

**Задание 1. Разминка.****Задача 1.1 «Дутые аттракционы»**

**1.1.1 «Время накачки»** За одно качание насос захватывает из атмосферы массу  $m_1$  воздуха, попавшую в его открытую засасывающую камеру объёмом  $V_2$  при атмосферном давлении  $p_0$ . Из уравнения состояния идеального газа Клапейрона–Менделеева получим

$$p_0 V_2 = \frac{m_1}{M_B} RT \Rightarrow m_1 = \frac{p_0 V_2 M_B}{RT}. \quad (1)$$

Для нормальной работы аттракциона необходима масса воздуха  $m_B$

$$p_1 V_1 = \frac{m_B}{M_B} RT \Rightarrow m_B = \frac{p_1 V_1 M_B}{RT} = 291 \text{ кг}. \quad (2)$$

Как видим из (2), масса воздуха в аттракционе представляет собой достаточно значительную величину, для закачки которой скорее всего потребуется значительное время.

Поскольку насос равномерно (по массе) закачивает воздух, то механику Феде потребуется время для полной накачки

$$m_2 = m_1 N t \Rightarrow t = \frac{m_2}{N m_1} = \frac{p_1 V_1}{N p_0 V_2} = 2,5 \cdot 10^4 \text{ с} = 417 \text{ мин} = 6,9 \text{ ч}. \quad (3)$$

Как следует из (3) механик Федя никак не успеет к открытию аттракциона – нужно всё делать загодя (или поменять насос!). Действительно, таким насосом необходимо накачивать практически целый рабочий день, поскольку он рассчитан на обслуживание небольшого объема камеры автомобиля ( $V_3 \approx 60 \text{ л}$ ). Справедливости ради заметим, что все надувные аттракционы непрерывно подкачиваются в течение рабочего дня для компенсации утечки воздуха.

**1.1.2 «Скорость накачки»** Будем считать, что в процессе накачки поршень поднимается равномерно (т.е. находится в состоянии равновесия). Тогда давление под ним остаётся постоянным и равным

$$p(h) = p_0 + \frac{Mg}{S} = \text{const}, \quad (4)$$

что соответствует изобарному процессу.

Согласно уравнению Клапейрона - Менделеева можем записать

$$pV = (p_0 + \frac{Mg}{S})Sh = \frac{m}{M_B} RT. \quad (5)$$

Для высоты  $h$  поршня от массы закачанного газа  $m$  получаем выражение

$$h = \frac{m}{M_B} \frac{RT}{p_0 S + Mg} \Rightarrow h \sim m. \quad (6)$$

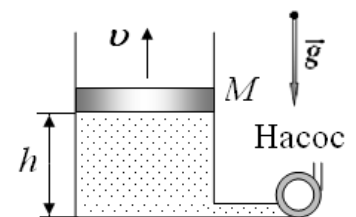
Согласно (6) высота поднятия поршня прямо пропорциональна массе закачанного в цилиндр газа. Согласно (3) через насос за время  $t$  пройдет масса воздуха

$$m(t) = m_1 N t = \frac{p_0 V_2 M_B}{RT} N \cdot t \Rightarrow m \sim t. \quad (7)$$

Следовательно, зависимость высоты  $h$  поднятия поршня от времени  $t$  при накачке имеет вид

$$h(t) = \frac{1}{M_B} \frac{RT}{p_0 S + Mg} \frac{p_0 V_2 M_B}{RT} N \cdot t = \frac{p_0 V_2 N}{p_0 S + Mg} \cdot t. \quad (8)$$

График полученной зависимости – прямая пропорциональность, поскольку



$$h(t) \sim t . \quad (9)$$

Из выражения (8) следует, что скорость движения поршня вверх равна коэффициенту пропорциональности в данной формуле

$$v = \frac{p_0 V_2 N}{p_0 S + Mg} = 2,0 \frac{\text{см}}{\text{с}} . \quad (10)$$

## Задача 1.2 «Газировка»

Количество газа, растворенного в воде, находится по формуле

$$\nu_0 = g V_L P_0 , \quad (1)$$

где обозначено  $g$  - растворимость углекислого газа в воде при данной температуре.

Если бы весь этот углекислый газ находился в газообразном состоянии, то он бы занимал объем, равный

$$P_0 V_0 = \nu_0 RT = g V_L P_0 RT \Rightarrow V_0 = \nu_0 RT = g V_L RT \quad (2)$$

Пусть объем газа под поршнем стал равным  $V$ , а его давление -  $P$ . При этом давлении количество растворенного газа равно

$$\nu_1 = g V_L P . \quad (3)$$

Следовательно, в газообразном состоянии находится

$$\nu = \nu_0 - \nu_1 = g V_L (P_0 - P) \quad (4)$$

молей углекислого газа. Для определения давления этого газа следует решить уравнение Менделеева-Клапейрона

$$PV = \nu RT = g V_L (P_0 - P) RT . \quad (5)$$

Из которого следует

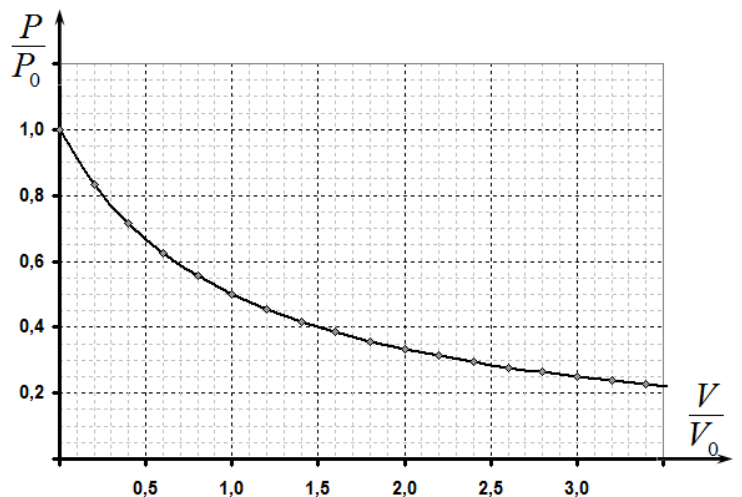
$$P = \frac{g V_L RT}{V + g V_L RT} P_0 . \quad (6)$$

Учитывая формулу (2), это выражение можно представить в виде

$$P = \frac{P_0}{\frac{V}{V_0} + 1} . \quad (7)$$

Точный график можно построить в

координатах  $\left( \frac{P}{P_0}, \frac{V}{V_0} \right)$  см. рисунок.



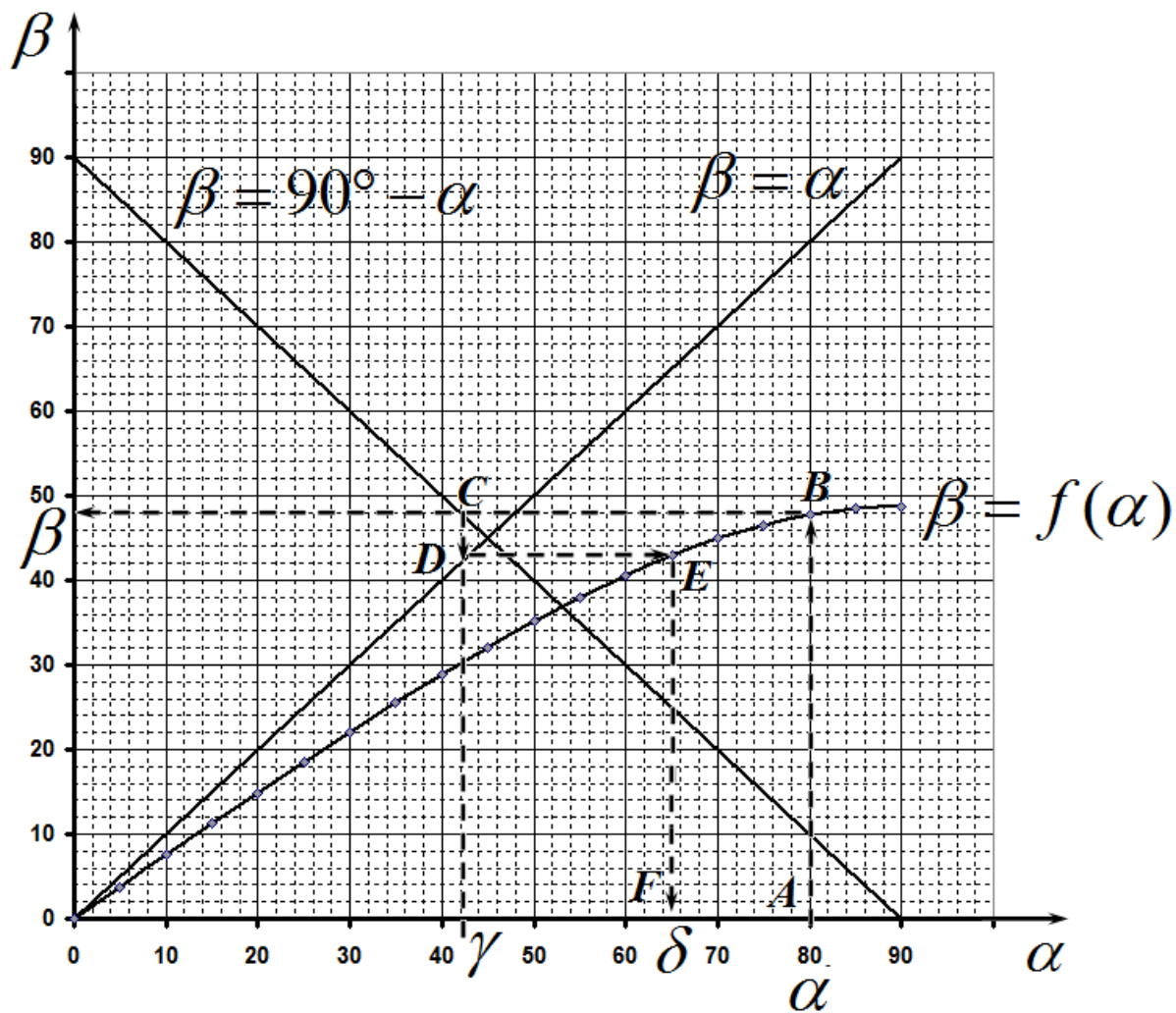
### Задача 1.3 «Водяной куб»

Непосредственно из рисунка, отражающего ход лучей, следует что

$$\gamma = 90^\circ - \beta \quad (1)$$

Поэтому на графике построим прямую, описываемую функцией  $\beta = 90^\circ - \alpha$ . Также построим прямую, описываемую выражением  $\beta = \alpha$ .

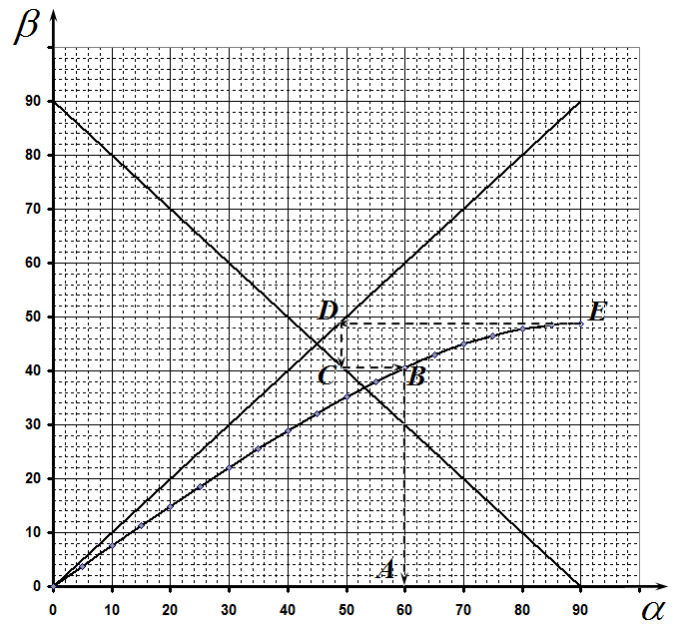
#### 1.3.1



Последовательность графического решения задачи следующая:

- от точки  $A$  ( $\alpha = 80^\circ$ ) проводим вертикальную прямую до пересечения с графиком функции  $\beta = f(\alpha)$  (точка  $B$ ), ее ордината равна углу  $\beta$  (по графику находим  $\beta \approx 48^\circ$ );
- от точки  $B$  проводим горизонтальную прямую до пресечения с прямой  $\beta = 90^\circ - \alpha$ , (точка  $C$ ), ее абсцисса равна углу  $\gamma$  (по графику находим  $\gamma \approx 42^\circ$ );
- от точки  $C$  проводим вертикальную прямую до пересечения с прямой  $\beta = \alpha$  (точка  $D$ ), ее ордината также равна  $\gamma$ ;
- наконец, от точки  $D$  проводим горизонтальную прямую до пересечения с заданной функцией  $\beta = f(\alpha)$  (точка  $E$ ), ее абсцисса и есть искомый угол  $\delta = f^{-1}(\gamma)$ ;

здесь  $f^{-1}$  - обозначена обратная функция.  
По графику находим  $\delta \approx 65^\circ$ .



1.3.2 Аналогичная процедура для начального значения  $\alpha = 62^\circ$  приводит к значению  $\delta \approx 80^\circ$ .

1.3.3 Из графика зависимости  $\beta = f(\alpha)$  видно, что максимальное значение угла преломления равно  $\beta_{\max} = 49^\circ$ . Для нахождения соответствующего значения угла падения  $\alpha$  необходимо от «конечной точки  $E$  (координатами  $(90^\circ, 49^\circ)$ ) проделать обратный путь  $EDCBA$ , который приводит к значению  $\alpha_{\min} \approx 60^\circ$ . При меньших углах падения решения задачи не существует, это означает, что на второй грани луч полностью отразится. Таким образом, диапазон углов, при которых луч выйдет через вторую грань  $60^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

## Задание 2. Средние скорости.

2.1.1. Модуль средней скорости:  $\langle v \rangle = \frac{\Delta r}{t}$ . Когда точка проходит через первоначальное

положение,  $\Delta r = 0 \Rightarrow \langle v \rangle = 0$ . Период вращения – это промежуток времени между двумя последовательными обращениями в ноль средней скорости. На рисунке это  $T = 0,5\text{с}$ .