

Задача 11-1 Подобие и размерность.

1. Запишем Второй закон Ньютона:

$$ma = -k\sqrt{x} + g \quad (1).$$

При изменении пространственного и временного масштабов, уравнение примет вид:

$$m \frac{\beta^2}{\alpha} a = -k \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{x} + \frac{\beta^2}{\alpha} g \quad (2).$$

Заметим, что коэффициент $\frac{\beta^2}{\alpha}$ должен также присутствовать при ускорении свободного падения. А можно было сразу отбросить слагаемое g , т.к. известно, что наличие постоянной силы приводит только к смещению положения равновесия.

Уравнение (2) будет таким же, как и (1) при условии, что:

$$\beta^2 = \sqrt{\alpha} \quad (3).$$

Т.е. период колебаний будет пропорционален корню четвертой степени от амплитуды:

$$T \sim \sqrt[4]{A} \quad (4).$$

2. Полная энергия падающего тела:

$$\frac{mv^2}{2} + C \cdot r^n = E \quad (5)$$

В новых единицах измерения:

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} \frac{mv^2}{2} + C \frac{1}{\alpha^n} r^n = E \quad (6)$$

или

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} \left(\frac{mv^2}{2} + C \frac{\alpha^{2-n}}{\beta^2} r^n \right) = E \quad (7).$$

Следовательно, одинаковость решений реализуется при:

$$\beta^2 = \alpha^{2-n} \quad (8).$$

Время падения в силовой центр:

$$T \sim A^{1-n/2} \quad (9).$$

3. Уравнение колебаний имеет вид:

$$L \frac{\Delta I}{\Delta t} + C q^2 = 0 \quad (10).$$

Выбрав новые единицы измерения времени и заряда ($\tilde{q} = \frac{q}{a}$), получим:

$$\frac{\beta^2}{\alpha} L \frac{\Delta I}{\Delta t} + C \frac{1}{\alpha^2} q^2 = 0 \quad (11).$$

Одинаковое решение (10) и (11) будет при:

$$\beta^2 = 1/\alpha \quad (12).$$

Таким образом, период колебаний обратно пропорционален корню квадратному из амплитуды заряда на конденсаторе:

$$T \sim 1/\sqrt{\alpha} \quad (13).$$