



Гродно 1999г. (Решения задач)

9 класс.

1. Так как плита наклонена под углом 45° к горизонту, то после удара скорость шарика \vec{V}_1 будет направлена горизонтально. Поэтому, движение шарика после удара описывается уравнениями

$$\begin{cases} S = V_1 t_2 \\ h = \frac{gt_2^2}{2} \end{cases}, \quad (1)$$

где t_2 - время движения от удара о плиту до падения на землю. Из системы уравнений (1) находим

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}; \quad V_1 = S \sqrt{\frac{g}{2h}}. \quad (2)$$

Зная скорость шарика перед ударом о плиту, найдем время его движения от начальной точки A до удара

$$t_1 = \frac{V_1}{g} = \frac{S}{\sqrt{2gh}}. \quad (3)$$

Полное время движения шарика рассчитаем по формуле

$$t = t_1 + t_2 = \frac{S}{\sqrt{2gh}} + \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 1,35c. \quad (4)$$

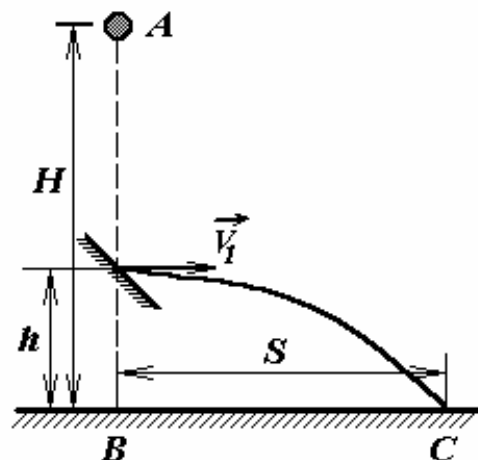
Используя выражение (3), найдем высоту H точки A над уровнем земли

$$H = h + \frac{gt_1^2}{2} = h + \frac{S^2}{4h} = 5,0\text{ м}. \quad (5)$$

Найдем высоту h_0 , на которой необходимо расположить плиту, чтобы дальность полета S была максимальна. Пройдя в свободном падении путь $(H - h_0)$, шарик наберет скорость $V_1 = \sqrt{2g(H - h_0)}$. Как следует из формул (2), после отражения он пролетит до падения на землю расстояние

$$S = V_1 \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 2\sqrt{h_0(H - h_0)}. \quad (6)$$

Подкоренное выражение представляет собой квадратную функцию от h_0 , которая в данном случае достигает максимума при



$$\boxed{h_0 = \frac{H}{2} = 2,5\text{ м}}, \text{ при этом } \boxed{S_{\max} = H = 5,0\text{ м}}.$$

2. При вращении кинетическая энергия шара вследствие работы сил трения перейдет в тепловую. Работа сил трения может быть рассчитана по формуле

$$A = FV_{cp}t, \quad (1)$$

где F - сумма модулей сил трения, действующих на отдельные участки линии соприкосновения шара и плиты;

$V_{cp} = \frac{\omega_0 r}{2}$ - средняя скорость движения точек соприкосновения, ω_0 - начальная угловая скорость вращения (так как все силы действующие на шарик постоянны, то его движение будет равнозамедленным, следовательно средняя скорость до остановки равна половине начальной); t - время движения. Величину F найдем по закону Кулона-Амонтона

$$F = \mu N, \quad (2)$$

где N - суммарная сила нормальной реакции плиты, действующей на шарик. Так как центр масс шарика покоится, сила тяжести уравнивается вертикальной составляющей сил реакции

$$mg = N \cos \alpha = N \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}, \quad (3)$$

откуда следует

$$N = mg \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}}. \quad (4)$$

Подставив выражения (2)-(4) в формулу (1), получим

$$A = \mu mg \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} \cdot \frac{\omega_0 r}{2} t. \quad (5)$$

Начальные скорости вращения шарика в обоих случаях равны, поэтому равны и его кинетические энергии, следовательно, равны и работы сил трения. Таким образом, из уравнения (5) следует соотношение

$$\frac{r_1 t_1}{\sqrt{R^2 - r_1^2}} = \frac{r_2 t_2}{\sqrt{R^2 - r_2^2}}, \quad (6)$$

из которого находим окончательный ответ задачи

