

**1.4 «Магнитный ограничитель тока»** На достаточно малый элемент полукольца длиной  $\Delta l_i$ , который можно считать отрезком, действует сила Ампера  $\vec{F}_i$

$$F_i = IB\Delta l_i. \quad (1)$$

Сила Ампера  $\vec{F}_j$ , действующая на симметричный элемент кольца  $\Delta l_j$ , имеет такую же величину, поскольку в силу симметрии  $\Delta l_i = \Delta l_j$ . Момент этой пары сил  $M_{i+j}$  относительно точки  $O$

$$M_{i+j} = 2F_i R \cos \alpha_i = 2IB\Delta l_i R \cos \alpha_i = (2IBR) \Delta l_i \cos \alpha_i \quad (2)$$

Соответственно, суммарный момент всех элементарных сил Ампера  $\vec{F}_i$  относительно точки  $O$ , поднимающий полукольцо вверх, найдем суммированием (2) по всем парам  $(i+j)$

$$M = \sum_{i+j} (2IBR) \Delta l_i \cos \alpha_i = IBR \sum_{i+j} 2\Delta l_i \cos \alpha_i. \quad (3)$$

Сумма в (3) представляет собой сумму длин проекций пар элементарных участков на диаметр  $OA$ , т.е.

$$M = IBR \sum_{i+j} 2\Delta l_i \cos \alpha_i = IBR(2R) = 2IBR^2. \quad (4)$$

Ограничитель «сработает» (т.е. разомкнет цепь) при такой силе тока  $I_{max}$ , когда момент сил Ампера сравняется с моментом силы тяжести относительно точки  $O$

$$mgR = 2I_{max}BR^2 \Rightarrow I_{max} = \frac{mg}{2BR} = 9,8 \cdot 10^2 \text{ A} = 0,98 \text{ kA}. \quad (5)$$

**1.5 «Магнитный толкатель»** Как следует из предыдущего пункта, сила Ампера, действующая на провод произвольной формы равна по модулю силе Ампера, действующей на отрезок, соединяющий его начальную и конечную точки.

Построить картину распределения элементарных токов  $I_i$  по диску достаточно сложно, однако в силу предыдущего замечания для ответа на вопрос задачи этого и не требуется, поскольку все они начинаются в точке  $A$  и заканчиваются в точке  $B$ . Следовательно, для нахождения результирующей силы Ампера можно считать, что от точки  $A$  к точке  $B$  течет прямой ток  $I_{min}$ . Теперь понятно, что диск сдвинется с места по направлению действия силы Ампера, т.е. по нормали к отрезку  $AB$  в направлении к центру окружности. Это произойдет после того, как сила Ампера превысит по модулю силу трения покоя (на рис.  $\alpha = 80^\circ$ )

$$I_{min}B(2R \sin \frac{\alpha}{2}) = \mu mg \Rightarrow I_{min} = \frac{\mu mg}{2BR \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{56}{\sin 45^\circ} (\text{A}) = 79 \text{ A}.$$

## Решение 10.2. «Смещение и затухание»

**2.1. Выразите частоту  $\nu_0$  колебаний шарика через массу шарика и жесткость пружины.**

Уравнение движения шарика имеет вид

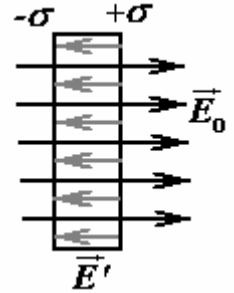
$$ma = -kx, \quad (1)$$

из которого непосредственно следует формула для частоты

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2)$$

**2.2. Получите выражение для силы  $F_e(z)$ , действующей на неподвижный шарик со стороны диска, как функцию его расстояния до центра диска  $z$  (для  $z \gg r$ ).**

Электрическое поле внутри проводящего диска должно отсутствовать. Под действием поля  $\vec{E}_0$  точечного заряда  $q$  на поверхности диска будут индуцироваться заряды с поверхностной плотностью  $\pm \sigma$ , которые будут создавать поле  $\vec{E}'$ , равное по величине и противоположное по направлению поля точечного заряда. Учитывая, что размеры диска малы по сравнению с расстоянием до заряда, можно пренебречь изменением вектора напряженности  $\vec{E}_0$  в пределах диска. Поэтому и поле  $\vec{E}'$  следует считать однородным, а поверхностную плотность индуцированных зарядов постоянной.



Напряженность поля точечного заряда определяется формулой  $E_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$ , а напряженность поля индуцированных зарядов связана с их

поверхностной плотностью соотношением  $E' = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ . Приравнявая эти

величины, определим поверхностную плотность индуцированных зарядов  $\sigma' = \frac{q}{4\pi z^2}$ , и величину индуцированного заряда на одной стороне диска

$$q' = \sigma' S = \frac{qS}{4\pi z^2}, \text{ (где } S = \pi r^2 \text{ - площадь диска).}$$

Интересно отметить, что индуцированный дипольный момент диска равен  $p' = q'h = \frac{qSh}{4\pi z^2} = \frac{q}{4\pi z^2} V$ . Из

сравнения с традиционным выражением для этой величины  $p = \alpha \epsilon_0 E_0$  следует, что поляризуемость диска в точности равна его объему.

Теперь с помощью закона Кулона легко найти силу, действующую на точечный заряд со стороны двух индуцированных зарядов (который на большом расстоянии также можно считать точечными)

$$F_e = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{z^2} - \frac{1}{(z+h)^2} \right) = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(z+h)^2 - z^2}{z^2(z+h)^2}.$$

Учитывая, что  $h \ll z$ , окончательно получим

$$F_e = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(z+h)^2 - z^2}{z^2(z+h)^2} \approx \frac{qq'h}{2\pi\epsilon_0 z^3} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 z^3} \cdot \frac{q}{4\pi z^2} V = \frac{q^2 V}{8\pi^2 \epsilon_0 z^5}. \quad (3)$$

где  $V = \pi r^2 h$  - объем диска.

### 2.3. Получите формулу для определения максимального заряда шарика, при котором он может совершать колебательное движение.

Необходимым и достаточным условием возможности колебаний является наличие положения устойчивого равновесия.

Условию равновесия соответствует равенство сил упругости и электростатического взаимодействия (3), то есть для координаты точки равновесия справедливо уравнение

$$kx = \frac{q^2}{8\pi^2 \varepsilon_0 (z_0 - x)^5}. \quad (4)$$

Это уравнение является алгебраически уравнением шестой степени, поэтому не может быть решено элементарными методами. Преобразуем уравнение к виду

$$kz_0 \frac{x}{z_0} = \frac{q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 z_0^5 \left(1 - \frac{x}{z_0}\right)^5},$$

обозначим  $\xi = \frac{x}{z_0}$  и введем безразмерный параметр рассматриваемой системы

$$\gamma = \frac{q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 z_0^5 (kz_0)}. \quad (5)$$

В этих обозначениях уравнение (4) имеет простой вид

$$\xi = \frac{\gamma}{(1 - \xi)^5}. \quad (6)$$

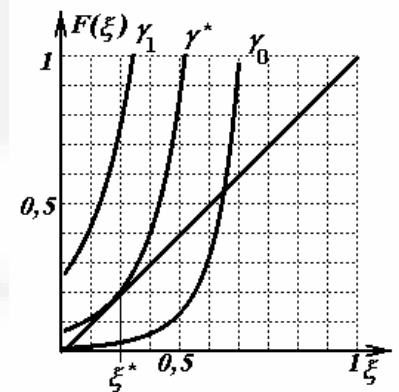
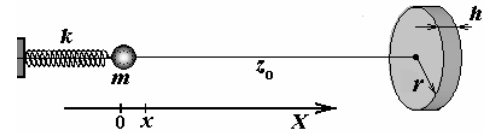
Колебания шарика возможны до тех пор, пока существует положение устойчивого равновесия. Иными словами, пока уравнение (6) имеет решения на интервале  $0 \leq \xi \leq 1$ . Функция

$F(\xi) = \frac{\gamma}{(1 - \xi)^5}$  резко возрастает при приближении

аргумента к единице. При малых значениях параметра  $\gamma$  эта функция имеет две точки пересечения с прямой  $F = \xi$  (то есть имеется два корня уравнения), при больших значениях  $\gamma$  корней нет – на рисунке  $\gamma_1 > \gamma_0$ .

Из анализа зависимостей сил упругости и электрического притяжения следует, что меньший корень соответствует положению устойчивого положения равновесия, а больший неустойчивого.

«Критическим» значением является такое значение  $\gamma^*$ , при котором прямая  $F = \xi$  касается графика функции  $F(\xi)$  в одной точке  $\xi^*$ . Таким



образом, в этой точке производная от этой функции должна равняться  $F'(\xi) = 1$ . Итак, для определения этого значения имеем два уравнения

$$\xi^* = \frac{\gamma^*}{(1 - \xi^*)^5}; \quad 1 = \frac{5\gamma^*}{(1 - \xi^*)^6},$$

Разделив первое из них на второе, получим  $\xi^* = \frac{1 - \xi^*}{5}$ , откуда следует  $\xi^* = \frac{1}{6}$ ,

а искомое значение параметра выражается «очень красиво»

$$\gamma^* = \xi^* \cdot (1 - \xi^*)^5 = \frac{5^5}{6^6} \approx 0,067.$$

Используя выражение для параметра (5), находим максимальное значение заряда

$$q_{\max} = \sqrt{\frac{5^5}{6^6} \frac{8\pi^2 \varepsilon_0 z_0^5 (kz_0)}{V}}. \quad (7)$$

*Возможен еще один способ определения условия существования корней уравнения (6). Преобразуем это уравнение к виду*

$$\xi(1 - \xi)^5 = \gamma.$$

*Ясно, что это уравнение будет иметь корни, если максимум функции  $f(\xi) = \xi(1 - \xi)^5$  превышает значение параметра  $\gamma$ . Этот метод приводит к тому конечному результату.*

#### 2.4. Чему равно относительное смещение положения равновесия шарика

$$\xi = \frac{x}{z_0} ?$$

Заметим, что приведенное в условии численное значение параметра  $\gamma$

меньше критического  $\gamma^* = \frac{5^5}{6^6} \approx 0,067$ , поэтому при таком заряде существует положение устойчивого равновесия шарика. Его координата является меньшим корня уравнения (6).

С точностью до малых величин первого порядка, его решение элементарно

$$\xi = \frac{x}{z_0} \approx \gamma = 1,0 \cdot 10^{-2}. \quad (8)$$

#### 2.5. Чему равно относительно изменение частоты колебаний шарика

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} ?$$

Обозначим расстояние от диска до положения равновесия заряженного шарика  $z_1$ . Переместим начало отсчета в эту точку. Уравнение движения шарика при малом отклонении  $x$  от положения равновесия имеет вид (при преобразовании функций опять используется малость отклонений  $x \ll z_1$ ):

$$ma = -k(z_1 + x) + \frac{q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 (z_1 - x)^5} = -kz_1 - kx + \frac{q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 z_1^5 \left(1 - \frac{x}{z_1}\right)^5} \approx$$

$$\approx -kz_1 - kx + \frac{q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 z_1^5} \left(1 + 5 \frac{x}{z_1}\right) = -kz_1 + \frac{q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 z_1^5} - \left(k - \frac{5q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 z_1^6}\right)x$$

Первые два слагаемых взаимно уничтожаются, так как точка  $z_1$  - положение равновесия. Таким образом, получаем уравнение гармонических колебаний

$$a = -\frac{k}{m} \left(1 - \frac{5q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 k z_1^6}\right)x$$

с частотой  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{5q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 z_1^6 k}\right)} = \sqrt{\omega_0^2 \left(1 - \frac{5q^2 V}{8\pi^2 \varepsilon_0 z_1^6 k}\right)} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{5q^2 V}{16\pi^2 \varepsilon_0 z_1^6 k}\right)$ .

Следовательно, относительное изменение частоты колебаний равно

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} = \frac{\Delta \omega}{\omega_0} = -\frac{5q^2 V}{16\pi^2 \varepsilon_0 z_1^6 k} \approx -\frac{5}{2} \gamma = -2,5\%. \quad (8)$$

## 2.6. Оцените, за сколько периодов колебаний заряженного шарика их амплитуда уменьшится $\eta = 1,0\%$ .

Так как индуцированные на поверхности диска заряды зависят от положения заряженного шарика, то при его движении величины этих зарядов будут изменяться, то есть по диску будут протекать электрические токи. Причиной затухания колебаний является потеря энергии на выделение джоулевой теплоты при протекании электрического тока при «перезарядке» диска. При малом сопротивлении диска можно пользоваться «квазистационарным» приближением, то есть считать, что заряд диска соответствует равновесному значению при заданном положении шарика. Величина равновесного индуцированного заряда была подсчитана ранее и равна  $q' = \frac{qS}{4\pi z^2}$ . Сила тока протекающего поперек диска легко вычисляется

$$I = \frac{dq'}{dt} = \frac{dq'}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{qS}{2\pi z^3} v, \quad (9)$$

где  $v = -\frac{dz}{dt}$  - скорость шарика. Так как колебания шарика малы, то можно пренебречь изменением расстояния  $z$  в знаменателе формулы (9) и положить  $z(t) \approx z_1$ . В этом случае мощность теплоты, выделяющейся в диске по закону Джоуля-Ленца равна

$$P = I^2 R = \left(\frac{qS}{2\pi z_1^3}\right)^2 \rho \frac{h}{S} v^2 \approx \frac{q^2 S h \rho}{4\pi^2 z_1^6} v^2.$$

Если скорость шарика изменяется по закону  $v(t) = v_0 \cos(\omega t + \varphi)$ , то среднее за период значение квадрата скорости равно  $\langle v^2(t) \rangle = \frac{1}{2} v_0^2$ . Потери энергии за один период колебаний равны

$$\Delta W = \langle P \rangle T = \frac{q^2 Sh \rho}{4\pi^2 z_1^6} \langle v^2 \rangle T = \frac{q^2 Sh \rho}{4\pi^2 z_1^6} \cdot \frac{1}{2} v_0^2 \cdot \frac{2\pi}{\omega}. \quad (10)$$

Из предыдущего рассмотрения следует, что изменения положения равновесия и частоты малы, поэтому в данной формуле можно положить  $z_1 \approx z_0$ ,  $\omega \approx \omega_0$ . Начальная энергия колебаний  $W_0 = \frac{mv_0^2}{2}$ , поэтому формулу (10)

можно записать в виде

$$\Delta W = \frac{q^2 Sh \rho}{4\pi^2 z_0^6} \cdot \frac{1}{2} mv_0^2 \cdot \frac{2\pi}{m\omega_0} = \frac{q^2 Sh \rho}{8\pi^2 \varepsilon_0 z_0^6 k} \cdot \frac{1}{2} mv_0^2 \cdot \frac{4\pi\rho\varepsilon_0}{\omega_0} \cdot \frac{k}{m} = 4\pi\rho\varepsilon_0\omega_0\gamma W_0. \quad (10a)$$

Как следует из этого выражения, потери энергии за период пропорциональны начальной энергии, следовательно, энергия как функция числа колебаний будет убывать в геометрической прогрессии, действительно, за один период энергия уменьшится до величины

$$\Delta W = W_0 - W_1 = 4\pi\rho\varepsilon_0\omega_0\gamma W_0 \Rightarrow W_1 = (1 - 4\pi\rho\varepsilon_0\omega_0\gamma) W_0,$$

после  $n$  колебаний энергия станет равной

$$W_n = (1 - 4\pi\rho\varepsilon_0\omega_0\gamma)^n W_0. \quad (11)$$

Так как энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды, то из формулы (11) следует, что амплитуда колебаний зависит от числа колебаний по закону

$$A_n = A_0 (1 - 4\pi\rho\varepsilon_0\omega_0\gamma)^{\frac{n}{2}}.$$

Учитывая, что рассматриваемое изменение амплитуды колебаний мало, то очередной раз можно воспользоваться приближением

$$A_n = A_0 (1 - 4\pi\rho\varepsilon_0\omega_0\gamma)^{\frac{n}{2}} \approx A_0 (1 - 2\pi\rho\varepsilon_0\omega_0\gamma \cdot n),$$

или относительное уменьшение амплитуды

$$\frac{A_0 - A_n}{A_0} = \eta = 2\pi\rho\varepsilon_0\omega_0\gamma \cdot n.$$

Таким образом, искомое число колебаний равно

$$n = \frac{\eta}{2\pi\rho\varepsilon_0\omega_0\gamma} \approx 2,9 \cdot 10^7, \quad (12)$$

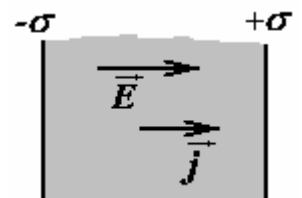
что соответствует времени более одного месяца.

## 2.7. Оцените, при каком удельном электрическом сопротивлении материала диска затухание колебаний шарика будет максимальным.

Проведенное выше описание затухание колебаний не полно.

Оно справедливо только для малых удельных сопротивлений. Действительно, из полученных выражений следует, что для непроводящей пластинки ( $\rho \rightarrow \infty$ ), колебания затухают мгновенно, хотя в этом случае отсутствуют механизмы потери энергии, следовательно, колебания должны быть вообще незатухающими.

Для более точного описания затухания необходимо более точно рассмотреть динамику изменения



поверхностной плотности индуцированных зарядов на поверхности диска. Для этого воспользуемся законом Ома<sup>1</sup>  $j = \frac{1}{\rho} E$  и связью плотности тока с изменением поверхностной плотности заряда  $j = \frac{d\sigma}{dt}$ . Учитывая, что поле внутри диска создается как полем заряда шарика, так и индуцированными зарядами, запишем уравнение для изменения поверхностной плотности индуцированных зарядов

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{\rho} \left( E - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \right) = \frac{1}{\rho \varepsilon_0} \left( \frac{q}{4\pi(z_1 - x)^2} - \sigma \right). \quad (13)$$

Обозначим  $\tau = \rho \varepsilon_0$  и упростим это уравнение, используя стандартную методику

$$\begin{aligned} \tau \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{q}{4\pi(z_1 - x)^2} - \sigma = \frac{q}{4\pi z_1^2} \left( 1 - \frac{x}{z_1} \right)^{-2} - \sigma = \frac{q}{4\pi z_1^2} \left( 1 + 2\frac{x}{z_1} \right) - \sigma = \\ &= \frac{q}{4\pi z_1^2} + \frac{q}{2\pi z_1^3} x - \sigma \end{aligned}$$

Плотность тока перезарядки (следовательно, и потери энергии) определяются переменной составляющей плотности заряда, поэтому представим  $\sigma = \frac{q}{4\pi z_1^2} + s(t)$ , где  $s(t)$  - изменяющаяся часть поверхностной плотности заряда. Для последней справедливо уравнение

$$\tau \frac{ds}{dt} = \frac{q}{2\pi z_1^3} x - s.$$

Как мы показали выше, затухание колебаний является крайне малым, поэтому координату шарика с высокой точностью можно представить в виде<sup>2</sup>

$$x = A \cos \omega t,$$

тогда для определения  $s(t)$  получим уравнение

$$\tau \frac{ds}{dt} + s = \frac{q}{2\pi z_1^3} A \cos \omega t, \quad (14)$$

которое проще всего решить методом векторных диаграмм. Так, при  $s = B \cos(\omega t + \varphi)$

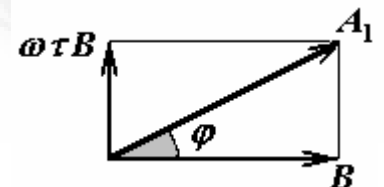
$$\tau \frac{ds}{dt} = -B\omega \sin(\omega t + \varphi) = B\omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Тогда

векторная диаграмма, описывающее уравнение (14) имеет вид, показанный на рисунке (где обозначено

$$A_1 = \frac{q}{2\pi z_1^3} A).$$

Из данной диаграммы следует



<sup>1</sup> Можно использовать закон Ома и в «обычной» форме – «для участка цепи».

<sup>2</sup> Конечно, в качестве частоты колебаний можно взять собственную частоту колебаний  $\omega_0$

$$B^2(1+(\omega\tau)^2) = A_1^2, \\ \operatorname{tg} \varphi = -\omega\tau$$

$$\text{или } s = \frac{A}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \frac{q}{2\pi z_1^3} \cos(\omega t + \varphi).$$

Далее, аналогично выводу соотношения (10), можно утверждать, что потери энергии за период пропорциональны (оставлены только сомножители, зависящие от удельного электрического сопротивления)

$$\Delta W \propto B^2 \omega \tau \propto \frac{\omega \tau}{1+(\omega\tau)^2}.$$

Данная функция достигает максимума при  $\omega\tau=1$ , следовательно, при этом условии затухание и будет максимальным. Таким образом, получаем  $2\pi\nu_0\rho\varepsilon_0=1$ , или окончательно

$$\rho = \frac{1}{2\pi\nu_0\varepsilon_0} \approx 1,8 \cdot 10^9 \text{ Ом} \cdot \text{м}. \quad (15)$$

**2.8. Качественно опишите, какие именно свойства индуцированных зарядов (и их изменения) обеспечивают появление сил, действующих на шарик, приводящих к**

- а) смещению положения равновесия;**
- б) изменению частоты колебаний;**
- в) затуханию колебаний.**

На основании предыдущих рассуждений следует, что

- а) постоянная составляющая поверхностной плотности заряда приводит к смещению положения равновесия;
- б) изменение поверхностной плотности в «квазистационарном приближении» приводит к изменению частоты колебаний;
- в) Заметим, что если все силы, действующие на шарик, зависят только от координат, то затухание колебаний отсутствует. Поэтому следует искать причины, приводящие к появлению составляющих сил, зависящих от скорости движения шарика. Причиной появления таких слагаемых является «запаздывание» - распределение индуцированных зарядов отстает от равновесного распределения, соответствующего положению шарика в «данный момент времени». Наличие «запаздывания» распределения зарядов, по отношению к положению заряда приводят к затуханию колебаний.

Дополнение, не входящее в оцениваемое решение.

Эти утверждения можно строго подтвердить на «языке уравнений» движения шарика и изменения поверхностной плотности индуцированных зарядов.



Сила электрического взаимодействия  $F \approx \frac{qq'h}{2\pi\epsilon_0 z^3} = \frac{qV}{2\pi\epsilon_0 z^3} \cdot \sigma$

Уравнение колебаний шарика

$$\begin{aligned} ma &= -k(z_1 + x) + \frac{qV}{2\pi\epsilon_0(z_1 - x)^3} \cdot \sigma = -k(z_1 + x) + \frac{qV\sigma}{2\pi\epsilon_0 z_1^3} \cdot \left(1 - \frac{x}{z_1}\right)^{-3} = \\ &= -k(z_1 + x) + \frac{qV}{2\pi\epsilon_0 z_1^3} \sigma + \frac{3qV}{2\pi\epsilon_0 z_1^4} \sigma x \end{aligned}$$

Уравнение для изменения поверхностной плотности индуцированных зарядов

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{\rho} \left( E - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \right) = \frac{1}{\rho\epsilon_0} \left( \frac{q}{4\pi(z_1 - x)^2} - \sigma \right),$$

или, с учетом использованных обозначений,

$$\tau \frac{d\sigma}{dt} = \frac{q}{4\pi z_1^2} + \frac{q}{2\pi z_1^3} x - \sigma$$

Из этого уравнения выразим  $\sigma = \frac{q}{4\pi z_1^2} + \frac{q}{2\pi z_1^3} x - \tau \frac{d\sigma}{dt}$ , и подставим в уравнение колебаний шарика

$$\begin{aligned} ma &= -k(z_1 + x) + \frac{qV}{2\pi\epsilon_0 z_1^3} \sigma + \frac{3qV}{2\pi\epsilon_0 z_1^4} \sigma x = \\ &= -k(z_1 + x) + \frac{qV}{2\pi\epsilon_0 z_1^3} \left( \frac{q}{4\pi z_1^2} + \frac{q}{2\pi z_1^3} x - \tau \frac{d\sigma}{dt} \right) + \frac{3qV}{2\pi\epsilon_0 z_1^4} x \left( \frac{q}{4\pi z_1^2} + \frac{q}{2\pi z_1^3} x - \tau \frac{d\sigma}{dt} \right) = \\ &= -kz_1 + \frac{q^2 V}{8\pi^2 \epsilon_0 z_1^5} - \left( k - \frac{q^2 V}{4\pi^2 \epsilon_0 z_1^6} - \frac{3q^2 V}{8\pi^2 \epsilon_0 z_1^6} \right) x - \frac{qV}{2\pi\epsilon_0 z_1^3} \tau \frac{d\sigma}{dt} + \frac{3qV}{2\pi\epsilon_0 z_1^4} x \left( \frac{q}{2\pi z_1^3} x - \tau \frac{d\sigma}{dt} \right) \end{aligned}$$

Первые два слагаемых взаимно уничтожаются  $-kz_1 + \frac{q^2 V}{8\pi^2 \epsilon_0 z_1^5} = 0$  (уравнение для определения смещенного положения равновесия).

Множитель при третьем слагаемом определяет изменение частоты

$$-\left( k - \frac{q^2 V}{4\pi^2 \epsilon_0 z_1^6} - \frac{3q^2 V}{8\pi^2 \epsilon_0 z_1^6} \right) x = -\left( k - \frac{5q^2 V}{8\pi^2 \epsilon_0 z_1^6} \right) x = -m\omega_1^2 x$$

Следующее, содержащее скорость изменения поверхностной плотности, ответственно за затухание. Остальными следует пренебречь, как имеющие более высокий порядок малости.

Итого имеем уравнение колебаний.

$$ma = -m\omega_1^2 x - \frac{qV}{2\pi\epsilon_0 z_1^3} \tau \frac{d\sigma}{dt}.$$

В использованном приближении, уравнение для плотности заряда можно решать методом последовательных приближений. Пренебрегая «запаздыванием» получаем

$$\sigma_{(0)} \approx \frac{q}{4\pi z_1^2} + \frac{q}{2\pi z_1^3} x,$$

тогда  $\tau \frac{d\sigma}{dt} \approx \tau \frac{d\sigma_{(0)}}{dt} = \frac{q}{2\pi z_1^3} \tau \frac{dx}{dt}$ . Подставляя в уравнение движения шарика, получаем уравнение

$$ma = -m\omega_1^2 x - \frac{qV}{2\pi\epsilon_0 z_1^3} \tau \frac{d\sigma}{dt} \approx -m\omega_1^2 x - \frac{qV}{2\pi\epsilon_0 z_1^3} \cdot \frac{q}{2\pi z_1^3} \tau \frac{dx}{dt} = -m\omega_1^2 x - \frac{q^2 V \rho}{4\pi^2 z_1^6} \cdot \frac{dx}{dt},$$

в котором в явном виде присутствует слагаемое, «ответственное» за затухание.