

Задача 3 Неоднозначность и как с ней бороться!

Часть 1. «Бревно»

1.1 Данный пункт олимпиадной задачи следует воспринимать как шутку – очевидно, что при симметричном расположении нитей их силы натяжения равны половине силы тяжести

$$T_1 = T_2 = \frac{mg}{2} = 98 \text{ Н}. \quad (1)$$

1.2 Если бревно подвешено горизонтально на трех нитях, можно записать следующие уравнения равновесия:

- сумма всех сил, действующих на бревно равна нулю:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow T_1 + T_2 + T_3 = mg; \quad (2)$$

- сумма моментов сил, действующих на бревно также равна нулю, причем это условие можно записывать относительно любой точки (конца бревна, точек подвеса нитей, центра тяжести ...):

$$\sum_i M_i = 0$$

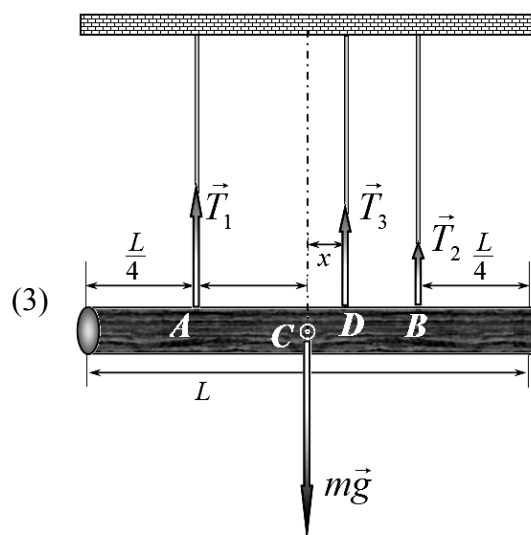
$$O: \quad T_1 \frac{1}{4}L + T_2 \frac{3}{4}L + T_3 \left(\frac{1}{2}L + x \right) = mg \frac{1}{2}L;$$

$$A: \quad T_2 \frac{1}{2}L + T_3 \left(\frac{1}{4}L + x \right) = mg \frac{1}{4}L;$$

$$C: \quad T_2 \frac{1}{4}L = T_3 x + T_1 \frac{1}{4}L;$$

$$D: \quad T_1 \left(\frac{1}{4}L + x \right) = mgx + T_2 \left(\frac{1}{4}L - x \right);$$

$$B: \quad T_1 \frac{1}{2}L + T_3 \left(\frac{1}{4}L - x \right) = mg \frac{1}{4}L;$$



Однако из всех уравнений (2)-(3) независимыми являются только два (любых), так остальные уравнения могут быть получены из выбранных двух. Следовательно, силы натяжения нитей не могут быть определены однозначно. Очевидно, что силы натяжения нитей могут быть направлены только вертикально вверх, именно эти условия ограничивают возможные диапазоны силы натяжения третьей нити. Формально эти ограничения могут быть записаны в виде неравенств $T_1 \geq 0$; $T_2 \geq 0$; $T_3 \geq 0$. Далее можно выразить силы натяжения первой и второй нитей как функции силы натяжения третьей и получить тем самым неравенства ограничивающие пределы изменения третьей нити

$$\begin{aligned} T_1(T_3) &\geq 0; \\ T_2(T_3) &\geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Получим эти неравенства в явном виде и самым быстрым способом – для этого надо выбирать уравнения, в которые входят только требуемые силы (чтобы не тратить время на алгебраические преобразования). Поэтому выберем уравнение (3), записанное для точки крепления первой нити, из которого выразим $T_2(T_3)$:

$$T_2 \frac{1}{2}L + T_3 \left(\frac{1}{4}L + x \right) = mg \frac{1}{4}L; \Rightarrow T_2 = \frac{1}{2}mg - T_3 \left(\frac{1}{2} + 2\frac{x}{L} \right). \quad (5)$$

Полагая $T_2 \geq 0$, получим неравенство, ограничивающие значения T_3

$$\frac{T_3}{mg} \leq \frac{1}{1 + 4\frac{x}{L}}. \quad (6)$$

Аналогично поступим с уравнением для точки крепления второй нити:

$$T_1 \frac{1}{2}L + T_3 \left(\frac{1}{4}L - x \right) = mg \frac{1}{4}L; \Rightarrow T_2 = \frac{1}{2}mg - T_3 \left(\frac{1}{2} - 2\frac{x}{L} \right) \geq 0, \quad (7)$$

Откуда следует, что

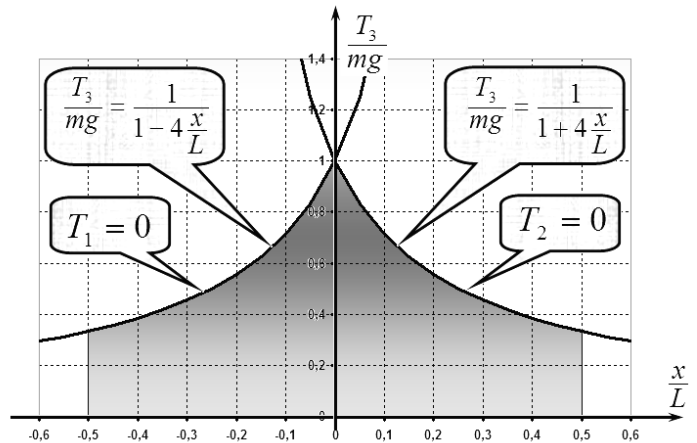
$$\frac{T_3}{mg} \leq \frac{1}{1 - 4\frac{x}{L}}. \quad (8)$$

Два неравенства (6), (8) могут быть записаны в виде одного

$$\frac{T_3}{mg} \leq \frac{1}{1 - 4\left|\frac{x}{L}\right|}. \quad (9)$$

На рисунке изображена диаграмма зависимости $T_3(x)$, указывающая область возможных значений силы натяжения третьей нити (затемнена).

Реализуемое значение силы натяжения третьей нити может зависеть от малых различия в длинах нитей и способа ее подвешивания.

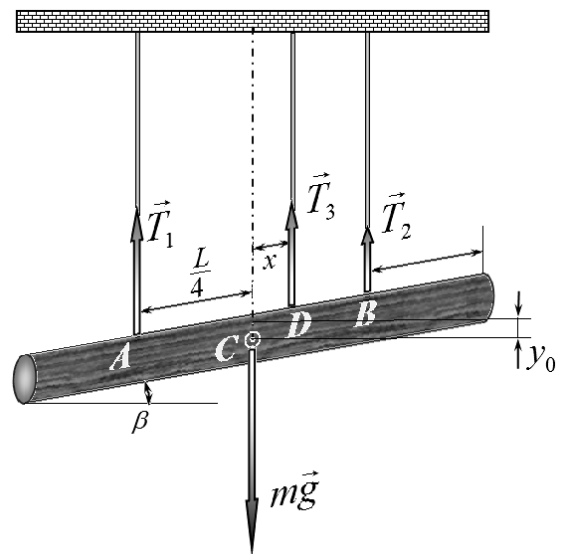


Отметим, что данная область может быть выделена и из физических соображений: максимальной силе натяжения третья нить соответствует нулевое натяжение другой нити, находящейся с той же стороны от оси симметрии, что и третья нить.

1.3 Если нити считать слегка растяжимыми, то бревно слегка наклонится к горизонту. Так как жесткости нитей велики, то угол наклона (который мы для простоты обозначим β) будет малым. В этом приближении можно пренебречь отклонением нитей от вертикали.

Теперь то к двум (опять любым!) уравнениям равновесия (2) –(3) следует добавить выражения для сил упругостей нитей, записанные на основании закону Гука:

$$\begin{aligned} T_1 &= k \left(y_0 + \beta \frac{L}{4} \right) \\ T_2 &= k \left(y_0 - \beta \frac{L}{4} \right), \\ T_3 &= k(y_0 + \beta x) \end{aligned} \quad (10)$$



где k - коэффициент жесткостей нитей, y_0 - смещение центра бревна из-за растяжения нитей.

У нас есть богатый выбор: какие два уравнения из условия равновесия выбрать. Так как система (бревно и нити) обладает определенной симметрией, то надо выбирать наиболее симметричные уравнения. Кроме того, следует побыстрее избавляться от неизвестных и ненужных величин, таких как «придуманные» жесткость пружины, смещение центра и наклон бревна.

Исходя из этих соображений, возьмем уравнение (2), в которое входит сумма сил $T_1 + T_2$, которую также можно выразить из уравнений для сил упругости (10), это позволяет выразить значения параметра ky_0 :

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 + T_3 &= mg; \Rightarrow T_1 + T_2 = mg - T_3 \\ \begin{cases} T_1 = k \left(y_0 + \beta \frac{L}{4} \right) \\ T_2 = k \left(y_0 - \beta \frac{L}{4} \right) \end{cases} &\Rightarrow T_1 + T_2 = 2ky_0 \Rightarrow ky_0 = \frac{mg - T_3}{2}. \end{aligned} \quad (11)$$

В уравнении равновесия (3), записанного для центра масс, легко выразить разность этих сил, которая также выражается из уравнений для сил упругости (10), что дает возможность выразить параметр $k\beta$:

$$\begin{aligned} T_1 \frac{1}{4}L &= T_3 x + T_2 \frac{1}{4}L \Rightarrow T_1 - T_2 = 4 \frac{x}{L} T_3 \\ \begin{cases} T_1 = k \left(y_0 + \beta \frac{L}{4} \right) \\ T_2 = k \left(y_0 - \beta \frac{L}{4} \right) \end{cases} &\Rightarrow T_1 - T_2 = k\beta \frac{L}{2} \Rightarrow k\beta = 8 \frac{x}{L^2} T_3. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставим эти выражение в уравнение закона Гука для третьей нити

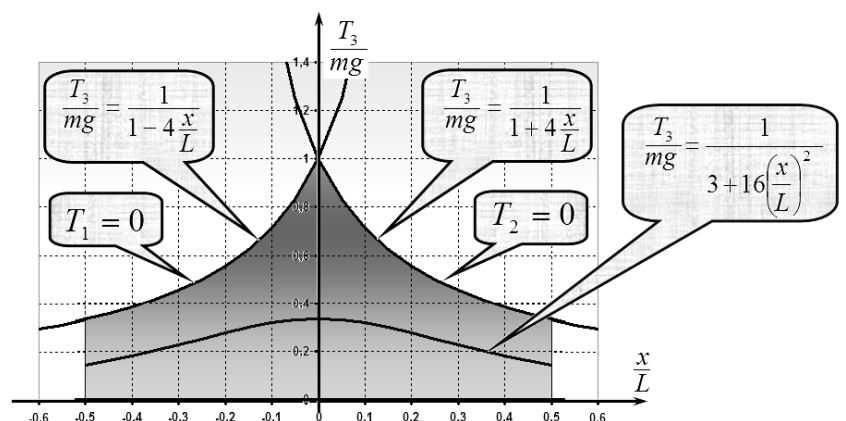
$$T_3 = k(y_0 - \beta x) = ky_0 - k\beta x = \frac{mg - T_3}{2} - 8 \frac{x^2}{L^2} T_3. \quad (13)$$

Решение этого уравнения дает искомый результат

$$\frac{T_3}{mg} = \frac{1}{3 + 16 \left(\frac{x}{L} \right)^2}. \quad (14)$$

График этой функции, нанесенный на ранее построенную диаграмму, показан на рисунке. Как и следовало ожидать, эта кривая попадает в область допустимых значений.

В заключение отметим, что и последний пункт этой задачи страдает некоторой искусственностью: трудно найти абсолютно одинаковые нити и еще труднее подвязать их так, чтобы длины в недеформированном состоянии были одинаковы.



Часть 2. «Лестница»

2.1 Силы, действующие на лестницу, изображены на рисунке. Условиями равновесия являются:

- равенство нулю суммы всех сил

$$\begin{aligned} N_1 + F_2 &= mg \\ N_2 &= F_1 \end{aligned} \quad (1)$$

(в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси, соответственно);

- равенство нулю моментов сил, которое в данном случае удобно записать относительно точки C - точки пересечения перпендикуляров к стенке и полу в точках касания лестницы

$$\begin{aligned} mg \frac{L}{2} \cos \alpha &= F_1 L \sin \alpha + F_2 L \cos \alpha \Rightarrow \\ \frac{mg}{2} &= F_1 \operatorname{tg} \alpha + F_2 \end{aligned} \quad (3)$$

Так как сил трения в данном случае являются силами трения покоя, то нельзя связать их с силами нормальной реакции функциональной связью, возможно только ограничиться неравенствами

$$\begin{aligned} F_1 &\leq \mu N_1 \\ F_2 &\leq \mu N_2 \end{aligned} \quad (4)$$

Система уравнений (1)-(3) является не полной – число неизвестных (четыре – две силы трения и две силы нормальной реакции) превышает число уравнений (три), поэтому эта система однозначного решения не имеет: любые три силы могут быть выражены через одну оставшуюся. Неравенства ограничивают диапазон возможных изменений искомых сил.

2.2 Например, силы трения могут быть выражены как функции силы реакции N_1 :

- из уравнения (1)

$$F_2 = mg - N_1, \quad (5)$$

Из уравнения (3)

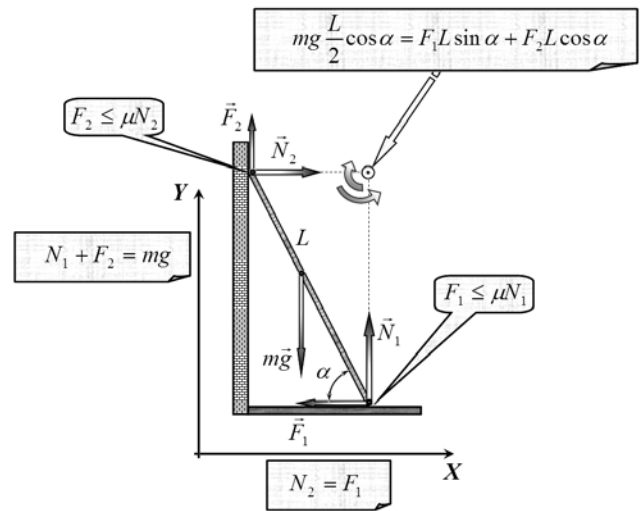
$$F_1 = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \left(N_1 - \frac{mg}{2} \right). \quad (6)$$

2.3 Так как далее необходимо анализировать диаграмму для модулей сил трения избавимся в уравнениях (1)-(3) и неравенствах (4) от сил нормальных реакций. Для этого выразим силы реакции через силы трения

$$\begin{aligned} N_1 &= mg - F_2 \\ N_2 &= F_1 \end{aligned} \quad (7)$$

и подставим в уравнение (3) и неравенства (4):

$$\begin{aligned} \frac{mg}{2} &= F_1 \operatorname{tg} \alpha + F_2 \\ F_1 &\leq \mu (mg - F_2) \\ F_2 &\leq \mu F_1 \end{aligned} \quad (8)$$

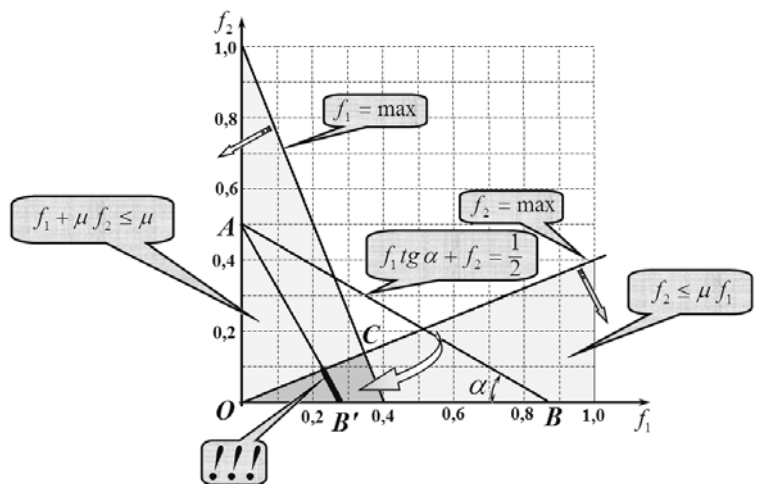


Эта система определяет возможные диапазоны изменения сил трения. Для упрощения анализа системы перейдем к указанным в условии безразмерным параметрам $f_1 = \frac{F_1}{mg}$ и $f_2 = \frac{F_2}{mg}$, для чего разделим уравнение и неравенства (8) на модуль силы тяжести mg . В результате получим

$$\begin{aligned} f_1 + \mu f_2 &< \mu \\ f_2 &< \mu f_1 \end{aligned} \quad (9)$$

$$f_1 \operatorname{tg} \alpha + f_2 = \frac{1}{2} \quad (10)$$

Изобразим графически на диаграмме (f_1, f_2) области удовлетворяющие неравенствам (см. рис). Их пересечение (темный треугольник) определяет область допустимых значений, ограниченную максимально возможными значениями сил трения. Построим также на этой диаграмме прямую AB , описываемую уравнением (10). Наклон этой прямой к отрицательному направлению оси равен α . При увеличении этого угла прямая приближается к области допустимых значений. В том же случае, когда эта прямая пересекает область допустимых значений, появляются возможные решения системы (9)-(10). В частности, для прямой AB' является отрезок, лежащий внутри треугольника допустимых значений (этот отрезок отмечен тремя восклицательными знаками).



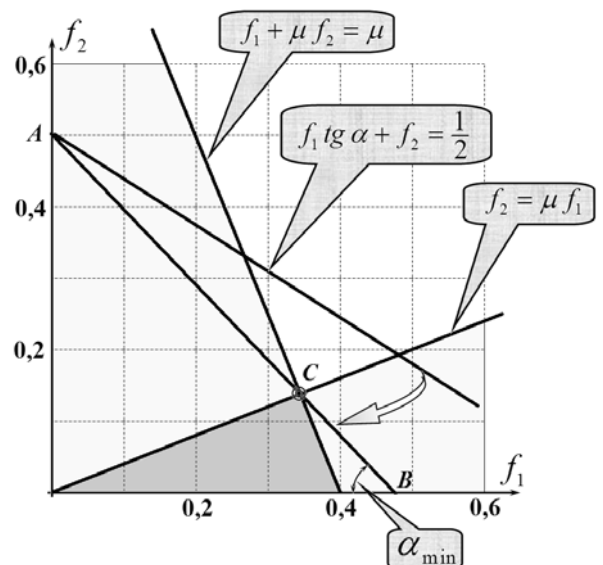
2.4 Построенная диаграмма позволяет рассмотреть все возможные варианты изменения силы трения $F_1(\operatorname{tg} \alpha)$ в зависимости от угла наклона лестницы.

При малых углах прямая AB не пересекает область допустимых значений, поэтому лестница не может находиться в равновесии.

Минимальному углу наклона лестницы соответствует ситуация, когда прямая AB пересекает точку C в этом случае максимального значения достигают обе силы трения (о пол и о стену). В этом случае выполняются уравнения

$$\begin{aligned} f_1 \operatorname{tg} \alpha + f_2 &= \frac{1}{2} \\ f_1 + \mu f_2 &= \mu \\ f_2 &= \mu f_1 \end{aligned} \quad (11)$$

решение которых позволяет найти значения минимального угла наклона лестницы.



Выразим значения сил трения

$$\begin{cases} f_2 = \mu f_1 \\ f_1 + \mu f_2 = \mu \end{cases} \Rightarrow f_1 + \mu^2 f_1 = \mu \Rightarrow \begin{cases} f_1 = \frac{\mu}{1 + \mu^2} \\ f_2 = \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} \end{cases} \quad (12)$$

И подставим в первое уравнение системы, из которого найдем значение минимального угла

$$\frac{\mu}{1 + \mu^2} \operatorname{tg} \alpha + \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_{\min} = \frac{1 - \mu^2}{2\mu}. \quad (13)$$

Численное значение минимального угла при заданном значении коэффициента трения

$$\operatorname{tg} \alpha_{\min} = \frac{1 - \mu^2}{2\mu} = 1,05 \quad (14)$$

$$\alpha_{\min} \approx 46,4^\circ$$

При дальнейшем увеличении угла наклона появляется область изменения силы трения F_1 .

Для определения минимального значения рассматриваемой силы необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} f_1 \operatorname{tg} \alpha + f_2 = \frac{1}{2} \\ f_2 = \mu f_1 \end{cases} \Rightarrow f_{1\max} = \frac{1}{2(\mu + \operatorname{tg} \alpha)}. \quad (15)$$

Максимальное значение этой силы находится из системы уравнений

$$\begin{cases} f_1 \operatorname{tg} \alpha + f_2 = \frac{1}{2} \\ f_1 + \mu f_2 = \mu \end{cases} \Rightarrow f_{1\max} = \frac{\mu}{2(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)}. \quad (16)$$

При дальнейшем увеличении угла наклона прямая AB пресекает треугольник допустимых значений на его нижнем основании. Поэтому в этом случае максимальное значение определяется из системы уравнений

$$\begin{cases} f_1 \operatorname{tg} \alpha + f_2 = \frac{1}{2} \\ f_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow f_{1\max} = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha}. \quad (17)$$

Таким образом, область возможных значений силы трения о пол ограничена тремя гиперболами, описываемой функцией (17); смещенной, описываемой функцией (16) и «перевернутой», задаваемой функцией (16). Эти области показаны на рисунке, выделена область изменения силы трения о пол.

