Решения задач.

10 класс двенадцатилетней школы

Задание 10(12)-1. «Разминка»

1.1 Закон изменения вертикальной координаты камушка имеет вид

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \qquad (1)$$

Полагая координату равной высоте h, получим квадратное уравнение, для определения времени

$$\frac{gt^2}{2} - v_0 t \sin\alpha + h = 0. \qquad (2)$$

Дискриминант этого уравнения равен

$$D = (v_0 \sin\alpha)^2 - 2gh. \qquad (3)$$

Для высоты $h_1 = 2{,}5\ м$ его численное значение равно

$$D_1 = (v_0 \sin\alpha)^2 - 2gh_1 = (15 \cdot 0{,}5)^2 - 2 \cdot 9{,}8 \cdot 2{,}5 = 7{,}25 \frac{м^2}{c^2}.$$

Следовательно, уравнение (2) имеет два корня

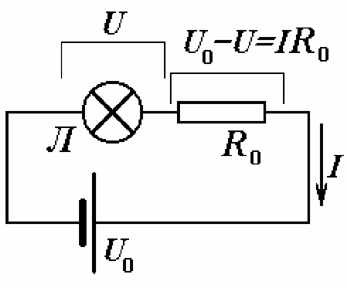
$$t_{1,2} = \frac{v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{D}}{g} = \frac{15 \cdot 0{,}5 \pm \sqrt{7{,}25}}{9{,}8} \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0{,}49 c; \quad t_2 = 1{,}0 c. \qquad (4)$$

Оба корня имеют физический смысл, так как камушек будет находиться на указанной высоте дважды – при подъеме и при спуске.
Для второго значения высоты $h_2 = 3{,}0\ м$ дискриминант квадратного уравнения (2)

$$D_2 = (v_0 \sin\alpha)^2 - 2gh_2 = (15 \cdot 0{,}5)^2 - 2 \cdot 9{,}8 \cdot 3{,}0 = -2{,}6 \frac{м^2}{c^2}$$

отрицательный, поэтому уравнение корней не имеет. Это означает, что камушек на эту высоту не поднимется.

1.2 Обозначим напряжение на лампочке U. Из формулы приведенной в условии $I = a\sqrt{U}$, следует, что это напряжение связано с искомой силой тока соотношением



$$U = \frac{1}{a^2} I^2. \qquad (1)$$

Напряжение на резисторе, по закону Ома, равно

$$U_R = IR_0. \qquad (2)$$

Сумма этих напряжений равна напряжению источника

$$\frac{1}{a^2} I^2 + IR_0 = U_0 \qquad (2)$$

Дискриминант этого квадратного уравнения

$$D = R_0^2 + 4\frac{U_0}{a^2} \qquad (3)$$

положительный, поэтому уравнение (2) имеет два корня

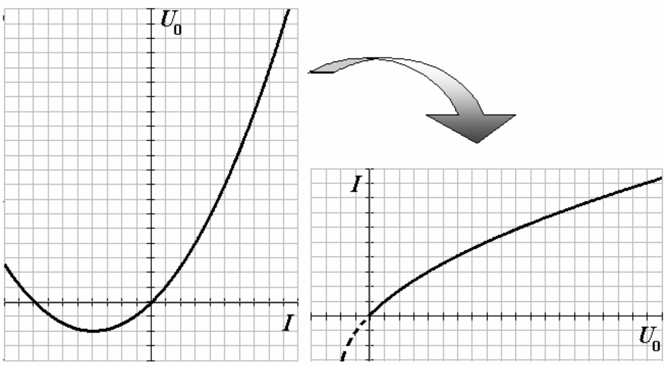
$$I = \frac{a^2}{2}\left(-R_0 \pm \sqrt{R_0^2 + 4\frac{U_0}{a^2}}\right).$$

Однако, отрицательный корень уравнения (2) смысла не имеет (ни математического – он появился при возведении исходной формулы в квадрат, ни физического), поэтому ответом данной задачи является формула

$$I = \frac{a^2}{2}\left(\sqrt{R_0^2 + 4\frac{U_0}{a^2}} - R_0\right). \qquad (4)$$

Заметим, что при $R_0 \to 0$, она переходит в формулу, приведенную в условии.

График полученной зависимости может быть построен на основании уравнения (2): зависимость $U_0(I)$ - изображается банальной параболой. Для получения обратной зависимости необходимо выбрать ее нужный участок, а затем его повернуть и отразить.



1.3 Крайне незначительная разность теплот возникает из-за разного понижения центра масс льда при его плавлении, из-за чего уменьшается потенциальная энергия воды. Эта энергия затрачивается на плавление льда.

Высота уровня воды (сначала в твердом, а затем в жидком состоянии) может быть найдена из очевидного выражения

$$m = \rho V = \rho S h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{m}{\rho S}.$$

Изменение высоты уровня при плавлении рассчитывается по формуле

$$\Delta h = \frac{m}{S}\left(\frac{1}{\rho_{льда}} - \frac{1}{\rho_{воды}}\right). \qquad (1)$$

Следовательно, уменьшение потенциальной энергии (и равное ей количество теплоты) при плавлении льда равно

$$Q = mg\Delta h = \frac{1}{2}\frac{m^2 g}{S}\left(\frac{1}{\rho_{льда}} - \frac{1}{\rho_{воды}}\right). \qquad (2)$$

Теперь видим, что эта теплота зависит от площади сосуда и в более узком сосуде она больше. Следовательно, искомая разность теплот равна

$$\delta Q = \frac{m^2 g}{2S}\left(\frac{1}{\rho_{льда}} - \frac{1}{\rho_{воды}}\right) - \frac{m^2 g}{4S}\left(\frac{1}{\rho_{льда}} - \frac{1}{\rho_{воды}}\right) = \frac{m^2 g}{4S}\left(\frac{1}{\rho_{льда}} - \frac{1}{\rho_{воды}}\right).$$