

### Задание 9.3 «Смеситель»

**3.1** Для вычисления значения  $C$  рассмотрим процесс вытекания холодной воды при полностью открытом кране. При течении несжимаемой жидкости ее расход для обеих трубок должен быть один и тот же

$$q_{AB} = q_{BD}$$

Это будет возможно в том случае, если в точке  $B$  (рис. 1) трубки установится некоторое «самосогласованное» давление  $p_B$ , обеспечивающее прокачку соответствующего потока жидкости через каждую из трубок. Математически можем записать это условие в виде системы уравнений

$$q_{AB} = C(p_1 - p_B) = q_{BD} = C(p_B - p_0). \quad (1)$$

Из этого уравнения находим

$$p_B = \frac{p_1 + p_0}{2} = 2,0 \text{ атм.}$$

Соответственно, для расхода воды в этом случае получим

$$q_{AB} = C \frac{p_1 - p_0}{2} \Rightarrow C = \frac{2q_1}{p_1 - p_0} \quad (2)$$

Расчет по формуле (2) дает численное значение постоянной  $C$

$$C = 1,4 \frac{\text{л}}{\text{с} \cdot \text{атм}} = 1,4 \cdot 10^{-8} \frac{\text{м}^3}{\text{с} \cdot \text{Па}}.$$

**3.2** При полном открытии крана с горячей водой можно повторить рассуждения предыдущего пункта с той лишь разницей, что давление в магистрали равно  $p_2$ , поэтому

$$q_2 = C \frac{p_2 - p_0}{2} = \frac{p_2 - p_0}{p_1 - p_0} q_1 = 1,1 \frac{\text{л}}{\text{с}}.$$

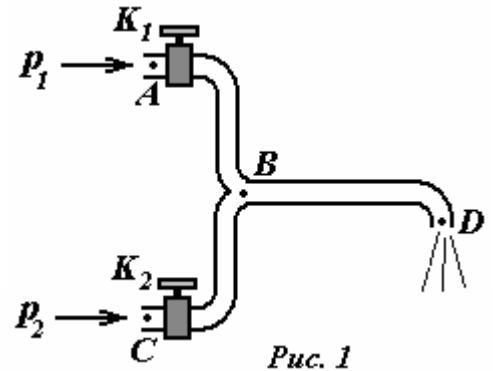
**3.3** При полном открытии двух кранов в точке  $B$  системы должно установиться давление  $p_B$ , «обеспечивающее» прокачку через удлинитель  $BD$  суммарного потока  $q_3$ , образованного слиянием двух (холодного  $q_1$  и горячего  $q_2$ ) потоков из труб  $AB$  и  $CB$ .

Соответственно, в этом случае справедлива система уравнений

$$\begin{aligned} q_1 &= C(p_1 - p_B) \\ q_2 &= C(p_2 - p_B) \\ q_3 &= q_1 + q_2 = C(p_B - p_0) \end{aligned} \quad (3)$$

Решение системы (3) дает следующие результаты

$$\begin{aligned} p_B &= \frac{p_1 + p_2 + p_0}{3}, \\ q_1 &= C \frac{2p_1 - p_2 - p_0}{3} = 1,1 \frac{\text{л}}{\text{с}} \\ q_2 &= C \frac{2p_2 - p_1 - p_0}{3} = 0,6 \frac{\text{л}}{\text{с}} \\ q_3 &= q_1 + q_2 = C \frac{p_1 + p_2 - 2p_0}{3} = 1,7 \frac{\text{л}}{\text{с}} \end{aligned} \quad (4)$$



Как видим из (4), расход горячей воды почти в два раза меньше расхода холодной, что объясняется бóльшим давлением в магистрали холодной воды. Это приводит к своеобразному эффекту «закупоривания» трубы с горячей водой и, соответственно, падению ее расхода. С этой точки зрения можем заметить, что сильный перепад давлений в магистралях крайне нежелателен.

Поскольку в смесителе потери теплоты практически отсутствуют (жидкости протекают через него достаточно быстро), то уравнение теплового баланса будет иметь вид

$$cm_1(T - T_1) = cm_2(T_2 - T), \quad (5)$$

где  $T$  — искомая температура воды на выходе из смесителя,  $c$  — удельная теплоемкость воды. Т.к. вода практически несжимаема, то можно считать, что ее плотность  $\rho$  в обеих магистралях одинакова. В этом случае  $m_1 = \rho V = \rho q_1 t$  и  $m_2 = \rho V = \rho q_2 t$ , и из уравнения (5) получаем искомый результат

$$T_3 = \frac{q_1 T_1 + q_2 T_2}{q_1 + q_2} = 30^\circ \text{C}. \quad (6)$$

**3.4** При различном открывании кранов система уравнений примет вид

$$\begin{aligned} q_1 &= \alpha_1 C(p_1 - p_B) \\ q_2 &= \alpha_2 C(p_2 - p_B) \\ q &= q_1 + q_2 = C(p_B - p_0) \end{aligned} .$$

Соответственно ее решение также несколько изменится

$$\begin{aligned} p_B &= \frac{\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + p_0}{1 + \alpha_1 + \alpha_2} \\ q_1 &= \alpha_1 C \frac{p_1(1 + \alpha_2) - \alpha_2 p_2 - p_0}{1 + \alpha_1 + \alpha_2} = 0,48 \frac{\text{л}}{\text{с}} \\ q_2 &= \alpha_2 C \frac{p_2(1 + \alpha_1) - \alpha_1 p_1 - p_0}{1 + \alpha_1 + \alpha_2} = 0,73 \frac{\text{л}}{\text{с}} \\ q_4 &= q_1 + q_2 = C \frac{\alpha_1(p_1 - p_0) + \alpha_2(p_2 - p_0)}{1 + \alpha_1 + \alpha_2} = 1,2 \frac{\text{л}}{\text{с}} \end{aligned} . \quad (7)$$

Температуру воды на выходе из смесителя найдем с помощью выражения, аналогичного (6)

$$T_4 = \frac{q_1 T_1 + q_2 T_2}{q_1 + q_2} = 45^\circ \text{C}.$$

Если в качестве предельного перехода в выражениях (7) положить  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1,0$ , то, как и следовало ожидать, получится система решений (4).

Таким образом, с помощью кранов мы можем регулировать температуру воды от полностью холодной ( $T_1 = 10^\circ \text{C}$ ,  $\alpha_1 = 1,0$ ,  $\alpha_2 = 0,0$ ), до полностью горячей ( $T_2 = 70^\circ \text{C}$ ,  $\alpha_1 = 0,0$ ,  $\alpha_2 = 1,0$ ).

**3.5** Интересно, что как следует из (7), при некоторых давлениях  $p_1$  и  $p_2$  в магистралях и коэффициентах  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  поток горячей воды может обратиться в нуль. При этом в кран горячей воды будет «закачиваться» холодная, поскольку давление там меньше. Так иногда принимая душ, можно почувствовать, что вода стала прохладнее после того, как в соседней кабинке кто-то откроет кран с горячей водой. Для вычисления  $p_{\min}$  приравняем нулю выражение для  $q_2$  из (7)

$$q_2 = \alpha_2 C \frac{p_2(1+\alpha_1) - \alpha_1 p_1 - p_0}{1 + \alpha_1 + \alpha_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_2(1+\alpha_1) - \alpha_1 p_1 - p_0 = 0 \quad (8)$$

Из равенства (8) найдем величину  $p_{min}$ , при которой вода в кране станет полностью холодной даже при открытом кране с горячей водой

$$p_{2min} = \frac{\alpha_1 p_1 + p_0}{1 + \alpha_1} = 1,5 \text{ атм.} \quad (9)$$

Как следует из (9), эффект «обратной тяги» не зависит от коэффициента  $\alpha_2$  открытия крана с горячей водой. Это вполне можно понять, поскольку независимо от размера отверстия, сплошная среда (жидкость или газ) всегда устремляется в область пониженного давления.