

4.2 Мы показали, что сила давления на «убегающий» поршень меньше среднего давления газа. Следовательно, для того чтобы в рассматриваемом двигателе поршень перемещался, необходимо увеличить среднее давление газа. Требуемое увеличение давления определяется из формулы (4)

$$\delta P \approx \beta P \bar{v}. \quad (1)$$

Такое увеличение потребует увеличения количества теплоты, потребляемой от нагревателя, это увеличение оценивается также, как и при учете силы трения

$$\delta Q_{0 \rightarrow 2} = \frac{5}{2} \nu R \frac{2l_0 S \delta P}{\nu R} + \delta P(m-1)l_0 S \approx Q_{0 \rightarrow 2} \frac{\delta P}{P}. \quad (2)$$

Соответственно уменьшается коэффициент полезного действия двигателя

$$\delta \eta = -\eta \frac{\delta Q_{0 \rightarrow 2}}{Q_{0 \rightarrow 2}} = -\eta \frac{\delta P}{P} = \eta \beta \bar{v} \approx -0,005 = -0,5\%. \quad (3)$$

Добавление, не входящее в основное решение.

Вычисление коэффициента β .

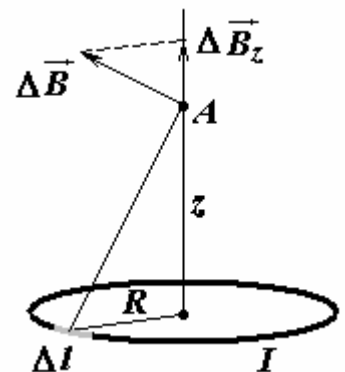
Расчет проведен с точностью до первой степени скорости движения поршня

$$\begin{aligned} \langle v_x^2 \rangle &= \int_V v_x^2 \varphi(v_x) dv_x = \int_0^\infty v_x^2 \varphi(v_x) dv_x - \int_0^V v_x^2 \varphi(v_x) dv_x \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty v_x^2 \varphi(v_x) dv_x - \frac{1}{2} \left([v_x^2 \varphi(v_x)]_0 + [v_x^2 \varphi(v_x)]_V \right) V = \\ &= \frac{1}{6} \langle v^2 \rangle - \frac{1}{2} V^3 \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \approx \frac{1}{2} \frac{kT}{m} \\ \langle v_x \rangle &= \int_V v_x \varphi(v_x) dv_x = \int_0^\infty v_x \varphi(v_x) dv_x - \int_0^V v_x \varphi(v_x) dv_x = \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \\ \beta &= 2 \frac{\langle v_x \rangle}{\langle v_x^2 \rangle} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{M}{RT}} \approx 1,6 \sqrt{\frac{M}{RT}} \end{aligned}$$

Решение 11-3

Часть 1. «Магнитное поле»

1.1 Для определения индукции на оси кольца (обозначим ось Z) следует воспользоваться законом Био-Саварра-Лапласа. Выделим на кольце небольшой элемент длиной Δl , который создает в точке A магнитное поле индукции $\Delta \vec{B}$. Из симметрии системы следует, что суммарный вектор индукции направлен вдоль оси системы. Поэтому для его



вычисления достаточно просуммировать проекции векторов индукции, создаваемые отдельными элементами тока кольца

$$\Delta B_z = \frac{\mu_0 I \Delta l}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \sin \alpha = \frac{\mu_0 I \Delta l R}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Такое суммирование выполняется элементарно (заменой длины выбранного элемента кольца на его полную длину), откуда и следует приведенная в условии формула

$$B_z = \mu_0 I N \frac{R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} = B_0 \cdot \frac{1}{(1 + \xi^2)^{3/2}}, \quad (1)$$

где обозначено $\xi = \frac{z}{R}$, множитель B_0 имеет смысл индукции в центре кольца и равен

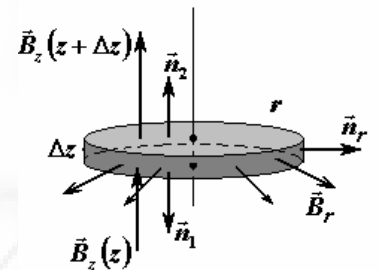
$$B_0 = \frac{\mu_0 I N}{2R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,0 \cdot 100}{2 \cdot 1,0 \cdot 10^{-2}} \approx 6,28 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}. \quad (2)$$

1.2. Для вычисления радиальной составляющей вектора магнитной индукции можно воспользоваться теоремой о магнитном потоке, который равен нулю через любую замкнутую поверхность. В качестве таковой выберем тонкий цилиндр малой толщиной Δz и радиуса r , ось которого совпадает с осью катушки. Из теоремы о магнитном потоке следует выражение

$$B_z(z + \Delta z) \cdot \pi r^2 - B_z(z) \cdot \pi r^2 + B_r \cdot 2\pi r = 0,$$

из которого определяем радиальную составляющую поля

$$B_r = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz} = \frac{r}{2} B_0 \cdot \frac{3}{2} \frac{2\xi}{(1 + \xi^2)^{5/2}} \cdot \frac{1}{R} = \frac{3}{2} B_0 \frac{\xi}{(1 + \xi^2)^{5/2}} \cdot \frac{r}{R}. \quad (3)$$



Часть 2. «Опилки»

2.1 Так частицы опилок малы, то оседать они будут равномерно с установившейся скоростью \bar{v} которая определяется из условия равновесия сил

$$mg - F_A = \beta \bar{v}.$$

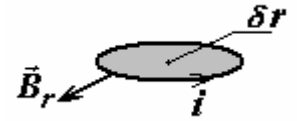
Выражая силу тяжести и силу Архимеда через плотности железа и масла, получим равенство $\frac{4}{3} \pi a^3 (\rho - \rho_0) g = \beta \bar{v}$, из которого определим неизвестный коэффициент силы сопротивления

$$\beta = \frac{4\pi a^3 (\rho - \rho_0) g}{3\bar{v}} = \frac{4\pi (1,0 \cdot 10^{-4})^3 \cdot 7,0 \cdot 10^3 \cdot 9,8}{3 \cdot 10^{-4}} = 2,87 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{с}}. \quad (4)$$

2.2 Сила взаимодействия магнитного диполя с магнитным полем пропорциональна произведению индукции поля магнитного момента. Кроме

того, индуцированный момент пропорционален индукции поля. Этих рассуждений достаточно для обоснования утверждения о том, что сила пропорциональна квадрату индукции поля.

2.3 Для определения силы, действующей на частицу, обладающую магнитным моментом, представим ее в виде кругового тока силой i и некоторого радиуса a (не обязательно совпадающим с размером частицы). Сила Ампера определяется радиальной составляющей вектора индукции, и равна (с учетом формулы (3))



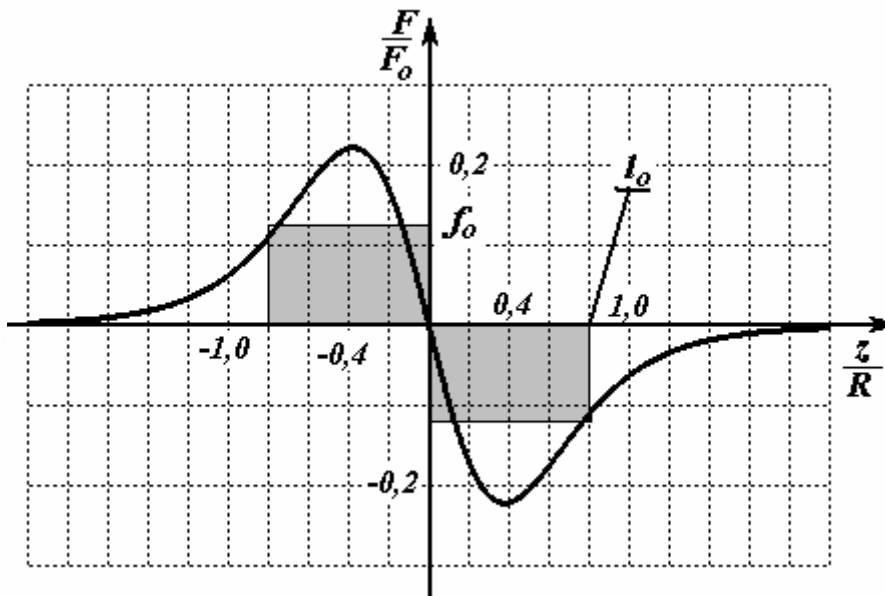
$$F_m = -i \cdot 2\pi a \cdot B_r = i \cdot 2\pi a \cdot \frac{a}{2} \frac{dB_z}{dz} = \pi a^2 \frac{dB_z}{dz} = p_m \frac{dB_z}{dz}.$$

Существенно, что рассматриваемая сила зависит только от магнитного момента (а не от «придуманных» параметров i, a), продолжая цепочку преобразований, получим окончательное выражение

$$\begin{aligned} F_m &= p_m \frac{dB_z}{dz} = \chi V \frac{B_z}{\mu_0} \frac{dB_z}{dz} = \chi V \frac{d}{dz} \left(\frac{B_z^2}{2\mu_0} \right) = -\chi V \frac{3B_0^2}{\mu_0 R} \frac{\xi}{(1+\xi^2)^4} = \\ &= -F_0 \frac{\xi}{(1+\xi^2)^4}, \end{aligned} \quad (5)$$

где обозначено

$$F_0 = \chi V \frac{3B_0^2}{\mu_0 R} = 800 \cdot \frac{4}{3} \pi (10^{-4})^3 \frac{3(6,28 \cdot 10^{-3})^2}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 10^{-2}} \approx 3,16 \cdot 10^{-5} \text{ Н}.$$



Анализ функции (5) может быть проведен стандартными методами. Так, например, функция антисимметрична. Вычисляя производную и полагая ее равной нулю

$$\left(\frac{\xi}{(1+\xi^2)^4} \right)' = \frac{(1+\xi^2)^4 - \xi \cdot 4(1+\xi^2)^3 \cdot 2\xi}{(1+\xi^2)^8} = \frac{(1+\xi^2) - 8\xi^2}{(1+\xi^2)^5} = 0,$$

определим положение экстремумов $\xi^* = \pm \frac{1}{\sqrt{7}} \approx 0,38$; и экстремальные значения функции в этой точке $F_{m \max} = \pm F_0 \frac{1}{\sqrt{7}} \frac{7^4}{8^4} \approx \pm 0,222 F_0 = \pm 7,02 \cdot 10^{-6} \text{ Н}$. Тем самым можно определить параметры предлагаемой аппроксимации

$$l_0 = \frac{2R}{\sqrt{7}} = 7,56 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad f_0 = 3,56 \cdot 10^{-6} \text{ Н}. \quad (6)$$

На рисунке показан график этой функции и ее предлагаемая аппроксимация. Заметим, что коэффициент пропорциональности в зависимости $f_0 = AI^2$, численно равен найденному значения (6), так как эта величина рассчитана

при силе тока в 1 ампер, поэтому $A = 3,56 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Н}}{\text{А}^2}$.

Часть 3. «Течение и расход»

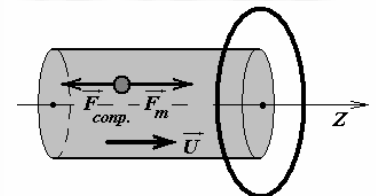
В этой основной части задачи отметим, что влияние железных опилок на движение масла возможно лишь тогда, когда они движутся относительно масла! Действительно, если опилки жестко «скреплены» с движущейся жидкостью и равномерно в ней распределены, то суммарная сила, действующая на такую жесткую смесь равна нулю – силы, действующие с разных сторон кольца, уравниваются друг друга. Очевидной причиной различия скоростей является «магнитная сила, действующая на опилки, но не на масло. Таким образом, необходимо рассмотреть движение опилок, с учетом того, что их скорости могут отличаться от скорости масла, которая в свою очередь постоянна по всей длине трубки, вследствие постоянства потока. Кроме того, в рамках сделанного приближения мы считаем скорость жидкости постоянной и в поперечном сечении трубки. Итак, обозначим постоянную скорость движения масла u . Рассмотрим движение отдельной железной частицы, скорость которой обозначим v . На основании второго закона Ньютона, уравнение ее движения имеет вид

$$ma = \beta(u - v) + F_m(z). \quad (1)$$

где первое слагаемое описывает силу сопротивления, а второе – силу со стороны магнитного поля, вычислением которой мы так долго занимались. Так как частица мала, то можно в очередной раз использовать квазистационарное приближение, считая, что в любой момент времени суммарная сила, действующая на частицу равна нулю (т.е. полагая $ma = 0$). В этом вполне обоснованном приближении можно выразить скорость частицы как функцию координаты

$$v(z) = u + \frac{F_m(z)}{\beta}. \quad (2)$$

В установившемся движении среднее число опилок, проходящее через любое поперечное сечение трубки постоянно (выполняется «закон

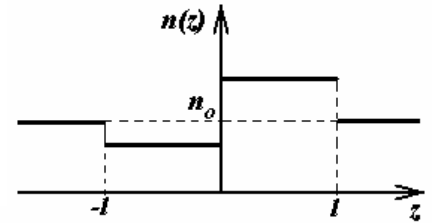


сохранения числа опилок»), что может быть выражено очевидным уравнением

$$n_0 u = n(z) v, \quad (3)$$

которое с использованием выражения (2) позволяет найти концентрацию опилок как функцию координаты

$$n(z) = \frac{n_0 u}{v(z)} = \frac{n_0 u}{u + \frac{F_m(z)}{\beta}} = \frac{n_0}{1 + \frac{F_m(z)}{\beta u}}. \quad (4)$$



Для используемой нами зависимости силы от координаты, эта зависимость качественно представлена на рисунке: при приближении к катушке скорость опилок возрастает, а их концентрация падает, за катушкой ситуация обратная. Следовательно, за катушкой создается повышенная концентрация медленно движущихся опилок, которые тормозят движение масла.

3.2 Прежде чем переходить к рассмотрению довольно сложного выражения (4) оценим отношение модулей сил, действующих на отдельную частицу. Для оценки силы вязкого трения, действующей на покоящуюся частичку βu_0 , находящуюся в потоке масла, выразим скорость движения масла в отсутствии магнитного поля из известного значения расхода масла

$$u_0 = \frac{q_0}{\pi r_0^2} = \frac{10 \cdot 10^{-6}}{60\pi \cdot 10^{-6}} \approx 5,31 \cdot 10^{-2} \frac{м}{с},$$

в этом случае сила вязкого трения $\beta u_0 = 1,5 \cdot 10^{-4} Н$ значительно больше вычисленной ранее магнитной силы f_0 . Поэтому добавка к единице в знаменателе функции (4) мала, поэтому это выражение можно упростить

$$n(z) = n_0 \left(1 + \frac{F_m(z)}{\beta u} \right)^{-1} \approx n_0 \left(1 - \frac{F_m(z)}{\beta u} \right).$$

Если жидкость действует на частицу с силой $\beta(u - v)$, то с такой же по модулю силой частица действует на жидкость. Выделим в движущейся жидкости слой толщиной Δz , суммарная сила³, действующая на жидкость со стороны опилок в этом слое, будет равна

$$\delta(\Delta P_m) = n \Delta z \beta (v - u) = n \Delta z F_m(z). \quad (5)$$

здесь $n \Delta z$ - число опилок в слое единичной площади, кроме того учтено квазистационарное приближение уравнивающее силу вязкости с магнитной силой. Для того чтобы найти суммарное давление необходимо просуммировать выражение (5) по всей длине трубки, такое суммирование в рассматриваемом случае проводится тривиально (необходимо просуммировать два слагаемых, соответствующих двум областям, где скорость опилок отлична от скорости масла

³ Будем считать, что выделенный слой имеет единичную площадь поперечного сечения, тогда мы с полным основанием можем говорить о давлении опилок на жидкость.

$$\Delta P_m = n_0 \left(1 - \frac{f_0}{\beta u} \right) f_0 l_0 - n_0 \left(1 + \frac{f_0}{\beta u} \right) f_0 l_0 = -2 \frac{n_0 f_0^2 l_0}{\beta u}. \quad (6)$$

В соответствии с нашими качественными рассуждениями это дополнительное давление оказалось отрицательным, то есть действительно, магнитное поле, действуя непосредственно только на опилки, опосредованно тормозит масло.

3.3 Относительное изменение расхода ввиду малости дополнительного давления также будет мало, поэтому может быть найдено приближенными методами. Запишем выражения для расхода масла в двух случаях в присутствии поля и без него

$$\begin{aligned} q_0 &= C \Delta P_0 \\ q &= C(\Delta P_0 + \Delta P_m) \end{aligned} \quad (7)$$

и найдем их отношение

$$\frac{q}{q_0} = 1 + \frac{\Delta P_m}{\Delta P_0} = 1 - 2 \frac{n_0 f_0^2 l_0}{\beta u \Delta P_0}. \quad (8)$$

Нет необходимости решать это уравнение точно (обратите внимание - справа в уравнении присутствует неизвестная скорость u , пропорциональная расходу масла), так как само уравнение является приближенным, поэтому, не теряя степени точности, можно считать, что $u \approx u_0$ и записать

$$\frac{q}{q_0} = 1 + \frac{\Delta P_m}{\Delta P_0} = 1 - 2 \frac{n_0 f_0^2 l_0}{\beta u_0 \Delta P_0}, \quad (9)$$

откуда следует

$$\frac{\delta q}{q_0} = -2 \frac{n_0 f_0^2 l_0}{\beta (u_0 + \delta u) \Delta P_0} \approx -2 \frac{n_0 f_0^2 l_0}{\beta u_0 \Delta P_0}. \quad (10)$$

Подстановка численных значений дает результат $\frac{\delta q}{q_0} \approx -1,3 \cdot 10^{-2}$.

Как следует из формулы (10) относительное изменение расхода пропорционально квадрату силы, действующей на опилки, которая в свою очередь пропорциональна квадрату силы тока в кольце, следовательно, уменьшение расхода пропорционально четвертой степени силы тока в кольце,

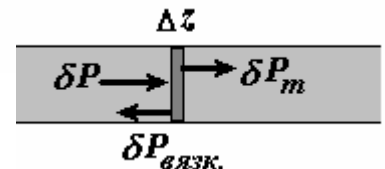
$$\boxed{-\frac{\delta q}{q_0} \propto I^4}.$$

3.4 Получим точное уравнение, определяющее скорость установившегося движения масла.

Запишем условие стационарности потока масла для тонкого слоя толщиной Δz

$$\delta P + \delta P_m - \delta P_{\text{вязк.}} = 0, \quad (1)$$

в котором $\delta P, \delta P_m, \delta P_{\text{вязк.}}$ - давления внешнее, магнитное и вязкое, соответственно.



Просуммируем это выражение по всей длине трубки. Отдельные слагаемые будут иметь вид:

$\sum_L \delta P = \Delta P_0$ - приложенная к концам трубки разность давлений;

$\sum_L \delta P_{\text{вязк.}} = CuL = \Delta P_0 \frac{u}{u_0}$ - падение давления

вследствие сил вязкости;

$\sum_L \delta P_m = \sum_L n(z) \Delta z F_m(z)$ - суммарное давление со стороны опилок на масло.

Последнюю сумму легко вычислить для рассматриваемой нами модели распределения сил по длине трубки. На рисунке показаны зависимости от координаты силы, действующей на частицу, скорости частиц и их концентрации, с помощью этого рисунка находим

$$\sum_L \delta P_m = \sum_L n(z) \Delta z F_m(z) = \frac{n_0 f_0 l_0}{1 + \frac{f_0}{\beta u}} - \frac{n_0 f_0 l_0}{1 - \frac{f_0}{\beta u}} =$$

$$= -2n_0 f_0^2 l_0 \frac{\beta u}{(\beta u)^2 + f_0^2}$$

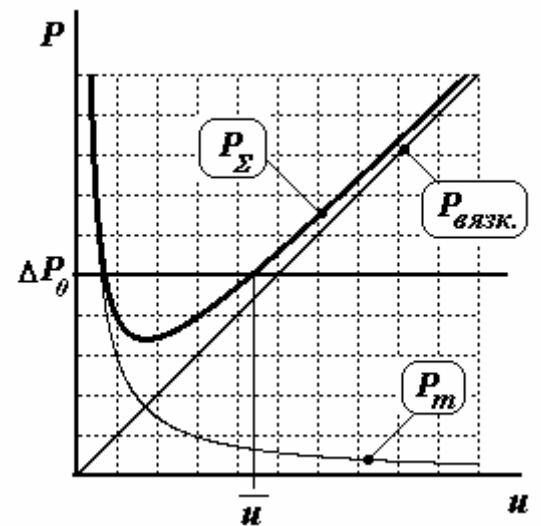
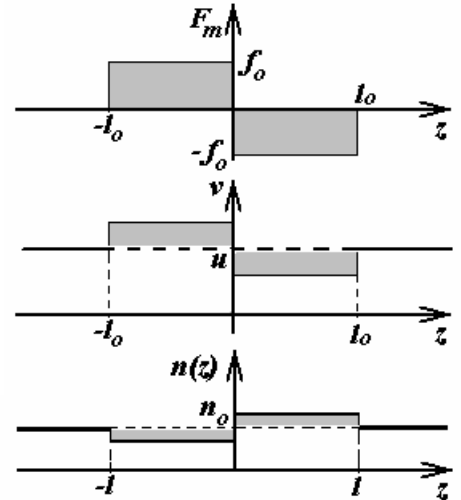
Таким образом, получаем уравнение, определяющее скорость u установившегося движения масла.

$$\Delta P_0 = \Delta P_0 \frac{u}{u_0} + 2n_0 f_0^2 l_0 \frac{\beta u}{(\beta u)^2 - f_0^2} = 0. \quad (2)$$

Проанализируем возможные решения этого уравнения. Для этого построим примерные графики зависимостей давлений от скорости движения масла. Как следует из графика, данное уравнение может иметь два корня, больший из них дает интересующее нас значение установившейся скорости, меньший неустойчив (что легко показать).

При увеличении силы тока возрастает магнитное давление и при некотором значении последнего уравнение (2) не будет иметь корней, что соответствует остановке масла. Таким образом, ответ на поставленный вопрос математически формулируется так: при каких условиях уравнение (2) корней не имеет. Для удобства анализа еще раз перепишем это уравнение

$$\Delta P_0 = \Delta P_0 \frac{u}{u_0} + 2n_0 l_0 \beta u_0 \left(\frac{f_0}{\beta u_0} \right)^2 \frac{\frac{u}{u_0}}{\left(\frac{u}{u_0} \right) + \left(\frac{f_0}{\beta u_0} \right)^2}$$



и введем обозначения: $\frac{u}{u_0} = x$, $a = \frac{n_0 l_0 \beta u_0}{\Delta P_0}$ $b = \frac{f_0}{\beta u_0}$, окончательно получим уравнение в «приведенном» виде

$$x + 2ab^2 \frac{x}{x^2 - b^2} = 1. \quad (3)$$

Это уравнение не будет иметь корней, если минимальное значение функции $F(x) = x + 2ab^2 \frac{x}{x^2 - b^2}$ превысит единицу. Оценим численные значения параметров этого уравнения

$$a = \frac{n_0 l_0 \beta u_0}{\Delta P_0} = \frac{10^{10} \cdot 7,56 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5 \cdot 10^{-4}}{10^3} \approx 11,3$$

$$b = \frac{f_0}{\beta u_0} \approx \frac{3,56 \cdot 10^{-6}}{1,5 \cdot 10^{-4}} \approx 2,4 \cdot 10^{-2}$$

Так как величина b мала, то рассматриваемую функцию можно упростить $F(x) \approx x + \frac{2ab^2}{x}$. Минимального значения эта функция достигает при $x = \sqrt{2ab^2}$ и равно $F_{\min} = 2b\sqrt{2a}$. Таким образом, условие прекращения течения масла имеет вид $2b\sqrt{2a} \geq 1$, или

$$\frac{f_0}{\beta u_0} \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Delta P_0}{n_0 l_0 \beta u_0}}, \quad (4)$$

Наконец вспомним, что величина f_0 так является коэффициентом пропорциональности между силой, действующей на частицу и квадратом силы тока, поэтому окончательное выражения для силы тока, при котором произойдет остановка масла имеет вид

$$I \geq \sqrt{\frac{\beta u_0}{2 f_0}} \sqrt{\frac{\Delta P_0}{n_0 l_0 \beta u_0}} \approx 2,5 A.$$