$$2m\omega^2 R = G\frac{mm_0}{R^2}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{l}{2R}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{l}{2R}\right)^2}\right) = G\frac{mm_0}{R^2}\frac{2\left(1+\frac{l^2}{4R^2}\right)}{\left(1-\frac{l^2}{4R^2}\right)^2}. \qquad (8)$$

Пренебрегая малыми величинами, находим период обращения

$$m\omega^2 R = G\frac{mm_0}{R^2} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{Gm_0}}, \qquad (10)$$

который совпадает с периодом обращения материальной точки.

Для расчета силы натяжения стержня запишем разность уравнений (8):

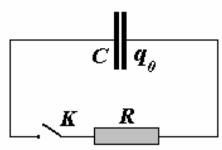
$$2N = m\omega^2 l + G\frac{mm_0}{R^2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{l}{2R}\right)^2}-\frac{1}{\left(1+\frac{l}{2R}\right)^2}\right).$$

Из этого выражения следует, что и центробежные силы (с учетом (10)) и разность гравитационных сил имеют одинаковый первый порядок малости, поэтому должны быть учтены

$$N = \frac{1}{2}m\omega^2 R\frac{l}{R}+\frac{1}{2}G\frac{mm_0}{R^2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{l}{2R}\right)^2}-\frac{1}{\left(1+\frac{l}{2R}\right)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}G\frac{mm_0}{R^2}\frac{l}{R}+\frac{1}{2}G\frac{mm_0}{R^2}\frac{2l}{R}=\frac{3}{2}G\frac{mm_0}{R^2}\frac{l}{R}$$

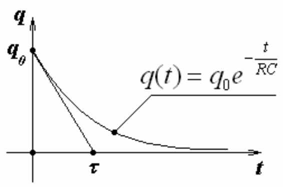
Задание 10(11)-3. «Разрядка конденсатора»



1. Поскольку начальное напряжение на конденсаторе $U_0 = \frac{q_0}{C}$, то согласно закону Ома сразу после замыкания ключа K в цепи возникнет ток силой $I_0 = \frac{U_0}{R} = \frac{q_0}{RC}$.

По мере разрядки конденсатора напряжение на нем, а следовательно и сила тока в цепи, будут монотонно убывать с течением времени.

Строгое математическое решение данной задачи приводит к неожиданному результату — полная разрядка конденсатора происходит «бесконечно долго», поскольку график временной зависимости заряда конденсатора $q(t)$ асимптотически стремится к нулю (см. рис).



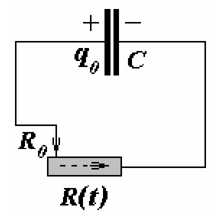
Для оценки времени разрядки конденсатора используем традиционный прием: будем считать, что сила тока в цепи «сохраняет» свое максимальное значение $I_0 = \frac{q_0}{RC}$ в течение всего времени разрядки конденсатора. В таком случае для полной разрядки конденсатора потребуется время

$$\tau = \frac{q_0}{I_0} = RC. \qquad (1)$$

Графически данная оценка соответствует точке пересечения касательной к графику $q(t)$, проведенной в начальной точке, с осью абсцисс.

2. Если сила тока в цепи остается постоянной и равной I, то заряд конденсатора линейно убывает со временем по закону

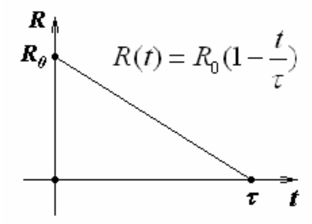
$$q(t) = q_0 - I \cdot t\,.$$



Напряжение на конденсаторе, пропорциональное его мгновенному заряду $q(t)$, должно быть равно падению напряжения на резисторе, сопротивление которого меняется со временем (см. рис). Следовательно, в данном случае справедливо равенство

$$\frac{q(t)}{C} = \frac{q_0 - I \cdot t}{C} = I \cdot R(t) \quad \Rightarrow \quad R(t) = \frac{q_0 - I \cdot t}{IC}\,. \tag{2}$$

Согласно (2) для того, чтобы сила тока в цепи при разрядке конденсатора оставалась постоянной, сопротивление реостата нужно уменьшать со временем по линейному закону (см. рис).



Поскольку в начальный момент времени $I = \dfrac{q_0}{R_0 C}$, то искомую зависимость $R(t)$ можно представить в виде

$$R(t) = R_0(1 - \frac{t}{\tau})\,,$$

где $\tau = R_0 C$.

Как ни странно, но время τ полной разрядки конденсатора при постоянной силе тока ($\tau = \dfrac{q_0}{I}$) также равно

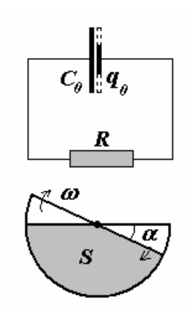
$$\tau = R_0 C\,.$$

Количество теплоты, выделившееся на резисторе за все время разрядки, согласно закону сохранения энергии равно начальной энергии конденсатора

$$Q = \frac{q_0^2}{2C}\,.$$

Заметим, что этот же результат можно получить и иным способом – просуммировать и усреднить мощность тепловыделения Джоуля-Ленца.

3. При повороте одной из пластин на угол α относительно другой пластины площадь перекрытия пластин уменьшилась на величину площади сектора угловой величиной α (см. рис)



$$S = S_0 - \frac{\alpha r^2}{2} = S_0(1 - \frac{\alpha}{\pi})\,.$$

Соответственно, электроемкость нового плоского конденсатора стала равной

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = C_0(1 - \frac{\alpha}{\pi})\,. \tag{3}$$

Опять же, если сила тока в цепи остается постоянной и равной I, то заряд конденсатора линейно убывает со временем по закону

$$q(t) = q_0 - I \cdot t\,.$$

В силу равенства мгновенных напряжений на резисторе и конденсаторе в любой момент времени можем записать

$$\frac{q(t)}{C(t)} = \frac{q_0 - I \cdot t}{C(t)} = I \cdot R \quad \Rightarrow \quad C(t) = \frac{q_0 - I \cdot t}{IR} \tag{4}$$

Согласно (4) для того, чтобы сила тока в данной цепи при повороте пластины оставалась постоянной, электроемкость конденсатора нужно уменьшать со временем по линейному закону (см. график предыдущего пункта). Это значит, что вращать один из дисков нужно с постоянной угловой скоростью $\omega = \frac{\alpha}{t} = \frac{\pi}{\tau} = \frac{\pi}{RC_0}$.

Поскольку в начальный момент времени $I = \frac{q_0}{C_0 R}$, то равенство (3) можно переписать в виде

$$C(t) = C_0 (1 - \frac{t}{\tau}), \tag{5}$$

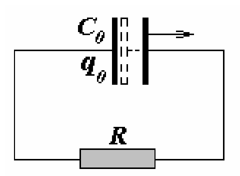
где $\tau = RC_0$. При этом время разрядки конденсатора $\tau = \frac{q_0}{I}$ по-прежнему (уже можно сказать «традиционно») равно

$$\tau = RC_0.$$

Поскольку сила тока в цепи остается постоянной, то в данном случае выделится количество теплоты

$$Q = I^2 R\tau = \left(\frac{q_0}{C_0 R}\right)^2 R(RC_0) = \frac{q_0^2}{C_0}. \tag{6}$$

Как следует из (6) количество выделенной на резисторе теплоты в два раза превышает количество энергии, запасенной в конденсаторе. Это «противоречие» объясняется тем, что при повороте пластины внешние силы совершили над системой положительную работу $A_{вн} = \frac{q_0^2}{2C_0}$, что и привело к увеличению энергии системы в конечном состоянии.



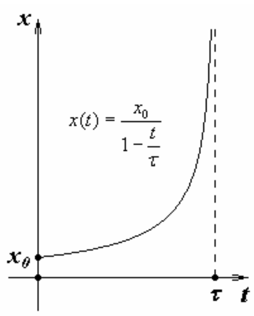
4. При увеличении расстояния x между пластинами (см. рис) электроемкость конденсатора уменьшается по закону

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{x} = \frac{\varepsilon_0 S}{x_0} \cdot \frac{x_0}{x} = C_0 \cdot \frac{x_0}{x}.$$

Записывая условие равенства напряжений на резисторе и конденсаторе, получим

$$\frac{q(t)}{C(t)} = \frac{q_0 - I \cdot t}{C_0 x_0} \cdot x(t) = I \cdot R \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{x_0}{1 - \frac{t}{\tau}}. \tag{7}$$

При записи (7) опять же учтено, что $I = \frac{q_0}{C_0 R}$, $\tau = RC_0$.



Как следует из полученного равенства, в данном случае движение обкладки будет неравномерным, поскольку при $t \to \tau$ функция (7) неограниченно возрастает (см. рис).

В данном случае конденсатор полностью разрядится при $x \to \infty$, что произойдет через конечное время, «неизменно» равное

$$t = \tau = RC_0.$$

Расчет выделившегося количества теплоты Q при раздвигании пластин полностью аналогичен предыдущему пункту

$$Q = \frac{q_0^2}{C_0}.$$

Внешние силы при этом опять же совершат работу против сил кулоновского притяжения пластин, что позволит выделиться на резисторе количеству теплоты, в два раза превышающему начальную энергию конденсатора.