CHƯƠNG 4.

MỘT SỐ BÀI TOÁN CƠ BẢN

ThS.Trần Đình Sơn – Email: tdson@vku.udn.vn– Mobile: 0903591955

CHƯƠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN CƠ BẢN

4.1. BÀI TOÁN ĐẾM

4.1.1. Giới thiệu
4.1.2. Các phương pháp giải
4.1.3. Giải công thức truy hồi

4.1. BÀI TOÁN ĐẾM

4.1.1. Giới thiệu

- Bài toán đếm là bài toán quen thuộc, chúng ta hay giải quyết trong thực tế cuộc sống.
- Dạng bài toán đếm: Từ thông tin bài toán đã cho, hãy cho biết số lượng của đối tượng nào đó.
- Ví dụ: các bài toán trong phần nguyên lý cộng, nguyên lý nhân, các cấu hình tổ hợp cơ bản là các bài toán đếm.

4.1.2. Các phương pháp giải

- Đếm trực tiếp các đối tượng
- Tính toán
  + Nguyên lý cộng
  + Nguyên lý nhân
  + Các cấu hình tổ hợp cơ bản
- Giải công thức truy hồi

4.1.2. Các phương pháp giải

- Lưu ý: Tùy mức độ phức tạp của từng bài toán, ta có thể sử dụng riêng biệt từng phương pháp hay kết hợp chúng với nhau.

- Ví dụ: Hãy cho biết từ 2 bit $0, 1$ có thể tạo được bao nhiêu chuỗi bit có độ dài 10 mà trong đó bắt đầu bằng 11 VÀ kết thúc bằng 000?

Giải:

Với thông tin bài toán đã cho, dễ dàng thấy rằng mỗi chuỗi bit cần tạo tương ứng là một chỉnh hợp lặp chập 5 của 2 phần tử. Do đó số lượng chuỗi bit cần tạo theo yêu cầu là $\overline{A_2^3} = 2^5 = 32$.

- Ví dụ: Hãy cho biết từ 2 bit $0, 1$ có thể tạo được bao nhiêu chuỗi bit có độ dài 10 mà trong đó bắt đầu bằng 11 HOẶC kết thúc bằng 000?

4.1.2. Các phương pháp giải

- Ví dụ: Hãy cho biết từ 2 bit $0, 1$ có thể tạo được bao nhiêu chuỗi bit có độ dài 10 mà trong đó bắt đầu bằng 11 HOẶC kết thúc bằng 000?

Giải:

Xét tập hợp các chuỗi bit có độ dài 10 được tạo thành từ 2 bit $0, 1$.

Gọi B là tập hợp các chuỗi bit bắt đầu bằng 11 và D là tập hợp các chuỗi bit kết thúc bằng 000.

Lúc đó $\mathrm{B} \cap D$ là tập hợp các chuỗi bit bắt đầu bằng 11 và kết thúc bằng 000,và $\mathrm{B} \cup D$ là tập hợp các chuỗi bit bắt đầu bằng 11 hoặc kết thúc bằng 000.

Do đó số lượng chuỗi bit tạo được theo yêu cầu là $|B \cup D|$.

Ta có: $|B \cup D| = |B| + |D| - |B \cap D|$

$$= \overline{A_2^8} + \overline{A_2^7} - \overline{A_2^5}$$

$$= 2^8 + 2^7 - 2^5 = 256 + 128 - 32 = 96$$

Vậy số lượng chuỗi bit tạo được theo yêu cầu là 96.

ThS.Trần Đình Sơn – Email: tdson@vku.udn.vn– Mobile: 0903591955

4.1.3. Giải công thức truy hồi

- Ví dụ công thức truy hồi (đệ quy):

+ Định nghĩa giai thừa:

Trực tiếp: $n! = 1x2x3x \ldots (n-1)xn \text{ với } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ và } 0! = 1$

Truy hồi: $n! = (n-1)!\, xn \text{ với } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ và } 0! = 1$

+ Định nghĩa tổng:

Trực tiếp: $S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \text{ với } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ và } S_0 = 0$

Truy hồi: $S_n = S_{n-1} + \frac{1}{n} \text{ với } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ và } S_0 = 0$

+ Định nghĩa truy hồi dãy Fibonaci: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ với } n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 2$ $\text{và } F_0 = F_1 = 1$

+ Định nghĩa công thức truy hồi: $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} \text{ với } n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 2$ $\text{và } a_0 = 1,\ a_1 = 3$

4.1.3. Giải công thức truy hồi

- Ví dụ tính toán theo công thức truy hồi (đệ quy):

Cho công thức truy hồi $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ *với* $n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 2$

và $a_0 = 1,\ a_1 = 3$

+ Tìm a_3:

$$a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 3(3a_1 - 2a_0) - 2a_1 = 7a_1 - 6a_0 = 7x3 - 6x1 = 15$$

+ Tìm a_7:

$$a_7 = 3a_6 - 2a_5 = 3(3a_5 - 2a_4) - 2a_5 = 7a_5 - 6a_4$$
$$= 7(3a_4 - 2a_3) - 6a_4 = 15a_4 - 14a_3 = 15(3a_3 - 2a_2) - 14a_3$$
$$= 31a_3 - 30a_2 = 31(3a_2 - 2a_1) - 30a_2 = 63a_2 - 62a_1$$
$$= 63(3a_1 - 2a_0) - 62a_1 = 127a_1 - 126a_0 = 127x3 - 126x1 = 255$$

+ Tìm a_{10}:

$$a_{10} = 3a_9 - 2a_8 = 3(3a_8 - 2a_7) - 2a_8 = 7a_8 - 6a_7 = \cdots$$

+ Tìm a_{1000}:

$$a_{1000} = 3a_{999} - 2a_{998} = 3(3a_{998} - 2a_{997}) - 2a_{998} = 7a_{998} - 6a_{997}$$
$$= \cdots$$

4.1.3. Giải công thức truy hồi

- Cho công thức truy hồi tuyến tính thuần nhất hệ số hằng bậc hai có dạng:

  (1) $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ *với* $n\in\mathbb{Z}^+$, $n\geq 2$, c_1, c_2 *là các hằng số thực*

  và $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$ *với* b_0, b_1 *là các hằng số thực.*

- Giải công thức truy hồi (1) là tìm một biểu diễn trực tiếp (rõ ràng, tường minh) cho a_n.

- Ta sử dụng phương pháp dựa vào phương trình đặc trưng để giải công thức truy hồi.

- Phương trình đặc trưng của (1) có dạng: (2) $r^2 - c_1r - c_2=0$ *với ẩn là r.*

  + **Định lý 1**. Nếu (2) có 2 nghiệm phân biệt r_1, r_2 thì a_n có dạng:

  (3) $a_n = \alpha_1r_1^n + \alpha_2r_2^n$ *với* α_1, α_2 *là các hằng số thực.*

  + **Định lý 2**. Nếu (2) có nghiệm kép r_0 thì a_n có dạng:

  (4) $a_n = \alpha_1r_0^n + \alpha_2nr_0^n$ *với* α_1, α_2 *là các hằng số thực.*

- Để tìm α_1, α_2 ta thay $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, r_1, r_2 vào (3), thay $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, r_0 vào (4). Sau đó ta tìm được biểu diễn của a_n.

4.1.3. Giải công thức truy hồi

- Giải công thức truy hồi tuyến tính thuần nhất hệ số hằng bậc hai có dạng:

  (1) $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ *với* $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$, c_1, c_2 *là các hằng số thực*

  và $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$ *với* b_0, b_1 *là các hằng số thực.*

- Các bước thực hiện:

  1) Xác định phương trình đặc trưng của công thức truy hồi (1).

  2) Giải phương trình đặc trưng để tìm nghiệm r.

* Trường hợp phương trình đặc trưng có 2 nghiệm phân biệt r_1, r_2:

  3) Do đó a_n có dạng: (3) $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ với α_1, α_2 là các hằng số thực.

  4) Thay $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, r_1, r_2 vào (3), ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = b_0 \\ r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 = b_1 \end{cases}$$

  5) Giải hệ phương trình trên ta tìm được α_1, α_2.

  6) Thay α_1, α_2, r_1, r_2 vào (3), ta tìm được biểu diễn của a_n.

4.1.3. Giải công thức truy hồi

- Các bước thực hiện:

1) …

2) …

* Trường hợp phương trình đặc trưng có nghiệm kép r_0:

3) Do đó a_n có dạng: (4) $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$ với α_1, α_2 là các hằng số thực.

4) Thay $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, r_0 vào (4), ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} \alpha_1 = b_0 \\ r_0\alpha_1 + r_0\alpha_2 = b_1 \end{cases}$$

5) Giải hệ phương trình trên ta tìm được α_1, α_2.

6) Thay α_1, α_2, r_0 vào (4), ta tìm được biểu diễn của a_n.

- Lưu ý: Nên thực hiện rút gọn biểu diễn của a_n để có biểu diễn gọn gàng (nếu có thể).

4.1.3. Giải công thức truy hồi

- Ví dụ: Giải công thức truy hồi $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ với $n\in\mathbb{Z}^+$, $n\geq 2$ và $a_0=1$, $a_1=3$

Giải:

Phương trình đặc trưng của công thức truy hồi đã cho có dạng:

$r^2 - 3r + 2 = 0$ với ẩn là r.

Giải phương trình đặc trưng ta tìm được 2 nghiệm phân biệt $r_1=1$ và $r_2=2$.

Do đó a_n có dạng: (*) $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ với α_1, α_2 là các hằng số thực.

Thay $a_0=1$, $a_1=3$, $r_1=1$, $r_2=2$ vào (*), ta thu được hệ phương trình:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 3 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta tìm được $\alpha_1=-1$ và $\alpha_2=2$.

Thay $\alpha_1=-1$, $\alpha_2=2$, $r_1=1$, $r_2=2$ vào (*), ta tìm được $a_n = (-1)x1^n + 2x2^n$.

Vậy $a_n = 2^{n+1} - 1$.

4.1.3. Giải công thức truy hồi

- Ví dụ: Giải công thức truy hồi $b_n = -b_{n-2} + 2b_{n-1}$ với $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$
và $b_0=4$, $b_1=3$

Giải:

Phương trình đặc trưng của công thức truy hồi đã cho có dạng:

$r^2 - 2r + 1 = 0$ với ẩn là r.

Giải phương trình đặc trưng ta tìm được nghiệm kép $r_0=1$.

Do đó b_n có dạng: (*) $b_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$ với α_1, α_2 là các hằng số thực.

Thay $b_0=4$, $b_1=3$, $r_0=1$ vào (*), ta thu được hệ phương trình:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 4 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 3 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta tìm được $\alpha_1=4$ và $\alpha_2=-1$.

Thay $\alpha_1=4$, $\alpha_2=-1$, $r_0=1$ vào (*), ta tìm được $b_n = 4 \text{x} 1^n + (-1) \text{x} n \text{x} 1^n$.

Vậy $b_n = 4 - n$.

4.1.3. Giải công thức truy hồi

- Ví dụ: Giải công thức truy hồi: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ với $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$
và $F_0 = F_1 = 1$

Giải:

Phương trình đặc trưng của công thức truy hồi đã cho có dạng: $r^2 - r - 1 = 0$ với ẩn là r.

Giải phương trình đặc trưng ta tìm được 2 nghiệm phân biệt $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Do đó F_n có dạng: (*) $F_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ với α_1, α_2 là các hằng số thực.

Thay $F_0=1$, $F_1=1$, $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ vào (*), ta thu được hệ phương trình: $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\alpha_2 = 1 \end{cases}$

Giải hệ phương trình trên ta tìm được $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} x \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $\alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} x \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Thay $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} x \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} x \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ vào (*), ta tìm được

$F_n = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} x \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) x \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} x \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) x \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Vậy $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} x \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$.

Bài tập:

1. Hòa có 6 quyển sách Toán khác nhau và Bình có 8 quyển sách Văn khác nhau. Mỗi bạn chọn ra 4 quyển sách của mình và trao đổi với nhau. Hãy cho biết 2 bạn có bao nhiêu cách trao đổi sách như vậy?
2. Từ một tập thể các nhà khoa học gồm 3 nhà toán học và 9 nhà kinh tế học, người ta thành lập một phái đoàn gồm 7 người mà trong đó có ít nhất 1 nhà toán học. Hãy cho biết có thể thành lập được bao nhiêu phái đoàn như vậy?
3. Một đội công nhân có 14 người gồm 8 nam và 6 nữ.
   a. Từ đội công nhân nói trên có thể thành lập được bao nhiêu tổ công tác gồm 4 nam và 2 nữ?
   b. Trong đội công nhân có vợ chồng anh Thanh và chị Bình vì có con nhỏ nên không thể tham gia cùng một tổ công tác. Hãy cho biết có thể thành lập được bao nhiêu tổ công tác như trên mà có chiếu cố đến tình cảnh này?
4. Có bao nhiêu hoán vị không lặp của n phần tử mà trong đó 2 phần tử đã cho không đứng cạnh nhau?

Bài tập:

5. Có bao nhiêu cách phân phối 7 đồ vật khác nhau vào 3 cái hộp khác nhau mà trong đó hộp thứ nhất chứa 2 đồ vật, hộp thứ hai chứa 3 đồ vật và hộp thứ ba chứa 2 đồ vật?

6. Trong một cái hộp đựng 5 quả cầu đỏ và 4 quả cầu xanh.

   a. Có bao nhiêu cách lấy ra 3 quả cầu?

   b. Có bao nhiêu cách lấy ra 3 quả cầu mà trong đó có 2 quả cầu đỏ và 1 quả cầu xanh?

   c. Có bao nhiêu cách lấy ra 3 quả cầu mà trong đó ít nhất có 2 quả cầu đỏ?

   d. Có bao nhiêu cách lấy ra 3 quả cầu mà trong đó nhiều nhất có 2 quả cầu đỏ?

7. Trên giá sách có 25 quyển sách của 22 tác giả, trong đó có 4 quyển cùng 1 tác giả, 21 quyển còn lại của 21 tác giả khác nhau. Hãy cho biết có bao nhiêu cách sắp xếp 25 quyển sách đó sao cho sách của cùng một tác giả đứng cạnh nhau?

Bài tập:

8. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể tạo được bao nhiêu số nguyên dương có 5 chữ số mà các chữ số khác nhau và trong đó phải có chữ số 5?

9. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể tạo được bao nhiêu số nguyên dương chẵn có 5 chữ số mà các chữ số khác nhau?

10. Giải các công thức truy hồi sau:

$a_n = -3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ với $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ và $a_0=2$, $a_1=3$

$b_n = 2b_{n-2} - b_{n-1}$ với $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ và $b_0=3$, $b_1=1$

$c_n = -6c_{n-1} - 9c_{n-2}$ với $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ và $c_0=1$, $c_1=2$

$d_n = 6d_{n-2} + d_{n-1}$ với $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ và $d_0=2$, $d_1=4$

$e_n = -e_{n-2} - 2e_{n-1}$ với $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ và $e_0=4$, $e_1=3$

$f_n = -4f_{n-1} - 4f_{n-2}$ với $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ và $f_0=3$, $f_1=4$

$g_n = -3g_{n-2} - 4g_{n-1}$ với $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ và $g_0=1$, $g_1=5$

$h_n = 5h_{n-1} - 6h_{n-2}$ với $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ và $h_0=5$, $h_1=3$

$k_n = -6k_{n-2} - 5k_{n-1}$ với $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ và $k_0=1$, $k_1=2$

4.2. BÀI TOÁN TỒN TẠI

4.2.1. Giới thiệu
4.2.2. Các phương pháp giải

4.2. BÀI TOÁN TỒN TẠI

4.2.1. Giới thiệu

- Bài toán tồn tại cũng là là bài toán quen thuộc, chúng ta hay giải quyết trong thực tế cuộc sống.
- Dạng bài toán tồn tại: Từ thông tin bài toán đã cho, hãy chứng tỏ sự tồn tại của đối tượng nào đó.
  + Phát biểu: Cho A. Hãy chứng tỏ B.
  + Công thức: $A \Rightarrow B$
- Ví dụ: các bài toán trong phần nguyên lý tồn tại là các bài toán tồn tại.
- Ví dụ: Bài toán về 36 sĩ quan

  Có một lần người ta triệu tập từ 6 trung đoàn, mỗi trung đoàn 6 sĩ quan thuộc 6 cấp bậc khác nhau (thiếu úy, trung úy, thượng úy, đại úy, thiếu tá, trung tá) về tham gia duyệt binh ở sư đoàn bộ. Hỏi rằng có thể xếp 36 sĩ quan này thành một đội ngũ hình vuông sao cho trong mỗi hàng ngang cũng như mỗi hàng dọc đều có đại diện của cả 6 trung đoàn và của cả 6 cấp bậc.

4.2.1. Giới thiệu

- Ví dụ: Bài toán hình lục giác thần bí

Có 19 hình lục giác được xếp như hình dưới. Hãy điền 19 số nguyên từ 1 đến 19 vào 19 hình lục giác sao cho mỗi hình 1 số nguyên khác nhau và tổng các số nguyên trong các hình lục giác theo 6 hướng sắp xếp của các hình lục giác đều bằng nhau.

4.2.2. Các phương pháp giải

- Chỉ ra đối tượng cụ thể
- Đếm các đối tượng:
  + Quy về bài toán đếm
  + Nếu số lượng khác 0 thì kết luận đối tượng tồn tại, ngược lại kết luận đối tượng không tồn tại.
- Suy diễn
  + Nguyên lý tồn tại
  + Các phương pháp suy diễn
    - Modus ponens
    - Modus tollens
    - Phản chứng
- Lưu ý: Tùy mức độ phức tạp của từng bài toán, ta có thể sử dụng riêng biệt từng phương pháp hay kết hợp chúng với nhau.

4.2.2. Các phương pháp giải

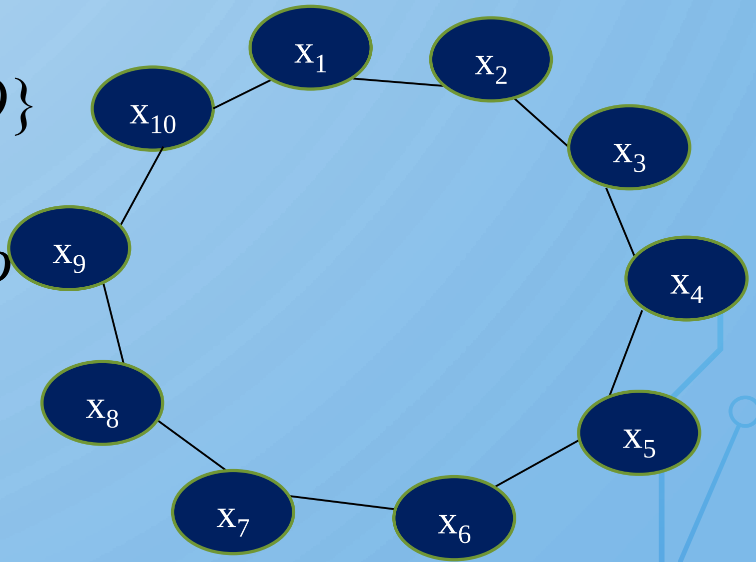
- Ví dụ: Cho một hình thập giác đều. Ở mỗi đỉnh của hình thập giác ghi một số nguyên từ 0 đến 9 sao cho đỉnh khác nhau thì ghi số nguyên khác nhau. Hãy chứng tỏ rằng, có 3 đỉnh liên tiếp sao cho tổng các số ở 3 đỉnh đó lớn hơn 13.

Giải:

Gọi $x_1, x_2, \dots, x_9, x_{10}$ lần lượt là các số nguyên được ghi ở mỗi đỉnh của hình thập giác.

Lúc đó $x_1, x_2, \dots, x_9, x_{10} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ và $x_i \neq x_j$ với i $\neq j$.

Giả sử *không phải có 3 đỉnh liên tiếp sao cho tổng các số ở 3 đỉnh đó lớn hơn 13*, tức là mọi 3 đỉnh liên tiếp đều có tổng các số ở 3 đỉnh đó nhỏ hơn hay bằng 13.



4.2.2. Các phương pháp giải

Giải:

Suy ra
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 13 \\ x_2 + x_3 + x_4 \le 13 \\ x_3 + x_4 + x_5 \le 13 \\ x_4 + x_5 + x_6 \le 13 \\ x_5 + x_6 + x_7 \le 13 \\ x_6 + x_7 + x_8 \le 13 \\ x_7 + x_8 + x_9 \le 13 \\ x_8 + x_9 + x_{10} \le 13 \\ x_9 + x_{10} + x_1 \le 13 \\ x_{10} + x_1 + x_2 \le 13 \end{cases}$$

Như vậy 3x$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10}) \le 130$

Do đó 3x45 $\le$ 130, tức là 135 $\le$ 130. Rõ ràng đây là điều vô lý!

Vậy có 3 đỉnh liên tiếp sao cho tổng các số ở 3 đỉnh đó lớn hơn 13.

4.2.2. Phương pháp giải

- Ví dụ: Có 30 học sinh làm bài thi viết chính tả. Kết quả chấm cho thấy có 1 học sinh có 14 lỗi chính tả, các học sinh còn lại có số lỗi chính tả ít hơn. Hãy chứng tỏ rằng, có ít nhất 3 học sinh có số lỗi chính tả bằng nhau.

Giải:

Cho 15 ngăn kéo đánh số thứ tự từ 0 đến 14. Mỗi học sinh được "đặt vào" ngăn kéo có số thứ tự bằng số lỗi chính tả học sinh đó có.

Rõ ràng ngăn kéo số 14 "chứa" duy nhất 1 học sinh.

Giả sử *không phải có ít nhất 3 học sinh có số lỗi chính tả bằng nhau*, tức là có nhiều nhất 2 học sinh có số lỗi chính tả bằng nhau.

Suy ra mỗi ngăn kéo có số thứ tự từ 0 đến 13 "chứa" nhiều nhất 2 học sinh.

Như vậy số lượng học sinh làm bài thi viết chính tả có nhiều nhất là

$1 + 13x2 = 27$. Đây là điều vô lý!

Vậy có ít nhất 3 học sinh có số lỗi chính tả bằng nhau.

Bài tập:

1. Cho 8 đoạn thẳng, mỗi đoạn thẳng có độ dài lớn hơn 5cm và nhỏ hơn 100cm. Hãy chứng tỏ rằng, có 3 đoạn thẳng trong 8 đoạn thẳng đã cho tạo thành một hình tam giác?
2. Trong một khu tập thể có 123 người sinh sống. Tổng số tuổi của 123 người này là 3813. Hãy chứng tỏ rằng, có 100 người sinh sống ở khu tập thể sao cho tổng số tuổi của họ không nhỏ hơn 3100.
3. Trên một giá sách có 22 ngăn sách. Ta thấy có 1 ngăn sách chứa 10 cuốn sách và các ngăn còn lại chứa sách với số lượng ít hơn. Hãy chứng tỏ rằng, có ít nhất 3 ngăn sách chứa sách với số lượng bằng nhau (kể cả số lượng bằng 0).
4. Trong sinh học ta biết rằng, trên đầu của mỗi người có không đến 200000 sợi tóc. Hãy chứng tỏ rằng, trong số những người sống ở Hà Nội có ít nhất 11 có số lượng sợi tóc trên đầu bằng nhau.

4.3. BÀI TOÁN LIỆT KÊ

4.3.1. Giới thiệu
4.3.2. Các phương pháp giải
4.3.3. Phương pháp sinh

4.3. BÀI TOÁN LIỆT KÊ

4.3.1. Giới thiệu

- Bài toán liệt kê cũng là bài toán quen thuộc, chúng ta hay giải quyết trong thực tế cuộc sống.
- Dạng bài toán liệt kê: Từ thông tin bài toán đã cho, hãy liệt kê các dạng cụ thể của đối tượng nào đó.
- Như vậy, nếu bài toán liệt kê được giải quyết thì đồng thời ta cũng biết được sự tồn tại của đối tượng và số lượng đối tượng.
- Việc giải bài toán liệt kê đòi hỏi thời gian thưc hiện rất lớn, do đó máy tính điện tử là công cụ rất hữu hiệu để hỗ trợ giả quyết bài toán liệt kê.

-Ví dụ: Hãy liệt kê tất cả các hoán vị không lặp của n người.

+ Gọi T_n là thời gian thực hiện tất cả các hoán vị không lăp của n người, ta có $T_n = n!$. Giả sử n người hoàn thành 1 hoán vị trong thời gian 1 giây.

+ Ta có: $T_1 = 1! = 1, T_2 = 2! = 2, T_3 = 3! = 6, T_4 = 4! = 24, \ldots$

$$T_{10} = 10! = 3628800, \ldots, T_{15} = 15! = 1307670000000000$$

+ Như vậy 10 người thực hiện 42 ngày, còn 15 người thực hiện ………?

4.3.2. Phương pháp giải

- Xây dựng các thuật toán (chủ yếu để lập trình nhờ máy tính trợ giúp)
- Các thuật toán khi thực hiện liệt kê cần bảo đảm:
  + Không lặp lại các dạng cụ thể đã liệt kê
  + Không bỏ sót dạng cụ thể nào cả
- Lưu ý: Việc xây dựng thuật toán để giải quyết bài toán liệt kê là việc phức tạp vì phụ thuộc vào đặc trưng thông tin của đối tượng cần liệt kê.
- Tuy nhiên có một số phương pháp tổng quát có thể áp dụng cho bài toán liệt kê:
  + Phương pháp sinh
  + Phương pháp quay lui

4.3.3. Phương pháp sinh

- Dựa trên cơ sở quan hệ thứ tự trên tập hợp đã cho
- Các bước thực hiện:

1) Gọi X là tập hợp các dạng cụ thể của đối tượng cần liệt kê. Ở bước này, ta phân tích thông tin bài toán để biết được dạng biểu diễn tổng quát của các phần tử của X, nhưng chưa biết các phần tử cụ thể của X (dạng nêu tính chất).

2) Định nghĩa trên X quan hệ thứ tự toàn phần $\Re$.

3) Tìm phần tử nhỏ nhất (phần tử đầu tiên) a và phần tử lớn nhất (phần tử cuối cùng) b của X theo quan hệ thứ tự toàn phần $\Re$.

4) Xây dựng thuật toán cho phép sinh ra phần tử liền sau phần tử đã biết của X.

5) Áp dung thuật toán đã xây dựng ở trên để thực hiện việc sinh ra các phần tử liền sau phần tử đã biết của X bắt đầu từ a cho đến khi sinh ra b.

4.3.3. Phương pháp sinh

- Ví dụ: Hãy liệt kê tất cả các chuỗi bit có độ dài n được tạo thành từ 2 bít 0,1.

Giải:

1) Gọi X là tập hợp tất cả các chuỗi bit có độ dài n được tạo thành từ 2 bít 0,1. Lúc đó $\forall x \in X, x$ có dạng $x_1x_2 \dots x_{n-1}x_n$ với $x_i \in \{0,1\}, i = \overline{1,n}$.

2) Định nghĩa trên X quan hệ thứ tự $\Re$:

+ Trước tiên ta định nghĩa: $\forall x \in X$, ta gọi $p(x)$ là số nguyên không âm tương ứng với biểu diễn nhị phân $x_1x_2 \dots x_{n-1}x_n$ (với $x_i \in \{0,1\}, i = \overline{1,n}$) của x.

+ Định nghĩa quan hệ $\Re$ trên X như sau:

$$\Re = \{(x,y) \in XxX | p(x) \leq p(y)$$

Ta chứng minh được $\Re$ là một quan hệ thứ tự toàn phần trên X.

3) + Phần tử nhỏ nhất (phần tử đầu tiên) a của X: $00 \dots 00$ (n bit 0)

+ Phần tử lớn nhất (phần tử cuối cùng) b của X: $11 \dots 11$ (n bit 1)

4.3.3. Phương pháp sinh

Giải:

4) Xây dựng thuật toán cho phép sinh ra phần tử liền sau phần tử đã biết của X:

Gọi $x \in X$ có biểu diễn $x_1x_2 \dots x_{n-1}x_n$ (với $x_i \in \{0,1\}, i = \overline{1,n}$) là phần tử đã biết. Lúc đó phần tử y $\in X$ có biểu diễn $y_1y_2 \dots y_{n-1}y_n$ (với $y_i \in \{0,1\}, i = \overline{1,n}$) là phần tử liền sau x được xác định theo quy tắc như sau:

+ Tìm x_i đầu tiên (từ phải sang trái) trong $x_1x_2 \dots x_{n-1}x_n$ sao cho x_i=0 .

+ Đặt: y_i =1; $y_j = x_j$ với j $< i$; $y_j = 0$ với j $> i$.

5) Áp dung thuật toán đã xây dựng ở trên để thực hiện việc sinh ra các phần tử liền sau phần tử đã biết của X bắt đầu từ $00 \dots 00$ cho đến khi sinh ra $11 \dots 11$. Ví dụ n = 4: 0000 0100 1000 1100

0001 0101 1001 1101

0010 0110 1010 1110

0011 0111 1011 1111

4.3. BÀI TOÁN LIỆT KÊ

Bài tập:

1. Hãy liệt kê tất cả các tập hợp con gồm k phần tử của tập hợp gồm n số tự nhiên $T = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.
2. Hãy liệt kê tất cả các hoán vị không lặp của n phần tử thuộc tập hợp gồm n số tự nhiên $T = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.