ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG VIỆT - HÀN
Vietnam - Korea University of Information and Communication Technology

CHƯƠNG 2

TẬP HỢP-QUAN HỆ

CHƯƠNG 2. TẬP HỢP-QUAN HỆ

2.1. Tập hợp

2.1.1. Khái niệm

2.1.2. Các phép toán tập hợp cơ bản

2.1.3. Một số tính chất

2.2. Quan hệ

2.2.1. Định nghĩa và tính chất

2.2.2. Quan hệ tương đương

2.2.3. Quan hệ thứ tự

2.1. Tập hợp

2.1.1. Khái niệm
2.1.2. Các phép toán tập hợp cơ bản
2.1.3. Một số tính chất

2.1. Tập hợp

2.1.1. Khái niệm

-Tập hợp được sử dụng để nhóm các đối tượng lại với nhau.

-Các đối tượng trong cùng một tập hợp thường có các tính chất tương tự nhau.

-Mỗi đối tượng được gọi là phần tử của tập hợp.

-Ví dụ:

- Tập hợp các số nguyên
- Tập hợp các số thực
- Tập hợp các tam giác
- Tập hợp các đường thẳng trong mặt phẳng
- Tập hợp các sinh viên lớp Toán rời rạc

2.1. Tập hợp

2.1.1. Khái niệm

-Kí hiệu:

- Phần tử: sử dụng chữ cái thường (a, b, c, x, y, z, …)
- Tập hợp: sử dụng chữ cái hoa (A, B, C, $\mathscr{R}$, $\mathscr{M}$, …)
- Phần tử thuộc tập hợp: $\in$ ($x \in A$, $y \in \mathscr{R}$, …)
- Tập hợp chứa phần tử: $\ni$ ($B \ni a$, $\mathscr{M} \ni z$, …)
- Không phải phần tử thuộc tập hợp: $\notin$ ($a \notin C$, $b \notin \mathscr{M}$, …)
- Không phải tập hợp chứa phần tử: $\not\ni$ ($B \not\ni z$, $\mathscr{R} \not\ni x$, …)
- Tập hợp này chứa trong tập hợp kia: $\subset$, $\subseteq$ ($A \subset \mathscr{R}$, $B \subseteq C$, …)
- Tập hợp này chứa tập hợp kia: $\supset$, $\supseteq$ ($\mathscr{M} \supset B$, $C \supseteq A$, …)
- Không phải tập hợp này chứa trong tập hợp kia: $\not\subset$, $\nsubseteq$ ($B \not\subset \mathscr{R}$, $C \nsubseteq A$, …)

2.1. Tập hợp

2.1.1. Khái niệm

- Không phải tập hợp này chứa tập hợp kia: $\not\supset, \not\supseteq$ ($\mathscr{M} \not\supset A, B \not\supseteq C, \ldots$)
- Tập hợp con: A⊂B, A⊆B (*tập hợp A được gọi là tập hợp con của tập hợp B khi và chỉ khi mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp B*)
- Hai tập hợp bằng nhau: A=B hay B=A (*tập hợp A được gọi là bằng tập hợp B khi và chỉ khi mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp B và ngược lại, tức là A⊆B và B⊆A*)
- Không phải hai tập hợp bằng nhau (*hai tập hợp khác nhau*): A≠B hay B≠A
- Số lượng phần tử của tập hợp: | | (|A|, |B|,…)
- Tập hợp rỗng (*tập hợp không có phần tử nào cả*): ∅

2.1. Tập hợp

2.1.1. Khái niệm

-Biểu diễn tập hợp: sử dụng {…} để giới thiệu các phần tử.

- Bằng cách liệt kê các phần tử (không phân biệt thứ tự liệt kê):
  Ví dụ: {1,2,5,6}, {-1, 1}, {a, b, c}, {-1, a, 10.05}
  {2, 4, 6, …, 96, 98, 100}
  {1, 3, 5, 7, 9,…}
- Bằng cách nêu tính chất của các phần tử:
  Ví dụ: Gọi $\mathbb{N}$ là tập hợp các số tự nhiên, $\mathbb{Z}$ là tập hợp các số nguyên, $\mathbb{Z}^+$ là tập hợp các số nguyên dương, $\mathbb{R}$ là tập hợp các số thực.
  $\{n \in \mathbb{N} \mid n^2+1=0\}$, $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2-1=0\}$, $\{y \in \mathbb{Z}^+ \mid y>y^2\}$
  $\{y \in \mathbb{R} \mid e^{y4+1} – (y^{10}+5y-1)^{100} + y > 0\}$

2.1. Tập hợp

2.1.1. Khái niệm

-Ví dụ: Cho các tập hợp A, B, C được xác định như sau:

$A=\{5,2,1,7,8\}$, $B=\{-1,1\}$, $C=\{x\in\mathbb{Z} \mid x^2-1=0\}$

Ta có:

$5\in A$, $-1\in B$, $A\ni 7$, $B\ni 1$, $9\notin A$, $2\notin B$, $A\not\ni 3$, $B\not\ni 5$,

$\{1,2,5\}\subset A$, $\{1,2,5,7,8\}\subseteq A$, $\{1\}\subset B$, $\{-1,1\}\subseteq B$, $A\subset\mathbb{Z}^+$,$B\subset\mathbb{Z}$,

$A \supset \{7,8\}$, $A \supseteq \{1,7,8,5,2\}$, $B \supset\{-1\}$, $B \supseteq \{1,-1\}$,

$\{1,2,3\}\not\subset A$, $\{4,5,6,7,8,9\}\not\subseteq A$, $\{-1,0,1\}\not\subset B$, $\{1,2,3,4,5\}\not\subseteq B$,

$\mathbb{Z}^+ \not\supset \{-1,0,1\}$, $A \not\supseteq \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B \not\supset \{1,2\}$, $B \not\supseteq \{1,2,3\}$,

$\{1,2\} \subset A$, $\emptyset \subset B$, $\{-1,1\} \subseteq B$, $C=\{-1,1\}$, $B=C$, $C=B$,

$A \neq B$, $B \neq A$, $C \neq \emptyset$, $C \neq \{1,2,3,4,5\}$,

$|A|=5$, $|B|=2$, $|C|=2$, $|B|=|C|$

2.1. Tập hợp

2.1.2. Các phép toán tập hợp cơ bản

- Phép toán GIAO
- Phép toán HỢP
- Phép toán HIỆU
- Phép toán TÍCH ĐỀ-CÁC

2.1. Tập hợp

2.1.2. Các phép toán tập hợp cơ bản

•Phép toán GIAO

-Kí hiệu: ∩ (nối hai tập hợp)

-Quy tắc biến đổi: Cho A, B là hai tập hợp. A giao B (kí hiệu A∩B) là một tập hợp và được định nghĩa như sau:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

•Phép toán HỢP

-Kí hiệu: ∪ (nối hai tập hợp)

-Quy tắc biến đổi: Cho A, B là hai tập hợp. A hợp B (kí hiệu A∪B) là một tập hợp và được định nghĩa như sau:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

2.1. Tập hợp

2.1.2. Các phép toán tập hợp cơ bản

•Phép toán HIỆU

-Kí hiệu: \ (nối hai tập hợp)

-Quy tắc biến đổi: Cho A, B là hai tập hợp. A hiệu B (kí hiệu A\B) là một tập hợp và được định nghĩa như sau:

$$A\setminus B=\{x \mid x\in A \land x\notin B\}$$

•Phép toán TÍCH ĐỀ-CÁC

-Kí hiệu: x (nối hai tập hợp)

-Quy tắc biến đổi: Cho A, B là hai tập hợp. Tích Đề-các của A với B (kí hiệu AxB) là một tập hợp và được định nghĩa như sau:

$$AxB=\{(x,y) \mid x\in A \land y\in B\}$$

2.1. Tập hợp

2.1.2. Các phép toán tập hợp cơ bản

-Lưu ý: Dùng () để quy định thứ tự thực hiện các phép toán.

-Ví dụ: Cho các tập hợp A, B, C được xác định như sau:

$A=\{5,2,1,7,8\}$, $B=\{-1,1\}$, $C=\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2-1=0\}$

Ta có:

$C=\{-1,1\}$, $B=C$,

$B \cap C=\{-1,1\}$, $A \cap B=\{1\}$, $B \cap A=\{1\}$, $A \cap B=B \cap A$, $|A \cap B|=|B \cap A|=1$

$B \cup C=\{-1,1\}$, $A \cup B=\{5,2,1,7,8,-1\}$, $B \cup A=\{5,2,1,7,8,-1\}$,

$A \cup B=B \cup A$, $|A \cup B|=|B \cup A|=6$

$B \setminus C=\emptyset$, $C \setminus B=\emptyset$, $C \setminus \emptyset=C$, $A \setminus B=\{5,2,7,8\}$, $B \setminus A=\{-1\}$, $A \setminus B \neq B \setminus A$,

$|B \setminus C|=|C \setminus B|=0$, $|A \setminus B|=4$, $|B \setminus A|=1$

2.1. Tập hợp

2.1.2. Các phép toán tập hợp cơ bản

-Ví dụ: Cho các tập hợp A, B, C được xác định như sau:

$A=\{5,2,1,7,8\}$, $B=\{-1,1\}$, $C=\{x\in\mathbb{Z} \mid x^2-1=0\}$

Ta có:

$C\setminus(B\cap A)=\{-1\}$, $(B\cap A)\setminus C=\emptyset$, $|C\setminus(B\cap A)|=1$, $|(B\cap A)\setminus C|=0$

$AxB=\{(5,-1),(5,1),(2,-1),(2,1),(1,-1),(1,1),(7,-1),(7,1),(8,-1),(8,1)\}$

$BxA=\{(-1,5),(-1,2),(-1,1),(-1,7),(-1,8),(1,5),(1,2),(1,1),(1,7),(1,8)\}$

$AxB\neq BxA$, $(AxB)\cap(BxA)=\{(1,1)\}$, $|AxB|=|BxA|=|A|x|B|$

$(AxB)\setminus(BxA)=\{(5,-1),(5,1),(2,-1),(2,1),(1,-1),(7,-1), (7,1),(8,-1),(8,1)\}$

$|(AxB)\setminus(BxA)|=9$

2.1. Tập hợp

2.1.2. Các phép toán tập hợp cơ bản

-Định nghĩa mở rộng các phép toán:

•Phép toán GIAO

- Giao của n tập hợp đã cho $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ là một tập hợp và được định nghĩa như sau:

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_{n-1} \wedge x \in A_n\}$$

$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n$ kí hiệu là $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$, tức là:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_{n-1} \wedge x \in A_n\}$$

2.1. Tập hợp

2.1.2. Các phép toán tập hợp cơ bản

-Định nghĩa mở rộng các phép toán:

•Phép toán HỢP

- Hợp của n tập hợp đã cho $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ là một tập hợp và được định nghĩa như sau:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_{n-1} \vee x \in A_n\}$$

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n$ kí hiệu là $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, tức là:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_{n-1} \vee x \in A_n\}$$

2.1. Tập hợp

2.1.2. Các phép toán tập hợp cơ bản

-Định nghĩa mở rộng các phép toán:

•Phép toán TÍCH ĐỀ-CÁC

- Tích Đề-các của n tập hợp đã cho $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ (theo thứ tự liệt kê) là một tập hợp và được định nghĩa như sau:

$$A_1 x A_2 x \ldots x A_{n-1} x A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) | x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} \in A_{n-1} \wedge x_n \in A_n\}$$

$A_1 x A_2 x \ldots x A_{n-1} x A_n$ kí hiệu là $\prod_{i=1}^{n} A_i$, tức là:

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) | x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} \in A_{n-1} \wedge x_n \in A_n\}$$

2.1. Tập hợp

2.1.2. Các phép toán tập hợp cơ bản

-Ví dụ: Cho các tập hợp A, B, C được xác định như sau:

$A=\{5,2,1,7,8\}$, $B=\{-1,0,1\}$, $C=\{x\in\mathbb{Z} \mid x^2-1=0\}$

Ta có: $|A|=5$, $|B|=3$, $|C|=2$

$C=\{-1,1\}$, $A\cap B\cap C=\{1\}$, $|A\cap B\cap C|=1$

$A\cup B\cup C=\{5,2,1,7,8,-1,0\}$, $|A\cup B\cup C|=7$

AxBxC={(5,-1,-1),(5,-1,1),(5,0,-1),(5,0,1),(5,1,-1),(5,1,1),
(2,-1,-1),(2,-1,1),(2,0,-1),(2,0,1),(2,1,-1),(2,1,1),
(1,-1,-1),(1,-1,1),(1,0,-1),(1,0,1),(1,1,-1),(1,1,1),
(7,-1,-1),(7,-1,1),(7,0,-1),(7,0,1),(7,1,-1),(7,1,1),
(8,-1,-1),(8,-1,1),(8,0,-1),(8,0,1),(8,1,-1),(8,1,1)}

|AxBxC|=|A|x|B|x|C|=30

2.1. Tập hợp

2.1.3. Một số tính chất

-Cho các tập hợp A, B, C. Ta có:

$\emptyset \subset A$

$A \cap A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \cup A = A$, $A \cup \emptyset = A$

$A \setminus \emptyset = A$, $\emptyset \setminus A = \emptyset$

$\emptyset x A = \emptyset$, $A x \emptyset = \emptyset$

Nếu $B \subseteq A$ thì $A \cap B = B$, $A \cup B = A$, $B \setminus A = \emptyset$

$A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$,

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

2.1. Tập hợp

***Lưu ý**:

- Lượng từ:

∀: với mọi, mọi, tất cả

∃: tồn tại, có

- Cho vị từ *p(x)*. Lúc đó $\forall x, p(x)$ và $\exists x, p(x)$ là các mệnh đề.

- Ta có hệ thức tương đương: $\overline{\forall x, p(x)} \equiv \exists x, \overline{p(x)}$, $\overline{\exists x, p(x)} \equiv \forall x, \overline{p(x)}$

- Chứng minh A và B là 2 tập hợp bằng nhau: A=B

$\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$, *suy ra* $A \subseteq B$,

đồng thời $\forall x, x \in B \Rightarrow x \in A$, *suy ra* $B \subseteq A$.

Vậy $A=B$.

hoặc $\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B$. *Vậy* $A=B$.

2.1. Tập hợp

- Ví dụ: Chứng minh $A \cap B = B \cap A$

Ta có $\forall x,\ x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

$\Leftrightarrow x \in B \wedge x \in A$

$\Leftrightarrow x \in B \cap A$

Vậy $A \cap B = B \cap A$.

- Ví dụ: Chứng minh $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Ta có $\forall x,\ x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Vậy $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Bài tập

1. Cho các tập hợp A, B, C được xác định như sau:

$A=\{1,2,4,6\}$, $B=\{1,3,4,5,7\}$, $C=\{x\in\mathbb{Z} \mid x^2-3x+2=0\}$

Hãy tìm các tập hợp và số lượng phần tử các tập hợp sau:

a. C
b. $A\cap B$, $B\cap A$, $B\cap C$, $C\cap B$, $C\cap A$, $A\cap C$
c. $A\cup B$, $B\cup A$, $B\cup C$, $C\cup B$, $A\cup C$, $C\cup A$
d. $A\setminus B$, $B\setminus A$, $A\setminus C$, $C\setminus A$, $B\setminus C$, $C\setminus B$
e. AxB, AxC, BxA, BxC, CxA, CxB
f. $A\cap B\cap C$, $A\cup B\cup C$, AxCxC, $A\setminus(B\cap C)$, $(A\setminus B)\cap C$, $A\setminus(B\cup C)$, $(A\setminus B)\cup C$

2. Hãy chứng minh các tính chất nêu ở mục 2.1.3.

2.2. Quan hệ

2.2.1. Định nghĩa và tính chất
2.2.2. Quan hệ tương đương
2.2.3. Quan hệ thứ tự

2.2. Quan hệ

2.2.1. Định nghĩa và tính chất

- Định nghĩa:

Cho X là một tập hợp khác ∅. Một quan hệ 2-ngôi trên X là một tập hợp con của XxX.

- Cho X là một tập hợp khác ∅ và $\mathscr{R}$ là một quan hệ 2-ngôi trên X, lúc đó $\mathscr{R} \subseteq XxX$ và:

$(x,y) \in \mathscr{R} \Leftrightarrow$ "x quan hệ $\mathscr{R}$ với y" (có thể ký hiệu $x\mathscr{R}y$)

$(x,y) \notin \mathscr{R} \Leftrightarrow$ "không phải x quan hệ $\mathscr{R}$ với y"

2.2. Quan hệ

2.2.1. Định nghĩa và tính chất

- Ví dụ:

Ví dụ 1. Gọi $\mathbb{Z}$ là tập hợp các số nguyên. Định nghĩa trên $\mathbb{Z}$ các quan hệ 2-ngôi như sau:

$\mathscr{R} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} x \mathbb{Z} \mid x \leq y\}$, tức là $(x,y) \in \mathscr{R} \Leftrightarrow x \leq y$

$\wp = \{(x,y) \in \mathbb{Z} x \mathbb{Z} \mid 2x-1 \geq y\}$, tức là $(x,y) \in \wp \Leftrightarrow 2x-1 \geq y$

Theo quan hệ $\mathscr{R}$, $\wp$ được định nghĩa như trên, ta có:

$(1,2) \in \mathscr{R}$, $(-3,2) \in \mathscr{R}$, $(-2,-1) \in \mathscr{R}$, $(-3,-3) \in \mathscr{R}$, $(0,0) \in \mathscr{R}$, $(2,2) \in \mathscr{R}$, $(2,1) \notin \mathscr{R}$, $(2,-3) \notin \mathscr{R}$, $(-1,-2) \notin \mathscr{R}$

$(2,1) \in \wp$, $(2,-3) \in \wp$, $(-1,-5) \in \wp$, $(1,1) \in \wp$, $(2,2) \in \wp$, $(3,3) \in \wp$, $(1,2) \notin \wp$, $(-3,2) \notin \wp$, $(-2,-1) \notin \wp$, $(-1,-2) \notin \wp$, $(-3,-3) \notin \wp$, $(0,0) \notin \wp$

2.2. Quan hệ

2.2.1. Định nghĩa và tính chất

- Ví dụ:

Ví dụ 2. Gọi $\mathbb{R}$ là tập hợp các số thực. Định nghĩa quan hệ 2-ngôi $\mathscr{B}$ trên $\mathbb{R}$ như sau:

$\mathscr{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R} x \mathbb{R} \mid x \geq y\}$, tức là $(x,y) \in \mathscr{B} \Leftrightarrow x \geq y$

Theo quan hệ $\mathscr{B}$ được định nghĩa như trên, ta có:

$(2,1) \in \mathscr{B}$, $(2,-3) \in \mathscr{B}$, $(-1,-2) \in \mathscr{B}$, $(-3,-3) \in \mathscr{B}$, $(0,0) \in \mathscr{B}$, $(2,2) \in \mathscr{B}$, $(1,2) \notin \mathscr{B}$, $(-3,2) \notin \mathscr{B}$, $(-2,-1) \notin \mathscr{B}$

Ví dụ 3. Gọi Δ là tập hợp các tam giác trong mặt phẳng (theo hình học Euclid). Định nghĩa quan hệ 2-ngôi $\mathscr{F}$ trên Δ như sau: $\mathscr{F} = \{(x,y) \in \Delta x \Delta \mid x$ đồng dạng với $y\}$

2.2. Quan hệ

2.2.1. Định nghĩa và tính chất

- Ví dụ:

Ví dụ 4. Gọi S là tập hợp các sinh viên của lớp Toán rời rạc. Định nghĩa trên S các quan hệ 2-ngôi như sau:

$\mathscr{L}$ ={(x,y)∈SxS | x cùng giới tính với y}

$\mathscr{H}$ ={(x,y)∈SxS | x cùng quê quán với y}

$\mathscr{M}$ ={(x,y)∈SxS | x cùng tuổi với y}

- Lưu ý: Trên cùng một tập hợp có thể định nghĩa nhiều quan hệ khác nhau (tùy theo mục đích, nhu cầu khảo sát, nghiên cứu, xử lý các phần tử)

2.2. Quan hệ

2.2.1. Định nghĩa và tính chất

- Tính chất: Cho X là một tập hợp khác ∅ và $\mathscr{R}$ là một quan hệ 2-ngôi trên X.

+ Tính chất phản xạ: $\mathscr{R}$ được gọi là có tính chất phản xạ khi và chỉ khi $\forall x \in X, (x,x) \in \mathscr{R}$ hay $\forall x \in X, x\mathscr{R}x$

+ Tính chất đối xứng: $\mathscr{R}$ được gọi là có tính chất đối xứng khi và chỉ khi $\forall x,y \in X, (x,y) \in \mathscr{R} \Rightarrow (y,x) \in \mathscr{R}$ hay $\forall x,y \in X, x\mathscr{R}y \Rightarrow y\mathscr{R}x$

+ Tính chất phản đối xứng: $\mathscr{R}$ được gọi là có tính chất phản đối xứng khi và chỉ khi $\forall x,y \in X, ((x,y) \in \mathscr{R} \wedge (y,x) \in \mathscr{R}) \Rightarrow$ x trùng y

hay $\forall x,y \in X, (x\mathscr{R}y \wedge y\mathscr{R}x) \Rightarrow$ x trùng y

2.2. Quan hệ

2.2.1. Định nghĩa và tính chất

- Tính chất:

+ Tính chất bắc cầu: $\mathscr{R}$ được gọi là có tính chất bắc cầu khi và chỉ khi $\forall x,y,z \in X$, $((x,y)\in\mathscr{R} \wedge (y,z)\in\mathscr{R}) \Rightarrow (x,z)\in\mathscr{R}$

hay $\forall x,y,z \in X$, $(x\mathscr{R}y \wedge y\mathscr{R}z) \Rightarrow x\mathscr{R}z$

-Lưu ý: Nếu quan hệ $\mathscr{R}$ trên X có tính chất đối xứng thì

$(x,y)\in\mathscr{R} \Leftrightarrow$ "x quan hệ $\mathscr{R}$ với y"

hay "y quan hệ $\mathscr{R}$ với x"

hay "x và y có quan hệ $\mathscr{R}$ với nhau"

Bài tập: *Kiểm tra các quan hệ đã được định nghĩa trong các ví dụ ở trên có những tính chất nào.*

2.2. Quan hệ

2.2.2. Quan hệ tương đương

- Định nghĩa: Cho X là một tập hợp khác Ø và $\mathscr{R}$ là một quan hệ 2-ngôi trên X. $\mathscr{R}$ được gọi là quan hệ tương đương khi và chỉ khi $\mathscr{R}$ có đồng thời cả 3 tính chất: phản xạ, đối xứng và bắc cầu.
- Ví dụ: Xét các quan hệ được định nghĩa trong các ví dụ ở trên, ta có các quan hệ tương đương: $\mathscr{F}$ trên Δ, $\mathscr{L}$ trên S, $\mathscr{H}$ trên S, $\mathscr{M}$ trên S
- Lưu ý: Quan hệ tương đương có tính chất đối xứng nên ta hay nói "các phần tử có quan hệ với nhau"

2.2. Quan hệ

2.2.2. Quan hệ tương đương

- Ý nghĩa: Cho X là một tập hợp khác $\emptyset$ và $\mathscr{R}$ là một quan hệ tương đương trên X. Lúc đó $\mathscr{R}$ sẽ chia X thành các tập hợp con rời nhau (đôi một giao với nhau bằng $\emptyset$) và hợp của tất cả các tập hợp con đó chính là X. Mỗi cách chia tập hợp X như vậy được gọi là một phân hoạch của X.

- Lưu ý:

+ Quan hệ tương đương là cơ sở để tạo phân hoạch của một tập hợp đã cho.

+ Trên cùng một tập hợp có thể có nhiều phân hoạch khác nhau (tùy theo quan hệ tương đương được định nghĩa làm cơ sở).

2.2. Quan hệ

2.2.2. Quan hệ tương đương

- Cho X là một tập hợp khác $\emptyset$ và $\mathscr{R}$ là một quan hệ tương đương trên X. Ta gọi mỗi tập hợp con trong phân hoạch của X theo $\mathscr{R}$ là một lớp tương đương.
- $\forall x \in X$, gọi $\xi(x)$ là lớp tương đương của x theo quan hệ tương đương $\mathscr{R}$. Lúc đó: $\xi(x)=\{y \in X | (x,y) \in \mathscr{R}\}$.
- Ta có:
  + $\forall x \in X,\ \xi(x) \neq \emptyset$
  + $\forall x,y \in X,\ (x,y) \in \mathscr{R} \Leftrightarrow \xi(x)=\xi(y)$
  + $\forall x,y \in X,\ (x,y) \notin \mathscr{R} \Leftrightarrow \xi(x) \cap \xi(y) = \emptyset$
  + $\bigcup_{x \in X} \xi(x) = X$

2.2. Quan hệ

2.2.3. Quan hệ thứ tự

- Định nghĩa: Cho X là một tập hợp khác $\emptyset$ và $\mathscr{R}$ là một quan hệ 2-ngôi trên X. khi$\mathscr{R}$ được gọi là quan hệ thứ tự và chỉ khi $\mathscr{R}$ có đồng thời cả 3 tính chất: phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu.
- Ví dụ: Xét các quan hệ được định nghĩa trong các ví dụ ở trên, ta có các quan hệ thứ tự: $\mathscr{R}$ trên $\mathbb{Z}$, $\mathscr{B}$ trên $\mathbb{R}$.
- Ý nghĩa: Cho X là một tập hợp khác $\emptyset$ và $\mathscr{R}$ là một quan hệ thứ tự trên X. Lúc đó $\mathscr{R}$ sẽ làm cho các phần tử của X có thứ tự (có trật tự hay có vị trí xác định) trong X và lúc đó X được gọi là tập hợp được sắp xếp thứ tự.

2.2. Quan hệ

2.2.3. Quan hệ thứ tự

- Lưu ý:

+ Quan hệ thứ tự là cơ sở để sắp xếp thứ tự các phần tử của một tập đã cho (làm cho các phần tử có vị trí xác định trong X).

+ Có nhiều cách sắp xếp thứ tự các phần tử trong cùng một tập hợp (tùy theo quan hệ thứ tự được định nghĩa làm cơ sở).

- Cho $\mathscr{R}$ là một quan hệ thứ tự trên X.

+ Nếu $\forall x,y \in X$, $(x,y) \in \mathscr{R} \vee (y,x) \in \mathscr{R}$ thì $\mathscr{R}$ được gọi là quan hệ thứ tự toàn phần,

+ Ngược lại (tức là $\exists x,y \in X$, $(x,y) \notin \mathscr{R} \wedge (y,x) \notin \mathscr{R}$) thì $\mathscr{R}$ được gọi là quan hệ thứ tự bộ phận

2.2. Quan hệ

2.2.3. Quan hệ thứ tự

- Ví dụ: Xét các quan hệ thứ tự $\mathscr{R}$ trên $\mathbb{Z}$, $\mathscr{B}$ trên $\mathbb{R}$ được định nghĩa trong các ví dụ ở trên.

+ Rõ ràng, $\forall x,y \in \mathbb{Z}$, $x \le y \vee y \le x$.

Tức là $\forall x,y \in \mathbb{Z}$, $(x,y) \in \mathscr{R} \vee (y,x) \in \mathscr{R}$.

Do đó $\mathscr{R}$ là quan hệ thứ tự toàn phần trên $\mathbb{Z}$.

+ Rõ ràng, $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $x \ge y \vee y \ge x$.

Tức là $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $(x,y) \in \mathscr{B} \vee (y,x) \in \mathscr{B}$.

Do đó $\mathscr{B}$ là quan hệ thứ tự toàn phần trên $\mathbb{R}$.

2.2. Quan hệ

2.2.3. Quan hệ thứ tự

- Các phần tử đặc biệt của tập hợp: Cho $\mathscr{R}$ là một quan hệ thứ tự trên X và A⊆X.

 + Phần tử cực tiểu: b∈A được gọi là phần tử cực tiểu của A khi và chỉ khi $\forall x \in A, (x,b) \in \mathscr{R} \Rightarrow$ x trùng b

 + Phần tử cực đại: c∈A được gọi là phần tử cực đại của A khi và chỉ khi $\forall x \in A, (c,x) \in \mathscr{R} \Rightarrow$ x trùng c

 + Phần tử nhỏ nhất: d∈A được gọi là phần tử nhỏ nhất của A khi và chỉ khi $\forall x \in A, (d,x) \in \mathscr{R}$

 + Phần tử lớn nhất: e∈A được gọi là phần tử lớn nhất của A khi và chỉ khi $\forall x \in A, (x,e) \in \mathscr{R}$

2.2. Quan hệ

2.2.3. Quan hệ thứ tự

- Lưu ý:

+ Phần tử cực tiểu, phần tử cực đại luôn luôn có và có thể có nhiều.

+ Phần tử nhỏ nhất, phần tử lớn nhất có thể có hoặc không có, và nếu có thì chỉ là duy nhất.

2.2. Quan hệ

2.2.3. Quan hệ thứ tự

- Ví dụ: Xét quan hệ thứ tự $\mathscr{R}$ trên $\mathbb{Z}$ được định nghĩa ở *Ví dụ 1* ($\mathscr{R} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} x \mathbb{Z} \mid x \leq y\}$, tức là $(x,y) \in \mathscr{R} \Leftrightarrow x \leq y$)

Hãy tìm các phần tử đặc biệt của tập hợp A={4, 8, 2, 16, 32}

+ Phần tử cực tiểu của A: 2
+ Phần tử cực đại của A: 32
+ Phần tử nhỏ nhất của A: 2
+ Phần tử lớn nhất của A: 32

2.2. Quan hệ

2.2.3. Quan hệ thứ tự

- Ví dụ: Xét quan hệ thứ tự $\mathscr{B}$ trên $\mathbb{R}$ được định nghĩa ở *Ví dụ 2* ($\mathscr{B} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} x \mathbb{Z} \mid x \geq y\}$, tức là $(x,y) \in \mathscr{B} \Leftrightarrow x \geq y$)

Hãy tìm các phần tử đặc biệt của tập hợp A={4, 8, 2, 16, 32}

+ Phần tử cực tiểu của A: 32

+ Phần tử cực đại của A: 2

+ Phần tử nhỏ nhất của A: 32

+ Phần tử lớn nhất của A: 2

Bài tập

1. Gọi $\mathbb{Z}^+$ là tập hợp các số nguyên dương. Định nghĩa trên $\mathbb{Z}^+$ quan hệ 2-ngôi $\mathscr{E}$ như sau:

$\mathscr{E} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \mid x \vdots y\}$, tức là $(x,y) \in \mathscr{E} \Leftrightarrow x \vdots y$,

trong đó $x \vdots y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}^+, x = ky$

a. Hãy chứng tỏ $\mathscr{E}$ là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{Z}^+$ và cho biết $\mathscr{E}$ là quan hệ thứ tự toàn phần hay bộ phận.

b. Hãy tìm các phần tử đặc biệt của các tập hợp sau:

A={4, 8, 2, 16, 32}, B={3, 6, 2, 12, 24}, C ={3, 6, 9, 12, 24}, D={2, 4, 6, 9, 18}

Bài tập

Giải:

a. Hãy chứng tỏ $\mathscr{E}$ là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{Z}^+$ và cho biết $\mathscr{E}$ là quan hệ thứ tự toàn phần hay bộ phận.

*Kiểm tra $\mathscr{E}$ có những tính chất nào:

- Rõ ràng $\forall x \in \mathbb{Z}^+$, $x=1x$. Như vậy $\exists k \in \mathbb{Z}^+$, $x=kx \Rightarrow x \vdots x$

  Tức là $\forall x \in \mathbb{Z}^+$, $(x,x) \in \mathscr{E}$. Suy ra $\mathscr{E}$ có tính chất phản xạ.

- Dễ dàng thấy rằng

$$\forall x,y \in \mathbb{Z}^+, \begin{cases} x \vdots y \\ y \vdots x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists k_1 \in Z^+, x = k_1 y \\ \exists k_2 \in Z^+, y = k_2 x \end{cases} \Rightarrow \exists k_1, k_2 \in Z^+, x = k_1 k_2 x \Rightarrow k_1 = k_2 = 1 \Rightarrow x = y$$

Tức là $\forall x,y \in \mathbb{Z}^+$, $((x,y) \in \mathscr{E} \wedge (y,x) \in \mathscr{E}) \Rightarrow$ x trùng y. Suy ra $\mathscr{E}$ có tính chất phản đối xứng.

- Rõ ràng

$$\forall x,y,z \in \mathbb{Z}^+, \begin{cases} x \vdots y \\ y \vdots z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists k_1 \in Z^+, x = k_1 y \\ \exists k_2 \in Z^+, y = k_2 z \end{cases} \Rightarrow \exists k_1, k_2 \in Z^+, x = k_1 k_2 z \Rightarrow \exists k \in Z^+, x = kz \Rightarrow x \vdots z$$

Tức là $\forall x,y,z \in \mathbb{Z}^+$, $((x,y) \in \mathscr{E} \wedge (y,z) \in \mathscr{E}) \Rightarrow (x,z) \in \mathscr{E}$. Suy ra $\mathscr{E}$ có tính chất bắc cầu.

Vậy $\mathscr{E}$ là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{Z}^+$.

Bài tập

Giải:

*Kiểm tra $\mathscr{E}$ là quan hệ thứ tự toàn phần hay bộ phận:

Rõ ràng không phải 2⋮3 đồng thời không phải 3⋮2. Như vậy $(2,3)\notin\mathscr{E} \wedge (3,2)\notin\mathscr{E}$

Tức là $\exists x,y\in\mathbb{Z}^+$, $(x,y)\notin\mathscr{E} \wedge (y,x)\notin\mathscr{E}$. Suy ra $\mathscr{E}$ là quan hệ thứ tự bộ phận.

b. Hãy tìm các phần tử đặc biệt của các tập hợp sau:

A={4, 8, 2, 16, 32}

+ Phần tử cực tiểu của A: 32
+ Phần tử cực đại của A: 2
+ Phần tử nhỏ nhất của A: 32
+ Phần tử lớn nhất của A: 2

B={3, 6, 2, 12, 24}

+ Phần tử cực tiểu của B: 24
+ Phần tử cực đại của B: 2, 3
+ Phần tử nhỏ nhất của B: 24
+ Phần tử lớn nhất của B: không có

C ={3, 6, 9, 12, 24},

+ Phần tử cực tiểu của C: 9, 24
+ Phần tử cực đại của C: 3
+ Phần tử nhỏ nhất của C: không có
+ Phần tử lớn nhất của C: 3

D={2, 4, 6, 9, 18}

+ Phần tử cực tiểu của D: 4, 18
+ Phần tử cực đại của D: 2, 9
+ Phần tử nhỏ nhất của D: không có
+ Phần tử lớn nhất của D: không có

Bài tập

2. Gọi $\mathbb{Z}^+$ là tập hợp các số nguyên dương. Định nghĩa trên $\mathbb{Z}^+$ quan hệ 2-ngôi Ω như sau:

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \mid y \vdots x\}$, tức là $(x,y) \in \Omega \Leftrightarrow y \vdots x$,

trong đó $y \vdots x \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}^+, y = kx$

a. Hãy chứng tỏ Ω là một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{Z}^+$ và cho biết Ω là quan hệ thứ tự toàn phần hay bộ phận.

b. Hãy tìm các phần tử đặc biệt của các tập hợp sau:

A={4, 8, 2, 16, 32}, B={3, 6, 2, 12, 24}, C ={3, 6, 9, 12, 24},

D={2, 4, 6, 9, 18}, F={3, 6, 9, 12, 24, 2, 4, 8},

E={4, 8, 2, 16, 32, 3, 6, 12, 24}