

## 2004г. Решения задач.

### 9 класс.

#### Задание 9.1

а) Пусть кран равномерно поднимает груз  $m$  при угле поворота башни крана  $\varphi$  и подъеме стрелы на угол  $\alpha$  над горизонтом. Основная нагрузка в этом случае будет приходиться на колесный ряд, расположенный со стороны груза. Соответственно здесь (вдоль длинной стороны крана) будет проходить ось возможного опрокидывания машины. Опрокидывающий момент силы тяжести груза относительно этой оси, параллельной длинной стороне крана, равен

$$M_1 = m g (l_1 \cos \alpha \sin \varphi - \frac{a}{2}). \quad (1)$$

Соответственно стабилизирующий момент силы тяжести самого крана относительно той же оси

$$M_2 = M g \frac{a}{2} \quad (2)$$

При равновесии крана

$$M_1 = M_2 \Rightarrow m = \frac{a}{2l_1 \cos \alpha \sin \varphi - a} M = 2,5 \text{ т}. \quad (3)$$

Подчеркнем, что необходимо также проверить условие отсутствия опрокидывания крана относительно второй (малой) стороны при равномерном подъеме груза. В этом случае (будем считать, что передние колеса удалены от начала машины незначительно)

$$M_1 = m g (l_1 \cos \alpha \cos \varphi - \frac{3a}{4}) \quad (4)$$

$$M_2 = M g a \quad (5)$$

Из условий (4)-(5) находим максимально возможный груз для «короткой» оси крана

$$m = \frac{4a}{4l_1 \cos \alpha \cos \varphi - 3a} = 7,3 \text{ т}. \quad (6)$$

Как видим, в этом случае максимальное значение груза ограничивается наименьшим из значений (3) или (6)

$$m = 2,5 \text{ т}. \quad (7)$$

Как и следовало ожидать, наиболее вероятное опрокидывание машины в этом случае — «набок».

б) При вычислении максимальной грузоподъемности в наиболее опасном положении следует в (3) положить  $\varphi = 90^\circ$ ,  $l_1 = l$ . Соответствующий расчет дает

$$m_3 = \frac{a}{2l \cos \alpha - a} M = 1,1 \text{ т} \quad (8)$$

При ускоренном движении груза вверх его вес (соответственно и опрокидывающий момент) увеличиваются по закону

$$T = m_4 (a + g) \quad (9)$$

Следовательно, при максимальном ускорении груза  $a_{\max}$  должно выполняться равенство

$$m_4 (a_{\max} + g) = m_3 g \Rightarrow a_{\max} = \frac{m_3 - m_4}{m_4} g = \frac{g}{10} = 0,98 \frac{M}{c^2}. \quad (10)$$

Конечно же силы давлений правого и левого колесных рядов крана на грунт будут различны, поскольку в противном случае они не смогут удержать машину в равновесии. Более того, можно заметить, что при критических параметрах внешний (по отношению к нагрузке) колесный ряд уже оторвется от земли и не будет оказывать на

нее давления. Незначительное увеличение нагрузки в этом случае может привести к опрокидыванию машины.

в) При выдвижении боковых упоров увеличивается площадь опоры автокрана, что, в соответствии с правилами статики, увеличивает его устойчивость. Формально это можно описать заменой  $a$  в выражении (8) на  $a + 2\Delta a$ . Соответствующий расчет дает

$$M = \frac{a + \Delta a}{2l \cos \alpha - (a + \Delta a)} M \Rightarrow \Delta a = \frac{l \cos \alpha - a}{2} = 9 \text{ м}. \quad (11)$$

Конечно же, упоры получились «гигантских» размеров, поскольку мы потребовали от обычного автокрана «муравьиной супермощности». В реальности автокраны работают с грузами, не превосходящими их по массе, что требует упоров значительно меньших размеров.

### Задание 9.2

1. Во время движения на пробирку действуют сила тяжести, выталкивающая сила Архимеда и сила вязкого трения, пропорциональная скорости движения пробирки. Так как сила сопротивления пропорциональна скорости, то по прошествии малого промежутка времени пробирка будет двигаться с постоянной скоростью, которую можно найти из условия равновесия сил (положительное направление – вверх):

$$\rho V g - m_0 g - \rho_1 \eta V g = \beta v, \quad (1)$$

где  $\rho, \rho_1$  - плотности воды и жидкости внутри пробирки,  $V$  - объем пробирки,  $m_0$  - масса пустой пробирки,  $\beta$  - коэффициент пропорциональности между силой сопротивления и скоростью пробирки. Основная причина, приводящая к возникновению силы сопротивления – перетекание воды в узком слое между стенками трубки и пробирки, поэтому коэффициент  $\beta$  приблизительно пропорционален длине пробирки.

Следовательно, если взять пробирку вдвое большей длины (при прочих равных условиях), то указанные скорости приблизительно уменьшатся в два раза.

2. Из уравнения (1) следует, что скорость установившегося движения пробирки линейно зависит от степени ее наполнения

$$v = A\eta + B, \quad (2)$$

где  $A, B$  - постоянные коэффициенты, которые можно определить из двух известных скоростей. Окончательный вид зависимости скорости от степени наполнения имеет вид

$$v = -(v_0 + v_1)\eta + v_0. \quad (3)$$

3. Из уравнения (1) следует, что коэффициент при  $\eta$ , в линейной зависимости вида (2), пропорционален плотности налитой жидкости. Поэтому для другой жидкости зависимость скорости от степени наполнения будет иметь вид

$$v = -n(v_0 + v_1)\eta + v_0. \quad (4)$$

Графики этих зависимостей показаны на рисунке, где обозначена скорость движения пробирки, полностью заполненной другой жидкостью,

$$v'_1 = nv_1 + (n-1)v_0.$$

