ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG VIỆT - HÀN
Vietnam - Korea University of Information and Communication Technology

Xác suất thống kê

Thời lượng

Nội dung

Mục tiêu

Kiểm tra, đánh giá

Tài liệu tk giảng dạy&học tập

1. Thời lượng

Lý thuyết, bài tập: 2TC = 30 tiết

2. Nội dung

Chương 1. Biến cố và xác suất

Chương 2. Biến ngẫu nhiên và Luật phân phối XS

XÁC SUẤT

Chương 3. Lý thuyết chọn mẫu

Chương 4. Lý thuyết ước lượng và kiểm định

THỐNG KÊ

3. Mục tiêu

- Về xác suất:

+ Một số quy tắc và công thức tính xác suất như quy tắc cộng, quy tắc nhân, công thức xác suất có điều kiện, công thức xác suất đầy đủ, công thức Bayes và công thức Bernoulli.

+ Biến ngẫu nhiên và các luật phân phối xác suất thông dụng: hàm phân phối và luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên, các tham số đặc trưng cơ bản của biến ngẫu nhiên, các luật phân phối xác suất như: phân phối đơn giản, phân phối nhị thức, phân phối Poisson, phân phối chuẩn.

- Về thống kê:

+ Lý thuyết chọn mẫu: các phương pháp chọn mẫu và các cách biểu diễn mẫu, đặc biệt là các tham số đặc trưng của mẫu.

+ Lý thuyết ước lượng và kiểm định: các phương pháp, tiêu chuẩn ước lượng, khoảng ước lượng đối xứng, kiểm định giá trị trung bình, phương sai.

Tài liệu tk giảng dạy&học tập

[1] Tống Đình Quỳ, *Giáo trình Xác suất thống kê, NXB ĐH Quốc gia HN, 2004*

[2] Đậu Thế Cấp , *Xác suất thống kê*, NXB Giáo Dục.

[3] PTS. Trần Lộc Hùng , *Lý thuyết xác suất và thống kê toán học*, (1998), NXB Giáo Dục.

[4] Đào Hữu Hồ, *Xác suất thống kê*, NXB ĐH và THCN-Hà Nội. 1996.

[5] Đặng Hùng Thắng, Bài tập Xác suất, NXB GD, 2010

Chương 1: Biến cố và xác suất

1.1 Giải tích tổ hợp

1.2 Phép thử và biến cố

1.3 Xác suất của biến cố

1.4 Các công thức tính xác suất

1.1. GIẢI TÍCH TỔ HỢP

1.1.1 Các quy tắc đếm cơ bản

1.1.2 Giải tích tổ hợp

1.1.1. Các quy tắc đếm cơ bản

1. QUY TẮC CỘNG

Một công việc được phân làm n phương án hoàn toàn độc lập. Phương án 1 có m_1 cách thực hiện, phương án 2 có m_2 cách thực hiện,…, phương án n có m_n cách thực hiện. Khi đó tổng số cách thực hiện công việc đó là $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ cách.

Ví dụ

1. Trong một kho có 3 loại sản phẩm (loại 1, 2, 3), số lượng mỗi loại là 20, 45, 72. Chọn một sản phẩm bất kỳ từ kho, hỏi có bao nhiêu cách chọn?

2. Đi từ Đà Nẵng vào TPHCM có thể đi bằng các phương tiện: ôtô, tàu hỏa, máy bay. Mỗi ngày có 10 chuyến ôtô, 5 chuyến tàu hỏa và 3 chuyến bay. Hỏi có bao nhiêu cách đi trừ ĐN vào TPHCM trong một ngày?

2. QUY TẮC NHÂN

Một công việc được chia làm n công đoạn liên tiếp để hoàn thành:

- Công đoạn 1: Có m_1 cách thực hiện
- Công đoạn 2: Có m_2 cách thực hiện

……………………………………..

- Công đoạn n: Có m_n cách thực hiện

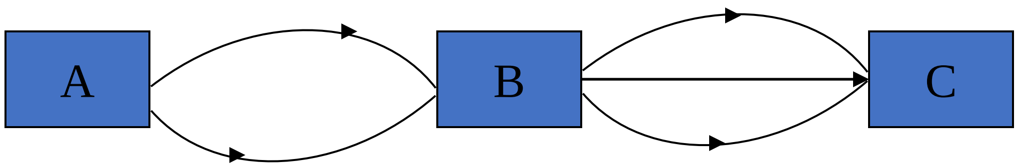
Vậy số cách thực hiện công việc là:

$$\boxed{m_1.m_2\ldots.m_n}$$

Ví dụ:

1. Một người có 5 cái áo, 7 cái quần, hỏi có bao nhiêu cách mặc đồ?

2. Có hai con đường đi từ A sang B, có ba con đường đi từ B sang C. Vậy có mấy cách đi từ A sang C.



3. Dùng các chữ số 0, 1, 2,…, 9 để viết các số x gồm 3 chữ số. Hỏi:

a. Có mấy số x?

b. Có mấy số x với 3 chữ số khác nhau?

c. Có mấy số x > 600

3. QUY TẮC BÙ TRỪ

Một công việc được phân làm 2 phương án (không độc lập với nhau). Khi đó ta không thể dùng quy tắc cộng để tính số các cách thực hiện công việc đã cho, do 2 phương án có thể có những cách trùng lặp nhau. Khi đó, số cách thực hiện công việc đã cho là:

Lấy tổng số cách thực hiện ở 2 trường hợp trừ đi số các cách trùng lặp.

Chú ý

1. Quy tắc bù trừ (cho 2 hoặc 3 trường hợp) có thể mô tả dưới dạng tập hợp như sau:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

2. Quy tắc cộng là trường hợp đặc biệt của quy tắc bù trừ.

1.1.1. Các quy tắc đếm cơ bản

Ví dụ :

Một lớp có 40 sv, đăng kí ít nhất một trong 2 môn thể thao: bóng đá và cầu lông. Có 30 sv đăng kí bóng đá, 25 sv đăng kí cầu lông. Hỏi có bao nhiêu sv đăng kí cả 2 môn.

1.1.2. GIẢI TÍCH TỔ HỢP

Bài toán:

Phân biệt cách chọn k phần tử từ tập hợp có n phần tử? (n phần tử này được coi là khác nhau mặc dù bản chất của chúng có thể giống nhau).

HD:

1. Chọn 1 lần ra k phần tử:

- Nếu không để ý thứ tự: **Tổ hợp**
- Nếu để ý thứ tự: **Chỉnh hợp**

2. Chọn k lần, mỗi lần 1 phần tử:

- Không hoàn lại: như **chỉnh hợp**
- Hoàn lại: **chỉnh hợp lặp**

Ví dụ

Có 10 sv được phân thành 3 nhóm. Nhóm I: 4 sv, nhóm II: 3 sv, nhóm III: 3 sv. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp?

Ví dụ

1. Có 5 bức tranh và 7 cái móc treo tường. Hỏi có bao nhiêu cách treo 5 bức tranh (mỗi móc chỉ treo 1 bức tranh)?

Giải:

Việc treo 5 bức tranh vào 7 cái móc chính là việc chọn có thứ tự 5 cái móc treo từ 7 cái móc.

Vậy số cách treo 5 bức tranh là $A_7^5 = 2520$ cách

2. Cho tập hợp A={1, 2, 3, 4, 5}. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau thuộc tập A?

Ví dụ

Cho tập hợp A={1, 2, 3, 4, 5}. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số đều thuộc tập A?

Bài tập:

1. Trong một lô sản phẩm có 20 bóng đèn (trong đó có 6 bóng 110v còn lại là 220v). Hỏi:
   a. Có bao nhiêu cách lấy ra 4 bóng đèn?
   b. Có bao nhiêu cách lấy ra 4 bóng đèn mà trong đó có 2 bóng 110v?
   c. Có bao nhiêu cách lấy ra 4 bóng đèn mà trong đó có ít nhất 2 bóng 110v?
2. Một hộp kín có 2 bi trắng, 4 bi đỏ hoàn toàn giống nhau về hình dạng và trọng lượng. Lấy lần lượt từng bi trong hộp (không hoàn lại) cho đến viên cuối cùng. Có bao nhiêu cách lấy bi sao cho

   a. Lần cuối lấy được bi đỏ.

   b. Lần thứ 5 và lần thứ 6 là bi đỏ.

Các hàm thông dụng trong Excel:

combin(n,k) = C_n^k

fact(n)= n!

permut(n,k) = A_n^k

power(n,k)= n^k

1.2. PHÉP THỬ VÀ BIẾN CỐ

1.2.

- *Phép thử ngẫu nhiên*
- *Biến cố*
- *Các phép toán trên các biến cố*
- *Quan hệ giữa các biến cố*

1.2.1. Phép thử ngẫu nhiên

* Phép thử NN là một thí nghiệm hay hành động mà:
+ Kết quả của nó không thể biết trước;
+ Có thể xác định được tập hợp các kết quả có thể xảy ra.

* Tập hợp các kết quả có thể xảy ra gọi là không gian mẫu, thường ký hiệu là: **Ω**

Ví dụ :

a. Hành động "tung một đồng xu" là một phép thử.
Không gian mẫu: $\Omega = \{S, N\}$

b. Gieo một con súc sắc là một phép thử.
Không gian mẫu: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

1.2.2. Biến cố

Là tập con của không gian mẫu Ω, kí hiệu là: A, B, C, …

Ví dụ :

Xét phép thử gieo con xúc xắc.

Không gian mẫu Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

A = {2, 4, 6}: biến cố xuất hiện mặt chẵn

B = {1, 2, 3,4}: biến cố xuất hiện mặt không vượt quá 4

Chú ý:

1. Mỗi phần tử của không gian mẫu gọi là một biến cố sơ cấp.

2. Biến cố không chứa kết quả nào của phép thử hay biến cố không xảy ra gọi là biến cố không chắc chắn, kí hiệu $\varnothing$.

3. Biến cố chứa mọi kết quả của phép thử gọi là biến cố chắc chắn, kí hiệu Ω

1.2.3. Các phép toán trên các biến cố

1. Hợp các biến cố

* Hợp của 2 biến cố A, B, kí hiệu $A \cup B$, là biến cố: "A hoặc B xảy ra"

* Hợp của k biến cố: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$, là biến cố:
"có ít nhất một trong k biến cố $A_1, A_2, \ldots A_k$ xảy ra"

Ví dụ :

Người thợ săn bắn hai viên đạn vào một con thú.

Gọi A_1: "viên đạn thứ nhất trúng con thú"

A_2: "viên đạn thứ hai trúng con thú"

A: "con thú trúng đạn"

thì $A = A_1 \cup A_2$

2. Giao các biến cố

* Giao (hay tích) của 2 biến cố A và B, kí hiệu $A \cap B$ hay AB, là biến cố: "Cả A và B cùng xảy ra"

* Giao của k biến cố: $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k$, là biến cố: "Tất cả k biến cố $A_1, A_2, \ldots A_k$ đều xảy ra"

Ví dụ :

Một người dự thi lấy bằng lái xe.

Gọi A: "người đó thi đạt vòng lí thuyết"

B: "người đó thi đạt vòng thực hành"

C: "người đó lấy được bằng lái xe"

thì $C = A \cap B$

3. Biến cố đối:

Cho biến cố A, biến cố đối của A, kí hiệu là $\overline{A}$, là biến cố "không xảy ra A", tức là

$$\begin{cases} A \cap \overline{A} = \phi \\ A \cup \overline{A} = \Omega \end{cases}$$

Trong thực hành, để đơn giản ta xem $\overline{A}$ là biến cố "không phải A"

Ví dụ :

Ba xạ thủ A, B, C cùng nổ súng vào một mục tiêu.
A: " có ít nhất 1 xạ thủ bắn trúng". Xác định biến cố đối của biến cố A.

Bài tập :

Ba sinh viên A, B, C cùng thi môn XSTK

Gọi A là biến cố: "sv A thi đạt"

B là biến cố: "sv B thi đạt"

C là biến cố: "sv C thi đạt"

a. Hãy mô tả các biến cố sau:

$$ABC,\ A \cup B \cup C,\quad \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C},\quad \overline{A}BC$$

b. Hãy biểu diễn các biến cố sau theo 3 biến cố A, B, C:

D: "Có ít nhất hai sv thi đạt"

E: "Có nhiều nhất 1 sv thi đạt"

F: "Có duy nhất sv A thi đạt"

Giải:

a. ABC: "Cả 3 sv thi đỗ"

$A \cup B \cup C$: "có ít nhất 1 sv thi đỗ"

$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}:$ "cả 3 sv thi trượt"

$\overline{A}BC:$ " chỉ có sv A thi trượt"

b. $D = AB \cup BC \cup CA$

$$= AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC \cup ABC$$

$$E = \overline{A}\,\overline{B} \cup \overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{C}\,\overline{A}$$

$$= A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C \cup \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$$

$$F = A\overline{B}\,\overline{C}$$

1.2.4. Quan hệ giữa các biến cố

1. Xung khắc

A và B là hai biến cố xung khắc nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra, tức là $A \cap B = \varnothing$.

Họ các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là họ xung khắc nếu một biến cố bất kì trong họ xảy ra thì các biến cố còn lại không xảy ra, tức là $A_iA_j = \varnothing, \ \forall i, j \ (i \neq j)$

2. Độc lập

A và B là hai biến cố độc lập nếu A xảy ra không ảnh hưởng đến việc B xảy ra và ngược lại.

3. Họ đầy đủ

Họ các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là đầy đủ nếu:

* $A_iA_j = \varnothing, \ \forall i, j \ (i \neq j)$

* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Ví dụ :

Xét phép thử gieo một con súc sắc. Gọi A_i là biến cố mặt i xuất hiện.

Ta có:

A_1, A_2 xung khắc

A_1, A_2 , A_3, A_4 là một họ xung khắc

A_1, A_2 , A_3, A_4, A_5, A_6 là độc lập

A_1, A_2 , A_3, A_4, A_5, A_6 là một họ đầy đủ

1.3. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

Xác suất của một biến cố là một con số đo khả năng xảy ra biến cố đó khi thực hiện phép thử.

1.3.1. Định nghĩa cổ điển của xác suất

• **Định nghĩa:** Gọi T là phép thử có số kết quả hữu hạn và đồng khả năng. Gọi Ω là không gian mẫu và A là một biến cố bất kỳ. Khi đó xác suất của biến cố A được ký hiệu và xác định như sau:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\textbf{Số phần tử của A}}{\textbf{Số phần tử của không gian mẫu}}$$

Ví dụ

1. Chọn ngẫu nhiên một viên bi trong một bình có 3 bi xanh, 4 bi đỏ, 5 bi vàng. Tính xác suất để chọn được bi đỏ.

2. Một hộp chứa 4 bi đỏ và 9 bi trắng. Lấy ngẫu nhiên 3 bi từ hộp đó.

a. Tìm xác suất để 3 bi lấy ra đều màu đỏ?

b. Tìm xác suất để trong 3 bi lấy ra có ít nhất một bi đỏ?

3. Một hộp chứa 10 sản phẩm, trong đó có 4 phế phẩm. Lấy 2 sản phẩm theo 2 cách lấy sau:

a. Lấy cùng lúc 2 sản phẩm.

b. Lấy lần lượt có hoàn lại từng sản phẩm.

Tìm xác suất để lấy được 2 chính phẩm theo 2 cách lấy trên

4. Một hộp kín có 2 bi trắng, 4 bi đỏ hoàn toàn giống nhau về hình dạng và trọng lượng. Lấy ngẫu nhiên lần lượt từng bi trong hộp (không hoàn lại) cho đến viên cuối cùng.

a. Tính xác suất để viên bi chọn ra lần cuối là bi đỏ.

b. Tính xác suất để viên bi chọn ra lần thứ 5 và lần thứ 6 là bi đỏ.

Bài tập

1. Gọi T là phép thử gieo một con súc sắc cân đối đồng chất. Tính xác suất của biến cố A: “số chấm xuất hiện chia hết cho 3”.

2. Trong một kho hàng có 30 sản phẩm tốt và 5 sản phẩm xấu. Lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm từ kho hàng. Tính xác suất để trong 3 sản phẩm lấy ra có ít nhất một sản phẩm tốt?

3. Một lớp học có 20 sinh viên nam và 10 sinh viên nữ. Chọn ngẫu nhiên 5 sinh viên trong lớp. Tính xác suất để:

a. Chọn được 2 sinh viên nữ

b. Có ít nhất một sinh viên nữ

c. Có nhiều nhất là 3 nữ

d. Cả 5 sinh viên đều là nữ

Hạn chế của định nghĩa cổ điển xác suất:

* Trong một số trường hợp thực tế, ta không thể tính được |A|.

Ví dụ:

Một lô hàng có N sphẩm sữa hộp, để kiểm tra chất lượng của lô hàng, người ta lấy ngẫu nhiên ra n (n < N) sphẩm. Hỏi xác suất để lấy được phế phẩm?

Vậy để biết lô hàng có bao nhiêu phế phẩm ta phải kiểm tra mở nắp từng hộp sữa, điều này không thể được.

* Trong thực tế có nhiều phép thử vô hạn các biến cố và biến cố không đồng khả năng

1.3.2. Định nghĩa thống kê của xác suất

Định nghĩa (quan điểm thống kê):
Xét biến cố A. Thực hiện phép thử n lần thì có m lần xuất hiện biến cố A. Khi đó tỉ số $f_n = m/n$ được gọi là *tần suất* xuất hiện A. Khi số phép thử tăng lên vô hạn, tần suất f_n sẽ tiến đến một hằng số xác định. Hằng số này được gọi là *xác suất* của biến cố A. Vì thế, trong thực tế khi số phép thử n lớn, ta có thể xem tần suất f_n như là xác suất của hiện tượng A.

Ví dụ:

Có 1000 người có triệu chứng A đến cơ sở y tế để khám bệnh. Kết quả có thấy 700 mắc bệnh X. Ta có $f = 700/1000 = 70\%$. *Do đó, ta có cơ sở dự đoán nếu một người có triệu chứng A thì xác suất mắc bệnh X xấp xỉ 70%.*

1.3.3. Một số tính chất của xác suất

Xác suất của biến cố dù được định nghĩa theo cách nào thì cũng đều có các tính chất sau đây:

i. $0 \le P(A) \le 1$, với A là biến cố bất kỳ

ii. $P(\Omega) = 1;\ P(\phi) = 0$

iii. Nếu $A \subset B$ thì $P(A) \le P(B)$

1.3.4. Một số quy tắc tính xác suất

Ví dụ

Xác suất để một xạ thủ bắn bia trúng điểm 10 là 0,1; trúng điểm 9 là 0,2; trúng điểm 8 là 0,25; nhỏ hơn 8 là 0,45.

Xạ thủ bắn 1 viên đạn. Tìm xác suất để xạ thủ được ít nhất 9 điểm.

1.3.4. Một số quy tắc tính xác suất

QUY TẮC CỘNG

Nhắc lại: Hai biến cố được gọi là xung khắc nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra và ngược lại.

- Nếu A, B là hai biến cố xung khắc thì:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là n biến cố xung khắc từng đôi một thì :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

Ví dụ 1:

Xác suất để một xạ thủ bắn bia trúng điểm 10 là 0,1; trúng điểm 9 là 0,2; trúng điểm 8 là 0,25; nhỏ hơn 8 là 0,45.

Xạ thủ bắn 1 viên đạn. Tìm xác suất để xạ thủ được ít nhất 9 điểm.

Ví dụ 2:

Trong 1 hộp có 10 sản phẩm, trong đó có 8 chính phẩm và 2 phế phẩm. Tìm xác suất để khi lấy ngẫu nhiên ra 6 sản phẩm từ hộp thì có không quá 1 phế phẩm.

Đặc biệt:

1. Với A là một biến cố bất kỳ, ta có

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

Ý nghĩa: Trong nhiều bài toán việc tính xác suất của biến cố A phức tạp hơn việc tính xác suất của biến cố đối. Khi đó ta áp dụng công thức trên.

2. Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là một hệ đầy đủ các biến cố thì:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$$

3. Nếu A, B là hai biến cố bất kỳ thì:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

1.3.4. Một số quy tắc tính xác suất

Quy tắc nhân và tính độc lập của các biến cố

Nhắc lại: Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra biến cố này không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia.

Cho A và B là hai biến cố độc lập với nhau. Khi đó ta có quy tắc nhân xác suất như sau:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Chú ý: Nếu A và B độc lập thì $\bar{A}$ và B, A và $\bar{B}$, $\bar{A}$ và $\bar{B}$ là các cặp biến cố độc lập.

Ví dụ 1:

Cho hai hộp, mỗi hộp có 10 viên bi. Hộp thứ 1 có 1 viên bi đỏ và 9 viên bi xanh, hộp thứ 2 có 2 viên bi đỏ và 8 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên mỗi hộp 1 viên bi.

a/ Tính xác suất để hai viên bi lấy ra đều màu đỏ

b/ Tính xác suất để hai viên bi lấy ra có 1 đỏ, 1 xanh.

Ví dụ:

Ba xạ thủ A, B, C cùng nổ súng vào một mục tiêu với xác suất trúng đích của từng xạ thủ lần lượt là 0,4; 0,5; 0,7

Tính xác suất để có ít nhất 1 xạ thủ bắn trúng.

Bài tập:

Hai xạ thủ mỗi người bắn mỗi phát đạn vào bia. Xác suất bắn trúng đích của người thứ 1 là 0,9, của người thứ 2 là 0,7. Giả sử hai người bắn độc lập với nhau, tính xác suất để:

a) Cả hai đều bắn trúng đích
b) Có đúng 1 viên đạn trúng bia.
c) Bia bị trúng đạn

1.4 . CÁC CÔNG THỨC TÍNH XÁC SUẤT

1.4.1 Công thức xác suất có điều kiện

1.4.2 Công thức xác suất đầy đủ

1.4.3 Công thức Bayes

1.4.4 Dãy phép thử Bernoulli

1.4.1. Công thức xác suất có điều kiện

1. Định nghĩa

Cho A, B là hai biến cố của cùng một phép thử.

Nếu A, B là hai biến cố không độc lập thì xác suất của biến cố A sẽ thay đổi tùy theo biến cố B có xảy ra hay không.

Khi đó, xác suất của biến cố A được tính với điều kiện *biến cố B đã xảy ra*, được gọi là xác suất có điều kiện của A,

ký hiệu là P(A/B).

Ví dụ:

1. Trong hộp kín có 10 thẻ ATM: 6 thẻ của ACB, 4 thẻ Agribank. Lấy lần lượt không hoàn lại 2 thẻ. Tính xác suất để lần 2 lấy được thẻ Agribank biết lần 1 lấy được thẻ ACB.

Ví dụ:

2. Trong bình có 5 quả cầu trắng và 3 quả cầu đen.
Lấy ngẫu nhiên lần lượt 2 quả cầu.
Tính xác suất để lần thứ 2 lấy được cầu trắng nếu biết lần thứ nhất đã lấy được cầu trắng.

2. Quy tắc nhân xác suất (đối với 2 biến cố bất kì).

Giả sử A, B là 2 biến cố bất kỳ trong cùng một phép thử và P(B) > 0 .

Khi đó :

3. Công thức xác suất có điều kiện

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

Ví dụ :

Trong một trường đại học có 40% sinh viên học
tiếng Anh, 30% sinh viên học tiếng Pháp, trong số sinh viên học tiếng Anh có 55% sinh viên học tiếng Pháp. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên , biết sinh viên đó học tiếng Pháp. Tính xác suất để sinh viên đó học tiếng Anh.

Chú ý:

Giả sử A_1, A_2, A_3, …, A_3 là các biến cố trong cùng một phép thử.

Khi đó :

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)...P(A_n/A_1A_2....A_{n-1})$$

Các quy tắc tính xác suất:

1.Quy tắc cộng:

-Nếu A, B, C là các biến cố bất kì thì:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

-Nếu A, B, C là các biến cố xung khắc thì:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

2. Quy tắc nhân:

-Nếu A, B, C là các biến cố bất kì thì:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B/A) = P(B).P(A/B)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B/A).P(C/AB)$$

- Nếu A, B, C là các biến cố độc lập thì:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)$$

Nhận xét:

1. Những lưu ý khi áp dụng quy tắc cộng, nhân.

Thông thường bài toán sẽ có 2 loại biến cố: biến cố bài toán đã cho và biến cố cần tính xác suất.

Do đó, phải đặt tên cho các biến cố đã cho để dùng. Sau đó ta phải **biểu diễn biến cố** cần tính xác suất qua các biến cố đã cho.

Ta chỉ có quy tắc cộng và nhân, do vậy ta nên dùng phép cộng, nhân và đối lập để biểu diễn.

Khi biểu diễn biến cố cần tính xác suất thành lời mà dùng chữ "hoặc" thì nghĩ đến phép cộng, mà dùng chữ "và" thì nghĩ đến phép nhân, sau đó nhận xét tính độc lập hay xung khắc của các biến cố dùng để biểu diễn và áp dụng công thức.

Cách biểu diễn một số biến cố thường gặp:

Gọi A: "Hiện tượng 1 xảy ra"

B: "Hiện tượng 2 xảy ra"

C: "Hiện tượng 3 xảy ra"

Thì:

Cả 3 hiện tượng xảy ra: ABC

Cả 3 hiện tượng không xảy ra: $\bar{A}\,\bar{B}\bar{C}$

Có ít nhất 1 hiện tượng xảy ra: A∪B∪C

Có đúng 1 hiện tượng xảy ra: A $\bar{B}\bar{C}$∪ $\bar{A}$ B$\bar{C}$ ∪ $\bar{A}$ $\bar{B}C$

Có ít nhất 2 hiện tượng xảy ra: AB∪BC∪AC

Có ít nhất 2 hiện tượng không xảy ra: $\overline{AB}$∪ $\overline{BC}$ ∪ $\overline{AC}$

2. Những lưu ý khi tính xs có điều kiện

Có 3 cách tính XS có điều kiện:

- Cách 1: Cách tính trực tiếp (đối với nhiều biến cố đơn giản khi ta biểu diễn bằng lời thì sẽ thấy dựa vào gỉa thiết có được kết quả)
- Cách 2: Dùng công thức suy ra từ công thức nhân.
- Cách 3: Dùng công thức Bayes (phải ở trong mô hình xs đầy đủ)

Ví dụ:

Một sinh viên thi liên tiếp 2 môn là triết học và toán, xác suất đậu môn thứ nhất là 0,6. Nếu môn thứ nhất đậu thì khả năng đậu môn thứ 2 là 0,8. Nếu môn thứ nhất không đậu thì khả năng đậu môn thứ hai là 0,6. Tính xác suất để:

a) Sinh viên đó đậu chỉ một môn
b) Sinh viên đó đậu 2 môn
c) Sinh viên đó đậu ít nhất 1 môn

Ví dụ:

Một hộp đựng 4 cây bút mới và 6 cây bút cũ. Mỗi ngày lấy ngẫu nhiên ra 1 cây sử dụng và cuối ngày trả bút đó lại hộp. Tính xác suất:

a) Sau 3 ngày sử dụng hộp còn đúng 1 bút mới

b) Sau 2 ngày sử dụng hộp còn đúng 3 bút mới

1.4.2. Công thức xác suất đầy đủ

Giả sử hệ A_1, A_2, …, A_n là hệ đầy đủ các biến cố và A là một biến cố bất kỳ của cùng một phép thử.

Khi đó, xác suất của biến cố A được tính như sau:

$$P(A) = P(A_1)P(A/A_1) + P(A_2)P(A/A_2) + \cdots + P(A_n)P(A/A_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A/A_i)$$

Ví dụ:

1. Có 3 hộp hoàn toàn giống nhau.

Hộp 1 có 4 chính phẩm, 2 phế phẩm

Hộp 2 có 3 chính phẩm, 3 phế phẩm

Hộp 3 có 5 chính phẩm, 1 phế phẩm

Lấy ngẫu nhiên một hộp rồi từ đó lấy ra một sản phẩm.

Tìm xác suất để sản phẩm lấy ra là chính phẩm.

2. Để sản xuất một loại sản phẩm có thể dùng một trong 2 máy. Xác suất để máy thứ nhất và thứ hai là ra sản phẩm tốt lần lượt là 0,95 và 0,87. Trong một kho hàng có 2/3 số sản phẩm do máy thứ nhất làm ra và 1/3 số sản phẩm do máy thứ hai làm ra. Từ kho, lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm.

Tính xác suất để sản phẩm lấy ra là phế phẩm?

1.4.3. Công thức Bayes

Giả sử A_1, A_2, …, A_n là một hệ đầy đủ các biến cố và A là một biến cố bất kỳ của cùng một phép thử (với P(A) > 0).

Khi đó, ta có công thức Bayes như sau:

$$P(A_i / A) = \frac{P(A_i)P(A / A_i)}{P(A)}; \forall i = 1, 2, ..., n$$

Ví dụ

1. Một nhà máy có 3 phân xưởng sản xuất. Phân xưởng 1 sản xuất 50%, phân xưởng 2 sản xuất 30%, phân xưởng 3 sản xuất 20%. Biết rằng tỉ lệ phế phẩm do phân xưởng 1, 2, 3 sản xuất tương ứng là 2%, 1%, 3%.

Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm của nhà máy.

a. Tìm xác suất để sản phẩm lấy được là phế phẩm

b. Biết sản phẩm lấy ra là phế phẩm. Tìm xác suất để sản phẩm đó do phân xưởng 1 sản xuất.

2. Những lưu ý khi áp dụng công thức XS đầy đủ, Bayes

Khi tính XS bằng công thức đầy đủ, Bayes, quan trọng là phải nhận được mô hình bài toán và chỉ ra được nhóm đầy đủ các biến cố. Ta thường gặp 2 dạng sau:

- Nếu bài toán có phép thử gồm 2 bước hay 2 giai đoạn: Sau khi thực hiện giai đoạn thứ nhất ta được nhóm đầy đủ các biến cố. Tiếp tục thực hiện giai đoạn 2 ta được biến cố cần tính xs. Khi đó để tính xs của biến cố ở giai đoạn 2 ta áp dụng công thức xs đầy đủ với nhóm các biến cố đầy đủ ở giai đoạn 1.
- Nếu bài toán có tập hợp gồm n nhóm phần tử: Mỗi nhóm phần tử có có tỷ lệ phần tử có tính chất P nào đó. Lấy ngẫu nhiên 1 phần tử từ tập hợp. Gọi A_i là biến cố chọn được phần tử thuộc nhóm i. Khi đó, xs của biến cố chọn được phần tử có tính chất P trong phép thử sẽ được tính theo công thức xs đầy đủ với nhóm các biến cố đầy đủ là A_i

2. Để sản xuất một loại sản phẩm có thể dùng một trong 2 máy. Xác suất để máy thứ nhất và thứ hai là ra sản phẩm tốt lần lượt là 0,95 và 0,87. Trong một kho hàng có 2/3 số sản phẩm do máy thứ nhất làm ra và 1/3 số sản phẩm do máy thứ hai làm ra. Từ kho, lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm.

a. Tính xác suất để sản phẩm lấy ra là phế phẩm?

b. Nếu sản phẩm lấy ra không là phế phẩm, hãy tính xác suất để sản phẩm đó do máy thứ 2 làm ra.

1.4.4. Dãy phép thử Bernoulli

Sau đây ta đưa ra một số khái niệm mới:

Phép thử lặp: Là các phép thử được thực hiện trong cùng một điều kiện và có không gian mẫu bằng nhau.

Phép thử độc lập: Là các phép thử mà kết quả của mỗi phép thử không ảnh hưởng tới kết quả của những phép thử còn lại.

Dãy phép thử Bernoulli: Là một dãy gồm các phép thử lặp, độc lập và mỗi phép thử chỉ có hai kết quả (thường ký hiệu là 1 và 0 hoặc "thành công" và "thất bại").

1.4.4. Dãy phép thử Bernoulli

Ví dụ:

- Gieo một đồng xu cân đối, đồng chất 10 lần ta được một dãy gồm 10 phép thử Bernoulli.
- Một người bắn 12 viên đạn vào bia, mỗi lần bắn một viên ta được 12 phép thử Bernoulli.
- Có 12 người, mỗi người bắn một viên đạn vào bia thì đó không phải là 12 phép thử Bernoulli. Vì lúc này, 12 phép thử không còn có tính chất lặp.

Công thức Bernoulli

Cho dãy gồm n phép thử Bernoulli. Trong mỗi phép thử chỉ xảy ra một trong hai trường hợp: Hoặc biến cố A xảy ra với xác suất p, hoặc biến cố A không xảy ra với xác suất q=1-p.

Khi đó, xác suất để trong n phép thử Bernouli, biến cố A xuất hiện k lần được tính bằng công thức sau:

$$P(n;k;p) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Ví dụ

Một xạ thủ bắn 10 viên đạn một cách độc lập vào bia. Xác suất trúng bia là 0,8. Tính xác suất để trong 10 lần bắn có 7 lần trúng bia?

Giải

Gọi A là biến cố bắn trúng đích.

Theo giả thiết bài toán: Ta thực hiện 10 phép thử Bernouli.

Trong mỗi phép thử biến cố A xảy ra với xác suất:

$$P(A) = 0,8 \Rightarrow P(\overline{A}) = 0,2$$

Áp dụng công thức Becnuli ta có:

Xác suất trong 10 phát bắn có 7 lần trúng là:

$$P_{10}(7) = C_{10}^{7}(0,8)^{7}(0,2)^{3} \approx 0,2$$

MỘT SỐ BÀI TẬP

1. Một lớp học có 20 sinh viên nam và 10 sinh viên nữ. Chọn ngẫu nhiên 5 sinh viên trong lớp. Tính xác suất để:

a. Chọn được 2 sinh viên nữ

b. Có ít nhất một sinh viên nữ

c. Có nhiều nhất là 3 nữ

d. Cả 5 sinh viên đều là nữ

2. Một khoá học có 100 sinh viên, trong đó có 50 sinh viên giỏi Anh văn, 45 sinh viên giỏi Pháp văn, 10 sinh viên giỏi cả hai ngoại ngữ. Chọn ngẫu nhiên 1 sinh viên trong khoá học. Tính xác suất để:

a. Sinh viên này giỏi ít nhất một ngoại ngữ?

b. Sinh viên này không giỏi ngoài ngữ nào hết?

c. Sinh viên này chỉ giỏi Anh văn?

d. Sinh viên này chỉ giỏi đúng một ngoại ngữ?

3. Trong một trường THPT có:

10% học sinh thuận tay trái,

8% học sinh cận thị

và 2% vừa thuận tay trái vừa cận thị.

Chọn ngẫu nhiên một học sinh trường đó.

Tính xác suất để :

a. Học sinh đó thuận tay trái nếu biết học sinh đó cận thị

b. Học sinh đó cận thị nếu biết học sinh đó thuận tay trái

4. Một hộp có 5 viên bi: 3 bi đỏ, 2 bi xanh.
Lan lấy ngẫu nhiên 1 viên bi (không hoàn lại), sau đó Điệp lấy ngẫu nhiên 1 bi.

a. Tính xác suất để Lan lấy được bi xanh.
b. Tính xác suất để Lan lấy được bi xanh còn Điệp lấy được bi đỏ.
c. Tính xác suất để Điệp lấy được bi đỏ biết Lan lấy được bi xanh

KẾT THÚC CHƯƠNG 1