

## Задание 2. Бенгальский огонь<sup>1</sup>

### Часть 1. «Механический огонь»

**1.1** Рассмотрим поворот дуги угловой величиной  $2\alpha$  и линейной плотностью  $\lambda$  на малый угол  $\gamma$ , ( $\gamma \rightarrow 0$ ) от вертикали (рис. 1).

Поскольку можно считать, что масса всей дуги  $m = \lambda \Delta l = \lambda 2\alpha R$  сосредоточена в её центре масс (некоторой точке  $C$ ) на расстоянии  $r = OC$  от оси вращения  $O$ , то при таком повороте центр масс поднимется на высоту  $h = r(1 - \cos \gamma)$  относительно начального положения (точка  $C'$  на рис. 1).

Это приведёт к увеличению потенциальной энергии системы на величину

$$E^{\text{II}} = mgh = \lambda 2\alpha Rgr(1 - \cos \gamma), \quad (1)$$

С учетом того, что при малых углах  $1 - \cos \gamma = 2 \sin^2(\frac{\gamma}{2}) \approx \frac{\gamma^2}{2}$ , выражение (1) можно преобразовать к виду

$$E^{\text{II}} = mgh = \lambda \alpha Rgr\gamma^2. \quad (2)$$

Однако, с другой стороны можно считать, что при таком повороте изменилась энергия только выделенных на рисунке 1 участков  $AD$  и  $BE$  дуги. Иными словами, увеличение потенциальной энергии соответствует переходу участка дуги из положения  $AD$  в положение  $BE$ . При этом масса  $m_{AD} = \lambda l_{AD} = \lambda \gamma R$  поднялась на высоту  $\Delta h = l_{AD} \sin \alpha = \gamma R \sin \alpha$ , (см. рис. 1) что соответствует приращению энергии

$$E^{\text{II}} = m_{AD} g l_{AD} \sin \alpha = \lambda \gamma R g \gamma R \sin \alpha = \lambda \gamma^2 R^2 g \sin \alpha. \quad (3)$$

Приравнявая выражения (2) и (3), получаем искомое выражение

$$\lambda \alpha Rgr\gamma^2 = \lambda \gamma^2 R^2 g \sin \alpha \Rightarrow r = \frac{\sin \alpha}{\alpha} R. \quad (4)$$

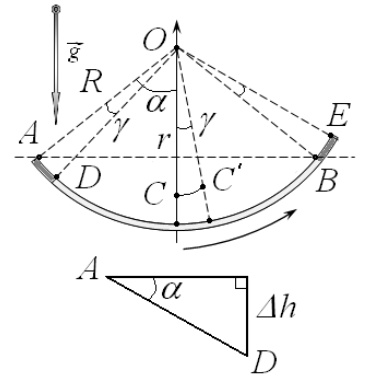


Рис. 1. Вычисление центра масс однородной дуги

<sup>1</sup> Задача допускает и более короткое решение, кроме того, в решении есть пункты, которые отсутствуют в окончательном варианте условия. Но автор очень старался!

**1.2** Рассмотрим положение огня (точки горения) через промежуток времени  $t$ . Пусть к этому моменту времени сгорела дуга  $AB$ , тогда точка горения прошла по дуге  $AB$  расстояние  $l = vt$ , что соответствует

углу поворота огня на угол  $\alpha = \frac{l}{R} = \frac{vt}{R} = \omega t$ ,

где  $R = OA$  – радиус кольца (Рис. 2). Если масса единицы длины (линейная плотность)

кольца  $\lambda = \frac{m}{2\pi R}$ , то в силу однородности

кольца сгоревшую массу найдем как

$$m_{AB} = \lambda \cdot l = \lambda R \alpha. \quad (5)$$

Заметим, что центр тяжести симметричных дуг  $AE$  и  $BD$  при движении точки горения всегда лежит в геометрическом центре кольца – точке  $O$ ., поскольку их массы одинаковы. Центр тяжести «нескомпенсированной» дуги  $DE$  – точка  $F$  лежит на биссектрисе угла  $EOD$  ( $\angle EOF = \frac{\alpha}{2}$ ), причём согласно

первому пункту задачи можем записать

$$OF = 2R \frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha}. \quad (6)$$

Таким образом, центр тяжести системы в рассматриваемый момент времени лежит на отрезке  $OF$  на некотором расстоянии  $OC = r_C$  от начала координат. Учитывая, что массы соответствующих дуг

$$m_{EB} = m_{AB} = \lambda R \alpha, \quad m_{AE} = m_{BD} = \lambda R(\pi - \alpha) \quad (7)$$

можно «собрать» в точках  $O$  и  $F$ , искомое расстояние  $r_C$  найдем достаточно стандартным образом

$$r_C = \frac{m_{EB}}{m_{EB} + 2m_{AE}} OF = \frac{\alpha}{\alpha + 2(\pi - \alpha)} \cdot 2R \frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha} = 2R \frac{\sin(\alpha/2)}{2\pi - \alpha}. \quad (8)$$

Как следует из (8), формулой, приведенной в условии для вычисления положения центра масс однородной дуги, можно пользоваться и в начальный период горения кольца, хотя проверить это никогда не помешает.

Подчеркнем, что поскольку центр масс системы находится на биссектрисе угла  $EOD$ , то угловая скорость вращения центра масс вокруг начала координат в два раза меньше угловой скорости вращения  $\omega = v/R$  точки горения, т.е.

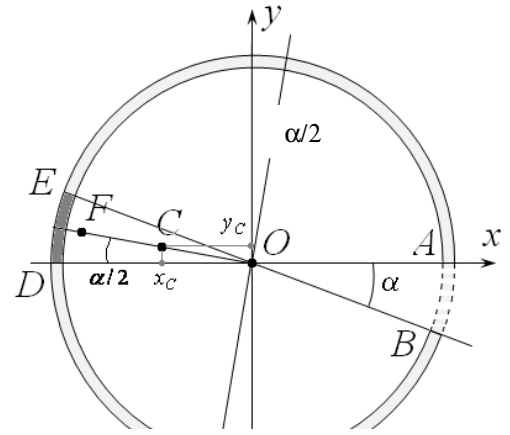


Рис. 2. Вычисление центра масс кольца при горении

$$\omega_C = \frac{\omega}{2} = \frac{v}{2R}. \quad (9)$$

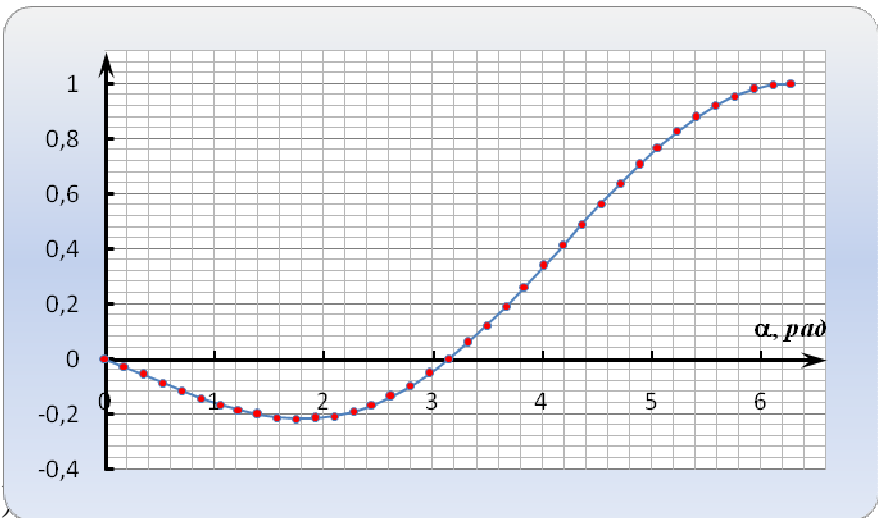
Это означает, что при полном сгорании кольца (т.е. при повороте точки горения на угол  $\alpha = 2\pi$ ) угол поворота центра масс системы будет в два раза меньше

$$\alpha_C = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

(10)

С учётом этого обстоятельства, координаты центра тяжести системы в рассматриваемый момент времени найдем как

$$x_C = -r_C \cos(\alpha/2),$$



(11) Рис. 3. Зависимость  $x^*_C(\alpha)$

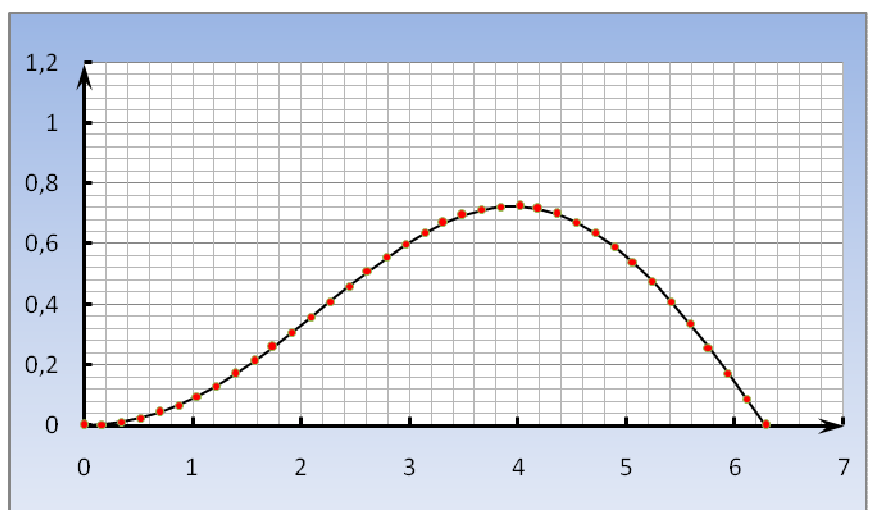
$$y_C = r_C \sin(\alpha/2) = 2R \frac{\sin(\alpha/2) \sin(\alpha/2)}{2\pi - \alpha} = 2R \frac{\sin^2(\alpha/2)}{2\pi - \alpha}. \quad (12)$$

**1.3** Для построения графиков функций  $x_C(\alpha)$  и  $y_C(\alpha)$  удобно ввести безразмерные

координаты  $x^* = \frac{x_C}{R}$

и  $y^* = \frac{y_C}{R},$

меняющиеся в пределах  $[-1; 1]$ . В этих координатах построим графики полученных функций (11) и (12).

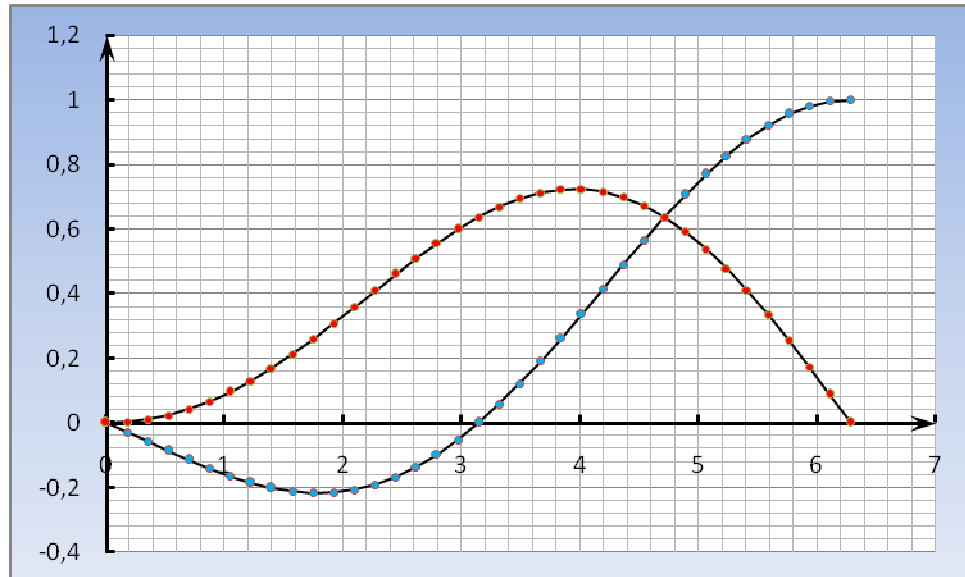


Для этого разобьем полный угол поворота точки горения на интервалы по  $\Delta\alpha = 10^\circ$  и заполним Таблицу 1 для функции (11) и по ней построим график.

Аналогично заполняем таблицу и строим график для функции (12).

Для наглядного представления об изменении положения центра масс со временем достаточно интересно построить оба графика в одних координатах.

Для удобства анализа на рисунке **Рис. 4. Зависимость  $y_C^*(\alpha)$**  <sup>5</sup> одновременно представлены зависимости  $x^*(\alpha)$ ,  $y^*(\alpha)$ .



**Рис. 5.** Зависимости координат  $x_C^*(\alpha)$ ,  $y_C^*(\alpha)$  центра масс от угла (в радианах)

**1.4** Используя точки для полученных зависимостей  $x^*(\alpha)$ ,  $y^*(\alpha)$ , построим траекторию центра масс в течение всего процесса движения точки горения. Математически нам следует построить зависимость  $y^*(x^*)$ , исключив  $\alpha$  из уравнений (11) и (12), однако проще это сделать непосредственно графически. Результат построения представлен на рисунке 6.

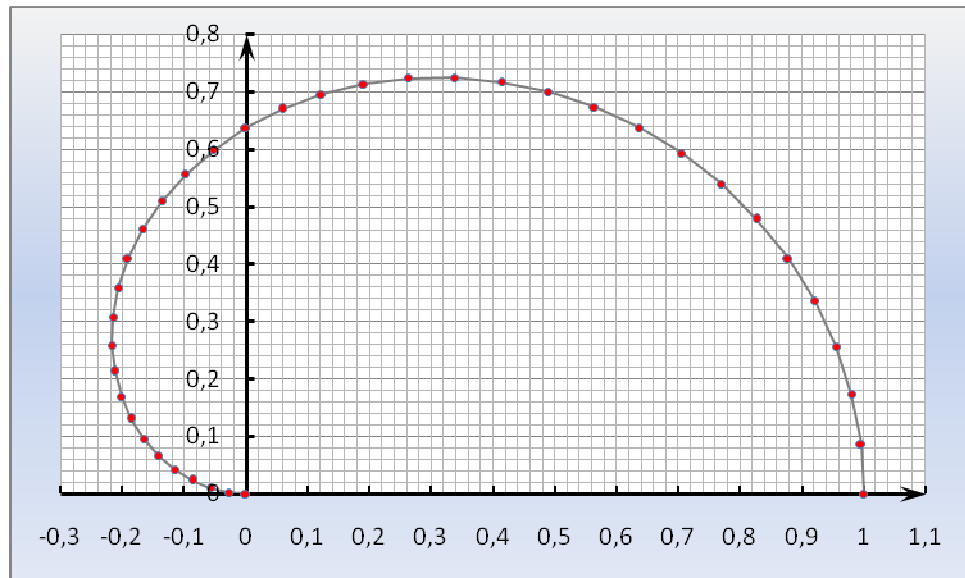


Рис. 6. Траектория центра масс при горении

Таким образом, центр масс горящего кольца описывает достаточно своеобразную кривую, общий вид которой представлен на Рис. 6.

Она начинается в центре кольца (точка  $O$ ), а заканчивается непосредственно на самом кольце, попадая в точку начала горения (точка  $A$ ) с «другой стороны». Это движение обусловлено как изменением формы тела, так и уменьшением его массы.

**1.5** Максимальные смещения центра масс  $x_{C \max}$  и  $y_{C \max}$  горящего кольца вдоль соответствующих осей определим непосредственно из построенных графиков, приведенных на рисунках 2 и 3.

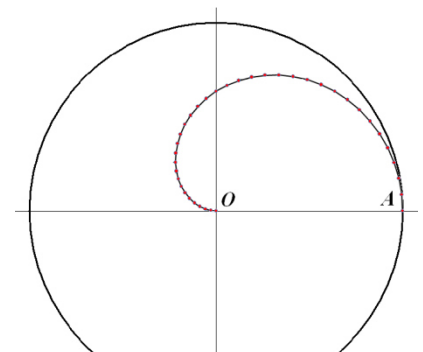


Рис. 7. Общий вид траектории центра масс при горении

$$x_{C \max} = |-0,22 R| = (22 \pm 2) \text{ см}, \quad (13)$$

$$y_{C \max} = 0,72 R = (72 \pm 2) \text{ см}. \quad (14)$$

В качестве оценки погрешности при записи (13) и (14) взято значение «одной клеточки» на рисунке 6.

Подчеркнём, что для аналитического нахождения данных величин необходимо численно решить трансцендентные уравнения, получающиеся в результате дифференцирования (11) и (12)

$$\begin{aligned} x_{C \max} : \quad \tan \alpha &= \alpha - 2\pi, & 0 \leq \alpha \leq 2\pi \\ y_{C \max} : \quad \tan(\alpha/2) &= \alpha - 2\pi, & 0 \leq \alpha \leq 2\pi \end{aligned} \quad (15)$$

Решение системы (15) методом Ньютона (касательных) приводит к значениям:

$$\text{для } x_{C \max} : \alpha = 1,79 \text{ рад, } x_{C \max} = -0,217 R, \quad (16)$$

$$\text{а для } y_{C \max} : \alpha = 3,95 \text{ рад, } y_{C \max} = 0,725 R, \quad (17)$$

что отлично согласуется со значениями (13) и (14), полученными графически.

**1.6** Как следует из Рис. 7, в начальный момент (промежуток) времени скорость  $\vec{v}_1$  центра масс горящего кольца направлена по касательной к траектории в точке  $O$ , т.е. против оси  $Ox$  (Рис. 8). Это означает, что на этом этапе «вертикальной» компонентой скорости  $v_{1y}$  можно пренебречь.

Следовательно, искомая скорость  $v_1$  центра масс будет равна производной по времени от соответствующей координаты (11)

$$v_1 = v_{1x} = x'_C|_{\alpha=0} = \left( -R \frac{\sin \alpha}{2\pi - \alpha} \right)'_{\alpha=0}. \quad (18)$$

По правилам дифференцирования частных функций получим

$$\left( -R \frac{\sin \alpha}{2\pi - \alpha} \right)' = -R \frac{\cos \alpha \cdot \alpha' (2\pi - \alpha) + \alpha' \cdot \sin \alpha}{(2\pi - \alpha)^2} \Big|_{\alpha=0} = -\frac{\alpha' \cdot R}{2\pi} = -\frac{v}{2\pi}, \quad (19)$$

где  $v$  – скорость движения точки горения. Заметим, что при записи (19) учтено, что производная от угла  $\alpha$  по времени есть угловая скорость  $\alpha' = \omega$  движения точки горения вокруг начала координат. Расчет по формуле (19) даёт

$$v_1 = -1,6 \frac{\text{мм}}{\text{с}}. \quad (20)$$

Подчеркнём, что этот же результат (20) можно получить и без производных, более традиционным «школьным» способом – рассматривая моменты сил тяжести относительно центра кольца при малом смещении точки горения.

Аналогичным образом можем найти скорость центра масс  $\vec{v}_2$  горящего кольца в момент времени, когда сгорела его половина, только в этом случае нельзя пренебрегать вертикальным компонентом скорости  $v_{2y}$  центра масс.

Действительно, на Рис. 8 вектор скорости  $\vec{v}_2$  направлен по касательной к траектории в точке  $A$ , наклон которой к оси абсцисс (т.е. угол  $\beta$ ) хорошо заметен даже «на глаз».

Расчет по формулам для соответствующих производных ((11) и (12)) даёт

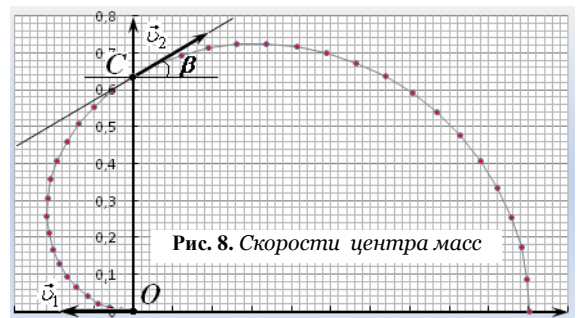


Рис. 8. Скорости центра масс

$$v_{2x} = -R \frac{\cos \alpha \cdot \alpha' (2\pi - \alpha) + \alpha' \cdot \sin \alpha}{(2\pi - \alpha)^2} \Big|_{\alpha=\pi} = \frac{\alpha' \cdot R}{\pi} = \frac{v}{\pi}, \quad (21)$$

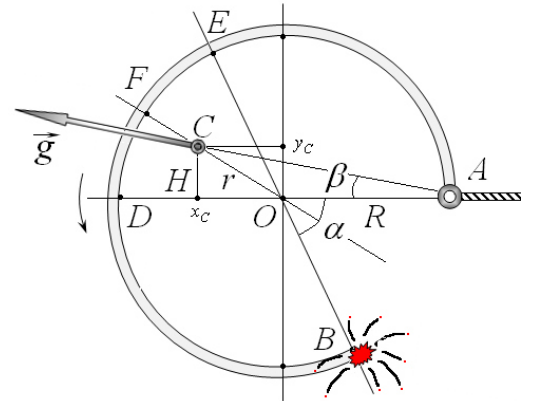
$$v_{2y} = 2R\alpha' \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sin(\alpha/2) + (2\pi - \alpha) \cdot \cos(\alpha/2)}{(2\pi - \alpha)^2} \Big|_{\alpha=\pi} = \frac{2\alpha' \cdot R}{\pi^2} = \frac{2v}{\pi^2}, \quad (22)$$

Полную скорость центра масс кольца найдем по теореме Пифагора

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = \frac{v}{\pi^2} \sqrt{4 + \pi^2} = 3,8 \frac{\text{мм}}{\text{с}}, \quad (23)$$

Для задания направления вектора  $\vec{v}_2$  вычислим угол  $\beta$ , который вектор составляет с «горизонтом»

$$\beta = \arctg\left(\frac{v_{2y}}{v_{2x}}\right) = \arctg\left(\frac{2}{\pi}\right) = 32^\circ. \quad (24)$$



В принципе этот же угол с неплохой точностью можно найти «по клеточкам» из Рис. 8, поскольку он определяется угловым коэффициентом касательной к графику в точке A.

Рис. 9. Поворот подвешенного кольца

**1.7** В процессе «медленного» горения кольцо будет плавно поворачиваться под действием моментов сил тяжести так, чтобы центр тяжести C неполного кольца и точка подвеса A находились на одной вертикали (рис. 9, повернут для удобства рассмотрения). Будем считать, что, несмотря на вращение, кольцо в любой момент времени находится в положении равновесия, а его угловым ускорением можно пренебречь (т.н. «квазистационарное приближение»).

На рисунке 9 вертикаль AC составляет искомый угол  $\beta$  с диаметром AD, причём

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{CH}{AH} = \frac{y_c}{R + x_c}. \quad (25)$$

С учётом равенств (11) и (12) получим

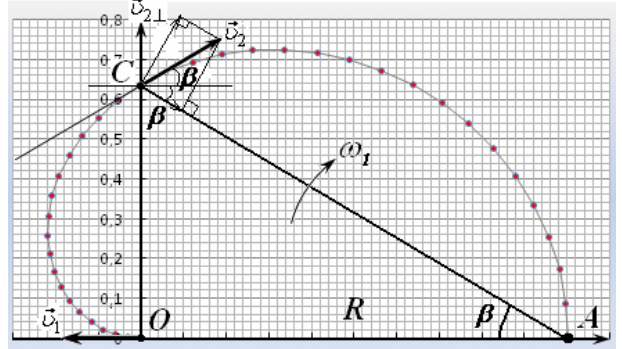
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2 \sin^2(\alpha/2)}{\sin \alpha + (2\pi - \alpha)} \Rightarrow \beta = \arctg\left(\frac{2 \sin^2(\alpha/2)}{\sin \alpha + (2\pi - \alpha)}\right). \quad (26)$$

Так как  $\omega = \frac{d\beta}{dt}$ , то для нахождения угловой скорости вращения кольца необходимо продифференцировать (26) по времени. Для дифференцирования сложной функции введем замену

$$\xi = \frac{2 \sin^2(\alpha/2)}{\sin \alpha + (2\pi - \alpha)}, \quad (27)$$

тогда результат дифференцирования (26) можно записать в виде

$$\omega = \frac{d\beta}{dt} = (\arctg(\xi))' = \frac{1}{1 + \xi^2} \cdot \xi', \quad (28)$$



где

$$\xi' = \frac{(1/2) \sin \alpha (\sin \alpha + (2\pi - \alpha)) - 2 \sin^2(\alpha/2) (\cos \alpha - 1)}{(\sin \alpha + (2\pi - \alpha))^2} \omega. \quad (29)$$

Подставляя (27) и (29) в (28) получаем окончательный ответ, запись которого представляется несколько громоздкой

$$\omega_1 = \frac{1}{1 + \left( \frac{2 \sin^2(\alpha/2)}{\sin \alpha + (2\pi - \alpha)} \right)^2} \cdot \xi'. \quad (30)$$

Для вычисления  $\omega_1$  подставим в (29) и (30) значение  $\alpha = \pi$ , тогда

$$\omega_1 = \frac{4\omega}{\pi^2 + 4} = \frac{4v}{(\pi^2 + 4)R} = 2,9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{рад}}{\text{с}} = 2,9 \frac{\text{мрад}}{\text{с}}. \quad (31)$$

Этот же результат можно получить и «хитрее», если заметить, что искомая угловая скорость  $\omega_1$  есть ни что иное, как угловая скорость вращения отрезка AC вокруг точки A на рисунке 10, следовательно

$$\omega_1 = \frac{v_{2\perp}}{AC} = \frac{v_2 \cos(\pi/2 - 2\beta)}{R / \cos \beta} = \{(23)\} = \frac{4v}{(4 + \pi^2)R}, \quad (32)$$

где  $\beta = \arctg(\frac{2}{\pi})$ , а  $v_{2\perp}$  – проекция скорости  $\vec{v}_2$  на нормаль к отрезку AC (см. рис. 10), «обеспечивающая» его поворот.

Как следует из (31) значение угловой скорости вращения кольца действительно мало по абсолютному значению, что делает вполне оправданным применение модели **Рис. 10. Вращение подвешенного кольца** квазистационарного приближения в данном случае.



Для «фанатов» дифференцирования заметим, что если взять производную от (28) по времени ещё раз, то можно найти угловое ускорение кольца при данных условия (предупреждаем: формула «не влезит» на страницу!), численное значение которого в рассматриваемых рамках также должно быть достаточно малым.

## Часть 2. «Электростатический огонь»

**2.1** В начальном состоянии напряженность электростатического поля в центре кольца (точке  $O$ ) равна нулю. По мере сгорания кольца уменьшается его длина, а, следовательно, и электрический заряд.

Рассмотрим положение огня (точки горения) через некоторый промежуток времени  $t$ , в течение которого выгорела дуга  $AB$  кольца (рис 11). В силу симметрии системы заметим, что теперь в центре кольца электростатическое поле определяется только участком  $DE$  кольца (выделен на рисунке), поскольку результирующее действие участков  $AE$  и  $BD$  кольца равно нулю.

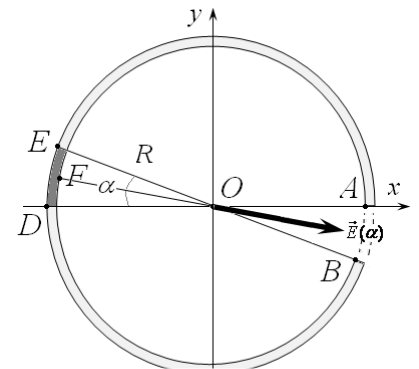


Рис. 11. Вычисление напряженности

Разобьём дугу на малые участки и просуммируем напряженности электростатического поля от каждого из них. При этом вектор результирующего поля  $\vec{E}(\alpha)$  будет направлен вдоль биссектрисы  $OF$  угла  $EOD$  (см. рис 11). Результат суммирования легко получить геометрически, если заметить, что модуль  $E(\alpha)$  искомого вектора  $\vec{E}(\alpha)$  пропорционален длине хорды  $DE$  (или  $AB$ )

$$DE = 2R \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad (33)$$

стягивающей дугу  $DE$  (на рисунке 11 не показана).

Действительно, согласно принципу суперпозиции электрических полей, искомое значение напряженности поля можно записать в виде суммы

$$E(\alpha) = \sum_i E_{ix} = \sum_i E_i \cos \alpha_i \quad (34)$$

где  $E_i = k \frac{q_i}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \Delta l_i}{R^2}$  – модуль напряженности электростатического поля, создаваемого элементарным зарядом  $q_i$  небольшого участка  $\Delta l_i$  кольца,  $\lambda = \frac{q}{2\pi R}$  – линейная плотность заряда кольца,  $\alpha_i$  – угол между

вектором  $\vec{E}_i$  и биссектрисой  $OF$  угла  $EOD$  (см. Рис 11), ось  $Ox$  направлена вдоль биссектрисы  $FO$ .

С учетом последних равенств, сумма (33) примет вид

$$E(\alpha) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sum_i \Delta l_i \cos \alpha_i = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R^2} DE = \{(1)\} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad (35)$$

Убедитесь самостоятельно, что сумма проекций элементарных участков дуги  $\sum_i \Delta l_i \cos \alpha_i$  дает длину стягивающей её хорды

$$\sum_i \Delta l_i \cos \alpha_i = DE = 2R \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Таким образом, окончательно получаем

$$E(\alpha) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{q}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (36)$$

Для удобства построения графиков будем использовать безразмерную величину

$$E^* = E(\alpha) / E_0, \text{ где } E_0 = \frac{q}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2}.$$

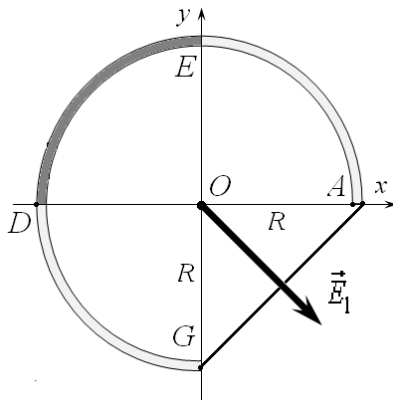
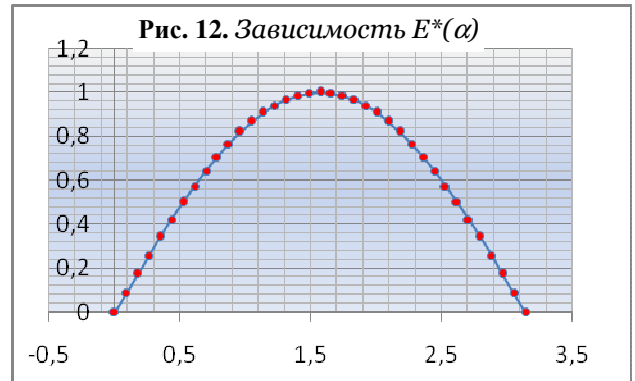


График полученной зависимости представлен на рисунке 12.



**2.2** С учетом того, что при горении кольца угол  $\alpha$  меняется от нуля до  $2\pi$ , приходим к выводу, что максимум функции  $E(\alpha)$  достигается при  $\alpha = \pi$ .

Следовательно, для  $E_{\max}$  можем записать

$$E_{\max} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{q}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} = E_0. \quad (37)$$

С учётом того, что поле от «трёх четвертей» кольца соответствует  $\alpha = \pi/2$ , можем получить, что в данном случае

$$E_{\max} = \sqrt{2}E_1 \Rightarrow \frac{E_{\max}}{E_1} = \sqrt{2} = 1,4. \quad (38)$$