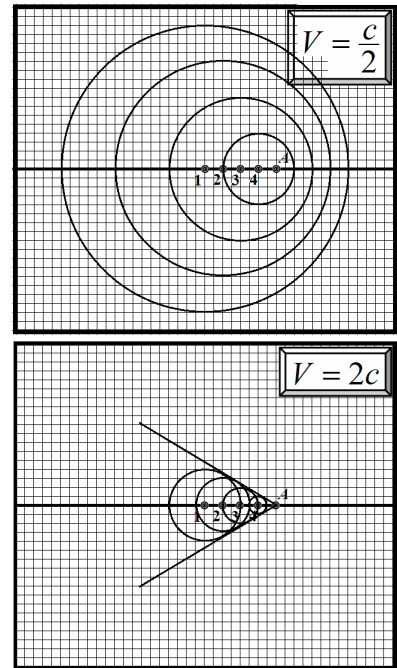


Задача 11-3 Принцип Гюйгенса, конус Маха, эффект Доплера, излучение Вавилова-Черенкова... и т.д.

1. Принцип Гюйгенса.

Требуемое построение, показано на рисунке.

Следует отметить, что во втором случае $V_0 = 2c$ появляется огибающая, которая и является фронтом ударной волны.



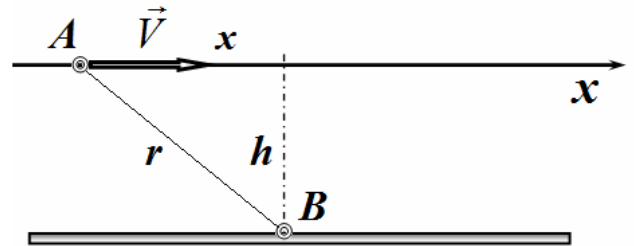
2. Конус Маха.

В момент времени τ источник находился в точке с координатой $x = V\tau$, на расстоянии

$$r = \sqrt{x^2 + h^2} = \sqrt{V^2\tau^2 + h^2} \quad (1)$$

Звук «запоздает» на время, за которое от пройдет это расстояние, Следовательно, дойдет до наблюдателя в момент времени

$$t = \tau + \frac{\sqrt{V^2\tau^2 + h^2}}{c}. \quad (2)$$



Для построения примерного графика этой функции можно отметить его следующие характерные особенности:

при $\tau = 0$ $t = \frac{h}{c}$, что соответствует времени, которое необходимо, чтобы звук прошел расстояние h ;

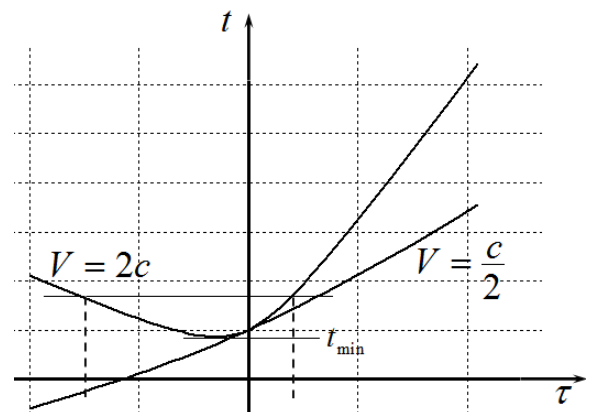
при $\tau \rightarrow +\infty$ $t \approx \tau + \frac{V}{c}\tau$, то есть график имеет асимптоту;

при $\tau \rightarrow -\infty$ $t \approx \tau - \frac{V}{c}\tau$ (надо правильно извлекать корень!) – вторая асимптота.

И вот здесь кроется самое интересное: при $V > c$ коэффициент наклона второй асимптоты становится отрицательным, следовательно, в этом случае функция (2) имеет точку минимума.

Поэтому графики данной зависимости имеют вид, показанный на рисунке.

Не сложно найти положение этого минимума: вычисляя производную от функции (2) и полагая ее равной нулю, получим уравнение



$$t' = 1 + \frac{V^2 \tau}{c \sqrt{V^2 \tau^2 + h^2}} = 0 \quad (3)$$

Это уравнение имеет единственный корень при $V > c$:

$$\tau^* = -\frac{h}{V \sqrt{\frac{V^2}{c^2} - 1}}. \quad (4)$$

Поэтому наблюдатель впервые услышит звук в момент времени

$$t_{\min} = t(\tau^*) = \frac{h}{cV} \sqrt{V^2 - c^2}. \quad (5)$$

Источник в этот момент времени будет находиться в точке с координатой

$$x_1 = V t_{\min} = h \sqrt{\frac{V^2}{c^2} - 1}. \quad (6)$$

В более поздние моменты времени наблюдатель будет одновременно слышать звуки, идущие от разных источников, движущихся в противоположных направлениях.

Именно наличие экстремума свидетельствует о возникновении ударной волны. Потому, что в течение малого промежутка времени Δt практически одновременно будут приходить волны, испущенные в течение гораздо более длительного промежутка $\Delta \tau$.

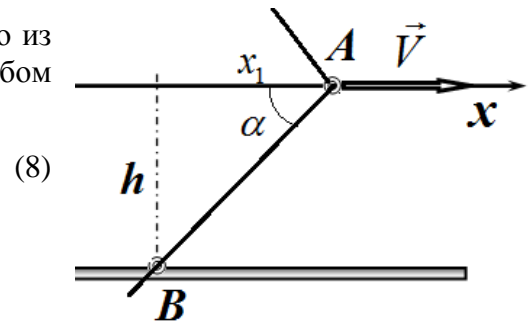
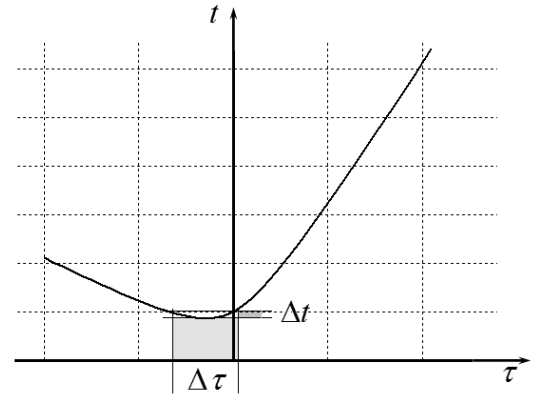
Формально можно поступить следующим образом. Пусть мощность источника равна P . В течение бесконечно малого промежутка времени $d\tau$ он испустит энергию $dE_0 = P d\tau$. Какая-то ее часть $dE_1 = \beta P d\tau$ (она определяется геометрией расположения источника и наблюдателя и размером ушей последнего) будет принята в течение промежутка времени dt , поэтому воспринимаемая мощность определяется по формуле

$$P_1 = \frac{dE_1}{dt} = \beta P \frac{d\tau}{dt} = \frac{\beta P}{t'}. \quad (7)$$

В точке экстремума эта мощность устремляется к бесконечности, что свидетельствует о наличии ударной волны.

Угол полураствора конуса Маха можно найти либо из построения Гюйгенса, либо из формулы (6), в любом случае он определяется соотношением

$$\sin \alpha = \frac{c}{V}.$$



3. Эффект Доплера.

Формулы для эффекта Доплера можно получить различными способами. В данном случае простейшим из них является способ, основанный на использовании полученной зависимости (2).

Если считать период волны, испускаемой источником малой величиной ($T_0 = \Delta\tau$), то воспринимаемый период также можно считать малой величиной² ($T_1 = \Delta t$). Их отношение можно найти, как производную от функции (2)

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{\Delta t}{\Delta\tau} = t'. \quad (9)$$

Эту производную мы уже вычисляли, поэтому сразу запишем:

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{T_0}{T_1} = \frac{1}{1 + \frac{V^2\tau}{c\sqrt{V^2\tau^2 + h^2}}}. \quad (10)$$

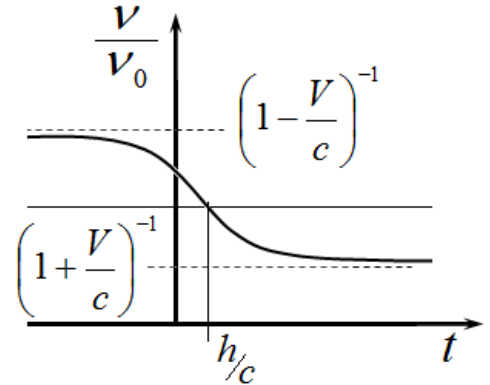
Для получения окончательного результата необходимо выразить τ через t , то есть решить уравнение (2) относительно τ .

Если наблюдатель находится на оси, вдоль которой движется источник, то воспринимаемую частоту можно найти из формулы (10), если положить $h = 0$. В этом случае получим

$$\nu_{\pm} = \frac{\nu_0}{1 \pm \frac{V}{c}}. \quad (11)$$

Знак плюс соответствует наблюдателю находящемуся позади источника (источник удаляется), так как в этом случае в формуле (10) $\tau > 0$. Знак минус – случаю, когда источник приближается к наблюдателю³.

Для наблюдателя, находящегося сбоку от линии движения источника, частота будет монотонно изменяться от ν_- до ν_+ . Для звука, испущенного в момент времени $\tau = 0$ и пришедшего в момент времени $t = \frac{h}{c}$, частота останется неизменной.



4. Излучение Вавилова-Черенкова.

4.1 Излучение начнется, если скорость электронов превысит скорость света в воде, то есть при $v = \frac{c}{n}$. В этом случае полная энергия электрона будет равна

$$E_{\min} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}, \quad (12)$$

² Очень интересный вопрос – а что такое частота в данный момент времени? чтобы говорить о частоте, надо зарегистрировать хотя бы одно колебание! Но в физике есть понятие физически малая величина: мала настолько, что можно считать дифференциалом, но велика настолько, что содержит большое число... в данном случае периодов колебаний.

³ Надо правильно извлекать корень квадратный!

где $E_0 = mc^2$ - энергия покоя электрона. Ее численное значение (в эВ) равно

$$E_0 = \frac{mc^2}{e} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3,0 \cdot 10^8)^2}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 512 \text{ кэВ}. \quad (13)$$

Минимальная энергия равна

$$E_{\min} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{512 \text{ кэВ}}{\sqrt{1 - \frac{1}{1,33^2}}} = 777 \text{ кэВ}, \quad (14)$$

4.2 При ускорении электрон должен пройти ускоряющую разность потенциалов, которая находится из условия (записано в эВ)

$$U = E_{\min} - E_0 = E_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} - 1 \right) = 2,65 \cdot 10^5 \text{ В}. \quad (15)$$

4.3 Так как за каждым электроном «тянется» световой конус, то при попадании его на линзу, в ее фокальной плоскости образуется кольцо, радиус которого углом полураствора конуса (не забыть учесть преломление на задней грации сосуда с водой!), а этот угол определяется скоростью электронов.

Скорость электронов найдем из формулы

$$2E_{\min} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2 \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} \Rightarrow v = \frac{c}{2n} \sqrt{3n^2 + 1}. \quad (16)$$

В соответствии с полученным ранее результатом, угол полураствора светового конуса определяется условием

$$\sin \alpha = \frac{c}{nv} = \frac{2}{\sqrt{3n^2 + 1}} = 0,796. \quad (17)$$

Для дальнейших расчетов удобно перейти от волнового фронта к лучам, которые перпендикулярны фронту. Как следует из рисунка, закон преломления на задней стенке имеет вид:

$$n \cos \alpha = \sin \gamma \quad (18)$$

Из этого выражение определяем угол γ (именно под этим углом к оптической оси лучи будут попадать на линзу): $\gamma = 53,6^\circ$

Теперь находим радиус кольца на экране:

$$R = F \operatorname{tg} \gamma \approx 14 \text{ см}. \quad (19)$$

