

Задание 3. Брызги шампанского! (Решение)

1.1 Выразим размерность универсальной газовой постоянной через единицы давления и объема

$$PV = \nu RT \Rightarrow R = \frac{PV}{\nu T} = 8,31 \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3}{\text{моль} \cdot \text{К}}. \quad (1)$$

Подстановка значений единиц измерения дает следующее численное значение универсальной газовой постоянной в системе ГЛА:

$$R = 8,31 \frac{\left(\frac{1}{1,01 \cdot 10^5} \text{ атм} \right) \cdot 10^3 \text{ л}}{\text{моль} \cdot \text{К}} = 8,23 \cdot 10^{-2} \frac{\text{атм} \cdot \text{л}}{\text{моль} \cdot \text{К}}. \quad (2)$$

1.2 В одном литре воды при температуре $t_0 = 0,00^\circ\text{C}$ и давлении $P = 1,00 \text{ атм}$ растворяется объем газа численно равный $k_v = 1,71 \text{ л}$. Масса этого газа, как следует из уравнения Менделеева – Клапейрона равна

$$PV = \frac{m}{M} RT \Rightarrow m = M \frac{PV}{RT}. \quad (3)$$

Ее численное значение

$$m = M \frac{PV}{RT} = 44,0 \frac{\text{г}}{\text{моль}} \frac{1,01 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot 1,71 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3}{8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 273 \text{ К}} = 3,35 \text{ г}. \quad (4)$$

Следовательно, постоянная Генри для углекислого газа при нулевой температуре равна

$$k_m = 3,35 \frac{\text{г}}{\text{л} \cdot \text{атм}}. \quad (5)$$

1.2 Масса растворенного газа по закону Генри равна

$$m = k_m PV = 3,35 \cdot 3,0 \cdot 2,0 = 20 \text{ г} \quad (6)$$

Часть 2. Открываем бутылку!

2.1 Давление в бутылке равно давлению газов (воздуха и образовавшегося углекислого газа). Согласно закону Дальтона, давление смеси газов равно сумме парциальных давлений компонент смеси. Так как объем свободной от вина части бутылки остается неизменным, то для неизменной массы воздуха справедливо соотношение:

$$\frac{P_g}{T} = \frac{P_0}{T_0} \quad (7)$$

Откуда следует, что парциальное давление воздуха линейно зависит от температуры

$$P_g = \frac{P_0}{T_0} T \quad (8)$$

Масса углекислого газа, находящегося в свободной части сосуда, зависит от температуры и равна разности

$$m = m_0 - k_m PV_0 \quad (9)$$

здесь $k_m P$ - масса растворенного углекислого газа.

Для углекислого газа, находящегося в газообразном состоянии справедливо уравнение Менделеева – Клапейрона

$$Pv = \frac{m}{M} RT = \frac{m_0 - k_m PV_0}{M} RT \quad (10)$$

Преобразуем это уравнение к виду, удобному для расчетов

$$P = \frac{m_0 - k_m PV_0}{Mv} RT = \frac{m_0 RT}{Mv} \left(1 - \frac{k_m V_0}{m_0} P \right) = \tilde{P} \left(1 - \frac{k_m}{C_0} P \right) \quad (11)$$

Здесь обозначено $\frac{m_0 RT}{Mv} = \tilde{P} = \tilde{P}_0 \frac{T}{T_0}$; $C_0 = \frac{m_0}{V_0}$.

Заметим, что введенные константы имеют наглядный смысл: \tilde{P} - давление углекислого газа, при условии, что он весь находится в газообразном состоянии; C_0 - максимальная концентрация раствора.

Из уравнения (10) не сложно найти искомое выражение для парциального давления углекислого газа:

$$P = \frac{\tilde{P}}{1 + \frac{k_m(t)}{C_0} \tilde{P}} \quad (12)$$

Понятно, что давление в бутылке будет равно сумме давлений воздуха (8) и углекислого газа (12).

Численные расчеты удобно проводить в следующей последовательности.

1) Рассчитываем постоянные

$$C_0 = \frac{m_0}{V_0} = \frac{7,5\text{г}}{0,75\text{л}} = 10 \frac{\text{г}}{\text{л}};$$

$$\tilde{P}_0 = \frac{m_0 RT_0}{Mv} = \frac{7,5\text{г} \cdot 8,31 \cdot 10^{-2} \frac{\text{атм} \cdot \text{л}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 273\text{К}}{44 \frac{\text{г}}{\text{моль}} \cdot 0,15\text{л}} = 25,5\text{атм}$$

2) Для каждой температуры, указанной в таблице, рассчитываем и заносим в соответствующие столбцы таблицы

$$\text{Давление воздуха } P_e = \frac{P_0}{T_0} T = 1 \frac{273+t}{273};$$

Давление углекислого газа

$$\text{а) } \tilde{P} = \tilde{P}_0 \frac{T}{T_0} = 25,5 \frac{273+t}{273}; \quad \text{б) } k_m = \frac{k_0}{1+\alpha t} = \frac{3,4}{1+0,055t}; \quad \text{в) } P = \frac{\tilde{P}}{1 + \frac{k_m(t)}{C_0} \tilde{P}};$$

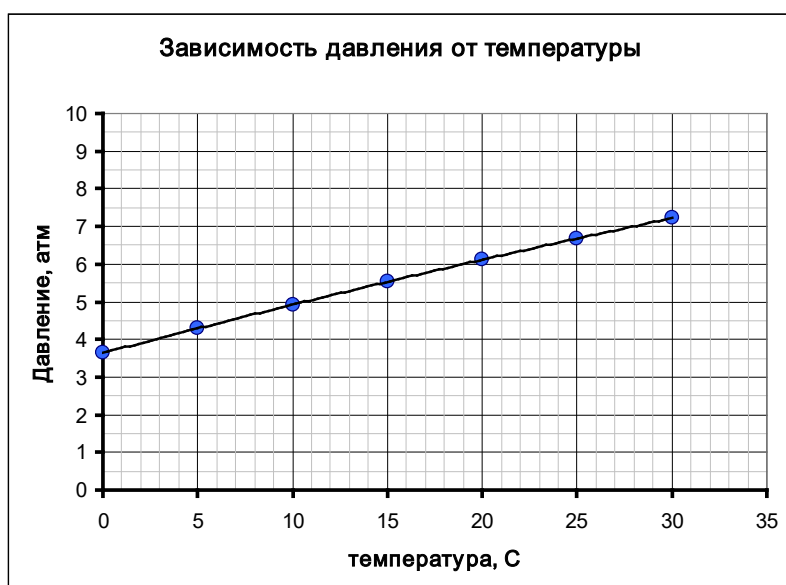
г) суммарное давление.

Результаты расчетов приведены в Таблице 1.

Таблица 1.

$t^{\circ}\text{C}$	k_m	$P_{\text{возд}},$ атм	$\tilde{P},$ атм	$P_{\text{уг.газ}},$ атм	$P_{\text{сум}},$ атм
0	3,40	1,00	25,50	2,64	3,6
5	2,67	1,02	25,97	3,28	4,3
10	2,19	1,04	26,43	3,89	4,9
15	1,86	1,05	26,90	4,47	5,5
20	1,62	1,07	27,37	5,04	6,1
25	1,43	1,09	27,84	5,58	6,7
30	1,28	1,11	28,30	6,11	7,2

График зависимости имеет следующий вид.



2.2 Рассчитаем массу растворенного газа после открывания бутылки

$$m_1 = \frac{k_0}{1 + \alpha t} P_0 V_0 = \frac{3,4}{1 + 0,055 \cdot 25} \cdot 1,0 \cdot 0,75 = 1,07 \text{ г} \quad (13)$$

Следовательно, масса выделившегося газа равна

$$m = m_0 - m_1 = 6,43 \text{ г}. \quad (14)$$

Его объем найдем из уравнения состояния

$$V_1 = \frac{mRT}{MP} = \frac{6,43 \cdot 8,23 \cdot 10^{-2} \cdot 298}{44 \cdot 1} = 3,58 \text{ л} \quad (15)$$

Поэтому объем образовавшейся пены равен

$$V = V_0 + V_1 = 4,33 \text{ л}. \quad (16)$$

Найдем, какая доля этой пены останется в бутылке

$$\eta = \frac{V_0 + v}{V} = \frac{0,90}{4,33} = 0,21. \quad (17)$$

Окончательно находим, какой объем вина останется в бутылке

$V_{\text{ост}} = \eta V_0 = 0,16 \text{ л}$	(18)
--	------