

Из уравнений (10)-(11) с учетом начальных условий получим соотношение

$$\frac{(h_0 - x)^2}{2} = \frac{\beta_0 t_1 \rho_0}{\rho_1^2 \lambda} \tau, \quad (12)$$

из которого определим закон изменения толщины льда

$$x = h_0 - \sqrt{\frac{2\beta_0 t_1 \rho_0}{\rho_1^2 \lambda} \tau}, \quad (13)$$

и время плавления слоя льда

$$\tau = \frac{\rho_1^2 \lambda h_0^2}{2\beta_0 t_1 \rho_0} \approx 1,9 \cdot 10^2 \text{ с} \approx 22 \text{ суток}. \quad (14)$$

4. Так как нагрев воды осуществляется снизу, то благодаря конвекции, происходит ее быстрое перемешивание, поэтому можно считать, что температура воды одинакова во всех точках, обозначим эту температуру t . В такой ситуации теплота, поступающая от нагретой плиты, расходуется на плавление льда и нагрев образующейся талой воды. Уравнения теплового баланса для малого промежутка времени $\Delta \tau$ в этом случае имеют вид (Δx - по-прежнему изменение толщины льда за этот промежуток времени)

$$\gamma(t_1 - t)S\Delta \tau = \gamma(t - t_0)S\Delta \tau + c_0 \rho_1 S\Delta x(t - t_0), \quad (15)$$

$$\gamma(t - t_0)S\Delta \tau = \lambda \rho_1 S\Delta x. \quad (16)$$

Избавляясь от скорости плавления $\frac{\Delta x}{\Delta \tau}$, получим уравнение для определения температуры воды

$$t^2 + 2\frac{\lambda}{c_0}t - \frac{\lambda}{c_0}t_1 = 0,$$

из которого находим температуру воды $t = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{c_0}\right)^2 + \frac{\lambda}{c_0}t_1} - \frac{\lambda}{c_0} \approx 4,85^\circ\text{C}$, которая оказывается постоянной. Следовательно, и скорость плавления льда также постоянна

$$\frac{\Delta x}{\Delta \tau} = \frac{\gamma}{\lambda \rho_1}. \quad (17)$$

Поэтому толщина льда будет изменяться по линейному закону

$$x = h_0 - \frac{\gamma}{\lambda \rho_1} \tau, \quad (18)$$

а время плавления рассчитывается по формуле

$$\tau = \frac{\lambda \rho_1}{\gamma} h_0 \approx 1,5 \cdot 10^4 \text{ с} \approx 4,3 \text{ часа}. \quad (20)$$

Задание 11.2

Так как пластинки одинаковы, то сообщенный заряд q распределится между ними поровну. Электрическая сила, действующая на подвижную пластинку, может быть определена из очевидной цепочки равенств

$$F = E \frac{q}{2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{q}{2} = \frac{1}{2\epsilon_0} \cdot \frac{q}{2S} \cdot \frac{q}{2} = \frac{q^2}{8\epsilon_0 S}. \quad (1)$$

Эта постоянная сила отталкивания уравновешивается силой упругости пружинок

$$F = kx, \quad (2)$$

поэтому заряд прибора и смещением пружинок связаны соотношениями

$$x = \frac{q^2}{8\epsilon_0 Sk}; \quad q = \sqrt{8\epsilon_0 Skx}. \quad (3)$$

Минимальный заряд, который можно измерить с помощью данного прибора, равен

$$q_{\min} = \sqrt{8\varepsilon_0 S k \delta x} = 4,2 \cdot 10^{-10} \text{ Кл}, \quad (4)$$

а максимальный

$$q_{\max} = \sqrt{8\varepsilon_0 S k \Delta x} = 4,2 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}. \quad (5)$$

Относительная погрешность измерения заряда рассчитывается по формуле

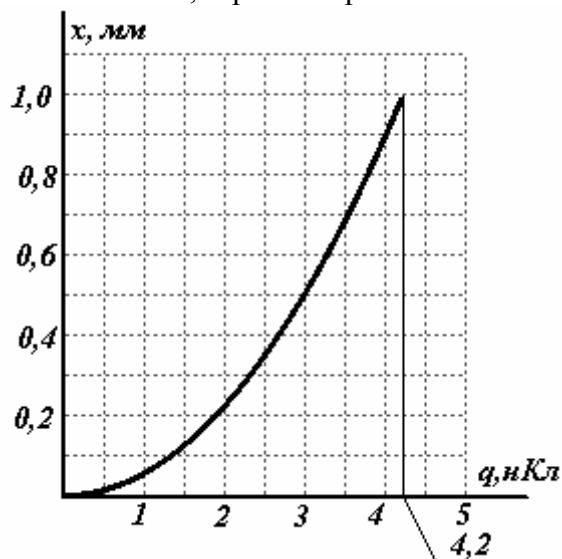
$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{q'_x \delta x}{q} = \frac{\delta x}{2x}, \quad (7)$$

она минимальна при максимальном смещении пластинки, при котором составляет 0,5%.

График зависимости смещения пластинки от величины заряда представляет собой «банальную» параболу

$$x = 5,6 \cdot 10^{-2} q^2,$$

где x - измерена в миллиметрах, а q в нанокюлонах.



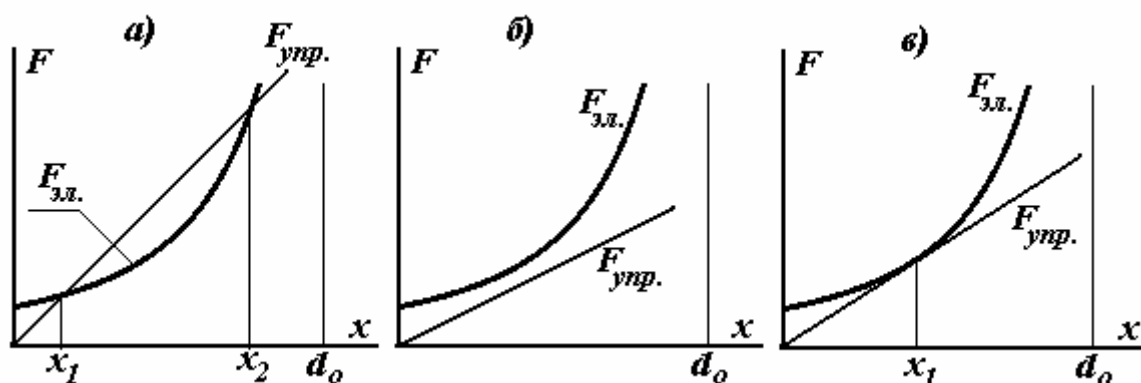
2. При заданном напряжении между пластинами при их относительном смещении измеряется заряд каждой из пластин. В этом случае силу электрического притяжения можно вычислить с помощью следующей цепочки

$$F = \sigma S \cdot \frac{E}{2} = \varepsilon_0 E S \cdot \frac{E}{2} = S \cdot \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 S}{2} \left(\frac{U}{d} \right)^2 = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2(d_0 - x)^2}. \quad (8)$$

Приравнявая ее к силе упругости пружин, получим уравнение, связывающее смещение пластинки и приложенное напряжение

$$\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2(d_0 - x)^2} = kx. \quad (9)$$

Выразить из этого уравнения в явном виде x как функцию U , по меньшей мере, затруднительно. Проанализируем уравнение (9) графически, для чего построим графики зависимостей электрической силы и силы упругости от смещения пластинки.



Легко заметить, что в интересующем нас диапазоне $x \in [0, d_0]$ уравнение (9) может иметь либо два корня (а), либо один (в), либо ни одного корня (б).

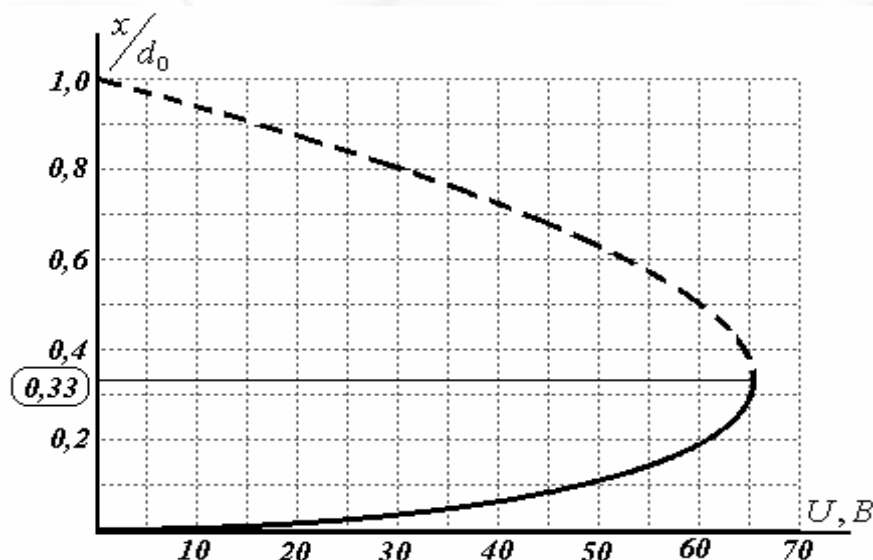
Традиционный анализ устойчивости (электрическая сила стремится увеличить смещение, а сила упругости – уменьшить), показывает, что в случае (а) устойчивым является меньший корень, в случае (в) – корень неустойчив. Отсутствие корней свидетельствует об отсутствии положения равновесия подвижной пластинки, то есть в этом случае никакие измерения невозможны.

Если сложно построить график зависимости $x(U)$, то можно построить зависимость $U(x)$! Выразим из уравнения (9)

$$U = \sqrt{\frac{2kd_0^3}{\varepsilon_0 S}} \cdot \left(1 - \frac{x}{d_0}\right) \sqrt{\frac{x}{d_0}}. \quad (10)$$

Обозначим $A = \sqrt{\frac{2kd_0^3}{\varepsilon_0 S}} \approx 170B$, $\xi = \frac{x}{d_0}$ и получим «совсем простую зависимость

$U = A(1-\xi)\sqrt{\xi}$. Построить график этой функции можно с помощью традиционных методов анализа функций. Результат такого построения показан на рисунке.



Как было отмечено выше, верхняя ветвь этой зависимости неустойчива, поэтому изображена пунктиром. Из анализа функции (10) следует, что максимальное напряжение, поддающееся измерению достигается при $\xi = 0,33$ и равно $U_{\max} \approx 65B$. Минимальное измеримое напряжение рассчитывается при подстановке в функцию (10) минимально измеримого $x = \delta x$. В этом случае $U_{\min} \approx 12B$.

Задание 11.3

а) При достаточно большом трении движение цилиндра по наклонной плоскости будет происходить без проскальзывания. При этом на него будут действовать три силы — тяжести $m\vec{g}$, реакции опоры \vec{N} и трения покоя $\vec{F}_{тр}$. Сила трения покоя при этом будет раскручивать цилиндр так, чтобы в любой момент времени скорость v его поступательного движения совпадала с линейной скоростью вращения

$$v = \omega R. \quad (1)$$