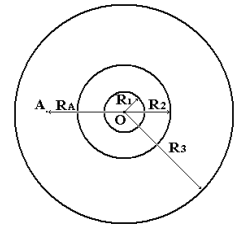


Задача 11-2 . Звуковые волны, эффект Доплера.

1.1. Потенциал на внешних поверхностях сфер определим по принципу суперпозиции потенциалов. Потенциал каждой из сфер будет определяться не только зарядом данной сферы, но и зарядами двух других сфер.



Потенциал на внешней поверхности первой сферы:

$$\varphi_1 = k \frac{q}{R} + k \frac{4q}{2R} - k \frac{2q}{4R} = \frac{10}{4} k \frac{q}{R} \quad (1)$$

Потенциал на внешней поверхности второй сферы:

$$\varphi_2 = k \frac{q}{2R} + k \frac{4q}{2R} - k \frac{2q}{4R} = 2k \frac{q}{R} \quad (2)$$

Потенциал на внешней поверхности третьей сферы:

$$\varphi_3 = k \frac{q}{4R} + k \frac{4q}{4R} - k \frac{2q}{4R} = \frac{3}{4} k \frac{q}{R} \quad (3)$$

Потенциал в точке A:

$$\varphi_A = k \frac{q}{3R} + k \frac{4q}{3R} - k \frac{2q}{4R} = \frac{7}{6} k \frac{q}{R} \quad (4)$$

Напряжённости электрических полей на внешних поверхностях сфер определим по принципу суперпозиции напряжённостей. Векторы напряжённостей электрических полей, создаваемых концентрическими сферами, будут направлены радиально к поверхностям сфер. Поэтому суммирование напряжённостей полей производится алгебраически. Также учитываем, что напряжённость электрического поля внутри сферы равна нулю.

Напряжённость на внешней поверхности первой сферы:

$$E_1 = k \frac{q}{R^2} \quad (5)$$

Напряжённость на внешней поверхности второй сферы:

$$E_2 = k \frac{q}{4R^2} + k \frac{4q}{4R^2} = \frac{5}{4} k \frac{q}{R^2} \quad (6)$$

Напряжённость на внешней поверхности третьей сферы:

$$E_3 = k \frac{q}{16R^2} + k \frac{4q}{16R^2} - k \frac{2q}{16R^2} = \frac{3}{16} k \frac{q}{R^2} \quad (7)$$

Напряжённость в точке A:

$$E_A = k \frac{q}{9R^2} + k \frac{4q}{9R^2} = \frac{5}{9} k \frac{q}{R^2} \quad (8)$$

1.2.

После соединения второй и третьей сфер проводником между ними происходит перераспределение зарядов таким образом, что потенциалы этих сфер становятся равными.

Суммарный заряд этих двух сфер сохраняется.

$$\varphi_2 = \varphi_3 \quad (9)$$

$$q_2 + q_3 = q_2 + q_3 \quad (10)$$

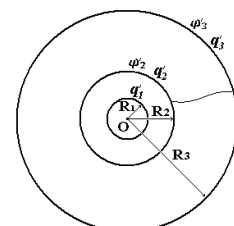


Рисунок 2.

$$q_2' + q_3' = 2q \quad (11)$$

Заряд первой сферы не изменяется.

$$q_1' = q_1 = q \quad (12)$$

Уравнение (9) запишем в виде:

$$k \frac{q}{2R} + k \frac{q_2'}{2R} + k \frac{q_3'}{4R} = k \frac{q}{4R} + k \frac{q_2'}{4R} + k \frac{q_3'}{4R} \quad (13)$$

Из (13) получим:

$$q_2' = -q \quad (14)$$

Из (11) получим:

$$q_3' = 3q \quad (15)$$

1.3.

После заземления второй и третьей сфер между ними и землёй происходит перераспределение зарядов таким образом, что потенциалы этих сфер становятся равными нулю.

$$\varphi_2' = \varphi_3' = 0 \quad (16)$$

Заряд первой сферы не изменяется.

$$q_1' = q_1 = q \quad (17)$$

По заземляющему проводнику пройдёт заряд

$$\Delta q = q_2' + q_3' - q_2 - q_3 \quad (18)$$

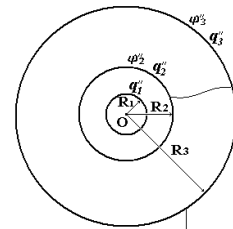


Рисунок 3.

Равенство потенциалов $\varphi_2' = \varphi_3'$ запишем в виде:

$$k \frac{q}{2R} + k \frac{q_2'}{2R} + k \frac{q_3'}{4R} = k \frac{q}{4R} + k \frac{q_2'}{4R} + k \frac{q_3'}{4R} \quad (19)$$

Из (19) получим:

$$q_2' = -q \quad (20)$$

Учитывая, что $\varphi_3' = 0$ получим:

$$q_3' = 0 \quad (21)$$

Следовательно, по заземляющему проводнику пройдёт заряд

$$\Delta q = 3q \quad (22)$$

2.1.

Диэлектрический слой «заменяем» двумя сферами радиусами R и $3R$, и зарядами q_{c1} и q_{c2} . На рисунке 4 данные сферы обозначены пунктиром. Напряжённость электрического поля на поверхности диэлектрического слоя вблизи внутренней сферы можно определить как

$$E_D = k \frac{q}{R^2} + k \frac{q_{c1}}{R^2} \quad (23),$$

или как

$$E_D = k \frac{q}{\varepsilon R^2} \quad (24).$$

Приравнявая правые части (23) и (24)

определим величину связанных зарядов,

образующихся на поверхности диэлектрического слоя вблизи внутренней сферы q_{c1} .

$$k \frac{q}{R^2} + k \frac{q_{c1}}{R^2} = k \frac{q}{\varepsilon R^2} \quad (25)$$

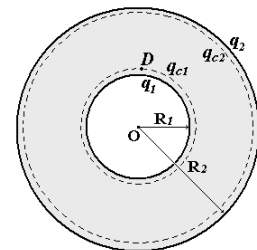


Рисунок 4.

$$q_{c1} = q \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon} \quad (26)$$

Величину связанных зарядов, образующихся на поверхности диэлектрического слоя вблизи внешней сферы q_{c2} , определим используя закон сохранения электрического заряда.

Диэлектрический слой, согласно условия задачи, электрически нейтрален. Поэтому

$$q_{c1} + q_{c2} = 0 \quad (27)$$

Подставляя в (27) значение q_{c1} , получим:

$$q_{c2} = q \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} \quad (28)$$

2.2.

Потенциалы определяем по принципу суперпозиции потенциалов.

$$\varphi_R = k \frac{q_1}{R} + k \frac{q_{c1}}{R} + k \frac{q_{c2}}{3R} + k \frac{q_2}{3R} \quad (29)$$

$$\varphi_{2R} = k \frac{q_1}{2R} + k \frac{q_{c1}}{2R} + k \frac{q_{c2}}{3R} + k \frac{q_2}{3R} \quad (30)$$

$$\varphi_{3R} = k \frac{q_1}{3R} + k \frac{q_{c1}}{3R} + k \frac{q_{c2}}{3R} + k \frac{q_2}{3R} \quad (31)$$

Подставляя значения зарядов q_1 , q_2 , q_{c1} , q_{c2} , получим:

$$\varphi_R = k \frac{q}{R} + k \frac{q}{R} \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon} + k \frac{q}{3R} \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} + k \frac{3q}{3R} = k \frac{q}{R} \frac{(4\varepsilon + 2)}{3\varepsilon} \quad (32)$$

$$\varphi_{2R} = k \frac{q}{2R} + k \frac{q}{2R} \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon} + k \frac{q}{3R} \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} + k \frac{3q}{3R} = k \frac{q}{R} \frac{(8\varepsilon + 1)}{6\varepsilon} \quad (33)$$

$$\varphi_{3R} = k \frac{q}{3R} + k \frac{q}{3R} \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon} + k \frac{q}{3R} \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} + k \frac{3q}{3R} = k \frac{q}{R} \frac{4}{3} \quad (34)$$

2.3.

После заземления внутренней сферы между ней и землёй происходит перераспределение зарядов таким образом, что потенциал этой сферы становятся равными нулю.

$$\varphi_1'' = 0 \quad (35)$$

Потенциал φ_1'' запишем, используя принцип суперпозиции потенциалов:

$$k \frac{q_1''}{R} + k \frac{q_{c1}'}{R} + k \frac{q_{c2}'}{3R} + k \frac{3q}{3R} = 0 \quad (36)$$

Для напряжённости электрического поля в точке D получим уравнение

$$k \frac{q_1''}{R^2} + k \frac{q_{c1}'}{R^2} = k \frac{q_1''}{\varepsilon R^2} \quad (37)$$

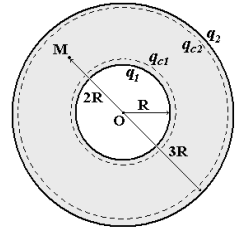


Рисунок 5.

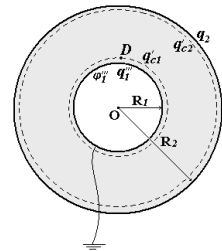


Рисунок 6.

Так же примем во внимание, что диэлектрический слой остаётся электрически нейтральным, а следовательно

$$q'_{c1} + q'_{c2} = 0 \quad (38).$$

Решив систему уравнений (36), (37) и (38), получим:

$$q''_1 = -q \frac{3\varepsilon}{\varepsilon + 2} \quad (39)$$

$$q'_{c1} = q \frac{3(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2} \quad (40)$$

$$q'_{c2} = -q \frac{3(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2} \quad (41)$$