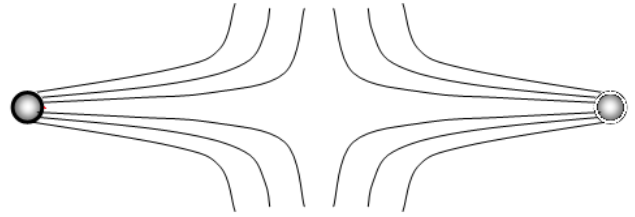


## Задача 11-2 Электромагнитная сила Кориолиса.

1.1 Схематическая картина силовых линий электрического поля, создаваемого кольцом в вертикальной плоскости, проходящей через центр кольца имеет вид:



1.2 Для доказательства выражения (1) рассмотрим малый элемент кольца, несущий заряд  $dq$  и найдем его вклад в результирующий вектор напряженности поля

$$dE_x = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos \alpha}{l^3} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{r + R \cos \varphi}{(R^2 + r^2 + 2rR \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2)$$

При выполнении условия  $r \ll R$  выражение (2) можно разложить по малому параметру и использовать приближенную формулу  $(1 + \xi)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}\xi$ .

Суммируя по всем углам  $\varphi$  и учитывая, что среднее значение функции  $y = \cos \varphi$  на промежутке  $[0, 2\pi]$  равно нулю, получим, а функции  $y = \cos^2 \varphi$  среднее значение равно  $\frac{1}{2}$ , получим

$$\begin{aligned} E &= \int dE_x = \int \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos \alpha}{l^3} = \int \frac{r + R \cos \varphi}{R^3 (1 + 2\frac{r}{R} \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}} \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} \approx \\ &\approx \int \frac{(r + R \cos \varphi)}{R^3} (1 - 3\frac{r}{R} \cos \varphi) \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} = \frac{Qr}{8\pi\epsilon_0 R^3}. \end{aligned} \quad (3)$$

Можно рассуждать и иначе, используя теорему Гаусса, выходящую, правда, за рамки школьной программы. Суммируя элементарные напряженности, создаваемые малыми элементами на оси кольца зарядом  $Q$  и радиусом  $R$  на расстоянии  $h$  от его центра, получим, что вектор результирующего поля направлен вдоль оси кольца и равен по модулю

$$E(h) = \frac{Qh}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + h^2)^{3/2}}.$$

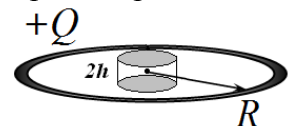
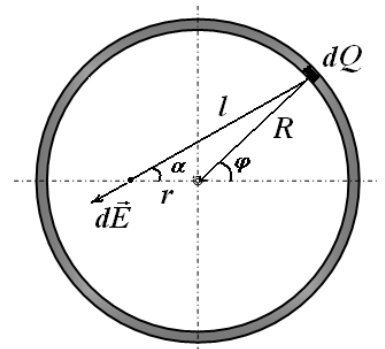
Для доказательства формулы (1) рассмотрим поток вектора напряженности электрического поля кольца (в отсутствие маятника) через небольшой цилиндр малой высоты ( $h \rightarrow 0 \Rightarrow h \ll R$ ), центр симметрии которого находится в центре кольца.

Модуль вектора напряженности электрического поля на верхнем (нижнем) торце цилиндра по модулю равен

$$E(h) = \frac{Qh}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + h^2)^{3/2}} \approx (h \rightarrow 0) \approx \frac{Qh}{4\pi\epsilon_0 R^3}. \quad (4)$$

Согласно теореме Гаусса для данной замкнутой поверхности (цилиндра) имеем

$$2\pi r^2 E(h) + \Phi_{\text{бок}} = 0. \quad (5)$$



Выражая из (5) поток  $\Phi_{\text{бок}}$  вектора напряженности электрического поля через боковую поверхность рассматриваемого цилиндра и учитывая, что он равен  $\Phi_{\text{бок}} = E(r) \cdot 2\pi r h$ , окончательно получаем

$$E(r) = \frac{2\pi r^2 E(h)}{2\pi r h} = \frac{r}{h} \cdot \frac{Qh}{4\pi\epsilon_0 R^3} = -\frac{r}{2} \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}. \quad (6)$$

Знак «-» в выражении (3) говорит о том, что вектор напряженности  $\vec{E}(\vec{r})$  направлен к центру кольца. Следовательно, в векторном виде можем записать искомое выражение из условия

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\vec{r}}{2} \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}. \quad (7)$$

1.3 Для нахождения периода малых колебаний заряженного небольшого шарика ( $q > 0$ ) рассмотрим его небольшое отклонение от положения равновесия. В этом случае уравнение движения примет вид

$$m\ddot{x}(t) = -\frac{mg}{l}x(t) - \frac{x(t)}{2} \cdot \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3}, \quad (8)$$

$$\ddot{x}(t) = -\left(\frac{g}{l} + \frac{1}{2m} \cdot \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3}\right)x(t) = -\omega^2 x(t). \quad (9)$$

Период таких колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\left(\frac{g}{l} + \frac{1}{2m} \cdot \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3}\right)^{-1}} = 2\pi \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{g}{l} + \frac{1}{2m} \cdot \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3}\right)}} \text{ с} \quad (10)$$

Как видим из формулы (10), при положительно заряде шарика колебания возможны всегда. При отрицательном заряде выражение под корнем может стать отрицательным. В этом случае положения равновесия в центре кольца становится не устойчивым, при котором колебания невозможны.

Перепишем формулу для периода колебаний в виде

$$T = 2\pi \sqrt{\left(\frac{g}{l} + \frac{1}{2m} \cdot \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3}\right)^{-1}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left(1 + \frac{l}{2mg} \cdot \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3}\right)^{-1}} = \frac{T_0}{\sqrt{1+\beta}}, \quad (11)$$

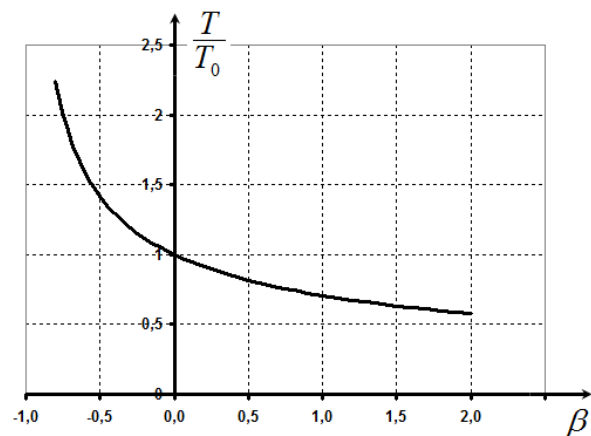
где  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$  - период колебаний

свободного маятника,  $\beta = \frac{l}{2mg} \cdot \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3}$  -

параметр, пропорциональный заряду шарика. Колебания становятся невозможными при

$$q \leq -\frac{8\pi\epsilon_0 mg R^3}{Ql}. \quad (12)$$

Представление зависимости в форме (11) позволяет достаточно просто построить ее график, который показан на рисунке.



Для численных оценок влияния заряда на период колебаний маятника следует оценить параметр  $\beta$ . Оценку возможного заряда шарика, найдем, считая, что с помощью электрофорной машины шарiku можно сообщить максимальный потенциал. Следовательно, найдем заряд шарика от электростатической машины

$$q = 4\pi\epsilon_0 rU \approx 4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 25 \cdot 10^3 \approx 1,4 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}.$$

Будем считать, что такой же заряд можно сообщить и кольцу.

$$\text{Масса такого шарика } m = \frac{\pi d^3}{6} \rho \approx 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

Тогда параметр  $\beta$  оценивается как  $\beta = \frac{l}{2mg} \cdot \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3} \approx 2 \cdot 10^{-3}$ . Так как эта величина мала, То формулу для периода колебаний можно записать как

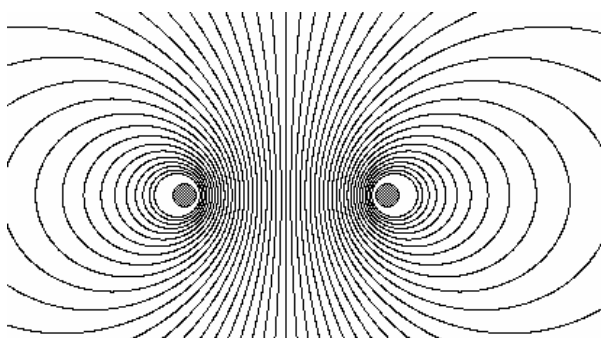
$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1+\beta}} \approx T_0 \left(1 - \frac{\beta}{2}\right). \quad (13)$$

Откуда следует, что период колебаний может измениться на величину порядка 0,1%.

## Часть 2. Магнитная сила.

### 2.1

Картина силовых линий магнитного поля, создаваемого кольцом имеет вид (это результат точного расчета). Вектор индукции в плоскости кольца направлен перпендикулярно этой плоскости.



2.2 По теореме Био-Савара вклад малого элемента тока в индукцию поля в центре кольца рассчитывается по формуле

$$B_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta l_i}{R^2}. \quad (14)$$

Суммируя выражение (11) по малым участкам, получаем

$$B = \sum_i B_i = \sum_i \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta l_i}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \sum_i \Delta l_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \cdot 2\pi R = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R}.$$

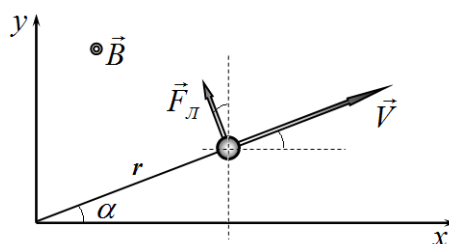
Заметим, что данная формула приведена в школьном учебнике «Физика -11» (2008 г., стр. 156).

Из симметрии задачи следует, что в центре кольца индукция магнитного поля имеет экстремум (максимум), поэтому при отклонении от центра на малую величину  $r$  индукция поля будет изменяться на величину порядка  $r^2$ . Следовательно, с точностью до малых величин первого порядка поле можно считать однородным.

2.4 В магнитном поле на движущийся шарик действует сила Лоренца  $F_L = qVB$ , направленная перпендикулярно вектору скорости. Так колебания считаем малыми, то выходом шарика из плоскости кольца следует пренебрегать.

Пусть в некоторый момент времени вектор скорости частицы направлен под углом  $\alpha$  к оси  $Ox$ . Тогда проекции силы Лоренца на оси координат будут иметь вид

$$\begin{aligned} F_x &= -qVB \sin \alpha = -qBV_y \\ F_y &= qVB \cos \alpha = qBV_x \end{aligned} \quad (15)$$



Тогда на основании 2 закона Ньютона можно записать уравнения, определяющие движение шарика (с учетом горизонтальной составляющей силы тяжести  $mg \frac{r}{l}$ , где  $r$  - расстояние до центра кольца):

$$\begin{aligned} a_x &= -\frac{g}{l}x - \frac{qB}{m}V_y \\ a_y &= -\frac{g}{l}y + \frac{qB}{m}V_x \end{aligned} \quad (16)$$

Обозначим частоту колебаний маятника в отсутствие магнитного поля через  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ , а величину  $\omega_B = \frac{qB}{m}$  называют циклотронной частотой. С учетом этих обозначений система уравнений (16) перепишется в виде

$$\begin{aligned} a_x &= -\omega_0^2 x - \omega_B V_y \\ a_y &= -\omega_0^2 y + \omega_B V_x \end{aligned} \quad (17)$$

Заметим, что условие малости силы Лоренца эквивалентно условию  $\omega_B \ll \omega_0$ .

Качественно доказать наличие вращения можно следующим образом. Пусть маятник «стартует» из нижней точки. На шарик действует сила Лоренца, перпендикулярная его скорости, эта сила увеличивает угловую скорость поворота плоскости колебаний, когда шарик доходит до положения максимального отклонения, угловая скорость поворота достигает максимального значения. При движении в обратную сторону, сила Лоренца направлена также в противоположную сторону. Поэтому угловая скорость поворота будет уменьшаться до нуля (но направления поворота остается прежним!). После прохождения нижней точки процесс повторяется. Таким образом направление вращения совпадает с направлением действия силы Лоренца при движении от нижней точки к положению максимального отклонения. Для положительного заряда и указанного в условии направления тока в кольце вращение против часовой стрелки.

Один из возможных способов решения данной задачи – «честный, трудовой»

Предположим, что сделанное предположение о повороте плоскости колебаний, верно. Тогда закон движения шарика должен иметь вид

$$\begin{aligned} x &= A \sin \omega_0 t \cdot \cos \Omega t \\ y &= A \sin \omega_0 t \cdot \sin \Omega t \end{aligned} \quad (18)$$

( $\Omega$  - угловая скорость вращения плоскости колебаний):

Вычисляя производные, получим выражения для проекций скоростей:

$$\begin{aligned} V_x &= A \omega_0 \cos \omega_0 t \cdot \cos \Omega t - A \Omega \sin \omega_0 t \cdot \sin \Omega t = A \omega_0 \cos \omega_0 t \cdot \cos \Omega t - \Omega y \\ V_y &= A \omega_0 \cos \omega_0 t \cdot \sin \Omega t + A \Omega \sin \omega_0 t \cdot \cos \Omega t = A \omega_0 \cos \omega_0 t \cdot \sin \Omega t + \Omega x \end{aligned} \quad (20)$$

Еще раз вычисляем производную и получаем выражения для ускорений:

$$\begin{aligned} a_x &= -A \omega_0^2 \sin \omega_0 t \cdot \cos \Omega t - 2A \Omega \omega_0 \cos \omega_0 t \cdot \sin \Omega t - A \Omega^2 \sin \omega_0 t \cdot \cos \Omega t \\ a_y &= -A \omega_0^2 \sin \omega_0 t \cdot \sin \Omega t + 2A \Omega \omega_0 \cos \omega_0 t \cdot \cos \Omega t - A \Omega^2 \sin \omega_0 t \cdot \sin \Omega t \end{aligned} \quad (21)$$

Если из формул (20) выразить:

$$\begin{aligned} A \omega_0 \cos \omega_0 t \cdot \cos \Omega t &= V_x + \Omega y \\ A \omega_0 \cos \omega_0 t \cdot \sin \Omega t &= V_y - \Omega x \end{aligned} \quad (22)$$

И подставить в формулы для проекций ускорения, то их можно привести к виду:

$$\begin{aligned} a_x &= -\omega_0^2 x - 2\Omega V_y + \Omega^2 x \\ a_y &= -\omega_0^2 y + 2\Omega V_x + \Omega^2 y \end{aligned} \quad (23)$$

Сравнивая эти выражения с уравнениями движения заряженного шарика (17), видим, что они отличаются слагаемыми, пропорциональными  $\Omega^2$ . Если считать угловую скорость поворота малой, то ими можно пренебречь<sup>1</sup>. В этом случае, полученные выражения полностью совпадают. Следовательно, высказанное предположение верно – действительно плоскость колебаний поворачивается под действием силы Лоренца. Из сравнения уравнений следует, что угловая скорость поворота равна половине циклотронной частоты  $\omega_{ер.} = \frac{qB}{2m}$ . Поэтому период одного полного оборота оказывается равным

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{qB}}. \quad (24)$$

Оценим эту величину. Индукция магнитного поля в центре кольца  $B = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10}{2 \cdot 0,15} \approx 4 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$ . Тогда время одного оборота

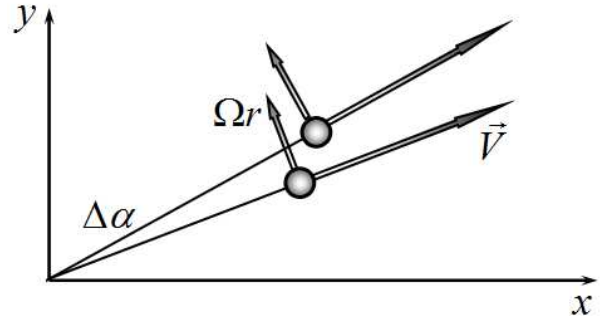
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{qB}} = 2\pi \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{1,4 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^{-5}}} \approx 7,5 \cdot 10^5 \text{ с} \approx 9 \text{ суток}.$$

За такое время всякие колебания маятника затухнут!

Иной способ решения основывается на сравнении уравнений движения маятника в магнитном поле и маятника Фуко.

### Часть 3. Маятник Фуко.

Физическая картина движения ясна: плоскость колебаний маятника сохраняется – поворачивается система отсчета! Поэтому закон движения (18) выполняется строго. Можно повторить длинную процедуру вычисления производных, приводящую к уравнениям (16) со всеми вытекающими последствиями. Однако для вычисления ускорений можно воспользоваться простыми геометрическими построениями. Если



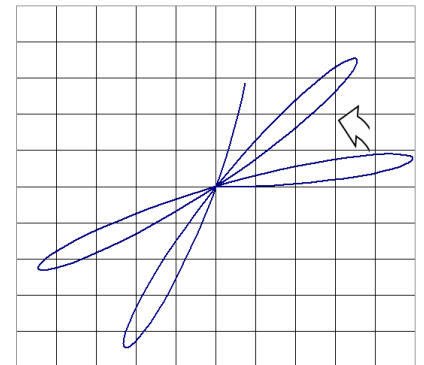
нарисовать векторы скорости в два близких момента времени (см. рис. – здесь  $\vec{V}$  – вектор скорости маятника в не вращающейся системе,  $\Omega r$  – переносная скорость), то можно определить радиальную (вдоль вектора скорости) и азимутальную (перпендикулярную вектору скорости) компоненты ускорения.

Поперечное ускорение обусловлено двумя причинами:

Изменением расстояния от оси вращения:  $\Delta V_n = \Omega \cdot \Delta r$ ;

Поворотом вектора собственной скорости  $\Delta V_n = V \cdot \Delta \alpha$ .

Изменение продольной составляющей обусловлено поворотом вектора переносной скорости и пропорционально  $\Omega^2$ , поэтому им можно пренебречь. Тем самым легко прийти к выражениям для ускорений. Если их выразить через скорость во вращающейся системе отсчета, то



<sup>1</sup> Можно и не пренебрегать, но тогда надо учесть изменение частоты собственных колебаний маятника под действием силы Лоренца.

приходим к уравнениям вида (17). Тем самым в очередной раз доказывается, что движение заряженного маятника аналогично колебаниям во вращающейся системе отсчета.

В заключение посмотрите на примерную траекторию движения шарика маятника во вращающейся системе отсчета. Здесь угловая скорость вращения в 10 раз меньше круговой частоты колебаний маятника, хотя в реальности это отношение значительно меньше!

### Задача 11-3. Выпад против Эйнштейна?

#### Часть 1. Два шарика.

При движении с ускорением сила упругости пружинки должна обеспечивать ускорение нижнего шарика, поэтому в положении равновесия должно выполняться условие

$$F = m(g + a_0), \quad (1)$$

Следовательно, в этом положении удлинение пружинки равно

$$\Delta x = \frac{m(g + a_0)}{\gamma}. \quad (2)$$

Таким образом, смещение от положения прежнего положения равновесия оказывается равным

$$\Delta x_1 = \frac{ma_0}{\gamma}. \quad (3)$$

Эта величина является амплитудой колебаний. Поэтому закон движения шарика (с учетом начальных условий и изображенной оси координат) имеет вид

$$x(t) = -l_0 - \frac{m(g + a_0)}{\gamma} + \frac{ma_0}{\gamma} \cos \omega t. \quad (4)$$

Где  $\omega = \sqrt{\frac{\gamma}{m}}$  - циклическая частота колебаний пружинного маятника.

Максимальное удлинение пружинки будет равно (через половину периода колебаний):

$$\Delta x = \frac{m(g + 2a_0)}{\gamma} \quad (5)$$

Относительное удлинение после прекращения колебаний:

$$\varepsilon_x = \frac{m(g + a_0)}{\gamma l_0} \quad (6)$$

может быть мало при большой жесткости пружинки.

Относительное изменение силы упругости

$$\varepsilon_F = \frac{\Delta F}{mg} = \frac{a_0}{g} \quad (7)$$

Не зависит от параметров груза и пружины.

#### Часть 2. Цепочка.

Рассмотрим пружинку, на которой висит  $k$  шариков снизу. Ее удлинение можно найти из условия равновесия

$$\Delta x_k = k \frac{mg}{\gamma}. \quad (8)$$

