

Задача 10-3 Сначала думать, а потом делать!

Часть 1. Термодинамика тепловой машины.

Рассчитаем необходимые для дальнейшего параметры машины:

Гидростатическое давление воды:

$$p_0 = \rho gh = 1,0 \cdot 10^4 \text{ Па} = 0,10 \text{ атм}; \quad (1)$$

Давление поршня:

$$p_1 = \frac{mg}{S} = 1,0 \cdot 10^4 \text{ Па} = 0,10 \text{ атм}; \quad (2)$$

Объем бака нагревателя:

$$V_0 = S \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 h = 9,0 \text{ м}^3; \quad (3)$$

Количество молей рабочего воздуха (из уравнения состояния $PV = \nu RT$):

$$\nu = \frac{PV}{RT} = \frac{(P_0 + p_0 + p_1)V_0}{RT_1} = \frac{1,2 \cdot 10^5 \cdot 9}{8,31 \cdot 300} = 433 \text{ моль}. \quad (4)$$

1.3 Построим теперь диаграмму процесса работы водоподъемной машины. Для удобства дальнейших расчетов параметры рабочего воздуха в узловых точках будем заносить в Таблицу 1, сразу же рассчитывая и их численные значения. Объемы и давления в этих точках определяются устройством машины, а температуру удобно рассчитывать с помощью уравнения Клапейрона

$$T = T_1 \frac{PV}{P_1 V_1}. \quad (5)$$

В этой формуле давления можно считать в атмосферах. Объем газа при конкретном значении z равен $V = V_0 + Sz$, численно $V = (9 + z)$. Результаты очевидных расчетов приведены в таблице и «без комментариев»

В начальном состоянии 1, давление газа должно обеспечить подъем поршня, поэтому равно $P_0 + p_0 + p_1$, объем равен объему бака, температура задана.

До тех пор, пока вода не начнет выливаться (то есть пока z не достигнет значения h), процесс расширения будет изобарным (участок 1-2).

После того, как вода начнет выливаться давление будет убывать по линейному закону (участок 2-3):

$$P_{2 \rightarrow 3}(z) = P_0 + p_0 + p_1 - \frac{P_0}{h}(z - h) = P_0 + 2p_0 + p_1 - \frac{P_0}{h}z = 1,3 - 0,1z \quad (6)$$

При этом температура будет изменяться по закону

$$\begin{aligned} T_{2 \rightarrow 3}(z) &= T_1 \frac{PV}{P_1 V_1} = T_1 \frac{\left(P_0 + 2p_0 + p_1 - \frac{P_0}{h}z \right) (V_0 + Sz)}{(P_0 + p_0 + p_1)V_0} = 300 \frac{(1,3 - 0,1z)(9 + z)}{1,2 \cdot 9} = \\ &= 27,8(1,3 - 0,1z)(9 + z) \end{aligned} \quad (7)$$

Важно отметить, что эта зависимость квадратичная, причем с отрицательным коэффициентом при высшей степени, поэтому имеет точку экстремума. Но Феде «повезло» - точка экстремума (которую для параболы можно найти, как середину отрезка между корнями. Она оказалась равной $z^* = \frac{13-9}{2} = 2$, точно на конце рассматриваемого интервала. Следовательно, на всем участке 2-3 температура возрастает.

На следующем участке 3-4 процесс также изобарный, давление равно сумме атмосферного давления и давления, оказываемого поршнем.

Наконец, на последнем участке, когда вода наливается, давление возрастает по линейному закону

$$P_{4 \rightarrow 1}(z) = P_1 + \frac{P_4 - P_1}{z_4} z = P_0 + p_0 + p_1 - \frac{p_0}{h} z = 1,2 - 0,1z. \quad (8)$$

Температура на участке изменяется по закону

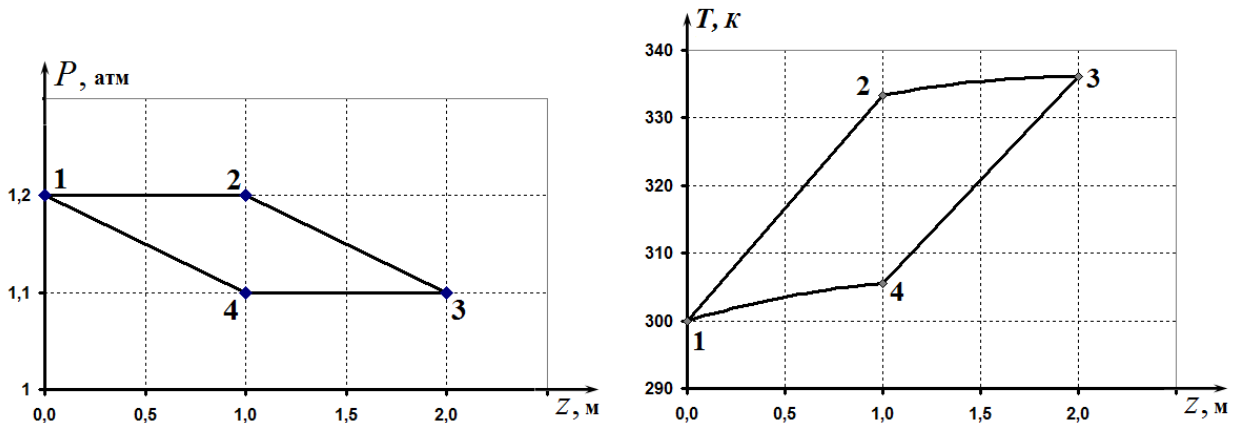
$$T_{4 \rightarrow 1}(z) = T_1 \frac{PV}{P_1 V_1} = T_1 \frac{\left(P_0 + p_0 + p_1 - \frac{p_0}{h} z\right)(V_0 + Sz)}{(P_0 + p_0 + p_1)V_0} = 300 \frac{(1,2 - 0,1z)(9 + z)}{1,2 \cdot 9} = 27,8(1,3 - 0,1z)(9 + z) \quad (9)$$

Экстремум этой функции также лежит вне пределов рассматриваемого интервала.

Таблица 1 Состояния

N_0	P (атм)		V (м ³)		T (К)	
1	$P_0 + p_0 + p_1$	1,2	V_0	9	T_1	300
2	$P_0 + p_0 + p_1$	1,2	$V_0 + Sh$	10	$T_2 = T_1 \frac{V_2}{V_1}$	333
3	$P_0 + p_1$	1,1	$V_0 + 2Sh$	11	$T_3 = T_1 \frac{P_3 V_3}{P_1 V_1}$	336
4	$P_0 + p_1$	1,1	$V_0 + Sh$	10	$T_4 = T_1 \frac{P_4 V_4}{P_1 V_1}$	306

Диаграммы процессов в требуемых координатах показаны на рисунке.



Проведем расчет термодинамических характеристик всех участков циклического процесса. Результаты расчетов (в том числе численных) также удобно заносить в таблицу 2. Изменение внутренней энергии газа удобно (и быстро) рассчитывать по формуле

$$\Delta U = \frac{5}{2} \nu R \Delta T = \frac{5}{2} \Delta(PV). \quad (10)$$

Если подставить численные значения параметров, то эта формула упрощается

$$\Delta U = \frac{5}{2} \Delta(PV) = 250 \Delta(PV) \text{ кДж, при давлении в атм.}$$

Работу на каждом участке легко рассчитать, как площадь под графиком соответствующего участка на диаграмме (P, z) . Количество теплоты равно сумме изменения внутренней энергии и совершенной работы. Удобно в таблицу заносить все эти величины с учетом

знака, считая всегда работу, совершенную газом и теплоту, полученную газом (т.е. если газ отдает теплоту, она автоматически оказывается отрицательной).

Результаты расчетов приведены в Таблице 2.

Таблица 2 Процессы

Процесс	Уравнение	ΔU , кДж	A , кДж	Q , кДж
1-2	$P = P_0 + p_0 + p_1$	+300	+120	+420
2-3	$P = P_0 + 2p_0 + p_1 - \frac{p_0}{h} z = 1,3 - 0,1z$	+25	+115	+140
3-4	$P = P_0 + p_1$	-275	-110	-385
4-1	$P_{4 \rightarrow 1}(z) = P_0 + p_0 + p_1 - \frac{p_0}{h} z = 1,2 - 0,1z$	-50	-115	-165
	Сумма	0	10	10

Последняя «суммирующая» строка позволяет проконтролировать правильность расчетов: суммарное изменение внутренней энергии равно нулю, а суммарная работа равна суммарному количеству теплоты.

Теперь легко вычислить коэффициент полезного действия машины (суммируя только положительные значения количеств теплоты)

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{10}{560} = 0,018 = 1,8\% . \quad (11)$$

Совсем малая величина!

Часть 2. Кинематика тепловой машины.

Для расчета кинематических характеристик движения поршня следует учесть, что мощности поступающей и теряемой теплоты постоянны. Поэтому на участке нагрева время достижения какого-либо состояния определяется по формуле

$$t = \frac{Q}{N_1 - N_2} , \quad (12)$$

Где Q - количество теплоты, полученной от начала процесса до этого состояния.

При остывании времена можно рассчитывать по аналогичной формуле

$$\Delta t = \frac{|\delta Q|}{N_2} , \quad (13)$$

На участках 1-2 и 3-4 количество теплоты изменяется с изменением координаты по линейному закону, следовательно, на этих участках поршень движется равномерно.

Строго говоря, на участках 2-3 и 4-1 движение является неравномерным, так Q зависит квадратично от координаты. Однако, из диаграммы процесса (T, z) видно, что эта зависимость близка к линейной. Поэтому можно приближенно считать и здесь движение равномерным. На



рисунке показан график закона движения (рассчитанный точно). Видно, что, действительно, отклонения от линейного закона незначительно, причем времена в узловых точках рассчитываются точно, независимо от закона движения поршня.

Общее время совершения цикла оказалось равным $\tau = 690\text{с}$ (более 10 минут!). И за это время совершается работа в 10 кДж. Поэтому средняя мощность, развиваемая машиной равна

$$N = \frac{A}{\tau} = 14,5\text{Вт} . \quad (13)$$

Средняя мощность, потребляемая нагревателем, находится по формуле

$$\langle N \rangle = \frac{N_1 \tau_1}{\tau} = 1,0 \cdot 10^3 \text{Вт} \quad (14)$$

Таким образом, реальный КПД оказывается еще меньше $\eta = 1,4\%$.

Различие обусловлено тем обстоятельством, что при термодинамическом расчете учитывается теплота поступающая к газу и не учитываются потери этой теплоты во время разогрева!

Таким, образом, решение окончательно принятой Федей обосновано: машина работает медленно и очень неэкономно!