Задание 10(12)-2 . «Труба дело»

Электрическое сопротивление металлической трубы равно

$$R = \frac{\gamma_М L}{S_М} = \frac{\gamma_М L}{2\pi r h} = 2,71 \cdot 10^{-4} Ом. \quad (1)$$

Мощность, которая выделяется при протекании электрического тока в трубе по закону Джоуля-Ленца равна

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2 2\pi r h}{\gamma_М L} = 179 МВт. \quad (2)$$

Время, за которое растает весь лед в трубе, определим из уравнения теплового баланса. Теплота, выделившаяся при протекании электрического тока, пошла на нагревание льда на $\Delta T = 10 град$ и его плавление

$$P\tau_1 = Q_Л, \quad (3)$$

$$P\tau_1 = \pi r^2 L \rho_Л (\lambda_Л + c_Л \Delta T), \quad (4)$$

$$\tau_1 = \frac{r L^2 \rho_Л (\lambda_Л + c_Л \Delta T)\gamma_М}{2U^2 h} = 22,2 с. \quad (5)$$

Если на нагревание льда в трубе тратится часть α тепловой мощности P, то потребуется большее время для плавления льда:

$$\alpha P\tau_2 = \pi r^2 L \rho_Л (\lambda_Л + c_Л \Delta T), \quad (6)$$

$$\tau_2 = \frac{r L^2 \rho_Л (\lambda_Л + c_Л \Delta T)\gamma_М}{2\alpha U^2 h} = 44,4 с. \quad (7)$$

Стоит отметить, что это время пропорционально радиусу трубы

$$\tau = br, \quad (8)$$

где $b = \frac{L^2 \rho_Л (\lambda_Л + c_Л \Delta T)\gamma_М}{2\alpha U^2 h} = 222 \frac{с}{м}$.

Оставшаяся мощность $(1-\alpha)P$ пойдет на нагревание окружающей почвы и плавление льда в ней. За время t оттает почва в пределах цилиндра радиусом x, который найдем из уравнения теплового баланса

$$(1-\alpha)Pt = \pi(x^2 - (r+h)^2)L[\beta\rho_Л(\lambda_Л + c_Л\Delta T) + (1-\beta)\rho_n c_n \Delta T], \quad (9)$$

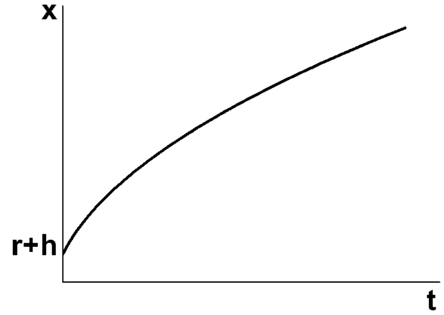
Обозначим выражение в квадратных скобках – теплоту оттаивания 1м^3 почвы

$$B = \beta\rho_Л(\lambda_Л + c_Л\Delta T) + (1-\beta)\rho_n c_n \Delta T = 50,5 \cdot 10^6 Дж/м^3. \quad (10)$$

Итого

$$x = \sqrt{(r+h)^2 + \frac{(1-\alpha)Pt}{\pi L B}}. \quad (11)$$

Примерный график этой зависимости изображен на рисунке.



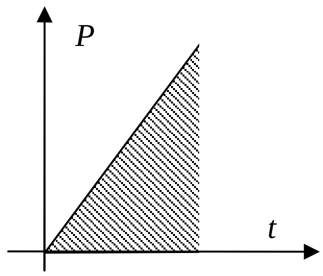
Сопротивление оттаявшей почвы равно

$$R_n = \frac{\gamma_n L}{S_n} = \frac{\gamma_n L}{\pi(x^2 - (r+h)^2)} = \frac{\gamma_n L^2 B}{(1-\alpha)Pt}. \quad (12)$$

При этом по закону Джоуля-Ленца в почве выделяется дополнительная мощность

$$P_n = \frac{U^2}{R_n} = \frac{U^2(1-\alpha)Pt}{\gamma_n L^2 B}. \quad (13)$$

Дополнительная тепловая мощность не постоянна, а прямо пропорциональна времени, тогда количество теплоты, которое выделится за время t можно определить, как площадь под графиком мощности от времени.



$$Q_n = \frac{U^2(1-\alpha)P}{\gamma_n L^2 B}\frac{t^2}{2}. \qquad (14)$$

За время τ_2 в почве выделится количество теплоты

$$Q_n(\tau_2) = \frac{U^2(1-\alpha)P}{\gamma_n L^2 B}\frac{\tau_2^2}{2}, \qquad (15)$$

при этом от трубы почва получит теплоту

$$Q(\tau_2) = (1-\alpha)P\tau_2. \qquad (16)$$

Отношение $\frac{Q_n(\tau_2)}{Q(\tau_2)} = \frac{U^2}{\gamma_n L^2 B}\frac{\tau_2}{2} = 0,01$, это означает, что дополнительно выделившейся в почве теплотой можно пренебречь.

Если x становится равно H, происходит «заземление» и нагревание трубы прекращается. Поскольку весь лед в трубе должен растопиться, то время τ_3, за которое это произойдет, равно по формуле (8)

$$\tau_3 = br_{\max}. \qquad (17)$$

Максимальный радиус трубы определяется из соотношения

$$H^2 = (r_{\max}+h)^2 + \frac{(1-\alpha)Pbr_{\max}}{\pi LB} = (r_{\max}+h)^2 + \frac{U^2 2\pi h r_{\max}}{\gamma_M L}\frac{(1-\alpha)br_{\max}}{\pi LB}. \qquad (18)$$

Получается квадратное уравнение относительно $r_{\max}$:

$$\left(1+\frac{2U^2h(1-\alpha)b}{\gamma_M L^2 B}\right)r_{\max}^2 + 2hr_{\max} + h^2 - H^2 = 0, \qquad (19)$$

которое несколько упрощается, учитывая малость h по сравнению с H и $r_{\max}$:

$$\left(1+\frac{2U^2h(1-\alpha)b}{\gamma_M L^2 B}\right)r_{\max}^2 - H^2 = 0, \qquad (20)$$

$$r_{\max} = \frac{H}{\sqrt{\left(1+\frac{2U^2h(1-\alpha)b}{\gamma_M L^2 B}\right)}} = 0,37\text{м}. \qquad (21)$$

Произойдет это за время

$$\tau_3 = br_{\max} = 82\text{с}. \qquad (22)$$