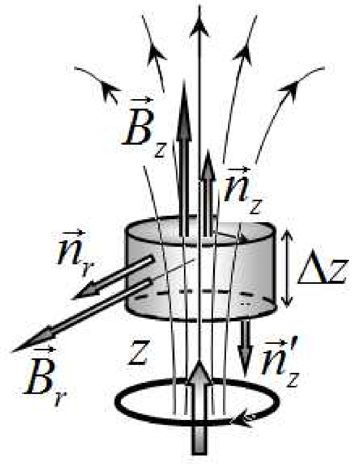
Задача 11.1. «Railgun»

Часть 0.

0.1 Для расчета радиальной компоненты магнитного поля можно воспользоваться теоремой о магнитном потоке (или свойством замкнутости силовых линий магнитного поля), из которой следует, что магнитный поток через любую замкнутую поверхность равен нулю.



Выделим тонкий цилиндр толщиной Δz и радиуса r, нижнее основание которого находится на расстоянии z от центра кольца, соосный с кольцом и применим теорему о магнитном потоке к поверхности этого цилиндра. Магнитный поток через нижнее основание равен (учтите, что вектора индукции и нормали здесь противоположны)

$$\Phi_1 = -B_z(z)\cdot \pi r^2,$$

где $B_z(z)$- значение вертикальной компоненты вектора индукции на высоте z;

поток через верхнее основание равен

$$\Phi_2 = B_z(z+\Delta z)\cdot \pi r^2,$$

где $B_z(z+\Delta z)$- значение вертикальной компоненты вектора индукции на высоте $z+\Delta z$;

поток через боковую поверхность (из осевой симметрии следует, что модуль радиальной составляющей вектора индукции B_r на этой поверхности постоянен):

$$\Phi_3 = B_r \cdot 2\pi r\Delta z.$$

Сумма этих потоков равна нулю, поэтому справедливо уравнение

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = -B_z(z)\cdot \pi r^2 + B_z(z+\Delta z)\cdot \pi r^2 + B_r\cdot 2\pi r\Delta z = 0,$$

из которого определим искомую величину

$$B_r = -\frac{r}{2}\cdot\frac{B_z(z+\Delta z)-B_z(z)}{\Delta z} = -\frac{r}{2}\cdot\frac{dB_z(z)}{dz}. \qquad (1)$$

0.2 Так как вид зависимости радиальной компоненты вектора индукции задан в условии задачи, то для расчета радиальной компоненты достаточно вычислить производную от этой функции

$$B_r = -\frac{r}{2}\cdot\frac{dB_z(z)}{dz} = -\frac{r}{2}\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{\mu_0 I_0}{2}\cdot\frac{R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{3\mu_0 I_0 R^2 r}{4}\frac{z}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}}. \qquad (2)$$

Часть 1. Снаряд – постоянный магнит.

1.1. Понятно, что сила, действующая на снаряд, определяется радиальной компонентой поля и по закону Ампера равна

$$F = 2\pi r\, iB_r = \frac{3\pi\mu_0 I_0 R^2 r^2 i}{2}\frac{z}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}}. \qquad (3)$$

Для построения графика зависимость (3) удобно представить в виде

$$F = 2\pi r\, iB_r = \frac{3\pi\mu_0 I_0 r^2 i}{2R^2}\frac{\frac{z}{R}}{\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)^{\frac{5}{2}}} = F_1\frac{\xi}{\left(1+\xi^2\right)^{\frac{5}{2}}}, \tag{4}$$

где обозначено $F_1 = \frac{3\pi\mu_0 I_0 r^2 i}{2R^2}$.

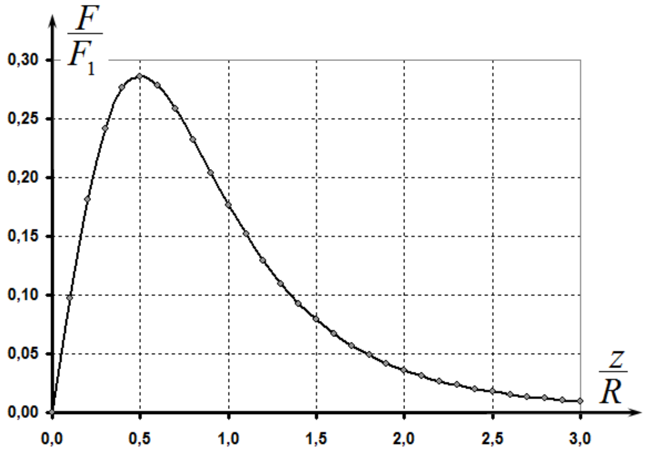


График этой функции теперь можно представить в относительных единицах, он показан на рисунке. Так как функция нечетная, то приведен график только для положительных значений z.

Максимум этой функции можно найти обычным способом. Найдем производную от функции (4) и приравняем ее к нулю

$$\left(\frac{\xi}{\left(1+\xi^2\right)^{\frac{5}{2}}}\right)' = \frac{\left(1+\xi^2\right)^{\frac{5}{2}} - \xi\cdot\frac{5}{2}\left(1+\xi^2\right)^{\frac{3}{2}}\cdot 2\xi}{\left(1+\xi^2\right)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1-4\xi^2}{1+\xi^2} = 0. \tag{5}$$

Из этого уравнения следует, что функция имеет экстремумы при $\xi^* = \pm\frac{1}{2}$, ее значение в максимуме равно

$$\left(\frac{F}{F_1}\right)_{\max} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} = \frac{16}{25\sqrt{5}} \approx 0{,}29. \tag{6}$$

1.2 Для того, чтобы скорость снаряда была максимальна, его надо поместить в точку, где сила магнитного поля максимальна, то есть т.е при $z_0 = \frac{R}{2}$. В этом случае эта сила пропорциональна току в кольце и равна

$$F = 2\pi r\, iB_r = \frac{48\pi\mu_0 r^2 i}{50\sqrt{5}R^2} I_0 = A_1 I_0. \tag{7}$$

Запишем уравнение второго закона Ньютона для снаряда

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = A_1 I_0 = A_1\frac{\Delta q}{\Delta t}. \tag{8}$$

Здесь сила тока представлена через величину электрического заряда, протекающего по катушке. С учетом того, что в начальный момент снаряд покоился, из уравнения (8) следует, что скорость снаряда пропорциональная заряду, протекшему по кольцу (причем она не зависит от временной зависимости силы тока):

$$v_{\max} = \frac{A_1}{m} q. \tag{9}$$

При разрядке батареи по кольцу пробежит весь заряд, накопленный в ней $q = CU_0$, поэтому

$$v_{\max} = \frac{A_1}{m} q = \frac{48\pi\mu_0 r^2 i}{50\sqrt{5} R^2 m} CU_0 . \tag{10}$$

1.3 Как следует из полученной формулы, при изменении полярности батареи (изменении направления тока) направление полета снаряда изменится на противоположное.

Часть 2. Снаряд – магнетик.

Если снаряд находится на расстоянии z от центра кольца, то его намагниченность равносильна силе поверхностного тока

$$i = \chi B_z \tag{11}$$

Следовательно, на снаряд действует сила, модуль которой равен

$$F = 2\pi r i B_r = \frac{3\pi\mu_0 I_0 R^2 r^2}{2} \frac{z}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}} i = \frac{3\pi\mu_0 I_0 R^2 r^2}{2} \frac{z}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}} \cdot \chi \left(\frac{\mu_0 I_0}{2} \cdot \frac{R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right) =$$

$$= \frac{3\pi\mu_0^2 I_0^2 R^4 r^2}{4} \chi \frac{z}{\left(R^2+z^2\right)^4} = \frac{3\pi\mu_0^2 I_0^2 r^2}{4R^3} \chi \frac{\frac{z}{R}}{\left(1+\left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^4} = \frac{3\pi\mu_0^2 I_0^2 r^2}{4R^3} \chi \frac{\xi}{\left(1+\xi^2\right)^4} \tag{12}$$

Заметим, что эту силу можно представить в виде

$$F = 2\pi r B_r i = 2\pi r B_r \chi B_z = 2\pi r \chi B_z \left(-\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz} \right) = -\pi r^2 \chi \frac{d\left(B_z^2\right)}{dz} . \tag{13}$$

Так как снаряд намагничивается по направлению внешнего поля, то между кольцом и снарядом всегда будет действовать сила притяжения, то есть снаряд будет двигаться к центру кольца.

Найдем расстояние z_0, при котором сила притяжения будет максимальна. Для этого вычислим производную от функции (12) и приравняем ее к нулю

$$\left(\frac{\xi}{\left(1+\xi^2\right)^4} \right)' = \frac{\left(1+\xi^2\right)^4 - \xi \cdot 4\left(1+\xi^2\right)^3 \cdot 2\xi}{\left(1+\xi^2\right)^8} = \frac{1-7\xi^2}{\left(1+\xi^2\right)^5} = 0 . \tag{14}$$

Таким образом, максимум этой функции достигается при $\xi^* = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}$ и равен

$$\left(\frac{\xi}{\left(1+\xi^2\right)^4} \right)_{\max} = \frac{\frac{1}{\sqrt{7}}}{\left(1+\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2\right)^4} = \frac{1}{\sqrt{7}} \left(\frac{7}{8}\right)^4 \approx 0{,}22 . \tag{15}$$

Следовательно, максимальная сила, действующая на железный снаряд равна

$$F = \frac{3}{4\sqrt{7}} \left(\frac{7}{8}\right)^4 \frac{\pi\mu_0^2 I_0^2 r^2}{R^3} \chi = A_2 I_0^2 . \tag{16}$$

В данном случае сила, действующая на снаряд, пропорциональна квадрату силы тока, поэтому воспользоваться ранее полученным результатом (9) нельзя.

Запишем уравнение второго закона Ньютона для рассматриваемого снаряда

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = A_2 I_0^2 . \tag{17}$$

Из этого уравнения следует, что за малый промежуток времени Δt скорость снаряда увеличивается на величину

$$\Delta v = \frac{A_2}{m} I_0^2 \Delta t . \tag{18}$$

Теперь заметим, что величина $I_0^2 \Delta t$ входит в выражение для количества теплоты, выделяющейся в кольце. Действительно, по закону Джоуля-Ленца это количество теплоты равно

$$\delta Q = I_0^2 Y \Delta t . \tag{19}$$

Теперь уравнение (18) можно переписать в виде

$$\Delta v = \frac{A_2}{mY} \delta Q . \tag{20}$$

Таким образом, скорость, которую приобретет снаряд, пропорциональна количеству теплоты, выделившейся в кольце за время прохождения тока, которое в свою очередь, равно энергии запасенной в конденсаторе $Q = \frac{CU_0^2}{2}$. Поэтому скорость снаряда рассчитывается по формуле

$$v_{\max} = \frac{A_2}{mY} Q = \frac{3}{4\sqrt{7}} \left(\frac{7}{8}\right)^4 \frac{\pi \mu_0^2 r^2 \chi}{R^3} \frac{CU_0^2}{2mY} = \frac{3}{8\sqrt{7}} \left(\frac{7}{8}\right)^4 \frac{\pi \mu_0^2 r^2 \chi}{R^3} \frac{CU_0^2}{2mY} . \tag{21}$$

На первый взгляд, в данном рассмотрении где-то содержится ошибка – если энергия конденсатора все перейдет в тепловую, то откуда возьмется кинетическая энергия у снаряда? Разрешение сделанного парадокса заключается в сделанной оговорке – «индуктивностью кольца пренебречь». В реальной ситуации при строгом расчете необходимо учитывать обратное влияние силы тока в снаряде на кольцо. Так как этот ток изменяется, то в кольце будет возникать ЭДС индукции, которая будет влиять на силу тока в нем. Именно благодаря этому явлению, ток в кольце совершит большую работу, которая и пойдет на увеличение кинетической энергии снаряда. Мы же считаем, что эта энергия мала, по сравнению с начальной энергией конденсатора.

2.3 Не зависимо от направления силы тока в кольце снаряд полетит в сторону центра кольца.

Часть 3. Снаряд – катушка индуктивности.

3.1 Сначала найдем, какой ток индуцируется в катушке снаряда. Так электрическим сопротивлением катушки можно пренебречь, то в любой момент времени сумма ЭДС самоиндукции и ЭДС индукции, возникающей благодаря изменению внешнего поля равна нулю

$$-L\frac{\Delta i}{\Delta t} - \pi r^2 \frac{\Delta B_z}{\Delta t} = 0 . \tag{22}$$

Из этого уравнения следует, что сила тока в катушке снаряда пропорциональна индукции магнитного поля кольца

$$L\frac{\Delta i}{\Delta t} = -\pi r^2 \frac{\Delta B_z}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad i(t) = -\frac{\pi r^2}{L} B_z(t). \tag{23}$$

Знак минус указывает, что ток в катушке направлен противоположно току в кольце (что также следует из правила Ленца). Следовательно, снаряд будет отталкиваться от кольца. В остальном, решение этой части задачи полностью совпадает с решением предыдущей. Достаточно заметить, что в данной части коэффициент пропорциональности χ равен

$$\chi = -\frac{\pi r^2}{L}, \tag{24}$$

и подставить его в окончательный результат. Поэтому модуль максимальной скорости снаряда равен

$$v_{\max} = \frac{3}{8\sqrt{7}}\left(\frac{7}{8}\right)^4 \frac{\pi\mu_0^2 r^2}{R^3}\frac{CU_0^2}{2mY}\cdot\frac{\pi r^2}{L} = \frac{3}{8\sqrt{7}}\left(\frac{7}{8}\right)^4 \frac{\pi^2\mu_0^2 r^4}{R^3}\frac{CU_0^2}{2mYL}. \tag{25}$$

3.2 При любом подключении батареи конденсаторов снаряд будет двигаться от центра катушки, убегать от нее!