

Решение.

Часть 1. Плотность.

1. Площадь поверхности отрезка трубки равна $S = 2\pi r_0 l_0$. По определению

$$\rho = \frac{m}{S} = \frac{m}{2\pi r_0 l_0} = \frac{1,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг}}{2\pi \cdot 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot 20 \cdot 10^{-2} \text{ м}} \approx 0,119 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}. \quad (1)$$

Часть 2. Упругость, прочность и деформации.

2.1 В данном эксперименте силы упругости направлены вдоль оси трубки, поэтому линейное напряжение сил упругости, возникающей в трубке равно

$$f = \frac{mg}{2\pi r_0}, \quad (2)$$

относительное удлинение материала трубки есть

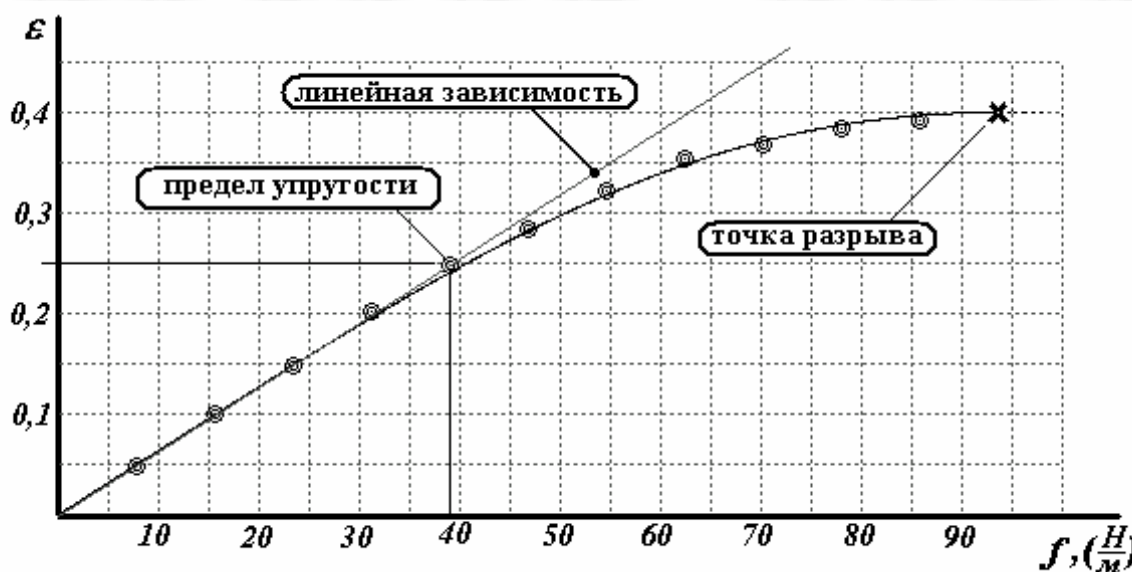
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (3)$$

По этим формулам необходимо рассчитать соответствующие значения по данным **Таблицы 1** условия задачи. Результаты расчетов приведены в таблице 1, на основании которой построен график требуемой зависимости (Рис. 1). На этом же графике нанесена точка разрыва.

Кривая на этом графике проведена «на глаз».

Таблица 1. Зависимость относительного удлинения от линейного напряжения.

$f, \frac{H}{м}$	78,1	15,6	23,4	31,2	39,0	46,8	54,6	62,4	70,2	78,1	85,9
ε	0,048	0,100	0,148	0,202	0,247	0,285	0,322	0,355	0,368	0,385	0,392



2.2 По графику видно, что первые точки с хорошей точностью лежат на прямой, что подтверждает справедливость закона Гука в этом диапазоне.

Через эти точки и начало координат проведем прямую и определим коэффициент ее наклона $\frac{\Delta \varepsilon}{\Delta f}$. Этот коэффициент можно определить:

- по одной точке (только какую выбрать?);
- по нескольким начальным точкам (по 3-5), с последующим усреднением;
- по графику линейной зависимости;
- по методу наименьших квадратов (МНК) по первым 5 точкам (этот метод наиболее предпочтительный).

Расчет по МНК приводит к результату $\frac{\Delta \varepsilon}{\Delta f} \approx 6,405 \cdot 10^{-3} \frac{M}{H}$. Следовательно, значение модуля растяжения равно

$$\gamma = \left(\frac{\Delta \varepsilon}{\Delta f} \right)^{-1} \approx 1,56 \cdot 10^2 \frac{H}{M} \approx 1,6 \cdot 10^2 \frac{H}{M} \quad (4)$$

Не смотря на то, что в условии приведены данные с тремя значащими цифрами, имеющийся разброс экспериментальных данных не позволяет получить значение параметра γ с точностью большей двух значащих цифр.

С помощью графика определяем, что первые пять точек лежат близко к линейной зависимости (шестая и последующие точки закономерно отклоняются от нее), поэтому можно оценить границу применимости закона Гука как

$$\varepsilon < 0,25 \quad (5)$$

Часть 3. Давление.

При наличии избыточного давления газа внутри трубка последняя растягивается, увеличивается ее радиус и, следовательно, длина ее окружности. Сила давления газа \vec{F}_d (Рис. 2), действующая на поверхность, направлена по нормали к поверхности, а возникающие силы упругости $\vec{F}_{упр.}$ направлены по касательной к поверхности трубки перпендикулярно ее оси (а не вдоль оси, как в предыдущей части задачи). Относительное удлинение периметра трубки $l = 2\pi r$ в этом случае равно относительному увеличению ее радиуса:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\Delta r}{r_0} \quad (6)$$

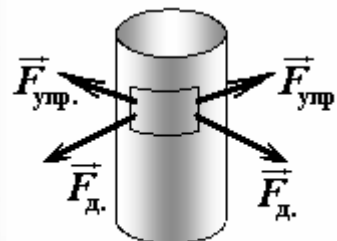


Рис. 2

3.1 Мысленно выделим на деформированной трубке небольшое кольцо, высотой Δz (Рис. 3), а на нем малую площадку ΔS , видимую из центра под малым углом α . Площадь этой площадки равна $\Delta S = r\alpha\Delta z$. Так как площадка находится в равновесии, то сумма сил, действующих на нее, равна нулю. Сила давления газа направлена перпендикулярно выделенной площадке и равна $F_d = \Delta P \Delta S = r\alpha\Delta z \Delta P$. Силы упругости, действующие на боковые стороны выделенной площадки, направлены по касательной к боковой поверхности и равны по модулю $F_{упр.} = f\Delta z$, где f - линейное напряжение стенок.

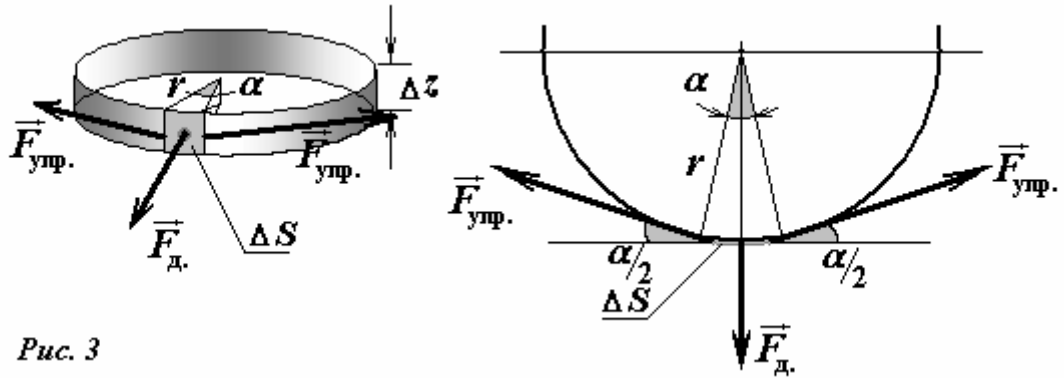


Рис. 3

Запишем условие равновесия выделенной площадки в проекции на нормаль

$$F_{\text{д}} = 2F_{\text{упр.}} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Подставим выражения для сил давления и упругости и считая угол α малым (при этом $\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$) в это уравнение

$$r\alpha\Delta z\Delta P = 2f\Delta z\frac{\alpha}{2},$$

и после сокращения получаем требуемое уравнение (которое является основой дальнейшего решения):

$$r\Delta P = f \quad (7)$$

Возможны и другие варианты вывода этого уравнения. Например, можно рассмотреть условия равновесия половины кольца (Рис. 4). Тогда сумма сил давления $\Delta P\Delta z \cdot 2r$ уравновешивается двумя силами упругости $F_{\text{упр.}} = f\Delta z$, что также приводит к уравнению (7).

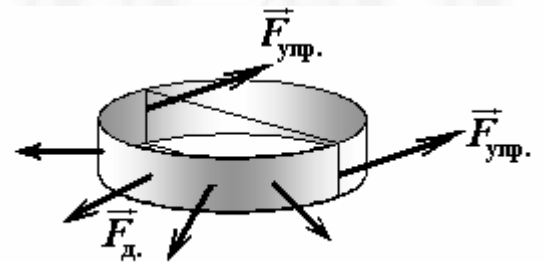


Рис. 4

Заметим, что в данном случае можно говорить о давлении сил упругости. Для этого следует выделить на боковой поверхности цилиндра небольшую площадку, найти векторную сумму тангенциальных сил упругости, (которая направлена перпендикулярно к поверхности) и разделить ее на площадь выделенной площадки. Как следует из приведенного решения это давление в данном случае равно $P_{\text{упр.}} = \frac{f}{r}$.

3.2 Из данных Части 2. определяем, что максимальное относительное удлинение пленки равно

$$\varepsilon_{\text{max}} = \frac{\Delta l_{\text{max}}}{l_0} = \frac{8,00}{20,0} = 0,400, \quad (8)$$

а максимальное линейное напряжение

$$f_{\text{max}} = \frac{m_{\text{max}}g}{2\pi r_0} = \frac{600 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot 9,81 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}}{2\pi \cdot 1,00 \cdot 10^{-2} \text{ м}} \approx 93,7 \frac{\text{Н}}{\text{м}}. \quad (9)$$

Подставляя эти данные в уравнение (7), получим значение максимального давления, которое может выдержать трубка

$$\Delta P_{\text{max}} = \frac{f_{\text{max}}}{r_{\text{max}}} = \frac{m_{\text{max}}g}{2\pi r_0^2(1 + \varepsilon_{\text{max}})} \approx 6,69 \cdot 10^3 \text{ Па} \quad (10)$$

3.3 Для построения требуемой зависимости следует воспользоваться уравнением (7), в котором линейное напряжение является известной функцией от относительной деформации. Представим также радиус деформированной трубки через ее относительную деформацию $r = r_0(1 + \varepsilon)$. В результате получим уравнение

$$f(\varepsilon) = \Delta P r_0(1 + \varepsilon). \quad (11)$$

В этом уравнении функция $f(\varepsilon)$ задана в виде таблицы 1, или графика (Рис.1), аналитический вид этой зависимости неизвестен. Поэтому уравнение (11) не может быть решено относительно ε аналитически. Если нельзя найти зависимость $\varepsilon(\Delta P)$, то следует попытаться рассчитать обратную зависимость $\Delta P(\varepsilon)$, что можно сделать элементарно из уравнения (11)

$$\Delta P = \frac{f(\varepsilon)}{r_0(1 + \varepsilon)}. \quad (12)$$

с помощью данных таблицы 1. Используя эти данные, следует рассчитать радиус трубки $r = r_0(1 + \varepsilon)$ и по формуле (12) соответствующее давление. Результаты расчетов представлены в Таблице 2, по которым построен график (Рис. 5)

Таблица 2. Зависимость радиуса трубки от избыточного давления внутри нее.

$f, \frac{H}{м}$	78,1	15,6	23,4	31,2	39,0	46,8	54,6	62,4	70,2	78,1	85,9
ε	0,048	0,100	0,148	0,202	0,247	0,285	0,322	0,355	0,368	0,385	0,392
$\Delta P, кПа$	0,74	1,412	2,04	2,59	3,13	3,64	4,13	4,61	5,13	5,63	6,16
$r, см$	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,29	1,32	1,36	1,37	1,39	1,39

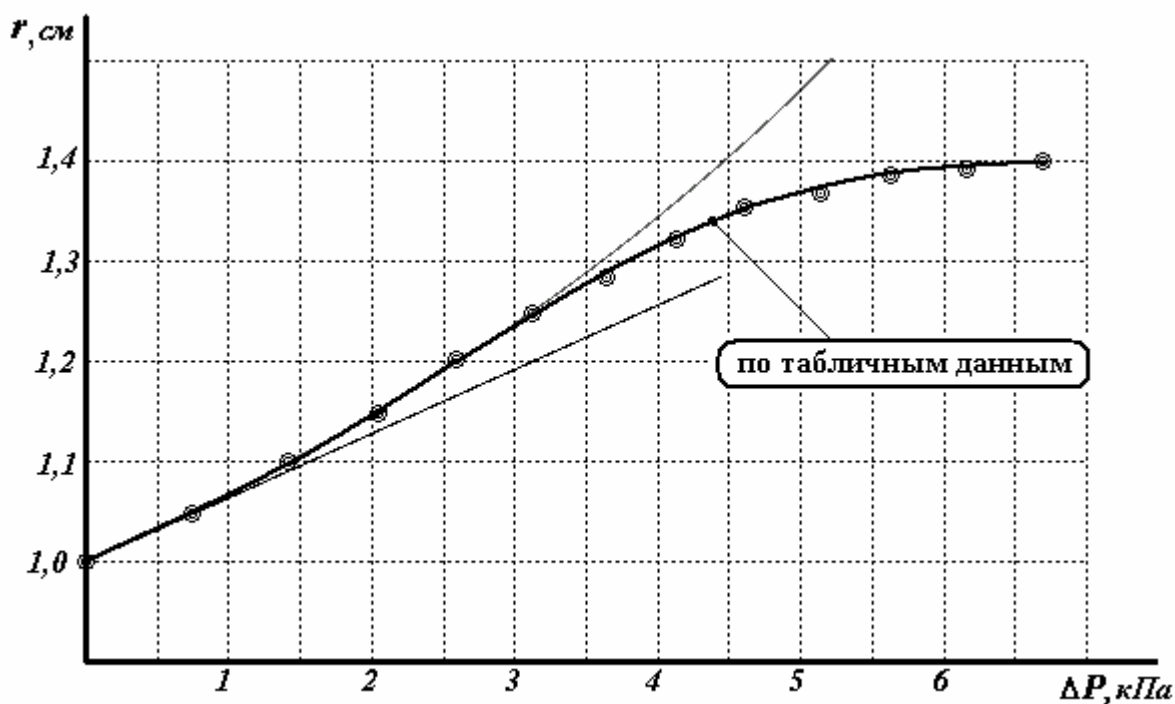
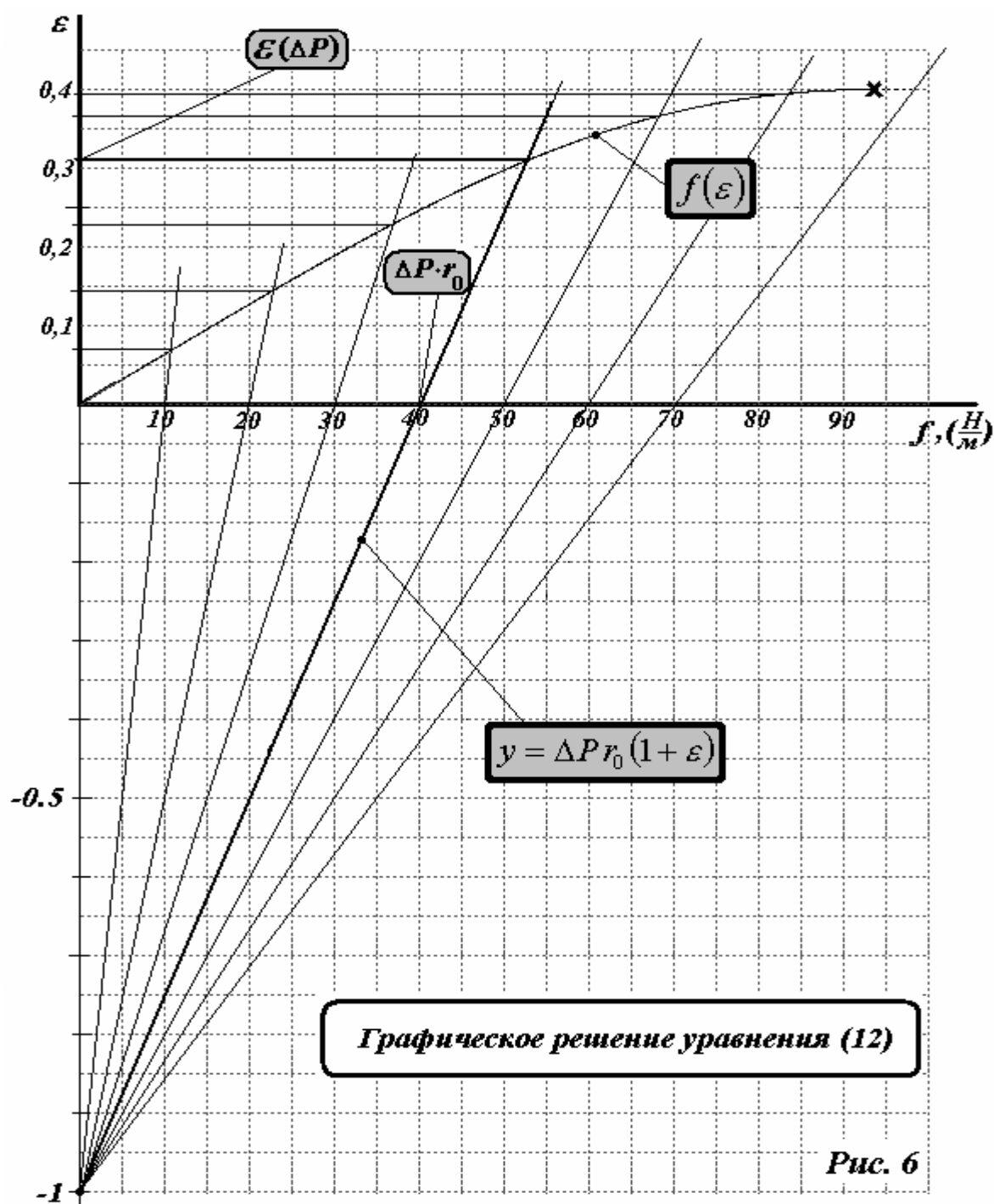


Рис. 5

Уравнение (12) также может быть решено графическим методом. Для этого представим его в виде

$$f(\varepsilon) = \Delta P r_0 (1 + \varepsilon). \quad (12a)$$

График функции $f(\varepsilon)$ построен ранее, теперь на нем следует провести семейство прямых, описываемых функциями $y = \Delta P r_0 (1 + \varepsilon)$. Ордината точки пересечения прямой $y = \Delta P r_0 (1 + \varepsilon)$ с графиком функции $f(\varepsilon)$ даст решение уравнения (12a) при заданном значении ΔP . Построение указанных прямых очень просто: все они пересекают вертикальную ось при $\varepsilon = -1$, а горизонтальную при $f = r_0 \Delta P$. Указанное построение приведено на Рис. 6. Естественно, что полученное таким способом решение совпадает с построенным ранее.



3.4.1 В приближении закона Гука, в уравнение (7) необходимо подставить явное выражение для линейного напряжения $f = \gamma \varepsilon = \gamma \frac{r - r_0}{r_0}$:

$$\gamma \frac{r - r_0}{r_0} = \Delta P \cdot r.$$

Из этого уравнения определяем требуемую зависимость

$$r = \frac{r_0}{1 - \frac{r_0}{\gamma} \Delta P} \quad (13)$$

График этой функции показан на Рис. 5.

3.4.2 Ранее мы установили, что закон Гука справедлив при относительных деформациях меньших $\varepsilon < 0,25$. Эта деформация возникает при избыточном давлении $\Delta P \approx 3 \cdot 10^4 \text{ Па}$, следовательно, приближением закона Гука и следующей из него формулой (13) можно пользоваться при

$$\Delta P \leq 3 \cdot 10^3 \text{ Па} \quad (14)$$

Из графика функции (13) на рис. 5, также следует, что это приближение достаточно точно описывает экспериментальные данные при $r \leq 1,25$, то есть при той же относительной деформации.

3.4.3 Значение радиуса трубки, рассчитанное по формуле (13), стремится к бесконечности, если знаменатель устремляется к нулю, что достигается при максимально возможном давлении, равном

$$(\Delta P)_{\max} = \frac{\gamma}{r_0} \approx \frac{1,56 \cdot 10^2 \frac{\text{Н}}{\text{м}}}{1,00 \cdot 10^{-2} \text{ м}} \approx 1,6 \cdot 10^4 \text{ Па} \quad (15)$$

Заметим, что это значение больше, рассчитанного ранее по табличным данным. Кроме того, в этом решении причина существования максимального давления иная – при возрастании радиуса трубки возрастающие силы упругости не в состоянии удержать быстрее возрастающие силы давления газа.

3.5.1 Считая избыточное давление малым, используем приближенную формулу для упрощения функции (13)

$$r = \frac{r_0}{1 - \frac{r_0}{\gamma} \Delta P} \approx r_0 \left(1 + \frac{r_0}{\gamma} \Delta P + \left(\frac{r_0}{\gamma} \Delta P \right)^2 \right).$$

Из этого выражения получим формулу для определения изменения радиуса трубки

$$\Delta r = r_0 \left(\frac{r_0}{\gamma} \Delta P + \left(\frac{r_0}{\gamma} \Delta P \right)^2 \right) = \frac{r_0^2}{\gamma} \Delta P \left(1 + \frac{r_0}{\gamma} \Delta P \right). \quad (15)$$

Пренебрегая вторым слагаемым, получаем линейную зависимость между изменением радиуса и избыточным давлением

$$\Delta r = \frac{r_0^2}{\gamma} \Delta P \quad (16)$$

3.5.2 Значение коэффициента пропорциональности в этой формуле равно

$$C = \frac{r_0^2}{\gamma} \approx \frac{(1,00 \cdot 10^{-2} \text{ м})^2}{1,56 \cdot 10^2 \frac{\text{Н}}{\text{м}}} \approx 6,4 \cdot 10^{-7} \text{ м} \cdot \text{Па}^{-1} \quad (17)$$

График линейной функции (16) с найденным коэффициентом также показан на рис. 5.

3.5.3 Второе слагаемое в формуле (15), которое было опущено, может служить оценкой погрешности формулы (16). Таким образом, относительная погрешность η линейного приближения равна

$$\eta = \frac{r_0}{\gamma} \Delta P.$$

Следовательно, погрешность формулы (16) не будет превышать установленный предел при

$$\Delta P \leq \eta \frac{\gamma}{r_0} = 0,05 \frac{1,6 \cdot 10^2 \frac{\text{Н}}{\text{м}}}{1,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}} \approx 8 \cdot 10^2 \text{ Па} \quad (18)$$

Часть 4. Электрические свойства пленки.

4.1 Используя приведенную формулу для сопротивления и закон Ома

$$U_0 = I_0 R = I_0 \frac{1}{\lambda} \frac{l_0}{2\pi r_0},$$

получим значение удельного сопротивления пленки

$$\lambda = \frac{I_0 l_0}{2\pi r_0 U_0} = \frac{2,00 \text{ А} \cdot 0,200 \text{ м}}{2\pi \cdot 1,00 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ В}} \approx 2,55 \cdot 10^3 \text{ Ом}^{-1} \quad (19)$$

4.2 Пусть поверхностная плотность зарядов на обкладках конденсатора равна σ . Тогда напряженность электрического поля в конденсаторе равна $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, причем напряженность

поля, создаваемого только одной обкладкой, в два раза меньше $E' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Следовательно,

сила, действующая на единицу площади обкладки (т.е. давление электрического поля) равна

$$P_{эл.} = \sigma E' = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}, \quad (20)$$

и совпадает с объемной плотностью энергии поля.

4.2.1 Для дальнейшего решения задачи можно воспользоваться уравнением (7), в котором роль избыточного давления будет играть сила давления электрического поля.

Заметим, что электрические силы, действуя снаружи от трубки, но стремятся ее растянуть, как избыточное давление газа внутри нее, поэтому указанная замена допустима.

Далее, обратим внимание, что максимально возможная деформация трубки (ограниченная внешним металлическим цилиндром) составляет 10%, поэтому для вычисления линейного механического напряжения стенок трубки можно пользоваться законом Гука.

Так как конденсатор подключен к источнику, то напряжение на обкладках остается постоянным при изменении расстояния между трубками. Выразим напряженность электрического поля внутри конденсатора через напряжение источника

$$E = \frac{U_0}{R - r} = \frac{U_0}{R - (r_0 + \Delta r)} = \frac{U_0}{h - \Delta r}, \quad (21)$$

(здесь R - внутренний радиус металлической трубки). Таким образом, давление поля выражается формулой

$$P_{\text{эл.}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{U_0}{h - \Delta r} \right)^2. \quad (22)$$

Наконец, запишем уравнение, связывающее увеличение радиуса трубки с приложенным напряжением (которое будет являться основой дальнейшего решения):

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{U_0}{h - \Delta r} \right)^2 = \gamma \frac{\Delta r}{r_0} \frac{1}{r_0 + \Delta r}. \quad (22)$$

В этом уравнении слева стоит давление электрического поля, справа – уравновешивающее его давление сил упругости. Уравнение (22) можно привести к алгебраическому уравнению третьей степени, поэтому сначала необходимо проанализировать его решение, а затем провести возможные упрощения (основанные на разумных и обоснованных приближениях). Для этого выразим увеличение радиуса трубки через относительную деформацию $\Delta r = r_0 x$ и подставим в уравнение (22)

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{U_0}{h - r_0 x} \right)^2 = \gamma \frac{r_0 x}{r_0} \frac{1}{r_0 + r_0 x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\varepsilon_0 U_0^2}{2h^2} \frac{r_0}{\gamma} \frac{1}{\left(1 - \frac{r_0}{h} x\right)^2} = \frac{x}{1 + x}$$

Обозначим безразмерные величины, рассчитаем их численные значения (все величины представлены в системе СИ)

$$A_0 = \frac{\varepsilon_0 U_0^2}{2h^2} \frac{r_0}{\gamma} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (1,0 \cdot 10^3)^2 (1,0 \cdot 10^{-2})^2}{2 \cdot (1,0 \cdot 10^{-3})^2} \frac{1}{1,56 \cdot 10^2} \approx 2,84 \cdot 10^{-4},$$

$$\beta = \frac{r_0}{h} \approx 10,$$

и получим «безразмерное» уравнение

$$\frac{A_0}{(1 - \beta x)^2} = \frac{x}{1 + x}. \quad (23)$$

В этом уравнении A_0 является малой величиной, поэтому и его решение x также мало, поэтому попытаемся пренебречь малыми величинами x и βx в знаменателях этого уравнения. Тогда решение этого уравнения

$$x \approx A_0 = \frac{\varepsilon_0 U_0^2}{2h^2} \frac{r_0}{\gamma} \approx 2,84 \cdot 10^{-4} \quad (24)$$

Малость полученного значения полностью оправдывает сделанное приближение.

К этому же решению можно подойти другими способами. Так, сразу рассчитав давление электрического поля при отсутствии деформации,

$$P_{\text{эл.}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{U_0}{h} \right)^2 = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (1,0 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot (1,0 \cdot 10^{-3})^2} \approx 4,4 \text{ Па},$$

видим, что оно крайне мало (ранее были тысячи паскалей), поэтому и деформация будет малой.

Следовательно, при расчете электрического взаимодействия и сил упругости им можно пренебречь и записать уравнение (22) в виде

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{U_0}{h} \right)^2 = \gamma \frac{\Delta r}{r_0} \cdot \frac{1}{r_0}, \quad (22a)$$

из которого сразу следует (24).

4.2.2 Причиной возможного выхода конденсатора из строя может служить короткое замыкание, которой произойдет, если растягивающаяся трубка прикоснется к внешнему цилиндру, то есть когда относительная деформация станет равной $x = \frac{h}{r_0} \approx 0,10$.

Непосредственная подстановка этого значения в уравнение (23) невозможно, так при этом знаменатель обращается в нуль. Для анализа поведения полимерной трубки при увеличении напряжения построим примерные графики зависимостей электрического и упругого давлений от относительной деформации в интересующем диапазоне $0 \leq x \leq \frac{1}{\beta} = 0,10$. Это проще сделать для «безразмерных» функций (Рис. 7):

$$p_{\text{эл.}} = \frac{A}{(1 - \beta x)^2}; \quad p_{\text{упр.}} = \frac{x}{1 + x}. \quad (25)$$

Введенный здесь параметр $A = \frac{\varepsilon_0 U^2}{2h^2} \frac{r_0}{\gamma}$ зависит от приложенного к конденсатору напряжения U .

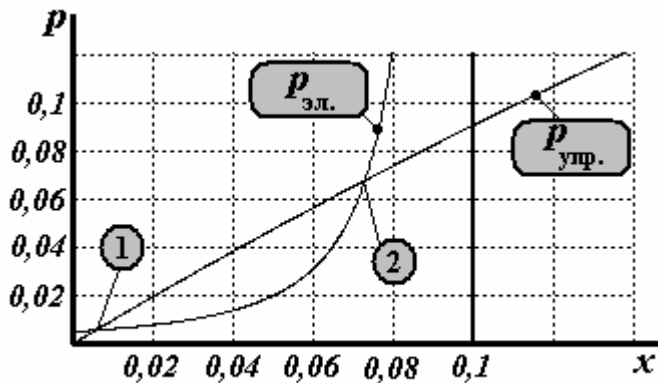


Рис. 7

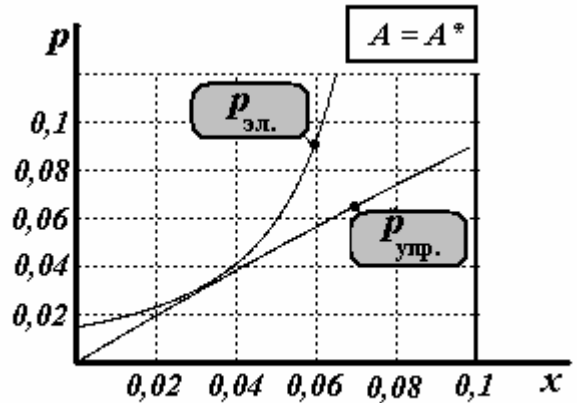


Рис. 8

При малых значениях параметра A в интересующем нас интервале $0 < x < 0,1$ эти графики имеют две точки пересечения, следовательно, уравнение (23) имеет два корня! Легко показать, что первый (найденный нами) соответствует устойчивому положению трубки, второй — неустойчивому. Ясно, что при увеличении напряжения от нуля будет реализовываться именно первое, устойчивое положение равновесия (так оно ближе к нулю). С ростом напряжения источника (и соответствующего возрастания параметра A) кривая зависимости электрического давления будет приподниматься и, наконец, при некотором критическом значении A^* эти кривые будут иметь единственную общую точку, точку касания. Именно при этом условии конденсатор потеряет устойчивость. Критическое значение A^* может быть найдено различными способами. Рассмотрим самый простой (по нашему мнению) из них. Заметим, что в рассматриваемом диапазоне кривую упругого давления с высокой точностью можно заменить на прямую

$$p_{\text{упр.}} = \frac{x}{1 + x} \approx x.$$

С учетом этого, перепишем уравнение (23) в виде

$$A = x(1 - \beta x)^2. \quad (26)$$

Понятно, что это равносильное (23) уравнение не будет иметь корней, если значение параметра A превышает максимум функции $y = x(1 - \beta x)^2$. Производная этой функции

$$y' = (1 - \beta x)^2 - 2\beta x(1 - \beta x) = (1 - \beta x)(1 - 3\beta x)$$

обращается в нуль при $\beta x^* = \frac{1}{3}$, (значению $\beta x^* = 1$ соответствует точка разрыва функции). Таким образом, максимальное значение этой функции и критическое значение параметра найдем, подставив это значение в формулу (26)

$$A^* = \frac{1}{3\beta} \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4h}{27r_0}.$$

Используя выражение для введенного параметра, получаем $\frac{\varepsilon_0 U^2}{2h^2} \frac{r_0}{\gamma} = \frac{4h}{27r_0}$,

откуда следует, что критическое напряжение равно

$$U_{\max} = \sqrt{\frac{8h^3 \gamma}{27r_0^2 \varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{8(1,0 \cdot 10^{-3})^3 \cdot 1,56 \cdot 10^2}{27(1,0 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}} \approx 7,2 \cdot 10^3 \text{ В} \quad (26)$$

Обратите внимание, при напряжении в 1 кВ деформация трубки фактически пренебрежимо мала, а при напряжении 7 кВ – в конденсатор происходит короткое замыкание. Надо признать – не очень надежное устройство изобретено.

Для окончательного подтверждения точности полученного решения построим график функции (26) Рис.8 – сплошная линия. Пунктиром построена точная функция $A = (1 - \beta x)^2 \frac{x}{1 + x}$ (без сделанного приближения об упругом давлении).

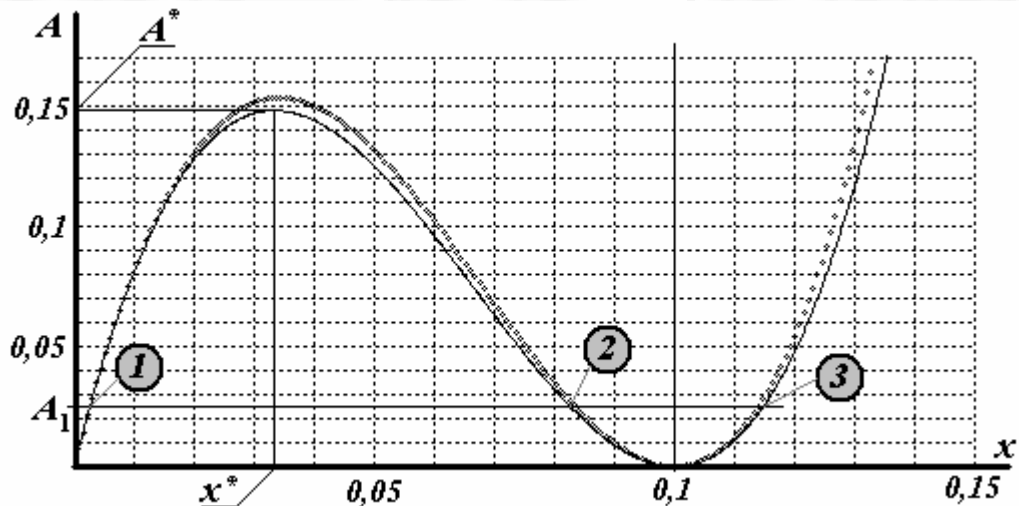


Рис. 9

Видно, что эти функции различаются незначительно. Так, в районе найденного максимума различия в этих функциях оценим из разложения

$$A = (1 - \beta x)^2 \frac{x}{1 + x} \approx x(1 - \beta x)^2 \cdot (1 - x),$$

из которого следует, что относительная ошибка нашего приближения составляет величину

$$\frac{\delta A^*}{A^*} \approx x = \frac{4}{27\beta} \approx 0,015 \text{ (всего полтора процента), что приводит к ошибке в определении}$$

максимально напряжения (с учетом $U \sim \sqrt{A^*}$) в два раза меньшей, то есть порядка 0,8%. Такая точность не обеспечивается точностью исходных данных, поэтому является излишней. Обратите внимание, что при малых x график этой функции линеен, что подтверждает допустимость сделанных приближений при определении деформации по формуле (24).

Отметим, что с помощью графика на Рис.8 можно решать и исходное уравнение (23). Его корням соответствуют точки пересечения графика этой функции с горизонтальной прямой (для наглядности значение параметра A завышено по сравнению с решением в предыдущем разделе задачи). Кроме того, видно, что это уравнение имеет целых три корня, как и положено уравнению третьей степени! Причины появления этого корня установите самостоятельно, нас же он не интересует, так как всегда выходит за пределы интересующего нас интервала.

Часть 5. Магнитное воздействие.

5.1 При протекании переменного электрического тока по обмотке соленоида, внутри него возникает переменное магнитное поле, которое индуцирует ЭДС как в обмотке соленоида (самоиндукция), так и в проводящей полимерной оболочке. Индуцированный в оболочке электрический ток – круговой и протекает по ее поверхности перпендикулярно оси (Рис. 10). Этот ток будет оказывать аналогичное обратное влияние на ток в обмотке. Так как внутри системы имеется сердечник с большой магнитной проницаемостью, то магнитным потоком в узком пространстве между обмоткой и оболочкой можно пренебречь.

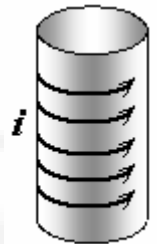


Рис. 10

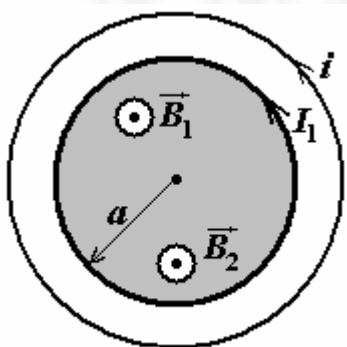


Рис. 11

Индукция магнитного поля в сердечнике B_1 , создаваемого током в обмотке I_1 , рассчитывается по известной формуле

$$B_1 = \mu\mu_0 n I_1. \quad (27)$$

Заметим, что произведение $nI = i$ представляет собой поверхностную плотность тока в обмотке, поэтому эта же формула справедлива и для расчета индукции поля, создаваемого током в оболочке

$$B_2 = \mu\mu_0 i. \quad (28)$$

Положительным направлением токов будем считать направление «против часовой стрелки» (Рис. 11), тогда положительное направление вектора индукции определяется по правилу буравчика.

На рисунке указаны положительные направления токов и векторов индукции, хотя реально направления токов в обмотке и оболочке противоположны, их «правильные» направления автоматически появятся при правильной записи уравнений, описывающих эти токи.

Магнитный поток через поперечное сечение рассматриваемой системы запишем в виде

$$\Phi = \pi a^2 (B_1 + B_2) = \pi a^2 \mu\mu_0 (n I_1 + i). \quad (29)$$

Преобразуем это выражение, для чего заметим, что величина

$$\pi a^2 \mu\mu_0 n N = L \quad (30)$$

(где $N = n l$ - число витков обмотки) является индуктивностью соленоида (в отсутствии оболочки), так как она может быть представлена в виде $L = \frac{N \Phi_1}{I_1}$, Φ_1 - поток через один

виток магнитного поля, создаваемого током I_1 в обмотке. Электрический ток в полимерной оболочке равномерно распределен по ее поверхности. Поэтому можно

записать выражение для суммарного тока $I_2 = il$, текущего по оболочке. Второе слагаемое в этом случае имеет вид

$$\pi a^2 \mu \mu_0 i = \pi a^2 \mu \mu_0 \frac{I_2}{l} = \pi a^2 \mu \mu_0 \frac{nN}{nNl} I_2 = \frac{L}{N^2} I_2 \quad (31)$$

Окончательно, магнитный поток записывается в виде

$$\Phi = \frac{L}{N} I_1 + \frac{L}{N^2} I_2. \quad (32)$$

Возникающая при изменении магнитного потока ЭДС индукции одинакова в одном витке обмотки и оболочке и равна

$$E_{ind} = -\Phi' \quad (33)$$

Так как активным сопротивлением контура, состоящим из источника и обмоткой соленоида можно пренебречь, то для него сумма ЭДС источника и индукции во всех витках соленоидов равна нулю, поэтому

$$E_{ист.} - N\Phi' = 0. \quad (34)$$

Запишем уравнение суммарного тока $I_2 = il$, текущего по оболочке. Общее сопротивление оболочки при указанном протекании тока равно (по сравнению с предыдущим продольным протеканием, «длина» и «ширина» поменялись местами):

$$R = \frac{1}{\lambda} \frac{2\pi r_0}{l}. \quad (35)$$

Предположим пока, что сопротивление кольца не зависит от его деформации.

Для суммарного тока справедлив закон Ома для полной цепи $I_2 R = E_{ind}$, или

$$I_2 R = -\Phi' \quad (36)$$

Уравнения (34) и (36) образуют систему, описывающую изменения токов в обмотке и оболочке. Подставив в нее выражение для потока, получим эту систему в явном виде

$$\begin{cases} E_{ист.} - L \left(I_1 + \frac{1}{N} I_2 \right)' = 0 \\ I_2 R = -\frac{L}{N} \left(I_1 + \frac{1}{N} I_2 \right)' \end{cases} \quad (37)$$

1. Без введения обозначений для индуктивности и сопротивления оболочки эта же система будет выглядеть более громоздко.

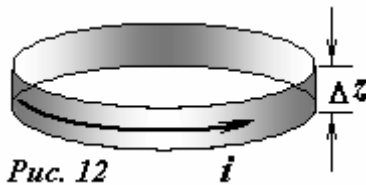


Рис. 12

Выделим тонкое кольцо толщиной Δz (Рис. 12). Сила тока, протекающая по этому кольцу равна $\delta I_2 = i \Delta z$, а его сопротивление равно $R = \frac{1}{\lambda} \frac{2\pi r_0}{\Delta z}$. Закон Ома для выделенного кольца имеет вид

$$E_{ind} = \delta I_2 R = \frac{2\pi r_0}{\lambda} i.$$

Таким образом, получаем систему, описывающих изменения токов:

$$\begin{cases} E_{ист.} - N\pi a^2 \mu \mu_0 (nI_1 + i)' = 0 \\ \frac{2\pi r_0}{\lambda} i = -\pi a^2 \mu \mu_0 (nI_1 + i)' \end{cases}.$$

2. Фактически рассматриваемое устройство является трансформатором: первичная обмотка содержит N витков и пренебрежимо малое сопротивление, ее индуктивность равна L ; вторичная обмотка состоит из одного витка, сопротивление вторичной цепи есть

сопротивление оболочки и равно R , ее индуктивность $L_2 = \frac{\Phi_2}{I_2} = \frac{\mu\mu_0 \frac{I_2}{l} \pi a^2}{I_2} = \frac{\mu\mu_0 \pi a^2}{l}$
 связана с индуктивностью обмотки соотношением $L_2 = \frac{\mu\mu_0 \pi a^2}{l} = \frac{\mu\mu_0 \pi a^2}{l} \cdot \frac{nN}{nN} = \frac{L}{N^2}$.
 Наконец коэффициент взаимной индукции $L_{12} = L_{21} = \frac{L}{N}$. Полученная система уравнений есть система уравнений, описывающих трансформатор.

5.2 Решим систему уравнений (37). Запишем зависимость ЭДС источника от времени в виде $E_{ист.} = -U_0 \cos \omega t$. Выражая производную из второго уравнения и подставляя ее в первое, получим

$$I_2 RN = -U_0 \cos \omega t.$$

Таким образом, сила тока в обмотке описывается функцией

$$I_2 = -\frac{U_0}{RN} \cos \omega t. \quad (38)$$

Из первого уравнения систему выразим

$$LI'_1 = U_0 \cos \omega t - \frac{L}{N} I'_2.$$

Представим силу тока в обмотке как

$$I_1(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

и его подставим в уравнение вместе с выражением (38) для тока в оболочке:

$$-AL\omega \sin \omega t + BL\omega \cos \omega t = U_0 \cos \omega t - \frac{L}{N} \frac{U_0}{NR} \omega \sin \omega t.$$

Из условия равенства коэффициентов при тригонометрических функций находим:

$$A = \frac{U_0}{N^2 R}, \quad B = \frac{U_0}{L\omega}.$$

Окончательно зависимость силы тока в обмотке от времени имеет вид

$$I_2 = \frac{U_0}{N^2 R} \cos \omega t + \frac{U_0}{L\omega} \sin \omega t. \quad (39)$$

Амплитудное значение силы этого тока равно

$$I_{20} = \sqrt{A^2 + B^2} = U_0 \sqrt{\frac{1}{(N^2 R)^2} + \frac{1}{(L\omega)^2}}. \quad (40)$$

Проведем численные расчеты параметров изучаемого устройства:

сопротивление оболочки: $R = \frac{1}{\lambda} \frac{2\pi r_0}{l} = \frac{2\pi \cdot 1,0 \cdot 10^{-2}}{2,55 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-2}} \approx 1,23 \cdot 10^{-4} \text{ Ом};$

число витков обмотки: $N = nl = 200;$

индуктивность оболочки:

$$L = \pi a^2 \mu\mu_0 nN = \pi (0,90 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 1,0 \cdot 10^3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,0 \cdot 10^3 \cdot 200 \approx 63,9 \cdot 10^{-3} \text{ Гн};$$

круговая частота тока: $\omega = 2\pi\nu \approx 314 \text{ с}^{-1}.$

Теперь вычислим характеристики токов:

- амплитудное значение силы тока в оболочке

$$I_{20} = \frac{U_0}{RN} = \frac{36}{1,23 \cdot 10^{-4} \cdot 200} \approx 1,46 \cdot 10^3 \text{ А}.$$

- требуемое значение амплитуды поверхностной плотности тока в оболочке

$$i_0 = \frac{I_{20}}{l} = \frac{U_0}{RNl} \approx 7,3 \cdot 10^3 \text{ A} \cdot \text{м}^{-1} \quad (41)$$

- амплитудное значение силы тока в соленоиде

$$I_{20} = U_0 \sqrt{\frac{1}{(N^2 R)^2} + \frac{1}{(L\omega)^2}} = 36 \sqrt{\frac{1}{(200^2 \cdot 1,23 \cdot 10^{-4})^2} + \frac{1}{(63,9 \cdot 10^{-3} \cdot 314)^2}} \approx \\ \approx 36 \sqrt{\frac{1}{(4,92)^2} + \frac{1}{(20,1)^2}} \approx 7,5 \text{ A} \quad (42)$$

Высокие значения полученных значений токов являются следствием малого сопротивления оболочки, которая, как было отмечено выше, является вторичным контуром трансформатора.

5.3 Полученные зависимости токов от времени позволяют легко найти энергетические характеристики рассматриваемых процессов. Средняя мощность¹ теплоты, выделяющейся в оболочке, рассчитывается по закону Джоуля-Ленца (с усреднением по времени, которое обозначается угловыми скобками)

$$P_{\text{менл.}} = \langle I^2 R \rangle = \left\langle \left(\frac{U_0}{RN} \cos \omega t \right)^2 R \right\rangle = \frac{U_0^2}{RN^2} \langle \cos^2 \omega t \rangle$$

Так как $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$, то окончательный результат:

$$P_{\text{менл.}} = \frac{U_0^2}{2RN^2} \approx 1,3 \cdot 10^2 \text{ Вт} \quad (43)$$

Мощность, потребляемая от источника, также легко рассчитывается

$$P_{\text{ист.}} = \langle E_{\text{ист.}} I_1 \rangle = \left\langle U_0 \cos \omega t \left(\frac{U_0}{N^2 R} \cos \omega t + \frac{U_0}{L\omega} \sin \omega t \right) \right\rangle = \frac{U_0^2}{N^2 R}, \quad (44)$$

и, конечно, совпадает с мощностью теплоты, выделяющейся в оболочке. При выводе формулы (44) учтено, что $\langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle = 0$.

5.4. Электрический ток поверхностной плотности i , протекающий по оболочке, взаимодействует с магнитным полем, в результате чего появляются силы, растягивающие оболочку. При расчете этой силы необходимо учесть, что на оболочку действует только магнитное поле, создаваемое током в самой оболочке в пространстве между обмоткой и оболочкой (где нет сердечника), поэтому величина индукции этого поля равна $B_0 = \mu_0 i$. Расчет давления магнитного поля полностью аналогичен расчету давления электрического поля. Чтобы найти давление магнитного поля на поверхность оболочки, выделим на ее поверхности малую площадку (Рис. 13) со сторонами Δz (перпендикулярную направлению тока) и Δl (по направлению тока). Сила тока, пересекающая площадку, равна $\delta I = i \Delta z$. Сила Ампера, действующая на эту площадку, равна

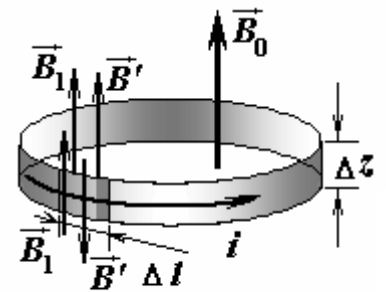


Рис. 13

¹ В этом разделе P - означает мощность, а не давление! Во-первых, это традиционное обозначение, во-вторых, здесь не рассматривается давление, в-третьих, уже других букв не хватает.

$$\Delta F = \delta B_1 \Delta l = i B_1 \delta l \Delta z = i B_1 \Delta S, \quad (45)$$

(где ΔS - площадь выделенной площадки) и направлена перпендикулярно ей. Далее необходимо учесть, что в этой формуле B_1 - индукция поля, создаваемого всеми токами, кроме токов самой площадки. В непосредственной близости от площадки с внутренней стороны суммарное поле индукции $B_0 = \mu_0 i$ является суммой полей создаваемой токами на площадке \vec{B}' и интересующего нас поля всех остальных токов \vec{B}_1 , поэтому $B_1 + B' = B_0$. С наружной стороны площадки векторы \vec{B}' и \vec{B}_1 противоположны и суммарное поле в этой области отсутствует, поэтому здесь $B_1 - B' = 0$. Таким образом, как и в электростатике, поле, действующее на площадку, в два раза меньше суммарного поля $B_1 = \frac{1}{2} B_0$. Теперь с помощью формулы (45) и полученного результата, определяем давление магнитного поля

$$P_{\text{маг.}} = \frac{F}{\Delta S} = i B_1 = \frac{1}{2} i B_0 = \frac{\mu_0 i^2}{2}. \quad (46)$$

Таким образом, давление магнитного поля на оболочку пропорционально квадрату поверхностной плотности тока. Отметим, что при переменной силе (как в данном случае) строгий расчет смещения требует решения динамических уравнений, то уравнений второго закона Ньютона $ma = F$ (где F - сумма сил действующих на тело). Если же масса тела пренебрежимо мала, то динамическое уравнение переходит в уравнение статического равновесия. Таким образом, в данном случае для расчета деформации можно пользоваться полученными ранее, формулами для статического случая.

Используя рассчитанное ранее значение амплитуды поверхностной плотности тока, рассчитаем максимальное давление поля на оболочку

$$P_{\text{max}} = \frac{\mu_0 i_0^2}{2} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (7,3 \cdot 10^3)^2}{2} \approx 33 \text{ Па}. \quad (47)$$

Это давление мало на столько, что для расчета увеличения радиуса можно пользоваться линейным приближением, то есть по формуле (16) из которой следует, что максимальное увеличение радиуса трубки в данном случае равно

$$\Delta r_{\text{max}} = \frac{r_0^2}{\gamma} P_{\text{max}} = \frac{(1,0 \cdot 10^{-2})^2}{1,56 \cdot 10^2} \cdot 33,5 \approx 2,1 \cdot 10^{-5} \text{ м} \quad (48)$$

5.5 Причина возникновения звука в описанной ситуации понятна: под действием переменной силы со стороны переменного магнитного поля оболочка начинает вибрировать и издавать звук. Очевидно, что громкость звука будет максимальна при максимальной амплитуде колебаний оболочки. В проведенном выше расчете давления отсутствует зависимость максимального давления от частоты тока (см. формулы (46) и (41)). Однако оболочка обладает массой (и упругостью), поэтому она способна совершать свободные колебания с некоторой собственной частотой. Поэтому сейчас мы должны рассмотреть движение оболочки как вынужденные колебания. Хорошо известно, что максимальная амплитуда колебаний достигается в условиях резонанса, когда частота вынуждающей силы совпадает с собственной частотой колебаний системы. Таким образом, сейчас нам необходимо найти собственную частоту колебаний системы. Очередной раз выделим на поверхности трубки малую площадку площадью ΔS (Рис. 14), масса которой равна $\Delta m = \rho \Delta S$. При

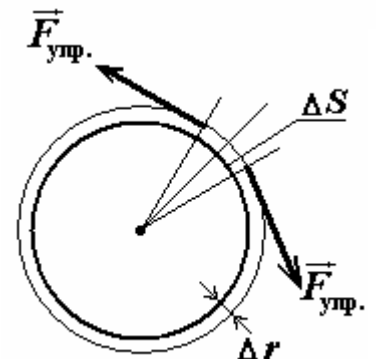


Рис. 14

смещении этой площадки на величину $\Delta r(t)$ (которая сейчас рассматривается как функция времени) на нее будет действовать возвращающая сила упругости. Величину этой силы мы можем выразить из приближенной формулы (16): эта формула получена из условия равенства сила давления и силу упругости, поэтому в этой формуле $\Delta P = \frac{\gamma}{r_0^2} \Delta r$ равно давлению сил упругости. Таким образом, возвращающая сила может быть записана в виде

$$F = \Delta S \Delta P = \Delta S \frac{\gamma}{r_0^2} \Delta r. \quad (49)$$

Запишем уравнение второго закона Ньютона в проекции на радиальное направление

$$\rho \Delta S a = -\Delta S \frac{\gamma}{r_0^2} \Delta r, \quad (50)$$

где a - ускорение площадки, которое, очевидно, равно второй производной от увеличения радиуса $a = (\Delta r)''$. Теперь уравнение (50) приобретает знакомый вид

$$(\Delta r)'' = -\frac{\gamma}{r_0^2 \rho} \Delta r, \quad (51)$$

уравнения гармонических колебаний с частотой

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma}{r_0^2 \rho}}.$$

Наконец, вспомним, что давление, действующее на поверхность трубки пропорционально квадрату силы тока, следовательно, частота изменения давления в два раза больше частоты тока. Итак, резонанс (и его следствия – максимальная амплитуда и максимальная громкость) наступит, когда частота тока будет в два раза меньше частоты собственных колебаний трубки, то есть при

$$\nu = \frac{\nu_0}{2} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\gamma}{r_0^2 \rho}} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{1,56 \cdot 10^2}{(1,0 \cdot 10^{-2})^2 0,119}} \approx 2,9 \cdot 10^2 \text{ Гц} \quad (52)$$

Часть 6. Сверхпроводимость.

Качественно обсудим, какие физические процессы будут происходить в данном эксперименте. При подключении катушки к источнику в оболочке будут индуцироваться электрические токи, но, так как пластик обладает электрическим сопротивлением, эти токи быстро затухнут. При охлаждении трубки и переходе ее в сверхпроводящее состояние в постоянном магнитном поле токи в ней не появятся. При извлечении соленоида с током из трубки магнитный поток поля соленоида через поперечное сечение трубки будет уменьшаться, что приведет к возникновению незатухающего тока по поверхности трубки. Эти токи создадут магнитное поле, которое, взаимодействуя с током, приведет к расширению трубки. Таким образом, нам необходимо найти поверхностную плотность токов, индуцированных в сверхпроводящей трубке после полного извлечения соленоида.

Рассмотрим проводящий контур, находящийся в магнитном поле (Рис.15). При изменении магнитного потока внешнего поля в контуре возник электрический ток, магнитное поле которого будет препятствовать изменению потока внешнего поля. Для тока в контуре можно записать уравнение закона Ома для полной цепи

$$IR = -\Phi'_0 - \Phi'_1, \quad (53)$$

где Φ_0 - магнитный поток внешнего поля; $(-\Phi'_0)$ - (производная от этого потока, взятая с обратным знаком) ЭДС индукции, возникающая при изменении потока внешнего поля, аналогично, $(-\Phi'_1)$ - ЭДС самоиндукции, возникающая при изменении поля, созданного током в контуре. Если контур сверхпроводящий, то из уравнения (53) следует

$$0 = -\Phi'_0 - \Phi'_1 = -(\Phi_0 + \Phi_1)',$$

то есть **суммарный магнитный поток через сверхпроводящий контур остается неизменным²**.

Воспользуемся этим утверждением для решения поставленной задачи. Когда соленоид с протекающим током I_0 находится внутри трубки, магнитный поток через любое поперечное сечение равен

$$\Phi_0 = \mu\mu_0 n I_0 \pi a^2, \quad (54)$$

после извлечения соленоида этот же магнитный поток создается поверхностным током

$$\Phi_0 = \Phi_1 = \mu_0 i \pi r^2, \quad (55)$$

здесь i - поверхностная плотность индуцированного тока по поверхности трубки, r - радиус деформированной трубки. Действительно, магнитный поток должен сохраняться в любом случае: и при изменении внешнего поля и при изменении площади контура, то есть при увеличении радиуса контура сила тока в нем будет уменьшаться!

Из условия постоянства магнитного потока получаем уравнение, связывающее силу тока в соленоиде и силу индуцированного тока по поверхности трубки

$$\mu n I_0 a^2 = i r^2. \quad (56)$$

В этом уравнении две неизвестных величины – плотность тока и радиус трубки. Дополним его уравнением связывающим магнитное давление

$$P_{\text{маг.}} = \frac{\mu_0 i^2}{2} \quad (57)$$

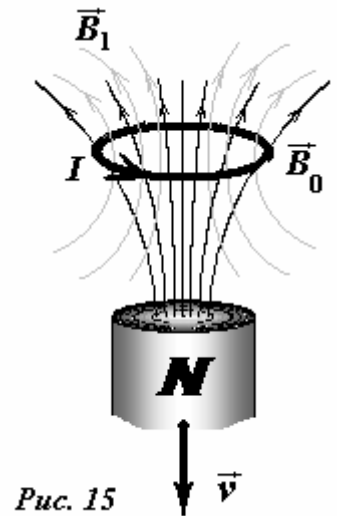


Рис. 15

² Это утверждение не является абсолютно строгим, но выполняется с высокой точностью.

с радиусом деформированной трубки в состоянии равновесия (7) $rP_{\text{маг.}} = f$. Из уравнения

(56) выразим $i = \frac{\mu n I_0 a^2}{r^2}$, получим выражения для давления

$$P_{\text{маг.}} = \frac{\mu_0 i^2}{2} = \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{\mu n I_0 a^2}{r^2} \right)^2 = \frac{\mu_0 (\mu n a^2)^2 I_0^2}{2 r^4}$$

и подставим его в уравнение (7)

$$\frac{\mu_0 (\mu n a^2)^2 I_0^2}{2 r^3} = f \quad (58)$$

6.1 Чтобы определить требуемое значение тока в это выражение следует подставить предельные значения радиуса r_{max} и механического напряжения f_{max} и определить предельное значение тока в соленоиде

$$\begin{aligned} I_{0\text{max}} &= \frac{1}{\mu n a^2} \sqrt{\frac{2 f_{\text{max}} r_{\text{max}}^3}{\mu_0}} = \\ &= \frac{1}{1,0 \cdot 10^3 \cdot 1,0 \cdot 10^3 \cdot (0,90 \cdot 10^{-2})^2} \sqrt{\frac{2 \cdot 93,7 \cdot (1,4 \cdot 10^{-2})^3}{4\pi \cdot 10^{-7}}} \approx 0,25 \text{ A} \end{aligned} \quad (59)$$

6.2 Данное в условии значения силы тока меньше максимально возможного, поэтому в этом случае трубка не разорвется, но это значение сравнимо с предельным. Найдём решение уравнения (58), используя для механического напряжения закон Гука. Обоснованность его применения проверим после получения решения. В этом приближении уравнение (58) имеет вид

$$\frac{\mu_0 (\mu n a^2)^2 I_0^2}{2 r^3} = \gamma \frac{r - r_0}{r_0},$$

и является уравнением четвертой степени, поэтому его следует решать численно. Выразим радиус трубки через его относительное удлинение $r = r_0(1 + \varepsilon)$. Подстановка этого выражения в уравнение дает

$$\frac{\mu_0 (\mu n a^2)^2 I_0^2}{2\gamma} \frac{1}{r_0^3 (1 + \varepsilon)^3} = \varepsilon.$$

Численное значение постоянного безразмерного множителя этого уравнения равно

$\frac{\mu_0 (\mu n a^2)^2 I_0^2}{2\gamma r_0^3} \approx 0,26$. Таким образом, получаем уравнение «в числах»

$$\varepsilon = \frac{0,26}{(1 + \varepsilon)^3} \quad (60)$$

Его можно решить любым численным методом (даже подбором). Единственный положительный корень этого уравнения $\varepsilon^* \approx 0,16$. С удовольствием отмечаем, что в этом диапазоне приближение закона Гука допустимо. Окончательно, находим радиус деформированной трубки

$$r_1 = r_0(1 + \varepsilon^*) \approx 1,2 \text{ см} \quad (61)$$