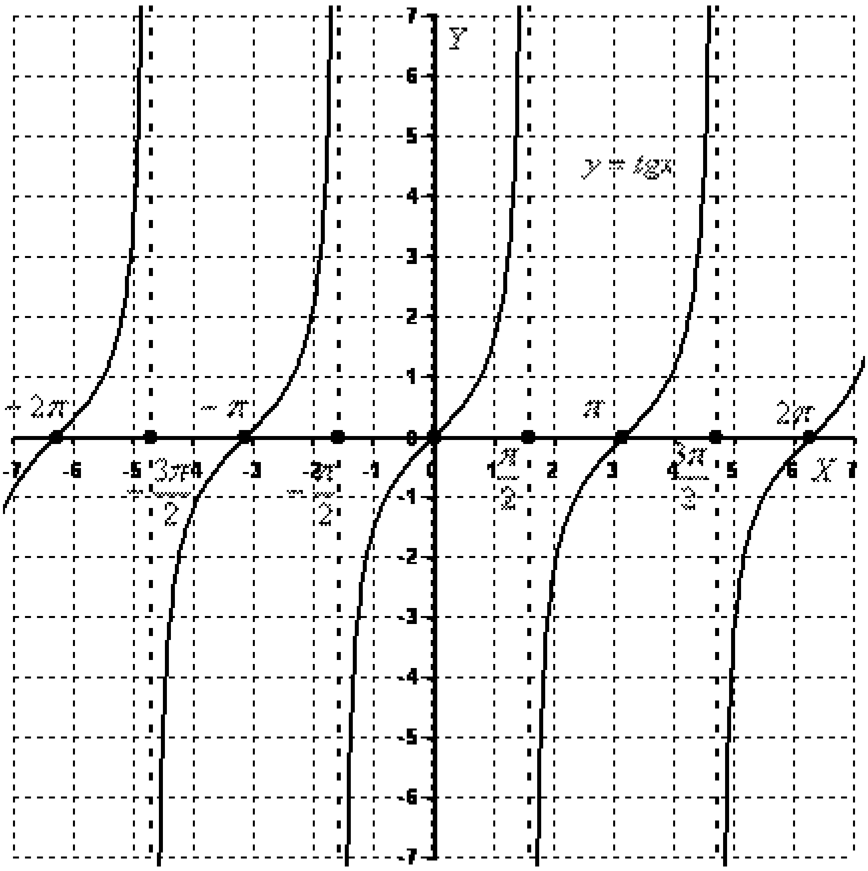
Поэтому почти все свойства синуса справедливы и для косинуса. За некоторым, но существенным исключением.

Косинус – это функция четная, ее график симметричен относительно оси OY, и справедлив следующий факт: $\cos(-x) = \cos x$. То есть, минус перед аргументом косинуса можно безболезненно убирать (или наоборот, ставить). В отличие от синуса **в косинусе минус «бесследно пропадает»**.

Для решения практических задач нужно знать и помнить следующие значения косинуса: $\cos 0 = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\cos\pi = -1$.

Графики тангенса и котангенса

Построим график функции $y = tgx$



Основные свойства функции $y = tgx$:

Данная функция является **периодической** с периодом π. То есть, достаточно рассмотреть отрезок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, слева и справа от него ситуация будет бесконечно повторяться.

[Область определения](): $D(f) = \Re \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z\right\}$ – все действительные числа, кроме … $x = -\frac{3\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$ … и т. д. или коротко: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$, где k – любое целое число. Множество целых чисел (… -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …) в высшей математике обозначают жирной буквой **Z**.

Область значений: $E(f) = \Re$. Функция $y = tgx$ **не ограничена**. В этом легко убедиться и аналитически:

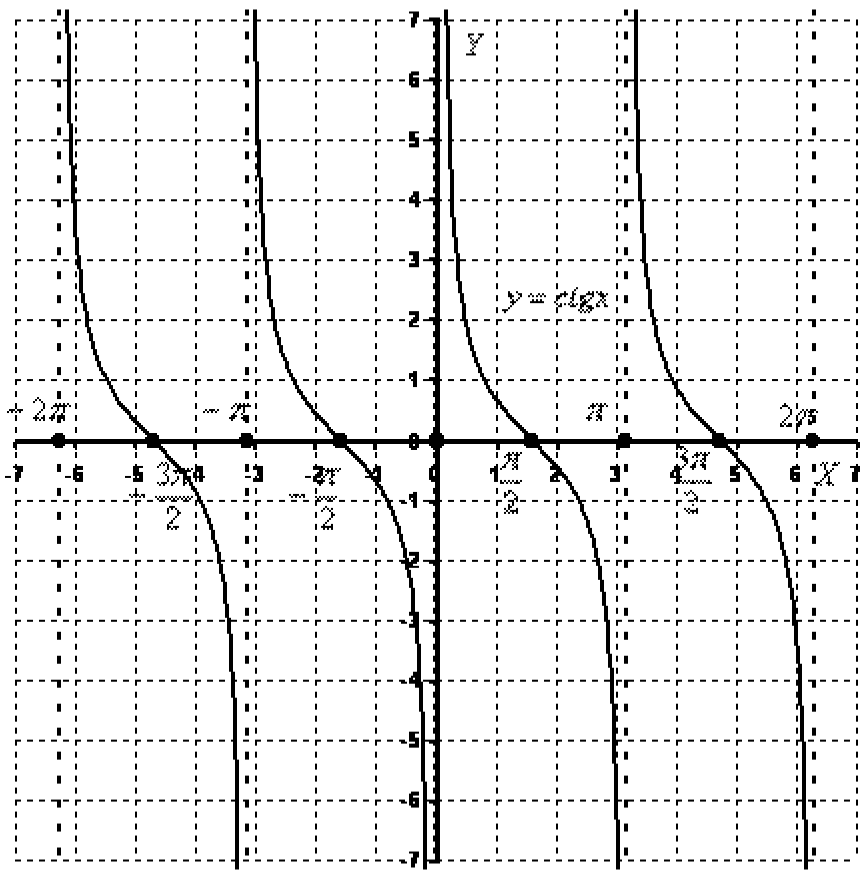
$\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}+0}(tgx) = -\infty$ – если мы приближаемся по оси OX к значению $-\frac{\pi}{2}$ **справа**, то ветка тангенса уходит на минус бесконечность, бесконечно близко приближаясь к своей асимптоте $x=-\frac{\pi}{2}$.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(tgx)=+\infty$ – если мы приближаемся по оси OX к значению $\frac{\pi}{2}$ **слева**, то «игреки» шагают вверх на плюс бесконечность, а ветка тангенса бесконечно близко приближается к асимптоте $x=\frac{\pi}{2}$.

Тангенс – функция нечетная, как и в случае с синусом, минус из-под тангенса не теряется, а выносится: $tg(-x)=-tgx$.

В практических вычислениях полезно помнить следующие значения тангенса: $tg0=0$, $tg\pi=0$, $tg\frac{\pi}{4}=1$, а также те точки, в которых тангенса не существует (см. график).

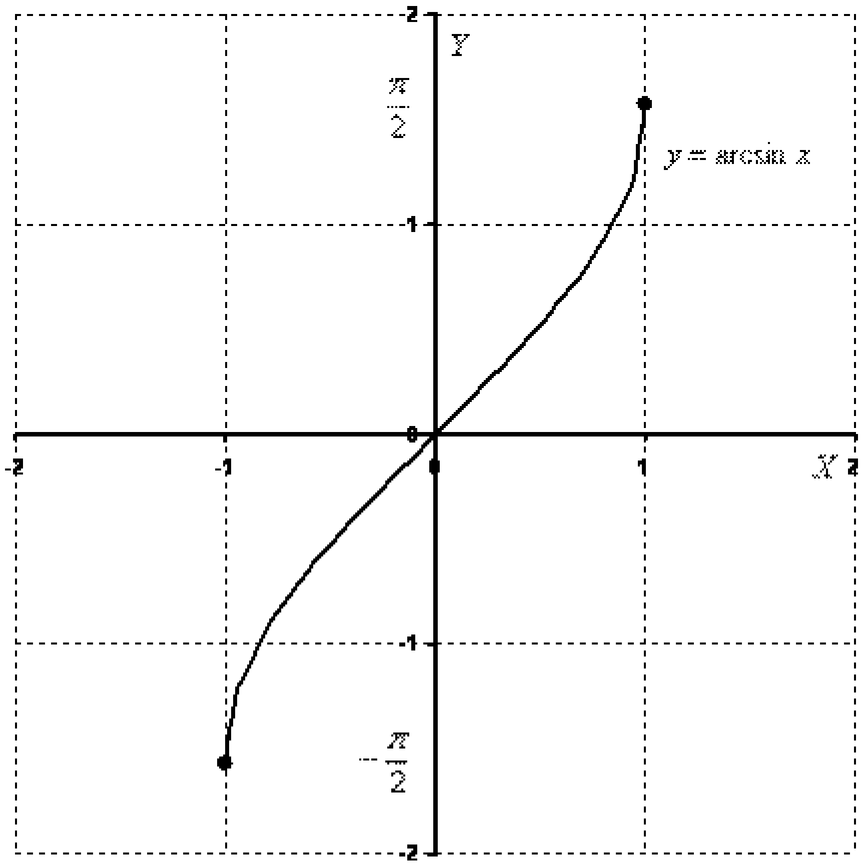
График котангенса – это почти тот же самый тангенс, функции связаны тригонометрическим соотношением $ctgx=\frac{1}{tgx}$. Вот его график:



Свойства попробуйте сформулировать самостоятельно, они практически такие же, как и у тангенса.

Графики обратных тригонометрических функций

Построим график арксинуса $y = \arcsin x$



Перечислим основные свойства функции $y = \arcsin x$:

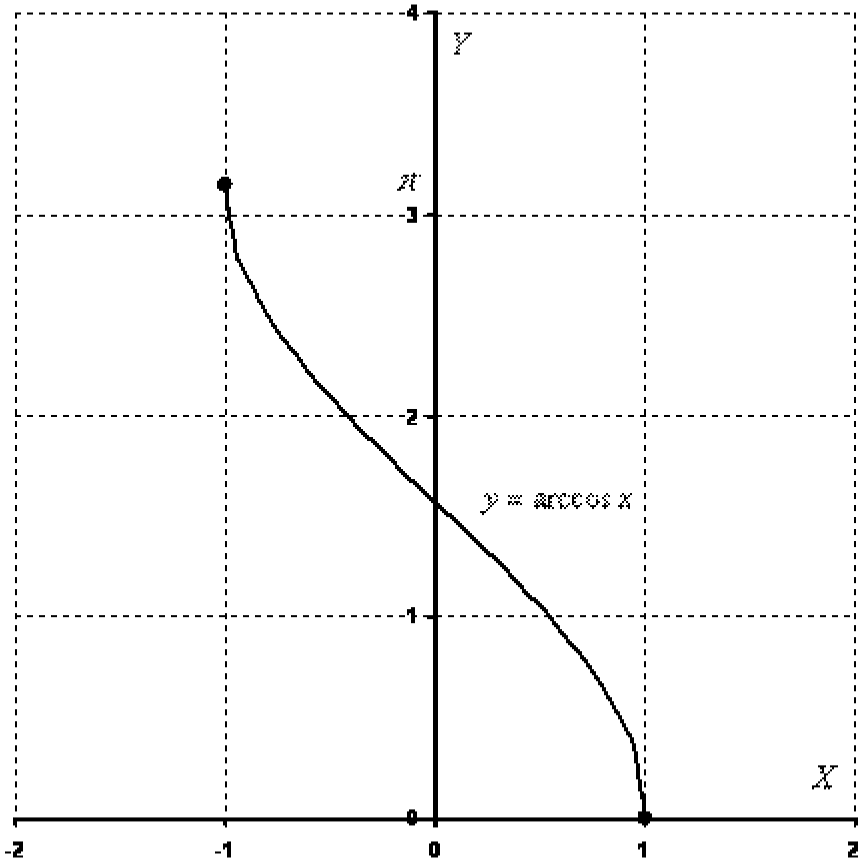
Область определения: $D(f) = [-1;1]$, не существует значений вроде $\arcsin(-1{,}5)$ или $\arcsin 2$

Область значений: $E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то есть, функция $y = \arcsin x$ **ограничена**.

Арксинус – функция нечетная, здесь минус опять же выносится: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

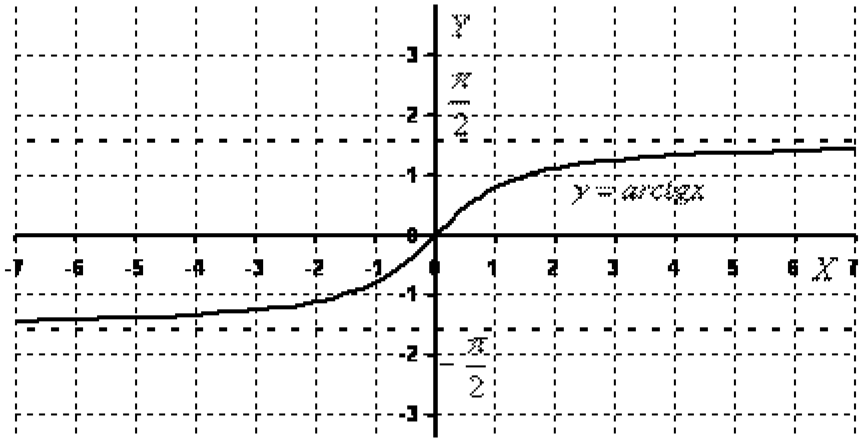
В практических вычислениях полезно помнить следующие значения арксинуса: $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$. Другие распространенные значения арксинуса (а также других «арков») можно найти с помощью **таблицы значений обратных тригонометрических функций**.

Построим график арккосинуса $y = \arccos x$



Очень похоже на арксинус, свойства функции сформулируйте самостоятельно. Остановлюсь на единственном моменте. В данной статье очень много разговоров шло о четности и нечетности функций, и, возможно, у некоторых сложилось впечатление, что функция обязательно должна быть четной или нечетной. В общем случае, это, конечно, не так. Чаще всего, функция, которая вам встретится на практике – «никакая». В частности, **арккосинус не является четной или нечетной функцией**, он как раз «никакой».

Построим график арктангенса $y = arctgx$



Всего лишь перевернутая ветка тангенса.

Перечислим основные свойства функции $y = arctgx$:

Область определения: $D(f) = \Re$

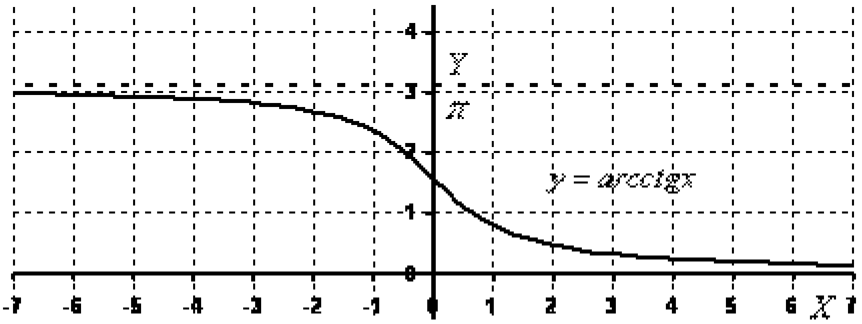
Область значений: $E(f)=\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, то есть, функция $y=arctgx$ **ограничена**.

У рассматриваемой функции есть две асимптоты: $\lim\limits_{x\to+\infty}(arctgx)=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(arctgx)=-\frac{\pi}{2}$.

Арктангенс – функция нечетная: $arctg(-x)=-arctgx$.

Самые «популярные» значения арктангенса, которые встречаются на практике, следующие: $arctg0=0$, $arctg1=\frac{\pi}{4}$.

К графику арккотангенса $y=arcctgx$ приходится обращаться значительно реже, но, тем не менее, вот его чертеж:



Свойства арккотангенса вы вполне сможете сформулировать самостоятельно. Отмечу, что арккотангенс, как и арккосинус, не является четной или нечетной функцией

Практика -11-12. Простейшие задачи с прямой на плоскости. Взаимное расположение прямых. Угол между прямыми

Продолжаем рассматривать эти бесконечные-бесконечные прямые. На уроке [Уравнение прямой на плоскости] мы познакомились с основными видами уравнений, направляющим вектором прямой и её вектором нормали. Данная статья является логическим продолжением темы, и в ней будут разобраны следующие типовые задачи, для опытных путешественников сразу кликабельное **оглавление:**

О-о-о-о-о… ну и жесть, словно ~~вам~~ сам себе приговор зачитал =) Впрочем, потом релаксация поможет, тем более, сегодня купил подходящие аксессуары. Поэтому приступим к первому разделу, надеюсь, к концу статьи сохраню бодрое расположение духа.

Взаимное расположение двух прямых

Рассмотрим две прямые, заданные уравнениями в общем виде:
$d_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$
$d_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$

Тот случай, когда зал подпевает хором. **Две прямые могут**:

1) совпадать;

2) быть параллельными: $d_1 \| d_2$;

3) или пересекаться в единственной точке: $M = d_1 \cap d_2$.

***Справка для чайников**: пожалуйста, запомните математический знак [пересечения](#) $\cap$, он будет встречаться очень часто. Запись $M = d_1 \cap d_2$ обозначает, что прямая d_1 пересекается с прямой d_2 в точке M.*

Как определить взаимное расположение двух прямых?

Начнём с первого случая:

Две прямые совпадают, тогда и только тогда, когда их соответствующие коэффициенты пропорциональны, то есть, существует такое число «лямбда», что выполняются равенства $A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1, \quad C_2 = \lambda C_1$

Рассмотрим прямые $d_1: -x + 2y - 3 = 0, \quad d_2: 2x - 4y + 6 = 0$ и составим три уравнения из соответствующих коэффициентов: $2 = \lambda \cdot (-1), \quad -4 = \lambda \cdot 2, \quad 6 = \lambda \cdot (-3)$. Из каждого уравнения следует, что $\lambda = -2$, следовательно, данные прямые совпадают.

Действительно, если все коэффициенты уравнения $d_1: -x + 2y - 3 = 0$ умножить на –1 (сменить знаки), и все коэффициенты уравнения $d_2: 2x - 4y + 6 = 0$ сократить на 2, то получится одно и то же уравнение: $x - 2y + 3 = 0$.

Второй случай, когда прямые параллельны:

Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда их коэффициенты при переменных x и y пропорциональны: $A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1$, но $C_2 \neq \lambda C_1$.

В качестве примера рассмотрим две прямые $d_1: 2x - y + 5 = 0, \quad d_2: 2x - y - 11 = 0$. Проверяем пропорциональность соответствующих коэффициентов при переменных x и y:
$A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1$
$2 = \lambda \cdot 2, \quad -1 = \lambda \cdot (-1) \quad \Rightarrow \lambda = 1$

Однако совершенно очевидно, что $\frac{C_2}{C_1} = \frac{-11}{5} \neq 1$.

Вывод: $d_1 \| d_2$

И третий случай, когда прямые пересекаются:

Две прямые пересекаются, тогда и только тогда, когда их коэффициенты при переменных x и y НЕ пропорциональны, то есть НЕ существует такого значения «лямбда», чтобы выполнялись равенства $A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1$

Так, для прямых $d_1 : 4x + 3y - 1 = 0, \quad d_2 : 5x - 2y + 3 = 0$ составим систему:

$$\begin{cases} A_2 = \lambda A_1 \\ B_2 = \lambda B_1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} 5 = \lambda \cdot 4 \\ -2 = \lambda \cdot 3 \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $\lambda = \frac{5}{4}$, а из второго уравнения: $\lambda = -\frac{2}{3}$, значит, **система несовместна** (решений нет). Таким образом, коэффициенты при переменных x и y не пропорциональны.

Вывод: прямые пересекаются

В практических задачах можно использовать только что рассмотренную схему решения. Она, кстати, весьма напоминает алгоритм проверки векторов на коллинеарность, который мы рассматривали на уроке **Понятие линейной (не) зависимости векторов. Базис векторов**. Но существует более цивилизованная упаковка:

Пример 1

Выяснить взаимное расположение прямых:

а) $d_1 : 2y + 3 = 0, \quad d_2 : 5x + 2y - 7 = 0;$

б) $f_1 : x + 3y - 8 = 0, \quad f_2 : x + 3y + 15 = 0;$

в) $h_1 : 5x - y = 0, \quad h_2 : -10x + 2y = 0$

Решение основано на исследовании направляющих векторов прямых:

а) Из уравнений $d_1 : 2y + 3 = 0, \quad d_2 : 5x + 2y - 7 = 0$ найдём направляющие векторы прямых: $\vec{p}_1(-2; 0), \vec{p}_2(-2; 5)$.

Вычислим определитель, составленный из координат данных векторов:

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 - 0 \cdot (-2) = -10 - 0 = -10 \neq 0$$

, значит, векторы $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ не коллинеарны и прямые d_1, d_2 пересекаются.

На всякий случай поставлю на распутье камень с указателями:

1) Если мало что понятно, начните со статьи **Векторы для чайников**.
2) Если не понятно, как находить направляющие векторы прямых, прошу посетить урок **Уравнение прямой на плоскости**.
3) Если неясно, причём тут определитель, вам сюда – **Понятие линейной (не) зависимости векторов. Базис векторов**.

Остальные перепрыгивают камень и следуют дальше, прямо к Кащею Бессмертному =)

б) Найдем направляющие векторы прямых $f_1 : x + 3y - 8 = 0, \quad f_2 : x + 3y + 15 = 0$:
$\vec{p}_1(-3; 1), \vec{p}_2(-3; 1)$

Прямые имеют один и тот же направляющий вектор, значит, они либо параллельны, либо совпадают. Тут и определитель считать не надо.

Очевидно, что коэффициенты при переменных x и y пропорциональны, при этом $\lambda = 1$.

Выясним, справедливо ли равенство $C_2 = \lambda C_1$:
$15 = \lambda \cdot (-8) \Rightarrow \lambda = -\frac{15}{8} \neq 1$

Таким образом, $f_1 \parallel f_2$

в) Найдем направляющие векторы прямых $h_1 : 5x - y = 0, \quad h_2 : -10x + 2y = 0$:
$\overline{p}_1(1; 5), \overline{p}_2(-2; -10)$

Вычислим определитель, составленный из координат данных векторов:
$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -10 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-10) - 5 \cdot (-2) = -10 + 10 = 0$, следовательно, направляющие векторы коллинеарны. Прямые либо параллельны либо совпадают.

Коэффициент пропорциональности «лямбда» нетрудно усмотреть прямо из соотношения коллинеарных направляющих векторов $\overline{p}_2 = -2\overline{p}_1$. Впрочем, его можно найти и через коэффициенты самих уравнений: $\lambda = \frac{-10}{5} = \frac{2}{-1} = -2$.

Теперь выясним, справедливо ли равенство $C_2 = \lambda C_1$. Оба свободных члена нулевые, поэтому:
$0 = \lambda \cdot 0$

Полученное значение $\lambda = -2$ удовлетворяет данному уравнению (ему удовлетворяет вообще любое число).

Таким образом, прямые совпадают.

Ответ: а) $d_1 \cap d_2$, б) $f_1 \parallel f_2$, в) совпадают

Очень скоро вы научитесь (или даже уже научились) решать рассмотренную задачу устно буквально в считанные секунды. В этой связи не вижу смысла предлагать что-либо для самостоятельного решения, лучше заложим ещё один важный кирпич в геометрический фундамент:

Как построить прямую, параллельную данной?

За незнание этой простейшей задачи сурово наказывает Соловей-Разбойник.

Пример 2

Прямая задана уравнением $c : x - y + 3 = 0$. Составить уравнение параллельной прямой, которая проходит через точку $M(1; -1)$.

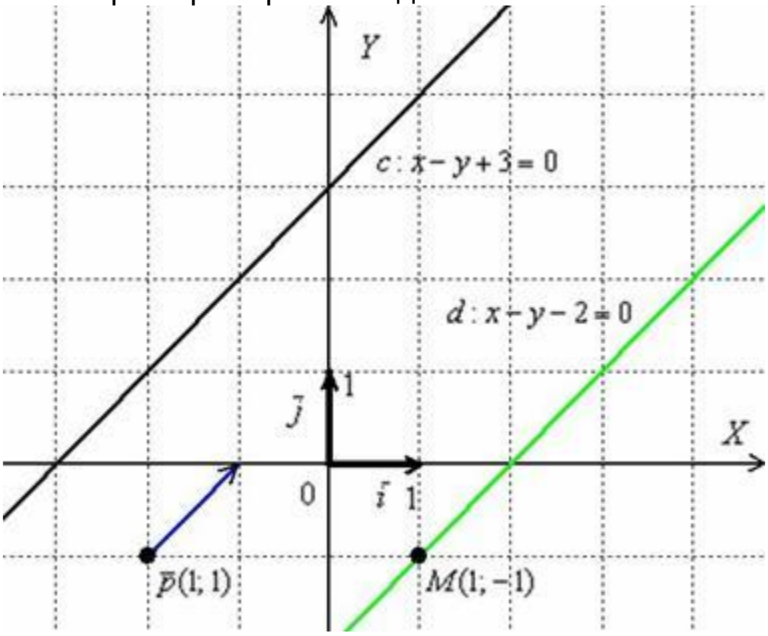
Решение: Обозначим неизвестную прямую буквой d. Что о ней сказано в условии? Прямая d проходит через точку $M(1; -1)$ и $d \parallel c$. А если прямые параллельны, то очевидно, что направляющий вектор прямой «цэ» подойдёт и для построения прямой «дэ».

Вытаскиваем направляющий вектор из уравнения $c : x - y + 3 = 0$:
$\overline{p}(1; 1)$

Уравнение прямой d составим по точке $M(1; -1)$ и направляющему вектору $\overline{p}(1; 1)$:
$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-(-1)}{1}$$
$$x - 1 = y + 1$$

Ответ: $d: x - y - 2 = 0$

Геометрия примера выглядит незатейливо:



Аналитическая же проверка состоит в следующих шагах:

1) Проверяем, что у прямых c, d один и тот же направляющий вектор (если уравнение прямой не упрощено должным образом, то векторы будут коллинеарны).

2) Проверяем, удовлетворяет ли точка $M(1; -1)$ полученному уравнению $d: x - y - 2 = 0$.

Аналитическую проверку в большинстве случаев легко выполнить устно. Посмотрите на два уравнения, и многие из вас быстро определят параллельность прямых безо всякого чертежа.

Примеры для самостоятельного решения сегодня будут творческими. Потому что вам ещё придётся тягаться с Бабой-Ягой, а она, знаете, любительница всяких загадок.

Пример 3

Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2; 3)$, параллельную прямой BC, если $B(2; -2)$, $C(-6; -2)$

Существует рациональный и не очень рациональный способ решения. Самый короткий путь – в конце урока.

С параллельными прямыми немного поработали и к ним ещё вернёмся. Случай совпадающих прямых малоинтересен, поэтому рассмотрим задачу, которая хорошо знакома вам из школьной программы:

Как найти точку пересечения двух прямых?

Если прямые $\begin{matrix} d_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ d_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{matrix}$ пересекаются в точке $M(x_0; y_0)$, то её координаты являются решением системы линейных уравнений $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$

Как найти точку пересечения прямых? Решить систему.

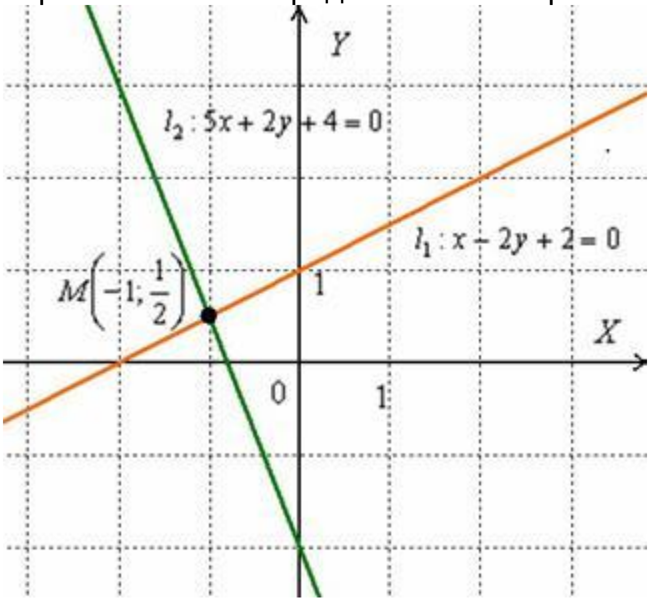
Вот вам и **геометрический смысл системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными** – это две пересекающиеся (чаще всего) прямые на плоскости.

Пример 4

Найти точку пересечения прямых $l_1: x - 2y + 2 = 0, \quad l_2: 5x + 2y + 4 = 0$

Решение: Существуют два способа решения – графический и аналитический.

Графический способ состоит в том, чтобы просто начертить данные прямые и узнать точку пересечения непосредственно из чертежа:



Вот наша точка: $M\left(-1; \frac{1}{2}\right)$. Для проверки следует подставить её координаты в **каждое** уравнение, они должны подойти и там, и там. Иными словами, координаты точки $M\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ являются решением системы $\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ 5x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$. По сути, мы рассмотрели графический способ решения **системы линейных уравнений** с двумя уравнениями, двумя неизвестными.

Графический способ, конечно, неплох, но существует заметные минусы. Нет, дело не в том, что так решают семиклассники, дело в том, что на правильный и ТОЧНЫЙ чертёж уйдёт время. Кроме того, некоторые прямые построить не так-то просто, да и сама точка пересечения может находиться где-нибудь в тридесятом царстве за пределами тетрадного листа.

Поэтому точку пересечения $M = l_1 \cap l_2$ целесообразнее искать аналитическим методом. Решим систему:

$$M: \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ 5x + 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$-1 - 2y + 2 = 0 \Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

Для решения системы использован метод почленного сложения уравнений. Чтобы наработать соответствующие навыки, посетите урок **Как решить систему уравнений?**

Ответ: $M\left(-1; \frac{1}{2}\right)$

Проверка тривиальна – координаты точки пересечения должны удовлетворять каждому уравнению системы.

Пример 5

Найти точку пересечения прямых AB, CD в том случае, если они пересекаются. $A(6;-7), B(9;14), C(-2;5), D(3;6)$

Это пример для самостоятельного решения. Задачу удобно разбить на несколько этапов. Анализ условия подсказывает, что нужно:
1) Составить уравнение прямой AB.
2) Составить уравнение прямой CD.
3) Выяснить взаимное расположение прямых AB, CD.
4) Если прямые пересекаются, то найти точку пересечения.

Разработка алгоритма действий типична для многих геометрических задач, и я на этом буду неоднократно заострять внимание.

Полное решение и ответ в конце урока:

Ещё не стоптана и пара башмаков, как мы подобрались ко второму разделу урока:

Перпендикулярные прямые. Расстояние от точки до прямой. Угол между прямыми

Начнём с типовой и очень важной задачи. В первой части мы узнали, как построить прямую, параллельную данной, а сейчас избушка на курьих ножках развернётся на 90 градусов:

Как построить прямую, перпендикулярную данной?

Пример 6

Прямая задана уравнением $l: 2x+y-3=0$ в декартовой системе координат. Составить уравнение перпендикулярной прямой m, проходящей через точку $M(2;3)$.

Решение: По условию известно, что $M \in m$ и $m \perp l$. Неплохо бы найти направляющий вектор прямой m. Поскольку прямые перпендикулярны, фокус прост:

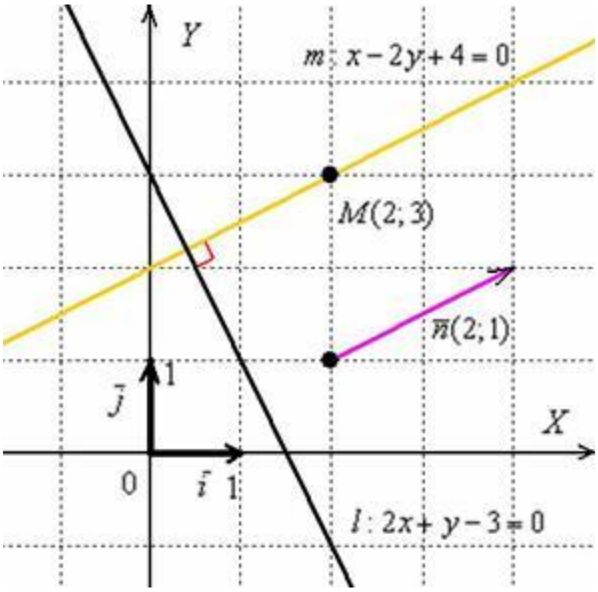
Из уравнения $l: 2x+y-3=0$ «снимаем» вектор нормали: $\overline{n}(2;1)$, который и будет направляющим вектором прямой m.

Уравнение прямой m составим по точке $M(2;3)$ и направляющему вектору $\overline{n}(2;1)$:

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{1}$$
$$x-2=2(y-3)$$
$$x-2=2y-6$$

Ответ: $m: x-2y+4=0$

Развернём геометрический этюд:



М-да… Оранжевое небо, оранжевое море, оранжевый верблюд.

Аналитическая проверка решения:

1) Из уравнений $l: 2x+y-3=0,\quad m: x-2y+4=0$ вытаскиваем направляющие векторы $\overline{p}_1(-1;2), \overline{p}_2(2;1)$ и с помощью **скалярного произведения векторов** приходим к выводу, что прямые действительно перпендикулярны: $\overline{p}_1 \cdot \overline{p}_2 = -1\cdot 2 + 2\cdot 1 = 0 \Rightarrow \overline{p}_1 \perp \overline{p}_2 \Rightarrow l \perp m$.

Кстати, можно использовать векторы нормали, это даже проще.

2) Проверяем, удовлетворяет ли точка $M(2;3)$ полученному уравнению $m: x-2y+4=0$.

Проверку, опять же, легко выполнить устно.

Пример 7

Найти точку пересечения перпендикулярных прямых d_1 и d_2, если известно уравнение $d_1: x-4y+4=0$ в декартовой системе координат и точка $A\left(-\frac{9}{2}; 2\right) \in d_2$.

Это пример для самостоятельного решения. В задаче несколько действий, поэтому решение удобно оформить по пунктам.

Наше увлекательное путешествие продолжается:

Расстояние от точки до прямой

Перед нами прямая полоса реки и наша задача состоит в том, чтобы дойти до неё кратчайшим путём. Препятствий нет, и самым оптимальным маршрутом будет движение по перпендикуляру. То есть, расстояние от точки до прямой – это длина перпендикулярного отрезка.

Расстояние в геометрии традиционно обозначают греческой буквой «ро», например: $\rho(M;d)$ – расстояние от точки «эм» до прямой «дэ».

Расстояние от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой $d: Ax + By + C = 0$, заданной в декартовой системе координат, выражается формулой

$$\rho(M; d) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Пример 8

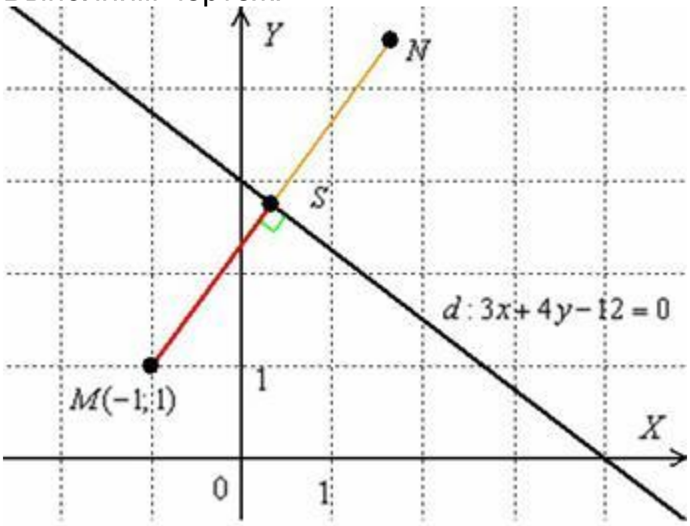
Найти расстояние от точки $M(-1; 1)$ до прямой $d: 3x + 4y - 12 = 0$

Решение: всё что нужно, это аккуратно подставить числа в формулу и провести вычисления:

$$\rho(M; d) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-3 + 4 - 12|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-11|}{\sqrt{25}} = \frac{11}{5}$$

Ответ: $\rho(M; d) = \frac{11}{5} = 2{,}2$ ед.

Выполним чертёж:



Найденное расстояние от точки до прямой – это в точности длина красного отрезка. Если оформить чертёж на клетчатой бумаге в масштабе 1 ед. = 1 см (2 клетки), то расстояние можно измерить обыкновенной линейкой.

Рассмотрим ещё одно задание по этому же чертежу:

Как построить точку, симметричную относительно прямой?

Задача состоит в том, чтобы найти координаты точки N, которая симметрична точке $M(-1; 1)$ относительно прямой $d: 3x + 4y - 12 = 0$. Предлагаю выполнить действия самостоятельно, однако обозначу алгоритм решения с промежуточными результатами:

1) Находим прямую $MN: 4x - 3y + 7 = 0$, которая перпендикулярна прямой d.

2) Находим точку пересечения прямых: $S\left(\frac{8}{25}; \frac{69}{25}\right) = MN \cap d$.

Оба действия подробно разобраны в рамках данного урока.

3) Точка S является серединой отрезка MN. Нам известны координаты середины и одного из концов. По формулам координат середины отрезка находим $N\left(\frac{41}{25}; \frac{113}{25}\right)$.

Не лишним будет проверить, что расстояние $\rho(N;d)$ тоже равно 2,2 единицам.

Трудности здесь могут возникнуть в вычислениях, но в вышке здорово выручает микрокалькулятор, позволяющий считать обыкновенные дроби. Неоднократно советовал, посоветую и снова.

Как найти расстояние между двумя параллельными прямыми?

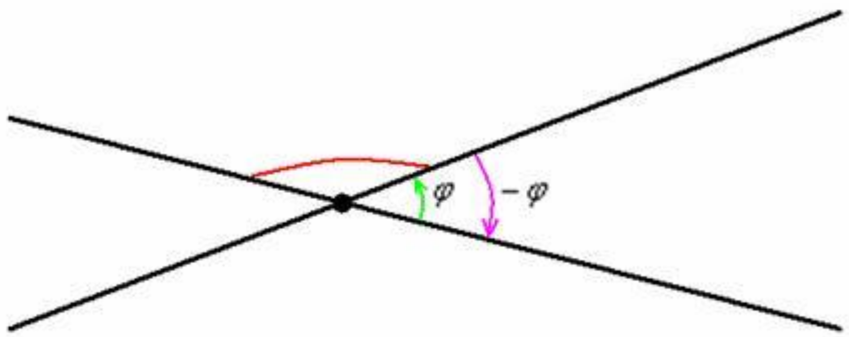
Пример 9

Найти расстояние $\rho(l_1;l_2)$ между двумя параллельными прямыми $l_1: x-y-2=0, \quad l_2: x-y+3=0$, заданными в декартовой системе координат.

Это очередной пример для самостоятельного решения. Немного подскажу: тут бесконечно много способов решения. Разбор полётов в конце урока, но лучше постарайтесь догадаться сами, думаю, вашу смекалку удалось неплохо разогнать.

Угол между двумя прямыми

Что ни угол, то косяк:



В геометрии за угол между двумя прямыми принимается МЕНЬШИЙ угол, из чего автоматически следует, что он не может быть тупым. На рисунке угол, обозначенный красной дугой, не считается углом между пересекающимися прямыми. А считается таковым его «зелёный» сосед φ или *противоположно ориентированный* «малиновый» угол $-\varphi$.

Если прямые перпендикулярны, то за угол между ними можно принимать любой из 4 углов.

Чем отличаются углы φ и $-\varphi$? Ориентацией. Во-первых, принципиально важным является направление «прокрутки» угла. Во-вторых, отрицательно ориентированный угол записывается со знаком «минус», например, если $\varphi = 30^\circ$, то $-\varphi = -30^\circ$.

Зачем я это рассказал? Вроде бы можно обойтись и обычным понятием угла. Дело в том, что в формулах, по которым мы будем находить углы, запросто может получиться отрицательный результат, и это не должно застать вас врасплох. Угол со знаком «минус» ничем не хуже, и имеет вполне конкретный геометрический смысл. На чертеже для отрицательного угла следует обязательно указывать стрелкой его ориентацию (по часовой стрелке).

Как найти угол между двумя прямыми? Существуют две рабочие формулы:

Пример 10

Найти угол между прямыми $d_1: 2x-3y=0, \quad d_2: x+3y-7=0$

Решение и **Способ первый**

Рассмотрим две прямые, заданные общими уравнениями в декартовой системе координат:
$d_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$
$d_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$

Если прямые **не перпендикулярны**, то *ориентированный* угол φ между ними можно вычислить с помощью формулы:

$$tg\varphi = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}}{A_1A_2 + B_1B_2}$$

Самое пристальное внимание обратим на знаменатель – это в точности **скалярное произведение** направляющих векторов прямых:
$\bar{p}_1(-B_1; A_1) \cdot \bar{p}_2(-B_2; A_2) = -B_1 \cdot (-B_2) + A_1 \cdot A_2 = B_1B_2 + A_1A_2 = A_1A_2 + B_1B_2$

Если $\bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2 = A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, то знаменатель формулы обращается в ноль, а векторы будут ортогональны и прямые перпендикулярны. Именно поэтому сделана оговорка о неперпендикулярности прямых в формулировке.

Исходя из вышесказанного, решение удобно оформить в два шага:

1) Вычислим скалярное произведение направляющих векторов прямых:
$A_1A_2 + B_1B_2 = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 = 2 - 9 = -7 \neq 0$, значит, прямые не перпендикулярны.

2) Угол между прямыми найдём по формуле:

$$tg\varphi = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}}{A_1A_2 + B_1B_2} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{6+3}{-7} = -\frac{9}{7}$$

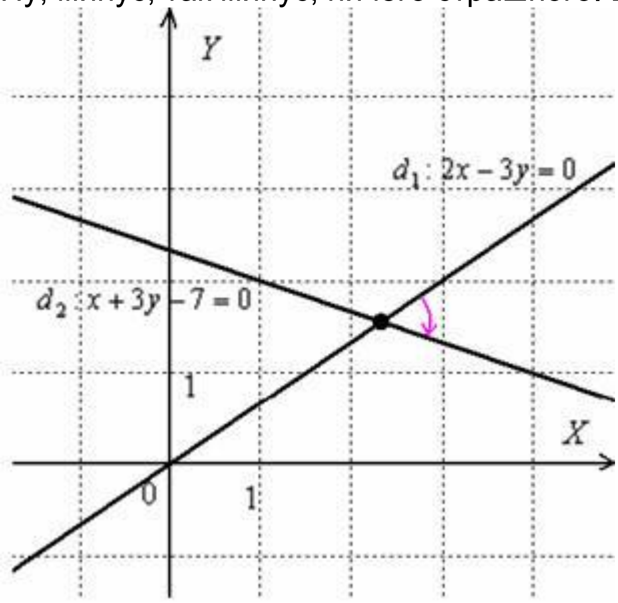
С помощью обратной функции легко найти и сам угол. При этом используем нечётность арктангенса (см. **Графики и свойства элементарных функций**):

$$\varphi = arctg\left(-\frac{9}{7}\right) = -arctg\frac{9}{7}$$

Ответ: $\varphi = -arctg\frac{9}{7} \approx -0{,}91 \text{ рад.} \approx -52^\circ$

В ответе указываем точное значение, а также приближённое значение (желательно и в градусах, и в радианах), вычисленное с помощью калькулятора.

Ну, минус, так минус, ничего страшного. Вот геометрическая иллюстрация:



Неудивительно, что угол получился отрицательной ориентации, ведь в условии задачи первым номером идёт прямая $d_1: 2x-3y=0$ и «открутка» угла началась именно с неё.

Если очень хочется получить положительный угол, нужно поменять прямые местами, то есть коэффициенты A_1, B_1 взять из второго уравнения $d_2: x+3y-7=0$, а коэффициенты A_2, B_2 взять из первого уравнения $d_1: 2x-3y=0$. Короче говоря, начать нужно с прямой $d_2: x+3y-7=0$.

Утаивать не буду, сам подбираю прямые в том порядке, чтобы угол получился положительным. Так красивее, но не более того.

Для проверки решения можно взять транспортир и измерить угол.

Способ второй

Если прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом $\begin{matrix} d_1: y=k_1x+b_1 \\ d_2: y=k_2x+b_2 \end{matrix}$ *(декартовы координаты)* и **не перпендикулярны**, то *ориентированный* угол φ между ними можно найти с помощью формулы:

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$$

Условие перпендикулярности прямых выражается равенством $1+k_1k_2=0$, откуда, кстати, следует очень полезная взаимосвязь угловых коэффициентов перпендикулярных прямых: $k_1=-\frac{1}{k_2}$, которая используется, в частности при нахождении **уравнения нормали**.

Алгоритм решения похож на предыдущий пункт. Но сначала перепишем наши прямые в нужном виде:

$$d_1: 2x-3y=0 \Rightarrow 3y=2x \Rightarrow y=\frac{2}{3}x$$

$$d_2: x+3y-7=0 \Rightarrow 3y=-x+7 \Rightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$$

Таким образом, угловые коэффициенты: $k_1=\frac{2}{3}, \quad k_2=-\frac{1}{3}$

1) Проверим, будут ли прямые перпендикулярны:

$1+k_1k_2=1+\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}\neq 0$, значит, прямые не перпендикулярны.

2) Используем формулу:

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}{\frac{7}{9}}=\frac{-1}{\frac{7}{9}}=-\frac{9}{7}$$

Ответ: $\varphi=-arctg\frac{9}{7}\approx-0{,}91\text{ рад.}\approx-52^\circ$

Второй способ уместно использовать тогда, когда уравнения прямых изначально заданы с угловым коэффициентом. Следует отметить, что если хотя бы одна прямая параллельна оси ординат, то формула не применима вообще, поскольку для таких прямых угловой коэффициент не определён (см. статью **Уравнение прямой на плоскости**).

Есть и третий способ решения. Идея состоит в том, чтобы вычислить угол между направляющими векторами прямых с помощью формулы, рассмотренной на уроке **Скалярное произведение векторов**:

$$\cos\alpha=\frac{\overline{p}_1\cdot\overline{p}_2}{|\overline{p}_1|\cdot|\overline{p}_2|}$$

Здесь уже речь идёт не об ориентированном угле, а «просто об угле», то есть результат заведомо будет положительным. Загвоздка состоит в том, что может получиться тупой угол (не тот, который нужен). В этом случае придётся делать оговорку, что угол между прямыми – это меньший угол, и из «пи» радиан (не из 180 градусов!) вычитать получившийся арккосинус.

Желающие могут прорешать задачу третьим способом. Но я рекомендую всё-таки придерживаться первого подхода с ориентированным углом, по той причине, что он широко распространён.

Пример 11

Найти угол между прямыми $d_1: 2x+3=0,\quad d_2: 7x+2y+1=0$, заданными в декартовой системе координат.

Это пример для самостоятельного решения. Попробуйте решить его двумя способами.

Как-то заглохла по ходу дела сказка…. Потому что нет никакого Кащея Бессмертного. Есть я, причём, не особо запаренный. Если честно, думал, статья значительно длиннее выйдет. Но все равно возьму недавно приобретенную шапочку с очками и пойду купаться в сентябрьской озёрной воде. Отлично снимает усталость и негативную энергетику.

До скорых встреч!

И помните, Бабу-Ягу никто не отменял =)

Решения и ответы:

*Пример 3: **Решение**: Найдём направляющий вектор прямой* BC *:*
$\overline{BC}(-6-2;-2-(-2))=\overline{BC}(-8;0)$

Уравнение искомой прямой составим по точке $A(-2;3)$ *и направляющему вектору* $\overline{BC}(-8;0)$. *Так как одна из координат направляющего вектора нулевая,* *уравнение* $\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}$ *перепишем в виде:*

$p_2\cdot(x-x_0)=p_1\cdot(y-y_0)$

$0\cdot(x-(-2))=-8\cdot(y-3)$

$-8\cdot(y-3)=0$

$y-3=0$

Ответ: $y-3=0$

Пример 5: ***Решение***:

1) Уравнение прямой AB *составим по двум точкам* $A(6;-7), B(9;14)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\frac{x-6}{9-6}=\frac{y-(-7)}{14-(-7)}$$

$$\frac{x-6}{3}=\frac{y+7}{21}$$

$$x-6=\frac{y+7}{7}$$

$$7(x-6)=y+7$$

$$7x-42=y+7$$

$$AB: 7x-y-49=0$$

Тема -13-14. Множества. Операции над множествами. Отображение множеств. Мощность множества

Приветствую вас на первом уроке по высшей алгебре, который появился… в канун пятилетия сайта, после того, как я уже создал более 150 статей по математике, и мои материалы начали оформляться в завершённый курс. Впрочем, буду надеяться, что не опоздал – ведь многие студенты начинают вникать в лекции только к государственным экзаменам =)

Вузовский курс вышмата традиционно зиждется на трёх китах:

– **аналитической геометрии**;

– математическом анализе *(**пределы**, **производные** и т. д.)*

– и, наконец, сезон 2015 / 16 учебного года открывается уроками **Алгебра для чайников**, **Элементы математической логики**, на которых мы разберём основы раздела, а также познакомимся с базовыми математическими понятиями и распространёнными обозначениями. Надо сказать, что в других статьях я не злоупотребляю «закорючками» , однако то лишь стиль, и, конечно же, их нужно узнавать в любом состоянии =). Вновь прибывшим читателям сообщаю, что мои уроки ориентированы на практику, и нижеследующий материал будет представлен именно в этом ключе. Но через много лет я таки создал **Практический и немного теоретический pdf-курс высшей алгебры**, после которого вам будет гораздо легче воспринимать информацию «классических» учебников.

Поехали:

Множество. Примеры множеств

Множество – это фундаментальное понятие не только математики, но и всего окружающего мира. Возьмите прямо сейчас в руку любой предмет. Вот вам и множество, состоящее из одного элемента.

В широком смысле, **множество – это совокупность объектов (элементов), которые понимаются как единое целое** (по тем или иным признакам, критериям или обстоятельствам). Причём, это не только материальные объекты, но и буквы, цифры, теоремы, мысли, эмоции и т.д.

Обычно множества обозначаются большими латинскими буквами $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$ *(как вариант, с подстрочными индексами:* A_1, A_2, B_7 *и т.п.)*, а его элементы записываются в фигурных скобках, например:

$A = \{а, б, в, \ldots, э, ю, я\}$ – множество букв русского алфавита;
$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ – множество натуральных чисел;

ну что же, пришла пора немного познакомиться:
$S_1 = \{Аня, Ваня, Таня, Петя, Юля, Галя\}$ – множество студентов в 1-м ряду

… я рад видеть ваши серьёзные и сосредоточенные лица =)

Множества A и S_1 являются *конечными* (состоящими из конечного числа элементов), а множество N – это пример *бесконечного* множества. Кроме того, в теории и на практике рассматривается так называемое *пустое множество*:

$\varnothing$ – множество, в котором нет ни одного элемента.

Пример вам хорошо известен – множество S_1 на экзамене частенько бывает пусто =)

Принадлежность элемента множеству записывается значком $\in$, например:

$б \in A$ – буква «бэ» принадлежит множеству букв русского алфавита;
$\beta \notin A$ – буква «бета» **не** принадлежит множеству букв русского алфавита;
$5 \in N$ – число 5 принадлежит множеству натуральных чисел;
$5{,}5 \notin N$ – а вот число 5,5 – уже нет;
$Вольдемар \notin S_1$ – Вольдемар не сидит в первом ряду (и тем более, не принадлежит множеству A или N =)).

В абстрактной и не очень алгебре элементы множества обозначают маленькими латинскими буквами $a, b, c, \ldots, x, y, z$ и, соответственно, факт принадлежности оформляется в следующем стиле:

$x \in X$ – элемент x принадлежит множеству X.

Вышеприведённые множества записаны *прямым перечислением* элементов, но это не единственный способ. Многие множества удобно определять с помощью некоторого *признака (ов)*, который присущ всем его элементам. Например:

$N^{*} = \{n \in N \mid n < 100\}$ – множество всех натуральных чисел, меньших ста.

Запомните: длинная вертикальная палка $|$ выражает словесный оборот «которые», «таких, что». Довольно часто вместо неё используется двоеточие: $N^{*} = \{n \in N :\ n < 100\}$ – давайте прочитаем запись более формально: *«множество элементов n, принадлежащих множеству N натуральных чисел,* ***таких, что*** $n < 100$». Молодцы!

Данное множество можно записать и прямым перечислением:
$N^{*} = \{1, 2, 3, \ldots, 97, 98, 99\}$

Ещё примеры:
$S_1 = \{\textit{Студенты} \mid \textit{занимают место в 1 ряду}\}$ – и если и студентов в 1-м ряду достаточно много, то такая запись намного удобнее, нежели их прямое перечисление.

$O = \{x \mid 0 \le x \le 1\}$ – множество чисел, принадлежащих отрезку $[0;\ 1]$. Обратите внимание, что здесь подразумевается множество *действительных* чисел *(о них позже)*, которые перечислить через запятую уже невозможно.

Следует отметить, что элементы множества не обязаны быть «однородными» или логически взаимосвязанными. Возьмите большой пакет и начните наобум складывать в него различные предметы. В этом нет никакой закономерности, но, тем не менее, речь идёт о множестве предметов. Образно говоря, множество – это и есть обособленный «пакет», в котором «волею судьбы» оказалась некоторая совокупность объектов.

Подмножества

Практически всё понятно из самого названия:
множество G является **подмножеством** множества A, если каждый элемент множества G принадлежит множеству A. Иными словами, множество G содержится во множестве A:
$G \subset A$

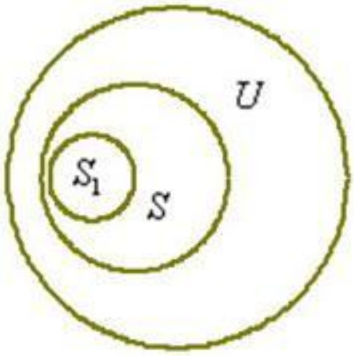
Значок $\subset$ называют значком *включения*.

Вернёмся к примеру, в котором A – это множество букв русского алфавита. Обозначим через G – множество его гласных букв. Тогда:
$G \subset A$

Также можно выделить подмножество согласных букв и вообще – произвольное подмножество, состоящее из любого количества случайно (или неслучайно) взятых кириллических букв. В частности, любая буква кириллицы является подмножеством множества A.

Отношения между подмножествами удобно изображать с помощью условной геометрической схемы, которая называется *кругами Эйлера*.

Пусть S_1 – множество студентов в 1-м ряду, S – множество студентов группы, U – множество студентов университета. Тогда отношение включений $S_1 \subset S \subset U$ можно изобразить следующим образом:



Множество студентов другого ВУЗа следует изобразить кругом, который не пересекает внешний круг; множество студентов страны – кругом, который содержит в себе оба этих круга, и т.д.

Типичный пример включений мы наблюдаем при рассмотрении числовых множеств. Повторим школьный материал, который важно держать на заметке и при изучении высшей математики:

Числовые множества

Как известно, исторически первыми появились натуральные числа, предназначенные для подсчёта материальных объектов (людей, кур, овец, монет и т.д.). Это множество уже встретилось в статье, единственное, мы сейчас чуть-чуть модифицируем его обозначение. Дело в том, что числовые множества принято обозначать жирными, стилизованными или утолщёнными буквами. Мне удобнее использовать жирный шрифт:
$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Иногда к множеству натуральных чисел относят ноль.

Если к множеству $\mathbf{N}$ присоединить те же числа с противоположным знаком и ноль, то получится *множество целых чисел*:

$\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, рационализаторы и лентяи записывают его элементы со значками *«плюс минус»*:))

$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$

Совершенно понятно, что множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел:
$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$ – поскольку каждый элемент множества $\mathbf{N}$ принадлежит множеству $\mathbf{Z}$. Таким образом, любое натуральное число можно смело назвать и целым числом.

Название множества тоже «говорящее»: целые числа – это значит, никаких дробей.

И, коль скоро, целые, то сразу же вспомним важные признаки их делимости на 2, 3, 4, 5 и 10, которые будут требоваться в практических вычислениях чуть ли не каждый день:

Целое число делится на 2 без остатка, если оно заканчивается на 0, 2, 4, 6 или 8 *(т.е. любой чётной цифрой)*. Например, числа:
400, -1502, -24, 66996, 818 – делятся на 2 без остатка.

И давайте тут же разберём «родственный» признак: **целое число делится на 4**, если число, составленное из двух его последних цифр *(в порядке их следования)* делится на 4.

400 – делится на 4 *(т.к. 00 (ноль) делится на 4)*;
-1502 – не делится на 4 *(т.к. 02 (двойка) не делится на 4)*;
-24, понятно, делится на 4;

66996 – делится на 4 *(т.к. 96 делится на 4)*;
818 – не делится на 4 *(т.к. 18 не делится на 4)*.

Самостоятельно проведите несложное обоснование данного факта.

С делимость на 3 чуть сложнее: целое число делится на 3 без остатка, если сумма входящих в него цифр делится на 3.

Проверим, делится ли на 3 число 27901. Для этого просуммируем его цифры:
2 + 7 + 9 + 0 + 1 = 19 – не делится на 3
Вывод: 27901 не делится на 3.

Просуммируем цифры числа -825432:
8 + 2 + 5 + 4 + 3 + 2 = 24 – делится на 3
Вывод: число -825432 делится на 3

Целое число делится на 5, если оно заканчивается пятёркой либо нулём:
775, -2390 – делятся на 5

Целое число делится на 10, если оно заканчивается на ноль:
798400 – делится на 10 *(и, очевидно, на 100)*. Ну и, наверное, все помнят – для того, чтобы разделить на 10, нужно просто убрать один ноль: 79840

Также существуют признаки делимости на 6, 8, 9, 11 и т.д., но практического толку от них практически никакого =)

Следует отметить, что перечисленные признаки (казалось бы, такие простые) строго доказываются в *теории чисел*. Этот раздел алгебры вообще достаточно интересен, однако его теоремы… прямо современная китайская казнь =) А Вольдемару за последней партой и того хватило…, но ничего страшного, скоро мы займёмся живительными физическими упражнениями =)

Следующим числовым множеством идёт *множество рациональных чисел*:
$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\}$ – то есть, любое рациональное число представимо в виде дроби $\frac{m}{n}$ с целым *числителем* и натуральным *знаменателем*.

Очевидно, что множество целых чисел является *подмножеством* множества рациональных чисел:
$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$

И в самом деле – ведь любое целое число можно представить в виде рациональной дроби $\frac{m}{n}$, например: $-2 = \frac{-2}{1}, \quad 5 = \frac{5}{1}$ и т.д. Таким образом, целое число можно совершенно законно назвать и рациональным числом.

Характерным «опознавательным» признаком рационального числа является то обстоятельство, что при делении числителя на знаменатель получается либо
$\frac{-3}{1} = -3$ – целое число,

либо
$\frac{3}{8} = 0{,}375$ – *конечная* десятичная дробь,

либо
$\dfrac{7}{11} = 0,\underbrace{63}\underbrace{63}\underbrace{63}\underbrace{63}...$ – бесконечная *периодическая* десятичная дробь *(повтор может начаться не сразу)*.

Полюбуйтесь делением и постарайтесь выполнять это действие как можно реже! В организационной статье **[Высшая математика для чайников]** и на других уроках я неоднократно повторял, повторяю, и буду повторять эту мантру:

В высшей математике все действия стремимся выполнять в обыкновенных (правильных и неправильных) дробях

Согласитесь, что иметь дело с дробью $\frac{3}{8}$ значительно удобнее, чем с десятичным числом 0,375 *(не говоря уже о бесконечных дробях)*.

Едем дальше. Помимо рациональных существует множество $\mathbf{I}$ иррациональных чисел, каждое из которых представимо в виде бесконечной *НЕпериодической* десятичной дроби. Иными словами, в «бесконечных хвостах» иррациональных чисел нет никакой закономерности:
$\pi = 3,1415926535...$

$e = 2,7182818284...$

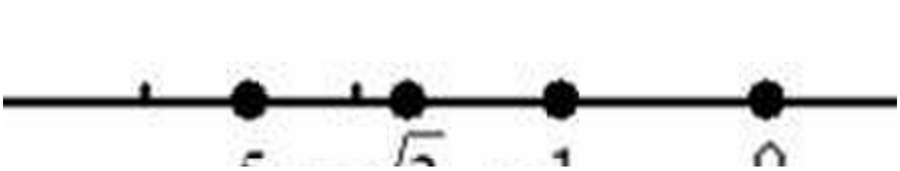
$\sqrt{2} = 1,414213562...$ («год рождения Льва Толстого» дважды)
и т.д.

О знаменитых константах «пи» и «е» информации предостаточно, поэтому на них я не останавливаюсь.

Объединение рациональных и иррациональных чисел образует *множество действительных (вещественных) чисел*:
$\mathbf{Q} \cup \mathbf{I} = \mathbf{R}$

$\cup$ – значок *объединения* множеств.

Геометрическая интерпретация множества $\mathbf{R}$ вам хорошо знакома – это числовая прямая:



Каждому действительному числу соответствует определённая точка числовой прямой, и наоборот – каждой точке числовой прямой обязательно соответствует некоторое действительное число. По существу, сейчас я сформулировал *свойство непрерывности* действительных чисел, которое хоть и кажется очевидным, но строго доказывается в курсе математического анализа.

Числовую прямую также обозначают бесконечным интервалом $(-\infty; +\infty)$, а запись $x \in (-\infty; +\infty)$ или эквивалентная ей запись $x \in \mathbf{R}$ символизирует тот факт, что x принадлежит множеству действительных чисел *(или попросту «икс» – действительное число)*.

С вложениями всё прозрачно: множество рациональных чисел –
это *подмножество* множества действительных чисел:

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, таким образом, любое рациональное число можно смело назвать и действительным числом.

Множество иррациональных чисел – это тоже *подмножество* действительных чисел: $\mathbf{I} \subset \mathbf{R}$

При этом подмножества $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{I}$ *не пересекаются* – то есть ни одно иррациональное число невозможно представить в виде $\frac{m}{n}$ рациональной дроби.

Существуют ли какие-нибудь другие числовые системы? Существуют! Это, например, [комплексные числа](), с которыми я рекомендую ознакомиться буквально в ближайшие дни или даже часы.

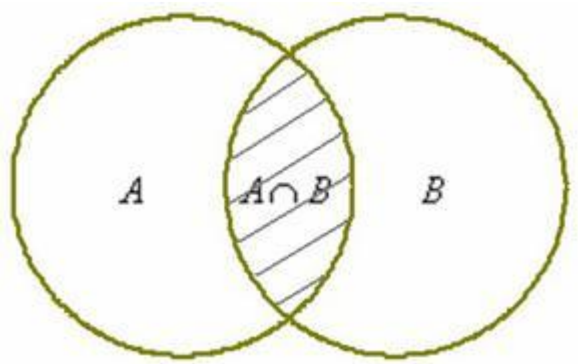
Ну а пока мы переходим к изучению операций над множествами, дух которых уже материализовался в конце этого параграфа:

Действия над множествами. Диаграммы Венна

Диаграммы Венна (по аналогии с кругами Эйлера) – это схематическое изображение действий с множествами. Опять же предупреждаю, что я рассмотрю не все операции:

1) **Пересечение** множеств характеризуется логической связкой **И** и обозначается значком $\cap$

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, каждый элемент которого принадлежит **и** множеству A, **и** множеству B. Грубо говоря, пересечение – это общая часть множеств:



Так, например, для множеств $A = \{i, j, k\}, B = \{k, m\}$:
$A \cap B = \{k\}$

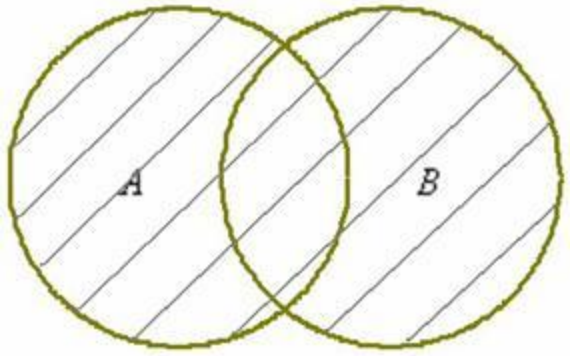
Если у множеств нет одинаковых элементов, то их пересечение пусто. Такой пример нам только что встретился при рассмотрении числовых множеств:
$\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \varnothing$

Множества рациональных и иррациональных чисел можно схематически изобразить двумя непересекающимися кругами.

Операция пересечения применима и для бОльшего количества множеств, в частности в Википедии есть хороший [пример пересечения множеств букв трёх алфавитов]().

2) **Объединение** множеств характеризуется логической связкой **ИЛИ** и обозначается значком $\cup$

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, каждый элемент которого принадлежит множеству A **или** множеству B:



Запишем объединение множеств $A = \{1, 3, 5\}, B = \{-1, 0, 1\}$:
$A \cup B = \{-1, 0, 1, 3, 5\}$ – грубо говоря, тут нужно перечислить все элементы множеств A и B, причём одинаковые элементы *(в данном случае единица на пересечении множеств)* следует указать один раз.

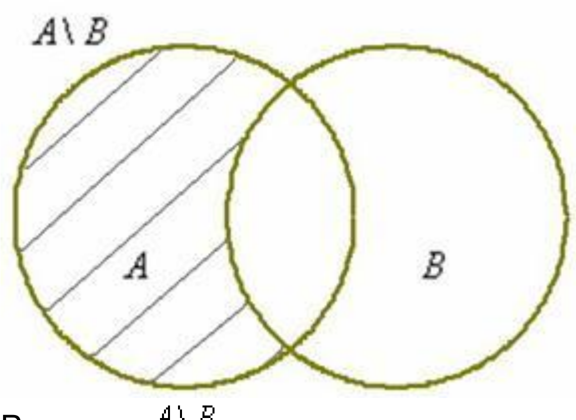
Но множества, разумеется, могут и не пересекаться, как это имеет место быть с рациональными и иррациональными числами:
$\mathbf{Q} \cup \mathbf{I} = \mathbf{R}$

В этом случае можно изобразить два непересекающихся заштрихованных круга.

Операция объединения применима и для бОльшего количества множеств, например, если $A = \{1, 2\}, B = \{0, 7\}, C = \{-10, -3\}$, то:

$A \cup B \cup C = \{-10, -3, 0, 1, 2, 7\}$, при этом числа вовсе не обязательно располагать в порядке возрастания *(это я сделал исключительно из эстетических соображений)*. Не мудрствуя лукаво, результат можно записать и так:
$A \cup B \cup C = \{1, 2, 0, 7, -10, -3\}$

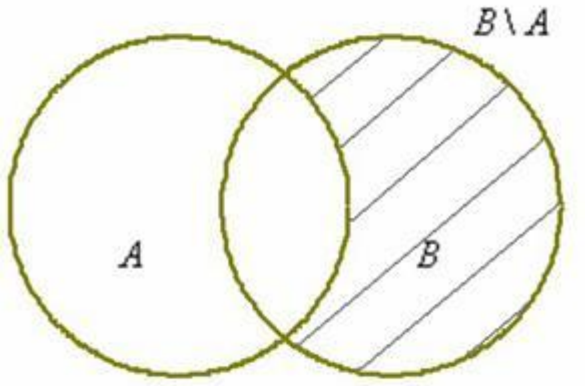
3) **Разностью** множеств A и B называют множество $A \setminus B$, каждый элемент которого принадлежит множеству A **и** не принадлежит множеству B:



Разность $A \setminus B$ читаются следующим образом: «а без бэ». И рассуждать можно точно так же: рассмотрим множества $A = \{a, b, c, d\}, B = \{1, a, d, 5\}$. Чтобы записать разность $A \setminus B$, нужно из множества A «выбросить» все элементы, которые есть во множестве B:
$A \setminus B = \{b, c\}$

Пример с числовыми множествами:
$\mathbf{Z} \setminus \mathbf{N} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$ – здесь из множества целых чисел исключены все натуральные, да и сама запись $\mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$ так и читается: «множество целых чисел без множества натуральных».

Зеркально: **разностью** множеств B и A называют множество $B \setminus A$, каждый элемент которого принадлежит множеству B **и** не принадлежит множеству A:



Для тех же множеств $A = \{a, b, c, d\}, B = \{1, a, d, 5\}$
$B \setminus A = \{1, 5\}$ – из множества B «выброшено» то, что есть во множестве A.

А вот эта разность оказывается пуста: $\mathbf{N} \setminus \mathbf{Z} = \varnothing$. И в самом деле – если из множества натуральных чисел исключить целые числа, то, собственно, ничего и не останется :)

Кроме того, иногда рассматривают *симметрическую* разность $A \Delta B$, которая объединяет оба «полумесяца»:
$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ – иными словами, это «всё, кроме пересечения множеств».

4) **Декартовым (прямым) произведением** множеств A и B называется множество $A \times B$ **всех** <u>упорядоченных</u> пар (a, b), в которых элемент $a \in A$, а элемент $b \in B$

Запишем декартово произведение множеств $A = \{d, 5, f\}, B = \{-1, d\}$:
$A \times B = \{(d, -1), (d, d), (5, -1), (5, d), (f, -1), (f, d)\}$ – перечисление пар удобно осуществлять по следующему алгоритму: «сначала к 1-му элементу множества A последовательно присоединяем каждый элемент множества B, затем ко 2-му элементу множества A присоединяем каждый элемент множества B, затем к 3-му элементу множества A присоединяем каждый элемент множества B»:
$$A \times B = \{(\underline{d}, \boxed{-1}), (\underline{d}, \boxed{d}), (\underline{5}, -1), (\underline{5}, d), (\underline{f}, -1), (\underline{f}, d)\}$$

Зеркально: **декартовым произведением** множеств B и A называется множество $B \times A$ всех <u>упорядоченных</u> пар (b, a), в которых $b \in B, a \in A$. В нашем примере:
$B \times A = \{(-1, d), (-1, 5), (-1, f), (d, d), (d, 5), (d, f)\}$ – здесь схема записи аналогична: сначала к «минус единице» последовательно присоединяем все элементы множества A, затем к «дэ» – те же самые элементы:
$$B \times A = \{(\underline{-1}, d), (\underline{-1}, 5), (\underline{-1}, f), (\underline{d}, d), (\underline{d}, 5), (\underline{d}, f)\}$$

Но это чисто для удобства – и в том, и в другом случае пары можно перечислить в каком угодно порядке – здесь важно записать **все** возможные пары.

А теперь гвоздь программы: декартово произведение $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ – это есть не что иное, как множество точек (x, y) нашей родной **декартовой системы координат** XOY .

Задание для самостоятельного закрепления материала:

Выполнить операции $A\cap B,\ \ A\cup B,\ \ A\setminus B,\ \ B\setminus A,\ \ A\times B,\ \ B\times A$, если:

1) $A=\{a, 1, 2\}, B=\{a, b, 1\}$;
2) $A=\{2n-1 | n\in\mathbf{N}\}, B=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

Множество $A=\{2n-1 | n\in\mathbf{N}\}$ удобно расписать перечислением его элементов.

И пунктик с промежутками действительных чисел:

3) $A=(-\infty; 3), B=[-1; +\infty)$

Напоминаю, что квадратная скобка означает *включение* числа в промежуток, а круглая – его *невключение*, то есть «минус единица» принадлежит множеству B, а «тройка» **не** принадлежит множеству A. Постарайтесь разобраться, что представляет собой декартово произведение данных множеств. Если возникнут затруднения, выполните чертёж ;)

Краткое решение задачи в конце урока.

Отображение множеств

Отображение множества A во множество B – это **правило**, по которому каждому элементу множества A ставится в соответствие элемент (или элементы) множества B. В том случае если в соответствие ставится единственный элемент, то данное правило называется *однозначно определённой* функцией или просто **функцией**.

Функцию, как многие знают, чаще всего обозначают буквой $f: A\to B$ – она ставит в соответствие **каждому** элементу $a\in A$ единственное значение $f(a)$, принадлежащее множеству B.

Ну а сейчас я снова побеспокою множество $S_1=\{Аня, Ваня, Таня, Петя, Юля, Галя\}$ студентов 1-го ряда и предложу им 6 тем для рефератов (множество T):

$Аня\to$ **Векторы**
$Ваня\to$ **Матрицы**
$Таня\to$ **Определители**
$Петя\to$ **Комплексные числа** *(о, да!)*
$Юля\to$ **Теория пределов**
$Галя\to$ **Что такое производная?**

Установленное *(добровольно или принудительно =))* правило f ставит в соответствие каждому студенту s множества S_1 единственную тему реферата $f(s)$ множества T.

…а вы, наверное, и представить себе не могли, что сыграете роль аргумента функции =) =)

Элементы множества S_1 образуют **область определения** функции (обозначается через $D(f)$), а элементы множества T – **область значений** функции (обозначается через $E(f)$).

Построенное отображение множеств имеет очень важную характеристику: оно является **взаимно-однозначным** или **биективным** (биекцией). В данном примере это означает, что каждому студенту поставлена в соответствие одна уникальная тема реферата, и обратно – за каждой темой реферата закреплён один и только один студент.

Однако не следует думать, что всякое отображение биективно. Если на 1-й ряд (к множеству S_1) добавить 7-го студента, то взаимно-однозначное соответствие пропадёт – либо один из студентов останется без темы *(отображения не будет вообще)*, либо какая-то тема достанется сразу двум студентам. Обратная ситуация: если к множеству T добавить седьмую тему, то взаимнооднозначность отображения тоже будет утрачена – одна из тем останется невостребованной.

Уважаемые студенты на 1-м ряду, не расстраивайтесь – остальные 20 человек после пар пойдут прибирать территорию университета от осенней листвы. Завхоз выдаст двадцать голиков, после чего будет установлено взаимно-однозначное соответствие между основной частью группы и мётлами…, а Вольдемар ещё и в магазин сбегать успеет =)

Теперь разберёмся со «школьной» функцией одной переменной. Пожалуйста, загляните на страницу **Функции и графики** *(откроется на соседней вкладке)*, и в Примере 1 найдите график линейной функции $f(x) = 2x + 1$.

Задумаемся, что это такое? Это правило f, которое каждому элементу x области определения *(в данном случае это все значения «икс»)* ставит в соответствие единственное значение $2x + 1$. С теоретико-множественной точки зрения, здесь происходит отображение множества действительных чисел во множество действительных чисел:
$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

Первое множество мы по-обывательски называем «иксами» (независимая переменная или аргумент), а второе – «игреками» (зависимая переменная или функция $y = f(x)$).

Далее взглянем на старую знакомую **параболу** $g(x) = x^2$. Здесь правило g каждому значению «икс» ставит в соответствие его квадрат, и имеет место отображение:
$g : \mathbf{R} \to [0; +\infty)$

Итак, что же такое функция одной переменной? Функция одной переменной – это правило f, которое каждому значению независимой переменной x из области определения ставит в соответствие одно и только одно значение $y = f(x)$.

Как уже отмечалось в примере со студентами, не всякая функция является взаимно-однозначной. Так, например, у функции $y = f(x) = 2x + 1$ каждому «иксу» *области определения* соответствует свой уникальный «игрек», и наоборот – по любому значению «игрек» мы сможем однозначно восстановить «икс». Таким образом, это биективная функция.

***!** На всякий случай ликвидирую возможное недопонимание: моя постоянная оговорка об области определения не случайна! Функция может быть определена далеко не при всех «икс», и, кроме того, может быть взаимно-однозначной и в этом случае. Типичный пример:* $y = f(x) = \ln x$

А вот у квадратичной функции не наблюдается ничего подобного, во-первых:
$y=g(-2)=(-2)^2=4, \quad y=g(2)=2^2=4$ – то есть, различные значения «икс» отобразились в **одно и то же** значение «игрек»; и во-вторых: если кто-то вычислил значение функции и сообщил нам, что $y=4$, то не понятно – этот «игрек» получен при $x=-2$ или при $x=2$? Что и говорить, взаимной однозначностью здесь даже не пахнет.

Задание 2: просмотреть **графики основных элементарных функций** и выписать на листок биективные функции. Список для сверки в конце этого урока.

Мощность множества

Интуиция подсказывает, что термин характеризует размер множества, а именно количество его элементов. И интуиция нас не обманывает!

Мощность пустого множества равна нулю.

Мощность множества $S_1=\{Аня, Ваня, Таня, Петя, Юля, Галя\}$ равна шести.

Мощность множества букв русского алфавита $A=\{а, б, в, \ldots, э, ю, я\}$ равна тридцати трём.

И вообще – мощность любого *конечного* множества равно количеству элементов данного множества.

…возможно, не все до конца понимают, что такое *конечное* множество – если начать пересчитывать элементы этого множества, то рано или поздно счёт завершится. Что называется, и китайцы когда-нибудь закончатся.

Само собой, множества можно сравнивать по мощности и их равенство в этом смысле называется *равномощностью*. Равномощность определяется следующим образом:

Два множества являются равномощными, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Множество S_1 студентов равномощно множеству T тем рефератов, множество A букв русского алфавита равномощно любому множеству из 33 элементов и т.д. Заметьте, что именно **любому** множеству из 33 элементов – в данном случае имеет значение лишь их количество. Буквы русского алфавита можно сопоставить не только с множеством номеров 1, 2, 3, …, 32, 33, но и вообще со стадом в 33 коровы.

Гораздо более интересно обстоят дела с бесконечными множествами. Бесконечности тоже бывают разными! ~~...зелёными и красными~~ Самые «маленькие» бесконечные множества – это *счётные* множества. Если совсем просто, элементы такого множества можно пронумеровать. Эталонный пример – это множество натуральных чисел $\mathbf{N}=\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$. Да – оно бесконечно, однако у каждого его элемента в ПРИНЦИПЕ есть номер.

Примеров очень много. В частности, счётным является множество всех чётных натуральных чисел $\mathbf{N}_{2n}=\{2n \mid n\in\mathbf{N}\}=\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$. Как это доказать? Нужно установить его взаимно-однозначное соответствие с множеством натуральных чисел или попросту пронумеровывать элементы:

$$\mathbf{N}_{2n}=\{\underset{1}{2}, \underset{2}{4}, \underset{3}{6}, \underset{4}{8}, \underset{5}{10}, \ldots\}$$

Взаимно-однозначное соответствие установлено, следовательно, множества равномощны и множество $\mathbf{N}_{2n}$ счётно. Парадоксально, но с точки зрения мощности – чётных натуральных чисел столько же, сколько и натуральных!

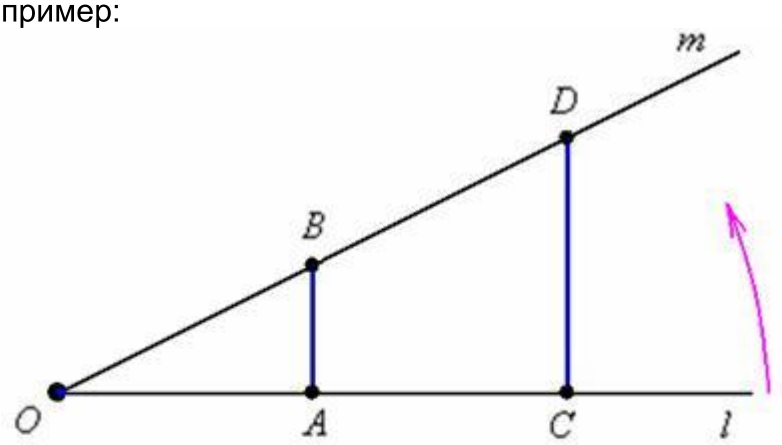
Множество целых чисел тоже счётно. Его элементы можно занумеровать, например, так:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, \underset{7}{-3}, \underset{5}{-2}, \underset{3}{-1}, \underset{1}{0}, \underset{2}{1}, \underset{4}{2}, \underset{6}{3}, \ldots\}$$

Более того, счётно и множество рациональных чисел $\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\}$. Поскольку числитель – это целое число *(а их, как только что показано, можно пронумеровать)*, а знаменатель – натуральное число, то рано или поздно мы «доберёмся» до любой рациональной дроби $\frac{m}{n}$ и присвоим ей номер.

А вот множество действительных чисел $\mathbf{R}$ уже *несчётно*, т.е. его элементы пронумеровать невозможно. Данный факт хоть и очевиден, однако строго доказывается в теории множеств. Мощность множества действительных чисел также называют *континуумом*, и по сравнению со счётными множествами это «более бесконечное» множество.

Поскольку между множеством $\mathbf{R}$ и числовой прямой существует взаимно-однозначное соответствие *(см. выше)*, то множество точек числовой прямой тоже *несчётно*. И более того, что на километровом, что на миллиметровом отрезке – точек столько же! Классический пример:



Поворачивая луч l против часовой стрелки до его совмещения с лучом m мы установим взаимно-однозначное соответствие между точками синих отрезков. Таким образом, на отрезке AB столько же точек, сколько и на отрезке и CD !

Данный парадокс, видимо, связан с загадкой бесконечности… но мы сейчас не будем забивать голову проблемами мироздания, ибо на очереди **основы математической логики**, а не философия =)

Спасибо за внимание и успехов вам в учёбе!

Решение заданий:

Задание 1

1) $A = \{a, 1, 2\}, B = \{a, b, 1\}$

$A \cap B = \{a, 1\}$
$A \cup B = \{a, b, 1, 2\}$
$A \setminus B = \{2\}$
$B \setminus A = \{b\}$
$A \times B = \{(a, a), (a, b), (a, 1), (1, a), (1, b), (1, 1), (2, a), (2, b), (2, 1)\}$
$B \times A = \{(a, a), (a, 1), (a, 2), (b, a), (b, 1), (b, 2), (1, a), (1, 1), (1, 2)\}$

2) $A = \{2n-1 \mid n \in \mathbf{N}\}, B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

A *– это множество нечётных натуральных чисел:* $A = \{1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots\}$

$A \cap B = \{1, 3\}$
$A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots\}$
$A \setminus B = \{5, 7, 9, \ldots, 2n-1, \ldots\}$
$B \setminus A = \{-1, 0, 2\}$

$$A \times B = \begin{Bmatrix} (1, -1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3) \\ (3, -1), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3) \\ (5, -1), (5, 0), (5, 1), (5, 2), (5, 3) \\ \ldots \\ (2n-1, -1), (2n-1, 0), (2n-1, 1), (2n-1, 2), (2n-1, 3) \\ \ldots \end{Bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{Bmatrix} (-1, 1), (-1, 3), (-1, 5), \ldots, (-1, 2n-1), \ldots \\ (0, 1), (0, 3), (0, 5), \ldots, (0, 2n-1), \ldots \\ (1, 1), (1, 3), (1, 5), \ldots, (1, 2n-1), \ldots \\ (2, 1), (2, 3), (2, 5), \ldots, (2, 2n-1), \ldots \\ (3, 1), (3, 3), (3, 5), \ldots, (3, 2n-1), \ldots \end{Bmatrix}$$

3) $A = (-\infty; 3), B = [-1; +\infty)$

$A \cap B = [-1; 3)$
$A \cup B = (-\infty; +\infty)$
$A \setminus B = (-\infty; -1)$
$B \setminus A = [3; +\infty)$
$A \times B = \{(x; y) \mid x < 3, y \geq -1\}$ – все точки (x, y) координатной плоскости XOY , удовлетворяющие двум указанным неравенствам. Аналогично:
$B \times A = \{(x; y) \mid x \geq -1, y < 3\}$

Задание 2 *Взаимно-однозначные функции на иллюстрациях урока* ***[Функции и графики](#)****:*

$y = 2x + 1$

$y = -\dfrac{x}{2}$

$y = x^3$

$y = \sqrt{x}$

$y = \dfrac{1}{x}, \quad y = \dfrac{6}{x}$

$y = e^x, \quad y = e^{-x}$

$y = \ln x$

$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x$

$y = \mathrm{arctg}\, x, \quad y = \mathrm{arcctg}\, x$

Практика -15-16. Как найти область определения функции? Примеры решений

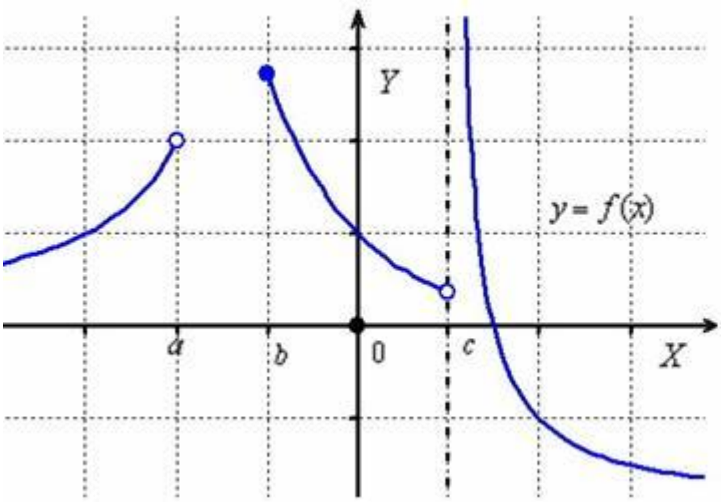
Если где-то нет чего-то, значит, где-то что-то есть

Продолжаем изучение раздела «Функции и графики», и следующая станция нашего путешествия – **Область определения функции**. Активное обсуждение данного понятия началось в статье о **множествах** и продолжилось на первом уроке о **графиках функций**, где я рассмотрел элементарные функции, и, в частности, их области определения. Поэтому чайникам рекомендую начать с азов темы, поскольку я не буду вновь останавливаться на некоторых базовых моментах.

Предполагается, читатель знает область определения следующих функций: линейной, квадратичной, кубической функции, многочленов, экспоненты, синуса, косинуса. Они определены на $\Re$ (***множестве всех действительных чисел***). За тангенсы, арксинусы, так и быть, прощаю =) – более редкие графики запоминаются далеко не сразу.

Область определения – вроде бы вещь простая, и возникает закономерный вопрос, о чём же будет статья? На данном уроке я рассмотрю распространённые задачи на нахождение области определения функции. Кроме того, мы повторим *неравенства с одной переменной*, навыки решения которых потребуются и в других задачах высшей математики. Материал, к слову, весь школьный, поэтому будет полезен не только студентам, но и учащимся. Информация, конечно, не претендует на энциклопедичность, но зато здесь не надуманные «мёртвые» примеры, а жареные каштаны, которые взяты из настоящих практических работ.

Начнём с экспресс-вруба в тему. Коротко о главном: речь идёт о **функции одной переменной** $y = f(x)$. Её область определения – это **множество значений «икс»**, для которых **существуют** значения «игреков». Рассмотрим условный пример:



Область определения данной функции представляет собой **объединение** промежутков: $D(f) = (-\infty; a) \cup [b; c) \cup (c; +\infty)$ (для тех, кто позабыл: $\cup$ – значок объединения). Иными словами, если взять любое значение «икс» из интервала $(-\infty, a)$, или из $[b; c)$, или из $(c; +\infty)$, то для каждого такого «икс» будет существовать значение «игрек».

Грубо говоря, где область определения – там есть график функции. А вот полуинтервал $[a, b)$ и точка «цэ» не входят в область определения и графика там нет.

Да, кстати, если что-нибудь не понятно из терминологии и/или содержания первых абзацев, таки лучше вернуться к статьям **Множества и действия над ними**, **Графики и свойства элементарных функций**.

Как найти область определения функции? Многие помнят детскую считалку: «камень, ножницы, бумага», и в данном случае её можно смело перефразировать: «корень, дробь и логарифм». Таким образом, если вам на жизненном пути встречается дробь, корень или логарифм, то следует сразу же очень и очень насторожиться! Намного реже встречаются тангенс, котангенс, арксинус, арккосинус, и о них мы тоже поговорим. Но сначала зарисовки из жизни муравьёв:

Область определения функции, в которой есть дробь

Предположим, дана функция, содержащая некоторую дробь $\frac{1}{\alpha(x)}$. Как вы знаете, на ноль делить нельзя: $\alpha(x) \neq 0$, поэтому те **значения «икс», которые обращают знаменатель в ноль – не входят в область определения данной функции**.

Не буду останавливаться на самых простых функциях вроде $f(x) = \frac{2}{x}$, $f(x) = \frac{x}{x-2}$, $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$ и т.п., поскольку все прекрасно видят точки, которые не входят в их области определения. Рассмотрим более содержательные дроби:

Пример 1

Найти область определения функции

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-3}$$

Решение: в числителе ничего особенного нет, а вот знаменатель должен быть ненулевым. Давайте приравняем его к нулю и попытаемся найти «плохие» точки:

$x^2 - 3 = 0$

$x^2 = 3$

Полученное уравнение имеет два корня: $x = -\sqrt{3},\ x = \sqrt{3}$. Данные значения **не входят в область определения функции**. Действительно, подставьте $x = -\sqrt{3}$ или $x = \sqrt{3}$ в функцию $f(x) = \frac{x+2}{x^2-3}$ и вы увидите, что знаменатель обращается в ноль.

Ответ: область определения: $D(f) = \Re \setminus \left\{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right\}$

Запись читается так: «область определения – все действительные числа за исключением множества, состоящего из значений $x = -\sqrt{3},\ x = \sqrt{3}$». Напоминаю, что значок обратного слеша в математике обозначает **логическое вычитание**, а фигурные скобки – **множество**. Ответ можно равносильно записать в виде объединения трёх интервалов:

$D(f) = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$

Кому как нравится.

В точках $x = -\sqrt{3},\ x = \sqrt{3}$ функция терпит **бесконечные разрывы**, а прямые, заданные уравнениями $x = -\sqrt{3},\ x = \sqrt{3}$ являются **вертикальными асимптотами** для графика данной функции. Впрочем, это уже немного другая тема, и далее я на этом не буду особо заострять внимание.

Пример 2

Найти область определения функции

$f(x) = -\frac{2}{4-x^2}$

Задание, по существу, устное и многие из вас практически сразу найдут область определения. Ответ в конце урока.

Всегда ли дробь будет «нехорошей»? Нет. Например, функция $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ определена на всей числовой оси. Какое бы значение «икс» мы не взяли, знаменатель не обратится в ноль, более того, будет всегда положителен: $x^2 + 1 > 0$. Таким образом, область определения данной функции: $D(f) = \Re$.

Рекомендую запомнить, при любом значении «икс» и положительной константе k:

$x^2 + k > 0$

Все функции наподобие $f(x) = \frac{3x}{x^2+2},\ f(x) = \frac{x^3}{4+x^2}$ определены и **непрерывны** на $\Re$.

Чуть более сложнA ситуация, когда знаменатель оккупировал квадратный трёхчлен:

Пример 3

Найти область определения функции
$f(x)=\frac{2x+3}{x^2+2x+5}$

Решение: попытаемся найти точки, в которых знаменатель обращается в ноль. Для этого решим **квадратное уравнение**:

$x^2+2x+5=0$

$D=4-20=-16<0$

Дискриминант получился отрицательным, а значит, действительных корней нет, и наша функция определена на всей числовой оси.

Ответ: область определения: $D(f)=\Re$

Пример 4

Найти область определения функции
$f(x)=\frac{2x^2+3}{x^2-x-2}$

Это пример для самостоятельного решения. Решение и ответ в конце урока. Советую не лениться с простыми задачками, поскольку к дальнейшим примерам накопится недопонимание.

Область определения функции с корнем

Функция с квадратным корнем $\sqrt{\alpha(x)}$ определена только при тех значениях «икс», когда **подкоренное выражение неотрицательно**: $\alpha(x)\geq 0$. Если корень расположился в знаменателе $\frac{1}{\sqrt{\alpha(x)}}$, то условие очевидным образом ужесточается: $\alpha(x)>0$. Аналогичные выкладки справедливы для любого корня положительной чётной степени: $\sqrt[4]{\alpha(x)}, \sqrt[6]{\alpha(x)}, \ldots$, правда, корень уже 4-й степени в **исследованиях функций** не припоминаю.

Пример 5

Найти область определения функции
$f(x)=\sqrt{3-2x}$

Решение: подкоренное выражение должно быть неотрицательным:
$3-2x\geq 0$

Прежде чем продолжить решение, напомню основные правила работы с неравенствами, известные ещё со школы.

Обращаю особое внимание! Сейчас рассматриваются неравенства с одной переменной – то есть для нас существует только **одна размерность по оси** OX. Пожалуйста, не путайте с **неравенствами двух переменных**, где геометрически задействована вся координатная плоскость. Однако есть и приятные совпадения! Итак, для неравенства равносильны следующие преобразования:

1) Слагаемые можно переносить из части в часть, меняя у них (слагаемых) знаки.

2) Обе части неравенства можно умножить на положительное число.

3) Если обе части неравенства умножить на **отрицательное** число, то необходимо сменить **знак самого неравенства**. Например, если было «больше», то станет «меньше»; если было «меньше либо равно», то станет «больше либо равно».

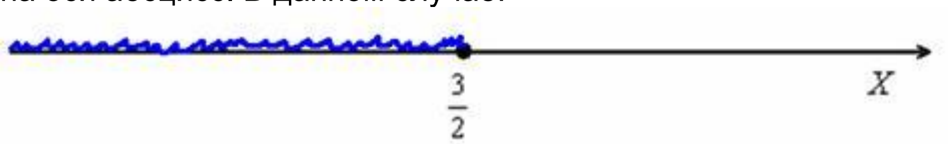
В неравенстве $3-2x \geq 0$ перенесём «тройку» в правую часть со сменой знака (правило № 1):
$-2x \geq -3$

Умножим обе части неравенства на –1 (правило № 3):
$2x \leq 3$

Умножим обе части неравенства на $\frac{1}{2}$ (правило № 2):
$x \leq \frac{3}{2}$

Ответ: область определения: $D(f) = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$

Ответ также можно записать эквивалентной фразой: «функция определена при $x \leq \frac{3}{2}$».
Геометрически область определения изображается штриховкой соответствующих интервалов на оси абсцисс. В данном случае:



Ещё раз напоминаю геометрический смысл области определения – график функции $f(x) = \sqrt{3-2x}$ существует только на заштрихованном участке и отсутствует при $x > \frac{3}{2}$.

В большинстве случаев годится чисто аналитическое нахождение области определения, но когда функция сильно заморочена, следует чертить ось OX и делать пометки.

<u>Пример 6</u>

Найти область определения функции
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+2}}$

Это пример для самостоятельного решения.

Когда под квадратным корнем находится квадратный двучлен или трёхчлен, ситуация немного усложняется, и сейчас мы подробно разберём технику решения:

<u>Пример 7</u>

Найти область определения функции
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+3}}$

Решение: подкоренное выражение должно быть строго положительным, то есть нам необходимо решить неравенство $x^2+4x+3>0$. На первом шаге пытаемся разложить квадратный трёхчлен на множители:
$x^2+4x+3=0$
$D = 16-12 = 4 > 0$

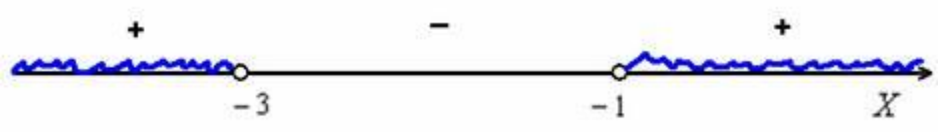
Дискриминант положителен, ищем корни:

$\sqrt{D} = \sqrt{4} = 2$

$x_1 = \frac{-4-2}{2} = -3, \quad x_2 = \frac{-4+2}{2} = -1$

Таким образом, парабола $\alpha(x) = x^2 + 4x + 3$ пересекает ось абсцисс в двух точках, а это значит, что часть параболы расположена ниже оси (неравенство $x^2 + 4x + 3 < 0$), а часть параболы – выше оси (нужное нам неравенство $x^2 + 4x + 3 > 0$).

Поскольку коэффициент $a = 1 > 0$, то ветви параболы смотрят вверх. Из вышесказанного следует, что на интервалах $(-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$ выполнено неравенство $x^2 + 4x + 3 > 0$ (ветки параболы уходят вверх на бесконечность), а вершина параболы расположена на промежутке $(-3; -1)$ ниже оси абсцисс, что соответствует неравенству $x^2 + 4x + 3 < 0$:



***! Примечание:** если вам не до конца понятны объяснения, пожалуйста, начертите вторую ось и параболу целиком! Целесообразно вернуться к статье **Графики и свойства элементарных функций** и методичке **Горячие формулы школьного курса математики**.*

Обратите внимание, что сами точки $x = -3,\ x = -1$ выколоты (не входят в решение), поскольку неравенство у нас строгое.

Ответ: область определения: $D(f) = (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$

Вообще, многие неравенства (в том числе рассмотренное) решаются универсальным *методом интервалов*, известным опять же из школьной программы. Но в случаях квадратных дву- и трёхчленов, на мой взгляд, гораздо удобнее и быстрее проанализировать расположение параболы относительно оси OX. А основной способ – метод интервалов мы детально разберём в статье **Нули функции. Интервалы знакопостоянства**.

Пример 8

Найти область определения функции
$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Это пример для самостоятельного решения. В образце подробно закомментирована логика рассуждений + второй способ решения и ещё одно важное преобразование неравенства, без знания которого студент будет хромать на одну ногу…, …хмм… на счёт ноги, пожалуй, погорячился, скорее – на один палец. Большой палец.

Может ли функция с квадратным корнем быть определена на всей числовой прямой? Конечно. Знакомые всё лица: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Или аналогичная сумма с экспонентой: $f(x) = \sqrt{e^x + 1}$. Действительно, для любых значения «икс» и «ка»: $e^{kx} > 0$, поэтому подАвно и $e^x + 1 > 0$.

А вот менее очевидный пример: $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. Здесь дискриминант отрицателен (парабола не пересекает ось абсцисс), при этом ветви параболы направлены вверх, следовательно, $x^2 + x + 1 > 0$ и область определения: $D(f) = \Re$.

Вопрос противоположный: может ли область определения функции быть *пустой*? Да, и сразу напрашивается примитивный пример $f(x)=\sqrt{-e^x-1}$, где подкоренное выражение отрицательно при любом значении «икс», и область определения: $D(f)=\varnothing$ (значок пустого множества). Такая функция не определена вообще (разумеется, график тоже иллюзорен).

С нечётными корнями $\sqrt[3]{\alpha(x)}, \sqrt[5]{\alpha(x)}, \ldots$ и т.д. всё обстоит гораздо лучше – тут **подкоренное выражение может быть и отрицательным**. Например, функция $f(x)=\sqrt[3]{x}$ определена на всей числовой прямой. Однако у функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x-7}}$ единственная точка $x=7$ всё же не входит в область определения, поскольку обращают знаменатель в ноль. По той же причине для функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+4x+3}}$ исключаются точки $x=-3,\ x=-1$.

Некоторым посетителям сайта рассматриваемые примеры покажутся элементарными и примитивными, но в этом нет случайности – во-первых, я стараюсь «заточить» материал для нубов, а во-вторых, подбираю реалистичные вещи под грядущие задачи: **полное исследование функции**, нахождение **области определения функции двух переменных** и некоторые другие. Всё в математике цепляется друг за дружку. Хотя любители трудностей тоже не останутся обделёнными, более солидные задания встретятся и здесь, и на уроке **о методе интервалов**.

Область определения функции с логарифмом

Третья распространённая функция – логарифм. В качестве образца я буду рисовать натуральный логарифм, который попадается примерно в 99 примерах из 100. Если некоторая функция содержит логарифм $\ln(\alpha(x))$, то в её область определения должны входить только те значения «икс», которые удовлетворяют неравенству $\alpha(x)>0$. Если логарифм находится в знаменателе: $\dfrac{1}{\ln(\alpha(x))}$, то **дополнительно** накладывается условие $\alpha(x)\neq 1$ (так как $\ln 1=0$).

Пример 9

Найти область определения функции

$$f(x)=\frac{1}{\ln(x+3)}$$

Решение: в соответствии с вышесказанным составим и решим систему:

$$\begin{cases} x+3>0 \\ x+3\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x\neq -2 \end{cases}$$

Графическое решение для чайников:

Ответ: область определения: $D(f)=(-3;-2)\cup(-2;+\infty)$

Остановлюсь ещё на одном техническом моменте – у меня ведь не указан масштаб и не проставлены деления по оси. Возникает вопрос: как выполнять подобные чертежи в тетради на клетчатой бумаге? Отмерять ли расстояние между точками по клеточкам строго по масштабу? Каноничнее и строже, конечно, масштабировать, но вполне допустим и схематический чертёж, принципиально отражающий ситуацию.

Пример 10

Найти область определения функции
$f(x)=\ln(x^2-4x+4)$

Для решения задачи можно использовать метод предыдущего параграфа – проанализировать, как парабола расположена относительно оси абсцисс. Ответ в конце урока.

Как видите, в царстве логарифмов всё очень похоже на ситуацию с квадратным корнем: функция $f(x)=\ln(x^2+4x+3)$ (квадратный трёхчлен из Примера № 7) определена на интервалах $(-\infty;-3)\cup(-1;+\infty)$, а функция $f(x)=\ln(1-x^2)$ (квадратный двучлен из Примера № 6) на интервале $(-1;1)$. Неловко уже и говорить, функции типа $f(x)=\ln(x^2+1), f(x)=\ln(e^x+1)$ определены на всей числовой прямой.

Полезная информация*: интересна типовая функция* $f(x)=\ln x^2$*, она определена на всей числовой прямой кроме точки* $x=0$*. Согласно свойству логарифма* $\ln b^a=a\ln b$*, «двойку» можно вынести множителем за пределы логарифма, но, чтобы функция не изменилась, «икс» необходимо заключить под знак модуля:* $f(x)=\ln x^2=2\ln|x|$*. Вот вам и ещё одно «практическое применение»* ***модуля*** *=). Так необходимо поступать в большинстве случаев, когда вы снОсите* ***чётную*** *степень, например:* $\ln(2x-1)^4=4\ln|2x-1|$*. Если же основание степени заведомо положительно, например,* $x^2+4>0$*, то в знаке модуля отпадает необходимость и достаточно обойтись круглыми скобками:* $\ln(x^2+4)^2=2\ln(x^2+4)$*.*

Чтобы не повторяться, давайте усложним задание:

Пример 11

Найти область определения функции
$f(x)=\sqrt{x}\ln(9-x^2)$

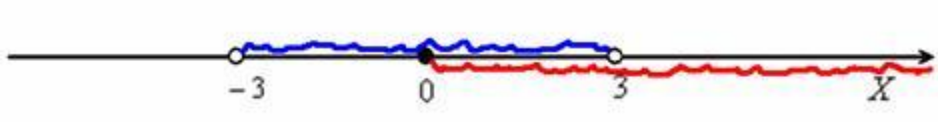
Решение: в данной функции у нас присутствует и корень и логарифм.

Подкоренное выражение должно быть неотрицательным: $x\ge 0$, а выражение под знаком логарифма – строго положительным: $9-x^2>0$. Таким образом, необходимо решить систему:

$$\begin{cases} x\ge 0 \\ 9-x^2>0 \end{cases}$$

Многие из вас прекрасно знают или интуитивно догадываются, что решение системы должно удовлетворять **каждому** условию.

Исследуя расположение параболы $\alpha(x)=-x^2+9$ относительно оси OX, приходим к выводу, что неравенству $9-x^2>0$ удовлетворяет интервал $(-3;3)$ (синяя штриховка):



Неравенству $x \geq 0$, очевидно, соответствует «красный» полуинтервал $[0; +\infty)$.

Поскольку оба условия должны выполняться **одновременно**, то решением системы является пересечение данных интервалов. «Общие интересы» соблюдены на полуинтервале $[0; 3)$.

Ответ: область определения: $D(f) = [0; 3)$

Типовое неравенство $9 - x^2 > 0$, как демонстрировалось в Примере № 8, нетрудно разрешить и аналитически.

Найденная область определения не изменится для «похожих функций», например, для $f(x) = \sqrt{x} + \ln(9 - x^2)$ или $f(x) = \ln(9 - x^2) - \sqrt{x}$. Также можно добавить какие-нибудь непрерывные на $\Re$ функции, например: $f(x) = x^2 + 3 + \sqrt{x}\ln(9 - x^2)$, или так: $f(x) = \dfrac{\sin x \cdot \sqrt{x}\ln(9 - x^2)}{e^x}$, или даже так: $f(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \sin(\ln(9 - x^2))$. Как говорится, корень и логарифм – вещь упрямая. Единственное, если одну из функций «сбросить» в знаменатель, то область определения изменится (хотя в общем случае это не всегда справедливо). Ну а в теории матана по поводу этого словесного… ой… существуют теоремы.

<u>Пример 12</u>

Найти область определения функции
$f(x) = \sqrt{x + 2} \cdot \ln x$

Это пример для самостоятельного решения. Использование чертежа вполне уместно, так как функция не самая простая.

Ещё пару примеров для закрепления материала:

<u>Пример 13</u>

Найти область определения функции
$f(x) = \dfrac{\ln(1 - x)}{x^2 - 2}$

Решение: составим и решим систему:
$$\begin{cases} 1 - x > 0 \\ x^2 - 2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \neq \pm\sqrt{2} \end{cases}$$
Все действия уже разобраны по ходу статьи. Изобразим на числовой прямой интервал, соответствующий неравенству $x < 1$ и, согласно второму условию, исключим две точки:

Значение $x = \sqrt{2}$ оказалось вообще не при делах.

Ответ: область определения $D(f) = (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; 1)$

Небольшой математический каламбур на вариацию 13-го примера:

Пример 14

Найти область определения функции
$f(x)=\dfrac{\ln(x^2-2)}{1-x}$

Это пример для самостоятельного решения. Кто пропустил, тот в пролёте ;-)

Завершающий раздел урока посвящен более редким, но тоже «рабочим» функциям:

Области определения функций
с тангенсами, котангенсами, арксинусами, арккосинусами

Перед изучением параграфа рекомендую вновь вернуться к первой статье **о графиках**, чтобы освежить визуальную и аналитическую информацию о перечисленных в заголовке функциях.

Если в некоторую функцию входит $tg(\alpha(x))$, то из её области определения **исключаются** точки $\alpha(x)=\dfrac{\pi}{2}+\pi\cdot k,\quad k\in Z$, где **Z** – **множество целых чисел**. В частности, как отмечалось в статье **Графики и свойства элементарных функций**, у функции $f(x)=tgx$ выколоты следующие значения:

То есть, область определения тангенса: $D(f)=\Re\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi\cdot k,\quad k\in Z\right\}$.

Убиваться сильно не будем:

Пример 15

Найти область определения функции
$f(x)=tg2x$

Решение: в данном случае $\alpha(x)=2x$ и в область определения не войдут следующие точки:

$$2x\neq\frac{\pi}{2}+\pi\cdot k$$

Скинем «двойку» левой части в знаменатель правой части:

$$x\neq\frac{\frac{\pi}{2}+\pi\cdot k}{2}$$

В результате $x\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi\cdot k}{2},\quad k\in Z$:

Ответ: область определения: $D(f)=\Re\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi\cdot k}{2},\quad k\in Z\right\}$.

В принципе, ответ можно записать и в виде **объединения** бесконечного количества интервалов, но конструкция получится весьма громоздкой:
$D(f) = \ldots \cup \left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right) \cup \ldots$

Аналитическое решение полностью согласуется с **геометрическим преобразованием графика**: если аргумент функции умножить на 2, то её график сожмётся к оси OY в два раза. Заметьте, как у функции $f(x) = tg2x$ уполовинился период, и **точки разрыва** участились в два раза. Тахикардия.

Похожая история с котангенсом. Если в некоторую функцию входит $ctg(\alpha(x))$, то из её области определения исключаются точки $\alpha(x) = \pi \cdot k, \quad k \in Z$. В частности, для функции $f(x) = ctgx$ автоматной очередью расстреливаем следующие значения:

Иными словами: $D(f) = \Re \setminus \{\pi \cdot k, \quad k \in Z\}$

Миниатюра для самостоятельного решения:

Пример 16

Найти область определения функции
$f(x) = \frac{ctgx}{\sqrt{x}}$

Арксинус с арккосинусом, как всегда, выступают хедлайнером математического концерта, и этого стоило дождаться, поскольку кроме нахождения области определения вы сможете научиться решать *двойные неравенства* (или повторить их).

Если в некоторую функцию входит $\arcsin(\alpha(x))$ или $\arccos(\alpha(x))$, то на её область определения накладывается ограничение в виде двойного неравенства: $-1 \le \alpha(x) \le 1$.

Пример 17

Найти область определения функции
$f(x) = \arcsin(3 - 2x)$

Решение: составим двойное неравенство:
$-1 \le 3 - 2x \le 1$

Действия с двойным неравенством очень похожи на действия с «обычным» одинарным неравенством. Конечная цель преобразований – добиться, чтобы в середине остался только «икс».

Сначала избавимся в средней части от константы, для этого вычтем из каждой части неравенства «тройку»:
$-1 - 3 \le 3 - 2x - 3 \le 1 - 3$

$-4 \le -2x \le -2$

Умножим все три части неравенства на –1. Поскольку множитель отрицателен, то знаки **самих неравенств** необходимо «развернуть» в противоположную сторону:

$-1 \cdot (-4) \ge -1 \cdot (-2x) \ge -1 \cdot (-2)$

$4 \ge 2x \ge 2$

Умножим все части неравенства на $\frac{1}{2}$:
$2 \geq x \geq 1$

Запишем ответ, переставив знаки неравенств в привычном порядке, а то по-арабски как-то получилось – от «единицы» до «двух» справа налево.

Ответ: область определения: $1 \leq x \leq 2$ или $D(f) = [1; 2]$

Несложный заключительный пример для самостоятельного решения:

Пример 18

Найти область определения функции
$f(x) = \arccos(3x - 1)$

Хотелось разобрать более трудные примеры со сложными функциями когда, скажем, под квадратный корень вложена дробь или логарифм, но для этого нужно рассказывать про *метод интервалов*, который сейчас наверняка запутает значительную часть аудитории. В этой связи я решил перенести объяснения на урок **о нулях и интервалах знакопостоянства функции**, где постараюсь вернуться к нахождению области определения сложных функций. А на данный момент лучше усвоить меньше, да качественнее!

Желаю успехов!

Решения и ответы:

Пример 2: ***Область определения***: $D(f) = \Re \setminus \{-2; 2\}$

Пример 4: ***Решение***: *найдём нули знаменателя:*

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9; \quad \sqrt{D} = \sqrt{9} = 3$$

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1, \quad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

Ответ: *область определения:* $D(f) = \Re \setminus \{-1; 2\}$

Пример 6: ***Решение***: *найдём область определения:*

$$3x + 2 > 0$$

$$3x > -2$$

$$x > -\frac{2}{3}$$

Ответ: $D(f) = \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$

Пример 8: ***Решение***: *решим неравенство* $1 - x^2 \geq 0$. *Парабола* $\alpha(x) = -x^2 + 1$ *пересекает ось абсцисс в точках* $x = \pm 1$. *Поскольку* $a = -1$, *то ветви параболы направлены вниз.*

Ответ: *область определения:* $D(f) = [-1; 1]$

Примечание: *Неравенства вида* $\alpha - x^2 \geq 0$ *и* $x^2 - \alpha \geq 0$ *(+ такие же строгие неравенства + неравенства с противоположными знаками), где* α *– положительное число, легко решаются аналитически.*

Перенесём «единицу» в правую часть: $-x^2 \geq -1$.

Умножим обе части неравенства на –1: $x^2 \leq 1$.

Практика -17-18. Методы решения пределов. Неопределённости. Порядок роста функции. Метод замены

На уроках **Пределы. Примеры решений**, **Замечательные пределы** мы рассмотрели азы темы, и данная статья продолжает наше погружение в мир пределов. Помимо закрепления материала, будет много новой информации о методах решения пределов, и, конечно же, примеры, примеры, примеры со всеми техническими тонкостями решений. Качественная проработка урока позволит выйти на уверенный средний уровень даже полному чайнику.

Что необходимо знать и уметь на данный момент?

– Вы должны **ПОНИМАТЬ**, что такое **предел функции**. Не выучить, не зазубрить, а именно **понять** хотя бы на общем, интуитивном уровне. Поэтому, если пределы сродни китайской грамоте, пожалуйста, начните с базового урока **Пределы. Примеры решений**, а также загляните в справку **Графики и свойства элементарных функций**, где я проиллюстрировал геометрический смысл понятия.

– Необходимо уметь использовать основные методы решения пределов и справляться с наиболее распространёнными заданиями. Очень хорошо, если кроме примеров моих первых двух уроков, вы порешали (или попытались порешать) что-нибудь дополнительно.

Есть? Едем дальше. Начнём с пары вопросов, которые вызвали недопонимание у некоторых посетителей сайта. За 2 года в отзывах и личной переписке мне удалось выяснить те моменты, которые недостаточно подробно рассмотрены в ранних статьях. И сейчас самое время акцентировать на них внимание.

Первый вопрос затрагивает саму сущность предела. В черновой версии урока я даже процитировал Винни-Пуха: «Куда идём мы с Пятачком, большой-большой секрет». Но потом убрал… нехорошо как-то… выходит все, кто этого не понял – медведи с опилками в голове.

«Чему равен предел $\lim \sqrt{x+4}$?» *(пример условный)*

Действительно, чему?

Здесь не указано, *куда* стремится «икс», и такая запись не имеет смысла:

$\cancel{\lim \sqrt{x+4}}$

Предел функции не летает где-то по воздуху на воздушном шаре, **он может существовать (или не существовать) <u>только в определённой точке</u>** (в частности, в точке $x=-\infty$ или $x=+\infty$). Например:

$$\lim_{x\to -3}\sqrt{x+4}=\sqrt{-3+4}=\sqrt{1}=1$$

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{x+4}=\sqrt{2+4}=\sqrt{6}$$

Заодно вспоминаем примитивный, но важный приём – чтобы вычислить предел, сначала нужно попытаться подставить значение «икс» в функцию. В случае с бесконечностью очевидно, что:

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x+4}=+\infty$$

Иными словами, если $x\to +\infty$, то функция $f(x)=\sqrt{x+4}$ *неограниченно возрастает*.

А вот следующего предела не существует:
$\lim\limits_{x\to -5}\sqrt{x+4}$

Значение $x=-5$ не входит в **область определения функции** (под корнем получается «минус»).

рАвно не существует и такого предела:
$\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{x+4}$

Тут «икс» стремится к «минус бесконечности», и под корнем нарисуется *бесконечно большое* отрицательное число.

Итак, в природе **не существует «просто предела»**. Предел может существовать (или не существовать) **лишь в определённой точке**, в частности, в точке «плюс бесконечность» или «минус бесконечность».

В процессе оформления практических примеров **постарайтесь придерживаться следующей рекомендации**: не допускайте неполной записи вроде $\lim\sqrt{x+4}$, это одна из самых скверных оплошностей. Презумпция виновности студента утверждает, что он либо совсем не в теме, либо откуда-то впопыхах списал пример.

Второй вопрос касается путаницы с неопределённостями, которые возникают в ходе решения более сложных пределов. Систематизируем информацию:

Что в пределах функций ЯВЛЯЕТСЯ неопределённостью
и НЕ ЯВЛЯЕТСЯ неопределённостью

Прежде всего, перед решением любого предела, **обязательно** выполняем подстановку «икса» в функцию – **неопределённости может и не быть**! Однако сладостей много вредно, и на первых двух уроках мы сталкивались со следующими неопределённостями:
$\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 1^{∞}, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$, $0\cdot\infty$

Кроме указанных видов, существует довольно распространённая неопределённость $\infty-\infty$ («бесконечность минус бесконечность»), которую мы подробно разберём в этой статье, и совсем редко встречаются неопределённости ∞^0, 0^0.

Для того чтобы устранить неопределённость, как вы знаете, необходимо использовать некоторые правила и методы решения пределов.

Теперь о том, ЧТО НЕ ЯВЛЯЕТСЯ неопределённостью.

Неопределённостью не является:

– Любая определённость =)

– *Бесконечно малое* число, делённое на ненулевую константу: $\frac{0}{-3}=0$. Сюда же можно отнести *бесконечно малое* число, делённое на *бесконечно большое* число: $\frac{0}{\infty}=0$

– Ненулевая константа, делённая на *бесконечно малое* число, например: $\frac{5}{0}=\infty$.

– Начинающие изучать математический анализ, часто пытаются устранить мифическую неопределённость $\frac{\infty}{0}$. Но все попытки тщетны, поскольку это определённость: представим «бесконечность делить на ноль» в виде произведения: $\frac{\infty}{0}=\infty\cdot\frac{1}{0}$, и, согласно предыдущему пункту: $\frac{\infty}{0}=\infty\cdot\frac{1}{0}=\infty\cdot\infty=\infty$. Приведу живой пример:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{-x}}\right)=\frac{+\infty}{0}=\lim_{x\to+\infty}(xe^{x})=+\infty\cdot(+\infty)=+\infty$$

***Примечание**: на практике значок $+\infty$ часто записывают без «плюса»: ∞, но, строго говоря, это две разные вещи. Для простоты я буду считать второе обозначение «плюс бесконечностью» и иногда в целях бОльшей чёткости изложения ставить знак «плюс».*

– Число, не равное единице, в *бесконечно большой* степени не является неопределённостью. Например: $3^{+\infty}=+\infty,\ \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}=0$. В частности: $0^{+\infty}=0$.

– Разность двух функций, каждая из которых стремится к нулю, например: $\lim_{x\to 0}(x^2-x)=0-0=0$. Таким образом, неопределённости «ноль минус ноль» тоже не существует – это определённость.

Многие из перечисленных неопределённостей и определённостей уже встречались и ещё неоднократно встретятся на практике.

До нового 2013 года остаются считанные дни, и в качестве подарка я принёс увесистый ящик с петардами:

Порядок роста функции

В данном параграфе будут разобраны пределы с многочленами, многочленами под корнем, когда $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$. Материал вам уже частично знаком, и настала пора разобраться в нём как следует. Давайте научимся находить решение в считанные секунды!

Вычислим следующий предел:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{100}-200x^2-500x\right)$$

На базовом уроке Пределы. Примеры решений я рекомендовал рассуждать не совсем корректным способом: сначала «икс» равно 10, потом, 100, затем 1000, миллион и т.д. до бесконечности. **В чём изъян такого подхода?** Построим данную последовательность:

$$x=10 \quad\Rightarrow\quad f(x)=\frac{10^3}{100}-200\cdot 10^2-500\cdot 10=10-20000-5000=-24990$$

$$x=100 \quad\Rightarrow\quad f(x)=\frac{100^3}{100}-200\cdot 100^2-500\cdot 100=10000-2000000-50000=-2040000$$

$$x=1000 \quad\Rightarrow\quad f(x)=\frac{1000^3}{100}-200\cdot 1000^2-500\cdot 1000=10000000-200000000-500000=-190500000$$

…

Исходя из полученных результатов, складывается стойкое впечатление, что предел стремится к «минус бесконечности», но на поверку **впечатление кардинально ошибочно**:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{100}-200x^2-500x\right)\neq-\infty$$

В этой связи необходимо знать теорию матана, а именно, некоторые выкладки о **порядке роста функции**.

Применительно к нашему примеру можно сказать, что **слагаемое** $\frac{x^3}{100}$ **обладает более высоким порядком роста**, чем сумма $-200x^2-500x$. Иными словами, при *достаточно больших* значениях «икс» слагаемое $\frac{x^3}{100}$ «перетянет» на «плюс бесконечность» всё остальное:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{100}-200x^2-500x\right)=+\infty$$

При небольших значениях «икс» – да, сладкая парочка $-200x^2-500x$ перетягивает канат в сторону «минус бесконечности», что и привело нас к неверному первоначальному выводу. Но уже при $x=1000000$ получается гигантское положительное число $f(x)=9799999500\,000000$.

Если сильно уменьшить первое слагаемое, то от этого ничего не изменится: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{100000000}-200x^2-500x\right)=+\infty$, будет лишь отсрочен тот момент, когда бравая дробь $\frac{x^3}{100000000}$ «вытянет» весь предел на «плюс бесконечность». Не поможет и «усиление противовеса»:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{100000000}-2000000000\,00x^2-5000000000\,00x\right)=+\infty.$$

Нулей можете приписать, сколько хотите (без шуток). Удивительная наука математический анализ – способна низвести любого монстра до мелочи пузатой.

Таким образом, **кубическая функция имеет более высокий порядок роста, чем**:

– квадратичная функция;
– линейная функция;
– функция-константа;
– сумма квадратичной функции, линейной функции и константы (в любых комбинациях).

На простейшем примере поясню геометрический смысл вышесказанного. Представьте графики линейной $f(x)=x$, квадратичной $g(x)=x^2$ и кубической $h(x)=x^3$ функций (см. методичку **Графики и свойства функций**). Легко заметить, что при увеличении значений «икс», кубическая парабола $h(x)=x^3$ взмывает вверх гораздо быстрее и круче, чем парабола и, тем более, прямая.

Аналогичное правило можно сформулировать для любой степени:

Степенная функция данной степени **растёт быстрее**, чем любая степенная функция более низкой степени. **И быстрее**, чем сумма любого количества степенных функций более низкой степени.

Найдём предел $\lim_{x\to+\infty}(-2x^7+300x^6+65x^5-30x^4+25x+125)$

Значение данного предела зависит только от слагаемого $-2x^7$. Всё остальное МЫСЛЕННО отбрасываем: $\lim_{x\to+\infty}(-2x^7)$, и теперь ясно как день, что предел стремится к «минус бесконечности»:

$$\lim_{x\to+\infty}(-2x^7+300x^6+65x^5-30x^4+25x+125)=-\infty$$

То есть, слагаемое $-2x^7$ **более высокого порядка роста**, чем всё остальное.

У «хвоста» $300x^6+65x^5-30x^4+25x+125$ могут быть сколь угодно большие константы, другие знаки, но результат от этого НЕ ИЗМЕНИТСЯ.

Сравнение бесконечно больших функций

На первом уроке мы вычислили три предела с неопределённостью $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=+\infty$$

В перечисленных примерах используется стандартный приём деления числителя и знаменателя на «икс» в старшей степени и всё расписывается подробно. **Но правильный ответ легко выяснить ещё до решения!**

В первом примере $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$ в числителе и знаменателе МЫСЛЕННО отбрасываем все младшие слагаемые:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{3x^2}=\frac{2}{3}.$$

В таких случаях говорят, что **функции числителя и знаменателя обладают одинаковым порядком роста**. Или короче – **числитель и знаменатель одного порядка роста**. Действительно, в данном пределе и вверху, и внизу находятся квадратичные функции. Мир, равенство, братство.

Во втором примере $\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$ аналогично – в числителе и знаменателе МЫСЛЕННО уберём всех малышей:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^3}{5x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{5x}=0$$

Здесь **знаменатель более высокого порядка, чем числитель**. Функция-многочлен 4-й степени растёт быстрее кубической функции и «перетягивает» предел на ноль.

И, наконец, в пределе $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$ карлики тоже идут лесом:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}(2x)=+\infty$$

А в этом примере всё наоборот – **числитель более высокого порядка, чем знаменатель**. Квадратичная функция растёт быстрее линейной и «перетягивает» предел на «плюс бесконечность».

Сделаем краткую теоретическую выжимку. Рассмотрим две <u>произвольные</u> функции $f(x), g(x)$, которые определены на бесконечности.

1) Если $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k$, где k – ненулевая константа, то функции имеют одинаковый порядок роста. Если $k=1$, то функции называют ***эквивалентными*** на бесконечности.

2) Если $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$, то функция $f(x)$ более высокого порядка роста, чем $g(x)$.

3) Если $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, то функция $g(x)$ более высокого порядка роста, чем $f(x)$.

! Примечание*: при $x\to-\infty$ суть выкладок не меняется.*

Подчеркиваю ещё раз, что данные факты относятся к <u>произвольным</u> функциям, определённым на бесконечности, а не только к многочленам. Но у нас ещё непаханое поле полиномов, поэтому, продолжаем работать с ними… да вы не грустите, для разнообразия я добавлю корней =)

<u>Пример 1</u>

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{4x^4+1}}$

В наличии неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$ и приём решения уже знаком – нужно разделить числитель и знаменатель на «икс» в старшей степени.

Старшая степень числителя равна двум. Знаменатель…. Как определить старшую степень, если многочлен под корнем? МЫСЛЕННО отбрасываем все слагаемые, кроме самого старшего: $\sqrt{4x^4}$. Константу тоже отбрасываем и выясняем старшую степень знаменателя: $\sqrt{x^4}=x^2$. Она тоже равна двум. Таким образом, **числитель и знаменатель одного порядка роста, а значит, предел равен конечному числу, отличному от нуля**.

Почему бы сразу не узнать ответ? В числителе и знаменателе МЫСЛЕННО отбрасываем все младшие слагаемые: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{\sqrt{4x^4}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{2x^2}=1$. Таким образом, наши функции не только одного порядка роста, но ещё и ***эквивалентны*** на бесконечности.

Оформляем решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{4x^4+1}}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-4}{x^2}}{\frac{\sqrt{4x^4+1}}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-4}{x^2}}{\frac{\sqrt{4x^4+1}}{\sqrt{x^4}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-4}{x^2}}{\sqrt{\frac{4x^4+1}{x^4}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}^{\to 0}-\frac{4}{x^2}^{\to 0}}{\sqrt{4+\frac{1}{x^4}^{\to 0}}}=\frac{2}{\sqrt{4}}=\frac{2}{2}=1$$

В действительности пару шагов можно пропустить, просто я подробно расписал, как в знаменателе под корень вносится x^2.

Пример 2

Найти предел $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2-x-x^6}}{2x^3+x^2-5x+3}$

Это пример для самостоятельного решения. Постарайтесь провести рассуждения по образцу первого примера. Также заметьте, что здесь неопределённость $\frac{-\infty}{\infty}$, что необходимо отразить в решении. Примерный образец чистового оформления примера в конце урока.

Во избежание недочёта, всегда анализируйте, какая неопределённость получается в пределах рассматриваемого вида. Помимо неопределённости $\frac{\infty}{\infty}$ может встретиться неопределённость $\frac{-\infty}{\infty}, \frac{\infty}{-\infty}$ либо $\frac{-\infty}{-\infty}$. Во всех четырёх случаях числитель и знаменатель необходимо разделить на «икс» в старшей степени.

Пример 3

Найти предел $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{7x^6-3x^2}+\sqrt{x^5+3x+5}}{\sqrt[3]{x^7+1}-x^2-2x}$

Слишком трудный предел? Лёгкий испуг от хлопушки. Главное, грамотно управиться с радикалами.

Проведём предварительный анализ:

Сначала выясним старшую степень числителя. Там сумма двух корней. Под корнем $\sqrt[4]{7x^6-3x^2}$ отбросим младшее слагаемое: $\sqrt[4]{7x^6}$ и уберём константу: $\sqrt[4]{x^6}=x^{\frac{6}{4}}=x^{\frac{3}{2}}$. Под корнем $\sqrt{x^5+3x+5}$ отбросим все младшие слагаемые: $\sqrt{x^5}=x^{\frac{5}{2}}$.

$\frac{5}{2}>\frac{3}{2}$, значит, **старшая степень числителя**: $\frac{5}{2}$.

Разбираемся с нижним этажом. Под корнем $\sqrt[3]{x^7+1}$ отбрасываем константу: $\sqrt[3]{x^7}=x^{\frac{7}{3}}$. У многочлена $-x^2-2x$ старшая степень равна двум.

$\frac{7}{3}>2$, значит, **старшая степень знаменателя**: $\frac{7}{3}$.

Кстати, заметьте, что корень $\sqrt[3]{x^7+1}$ более высокого порядка роста, чем $-x^2-2x$, поэтому весь знаменатель будет стремиться к «плюс бесконечности».

Сравниваем старшие степени: $\frac{5}{2} > \frac{7}{3}$, следовательно, **числитель более высокого порядка роста, чем знаменатель**, и сразу можно сказать, что предел будет равен бесконечности.

Оформляем решение, я распишу его максимально подробно:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{7x^6-3x^2}+\sqrt{x^5+3x+5}}{\sqrt[3]{x^7+1}-x^2-2x}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на «икс» в старшей степени: $x^{\frac{5}{2}}=\sqrt{x^5}$:

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[4]{7x^6-3x^2}+\sqrt{x^5+3x+5}}{\sqrt{x^5}}}{\frac{\sqrt[3]{x^7+1}-x^2-2x}{\sqrt{x^5}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[4]{7x^6-3x^2}}{\sqrt{x^5}}+\frac{\sqrt{x^5+3x+5}}{\sqrt{x^5}}}{\frac{\sqrt[3]{x^7+1}}{\sqrt{x^5}}-\frac{x^2}{\sqrt{x^5}}-\frac{2x}{\sqrt{x^5}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[4]{7x^6-3x^2}}{\sqrt[4]{x^{10}}}+\frac{\sqrt{x^5+3x+5}}{\sqrt{x^5}}}{\frac{\sqrt[3]{x^7+1}}{\sqrt[3]{x^{\frac{15}{2}}}}-\frac{x^2}{\sqrt{x^5}}-\frac{2x}{\sqrt{x^5}}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{\frac{7x^6-3x^2}{x^{10}}}+\sqrt{\frac{x^5+3x+5}{x^5}}}{\sqrt[3]{\frac{x^7+1}{x^{\frac{15}{2}}}}-\frac{x^2}{\sqrt{x^5}}-\frac{2x}{\sqrt{x^5}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{\frac{7}{x^4}^{\to 0}-\frac{3}{x^8}^{\to 0}}+\sqrt{1+\frac{3}{x^4}^{\to 0}+\frac{5}{x^5}^{\to 0}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{x}}^{\to 0}+\frac{1}{\sqrt{x^{15}}}^{\to 0}}-\frac{1}{\sqrt{x}}^{\to 0}-\frac{2}{\sqrt{x^3}}^{\to 0}}=\frac{1}{0}=\infty$$

Действия в числителе прозрачны, закомментирую знаменатель. У дроби $\frac{\sqrt[3]{x^7+1}}{\sqrt{x^5}}$ «разнокалиберные» корни, и квадратный корень $\sqrt{x^5}=x^{\frac{5}{2}}$ необходимо «подогнать» под кубический корень $\sqrt[3]{x^?}=x^{\frac{?}{3}}$. Составим и решим уравнение: $\frac{5}{2}=\frac{?}{3}\Rightarrow ?=\frac{15}{2}$.

Таким образом: $\frac{\sqrt[3]{x^7+1}}{\sqrt{x^5}}=\frac{\sqrt[3]{x^7+1}}{\sqrt[3]{x^{\frac{15}{2}}}}=\sqrt[3]{\frac{x^7+1}{x^{\frac{15}{2}}}}$.

Ну и на всякий случай напоминаю формулу $\frac{x^a}{x^b}=x^a\cdot x^{-b}=x^{a-b}$, по которой выполняется деление:

$$\frac{x^7+1}{x^{\frac{15}{2}}}=\frac{x^7}{x^{\frac{15}{2}}}+\frac{1}{x^{\frac{15}{2}}}=x^{7-\frac{15}{2}}+\frac{1}{\sqrt{x^{15}}}=x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{\sqrt{x^{15}}}=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x^{15}}}$$

Другие члены знаменателя:

$$-\frac{x^2}{\sqrt{x^5}}=-\frac{x^2}{x^{\frac{5}{2}}}=-x^{2-\frac{5}{2}}=-x^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$-\frac{2x}{\sqrt{x^5}}=-\frac{2x}{x^{\frac{5}{2}}}=-2x^{1-\frac{5}{2}}=-2x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{2}{\sqrt{x^3}}$$

Правила действий с корнями можно найти на странице **Математические формулы и таблицы** в методичке *Горячие формулы школьного курса математики*. Также на действиях с радикалами я подробно останавливался при **нахождении производных**.

Пример 4

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{2x^4+x}-3x}{\sqrt{5+3x^2}+\sqrt[3]{x}}$

Это более простой пример для самостоятельного решения. В предложенном примере снова неопределённость $\dfrac{-\infty}{\infty}$ ($3x$ более высокого порядка роста, чем корень $\sqrt[5]{2x^4+x}$).

Если «икс» стремится к «минус бесконечности»

Призрак «минус бесконечности» уже давно витал в этой статье. Рассмотрим пределы с многочленами, в которых $x\to-\infty$. Принципы и методы решения будут точно такими же, что и в первой части урока, за исключением ряда нюансов.

Рассмотрим 4 фишки, которые потребуются для решения практических заданий:

1) Вычислим предел $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^4+x^3+1)$

Значение предела зависит только от слагаемого $2x^4$, поскольку оно обладает самым высоким порядком роста. Если $x\to-\infty$, то ***бесконечно большое по модулю* отрицательное число в ЧЁТНОЙ степени**, в данном случае – в четвёртой, равно «плюс бесконечности»: $(-\infty)^4=+\infty$. Константа («двойка») положительна, поэтому:

$\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^4+x^3+1)=+\infty$

2) Вычислим предел $\lim\limits_{x\to-\infty}(5-3x-x^2)$

Здесь старшая степень опять **чётная**, поэтому: $(-\infty)^2=+\infty$. Но перед x^2 расположился «минус» (отрицательная константа –1), следовательно:

$\lim\limits_{x\to-\infty}(5-3x-x^2)=-\infty$

3) Вычислим предел $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x^3+2x^2-x+4)$

Значение предела зависит только от $4x^3$. Как вы помните из школы, «минус» «выскакивает» из-под нечётной степени, поэтому ***бесконечно большое по модулю* отрицательное число в НЕЧЁТНОЙ степени** равно «минус бесконечности», в данном случае: $(-\infty)^3=-\infty$.

Константа («четвёрка») положительна, значит:

$\lim\limits_{x\to-\infty}(4x^3+2x^2-x+4)=-\infty$

4) Вычислим предел $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^5+x^4+4x^3+x^2-x-7)$

Первый парень на деревне $-2x^5$ снова обладает **нечётной** степенью, кроме того, за пазухой отрицательная константа, а значит: $-2\cdot(-\infty)^5=-2\cdot(-\infty)=+\infty$ Таким образом:

$\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^5+x^4+4x^3+x^2-x-7)=+\infty$.

Пример 5

Найти предел $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+2x^2+x}{3-x+5x^2-2x^3}$

Используя вышеизложенные пункты, приходим к выводу, что здесь неопределённость $\dfrac{-\infty}{\infty}$. Числитель и знаменатель одного порядка роста, значит, в пределе получится конечное число. Узнаем ответ, отбросив всех мальков:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{-2x^3}=-\frac{1}{2}$$

Решение тривиально:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+2x^2+x}{3-x+5x^2-2x^3}=\frac{-\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^3

$$(*)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{x^3+2x^2+x}{x^3}}{\dfrac{3-x+5x^2-2x^3}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\overset{\to0}{\dfrac{2}{x}}+\overset{\to0}{\dfrac{1}{x^2}}}{\overset{\to0}{\dfrac{3}{x^3}}-\overset{\to0}{\dfrac{1}{x^2}}+\overset{\to0}{\dfrac{5}{x}}-2}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$$

Пример 6

Найти предел $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x+3}{-2x^4-x^3+7x^2-1}$

Это пример для самостоятельного решения. Полное решение и ответ в конце урока.

А сейчас, пожалуй, самый тонкий из случаев:

Пример 7

Найти предел $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-x+3}{1+2x+3x^2+4x^3}$

Рассматривая старшие слагаемые, приходим к выводу, что здесь неопределённость $\dfrac{\infty}{-\infty}$. Числитель более высокого порядка роста, чем знаменатель, поэтому сразу можно сказать, что предел равен бесконечности. Но какой бесконечности, «плюс» или «минус»? Приём тот же – в числителе и знаменателе избавимся от мелочи:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{4x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{4}=-\infty$$

Решаем:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-x+3}{1+2x+3x^2+4x^3}=\frac{\infty}{-\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^4

$$(*)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{x^4-x+3}{x^4}}{\dfrac{1+2x+3x^2+4x^3}{x^4}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\overset{\to0}{\dfrac{1}{x^3}}+\overset{\to0}{\dfrac{3}{x^4}}}{\overset{\to+0}{\dfrac{1}{x^4}}+\overset{\to-0}{\dfrac{2}{x^3}}+\overset{\to+0}{\dfrac{3}{x^2}}+\overset{\to-0}{\dfrac{4}{x}}}=\frac{1}{-0}=-\infty$$

Почему $\frac{1}{-0}$?

Проанализируем *бесконечно малые* слагаемые знаменателя:

Если $x \to -\infty$, то слагаемые с **чётными** степенями $\frac{1}{x^4}, \frac{3}{x^2}$ будут стремиться к *бесконечно малым* положительным числам (обозначаются через $+0$), а слагаемые с **нечётными** степенями $\frac{2}{x^3}, \frac{4}{x}$ будут стремиться к *бесконечно малым* отрицательным числам (обозначаются через -0).

Теперь зададимся вопросом, какое из этих четырёх слагаемых $\frac{1}{x^4}, \frac{2}{x^3}, \frac{3}{x^2}, \frac{4}{x}$ будет стремиться к нулю (неважно с каким знаком) *медленнее всего*? Вспомним наивный приём: сначала «икс» равно –10, потом –100, затем –1000 и т.д. Медленнее всего к нулю будет приближаться слагаемое $\frac{4}{x}$. Образно говоря, это самый «жирный» ноль, который «поглощает» все остальные нули. По этой причине на завершающем этапе и появилась запись $\frac{1}{-0}$.

Следует отметить, что знаки *бесконечно малых* слагаемых числителя нас не интересуют, поскольку там нарисовалась осязаемая добротная единичка. Поэтому в числителе я поставил «просто нули». К слову, знаки при нулях не имеют значения и во всех примерах, где в пределе получается конечное число (Примеры №№5,6).

Без измен, на то он и математический анализ, чтобы анализировать =)

Впрочем, о **бесконечно малых функциях** позже, а то вы нажмёте маленький крестик справа вверху =)

Пример 8

Найти предел $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^5+2}{x+1}$

Это пример для самостоятельного решения.

Рекомендую хорошо осмыслить информацию первой части урока, и по возможности сделать перерыв.

Неопределённость «бесконечность минус бесконечность»

Популярная неопределённость $\infty - \infty$ устраняется тремя распространёнными способами:

– приведением выражения под знаком предела к общему знаменателю;

– умножением/делением на сопряжённое выражение;

– преобразованием логарифмов.

Рассмотрим первый случай, о котором я ещё не рассказывал:

Пример 9

Вычислить предел
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-x}-\frac{3}{x^3-1}\right)$$

В данном пределе имеет место неопределённость $\infty-\infty$, и общий алгоритм решения незамысловат: необходимо привести выражение к общему знаменателю, а затем попытаться что-нибудь сократить:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-x}-\frac{3}{x^3-1}\right)=(\infty-\infty)\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x(x-1)}-\frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)\overset{(2)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1-3x}{x(x-1)(x^2+x+1)}\overset{(3)}{=}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{0}{0}\overset{(4)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x^2+x+1)}\overset{(5)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x(x^2+x+1)}=\frac{0}{1\cdot(1+1+1)}=\frac{0}{3}=0$$

(1) Раскладываем знаменатели на множители: в первом знаменателе выносим «икс» за скобки, во втором знаменателе используем формулу разности кубов $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$. Данный шаг можно было пропустить, но этим пришлось бы заниматься потом, и, на мой взгляд, разложение на множители удобнее провести сразу же.

(2) Приводим выражение к общему знаменателю.

(3) Приводим подобные слагаемые в числителе.

Неопределённость $\infty-\infty$ трансформировалась в неопределённость $\frac{0}{0}$, которая стандартно раскрывается разложением числителя и знаменателя на множители.

(4) Знаменатель уже разложен на множители. Раскладываем на множители числитель, в данном случае использована формула $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

(5) Сокращаем числитель и знаменатель на $(x-1)$, устраняя неопределённость.

Как видите, новизны-то особой и нет.

Аналогичное задание для самостоятельного решения:

<u>Пример 10</u>

Вычислить предел
$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{8}{x^2-16}-\frac{1}{x-4}\right)$$

Решение и ответ в конце урока

Второй вид пределов с неопределённостью $\infty-\infty$ представляет собой разность, в которой присутствуют два или один корень:

<u>Пример 11</u>

Вычислить предел
$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2-3x+1})$$

Каноничный образец. Метод решения подробно разобран на уроке **Пределы. Примеры решений**. Необходимо умножить и разделить на сопряженное выражение, чтобы потом воспользоваться формулой $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2-3x+1})=(\infty-\infty)=(*)$$

Умножим и разделим на сопряженное выражение:

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2-3x+1})(\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2-3x+1})}{\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2-3x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+3-(x^2-3x+1)}{\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2-3x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+3-x^2+3x-1}{\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2-3x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+2}{\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2-3x+1}}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Неопределённость $\infty-\infty$ превратилась в неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$. Узнаёте? Такие семечки мы грызли в первом разделе данного урока.

Числитель и знаменатель одного порядка роста, а значит, предел равен конечному числу. Разделим числитель и знаменатель на x:

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x+2}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2-3x+1}}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x+2}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+x+3}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2-3x+1}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{2}{x}^{\to 0}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}^{\to 0}+\frac{3}{x^2}^{\to 0}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}^{\to 0}+\frac{1}{x^2}^{\to 0}}}=\frac{4}{1+1}=\frac{4}{2}=2$$

Не редкость, когда в разности всего один корень, но это не меняет алгоритма решения:

Пример 12

Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$$

Пример 13

Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}(2x-\sqrt{x^3+4x^2})$$

Это пара коротких примеров для самостоятельного решения.

Следует отметить, что пределы рассмотренного типа не обязаны равняться конечному числу, вполне может получиться и бесконечность, причём, как «плюс», так и «минус». Кстати, в примере №13 можно посмотреть на порядок роста членов, чтобы сразу выяснить ответ ;-)

Иногда на практике встречаются пределы-«обманки», в которых неопределённости «бесконечность минус бесконечность» нет вообще, вот простейший пример:

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=+\infty-(-\infty)=+\infty+\infty=+\infty$$

Таким образом, **будьте предельно внимательны: перед решением предела необходимо убедиться, что неопределённость $\infty-\infty$ действительно есть!**

В заключительной части статьи вернёмся к незаслуженно забытым **замечательным пределам**, где рассмотрим, в том числе, третий тип пределов с неопределённостью $\infty-\infty$.

Метод замены переменной в пределе

Весьма ходовой приём решения. Метод замены переменной применяют чаще всего для того, чтобы свести решение к **первому замечательному пределу**, намного реже – к другому замечательному пределу. Рассмотрим пару типовых образцов:

Пример 14

Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg3x}{7x}$$

Решаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg3x}{7x}=\frac{0}{0}=(*)$$

В пределе находится арктангенс, от которого хорошо бы избавиться. Логично и очень удобно превратить «арк» в одну единственную букву. Проведём замену переменной: $t=arctg3x$.

Теперь в пределе нужно выразить всё остальное через «тэ».

Во-первых, выясним, куда будет стремиться новая переменная «тэ»:
Если $x\to 0$, то $(arctg3x)\to 0$, иными словами, новоиспеченная переменная тоже будет стремиться к нулю: $t\to 0$

Осталось в знаменателе выразить «икс» через «тэ». Для этого на обе части равенства $t=arctg3x$ «навешиваем» тангенсы:
$tgt=tg(arctg3x)$

В правой части две взаимно обратные функции уничтожаются:

$tgt=3x$, откуда: $x=\frac{tgt}{3}$

Взмахи волшебной палочки закончены, остальное просто:

$$(*)=\lim_{t\to 0}\frac{t}{7\cdot\frac{tgt}{3}}=\frac{3}{7}\lim_{t\to 0}\frac{t}{tgt}=\frac{3}{7}\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\sin t}{(\cos t)^{\to 1}}}=\frac{3}{7}\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=\frac{3}{7}\cdot 1=\frac{3}{7}$$

Используемые формулы и приёмы решения завершающего этапа очень подробно разобраны в первой части урока **Замечательные пределы**.

Пример 15

Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\arcsin\frac{x}{2}}$$

Это пример для самостоятельного решения. Примерный образец чистового оформления в конце урока.

Ещё пара занятных примеров на тему замены переменной:

Пример 16

Найти предел

$$\lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}$$

При подстановке единицы в предел получается неопределённость $0\cdot\infty$. Замена переменной уже напрашивается, но сначала преобразуем тангенс по формуле $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Действительно, зачем нам тангенс?

$$\lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}=0\cdot\infty=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\cdot\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^{\to 1}}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\frac{0}{0}=(*)$$

Заметьте, что $x\to 1$, поэтому $\sin\frac{\pi x}{2}\to 1$. Если не совсем понятно, посмотрите значения синуса в **тригонометрической таблице**. Таким образом, мы сразу избавляемся от множителя $\sin\frac{\pi x}{2}$, кроме того, получаем более привычную неопределённость 0:0. Хорошо бы ещё и предел у нас стремился к нулю.

Проведем замену: $t=1-x$

Если $x\to 1$, то $t\to 1-1=0$

Под косинусом у нас находится «икс», который тоже необходимо выразить через «тэ».
Из замены $t=1-x$ выражаем: $x=1-t$.

Завершаем решение:

$$(*)\overset{(1)}{=}\lim_{t\to 0}\frac{t}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot(1-t)\right)}\overset{(2)}{=}\lim_{t\to 0}\frac{t}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi t}{2}\right)}\overset{(3)}{=}\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin\frac{\pi t}{2}}\overset{(4)}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi t}{2}\cdot\frac{2}{\pi}}{\sin\frac{\pi t}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

(1) Проводим подстановку

(2) Раскрываем скобки под косинусом.

(3) Используем *формулу приведения* $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$, *формулы приведения* также можно найти в **тригонометрических таблицах**.

(4) Чтобы организовать **первый замечательный предел** $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha}=1$, искусственно домножаем числитель на $\frac{\pi}{2}$ и обратное число $\frac{2}{\pi}$.

Задание для самостоятельного решения:

Пример 17

Найти предел

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}$$

Полное решение и ответ в конце урока.

Это были несложные задачи в своём классе, на практике всё бывает хуже, и, помимо *формул приведения*, приходится использовать самые разные **тригонометрические формулы**, а также прочие ухищрения. В статье **Сложные пределы** я разобрал пару настоящих примеров =)

В канун праздника окончательно проясним ситуацию ещё с одной распространённой неопределённостью:

Устранение неопределённости «единица в степени бесконечность»

Данную неопределённость «обслуживает» **второй замечательный предел**, и во второй части того урока мы очень подробно рассмотрели стандартные примеры решений, которые в большинстве случаев встречаются на практике. Сейчас картина с экспонентами будет завершена, кроме того, заключительные задания урока будут посвящены пределам-«обманкам», в которых КАЖЕТСЯ, что необходимо применить 2-й замечательный предел, хотя это вовсе не так.

Недостаток двух рабочих формул 2-го замечательного предела состоит в том, что аргумент должен стремиться к «плюс бесконечности» либо к нулю. Но что делать, если аргумент стремится к другому числу?

На помощь приходит универсальная формула (которая на самом деле является следствием второго замечательного предела):

Неопределённость 1^{∞} можно устранить по формуле:

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[(u(x)-1)\cdot v(x)]}$$

Где-то вроде уже пояснял, что обозначают квадратные скобки. Ничего особенного, скобки как скобки. Обычно их используют, чтобы чётче выделить математическую запись.

Выделим существенные моменты формулы:

1) Речь идёт **только о неопределённости** 1^{∞} **и никакой другой**.

2) Аргумент «икс» может стремиться к **произвольному значению** (а не только к нулю или $+\infty$), в частности, к «минус бесконечности» либо к **любому** конечному числу.

С помощью данной формулы можно решить все примеры урока **Замечательные пределы**, которые относятся ко 2-му замечательному пределу. Например, вычислим предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}$:

В данном случае $u(x) = 1+\frac{1}{3x}, \quad v(x) = 4x$, и по формуле $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[(u(x)-1)\cdot v(x)]}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^{\infty} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}-1\right)\cdot 4x\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{3x}} = e^{\frac{4}{3}}$$

Правда, делать так не советую, в традициях всё-таки применять «обычное» оформление решения, если его можно применить. Однако **с помощью формулы очень удобно выполнять проверку** «классических» примеров на 2-й замечательный предел.

Всё это хорошо, правильно, но сейчас в кадре более любопытные кадры:

Пример 18

Вычислить предел

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{19-4x}{5x-8}\right)^{\frac{16-3x}{2x-6}}$$

На первом шаге, не устану повторять, подставляем значение «икс» в выражение под знаком предела. А вдруг никакой неопределённости вообще нет? Так бывает! Но не в этот раз. Подставляя «тройку», приходим к выводу, что здесь неопределённость 1^{∞}

Используем формулу $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[(u(x)-1)\cdot v(x)]}$

Чтобы не таскать за собой букву «е» и не мельчить, показатель $\lim\limits_{x\to a}((u(x)-1)\cdot v(x))$ удобнее вычислить отдельно:

В данном случае: $u(x)=\dfrac{19-4x}{5x-8},\quad v(x)=\dfrac{16-3x}{2x-6}$

Таким образом:

$$\lim_{x\to a}((u(x)-1)\cdot v(x))=\lim_{x\to 3}\left(\left(\frac{19-4x}{5x-8}-1\right)\cdot\frac{16-3x}{2x-6}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\left(\frac{19-4x-5x+8}{5x-8}\right)\cdot\frac{16-3x}{2x-6}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(27-9x)\cdot(16-3x)}{(5x-8)\cdot(2x-6)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 3}\frac{-9(x-3)\cdot(16-3x)}{(5x-8)\cdot 2(x-3)}=-\frac{9}{2}\lim_{x\to 3}\frac{(16-3x)}{(5x-8)}=-\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{7}=-\frac{9}{2}$$

С точки зрения техники вычислений всё рутинно: сначала приводим первое слагаемое к общему знаменателю, затем выносим константы и проводим сокращения, избавляясь от неопределённости 0:0.

В результате:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{19-4x}{5x-8}\right)^{\frac{16-3x}{2x-6}}=e^{-\frac{9}{2}}$$

Готово.

Обещанный подарок с разностью логарифмов и неопределённостью $\infty-\infty$:

Пример 19

Вычислить предел

$$\lim_{x\to -\infty}(5-2x)\cdot[\ln(1-x)-\ln(2-x)]$$

Сначала полное решение, потом комменты:

$$\lim_{x\to -\infty}(5-2x)\cdot[\ln(1-x)-\ln(2-x)]=\infty\cdot(\infty-\infty)\overset{(1)}{=}\lim_{x\to -\infty}(5-2x)\cdot\ln\left(\frac{1-x}{2-x}\right)\overset{(2)}{=}\lim_{x\to -\infty}\ln\left(\frac{1-x}{2-x}\right)^{5-2x}\overset{(3)}{=}$$

$$=\ln\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1-x}{2-x}\right)^{5-2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\overset{(4)}{=}\ln\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{2-x-1}{2-x}\right)^{5-2x}\overset{(5)}{=}\ln\lim_{x\to -\infty}\left(1-\frac{1}{2-x}\right)^{5-2x}=1^{\infty}\overset{(6)}{=}$$

$$=\ln e^{\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1-\frac{1}{2-x}-1\right)\cdot(5-2x)}\overset{(7)}{=}\lim_{x\to -\infty}\frac{5-2x}{x-2}=\frac{\infty}{-\infty}\overset{(8)}{=}\lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{5-2x}{x}}{\frac{x-2}{x}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{5}{x}^{\to 0}-2}{1-\frac{2}{x}^{\to 0}}=\frac{-2}{1}=-2$$

(1)-(2) На первых двух шагах используем формулы $\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b},\quad a\ln x = \ln x^a$. У **сложных производных** мы «разваливаем» логарифмы, а здесь, наоборот – их нужно «собрать».

(3) Значок предела перемещаем под логарифм. Это можно сделать, поскольку данный логарифм **непрерывен** на «минус бесконечности». Кроме того, предел же относится к «начинке» логарифма.

(4)-(5) Стандартным приёмом, рассмотренным на базовом уроке про **замечательные пределы**, преобразуем неопределённость $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$ к виду 1^{∞}.

(6) Используем формулу $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[(u(x)-1)\cdot v(x)]}$.

(7) Экспоненциальная и логарифмическая функция – взаимно обратные функции, поэтому и «е» и логарифм можно убрать. Действительно, согласно свойству логарифма: $\ln e^n = n\ln e = n\cdot 1 = n$. Минус перед дробью вносим в знаменатель: $-\frac{1}{2-x} = \frac{1}{-(2-x)} = \frac{1}{x-2}$

(8) Без комментариев =)

Рассмотренный тип предела не такой редкий, примеров 30-40 у себя нашёл.

Пример 20

Вычислить предел

$\lim\limits_{x\to 1}(5x-4)^{\frac{x}{10(x-1)}}$

Это пример для самостоятельного решения. Помимо использования формулы, можно представить предел в виде $\lim\limits_{x\to 1}(1+(5x-5))^{\frac{x}{10(x-1)}}$ и заменой $t = 5x-5$ свести решение к случаю $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$.

В заключение рассмотрим пределы-«фальшивки».

Вернёмся к неопределённости $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$. Данную неопределённость **далеко не всегда** можно свести к неопределённости 1^{∞} и воспользоваться 2-м замечательным пределом либо формулой-следствием. Преобразование осуществимо в том случае, если **числитель и знаменатель основания степени –** **эквивалентные** **бесконечно большие функции**. На пример: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}$.

Отвлечёмся от показателя и вычислим предел основания:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x-2}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}^{\to 0}}{1+\frac{1}{x}^{\to 0}} = 1$$

В пределе получена **единица**, значит, числитель и знаменатель **не просто одного порядка роста, а ещё и эквивалентны**. На уроке [Замечательные пределы. Примеры решений]() мы без проблем свели данный пример к неопределённости 1^{∞} и получили ответ.

Аналогичных пределов можно придумать очень много:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{4x-1}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2-2x+3}\right)^{4x-1}$ и т.д.

Дроби данных примеров объединяет вышеуказанная особенность: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$. **В других случаях при неопределённости** $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$ **2-й замечательный предел не применим**.

Пример 21

Найти пределы

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)^{x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{3x+4}\right)^{3x-1}$

Как ни старайся, а неопределённость $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$ не удастся преобразовать в неопределённость 1^{∞}

Здесь числители и знаменатели оснований **одного порядка роста, но не эквиваленты**: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x+3}=2\neq 1,\quad \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2}{3x+4}=\frac{1}{3}\neq 1$.

Таким образом, 2-й замечательный предел и, тем более формулу, **ПРИМЕНИТЬ НЕЛЬЗЯ**.

! Примечание*: не путайте с Примером №18, в котором числитель и знаменатель основания не эквивалентны. Там готовая неопределённость* 1^{∞}*, здесь же речь идёт о неопределённости* $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$.

Метод решения пределов-«подделок» прост и знакОм: нужно числитель и знаменатель **основания** разделить на «икс» в старшей степени (невзирая на показатель):

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)^{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2x+1}{x}}{\frac{x+3}{x}}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+\frac{1}{x}^{\to 0}}{1+\frac{3}{x}^{\to 0}}\right)^{x}=2^{+\infty}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{3x+4}\right)^{3x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x-2}{x}}{\frac{3x+4}{x}}\right)^{3x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{2}{x}^{\to 0}}{3+\frac{4}{x}^{\to 0}}\right)^{3x-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{+\infty}=0$$

Если числитель и знаменатель основания разного порядка роста, то приём решения точно такой же:

Пример 22

Найти пределы

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x^2+3x+5}\right)^{4x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x-3}\right)^{5x+1}$$

Это короткие примеры для самостоятельного изучения

Иногда **неопределённости может не быть вообще**:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{3x+4}=\left(\frac{0+2}{0+3}\right)^{0+4}=\left(\frac{2}{3}\right)^{4}=\frac{16}{81}$$

Подобные фокусы особенно любимы составителями сборника Кузнецова. Вот почему очень важно ВСЕГДА на первом шаге выполнять подстановку «икса» в выражение под знаком предела!

Завершая тотальное разоблачение пределов, я хочу поздравить всех посетителей сайта с новым 2013 годом! С подарком я успел, и постинг данной статьи осуществлен 31 декабря 2012 года. Вы спросите, а как же моя личная подготовка к празднику? Давно готов =) На протяжении многих лет я занимаюсь стратегическим планированием – чтобы не толкаться в очередях до и не пересекаться с краснокожими после =)

Берегите печень!

Решения и ответы:

Пример 2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2-x-x^6}}{2x^3+x^2-5x+3}=\frac{-\infty}{\infty}=(*)$$

Старшая степень числителя: 2; старшая степень знаменателя: 3.

Разделим числитель и знаменатель на x^3*:*

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[3]{2-x-x^6}}{x^3}}{\frac{2x^3+x^2-5x+3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[3]{2-x-x^6}}{\sqrt[3]{x^9}}}{\frac{2x^3+x^2-5x+3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{2}{x^9}^{\to 0}-\frac{1}{x^8}^{\to 0}-\frac{1}{x^3}^{\to 0}}}{2+\frac{1}{x}^{\to 0}-\frac{5}{x^2}^{\to 0}+\frac{3}{x^3}^{\to 0}}=\frac{0}{2}=0$$

Пример 4

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{2x^4+x}-3x}{\sqrt{5+3x^2}+\sqrt[3]{x}}=\frac{-\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x*:*

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[5]{2x^4+x}-3x}{x}}{\frac{\sqrt{5+3x^2}+\sqrt[3]{x}}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[5]{2x^4+x}}{x}-\frac{3x}{x}}{\frac{\sqrt{5+3x^2}}{x}+\frac{\sqrt[3]{x}}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[5]{2x^4+x}}{\sqrt[5]{x^5}}-\frac{3x}{x}}{\frac{\sqrt{5+3x^2}}{\sqrt{x^2}}+\frac{\sqrt[3]{x}}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{\frac{2x^4+x}{x^5}}-\frac{3x}{x}}{\sqrt{\frac{5+3x^2}{x^2}}+\frac{\sqrt[3]{x}}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{\frac{2}{x}^{\to 0}+\frac{1}{x^4}^{\to 0}}-3}{\sqrt{\frac{5}{x^2}^{\to 0}+3}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}^{\to 0}}=\frac{0-3}{\sqrt{3}+0}=-\frac{3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$$

Практика 19-20. Производная сложной функции. Примеры решений

На данном уроке мы научимся находить **производную сложной функции**. Урок является логическим продолжением занятия **Как найти производную?**, на котором мы разобрали простейшие производные, а также познакомились с правилами дифференцирования и некоторыми техническими приемами нахождения производных. Таким образом, если с производными функций у Вас не очень или какие-нибудь моменты данной статьи будут не совсем понятны, то сначала ознакомьтесь с вышеуказанным уроком. Пожалуйста, настройтесь на серьезный лад – материал не из простых, но я все-таки постараюсь изложить его просто и доступно.

На практике с производной сложной функции приходится сталкиваться очень часто, я бы даже сказал, почти всегда, когда Вам даны задания на нахождение производных.

Смотрим в таблицу на правило (№ 5) дифференцирования сложной функции:

$$(u(v))' = u'(v) \cdot v'$$

Разбираемся. Прежде всего, обратим внимание на запись $u(v)$. Здесь у нас две функции – u и v, причем функция v, образно говоря, вложена в функцию u. Функция такого вида (когда одна функция вложена в другую) и называется сложной функцией.

Функцию u я буду называть **внешней функцией**, а функцию v **– внутренней (или вложенной) функцией**.

! Данные определения не являются теоретическими и не должны фигурировать в чистовом оформлении заданий. Я применяю неформальные выражения «внешняя функция», «внутренняя» функция только для того, чтобы Вам легче было понять материал.

Для того, чтобы прояснить ситуацию, рассмотрим:

Пример 1

Найти производную функции $y = \sin(3x-5)$

Под синусом у нас находится не просто буква «икс», а целое выражение $3x-5$, поэтому найти производную сразу по таблице не получится. Также мы замечаем, что здесь невозможно применить первые четыре правила, вроде бы есть разность, но дело в том, что «разрывать на части» синус нельзя:

$$\cancel{\sin(3x-5) = \sin(3x) - \sin 5}$$

В данном примере уже из моих объяснений интуитивно понятно, что функция $y = \sin(3x-5)$ – это сложная функция, причем многочлен $3x-5$ является внутренней функцией (вложением), а $\sin(3x-5)$ – внешней функцией.

Первый шаг, который нужно выполнить при нахождении производной сложной функции состоит в том, чтобы **разобраться, какая функция является внутренней, а какая – внешней**.

В случае простых примеров вроде $\sin(3x-5)$ понятно, что под синус вложен многочлен $3x-5$. А как же быть, если всё не очевидно? Как точно определить, какая функция является внешней, а какая внутренней? Для этого я предлагаю использовать следующий прием, который можно проводить мысленно или на черновике.

Представим, что нам нужно вычислить на калькуляторе значение выражения $\sin(3x-5)$ при $x=1$ (вместо единицы может быть любое число).

Что мы вычислим в первую очередь? **В первую очередь** нужно будет выполнить следующее действие: $3\cdot 1-5=-2$, поэтому многочлен $3x-5$ и будет внутренней функцией v:

$$y=\sin\underbrace{(3x-5)}_{v}$$

Во вторую очередь нужно будет найти $\sin(-2)$, поэтому синус – будет внешней функцией:

$$y=\underbrace{\boxed{\sin\underbrace{(3x-5)}_{v}}}_{u(v)}$$

После того, как мы **РАЗОБРАЛИСЬ** с внутренней и внешней функциями самое время применить правило дифференцирования сложной функции $(u(v))'=u'(v)\cdot v'$.

Начинаем решать. Из урока **Как найти производную?** мы помним, что оформление решения любой производной всегда начинается так – заключаем всю функцию в скобки и ставим справа вверху штрих:

$$y'=(\sin(3x-5))'$$

Сначала находим производную внешней функции $u'(v)$ (синуса), смотрим на таблицу производных элементарных функций и замечаем, что $(\sin x)'=\cos x$. **Все табличные шаблоны применимы и в том случае, если «икс» заменить любой дифференцируемой функцией** v. В данном примере ВМЕСТО «икс» у нас $3x-5$:

$$u'(v)=\cos(3x-5)$$

Обратите внимание, что внутренняя функция $v=3x-5$ не изменилась, её мы не трогаем.

Ну и совершенно очевидно, что $v'=(3x-5)'$

Результат применения формулы $(u(v))'=u'(v)\cdot v'$ в чистовом оформлении выглядит так:

$$y'=(\sin(3x-5))'=\cos(3x-5)\cdot(3x-5)'$$

Далее мы берем производную внутренней функции, она очень простая:

$$y'=(\sin(3x-5))'=\cos(3x-5)\cdot(3x-5)'=\cos(3x-5)\cdot(3-0)$$

Постоянный множитель обычно выносят в начало выражения:

$$y'=(\sin(3x-5))'=\cos(3x-5)\cdot(3x-5)'=\cos(3x-5)\cdot(3-0)=$$
$$=3\cos(3x-5)$$

Готово

Если осталось какое-либо недопонимание, перепишите решение на бумагу и еще раз прочитайте объяснения.

Пример 2

Найти производную функции $y = \cos 2x$

Это пример для самостоятельного решения (ответ в конце урока).

Пример 3

Найти производную функции $y = (2x+1)^5$

Как всегда записываем:
$y' = ((2x+1)^5)'$

Разбираемся, где у нас внешняя функция, а где внутренняя. Для этого пробуем (мысленно или на черновике) вычислить значение выражения $(2x+1)^5$ при $x = 1$. Что нужно выполнить в первую очередь? В первую очередь нужно сосчитать чему равно основание: $2 \cdot 1 + 1 = 3$, значит, многочлен $(2x+1)$ – и есть внутренняя функция:

$$y = (\underbrace{2x+1}_{v})^5$$

И, только потом выполняется возведение в степень 3^5, следовательно, степенная функция – это внешняя функция:

$$y = \underbrace{\boxed{(\underbrace{2x+1}_{v})^5}}_{u(v)}$$

Согласно формуле $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$, сначала нужно найти производную от внешней функции, в данном случае, от степени. Разыскиваем в таблице нужную формулу: $(x^n)' = nx^{n-1}$. Повторяем еще раз: **любой табличный шаблон справедлив не только для «икс», но и для любой дифференцируемой функции** v. Таким образом, результат применения правила дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ следующий:

$$y' = ((2x+1)^5)' = 5 \cdot (2x+1)^4 \cdot (2x+1)'$$

Снова подчеркиваю, что когда мы берем производную от внешней функции $u'(v)$, внутренняя функция v у нас не меняется:

$$5 \cdot (\underbrace{2x+1}_{\text{не меняется}})^4$$

Теперь осталось найти совсем простую производную от внутренней функции и немного «причесать» результат:

$$y' = ((2x+1)^5)' = 5 \cdot (2x+1)^4 \cdot (2x+1)' =$$
$$= 5 \cdot (2x+1)^4 \cdot (2+0) = 10 \cdot (2x+1)^4$$

Готово.

Пример 4

Найти производную функции $y = \dfrac{1}{(x^2-1)^7}$

Это пример для самостоятельного решения (ответ в конце урока).

Для закрепления понимания производной сложной функции приведу пример без комментариев, попробуйте самостоятельно разобраться, порассуждать, где внешняя и где внутренняя функция, почему задания решены именно так?

<u>Пример 5</u>

а) Найти производную функции $y = arctg\sqrt{x}$

$$y' = (arctg\sqrt{x})' = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot(\sqrt{x})' = \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

б) Найти производную функции $y = \sqrt{arctgx}$

$$y' = (\sqrt{arctgx})' = \frac{1}{2\sqrt{arctgx}}\cdot(arctgx)' = \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{arctgx}}$$

<u>Пример 6</u>

Найти производную функции $y = \sqrt[3]{x^2 + tgx + 15}$

Здесь у нас корень, а для того, чтобы продифференцировать корень, его нужно представить в виде степени $x^{\frac{a}{b}}$. Таким образом, сначала приводим функцию в надлежащий для дифференцирования вид:

$$y' = (\sqrt[3]{x^2 + tgx + 15})' = \left((x^2 + tgx + 15)^{\frac{1}{3}}\right)'$$

Анализируя функцию, приходим к выводу, что сумма трех слагаемых – это внутренняя функция, а возведение в степень – внешняя функция. Применяем правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v)\cdot v'$:

$$y' = (\sqrt[3]{x^2 + tgx + 15})' = \left((x^2 + tgx + 15)^{\frac{1}{3}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(x^2 + tgx + 15)^{-\frac{2}{3}}\cdot(x^2 + tgx + 15)'$$

Степень снова представляем в виде радикала (корня), а для производной внутренней функции применяем простое правило дифференцирования суммы:

$$y' = (\sqrt[3]{x^2 + tgx + 15})' = \left((x^2 + tgx + 15)^{\frac{1}{3}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(x^2 + tgx + 15)^{-\frac{2}{3}}\cdot(x^2 + tgx + 15)' =$$

$$= \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x^2 + tgx + 15)^2}}\cdot((x^2)' + (tgx)' + (15)') =$$

$$= \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x^2 + tgx + 15)^2}}\cdot\left(2x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

Готово. Можно еще в скобках привести выражение к общему знаменателю и записать всё одной дробью. Красиво, конечно, но когда получаются громоздкие длинные производные – лучше этого не делать (легко запутаться, допустить ненужную ошибку, да и преподавателю будет неудобно проверять).

Пример 7

Найти производную функции $y = \dfrac{5}{\sqrt[5]{x + \ln x}}$

Это пример для самостоятельного решения (ответ в конце урока).

Интересно отметить, что иногда вместо правила дифференцирования сложной функции можно использовать правило дифференцирования частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, но такое решение будет выглядеть ~~как извращение~~ необычно. Вот характерный пример:

Пример 8

Найти производную функции $y = -\dfrac{1}{\cos x}$

Здесь можно использовать правило дифференцирования частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, но гораздо выгоднее найти производную через правило дифференцирования сложной функции:

$$y' = \left(-\frac{1}{\cos x}\right)'$$

Подготавливаем функцию для дифференцирования – выносим минус за знак производной, а косинус поднимаем в числитель:

$$y' = \left(-\frac{1}{\cos x}\right)' = -\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -(cos^{-1} x)'$$

Косинус – внутренняя функция, возведение в степень – внешняя функция.
Используем наше правило $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$:

$$y' = \left(-\frac{1}{\cos x}\right)' = -\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -(cos^{-1} x)' =$$
$$= -(-1) \cdot cos^{-2} x \cdot (\cos x)'$$

Находим производную внутренней функции, косинус сбрасываем обратно вниз:

$$y' = \left(-\frac{1}{\cos x}\right)' = -\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -(cos^{-1} x)' =$$
$$= -(-1) \cdot cos^{-2} x \cdot (\cos x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

Готово. В рассмотренном примере важно не запутаться в знаках. Кстати, попробуйте решить его с помощью правила $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, ответы должны совпасть.

<u>Пример 9</u>

Найти производную функции $y = \frac{1}{\arccos^2 x}$

Это пример для самостоятельного решения (ответ в конце урока).

До сих пор мы рассматривали случаи, когда у нас в сложной функции было только одно вложение. В практических же заданиях часто можно встретить производные, где, как матрёшки, одна в другую, вложены сразу 3, а то и 4-5 функций.

<u>Пример 10</u>

Найти производную функции $y = 7^{\arcsin^2 x}$

Разбираемся во вложениях этой функции. Пробуем вычислить выражение $7^{\arcsin^2 x}$ с помощью подопытного значения $x = 1$. Как бы мы считали на калькуляторе?

Сначала нужно найти $\arcsin 1$, значит, арксинус – самое глубокое вложение:

$$7^{\arcsin^2 x}$$

Затем этот арксинус единицы следует возвести в квадрат $\arcsin^2 1$:

$$7^{\boxed{\arcsin^2 x}}$$

И, наконец, семерку возводим в степень $7^{\arcsin^2 1}$:

$$7^{\boxed{\arcsin^2 x}}$$

То есть, в данном примере у нас три разные функции и два вложения, при этом, самой внутренней функцией является арксинус, а самой внешней функцией – показательная функция.

Начинаем решать

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})'$$

Согласно правилу $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ сначала нужно взять производную от внешней функции. Смотрим в таблицу производных и находим производную показательной функции: $(a^x)' = a^x \ln a$. Только вот ВМЕСТО «икс» у нас функция $\arcsin^2 x$, и мы действуем по шаблону. Итак, результат применения правила дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ следующий:

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})' = 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot (\arcsin^2 x)'$$

Под штрихом у нас снова сложная функция! Но она уже проще. Легко убедиться, что внутренняя функция – арксинус, внешняя функция – степень. Согласно правилу дифференцирования сложной функции сначала нужно взять производную от степени:

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})' = 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot (\arcsin^2 x)' =$$
$$= 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot 2\arcsin^1 x \cdot (\arcsin x)'$$

Теперь все просто, находим по таблице производную арксинуса и немного «причесываем» результат:

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})' = 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot (\arcsin^2 x)' =$$
$$= 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot 2\arcsin^1 x \cdot (\arcsin x)' =$$
$$= 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot 2\arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= \frac{2\ln 7 \cdot 7^{\arcsin^2 x} \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Готово.

Пример 11

Найти производную функции $y = \ln^2(2x-1)$

Это пример для самостоятельного решения (ответ в конце урока).

На практике правило дифференцирования сложной функции почти всегда применяется в комбинации с остальными правилами дифференцирования.

Пример 12

Найти производную функции $y = -2xe^{3x} + (x^2 - 4x + 3)\sin 7x$

$$y' = (-2xe^{3x} + (x^2 - 4x + 3)\sin 7x)'$$

Сначала используем правило дифференцирования суммы $(u \pm v)' = u' \pm v'$, заодно в первом слагаемом выносим постоянный множитель за знак производной по правилу $(Cu)' = Cu'$:

$$y' = (-2xe^{3x} + (x^2 - 4x + 3)\sin 7x)' = -2(xe^{3x})' + ((x^2 - 4x + 3)\sin 7x)'$$

В обоих слагаемых под штрихами у нас находится произведение функций, следовательно, нужно дважды применить правило $(uv)' = u'v + uv'$:

$$y' = (-2xe^{3x} + (x^2 - 4x + 3)\sin 7x)' = -2(xe^{3x})' + ((x^2 - 4x + 3)\sin 7x)' =$$
$$= -2((x)'e^{3x} + x(e^{3x})') + (x^2 - 4x + 3)'\sin 7x + (x^2 - 4x + 3)(\sin 7x)'$$

Замечаем, что под некоторыми штрихами у нас находятся сложные функции e^{3x}, $\sin 7x$. Каламбур, но это простейшие из сложных функций, и при определенном опыте решения производных Вы будете легко находить их устно.
А пока запишем подробно, согласно правилу $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$, получаем:

$$y' = (-2xe^{3x} + (x^2-4x+3)\sin 7x)' = -2(xe^{3x})' + ((x^2-4x+3)\sin 7x)' =$$
$$= -2((x)'e^{3x} + x(e^{3x})') + (x^2-4x+3)'\sin 7x + (x^2-4x+3)(\sin 7x)' =$$
$$= -2(1\cdot e^{3x} + x\cdot e^{3x}\cdot(3x)') + (2x-4+0)\sin 7x + (x^2-4x+3)\cos 7x\cdot(7x)' =$$
$$= -2(e^{3x} + 3xe^{3x}) + (2x-4)\sin 7x + 7(x^2-4x+3)\cos 7x$$

Готово.

! Обратите внимание на приоритет (порядок) применения правил: <u>правило дифференцирования сложной функции применяется в последнюю очередь</u>.

<u>Пример 13</u>

Найти производную функции $y = \sqrt{x^2+4}\cdot\ln(\sin x)$

Это пример для самостоятельного решения (ответ в конце урока).

Пожалуй, хватит на сегодня. Хочется еще привести пример с дробью и сложной функцией, но такой пример принципиально ничем не отличается от двух последних заданий, единственное отличие – вместо правила $(uv)' = u'v + uv'$ применяем правило $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Для закрепления темы рекомендую статью **Сложные производные. Логарифмическая производная**. Помимо рассмотрения дополнительных примеров, есть и новый материал! После изучения третьего урока вы будете очень уверенно себя чувствовать в ходе дальнейшего изучения математического анализа. Если задания покажутся слишком трудными (у всех разный уровень подготовки), то сначала посетите страницу **Простейшие типовые задачи с производной**, там рассмотрено ещё порядка 15 производных.

Желаю успехов!

<u>Ответы:</u>

Пример 2: $y' = -2\sin 2x$

Пример 4: $y' = -\frac{14x}{(x^2-1)^8}$ *Указание: перед дифференцированием необходимо перенести степень наверх, сменив у показателя знак* $\frac{1}{x^a} = x^{-a}$.

Пример 7: $y' = -\frac{1}{\sqrt[5]{(x+\ln x)^6}}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)$

Пример 9: $y' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arccos^3 x}$

Пример 11: $y' = \frac{4\ln(2x-1)}{2x-1}$

Пример 13: $y' = \frac{x\ln(\sin x)}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{\sqrt{x^2+4}\cdot\cos x}{\sin x}$