

## Задание 1. Оптико-механическая аналогия.

Оптико-механическая аналогия - это сходство траектории движения частицы в потенциальном силовом поле с траекторией лучей в оптически неоднородной среде. Траектория материальной точки и траектория светового луча совпадают при определенном соответствии потенциальной энергии и переменного в пространстве показателя преломления среды. Этот

факт был теоретически открыт выдающимся ирландским математиком и физиком У. Р. Гамильтоном в 1834 году и уже в нашем столетии оказал влияние на установление связи между волновой оптикой и волновой (квантовой) механикой.

В данном задании вам предстоит рассмотреть два примера аналогия между оптикой и механикой.

### 1. Движение тела в поле тяжести.

Тело брошено с начальной скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha_0$  к вертикали вдоль горизонтальной поверхности. Сопротивлением воздуха пренебрегаем.

1.1 Запишите закон движения тела, т.е. зависимость его координат времени  $x(t)$ ,  $y(t)$ . Используйте систему координат, показанную на рисунке.

1.2 Запишите уравнение траектории движения тела  $y(x)$ .

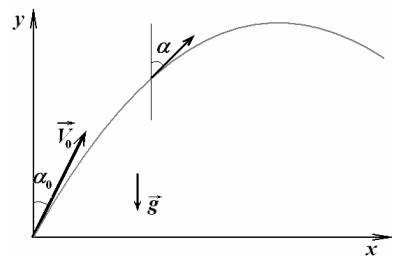
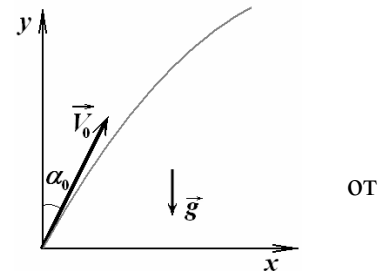
1.3 Определите дальность полета тела и максимальную высоту его подъема.

1.4 Покажите, что в любой точке траектории движения тела угол  $\alpha$ , который образует касательная с вертикалью, удовлетворяет условию

$$f(y) \sin \alpha = f_0 \sin \alpha_0, \quad (1)$$

где  $f(y)$  - некоторая функция вертикальной координаты  $y$ . Найдите эту функцию.

1.5 Предложите алгоритм построения траектории по произвольной известной зависимости угла  $\alpha(y)$  от вертикальной координаты  $y$ .



### 2. Луч света в слоисто-неоднородной среде.

Показатель преломления прозрачного бруска больших размеров плавно изменяется с высотой по закону

$$n = n_0 \sqrt{1 - \gamma y}, \quad (2)$$

где  $n_0, \gamma$  - известные постоянные величины. Луч света попадает на грань бруска в точке  $A$  и после преломления на ней образует угол  $\alpha$  с осью  $Oy$ . Система координат показана на рисунке.

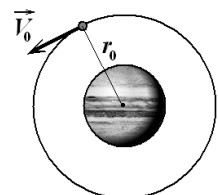


2.1 На какую максимальную глубину проникнет луч света в брусок?

2.2 На каком расстоянии от точки входа луч выйдет из бруска?

### 3. Круговая орбита.

Спутник движется с постоянной по модулю скоростью  $v_0$  по круговой орбите радиуса  $r_0$  вокруг планеты радиус, которой равен  $R$ . Ускорение свободного падения на поверхности планеты равно  $g$ .



3.1 Определите радиус орбиты спутника.

3.2 По неизвестной причине в некоторый момент времени направление

вектора скорости спутника изменилось на небольшой угол, при этом модуль скорости не изменился. При этом, очевидно, орбита стала эллиптической. Найдите зависимость модуля скорости спутника от его расстояния до центра планеты  $v(r)$ .

**Подсказка.** Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух точечных тел определяется по формуле

$$U = -G \frac{Mm}{r},$$

где  $M, m$  - массы тел,  $r$  - расстояние между телами,  $G$  - гравитационная постоянная.

**3.3** Найдите изменение модуля скорости спутника  $\Delta v$  при малом изменении его расстояния до центра планеты  $\Delta r$ .

**3.4** Покажите, что когда спутник находится на расстоянии  $r_0$  от центра планеты, выполняется соотношение

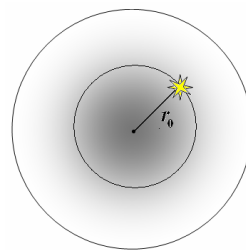
$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = -\frac{v}{r}. \quad (3)$$

#### **4. Луч света в осесимметричной неоднородной среде.**

Цилиндр изготовлен из прозрачного материала, но показатель преломления материала, из которого он изготовлен, медленно уменьшается с увеличением расстояния до его оси по закону

$$n(r) = n_0(1 - \gamma r), \quad (4)$$

где  $n_0, \gamma$  - известные постоянные величины.



На каком расстоянии от оси цилиндра надо произвести вспышку света, чтобы некоторые из световых лучей могли распространяться по окружности вокруг с центром на оси цилиндра?