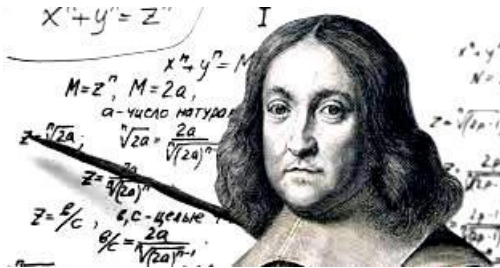


Задание 3. Таутохронизм и принцип Ферма

Принцип Ферма (принцип наименьшего времени Ферма) — постулат в геометрической оптике, согласно которому свет выбирает из множества путей между двумя точками тот путь, который потребует наименьшего времени.



Этот принцип, сформулированный в I в. Героном Александрийским для отражения света, в общем виде был сформулирован Пьером Ферма в 1662 году в качестве самого общего закона геометрической оптики.

Википедия

Долгое время принцип Ферма считался мистическим: «Где у света такой мозг, который заранее может рассчитать путь кратчайшего времени?»

Конечно, у света мозга нет, но докажите, что он есть у Вас!

В данном задании вам необходимо решить несколько оптических задач с помощью принципа Ферма. Будем считать, что законы отражения и преломления света Вам не известны, но Вы знаете и верите в принцип Ферма. Закон прямолинейного распространения света использовать разрешено.

Внимание! Решения, в которых явно используются законы отражения и преломления света не рассматриваются и не оцениваются!

Во всех задачах, связанных с зеркалами и линзами, используйте параксиальное приближение, т.е. считайте, что рассматриваются лучи идут на малом расстоянии от оптической оси и под малыми углами к этой оси.

Часть 1. Математическое введение.

Чтобы упростить математические выкладки при решении физических задач, используйте следующие математические формулы.

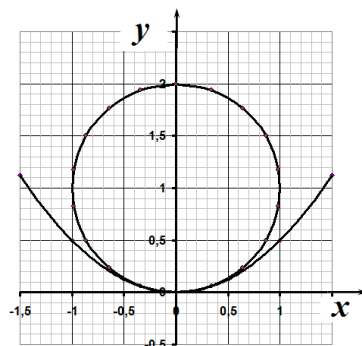
1.1 Докажите, что при $x \ll a$ справедлива приближенная формула

$$\sqrt{a^2 + x^2} \approx a + \frac{x^2}{2a}. \quad (1)$$

Небольшую дугу окружности можно приближенно заменить участком параболы. Пусть центр окружности радиуса R лежит на оси y и окружность касается оси x . Тогда, уравнение соприкасающейся с окружностью в начале координат параболы имеет вид

$$y = \frac{x^2}{2R}. \quad (2)$$

На рисунке показана окружность единичного радиуса и соприкасающаяся с ней парабола.

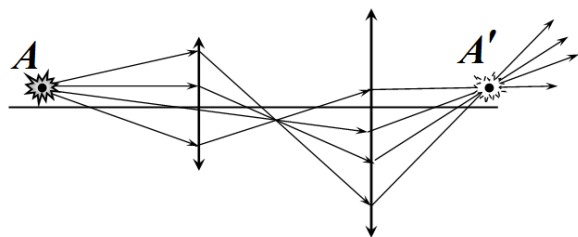


1.2 Докажите формулу (2) для уравнения соприкасающейся параболы.

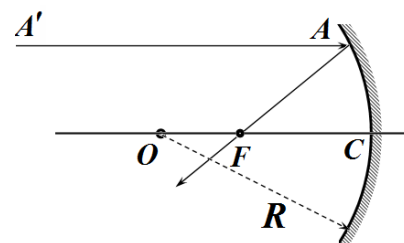
Даже если Вы не смогли доказать эти формулы, Вы имеете право использовать их в дальнейшем.

Часть 2. Таутохронизм

Таутохронизм означает постоянство времени. Частным случаем принципа Ферма является **принцип таутохронизма**. Этот принцип утверждает, что для любой оптической системы, формирующей изображение, время прохождения света от точечного источника A до его изображения A' вдоль любого луча одинаково. Иными словами – точка изображение есть точка A' время достижения которой от источника не зависит от траектории луча света.

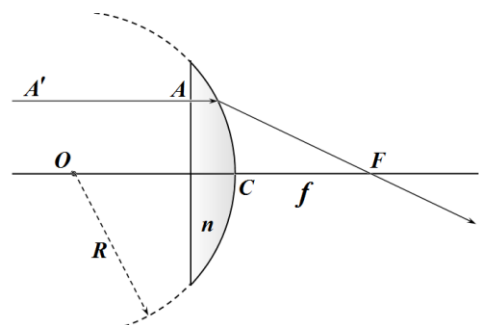


Задача 2.1 На рисунке показано вогнутой сферическое зеркало радиуса R : O - центр кривизны зеркала, C - его оптический центр; OC - главная оптическая ось зеркала.



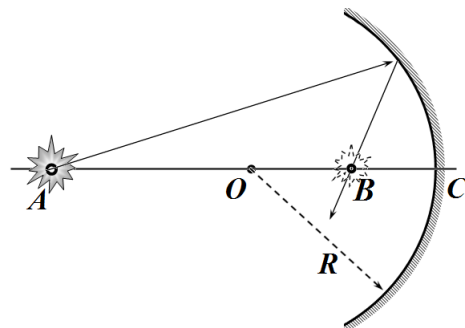
2.1 Используя принцип таутохронизма, докажите, что все лучи $A'A$, параллельные главной оптической оси после отражения от зеркала пересекутся в одной точке F , которая называется фокусом. Найдите фокусное расстояние зеркала $f = |FC|$.

Задача 2.2 На рисунке показана плосковыпуклая линза. Радиус сферической поверхности линзы равен R , показатель преломления материала линзы равен n . O - центр кривизны выпуклой поверхности; C - оптический центр линзы, OC - главная оптическая ось линзы.



2.2 Используя принцип таутохронизма, докажите, что все лучи $A'A$, параллельные главной оптической оси после преломления в линзе от пересекутся в одной точке F , которая называется фокусом. Найдите фокусное расстояние линзы $f = |FC|$.

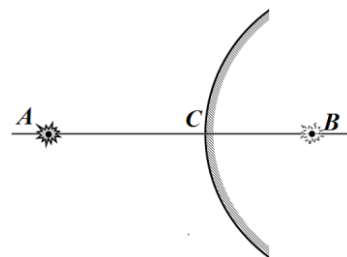
Задача 2.3 На главной оптической оси вогнутого сферического зеркала радиуса R находится точечный источник света A на расстоянии $a = |AC|$ от оптического центра зеркала. Изображение этого источника находится в точке B на расстоянии $b = |BC|$ от оптического центра.



2.3.1 Используя принцип таутохронизма, докажите, что зеркало формирует действительное изображение точечного источника.

2.3.2 Получите «формулу вогнутого зеркала», связывающую расстояния a и b и фокусное расстояние зеркала f .

Задача 2.4 Как известно, изображения могут быть мнимыми.



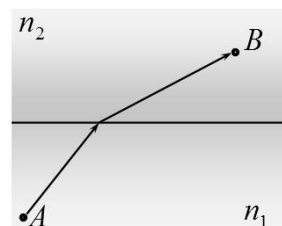
2.4.1 Модернизируйте принцип таутохронизма так, чтобы с его помощью можно было рассчитывать положения мнимых изображений. (Приведите свою формулировку, доказательство не требуется).

2.4.2 Покажите, «формула выпуклого зеркала», связывающая расстояние от точечного источника до оптического центра зеркала $a = |AC|$, расстояние от оптического центра до изображения этого источника $b = |CB|$ и фокусное расстояние зеркала, можно записать в том же виде, что и «формулу вогнутого зеркала», полученную в п. 2.3.2, если переопределить величины, входящие в эту формулу (укажите, эти величины).

2.4.3 Несмотря на то, что уважаемая «Википедия» называет рассматриваемые принцип Ферма постулатом (утверждением, не требующим доказательства), дайте словесное обоснование (не более 50 слов) принципа таутохронизма.

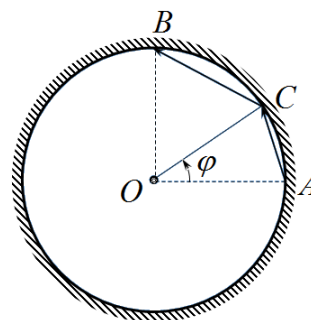
Часть 3. Принцип Ферма

Задача 3.1 Точка A находится в среде с показателем преломления n_1 , точка B в среде с показателем преломления n_2 . Луч света выходит из точки A и после преломления на плоской границе двух сред проходит через точку B .



3.1 Используя принцип Ферма получите формулу для закона преломления света.

Задача 3.2 Рассмотрим отражение света от внутренней зеркальной поверхности цилиндрической трубки радиуса R в плоскости, перпендикулярной оси трубки (см. рис). Рассмотрим все возможные траектории светового луча ACB . Точки A, B, C находятся на внутренней поверхности цилиндра. Центр сечения – точка O . Положение точки C задается углом φ . Угол $\angle AOB$ – прямой.



3.2.1 Найдите зависимость длины траектории ACB от угла φ – $L(\varphi)$. Постройте схематический график этой зависимости для всех возможных значений φ .

3.2.2 Укажите, каким значениям угла φ соответствуют истинные траектории луча. Укажите эти значения на построенном графике $L(\varphi)$.

Задача 3.3 Выводы из проделанной работы.

3.3.1 Уточните формулировку принципа Ферма, так, чтобы она описывала все рассмотренные в данном задании случаи движения луча света.

3.3.2 Дайте словесное обоснование принципа Ферма в общем случае (не более 50 слов).