

### Задача 11-3. Автоколебания

#### Часть 1. Вал неподвижен, трения нет!

1.1 Период малых свободных колебаний стержня можно рассчитать по формуле

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,08}{9,8}} = 0,57 \text{ с}. \quad (1)$$

1.2 Закон движения стержня, то есть зависимость угла отклонения от времени  $\varphi(t)$ , есть закон гармонических колебаний

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos \Omega t, \quad (2)$$

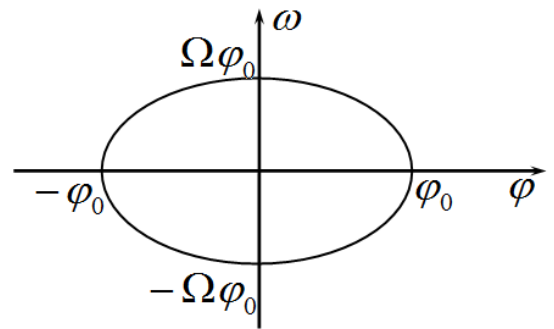
где  $\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$  круговая частота колебаний стержня.

Зависимость угловой скорости движения стержня от времени  $\omega(t)$  имеет вид

$$\omega(t) = -\varphi_0 \Omega \sin \Omega t. \quad (3)$$

Отклонение в  $30^\circ$  можно считать малым.

1.3 Фазовая диаграмма движения стержня является эллипсом.



#### Часть 2. Вал неподвижен, трение постоянно.

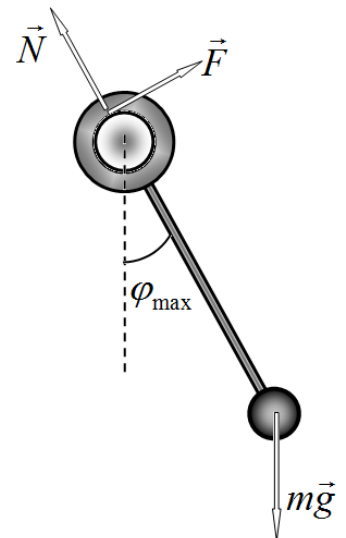
2.1 Из рисунка, на котором изображены силы, действующие на маятник следует:

$$N = mg \cos \varphi_{\max}. \quad (4)$$

Величина силы трения  $F = \mu_0 N = \mu_0 mg \cos \varphi_{\max}$ .

В состоянии равновесия сумма моментов силы, действующих на маятник равна нулю, поэтому

$$\begin{aligned} \mu_0 mg \cos \varphi_{\max} \cdot r &= mgl \sin \varphi_{\max} \Rightarrow \\ \operatorname{tg} \varphi_{\max} &= \mu_0 \frac{r}{l} = 0,8 \frac{2,0}{8,0} = 0,20 \Rightarrow \varphi_{\max} \approx 11^\circ. \end{aligned} \quad (5)$$



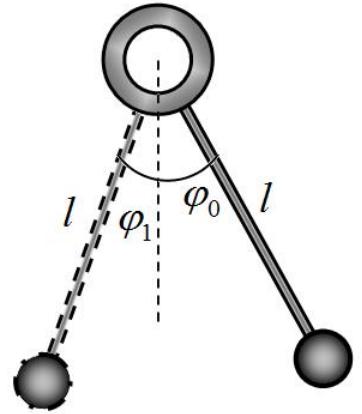
**2.2** Изменение энергии маятника равно работе силы трения, поэтому

$$-mgl \cos \varphi_0 - (-mgl \cos \varphi_1) = \mu mgr(\varphi_0 + \varphi_1). \quad (6)$$

Полагая углы малыми и, пользуясь приближенной формулой для косинуса, получим

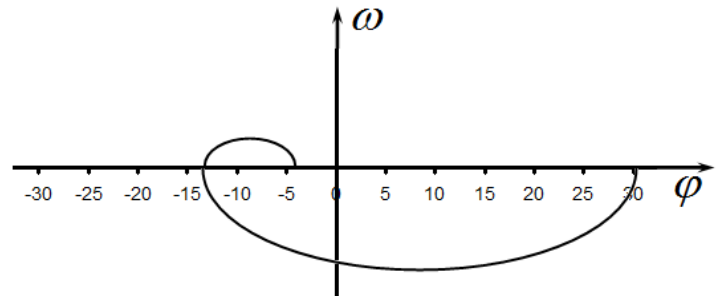
$$\begin{aligned} \varphi_0^2 - \varphi_1^2 &= 2\mu \frac{r}{l}(\varphi_0 + \varphi_1) \Rightarrow \\ \varphi_1 &= \varphi_0 - 2\mu \frac{r}{l} \end{aligned} \quad (7)$$

То есть угол отклонения уменьшается на величину  $\Delta\varphi = 2\mu \frac{r}{l} = 2 \cdot 0,6 \frac{2}{8} = 0,30 = 17^\circ$ . Аналогичное уменьшение будет и до второй остановки.



**2.3** Итак первая остановка произойдет при  $\varphi_1 = -(30^\circ - 17^\circ) = -13^\circ$ , следующая остановка  $\varphi_2 = -4^\circ$

попадает в зону застоя, т.е. маятник остановится. Схематически фазовая диаграмма имеет вид, показанный на рисунке.



### Часть 3. Вал вращается, трение есть!

**3.1** Максимальный угол отклонения определяется трением покоя. Силы, действующие на маятник на вращающемся против часовой стрелки валу, показаны на рисунке. Угол  $\alpha$  задает направление на точку касания муфты и вала.

Запишем условия равновесия маятника.

В проекции на горизонтальную ось

$$N \sin \alpha = F \cos \alpha = \mu_0 N \cos \alpha \quad (8)$$

Из этого уравнения следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu_0. \quad (10)$$

В проекции на вертикаль:

$$mg = N \cos \alpha + \mu_0 N \sin \alpha \quad (11)$$

С учетом (10) последнее выражение преобразуется к виду

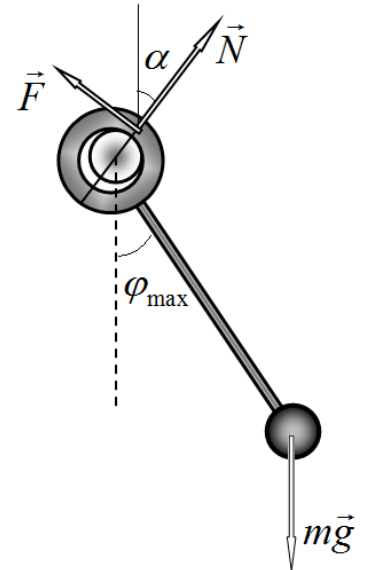
$$\begin{aligned} mg &= N \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha N \sin \alpha \Rightarrow \\ N &= \frac{mg}{\cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha} = mg \cos \alpha \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда сила трения описывается формулой (опять же, принимая во внимание формулу (10))

$$F = \mu_0 N = \mu_0 mg \cos \alpha = \frac{\mu_0}{\sqrt{1 + \mu_0^2}} mg. \quad (13)$$

Наконец, запишем условие равенства моментов сил, действующих на маятник

$$\frac{\mu_0}{\sqrt{1 + \mu_0^2}} mgr = mgl \sin \varphi_{\max} \quad (14)$$



Из которого находим

$$\sin \varphi_{\max} = \frac{\mu_0}{\sqrt{1 + \mu_o^2}} \frac{r}{l} = 0,16 \quad (15)$$

$$\varphi_{\max} = 9,0^\circ$$

**3.2** Для расчета положения равновесия можно воспользоваться формулой (15), в которой заменить коэффициент трения покоя на коэффициент трения скольжения

$$\sin \bar{\varphi} = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \frac{r}{l} = 0,13 \quad (16)$$

$$\varphi_{\max} = 7,0^\circ$$

**3.3** Качественно процесс движения маятника будет происходить следующим образом.

Вначале маятник неподвижен относительно вала и поднимается с угловой скоростью  $\omega_0$ , равной скорости вращения вала (участок 1-2). Достигнув максимально возможной высоты, найденной в п. 3.1 он начнет проскальзывать (точка 2). Сила трения скачком уменьшается, маятник по инерции продолжает подниматься. Искерпав запас кинетической энергии в некоторой точке 3, он остановится. Так как он не попадает в зону застоя, то начнет двигаться вниз (участок 3-4). На этом этапе его фазовая траектория совпадает с траекторией затухающих колебаний. Достигнув максимального отклонения в точке 4, он начнет двигаться в противоположном направлении, при этом его скорость будет возрастать. Когда его скорость достигнет значения  $\omega_0$ , опять «включится» сила трения покоя, под действием которой он будет подниматься. Далее процесс повторяется. Понятно, что подкачка энергии маятника происходит благодаря работе силе трения покоя на участке 1-2.

