

**А. И. Слободянюк**

**ФИЗИКА ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ**  
**Электростатика**  
**Постоянный электрический ток**

*Пособие для учащихся учреждений  
общего среднего образования  
с русским языком обучения*

*Рекомендовано  
Научно-методическим учреждением  
«Национальный институт образования»  
Министерства образования Республики Беларусь*

Минск  
«Белорусская ассоциация «Конкурс»  
2015

УДК 53(075.3=161.1)

ББК 22.3я721

С48

**Рецензенты:**

кафедра методики преподавания физики учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка» (доктор технических наук, заведующий кафедрой *И. М. Елисеева*);

учитель физики высшей категории учреждения образования «Могилевский государственный областной лицей № 1» *В. В. Барашков*

Книга издана за счет взносов участников конкурсов

**Распространяется бесплатно**

**Слободянюк, А. И.**

- C48 Физика для любознательных. Электростатика. Постоянный электрический ток : пособие для учащихся учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / А. И. Слободянюк. – Минск : Белорус. ассоц. «Конкурс», 2015. – 336 с. : ил.

**ISBN 978-985-557-091-3.**

Данное издание посвящено подробному изложению раздела физики «Электростатика и теория постоянного электрического тока». Материал изложен на повышенном уровне, хотя и доступен пониманию учащихся, интересующихся физикой. Книга содержит целый ряд исторических сведений, касающихся ученых-физиков и их открытий.

Книга может помочь при подготовке к различным физическим олимпиадам – от школьных до международных – и предназначена для учащихся учреждений общего среднего образования, а также может быть полезна учителям и родителям.

**УДК 53(075.3=161.1)**

**ББК 22.3я721**

**ISBN 978-985-557-091-3**

© Слободянюк А. И., 2015

© Оформление. ОО «БА «Конкурс», 2015

## § 1. Электростатические взаимодействия. Электрический заряд. Закон Кулона

В большинстве учебников физики данный раздел начинается с банальной фразы: «Еще древние греки заметили, что палочка янтаря, потертая шерстью, притягивает мелкие предметы: перышки, кусочки коры и т.д.» Действительно, в жизни нам приходится встречаться с особым видом взаимодействий тел – электрическими взаимодействиями.\*

Внутренняя природа этих взаимодействий не известна до сих пор, поэтому нам остается только признать объективную реальность: некоторые тела обладают способностью взаимодействовать друг с другом так же, как «кусочки янтаря, потерянные шерстью».

Безусловно, со времен Древней Греции наши знания об окружающем мире невероятно расширились. Мы знаем, что все тела состоят из молекул, молекулы состоят из атомов, атомы состоят из электронов и ядер, ядра состоят из протонов и нейтронов, протоны и нейтроны состоят из... Впрочем, на этом пока можно остановиться: мы и так уже вернулись к электрону, но не к «кусочку янтаря», а к мельчайшей элементарной частице, способной взаимодействовать с некоторыми другими частицами так же, как «кусочки янтаря, потерянные шерстью».

---

\* Напомним, что термин «электричество» происходит от греческого названия янтаря – «электрон».

## 1.1 Два вида электрических зарядов

Если некоторые частицы (или тела) обладают способностью принимать участие в электрических взаимодействиях, то имеет смысл приписать им некоторую характеристику, которая и будет указывать на это их свойство. Такая характеристика получила название электрический заряд. Тела, принимающие участие в электрических взаимодействиях, называются заряженными. Таким образом, термин «электрически заряженный» является синонимом выражения «участвует в электрических взаимодействиях». Почему некоторые элементарные частицы обладают электрическим зарядом, а другие нет – никому не известно!

Дальнейшие рассуждения, основанные на экспериментальных данных, призваны конкретизировать эту характеристику, по возможности, сделать ее количественной.

Далее мы опишем ряд простых опытов, которые можно провести дома, «на кухне», или в школьной лаборатории. При их объяснении мы будем пользоваться теми знаниями, которые получены многими учеными в течение нескольких сотен лет, в результате многочисленных и разнообразных экспериментов. Сейчас мы воспроизведем в очень упрощенной форме некоторые этапы экспериментальных исследований, выводы из которых послужили основой современной теории электрических взаимодействий.

Для проведения экспериментов, прежде всего, следует научиться получать заряженные тела.

**Простейший метод достижения этой цели – электризация трением.** Например, хорошо электризуется, то есть приобретает электрический заряд, стекло, если его потереть шелком. Появление электрического заряда проявляется в том, что такая стеклянная палочка начинает притягивать кусочки бумаги, волоски, пылинки и т.д.

Так же можно установить, что многие другие вещества тоже электризуются посредством трения. Зная результат заранее, в качестве второго «источника» электричества выберем эбонитовую палочку, потертую шерстью. Назовем электрический заряд, который появляется на стекле, «стеклянным», а заряд на эбоните «смоляным».



Рис. 1

Шарль Франсуа Дюфе (Charles François de Cisternay du Fay; 1698–1739) – французский учёный, физик, член Парижской Академии наук (рис. 1).

Дюфе добился наибольших успехов в систематизации сведений по электрическим эффектам. Он составил программу для изучения электрических явлений и в результате открыл два рода электрического заряда: «стеклянный» и «смоляной» (сейчас их называют положительным и отрицательным); первым исследовал электрические взаимодействия и доказал,

что одноименно наэлектризованные тела отталкиваются друг от друга, а разноименно – притягиваются. В своих экспериментах Дюфе пользовался уже не электроскопом, а электрометром, позволяющим измерить величину заряда. Для обнаружения и примитивного измерения электриче-

ства он пользовался версором Гильберта, сделав его намного более чувствительным. Первый наэлектризовал тело человека и «получил» из него электрические искры. Впервые высказал мысль об электрической природе молнии и грома (1735). Исследовал магнитные явления, фосфоресценцию, двойное лучепреломление в кристаллах.

Далее нам необходим «прибор», который мог бы реагировать на присутствие электрического заряда. Для этого подвесим на нити легкий стаканчик, скрученный из кусочка фольги. Легко проверить, что этот стаканчик не заряжен – что бы мы ни подносили к нему: карандаш, руку, учебник физики и т.д., никакого действия на стаканчик не проявляется.

Поднесем к незаряженному стаканчику заряженную стеклянную электрическую палочку (рис. 2). Стаканчик притягивается к ней, как и другие мелкие тела. По углу отклонения нити (при известной массе стаканчика и длине нити) можно даже рассчитать силу притяжения. Если стаканчик не соприкоснулся с заряженной палочкой, он остается незаряженным, что легко можно проверить экспериментально. Если же стаканчик прикоснется к заряженной палочке, то он резко



Рис. 2

оттолкнется от нее. Если теперь убрать палочку, стаканчик окажется заряженным, что можно проверить, если поднести к нему другое незаряженное тело. Например, он будет притягиваться к поднесенной руке.

Аналогичные результаты получаются, если заменить стеклянную палочку, потертую о шелк, эbonитовой палочкой, потертой о шерсть.

Таким образом, в этих экспериментах различие между «стеклянным» и «смоляным» электричеством не проявляется.

Не будем пока обсуждать, почему незаряженный стаканчик притягивается к заряженной палочке, а заряженный стаканчик притягивается к незаряженной руке. Единственный вывод, который мы сделаем из проведенного эксперимента, – в результате контакта стаканчик приобрел электрический заряд. Следовательно, электрический заряд может передаваться от одного тела к другому.

Возьмем два одинаковых стаканчика из фольги, подвесим их рядом на нитях одинаковой дли-

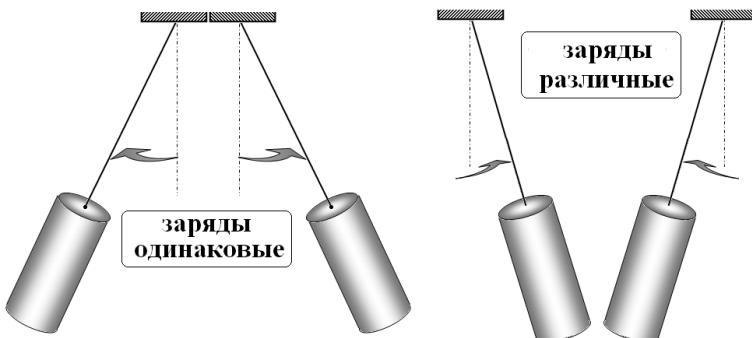


Рис. 3

ны. Если стаканчики зарядить одинаково (либо с помощью стеклянной, либо с помощью эbonитовой палочки), то стаканчики отталкиваются (рис. 3). Если же стаканчики заряжены различными зарядами, то они притягиваются.

Таким образом, мы доказываем, что существует, по меньшей мере, **два вида электрических зарядов**.

Для дальнейших экспериментов заменим «измерительные стаканчики» более совершенным прибором, который называется **электрометр** (рис. 4–5). Прибор состоит из металлического стержня и легкой металлической стрелки, которая может вращаться вокруг горизонтальной оси. Это устройство помещено в металлический корпус, закрытый стеклянными крышками. Угол отклонения стрелки можно измерять с помощью шкалы. Стержень со стрелкой закреплен в корпусе с помощью плексигласовой втулки. Стержень со стрелкой играют ту же роль, что и стаканчики из фольги в предыдущих опытах: при прикосновении заряженного тела



Рис. 4

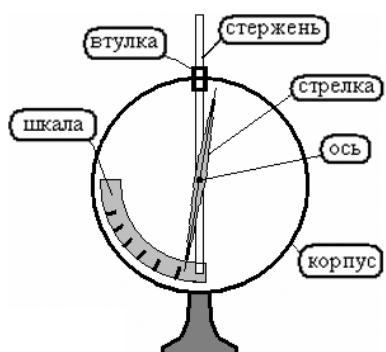


Рис. 5

к стержню заряд будет перетекать на стержень и на стрелку, что приведет к ее отклонению. Причем направление отклонения стрелки не зависит от вида сообщенного заряда.

Для дальнейших экспериментов будем использовать два одинаковых электрометра. Зарядим один из них с помощью, например, стеклянной палочки. Далее начнем соединять стержни электрометров с помощью различных материалов. При соединении стержней с помощью деревянной, незаряженных стеклянной, эbonитовой, пластмассовых палочек, текстильных нитей никаких изменений не происходит: один электрометр остается заряженным, второй незаряженным. Если же соединить стержни с помощью металлической\* проволоки, то оказываются заряженными оба электрометра. Причем отклонение стрелки первоначально заряженного электрометра уменьшится (рис. 6).

Из результатов этого опыта можно сделать два

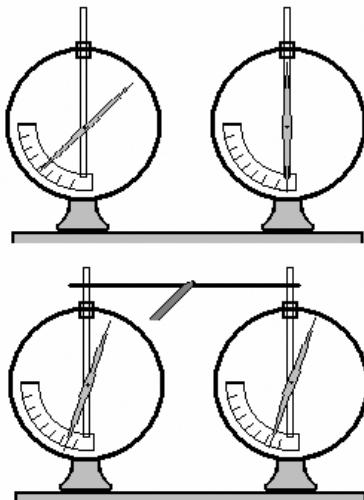


Рис. 6

\* При проведении этого эксперимента к металлической проволоке нельзя прикасаться голыми руками, иначе электрометр сразу разряжается. Поэтому лучше использовать металлический стержень на деревянной или пластмассовой ручке.

важных вывода: во-первых, некоторые материалы (металлы) могут передавать электрический заряд, другие (стекло, пластмасса, дерево) – нет; во-вторых, заряд может изменяться, быть больше или меньше. Эти же эксперименты можно повторить с использованием второго вида («смоляного») электричества. Результаты окажутся такими же: материалы, которые проводят «стеклянное» электричество, проводят и «смоляное». Если «стеклянный» заряд перераспределяется между электрометрами, то так же себя ведет и «смоляной» заряд.

Итак, мы можем разделить материалы на две группы – те, которые передают электрический заряд (эти материалы назвали **проводники**), и те, которые не передают электрический заряд (их назвали **изоляторы**). Кстати, стержень электрометра отделен от корпуса с помощью втулки из изолятора, чтобы электрический заряд не «растекался» по корпусу, а оставался на стержне и стрелке.

Различные отклонения стрелки электрометра однозначно свидетельствуют о том, что сила взаимодействия между заряженными телами может быть различной, поэтому и величины зарядов могут быть различными. Следовательно, заряд можно характеризовать некоторой численной величиной (а не так, как мы говорили ранее, – «есть» или «нет»).

Еще один интересный результат: если к стержню заряженного электрометра прикоснуться рукой, то электрометр разряжается – заряд исчезает. Даже на основании этих качественных наблюдений можно объяснить, куда исчезает заряд

при прикосновении руки. Человеческое тело является проводником, поэтому заряд может перетечь в тело человека.

Для подтверждения этой идеи о количественном характере заряда можно провести следующий опыт. Зарядим один электрометр, заметим угол отклонения стрелки. Соединим его со вторым электрометром – угол отклонения стрелки заметно уменьшится. Уберем контакт между приборами и рукой разрядим второй электрометр, после чего опять соединим электрометры – отклонение стрелки опять уменьшится. Таким образом, электрический заряд можно делить на части. Можно провести и обратный эксперимент, постепенно добавляя заряд электрометру.

«Смешаем» сейчас два имеющихся вида электричества. Для этого зарядим один электрометр «стеклянным» электричеством, а второй – «смоляным», стараясь, чтобы начальные отклонения стрелок обоих электрометров были примерно одинаковыми (рис. 7). После этого соединим стержни электрометров металлической проволокой на изолирующей ручке, чтобы заряды не «убежали». Результат этого опыта может вызвать удивление: оба

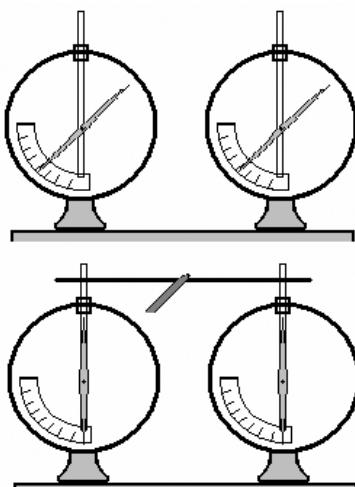


Рис. 7

электрометра разрядились, то есть «стеклянное» и «смоляное» электричество нейтрализовали, скомпенсировали друг друга. Следовательно, оказывается возможным приписать различным видам заряда различные алгебраические знаки: один заряд назвать положительным, второй – отрицательным. Разумно предположить, что сила взаимодействия зависит от суммарного заряда. Если первоначально электрометры зарядить разными видами электричества, но в разной степени (отклонения стрелок различны), а потом их соединить, то произойдет лишь частичная компенсация зарядов – стрелки будут отклонены, но в гораздо меньшей степени.

Исторически сложилось, что положительным назвали «стеклянный» заряд, а «смоляной» заряд стал отрицательным\*.

Описанный нами прибор, электрометр, позволяет лишь качественно судить о величине зарядов, проводить с ним количественные измерения невозможно. Попробуйте, например, поднести к заряженному электрометру руку (не прикасаясь к стержню) – отклонение стрелки увеличится! Поднесите к незаряженному стержню заряженную палочку, не прикасаясь к стержню, – стрелка отклонится, хотя электрометр не заряжен. К объяснению этих фактов мы вернемся позднее.

---

\* «Смоляное» электричество ничем не хуже «стеклянного», выбор знака – чистая условность. К слову, один из полюсов магнита мы до сих пор называем «северным», а второй «южным» – то есть обходимся без положительного и отрицательного магнетизма.

## *Немного истории...*

XVII–XVIII века были временем чрезвычайно быстрого развития учения о явлениях, которые в настоящее время называются электростатическими. Особую известность во второй половине XVII в. получил прибор, построенный Отто фон Герике\*. Установка Герике представляла собой шар из серы «величиной с детскую голову», насаженный на ось и приводимый во вращение (рис. 8). Натирание шара производилось ладонями рук, Герике удалось заметить слабое свечение наэлектризованного шара в темноте и, что особенно важно, впервые обнаружить явление электрического отталкивания.

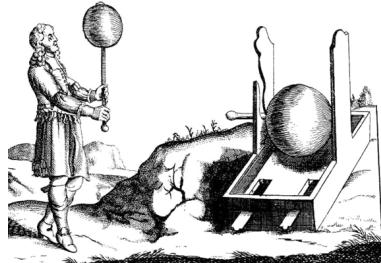


Рис. 8

Опыты Герике с серным шаром нашли свое дальнейшее продолжение и развитие. В 1709 году англичанин Хауксби построил электростатическую машину, заменив серный шар стеклянным, так как стекло электризовалось более интенсивно. В 1744 году было предложено применять для натирания шара кожаные подушечки, прижимаемые пружинами к стеклу. В этом же году был изобретен кондуктор для собирания электрических зарядов. Несколько позднее в электростатических машинах трения стеклянный шар был заменен цилиндром для увеличения натираемой поверхности.

В 1755 году была построена первая электростатическая машина со стеклянным диском (рис. 9); последний был более надежным, чем шар или цилиндр, и прост в изготовлении. Кроме того, для съема заряда вместо проводящих нитей были применены специальные гребенки, а поверхность

\* Да, тот самый знаменитый губернатор Магдебурга, прославившийся своими опытами по демонстрации атмосферного давления!

подушечек стали покрывать амальгамой, что значительно усиливало электризацию. Самая большая дисковая электростатическая машина была построена в Англии в XIX в.: диаметр ее двух дисков достигал 2,27 м, и вращение их производилось паровой машиной.

Последовали многочисленные эксперименты с электричеством. Опыты с электричеством стали общедоступными, дешевыми и весьма развлекательными.

Этим воспользовался Стивен Грей (1670–1735), проводивший эксперименты, вероятно, для заполнения своего досуга в те последние годы, когда он уже отошел от дел. Он показал, что электричество может распространяться по некоторым телам, и ввел, таким образом, в науку понятие проводника и изолятора, если воспользоваться терминами, введенными несколькими годами позже Жаном Теофилем Дезагюлье (1683–1744). Грей открыл также явление электростатической индукции и подтвердил его многочисленными опытами, из которых наибольшее восхищение вызвал опыт с ребенком, которого подвешивали горизонтально на веревках и наэлектризовывали приближением заряженной стеклянной палочки к его ногам.

Сеансы демонстрации электрических явлений проводились почти повсюду: на площадях и при королевских дворах – учеными и фокусниками, нашедшими в них еще один способ заработка.

На рисунке 10 показан один из таких опытов. Вращающийся стеклянный шар G электризуется от прикосновения рук. Человек, стоящий на изолирующей скамейке, дотрагивается до железного стержня, держа в руке миску с подогретым винным спиртом, который вспыхивает от искры, исходящей из руки дамы.

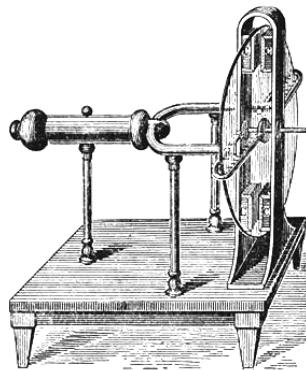


Рис. 9

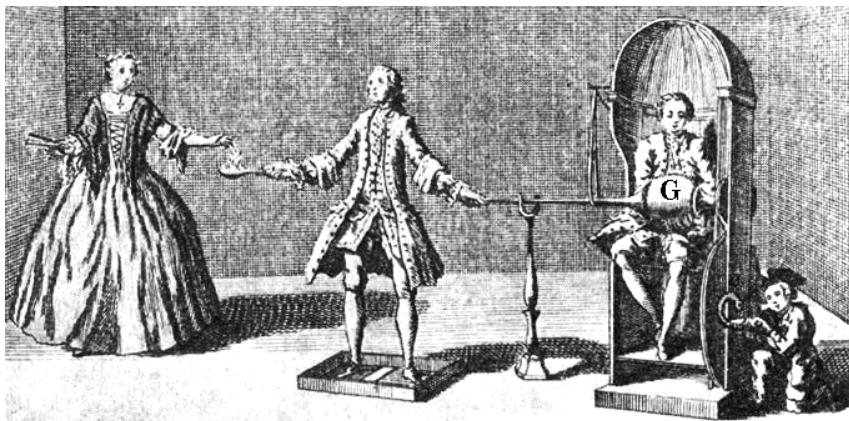


Рис. 10

Интерес публики привлек к исследованию этих новых явлений большое число ученых, несмотря на насмешки многих скептиков, которые, осуждая, вновь и вновь ставили обычный вопрос: зачем это нужно?

К новым исследованиям обратились не только физики, но и медики. В Венеции, в Турине, в Болонье были предприняты первые попытки применения электричества в медицине.

Результатом такой популяризации электрических опытов было открытие явления, реализуемого в «лейденской банке», как ее назвал французский физик Жан Нолле (1700-1770). В 1745 г. немецкий каноник Эвальд Юрген фон Клейст, пытаясь, по-видимому, изготовить электризованную воду, которая считалась полезной для здоровья, и независимо от него лейденский физик Мушенбрек, продев в горлышико банки с водой гвоздь, дотронулись им до проводника действующей электрической машины; затем, прервав контакт, они притронулись другой рукой к гвоздю и испытали очень сильный удар, вызвавший онемение руки и плеча, а у Мушенбрека даже «все тело содрогнулось, как от молнии».

Весть об этом опыте быстро распространилась. Его стали повторять во многих местах. Серия опытов Нолле нача-

лась с опыта по «содроганию» целой цепи державшихся за руки монахов в картезианском монастыре в Париже. Затем он начал опыты на птицах (рис. 11), пользуясь простым, но полезным приспособлением – разрядником, применяющимся вплоть до наших дней. Нолле, который всегда следил за модой и стремился к театральным эффектам (его публичные опыты были настоящими представлениями для парижского света), убил с помощью разряда несколько птичек, после чего призывал обращаться с осторожностью с этой новой вещью, которая «может оживать и раздражаться».



Рис. 11

## 1.2 Закон Кулона

Для количественного изучения электрических зарядов и электрических взаимодействий потребуются более точные измерительные приборы.

Такие измерения были впервые проведены французским физиком Шарлем Кулоном в 1785 году. Чтобы исключить влияние размеров и формы взаимодействующих тел на силу электрического взаимодействия, Ш. Кулон исследовал взаимодействие малых шариков, размеры которых значительно меньше расстояния между ними. Как мы знаем, для описания таких тел используется мо-

дель материальной точки, только в данном случае материальная точка наделяется еще одной характеристикой – электрическим зарядом  $q$ . Такую модель – заряженную материальную точку – называют **точечным зарядом**. Часто точечное заряженное тело называют кратко – *заряд*.

Кроме того, закон взаимодействия заряженных тел имеет наиболее простой вид для неподвижных тел. Раздел физики, изучающий взаимодействие неподвижных заряженных тел, называется **электростатикой**, а силы взаимодействия – **электростатическими**.

Ш. Кулон сконструировал и создал специальный прибор (рис. 12), позволивший экспериментально открыть основной закон взаимодействия заряженных тел. Принципиальная схема прибора Ш. Кулона показана на рис. 13. На очень тонкой серебряной нити 1 подвешен тонкий легкий непроводящий стержень 2 (играющий также роль стрелки), на одном конце которого закреплен маленький шарик 3, а на другом – противовес 4. Верхний конец нити закреплен на вращающейся головке прибора 5, угол поворота которой можно точно отсчитывать. Внутри прибора имеется еще

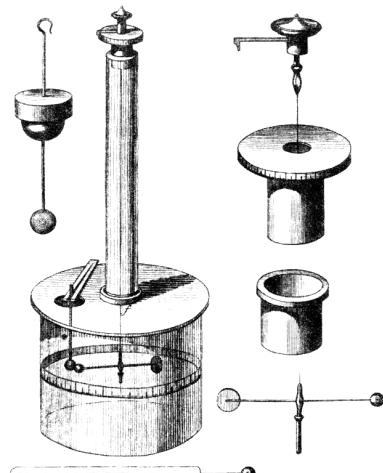


Рис. 12

один шарик 6 такого же размера, укрепленный на изолирующей подставке 7. Все эти части помещены в стеклянный цилиндрический сосуд, чтобы предохранить шарики от движения воздуха. Это прибор получил название *крутильные весы*. Обратите внимание, что принципиально крутильные весы Кулона не отличаются от наших «стаканчиков» из фольги, подвешенных на нитях.

Первоначально Ш. Кулон очень тщательно измерил зависимость угла закручивания серебряной нити от приложенного к ней момента сил. Зная длину стрелки и измеряя угол закручивания нити, можно с высокой точностью измерять силу, действующую на шарик, расположенный на стержне. Для уточнения результатов Ш. Кулон также измерял периоды колебаний стержня при различных средних расстояниях между шариками 3 и 4. Период таких колебаний зависит от силы электростатического взаимодействия. В результате проведенных опытов Ш. Кулон установил, что при неизменных зарядах на шариках сила взаимодействия между ними обратно пропорциональна квадрату расстояния между центрами шариков  $F \sim \frac{1}{r^2}$ .

Более сложная задача – исследовать зависимость силы взаимодействия от величины зарядов

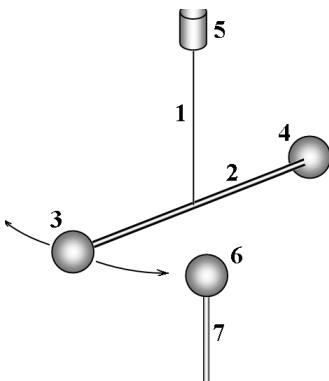


Рис. 13

шариков, тем более что единицы измерения заряда во время проведения этих экспериментов еще не существовало. Ш. Кулон применил оригинальную идею. Сначала оба шарика заряжаются, при этом стрелка весов поворачивается на некоторый угол. Используя вращающуюся головку на конце нити, можно установить шарики на известном определенном расстоянии. После этого к одному шарику (проще – к неподвижному) надо прикоснуться точно таким же шариком. Так как шарики одинаковы, то разумно предположить, что заряд равномерно распределится между ними. Таким способом можно уменьшить заряд шарика ровно в два раза. При уменьшении заряда угол закручивания нити уменьшится. С помощью вращающейся головки стрелку можно вернуть в исходное положение. По измеренному новому значению угла закручивания нити можно определить, как изменилась сила взаимодействия при неизменном расстоянии между телами. Процедуру деления заряда как одного, так и второго шарика можно продолжить. В результате проведенных измерений Ш. Кулон пришел к выводу, что сила взаимодействия прямо пропорциональна зарядам шариков. Аналогичные результаты были получены, если заряды шариков противоположны, только в этом случае отталкивание сменялось притяжением.

В результате проведенных опытов Ш. Кулон сформулировал закон взаимодействия, который носит его имя:

**Два неподвижных точечных заряда в вакууме взаимодействуют с силой, пропорциональной произведению зарядов, обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними и направленной вдоль прямой, соединяющей эти тела.**

Дадим несколько комментариев к приведенной формулировке:

– приведенный закон справедлив для точечных тел, размеры которых значительно меньше расстояния между ними;

– если заряженные тела находятся в некоторой среде, то сила электрического взаимодействия изменяется, поэтому указание о вакууме является обязательным;

– сила является векторной величиной, поэтому в законе, определяющем силу, обязательно упоминание о направлении действия силы; как установлено Ш. Кулоном, электростатические силы являются центральными.

Сила электростатического взаимодействия может быть записана в виде

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (1)$$

где  $q_1, q_2$  – заряды тел,  $r$  – расстояние между ними,  $k$  – не определенный пока коэффициент пропорциональности.

Этот же закон в векторной форме имеет вид

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}|} \vec{r}_{12}, \quad (2)$$

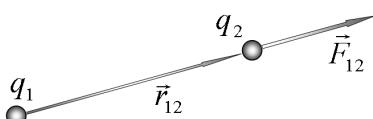


Рис. 14

здесь  $\vec{F}_{21}$  – сила, действующая на второе тело со стороны первого,  $\vec{r}_{12}$  – вектор, проведенный от первого тела ко второму (рис. 14).

В векторной формулировке автоматически учтено направление действующей силы: если знаки зарядов одинаковы, то заряды отталкиваются, если знаки зарядов различны, то тела притягиваются (вектор  $\vec{F}_{21}$  направлен противоположно вектору  $\vec{r}_{12}$ ). Отметим также, что электростатические силы удовлетворяют третьему закону Ньютона  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ .

Как видите, математическая формулировка закона электростатических взаимодействий Ш. Кулона практически полностью совпадает с законом всемирного тяготения И. Ньютона. Возможно, такое совпадение не является случайным, а связано со свойствами трехмерного пространства, в котором мы живем. Единственное различие в этих законах заключается в том, что гравитационное взаимодействие всегда проявляется как притяжение тел, а электрически заряженные тела могут как притягиваться, так и отталкиваться.

Шарль Кулон (рис. 15) родился в Ангулеме 14 июня 1736 года. Учился Шарль Огюстен Кулон в Париже, в Колледже четырех наций (Колледж Мазарини), потом переехал в Монпелье, к отцу. Двоюродный брат отца Шарля знал многих членов Королевского научного общества, и в феврале 1757 Кулон прочитал свою первую научную ра-

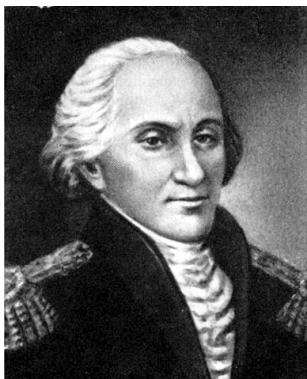


Рис. 15

боту «Геометрический очерк среднепропорциональных кривых» на заседании этого общества. Вскоре Шарля Кулона избрали адъюнктом по классу математики. В феврале 1760 года Шарль Огюстен Кулон поступил в Мезьерскую школу военных инженеров, которую окончил в ноябре 1761 года, получив назначение в порт на западном побережье Франции – Брест. Чуть позже Кулон попал на Мартинику. Благодаря успехам в строительстве форта на Монт-Гарнье он стал капитаном в марте 1770 года. В 1773 году Шарль Кулон представил свою работу в Парижскую академию наук. В 1774 году Шарля Огюстена перевели в порт Шербур. В этот момент Кулон занимался поиском метода изготовления магнитных стрелок для точных измерений магнитного поля Земли.

В 1784 году Шарль Огюстен Кулон завершил написание работы «Теоретические и экспериментальные исследования силы кручения и упругости металлических проволок». В сентябре 1781 года Кулона перевели в Париж. 12 декабря 1781 года Шарля Кулона избрали в академию по классу механики. Проведя множество опытов для изучения трения, Кулон исследовал зависимость трения скольжения от относительной скорости соприкасающихся тел с использованием больших нагрузок. Его работа «Теория простых машин» использовалась инженерами почти целое столетие. В 1790 году Шарль Кулон представил в академию работу «О трении в острие опоры», в которой он исследовал трение, возникающее при вращении. В 1800 году Шарль Огюстен Кулон написал работу «Опыты, посвященные определению сцепления жидкостей и закона их сопротивления при очень медленных движениях».

Когда Шарль Кулон разработал крутильные весы\*, он решил найти им применение, для чего занялся проблемами магнетизма и электричества. Шарль Кулон установил основной закон электростатики – закон взаимодействия точечных зарядов, определив, что сила отталкивания наэлектризованных шариков обратно пропорциональна квадрату расстояния между их центрами. Еще одним законом, обнаруженным Шарлем Огюстеном, явилось экспоненциальное убывание заряда с течением времени. Благодаря экспериментам Шарля Кулона с крутильными весами, ученые смогли определять заряд через величины механики: расстояние и силу. Это позволило проводить количественные эксперименты.

В декабре 1790 года Кулон подал прошение об отставке, которое удовлетворили в апреле следующего года. Ему назначили пенсию размером 2240 ливров в год. В конце 1795 года Шарль Кулон из-за обострения политической ситуации в Париже перебрался в деревню. Кулон возвратился в Париж после того, как его избрали постоянным членом отделения экспериментальной физики Института Франции – национальной академии. В последние годы жизни Шарль Кулон занимался организацией системы образования во Франции. Но в результате частых поездок по стране ученый заболел летом 1806 года лихорадкой.

23 августа 1806 года Шарль Кулон умер.

В честь Шарля Огюстена Кулона названа единица электрического заряда в системе СИ.

---

\* Заслуживает особого внимания и уважения громадная «предварительная» работа, приведшая Кулона к созданию крутильных весов: исследование кручения, трения (вспомните: закон для силы трения также носит имя Ш. Кулона), сопротивление жидкостей!



Рис. 16

## *Немного истории...*

Закон взаимодействия заряженных тел по праву носит имя французского ученого Шарля Кулона. Однако первооткрывателем этого закона является английский физик и химик Генри Кавендиш. Правда, о выдающихся достижениях Г. Кавендиша мир узнал только спустя полстолетия после его смерти.

Энциклопедии и справочники, как правило, дают скучную информацию об этом незаурядном человеке и ученом.

**Генри Кавендиш** (Henry Cavendish; 1731 – 1810) – знаменитый британский физик и химик, член Лондонского королевского общества с 1760 года.

Генри Кавендиш родился 10 октября 1731 в Ницце в семье лорда Чарльза Кавендиша, герцога Девонширского, и леди Анн Грей. Учился в Кембриджском университете в 1749–1753 годах, но не закончил обучение. Унаследовав крупное состояние, он тратил почти все доходы на проведение экспериментов.

В 1766 году Кавендиш опубликовал первую важную работу по химии – «Искусственный воздух», где сообщалось об открытии «горючего воздуха» (водорода). Выделил в чистом виде углекислый газ и водород, установил основной состав воздуха как смесь азота и кислорода. Экспериментально установил влияние среды на емкость конденсаторов и определил значение диэлектрических постоянных ряда веществ.

В 1798 сконструировал крутильные весы и измерил с их помощью силу притяжения двух сфер, подтвердив закон всемирного тяготения; определил гравитационную постоянную, массу и среднюю плотность Земли.

Занимался определениями теплоты фазовых переходов и удельной теплоемкости различных веществ.

Предвосхитил многие изобретения XIX века в области электричества, но все его работы остались достоянием семейного архива в Девоншире, пока в 1879 Джеймс Максвелл не опубликовал его избранные труды.

Умер в Лондоне 24 февраля 1810 года.

Завещание ученого содержало категорическое требование, чтобы склеп с его гробом сразу после похорон был наглухо замурован, а снаружи не было никаких надписей, указывающих, кто в этом склепе похоронен. Так и было сделано. Кавендиша похоронили 12 марта 1810 года в соборе в Дерби. Ни осмотра тела, ни вскрытия трупа не производили. И ни одного достоверного портрета Кавендиша тоже не сохранилось.

Распространено мнение, что всемирно известная Кавендишевская лаборатория названа в честь Генри Кавендиша.

Кавендишевская лаборатория... Год основания – 1869-й. Год формального открытия – 1874-й. Многозначительно уже само название физической лаборатории: оно имеет двойное происхождение.

Канцлерами Кембриджского университета всегда были влиятельные лица с громкими именами. Они не руководили университетом. Они ему покровительствовали. Для истории науки совершенно безразлично, по каким мотивам в 1869 г. канцлер университета, седьмой герцог Девонширский, решил помочь процветанию физических исследований в Кембридже. Важно, что он не только благословил создание новой лаборатории и кафедры по физике, но и дал нужные для дела деньги. А родовое имя герцогов Девонширских было Кавендиш.

Однако столь же верно, что новая лаборатория и новая кафедра получили название кавендишевских в честь Генри Кавендиша – замечательного ученого и человека странных обыкновений. Обе версии, казалось бы несовместимые, очень просто сливаются в одну: Генри Кавендиш принадлежал к тому же старинному роду, что и канцлер Кембриджского университета.

Он отдал почти сорок лет своей одинокой и сосредоточенной жизни исследованию электрических явлений. Но результаты и методы этих исследований оставались неизвестными: Кембриджская библиотека хранила двадцать

пачек неразобранных рукописей Кавендиша. Между тем было сказано о нем: «Руки мастера, руководимые гениальной головой». Его архив мог таить самые неожиданные откровения.

После того как Вильям Томсон и Герман Гельмгольц – два крупнейших европейских авторитета в физике той поры – не смогли принять предложение переехать в Кембридж, на пост директора создаваемой лаборатории был приглашен сорокалетний, но уже достаточно знаменитый автор «непонятной» теории электромагнитного поля. Джеймс Клерк Максвелл стал первым кавендишевским профессором. И через два года он принялся за неопубликованное наследие Генри Кавендиша, добровольно сделавшись текстологом, редактором и даже переписчиком чужих неразборчивых рукописей. Максвелл решил повторить весь путь его математических и лабораторных исследований. Он переписал от руки манускрипты Кавендиша и заново провел его опыты! Выяснилось:

- за 12 лет до Шарля Кулона лондонский отшельник установил с высокой степенью точности кулоновский закон взаимодействия электрических зарядов;
- за 65 лет до Фарадея он открыл влияние среды на течение электрических процессов, в ней совершающихся;
- задолго до Фарадея он пришел к отрицанию *actio in distans* – «действия на расстоянии» – действия через пустоту.

Максвелл был поражен отважной изобретательностью Генри Кавендиша, когда установил, что для определения силы тока тот пользовался собственным телом как гальванометром. О величине тока Кавендиш научился судить по относительной силе удара, который сотрясал его при замыкании собою электрической цепи. Рассказ об этом вызывал удивление у всех. Самоотверженные посетители лаборатории просили Максвелла проверить, могут ли и они служить хорошими гальванометрами, и он с улыбкой подвергал их этому испытанию.

Исполнив до конца благочестивый долг кавендишевского профессора, Максвелл в 1879 г. издал неопубликованные работы гениального молчальника. Они вышли под название «Электрические исследования достопочтенного Генри Кавендиша». Это звучало возвыщенно и старомодно.

Генри Кавендиш и человеком был неожиданным, сохранилось много историй о нем. В изустных рассказах, чаще всего немножко анекдотических или похожих на притчи, оживают выразительные образы ушедших. Даже когда этим рассказам недостает точности документа, в них есть нечто большее – достоверность молвы, отражающей отношение современников к тем, кого уже нет.

...Конюшни отца послужили ему первым пристанищем для опасных экспериментов с электричеством. Но потом он превратил в лабораторию большую часть громадного родительского дома. Лишенный прав на отцовское богатство, он вдруг получил огромное состояние от своего дяди. Однако ни мотом, ни дельцом не стал. Ему было тогда уже за сорок, образ жизни и привычки его давно сформировались, а менять их он не умел. Изменился только бюджет его физической лаборатории в старом герцогском доме. Теперь он мог позволить себе самые дорогостоящие опыты. В похвальном слове Кавендишу французский физик Жан Био сказал так: «Он был самым богатым из ученых и, вероятно, самым ученым из богачей».

...В течение всей своей жизни он выходил на прогулку в одно и то же время дня. Решив свести к нулю вероятность встречи с кем-нибудь из знакомых лондонцев, Кавендиш усвоил обыкновение ходить только посередине мостовой. Уклоняться от лошадей было легче, чем от человеческого пустословия. Отшельник и молчальник, он и со своим домоправителем никогда не вступал в разговоры, предпочитая объясняться посредством коротких записок. Женская прислуга в доме Кавендишей не рисковала попадаться ему на глаза: за этим следовал отказ от места. Раз в году, в один и тот же день и час, к нему приходил портной. Молча снимал

мерку и исчезал. Никаких вопросов о материале и фасоне нового платья: костюм должен был быть копией прежнего с необходимой поправкой на естественное изменение параметров хозяина. Так был уничтожен еще один повод для вздорных раздумий и отвлекающей болтовни.



Рис. 17

...Когда Кавендишу (рис. 17) было 29 лет, он удостоился избрания в члены Лондонского Королевского общества. Через десять лет случай или дела привели его на обед в академический клуб. Эти обеды происходили по четвергам и начинались в 5 часов вечера. С того дня и до конца жизни, на протяжении сорока лет, каждый четверг ровно в пять он приходил на обед Королевского общества. Но лишь немногие из завсегдатаев клуба знали, как звучит его голос. Он заговаривал только тогда, когда мог сообщить им нечто из ряда вон выходящее. За сорок лет его шляпа ни разу не переменила своего места на полке в клубном гардеробе.

### 1.3 Единицы измерения электрического заряда

К данному моменту нашего повествования сложилась парадоксальная ситуация: мы сформулировали закон взаимодействия заряженных тел, выразили его в виде формулы, но не определили величины зарядов этих тел. Для такого определения необходимо задать единицу измерения электрического заряда. Проще всего в качестве эталона заряда использовать некоторое, хорошо известное

всем заряженное тело, например электрон\*. Как мы увидим в дальнейшем, заряд электрона является естественной единицей измерения заряда. Но, во-первых, электрон был открыт относительно недавно, каких-то сто лет назад, и примерно через сто лет после открытия закона Кулона. Во-вторых, этот заряд мал, поэтому его использование для определения зарядов макроскопических тел неудобно. Заметим, что в ядерной физике и физике элементарных частиц заряд электрона является единицей измерения зарядов других частиц.

Для задания единиц измерения физических величин необходимо использовать физические законы. С этой точки зрения можно установить величину единицы заряда на основании закона Кулона. Для этого необходимо положить коэффициент пропорциональности в формулах (1)-(2) равным единице и дать следующее определение единицы заряда: два единичных заряда, находящихся на единичном расстоянии, взаимодействуют с единичной силой. Кстати, именно так определяется величина заряда в одной из систем единиц измерения СГСЭ, которой до сих пор с удовольствием пользуются некоторые физики-теоретики.

В общепринятой (и обязательной) системе единиц СИ принято другое определение единицы заряда, основанное на другом физическом законе – законе взаимодействия электрических токов – за-

---

\* Определили же когда-то в качестве единицы массы массу одного литра обыкновенной воды (правда, потом уточнили – дисцилированной и при температуре 4°C).

коне Ампера (строгое определение этой единицы мы дадим при изучении взаимодействия токов). Основная причина такого определения заключается в том, что создать эталон силы тока технически намного проще, чем эталон электрического заряда. Поэтому в СИ в качестве основной электрической единицы выбрана единица силы тока – ампер. Единица заряда в этой системе является производной. Эта единица носит название кулон (сокращенно Кл), в честь автора основного закона электростатики. По определению, 1 кулон – это заряд, который протекает через попечное сечение проводника при силе тока в 1 ампер за 1 секунду:  $[Кл] = [A] \cdot [c]$ .

Можно обратиться к аналогии с законом всемирного тяготения – как мы упоминали, на основании этого закона можно было бы установить единицы гравитационной массы. Однако оказалось удобнее установить эталон инерционной массы – килограмм. Поэтому в законе всемирного тяготения появился размерный коэффициент пропорциональности – гравитационная постоянная.

Аналогично, так как единица заряда установлена на основании закона Ампера, в законе Кулона коэффициент пропорциональности должен иметь размерность, а его численное значение определяется экспериментально.

Для упрощения многих формул электростатики коэффициент пропорциональности в системе СИ записывают в несколько непривычной форме

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (1)$$

где константа  $\epsilon_0$  называется электрической постоянной. Поэтому формула закона Ш. Кулона в системе СИ имеет вид

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (2)$$

Экспериментально\* определенное численное значение электрической постоянной равно  $\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$ . При расчетах удобно использовать значение константы  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$ .

Физический смысл коэффициента  $k$  очевиден: два заряда величиной в 1 Кл каждый, находящиеся на расстоянии в 1 метр, взаимодействуют с силой  $9 \cdot 10^9 \text{ Н}$ . Обратите внимание на громадность этой силы! Для электростатики заряд в 1 кулон является очень большим – описанные нами стеклянные и эbonитовые палочки при электризации трением имеют заряды порядка  $10^{-9} \text{ Кл}$ .

## 1.4 Закон сохранения электрического заряда

Использованный Ш. Кулоном способ деления заряда неявно предполагает, что при соприкосновении двух одинаковых шариков их суммарный

---

\* В 1985 году были переопределены основные единицы системы СИ. В частности, в качестве точной фундаментальной константы принята скорость света в вакууме. В связи с этим электрическая постоянная стала точной константой, так как она связана со скоростью света.

**заряд сохраняется. Фактически Ш. Кулон использовал гипотезу о сохранении электрического заряда. Многочисленные эксперименты по измерению зарядов в различных системах подтвердили эту гипотезу. В настоящее время считается точно установленным закон сохранения электрического заряда: суммарный электрический заряд замкнутой системы сохраняется.**

Так, при электризации, если одно тело приобретает положительный заряд, то какое-то другое обязательно заряжается отрицательно. Так, при взаимодействии стекла и шелка стекло заряжается положительно, а шелк – отрицательно. При соединении проводников электрический заряд перераспределяется между проводниками, но их суммарный заряд остается неизменным.

Свойство сохранения электрического заряда объясняется в рамках современных представлений о строении вещества. Все вещества построены из электрически заряженных частиц, важнейшими из которых являются отрицательно заряженные электроны и положительно заряженные протоны. Заряды электрона и протона по модулю равны. В обычном, незаряженном состоянии суммарный заряд протонов полностью компенсируется зарядом электронов, или число электронов равно числу протонов. Поэтому для таких тел закон сохранения электрического заряда есть закон сохранения числа электрически заряженных частиц. Более подвижными частицами являются электроны, поэтому в большинстве случаев при электризации

происходит переход части электронов с одного тела на другое. Тело, имеющее избыток электронов, заряжено отрицательно, тело с недостатком электронов заряжено положительно.

Однако закон сохранения электрического заряда имеет и более фундаментальный смысл. Элементарные частицы при взаимодействиях могут «превращаться» друг в друга – может происходить рождение одних частиц и исчезновение других. Во всех этих превращениях суммарный электрический заряд сохраняется – если появляется положительно заряженная частица, то обязательно появляется отрицательно заряженная частица. В чем причина такого поведения частиц – неизвестно. Единственный ответ, который можно дать на этот вопрос, – «Так устроен наш мир!»

## **1.5 Дискретность электрического заряда. Объемная плотность заряда**

Чрезвычайно точные измерения показали, что заряд протона по модулю в точности равен заряду электрона. Более того, другие заряженные элементарные частицы также имеют электрические заряд, в точности равный заряду электрона. Таким образом, заряд электрона является минимально возможным электрическим зарядом, минимальной «порцией» электрического заряда, поэтому его называют элементарным зарядом. Многочисленные попытки, продолжающиеся и в настоящее время,

обнаружить частицы, имеющие заряд, меньший элементарного, закончились неудачей\*. Так как заряды тел обусловлены избытком или недостатком электронов, то их заряд оказывается кратным элементарному заряду.

Первые измерения величины заряда электрона провел в 1909 – 1913 году американский физик Р. Милликен. Идея его экспериментов очень проста: он наблюдал движение микроскопических капелек масла в электрическом поле. Ему удалось показать, что заряды капелек кратны элементарному заряду, и измерить величину этого заряда. В настоящее время заряд электрона измерен с очень высокой точностью, относительная погрешность измерений меньше чем  $10^{-8}$ . По современным данным, величина этого заряда равна  $e \approx 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ . Малость этой величины объясняет, почему в течение длительного времени дискретность\*\* электрического заряда не наблюдалась.

---

\* Существует теория, что ряд элементарных частиц состоит из более мелких «субчастиц» – кварков, имеющих дробный электрический заряд  $\pm \frac{1}{3}e, \pm \frac{2}{3}e$ . Однако это не отрицает высказанного утверждения: во-первых, кварки в свободном состоянии не наблюдаются, несмотря на многочисленные и дорогостоящие экспериментальные попытки; во-вторых, реально наблюдаемые частицы комбинируются из кварков таким образом, чтобы их суммарный заряд был равен по модулю заряду электрона.

\*\* Дискретность означает «прерывность, раздельность», существование только в виде отдельных порций.

Первые теории электричества строились на представлении о заряде как некоторой особой электрической жидкости (о молекулярной структуре настоящих жидкостей тогда тоже не было известно). Долгие споры велись о том, сколько электрических жидкостей существует – одна или две. Отголоски этих жидкостных представлений дошли до нас в многочисленных терминах: заряд перетекает (отсюда электрический ток), конденсатор обладает электрической емкостью (показывающей, сколько электрической жидкости он может вместить) и др. Электрон, а следовательно, и элементарный заряд, был открыт только в 1897 году английским физиком Дж. Дж. Томсоном.

Дискретность электрического заряда проявляется только в том случае, когда заряды тел малы, сравнимы с элементарным зарядом. Неслучайно Р. Милликен в своих экспериментах использовал микроскопические капельки, заряды которых составляли несколько элементарных зарядов. Во многих случаях нет необходимости учитывать дискретность электрического заряда, то есть в математическом описании перейти к непрерывному описанию распределения зарядов. В этом случае можно ввести понятие объемной плотности заряда как функции координат  $\rho(x, y, z)$ , как отношение величины заряда  $\Delta q$ , содержащегося в малом объеме  $\Delta V$  вокруг точки с координатами  $(x, y, z)$ , к величине этого объема

$$\rho(x, y, z) = \frac{\Delta q}{\Delta V} \text{ при } \Delta V \rightarrow 0.$$

Это определение полностью совпадает с обсуждавшимся ранее понятием плотности «в точке».

## 1.6 Инвариантность электрического заряда

Одним из основных принципов всей физики является принцип относительности: во всех инерциальных системах отсчета все физические явления протекают одинаково. Или, что равносильно, равномерное движение не влияет на протекание физических процессов. Поэтому при введении любой физической величины важным является вопрос о зависимости этой величины от скорости движения тела или от выбора системы отсчета. Экспериментальные данные свидетельствуют, что электрический заряд обладает **инвариантностью**, то есть его величина не зависит от выбора системы отсчета, не зависит от скорости движения частиц.

Неслучайно в данной нами формулировке закона Ш. Кулона упоминается о неподвижности заряженных тел. При движении зарядов между ними действуют также и магнитные силы. Проблемы, связанные с взаимодействием движущихся частиц, мы будем обсуждать позднее, при изучении магнетизма.

## 1.7 Принцип суперпозиции для электростатических сил

Вернемся к обсуждению закона Ш. Кулона. При этом мы постоянно будем использовать его анало-

гию с законом всемирного тяготения: раз формулировки совпадают, то и следствия из них должны совпадать. Поэтому у нас есть возможность достаточно быстро повторить основные выводы.

Прежде всего, обратим внимание, что сила взаимодействия точечных тел прямо пропорциональна величине заряда. Это обстоятельство является математическим выражением **принципа суперпозиции**: сила, действующая на точечный заряд  $q_0$  со стороны системы зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_k$ ..., равна сумме сил, действующих со стороны каждого из зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_k$ ... (рис. 18)

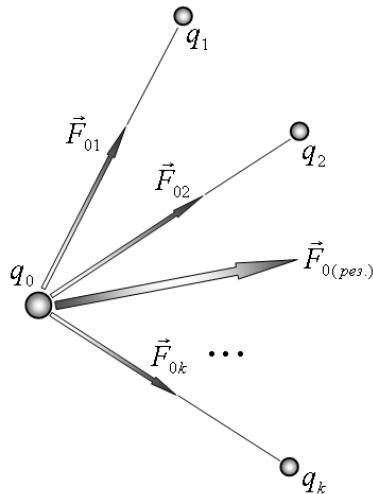


Рис. 18

$$\vec{F}_{0(\text{pes.})} = \vec{F}_{01} + \vec{F}_{02} + \dots + \vec{F}_{0k} + \dots \quad (1)$$

Подчеркнем, что формула закона Ш. Кулона только выражает справедливость принципа суперпозиции (но не обосновывает его). Этот фундаментальный принцип является обобщением экспериментальных фактов.

Принцип суперпозиции выражает независимость сил электростатических взаимодействий: взаимодействие с одним зарядом никак не влияет на взаимодействие с остальными.

Закон Ш. Кулона для точечных тел и принцип суперпозиции позволяют, в принципе, вычислять силы взаимодействия между заряженными телами конечных размеров. Для этого необходимо мысленно разбить каждое из тел на малые участки, каждый из которых можно рассматривать как точечный заряд (рис. 19), затем вычислить двойную векторную сумму сил взаимодействия между всеми парами точек

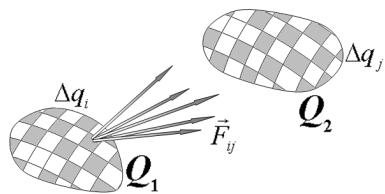


Рис. 19

$$\vec{F}_{(pes)} = \sum_i \sum_j \vec{F}_{ij}. \quad (2)$$

Вычисление таких сумм может представлять собой сложную и громоздкую операцию, но иного способа расчета сил взаимодействия нет! Более того, при использовании этого метода необходимо знать распределение зарядов внутри каждого из взаимодействующих тел. В отличие от гравитационного взаимодействия, во многих случаях (точнее, практически всегда) распределение зарядов на телах заранее неизвестно. Так, одно заряженное тело существенно влияет на распределение зарядов на другом, поэтому расчет сил взаимодействия между заряженными телами является еще более сложной задачей, чем расчет силы гравитационного взаимодействия. Для подтверждения этого утверждения сошлемся на существование сил притяжения между заряженным и незаряженным телом.

Так как сила электростатического взаимодействия между точечными зарядами обратно пропорциональна квадрату расстояния между телами, то сила взаимодействия между равномерно заряженными сферами равна силе взаимодействия между точечными зарядами, равными зарядам сфер и расположенными в центрах этих сфер.

Аналогичный вывод справедлив и для любых сферически симметричных распределений зарядов. Иными словами, сферически симметричные заряды можно собрать в одну точку (рис. 20) – в центр, при этом силы электростатического взаимодействия не изменятся, но их вычисление становится элементарным!

И. Ньютона доказал это утверждение для гравитационных сил, совсем скоро мы докажем его для электростатических взаимодействий.

Однаковая зависимость гравитационных и электростатических сил от расстояния позволяет сравнивать эти силы между собой. Для двух одинаковых точечных тел, имеющих массы  $m$  и заряды  $q$ , отношение электрической к гравитационной силе выражается формулой

$$\frac{F_{\text{эл.}}}{F_{\text{гв.}}} = \frac{\left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2} \right)}{\left( G \cdot \frac{m^2}{r^2} \right)} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 G m^2}.$$

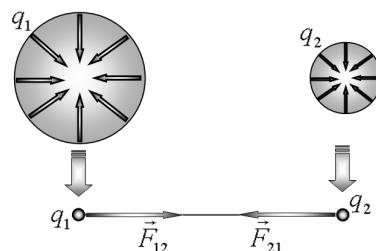


Рис. 20

Так, для двух протонов это отношение приблизительно равно  $1 \cdot 10^{36}$ , а для более легких электронов даже  $4 \cdot 10^{42}$  – весьма внушительные числа! Поэтому при описании взаимодействия заряженных частиц гравитационным взаимодействием пренебрегают. В наших экспериментах (со стаканчиками) гравитационные взаимодействия между ними также пренебрежимо малы, по сравнению с электрическими. Практически во всех случаях, где появляются электрические силы, гравитационные уходят на второй план. Громадность электрических сил во многом обуславливает их широкое применение в нашей жизни и необходимость их изучения.

## § 2. Электрическое поле и его свойства

Громадные успехи механики, основанной на законах динамики И. Ньютона и законе всемирного тяготения, привели к тому, что в течение более ста лет (весь XVIII век) в физике господствовала так называемая теория дальнодействия. В рамках этой теории считалось возможным, что тела могут воздействовать друг на друга на расстоянии без всякого «посредника», передающего взаимодействия. Так, для того чтобы лошадь тянула телегу, необходима соответствующая упряжь, для передачи звука необходима среда, хотя бы воздух. А гравитационные силы могут передаваться от одного тела к другому через пустое пространство. Так, закон всемирного тяготения дает выражение для силы взаимодействия, но не объясняет механизма воз-

никновения этой силы. Можно даже сказать, что такой вопрос и не ставился учеными – достаточно вспомнить знаменитое высказывание И. Ньютона: «Гипотез не измышляю». Еще одним важным аспектом дальнодействия является бесконечная скорость передачи взаимодействий: так, изменение положения одного тела в тот же момент времени проявляется в изменении силы его воздействия на другие тела, независимо от того, на каком расстоянии они находятся.

Первые теории электричества и магнетизма также строились на идее дальнодействия. Основной закон электростатики Ш. Кулона совпадает с законом всемирного тяготения, его идеология также аналогична: заряженные тела могут взаимодействовать на расстоянии, изменение положения одного тела мгновенно влияет на силы, действующие на другие тела, природа электрических взаимодействий неизвестна и «неинтересна», достаточно знать формулу для силы взаимодействия. Аналогично была построена и теория магнитных взаимодействий. Даже используя эту ошибочную, как мы теперь убеждены, концепцию дальнодействия, учёные (в основном, французские: Ш. Кулон, С. Пуассон, П. Лаплас, А. Ампер, Ж. Био, Ф. Савар и др.) сумели построить совершенную и математически изящную теорию электрических и магнитных явлений, многие из положений которой сохраняют свое значение до настоящего времени.

«Французская» электродинамика начала XIX века добилась значительных успехов, несмо-

тря на ошибочность общего подхода, потому что она рассматривала «статику» (электростатику и магнитостатику) – поведение неподвижных (или движущихся с малыми скоростями) заряженных тел. Действительно, в стационарном случае время распространения взаимодействий не играет никакой роли: все тела либо неподвижны, либо движутся со скоростями, значительно меньшими скорости распространения взаимодействий. Поэтому модели с бесконечной скоростью распространения взаимодействий вполне приемлемы, а вопрос о наличии или отсутствии «посредника» в этом случае имеет только общепознавательный интерес.

Ситуация радикально изменилась, когда физики приступили к изучению электродинамики, изучению электрических и магнитных явлений, изменяющихся во времени. В описании этой группы явлений «статика» оказалась бессильна. Принципиально новые идеи были высказаны в 20-х – 30-х годах XIX века выдающимся английским ученым М. Фарадеем. Основная из них – понятие электромагнитного поля.

Подчеркнем, не математической абстракции, а объективно существующей реальности, особого вида материи. Электромагнитное поле и является «посредником», переносчиком электрических и магнитных взаимодействий. В рамках полевых воззрений электромагнитные взаимодействия трактуются следующим образом: заряды создают электромагнитное поле, которое воздейству-

ет на другие заряженные тела. Иными словами, произошло возвращение к идеи «близкодействия»: взаимодействие возможно только при непосредственном контакте, была найдена «веревочка», передающая взаимодействие от одного заряженного тела к другому.

Физические идеи М. Фарадея о поле развиты другим английским физиком, Дж. К. Максвеллом, которому удалось найти математические уравнения, описывающие все свойства электромагнитных полей и их взаимодействий с заряженными телами. Система уравнений Дж. К. Максвелла и в настоящее время является основой электродинамики. Почти не преувеличивая, можно сказать, что теоретическая электродинамика – это уравнения Дж. К. Максвелла и их решения. Фактически содержание нашего дальнейшего курса – это изучение этой системы уравнений.

В течение достаточно длительного промежутка времени (всего XIX века) считалось, что электрические и магнитные явления (в том числе и оптические!) есть процессы (натяжения, сгущения, колебания, волны) в особой среде – эфире, который заполняет все пространство. Эту особую среду наделяли рядом механических свойств, пытаясь свести электромагнитные явления к механическим, дать им механическое истолкование. Электромагнитное поле также рассматривалось как поле особых напряжений эфира. С помощью этой теории удалось «объяснить» и описать множество явлений, даже предсказать новые, до того неизвестные явле-

ния. Однако по мере накопления опытных данных свойства эфира «становились» все более сложными и экзотическими, наконец, этот эфир никак не удавалось обнаружить экспериментально. В конце концов, в начале XX века эфир оказался изгнанным из физики, так же как флогистон, теплород и электрические жидкости.

Каковы же подтверждения объективного существования электромагнитного поля?

Как мы уже подчеркивали, электромагнитные явления в статических системах с неподвижными (или медленно движущимися) зарядами могут быть достаточно точно описаны и без привлечения понятия поля. Существование полей проявляется только в системах, быстро изменяющихся со временем. В таких системах существенным и наблюдаемым является запаздывание взаимодействий: изменение системы в одной точке проявляется в других точках через некоторый промежуток времени, необходимый для распространения возмущения от одной точки до другой. Дж. К. Максвеллу удалось вычислить (!) скорость распространения электромагнитных взаимодействий – она оказалась равной скорости света. Это открытие позволило выдвинуть гипотезу об электромагнитной природе света.

Еще одним подтверждением объективного существования электромагнитного поля является открытое М. Фарадеем в 1831 году явление электромагнитной индукции. Суть этого явления заключается в возникновении электрического поля

(легко регистрируемого) при изменении магнитного поля. То есть на заряженное тело может действовать электрическая сила, даже если нет других электрических зарядов, — сила со стороны поля. Противоположное явление — порождение магнитного поля изменяющимся электрическим полем — было теоретически предсказано Дж. К. Максвеллом. Впоследствии это предсказание было подтверждено экспериментально.

Так как электрические и магнитные поля могут порождать друг друга, электромагнитное поле может существовать в виде волн. Существование электромагнитных волн также было предсказано Дж. К. Максвеллом, экспериментально эти волны были открыты\* и исследованы немецким физиком Г. Герцем. Начиная свои эксперименты, Г. Герц ставил целью опровергнуть теорию Дж. К. Максвелла. Однако, по его же словам, чем больше он ставил экспериментов, тем больше убеждался в ее справедливости. Электромагнитное поле в виде волн может оторваться от зарядов, то есть существовать (и регистрироваться) без зарядов, его породивших, «как свет угасших звезд». Не является ли это окончательным доказательством того, что электромагнитное поле — материальная реальность!

Упомянутые явления указывают, что реально существует единое электромагнитное поле. Одна-

---

\* Нельзя сказать, что электромагнитные волны не были известны, ведь свет — это тоже электромагнитная волна, но до Дж. К. Максвелла никто не знал этого.

ко в некоторых простых случаях оказывается возможным разделить электрические и магнитные поля, рассматривать их независимо. Так, в системе неподвижных электрических зарядов электромагнитное поле проявляется как электрическое (электростатическое), в системе постоянных электрических токов – как магнитное (магнитостатическое). Условность такого разделения легко показать. Пусть в некоторой системе отсчета все заряды неподвижны – создаваемое ими поле является электростатическим. Если описывать эти же заряды в другой, движущейся системе отсчета, то заряды будут движущимися, следовательно, они будут создавать и магнитное поле.

Так как электромагнитное поле является объективной реальностью, то для его изучения необходимо ввести, определить набор его характеристик, параметров. Среди них есть как новые для нас, с которыми предстоит познакомиться, так и наши «старые знакомые» – энергия, импульс и т.д.

Несмотря на то что существование полей проявляется наиболее ярко только при их изменении, изучение характеристик и свойств электромагнитного поля мы начинаем с изучения поля, созданного неподвижными электрическими зарядами; такое поле называется **электростатическим**.

Современная теория электромагнитного поля базируется на концепции близкодействия. Эта общая идея не могла не оказать влияния на теорию гравитации. В 1916 году знаменитый немецкий физик А. Эйнштейн выдвинул новую теорию гра-

витации – общую теорию относительности. Эта теория также основана на идее близкодействия, в этой теории описывается гравитационное поле, гравитационные волны и др. Несмотря на ряд существенных экспериментальных подтверждений справедливости новой теории, до настоящего времени она представляет скорее теоретический интерес. При описании движений планет, спутников, космических кораблей используется ньютоновская теория: так, скорости движения этих тел значительно меньше скорости света, поэтому модель мгновенной скорости распространения гравитационного взаимодействия оказывается приемлемой. Для описания поведения микрочастиц, движущихся со скоростями, близкими к скорости света, гравитационные силы слишком слабы, поэтому ими пренебрегают.

## 2.1 Напряженность электрического поля

В рамках представлений о поле взаимодействие зарядов, описываемое законом Ш. Кулона, «разбивается» на две части: один заряд создает электрическое поле, которое воздействует на другой заряд. Таким образом, электрический заряд играет двойную роль: с одной стороны, он является источником поля, а с другой – *индикатором*, прибором для изучения поля.

Основное свойство электростатического поля заключается в его воздействии на неподвижные электрические заряды. Поэтому характеристика

электрического поля должна быть связана с силой, действующей на заряженное тело. Чтобы определить характеристику поля в каждой пространственной точке, в качестве «прибора», регистрирующего поле, необходимо использовать очень малое тело, размерами которого можно пренебречь. Моделью такого тела является электрически заряженная материальная точка, то есть точечный заряд. Так как этот точечный заряд используется в качестве датчика, мы будем также его называть **пробный заряд**. Итак, для изучения поля в некоторой точке в эту точку следует поместить пробный заряд  $q$  и измерить силу  $\vec{F}$ , действующую на него. В очередной раз мы сталкиваемся с проблемой разделения характеристик взаимодействующих объектов. Так, появление силы, действующей на некоторое тело, свидетельствует как о наличии поля, так и о наличии электрического заряда у рассматриваемого тела. Эта же сила зависит как от свойств поля, так и от характеристик тела (его заряда). Но нами уже дано определение электрического заряда, введена единица его измерения, поэтому характеристика поля может быть определена с помощью экспериментально подтвержденного закона Кулона. Согласно этому закону, величина силы пропорциональна величине пробного заряда. Следовательно, отношение этой силы к величине заряда не зависит от величины заряда, поэтому данное отношение является характеристикой поля, которая называется напряженностью электрического поля –  $\vec{E}$ .

**Напряженностью электрического поля называется отношение силы, действующей на точечный заряд, помещенный в данную точку поля, к величине этого заряда**

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \quad (1)$$

Можно дать и эквивалентную формулировку: **напряженность электрического поля есть сила, действующая на единичный положительный заряд, помещенный в данную точку поля.**

Так как сила является векторной физической величиной, то и напряженность электрического поля также является векторной величиной. Пробный заряд можно поместить в любую пространственную точку, поэтому и вектор напряженности также определен в любой точке пространства. Таким образом, для описания электрического поля нам необходимо использовать следующую математическую конструкцию: каждой точке пространства (задаваемой тремя координатами  $(x, y, z)$ ) ставится в соответствие вектор  $\vec{E}$  (имеющий три компоненты  $(E_x, E_y, E_z)$ ). Иными словами, нам необходимо задать три функции, каждая из которых зависит от трех координат. С подобной математической конструкцией мы познакомились при описании движения жидкости – это векторное поле\*. Поэтому при описании электрического поля мы мо-

---

\* Сказываются недостатки языка – математическое векторное поле описывает физическое электрическое поле. Думаем, что проблемы различия этих понятий будут возникать не слишком часто.

жем использовать образы и методы, с которыми мы познакомились при изучении течения жидкости.

## 2.2 Напряженность электрического поля точечного заряда

Рассмотрим электрическое поле, создаваемое одним точечным зарядом. Чтобы подчеркнуть, что этот заряд мы рассматриваем как источник поля, обозначим его величину прописной буквой  $Q$  (рис. 21). Возьмем произвольную пространственную точку  $A$ . Для определения напряженности электрического поля поместим в эту точку пробный заряд  $q$ .

Согласно закону Ш. Кулона, сила, действующая на пробный заряд, равна

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Qq}{|\vec{r}|^3} \vec{r},$$

где  $\vec{r}$  – вектор, проведенный от заряда источника  $Q$  к точке  $A$ , в которой рассчитывается поле (точке наблюдения). Тогда, по определению, напряженность поля в этой точке равна

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{|\vec{r}|^3} \vec{r}, \quad (1)$$

и, заметьте, не зависит от величины пробного заряда. Формула (1), определяет напряженность электрического поля, созданного точечным зарядом.

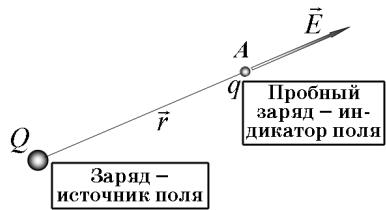


Рис. 21

Фактически формула (2) определяет вектор напряженности в зависимости от 6 координат: трех координат заряда и трех координат точки наблюдения.

Введем декартову систему координат (рис. 22), пусть в ней положение заряда определяется радиус-вектором  $\vec{r}_1$  (или координатами  $(x_1, y_1, z_1)$ ), а положение точки наблюдения — радиус-вектором  $\vec{r}_0$  (или координатами  $(x_0, y_0, z_0)$ ). Тогда вектор  $\vec{r}$ , соединяющий заряд и точку наблюдения, фигурирующий в формуле (1), равен  $\vec{r} = \vec{r}_0 - \vec{r}_1$ . Следовательно, напряженность поля в точке наблюдения определяется формулой

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|^3}. \quad (2)$$

Перепишем эту формулу в координатной форме. Длина вектора  $\vec{r} = \vec{r}_0 - \vec{r}_1$  равна  $|\vec{r}_0 - \vec{r}_1| = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}$ , а его проекция на ось  $X$ :  $(\vec{r}_0 - \vec{r}_1)_x = x_0 - x_1$ . Следовательно, проекция вектора напряженности на ось  $X$  определяется по формуле

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(x_0 - x_1)}{\left((x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2\right)^{3/2}}. \quad (3)$$

Две аналогичные формулы надо выписать и для оставшихся компонент вектора напряженности.

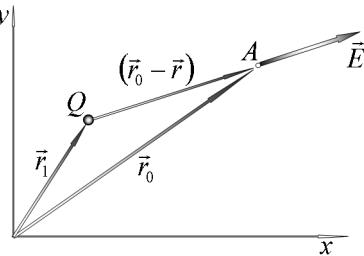


Рис. 22

Оцените в очередной раз прелесть векторной записи (2): во-первых, короче; во-вторых, не зависит от выбора системы координат, хотя конкретные численные расчеты все равно необходимо проводить в координатной форме.

### 2.3 Принцип суперпозиции для напряженности электрического поля

Для расчета поля, создаваемого нескольким точечными зарядами, следует воспользоваться принципом суперпозиции. Пусть электростатическое поле создается системой

зарядов (рис. 23)  $Q_1, Q_2, \dots, Q_k, \dots (k = 1, 2, \dots, N)$ , расположенных в точках, положение которых задается радиус-векторами  $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots \vec{r}_k \dots$ . Для определения напряженности в

некоторой точке с радиус-вектором  $\vec{r}_0$  мысленно поместим в нее пробный заряд  $q$ . По принципу суперпозиции для электростатических сил, результирующая сила, действующая на пробный заряд, равна сумме сил, действующих со стороны каждого заряда в отдельности:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{(pes.)} &= \frac{Q_1 q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|^3} + \frac{Q_2 q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_2|^3} + \dots + \frac{Q_N q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_N)}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_N|^3} = \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{Q_k q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_k)}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_k|^3}. \end{aligned}$$

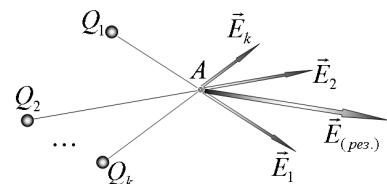


Рис. 23

Для вычисления напряженности поля эту силу необходимо разделить на величину пробного заряда. Тем самым, мы доказали **принцип суперпозиции для напряженности электрического поля: напряженность поля, создаваемого системой зарядов, равна сумме напряженностей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности**:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_k + \dots = \sum_k \vec{E}_k = \sum_{k=1}^N \frac{Q_k}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_k)}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_k|^3}. \quad (1)$$

Если заряды распределены внутри некоторого тела непрерывно (заданы объемной плотностью зарядов), то для вычисления напряженности поля необходимо разбить тело на малые части, каждую из которых можно рассматривать как точечный заряд, после чего можно воспользоваться формулой (1).

Таким образом, закон Ш. Кулона и принцип суперпозиции позволяют рассчитать напряженность поля, создаваемого произвольной (но известной) системой зарядов. Правда, провести такие расчеты нелегко, но это уже проблемы математики, а не физики.

## 2.4 Силовые линии электростатического поля

Для наглядного графического представления поля удобно использовать силовые линии – направленные линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора напря-

женности электрического поля (рис. 24). Согласно определению, силовые линии электрического поля обладают рядом общих свойств (сравните со свойствами линий тока жидкости):

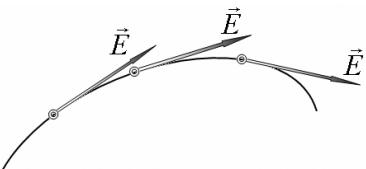


Рис. 24

1. Силовые линии не пересекаются (в противном случае, в точке пересечения можно построить две касательные, то есть в одной точке напряженность поля имеет два значения, что абсурдно).

2. Силовые линии не имеют изломов (в точке излома опять можно построить две касательные).

3. Силовые линии электростатического поля начинаются и заканчиваются на зарядах.

Так как напряженность поля определена в каждой пространственной точке, то силовую линию можно провести через любую пространственную точку. Поэтому число силовых линий бесконечно велико. Число линий, которые используются для изображения поля, чаще всего определяется художественным вкусом физико-художника. В некоторых учебных пособиях рекомендуется строить картину силовых линий так, чтобы их густота была больше там, где напряженность поля больше. Это требование является нестрогим и не всегда выполнимым, поэтому силовые линии рисуют, удовлетворяя сформулированные свойства 1–3.

Очень просто построить силовые линии поля, создаваемого точечным зарядом. В этом случае си-

ловые линии представляют собой набор прямых, выходящих из точки расположения заряда (для положительного) или входящих (для отрицательных) в нее (рис. 25). Такие семейства силовых линий полей точечных зарядов демонстрируют, что заряды являются источниками поля, по аналогии с источниками и стоками поля скоростей жидкости. Доказательство того, что силовые линии не могут начинаться или заканчиваться в тех точках, где заряды отсутствуют, мы проведем позднее.

Картину силовых линий реальных полей можно воспроизвести экспериментально.

В невысокий сосуд следует влить небольшой слой касторового масла и всыпать в него небольшую порцию манной крупы. Если масло с крупой поместить в электростатическое поле, то крупинки манной крупы (они имеют слегка вытянутую форму) поворачиваются по направлению напряженности электрического поля и выстраиваются приблизительно вдоль силовых линий; по прошествии нескольких десятков секунд в чашке вырисовывается картина силовых линий электрического поля. Некоторые такие «картинки» представлены на фотографиях (рис. 26).

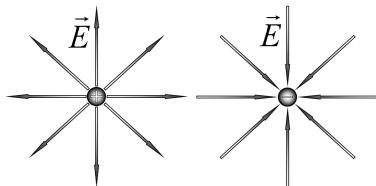


Рис. 25

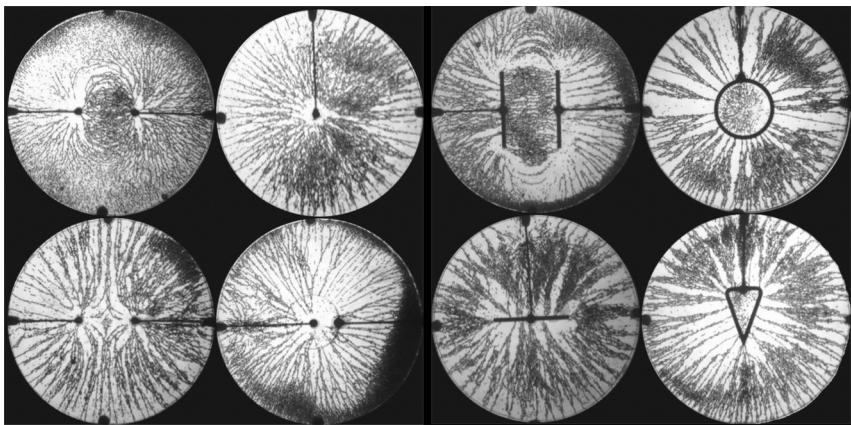


Рис. 26

### *Необязательное дополнение*

Во всех учебниках по электростатике приводятся многочисленные «картинки» силовых линий. К сожалению, эти рисунки часто сделаны «от руки», без соответствующих расчетов и, в лучшем случае, только на качественном уровне верно отображают реальную картину. В данной книге все приведенные изображения силовых линий полей (как электрического, так и магнитного) рассчитаны «честно». Правда, эти расчеты потребовали громадного числа вычислений, поэтому реально (и без особого труда) проведены с использованием компьютера.

При разработке алгоритмов расчета картины силовых линий встречается ряд проблем, требующих своего разрешения.

Первая такая проблема – расчет вектора поля. В случае электростатических полей, создаваемых заданным распределением зарядов, эта проблема решается с помощью закона Кулона и принципа суперпозиции.

Вторая проблема – метод построения отдельной линии. Идея простейшего алгоритма, решающего данную задачу, достаточна очевидна. На малом участке каждая ли-

ния практически совпадает со своей касательной, поэтому следует построить множество отрезков касательных к силовым линиям, то есть отрезков малой длины  $l$ , направление которых совпадает с направлением поля в данной точке. Пусть в некоторой точке  $A_0$  начинается построение силовой линии (рис. 27). Прежде всего, следует рассчитать компоненты вектора напряженности  $\vec{E}$  в заданной точке  $E_x, E_y$  и модуль этого вектора  $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ .

Затем следует построить отрезок  $A_0A_1$  малой длины  $l$ , направление которого совпадает с направлением вектора напряженности поля. Его проекции на оси координат вычисляются по формулам, которые следуют из рис. 27:

$$\Delta x = l \frac{E_x}{E}; \quad \Delta y = l \frac{E_y}{E}.$$

Теперь можно легко найти координаты конца отрезка  $A_0A_1$ :

$$x_1 = x_0 + \Delta x, \quad y_1 = y_0 + \Delta y$$

и построить этот отрезок, являющимся участком силовой линии. Затем следует повторить процедуру, начиная с конца построенного отрезка. Конечно, при реализации такого алгоритма встречаются и другие проблемы, носящие скорее технический характер.

На рис. 28 показаны силовые линии полей, создаваемых двумя точечными зарядами. Знаки зарядов указаны: на рисунках а) и б) заряды по модулю одинаковы, на рис. в), г) различны; какой из них больше – предлагаем определить самостоятельно. Направления силовых линий в каждом случае также определите самостоятельно.

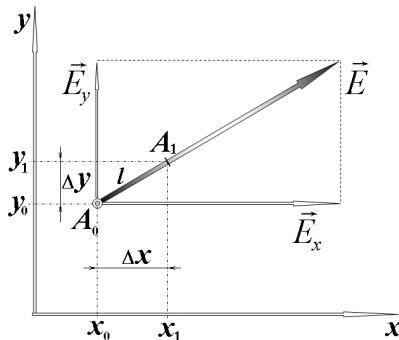


Рис. 27

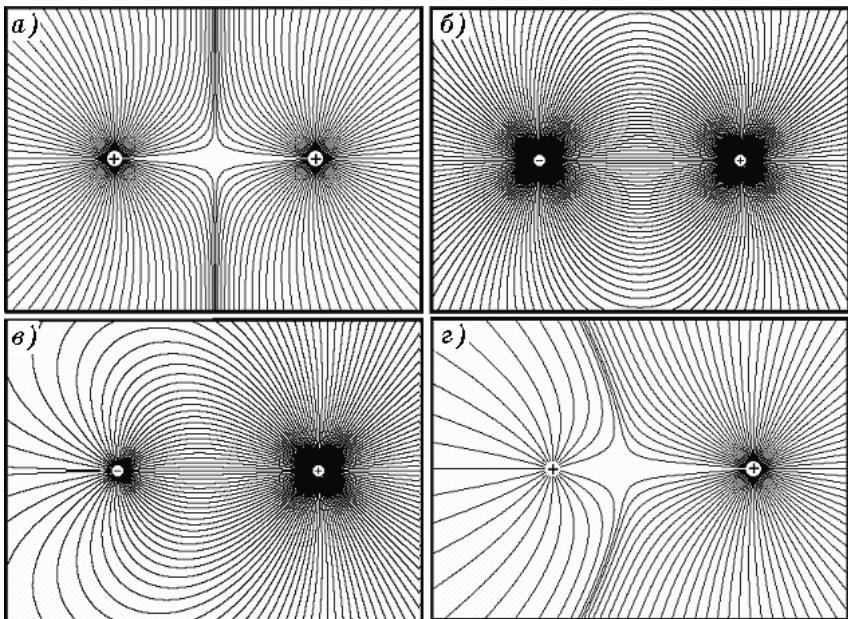


Рис. 28

Интересно отметить, что М. Фарадей рассматривал силовые линии электрического поля как реальные упругие трубы, связывающие между собой электрические заряды. Такие представления очень помогали ему предсказывать и объяснять многие физические явления.

Согласитесь, что прав был великий М. Фарадей: если мысленно заменить линии упругими резиновыми жгутами, характер взаимодействия очень нагляден.

## 2.5 Поток вектора напряженности электрического поля. Теорема Гаусса

Закон Кулона, определяющий напряженность поля, создаваемого точечным зарядом, и принцип суперпозиции дают один из методов расчета элек-

тростатического поля. К сожалению, этот метод не является универсальным, кроме того, его использование сопряжено с громоздкими математическими выкладками. Поэтому полезно знать и другие подходы к описанию и расчету полей. При изучении гидродинамики мы показали, что многие свойства векторных полей могут быть получены с помощью «теорем о потоке». Сформулируем такую теорему для электростатического поля.

Поток электрического поля определяется традиционно.

Выделим малую площадку площадью  $\Delta S$ , ориентация которой задается единичным вектором нормали  $\vec{n}$  (рис. 29). В пределах малой площадки электрическое поле можно считать однородным\*, тогда поток вектора напряженности  $\Delta\Phi_E$  определяется как произведение площади площадки на нормальную составляющую вектора напряженности:

$$\Delta\Phi_E = E \cos\alpha \Delta S = (\vec{E} \cdot \vec{n}) \Delta S = E_n \Delta S, \quad (1)$$

где  $(\vec{E} \cdot \vec{n}) = E \cos\alpha$  – скалярное произведение векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{n}$ ;  $E_n$  – нормальная к площадке компонента вектора напряженности.

В произвольном электростатическом поле поток вектора напряженности через произвольную

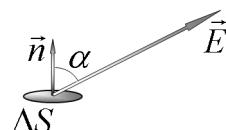


Рис. 29

---

\* Электрическое поле называется однородным, если во всех точках вектор напряженности постоянен как по величине, так и по направлению – обычное определение однородности, как для любого поля.

поверхность определяется следующим образом (рис. 30):

- поверхность разбивается на малые площадки  $\Delta S$  (которые можно считать плоскими);

- определяется вектор напряженности  $\vec{E}$  на этой площадке (который в пределах площадки можно считать постоянным);

- вычисляется сумма потоков через все площадки, на которые разбита поверхность:

$$\Phi = \Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2 + \Delta\Phi_3 + \dots = \sum_k \Delta\Phi_k = \sum_k E_k \cos\alpha_k \cdot \Delta S_k . \quad (2)$$

Эта сумма называется **потоком вектора напряженности электрического поля через заданную поверхность**. Трудно найти явный физический смысл этой величины, но, как мы указывали, поток векторного поля является полезной вспомогательной математической величиной.

Рассмотрим электрическое поле точечного заряда  $Q$  (рис. 31). Это поле обладает сферической симметрией: модуль вектора напряженности зависит только от расстояния для заряда, в любой точке вектор напряженности направлен радиально, вдоль прямой, соединяющей заряд с точкой наблюдения. Окружим заряд сферой произвольного радиуса  $R$ , центр которой совпада-

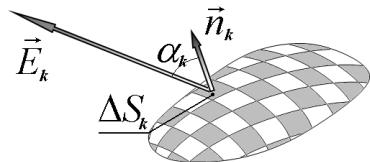


Рис. 30

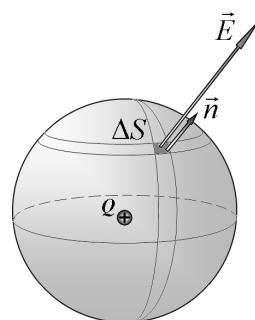


Рис. 31

ет с точечным зарядом. Во всех точках поверхности сферы вектор напряженности электрического поля направлен вдоль нормали к поверхности сферы (поэтому угол между ними равен нулю), его модуль постоянен и по закону Ш. Кулона равен

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Выделим на поверхности сферы малую площадку площадью  $\Delta S_i$ , поток вектора напряженности через эту площадку равен

$$\Delta\Phi_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \Delta S_i.$$

Так как модуль вектора напряженности во всех точках сферы одинаков, суммирование потоков через поверхность сферы сводится к суммированию площадей участков, на которые разбивается сфера. Вычислим поток вектора напряженности:

$$\Phi_E = \sum_i \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \Delta S_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sum_i \Delta S_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (3)$$

здесь  $\sum_i \Delta S_i = 4\pi R^2$  – площадь поверхности сферы.

Обратите внимание, что этот поток не зависит от радиуса сферы. Итак, поток вектора напряженности электрического поля точечного заряда через поверхность сферы равен отношению заряда к электрической постоянной.

Для обобщения полученного результата вспомним теоремы о потоке несжимаемой жидкости. Самое важное – распределение скоростей от точечного источника – описывается такой же зависимостью, как и напряженность электрического поля,

созданного точечным источником. Следовательно, и потоки этих векторных полей подчиняются одинаковым законам. Поэтому мы не будем подробно доказывать каждое утверждение, только приведем его основные этапы.

1. Выражение для суммарного потока (3) можно обобщить для любой замкнутой поверхности, окружающей точечный заряд.

*Поток вектора напряженности электрического поля точечного заряда через любую замкнутую поверхность, окружающую заряд (рис. 32), равен величине заряда, деленного на электрическую постоянную  $\epsilon_0$ :*

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

2. Пусть внутри поверхности находится несколько зарядов (рис. 33). Так как для вектора напряженности электрического поля справедлив принцип суперпозиции, то такой же принцип будет справедлив и для потока вектора напряженности. Следовательно, поток вектора напряженности электрического поля, созданного системой зарядов  $Q_1, Q_2, \dots$ , через любую замкнутую поверхность, окружающую заряды, равен сумме зарядов, деленной на электрическую постоянную  $\epsilon_0$ :

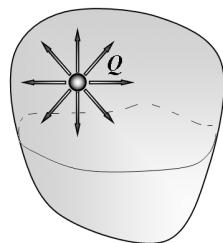


Рис. 32

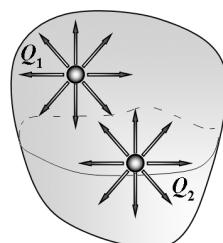


Рис. 33

$$\Phi_E = \frac{Q_1}{\epsilon_0} + \frac{Q_2}{\epsilon_0} + \dots$$

3. Если заряд  $Q'$  находится вне замкнутой поверхности (рис. 34), то поток вектора напряженности поля, созданного этим зарядом через эту поверхность равен нулю:

$$\Phi_E = 0.$$

Наконец, можно объединить эти положения и сформулировать теорему о потоке вектора напряженности электрического поля (рис. 35):

**Поток вектора напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность равен сумме зарядов, находящихся внутри этой поверхности, деленной на электрическую постоянную  $\epsilon_0$ :**

$$\Phi_E = \frac{Q_1 + Q_2 + \dots}{\epsilon_0}.$$

Эта важнейшая теорема электростатики\* впервые сформулирована немецким математиком К. Гауссом и носит его имя (теорема Гаусса).

В отличие от напряженности поля, которая является точечной характеристикой, т.е. определя-

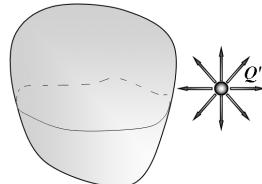


Рис. 34

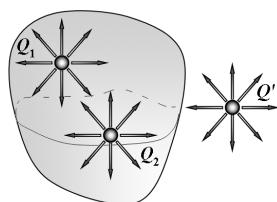


Рис. 35

---

\* Вспомните: в движении несжимаемой жидкости теорема о потоке была сформулирована следующим образом: «сколько вливается, столько и выливается». Здесь фактически можно использовать такую же формулировку.

ет поле в каждой точке пространства, поток этого вектора является обобщенной характеристикой некоторой области пространства. Если в некоторой части пространства электрическое поле отсутствует (напряженность равна нулю), то и поток вектора напряженности через любую поверхность, находящуюся в этой части, также равен нулю. Обратное утверждение неверно: если поток вектора напряженности равен нулю, то из этого не следует, что поле отсутствует. Единственный вывод, который можно сделать из равенства потока нулю, – внутри рассматриваемой поверхности суммарный заряд равен нулю.

Заряды, находящиеся вне рассматриваемой замкнутой поверхности, создают электрическое поле, в том числе и внутри объема, ограниченного рассматриваемой поверхностью. Только суммарный поток поля, созданного этими зарядами, равен нулю («сколько втекает – столько вытекает»). Можно сказать, что заряды вне поверхности перераспределяют поток поля, создаваемый зарядами внутри поверхности (рис. 36).

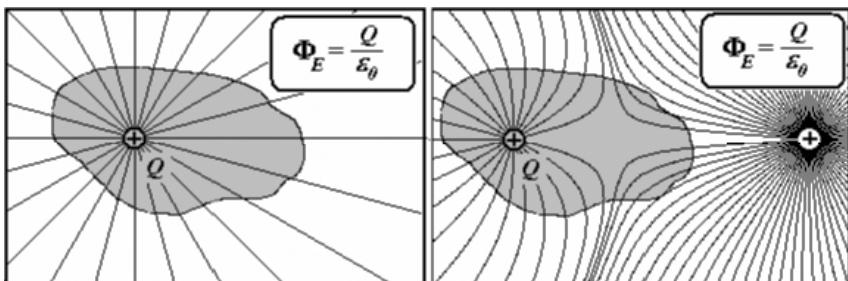


Рис. 36

Теорема Гаусса строго доказывается на основании закона Ш. Кулона, поэтому она не несет нового физического содержания. Справедливо и обратное: из теоремы Гаусса легко выводится формула закона Ш. Кулона.

Поэтому, с точки зрения физики, теорема Гаусса и закон Кулона эквивалентны, это один и тот же физический закон, облаченный в разные математические оболочки.

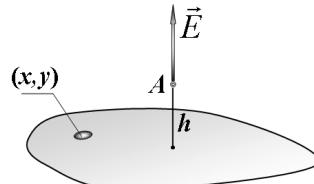


Рис. 37

## 2.6 Поле равномерно заряженной плоскости

Проиллюстрируем применение рассмотренных способов расчета электростатических полей на одном наглядном примере.

Решим задачу, которая, кроме того, нам неоднократно понадобится в дальнейшем. Пусть электрическое поле создается зарядами, которые равномерно распределены по бесконечной плоскости.

Конечно, в реальности бесконечно больших поверхностей не существует. В данном случае мы подразумеваем, что точка  $A$ , в которой рассчитывается напряженность поля, находится на расстоянии  $h$  от плоскости, которое значительно меньше расстояний до краев заряженного участка (рис. 37). В этом случае влияние зарядов, расположенных достаточно далеко от рассматриваемой точки, становится пренебрежимо малым. Проводить расчеты для бес-

конечно больших плоскостей оказывается проще, чем для конечных участков.

В качестве характеристики распределения зарядов введем величину  $\sigma$  – поверхностную плотность заряда. Выберем на плоскости произвольную точку с координатами  $(x, y)$ , окружим ее малой площадкой площадью  $\Delta S$ . Пусть заряд этой выделенной площадки равен  $\Delta Q$ , тогда средняя поверхностная плотность заряда определяется как отношение заряда площадки к ее площади  $\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta S}$ . При уменьшении площади выделенной площадки получим поверхностную плотность заряда в данной точке поверхности

$$\sigma(x, y) = \frac{\Delta Q}{\Delta S}, \text{ при } \Delta S \rightarrow 0. \quad (1)$$

Для равномерно заряженной поверхности поверхностная плотность заряда постоянна  $\sigma(x, y) = \sigma = \text{const}$ .

Для расчета напряженности поля воспользуемся законом III. Кулона и принципом суперпозиции.

Разобьем заряженную плоскость на малые участки. Такое разбиение можно проводить различными способами.

Расчеты упрощаются, если мысленно разбить плоскость на тонкие кольца, а затем каждое кольцо

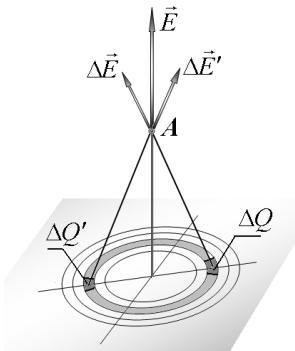


Рис. 38

то разделить на малые участки (рис. 38). Каждый малый участок плоскости можно рассматривать как точечный заряд величиной  $\Delta Q = \sigma \Delta S$ , который создает поле, вектор напряженности которого  $\Delta \vec{E}$  направлен вдоль прямой, соединяющей заряд с точкой наблюдения  $A$ . Полная напряженность электрического поля будет равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых отдельными участками плоскости. Ясно, что результирующий вектор напряженности будет направлен перпендикулярно плоскости (обозначим это направление осью  $z$ ). Действительно, для каждого заряда  $\Delta Q$  найдется симметрично расположенный заряд  $\Delta Q'$ , сумма векторов напряженностей полей  $\Delta \vec{E} + \Delta \vec{E}'$ , создаваемых этими зарядами, будет направлена вдоль оси  $z$ .

Вычислим напряженность поля, созданного равномерно заряженным кольцом, в точке  $A$ , находящейся на оси кольца на расстоянии  $h$  от его центра.

Разобьем кольцо на малые участки, заряд каждого из них обозначим  $\Delta Q_i$ . В точке наблюдения вектор напряженности поля  $\Delta \vec{E}_i$ , созданного этим зарядом, направлен вдоль линии, соединяющей заряд и точку наблюдения (рис. 39). Величина этого вектора может быть рассчитана по закону Ш. Кулона

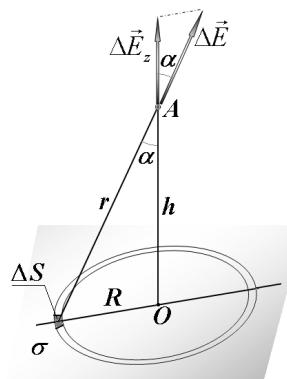


Рис. 39

$$\Delta E_i = \frac{\Delta Q_i}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

где  $r = \sqrt{h^2 + R^2}$  – расстояние от заряда до точки наблюдения.

Как мы показали, результирующий вектор напряженности направлен вдоль оси кольца. Поэтому для его расчета достаточно просуммировать проекции векторов  $\Delta \vec{E}$  на эту ось:  $\Delta E_{iz} = \Delta E_i \cos\alpha = \Delta E_i \frac{h}{r}$ .

Просуммируем проекции векторов напряженности полей, создаваемых всеми зарядами, на которые мы разбили кольцо:

$$E_z = \Delta E_{1z} + \Delta E_{2z} + \dots = \sum_i \Delta E_{iz} = \sum_i \frac{\Delta Q_i}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \cos\alpha.$$

Так как все заряды находятся на равных расстояниях  $r$  от точки наблюдения, а векторы  $\Delta \vec{E}_i$  образуют равные углы  $\alpha$  с осью  $Z$ , вычисление этой суммы сводится к суммированию зарядов (постоянные множители можно вынести за знак суммы):

$$\begin{aligned} E_z &= \sum_i \frac{\Delta Q_i}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sum_i \Delta Q_i = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\alpha = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{h}{(h^2 + R^2)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{2}$$

Заметим, что в центре кольца напряженность поля равна нулю, затем с ростом  $h$  напряженность поля возрастает до некоторого максимального значения, после чего начинает монотонно убывать. Причем на больших расстояниях при  $h \gg R$  в формуле (2) можно пренебречь  $R$  в знаменателе, при

этом напряженность поля определяется формулой  $E_z \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 h^2}$ , которая соответствует напряженности поля точечного заряда. Данный результат понятен: на расстояниях, значительно превышающих радиус кольца, кольцо можно рассматривать как точечный заряд. График функции (2) показан на рис. 40.

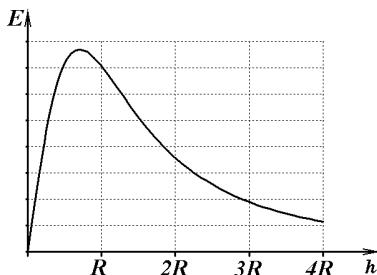


Рис. 40

Далее, для вычисления напряженности поля, созданного всей плоскостью, необходимо просуммировать выражения (2) по всем кольцам, на которые была разбита плоскость. Такое суммирование, в принципе, можно провести, но этот расчет требует привлечения операции интегрирования, поэтому заниматься этим не будем. Тем более, что результат можно получить гораздо быстрее, используя теорему Гаусса.

При использовании этой теоремы для определения напряженности поля необходимо рассмотреть симметрию поля, которая, очевидно, совпадает с симметрией распределения зарядов\*. Выделим

\* Подчеркнем, что теорема Гаусса справедлива для любой замкнутой поверхности, однако уравнение, которое следует из данной теоремы, может быть решено далеко не для любой поверхности! Поэтому правильный выбор поверхности для записи теоремы Гаусса – основной залог успешного решения задачи.

основные элементы симметрии зарядов (рис. 41).

а) Любая прямая, перпендикулярная плоскости, является осью симметрии, то есть при повороте плоскости на любой угол относительно любой оси, перпендикулярной плоскости, распределение зарядов не изменяется – следовательно, и вектор напряженности при таком повороте не изменится, следовательно, этот **вектор перпендикулен плоскости**.

б) Распределение зарядов не изменится, если плоскость сместить на любой вектор  $\vec{a}$ , лежащий в самой плоскости (трансляционная симметрия). Поэтому при таком смещении не изменится и напряженность поля. Следовательно, **напряженность поля может зависеть только от расстояния до плоскости  $h$** : в любых точках  $A$  и  $A'$ , находящихся на одном расстоянии от плоскости,  $\vec{E}' = \vec{E}$ .

в) Наконец, заряженная плоскость является плоскостью симметрии для поля. Поэтому в симметричных точках векторы напряженности также симметричны. То есть в точках  $A$  и  $A'$ , находящихся симметрично относительно плоскости, **векторы напряженности равны по модулю, но противоположны по направлению**:  $\vec{E}'' = -\vec{E}$ .

Выявленные свойства симметрии электрического поля позволяют выбрать поверхность, для

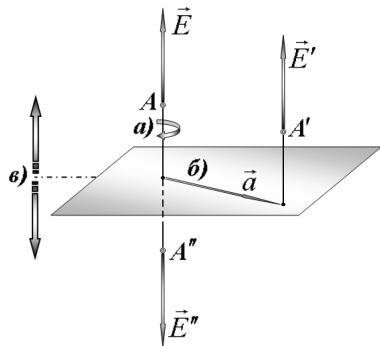


Рис. 41

которой можно выразить поток вектора напряженности в простой форме. Это возможно, если на поверхности (или ее части) вектор напряженности перпендикулярен вектору нормали – в этом случае поток обращается в нуль. Второй «простой» случай осуществляется, если на поверхности (или ее части) вектор напряженности направлен нормально к поверхности и постоянен по модулю – в этом случае поток равен произведению модуля вектора напряженности на площадь рассматриваемой части поверхности.

Итак, в качестве поверхности, для которой запишем уравнение теоремы Гаусса, выберем поверхность прямого цилиндра, образующие которого перпендикулярны плоскости, а основания параллельны ей и находятся на равных расстояниях от плоскости (рис. 42).

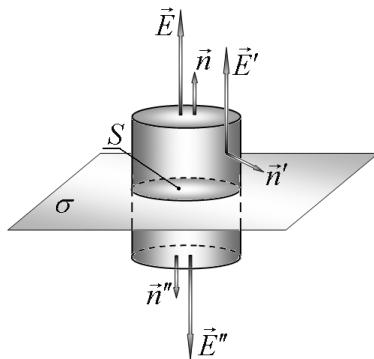


Рис. 42

Прежде всего, заметим, что поток вектора напряженности через боковую поверхность цилиндра равен нулю, так как во всех точках боковой поверхности векторы напряженности  $\vec{E}$  и нормали  $\vec{n}$  взаимно перпендикулярны (поэтому  $\cos \alpha = 0$ ). Поток через верхнее основание цилиндра может быть записан в виде  $\Phi = ES$ , так как модуль напряженности поля на основании цилиндра постоянен, а по направлению совпадает с вектором

нормали. Такое же значение имеет поток через нижнее основание.

Таким образом, суммарный поток вектора напряженности электрического поля через поверхность цилиндра равен  $\Phi_E = 2ES$ . По теореме Гаусса, этот поток равен заряду внутри поверхности  $Q = \sigma S$ , деленному на электрическую постоянную:  $\Phi_E = 2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$ . Из этого равенства выражаем модуль вектора напряженности электрического поля:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (3)$$

Как видите, с использованием теоремы Гаусса нам удалось решить поставленную задачу «в одно действие». Главная составляющая успеха – анализ симметрии поля, позволивший разумно выбрать поверхность для использования теоремы Гаусса. Также обратите внимание, что напряженность данного поля одинакова во всех точках, следовательно, это поле является однородным.

Подчеркнем: независимость напряженности поля от расстояния до плоскости  $h$  никак не следует из симметрии поля, это результат нашего расчета.

## 2.7 Поле равномерно заряженной сферы

Рассмотрим теперь с помощью теоремы Гаусса, поле, создаваемое равномерно заряженной тонкой сферической оболочкой. Опять начнем с рассмотрения симметрии поля. Очевидно, что поле, также, как распределение зарядов, имеет сфериче-

скую симметрию. Это означает, что модуль вектора напряженности зависит только от расстояния до центра сферы (или во всех точках, находящихся от центра сферы на одном расстоянии, модуль напряженности постоянен), а направление – радиальное, от центра сферы к точке наблюдения.

Выберем в качестве замкнутой поверхности, к которой применим теорему Гаусса, сферу, концентрическую с заряженной оболочкой (рис. 43). Пусть радиус сферы  $r$  больше радиуса оболочки. Тогда во всех точках этой сферы вектор напряженности направлен вдоль нормали к поверхности, а его модуль постоянен. Поэтому поток вектора напряженности через сферу равен произведению модуля напряженности на площадь сферы  $\Phi_E = E \cdot 4\pi r^2$ . По теореме Гаусса, этот поток равен заряду сферы, деленному на электрическую постоянную:  $\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}$ . Из равенства этих выражений получаем зависимость напряженности поля от расстояния:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1)$$

Полученная формула соответствует формуле закона Кулона для точечного заряда, следовательно, вне сферы поле равномерно заряженной сферы

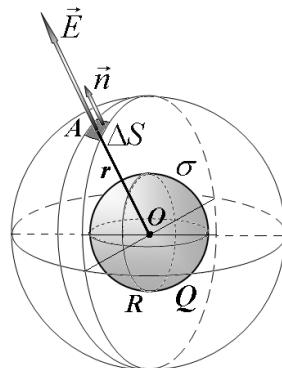


Рис. 43

совпадает с полем точечного заряда, помещенного в центре сферы. Таким образом, результат, на доказательство которого И. Ньютона затратил несколько лет, получен нами почти автоматически. Подчеркнем, что для доказательства формулы (1), помимо теоремы К. Гаусса, опять потребовалось рассмотреть симметрию поля.

Поле внутри заряженной сферической оболочки также должно обладать сферической симметрией. Поэтому поток вектора напряженности электрического поля через сферу, концентрическую с заряженной оболочкой и расположенную внутри нее, также выражается формулой  $\Phi_E = E \cdot 4\pi r^2$ . Однако внутри этой сферы электрических зарядов нет, поэтому из теоремы К. Гаусса следует, что напряженность поля внутри сферы равна нулю. Подчеркнем: если бы теорема Гаусса была несправедлива, то внутри равномерно заряженной сферической оболочки существовало бы электрическое поле.



Рис. 44

**Майкл Фарадей (рис. 44) (1791 – 1867)** – английский физик и химик, основоположник учения об электромагнитном поле.

Майкл Фарадей родился 22 сентября 1791 года в Ньюнгтон-Баттсе (ныне Большой Лондон). Его отец был небогатым кузнецом из лондонского предместья. Кузнецом был и старший брат Роберт, всячески поощрявший тягу Майкла к знаниям и на первых порах поддерживавший

его материально. Мать Фарадея, трудолюбивая, мудрая, хотя и необразованная женщина, дожила до времени, когда ее сын добился успехов и признания, и по праву гордилась им. Скромные доходы семьи не позволили Майклу окончить даже среднюю школу, с тринадцати лет он начал работать как поставщик книг и газет, а затем в возрасте 14 лет пошел работать в книжную лавку, где обучался и переплетному ремеслу. Семь лет работы в мастерской стали для юноши и годами напряженного самообразования. Всё это время Фарадей упорно занимался: он с упоением читал все переплетаемые им научные труды по физике и химии, а также статьи из «Британской энциклопедии», повторял в устроенной им домашней лаборатории эксперименты, описанные в книгах, на самодельных электростатических приборах. Важным этапом в жизни Фарадея стали занятия в Городском философском обществе, где Майкл по вечерам слушал научно-популярные лекции по физике и астрономии и участвовал в диспутах. Деньги (по шиллингу на оплату каждой лекции) он получал от брата. На лекциях у Фарадея появились новые знакомые, которым он писал много писем, чтобы выработать ясный и лаконичный стиль изложения; он также старался овладеть приемами ораторского искусства.

Обратив внимание на тягу юноши к науке, в 1812 году один из посетителей переплетной мастерской, член Лондонского королевского общества Дено, подарил ему билет на цикл публичных лекций знаменитого физика и химика, первооткрывателя многих химических элементов Г. Дэви в Королевском институте. Майкл не только с интересом выслушал, но и подробно записал и переплел четыре лекции, которые послал вместе с письмом профессору Дэви с просьбой взять его на работу в Королевский институт. Этот «смешливый и наивный шаг», по словам самого Фарадея, оказал на его судьбу решающее влияние. Профессор был удивлен обширными знаниями юноши, но в тот момент в институте не было вакантных мест, и просьба Майкла была удовлет-

ворена лишь через несколько месяцев. В 1813 Дэви (не без некоторого колебания) пригласил Фарадея на освободившееся место лаборанта в химической лаборатории Королевского института, где он проработал много лет. В самом начале этой деятельности, осенью того же года, вместе с профессором и его женой он совершил длительное путешествие по научным центрам Европы (1813–1815 гг.). Это путешествие имело для Фарадея большое значение: он вместе с Дэви посетил ряд лабораторий, где познакомился со многими выдающимися учеными того времени, в том числе с А. Ампером, Ж. Л. Гей-Люссаком и А. Вольта, которые, в свою очередь, обратили внимание на блестящие способности молодого англичанина.

После возвращения в 1815 в Королевский институт Фарадей приступил к интенсивной работе, в которой всё большее место занимали самостоятельные научные исследования. В 1816 он начал читать публичный курс лекций по физике и химии в Обществе для самообразования. В этом же году появляется и его первая печатная работа. В 1820 Фарадей провел несколько опытов по выплавке сталей, содержащих никель. Эта работа считается открытием нержавеющей стали, которое не заинтересовало в то время металлургов. В 1821 в жизни Фарадея произошло несколько важных событий. Он получил место надзирателя за зданием и лабораториями Королевского института (то есть технического смотрителя) и опубликовал две значительные научные работы (о вращениях тока вокруг магнита и магнита вокруг тока и о сжижении хлора). В период до 1821 Фарадей опубликовал около 40 научных работ, главным образом по химии. В 1824 ему первому удалось получить хлор в жидком состоянии.

Постепенно его экспериментальные исследования всё более переключались в область электромагнетизма. После открытия в 1820 Х.Эрстедом магнитного действия электрического тока Фарадея увлекла проблема связи между электричеством и магнетизмом. В 1822 в его лабораторном дневнике появилась запись: «Превратить магнетизм в элек-

тричество». В 1831 г. Фарадей экспериментально открыл явление электромагнитной индукции – возникновение электрического тока в проводнике, движущемся в магнитном поле.

В 1832 г. Фарадей открывает электрохимические законы, которые ложатся в основу нового раздела науки – электрохимии, имеющего сегодня огромное количество технологических приложений.

В 1824 Фарадей был избран членом Королевского общества, несмотря на активное противодействие Дэви, отношения с которым стали у Фарадея к тому времени довольно сложными, хотя Дэви любил повторять, что из всех его открытий самым значительным было «открытие Фарадея». Последний также воздавал должное Дэви, называя его «великим человеком». Спустя год после избрания в Королевское общество Фарадея назначают директором лаборатории Королевского института, а в 1827 он получает в этом институте профессорскую кафедру.

Постоянное огромное умственное напряжение подорвало здоровье Фарадея и вынудило его в 1840 прервать на пять лет научную работу. Вернувшись к ней вновь, Фарадей в 1848 открыл явление вращения плоскости поляризации света, распространяющегося в прозрачных веществах вдоль линий напряженности магнитного поля (Фарадея эффект). По-видимому, сам Фарадей (взволнованно написавший, что он «намагнили свет и осветил магнитную силовую линию») придавал этому открытию большое значение. И действительно, оно явилось первым указанием на существование связи между оптикой и электромагнетизмом. Убежденность в глубокой взаимосвязи электрических, магнитных, оптических и других физических и химических явлений стала основой всего научного миропонимания Фарадея.

Другие экспериментальные работы Фарадея этого времени посвящены исследованиям магнитных свойств различных сред. В частности, в 1845 им были открыты явления диамагнетизма и парамагнетизма.

В 1855 болезнь вновь заставила Фарадея прервать работу. Он значительно ослабел, стал катастрофически терять память. Ему приходилось записывать в лабораторный журнал всё, вплоть до того, куда и что он положил перед уходом из лаборатории, что он уже сделал и что собирался делать дальше. Чтобы продолжать работать, он должен был отказаться от многого, в том числе и от посещения друзей; последнее, от чего он отказался, были лекции для детей.

Незадолго до смерти М. Фарадею за научные заслуги предложили принять титул лорда. Фарадей отказался со словами: «Зовите меня просто Майкл Фарадей».

## § 3. Потенциал электростатического поля

### 3.1 Потенциальность электростатического поля. Потенциальная энергия взаимодействия электрического заряда с электрическим полем

Если электрическое поле действует на электрически заряженные тела, то оно способно совершить работу по перемещению заряженных тел.

Электростатическое поле, создаваемое точечным зарядом, является центральным, то есть сила, действующая на точечный заряд в таком поле, направлена вдоль прямой, соединяющей заряд-источник и пробный заряд. Ранее мы показали, что любая центральная сила является потенциальной, то есть работа этой силы не зависит от формы траектории, а определяется только начальным и конечным положением тела.

Вкратце напомним доказательство этого важнейшего утверждения. Пусть точечный пробный заряд  $q$  движется в центральном поле, создаваемом неподвижным зарядом  $Q$  (рис. 45). Сила, действующая на пробный заряд, определяется законом Кулона

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Qq}{|\vec{r}|^3} \vec{r},$$

где  $\vec{r}$  – вектор, проведенный от заряда-источника  $Q$  к точке  $A$ , в которой находится пробный заряд. При движении заряда по дугам окружностей с центром на заряде  $Q$  (например, по дугам  $AB$ ,  $CD$ ) работа электрической силы равна нулю, так как векторы силы и перемещения взаимно перпендикулярны. При движении же в радиальном направлении (например, по отрезкам  $BC$ ,  $DE$ ) работа зависит только от начального и конечного расстояния до заряда-источника. Так, работы электростатического поля при перемещении по отрезкам  $DE$  и  $D'E'$ , очевидно, равны. Самое красивое доказательство этого утверждения связано с симметрией поля: повернем нашу систему вокруг оси, проходящей через источник, так, чтобы отрезок  $D'E'$  совпал с отрезком  $DE$  – распределение поля при этом не изменится, почему должна измениться работа поля?

Так как для напряженности электростатического поля справедлив принцип суперпозиции,

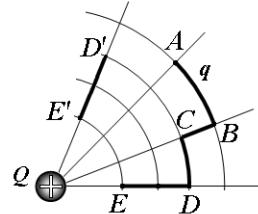


Рис. 45

то потенциальным является любое электростатическое поле. Действительно, пусть точечный заряд находится в электрическом поле, создаваемом системой неподвижных точечных зарядов  $Q_1, Q_2, \dots, Q_k, \dots$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). При перемещении заряда (рис. 46) на малый вектор перемещения  $\Delta\vec{r}$ , по определению, электрическое поле совершил работу  $\delta A = \vec{F}_{\text{рез.}} \cdot \Delta\vec{r} = F_{\text{рез.}} \Delta r \cos \alpha$ , где

$$\vec{F}_{\text{рез.}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_k + \dots = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \quad (1)$$

результатирующая сила, действующая на движущийся заряд  $q$ , равная сумме сил, действующих со стороны каждого из неподвижных точечных зарядов  $Q_k$ . Работа этой силы может быть вычислена по формуле

$$\delta A = \vec{F}_{\text{рез.}} \cdot \Delta\vec{r} = \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot \Delta\vec{r} + \dots + \vec{F}_k \cdot \Delta\vec{r} + \dots = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \cdot \Delta\vec{r}.$$

Для того чтобы вычислить работу по конечному участку траектории, необходимо разбить траекторию на малые участки (рис. 47), затем с помощью формулы (1) вычислить работу на каждом малом участке, после чего их просуммировать:

$$\begin{aligned} A &= \delta A_1 + \delta A_2 + \delta A_3 + \dots = \\ &= \vec{F}_1^{(\text{рез.})} \cdot \Delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2^{(\text{рез.})} \cdot \Delta\vec{r}_2 + \vec{F}_3^{(\text{рез.})} \cdot \Delta\vec{r}_3 + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

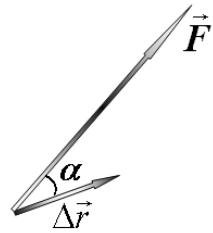


Рис. 46

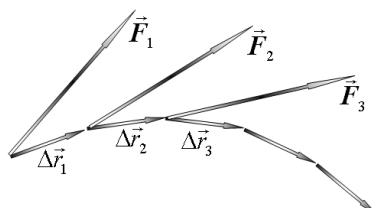


Рис. 47

Фактически данная сумма является двойной, так как каждая результирующая сила является суммой сил, в соответствии с формулой (1). Обратим внимание, что в формуле (2) результирующая сила изменяется, так как вычисляется в разных точках траектории.

Как мы показали ранее, работа электрического поля точечного заряда не зависит от формы траектории, то есть каждое слагаемое из формулы (1) не зависит от формы траектории, следовательно, и вся сумма не зависит от формы траектории.

Таким образом, любое электростатическое поле является потенциальным.

Следовательно, для точечного заряда, находящегося в электростатическом поле можно ввести потенциальную энергию взаимодействия  $U(x, y, z)$ . Эта функция имеет следующий физический смысл: **работа электрического поля при перемещении точечного заряда из одной точки, с координатами  $(x_1, y_1, z_1)$ , в другую, с координатами  $(x_2, y_2, z_2)$ , равна изменению потенциальной энергии, взятому с противоположным знаком:**

$$A = -\Delta U = -(U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1)). \quad (3)$$

Изменение знака в данном определении достаточно логично: если электрическое поле совершило положительную работу ( $A > 0$ ), то его энергия уменьшается  $\Delta U < 0$ .

Для вычисления работы силы взаимодействия между двумя точечными заряженными телами достаточно подсчитать эту работу при движении

вдоль радиального отрезка при изменении расстояния от  $r_1$  до  $r_2$  (рис. 48).

Если построить зависимость силы взаимодействия между зарядами  $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2}$  от расстояния  $r$

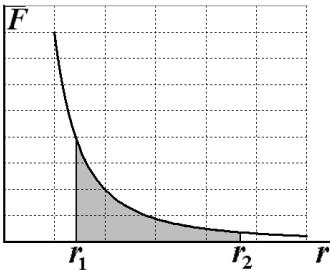


Рис. 49

одним существенным отличием: гравитационная сила всегда есть сила притяжения, а электрическая может быть как силой притяжения, так и силой отталкивания. В частности, два положительных заряда отталкиваются. Поэтому выражение для работы электрического поля будет аналогично формуле для работы гравитационной силы\*, но иметь противоположный знак:

$$A_{12} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

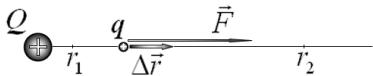


Рис. 48

между телами, площадь под графиком этой зависимости в указанных пределах и будет равна искомой работе (рис. 49). Зависимость силы электростатического взаимодействия от расстояния аналогична силе гравитационного взаимодействия, с

---

\* Вычисление площади под графиком требует привлечения интегрирования (фактически – того же суммирования); чтобы не пугать читателей «страшным» знаком интеграла, просим поверить на слово!

Эта работа равна уменьшению потенциальной энергии взаимодействия, то есть

$$A_{12} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = -\Delta U = -(U_2 - U_1).$$

Из этого выражения можно определить выражение для потенциальной энергии электростатического взаимодействия двух точечных зарядов:

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r}. \quad (4)$$

При таком определении потенциальная энергия взаимодействия двух зарядов одного знака положительна и стремится к нулю при бесконечном расстоянии между телами  $U(\infty) = 0$ . Сила взаимодействия зарядов противоположных знаков направлена в противоположную сторону, поэтому работа этой силы при увеличении расстояния между зарядами будет отрицательна. Однако нам нет необходимости делать какие-то дополнительные оговорки, так как формула (4) автоматически учитывает знаки зарядов: если заряды противоположны, то их произведение (соответственно, и энергия) отрицательно.

Знак потенциальной энергии взаимодействия зарядов имеет очень наглядный смысл. Заряды одного знака отталкиваются, поэтому при их «разбегании» на бесконечно большое расстояние электрическое поле совершил положительную работу – следовательно, изначально система этих зарядов обладает способностью совершить работу, поэтому ее энергия положительна, при удалении зарядов

друг от друга их энергия уменьшается до нуля. Заряды противоположных знаков притягиваются; для того чтобы удалить их на бесконечно большое расстояние, внешние силы должны совершать положительную работу. При этом энергия пары зарядов должна возрастать, следовательно, изначально она отрицательна, а при удалении зарядов друг от друга возрастает до нуля. В целом, обычная ситуация: притяжению соответствует отрицательная энергия, а отталкиванию – положительная. Отметим только, что такая очевидность справедлива только при выборе нулевого уровня потенциальной энергии на бесконечности.

Формула (4) определяет потенциальную энергию взаимодействия двух точечных заряженных тел. Величины зарядов тел  $Q$  и  $q$  входят, как и следовало ожидать, в эту формулу симметрично. Подразделение зарядов на заряд-источник и пробный заряд является условным, их вполне можно поменять местами. Поэтому данную формулу предпочтительнее записывать в симметричном виде: энергия взаимодействия двух точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$  равна

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} \quad (5)$$

и имеет смысл работы, совершающей полем при увеличении расстояния между зарядами от  $r$  до бесконечности, независимо от того, движется ли первый заряд, или второй, или движутся оба заряда, наконец, независимо от траекторий движения обоих зарядов.

Нельзя сказать, какому именно заряду «принадлежит» эта энергия; в дальнейшем мы покажем, что энергия взаимодействия зарядов есть часть энергии самого электростатического поля, то есть она «размазана» по всему пространству, где существует поле, создаваемое этими зарядами.

Если система состоит более чем из двух зарядов (рис. 50), то для подсчета энергии взаимодействия этих зарядов необходимо просуммировать энергии взаимодействия всех **пар** зарядов

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{14} + \dots \\ + U_{23} + U_{24} + \dots$$

$$+ U_{34} + \dots = \sum_{\text{по парам}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_k}{r_{ik}}, \quad (6)$$

здесь  $U_{ik}$  – энергия взаимодействия зарядов  $q_i$  и  $q_k$ , находящихся на расстоянии  $r_{ik}$  друг от друга. Очевидно, что среди  $N$  зарядов существует  $\frac{N(N-1)}{2}$  их пар, именно столько слагаемых должно быть в сумме формулы (6).

С несколько иной формой записи энергии взаимодействия зарядов мы познакомимся чуть позднее. Там же мы объясним, почему энергия взаимодействия может быть представлена как сумма энергий именно парных взаимодействий.

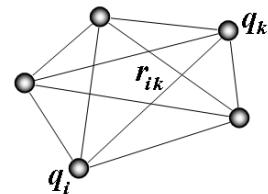


Рис. 50

### **3.2 Потенциал электростатического поля**

Введенная функция  $U(x, y, z)$  (потенциальная энергия взаимодействия точного заряда и электрического поля), естественно, зависит от свойств поля и от величины пробного заряда. Сила, действующая на заряженное тело, пропорциональна заряду, следовательно, и работа, и потенциальная энергия взаимодействия также пропорциональны величине пробного заряда. Поэтому, если работу по перемещению заряженного тела разделить на величину пробного заряда, то получим характеристику поля (не зависящую от пробного заряда). Аналогично, если разделить потенциальную энергию взаимодействия заряда с полем на величину заряда, то получим характеристику поля, которая называется **потенциалом электрического поля**. Итак, потенциалом электрического поля  $\phi(x, y, z)$  называется отношение потенциальной энергии взаимодействия электрического поля и пробного точечного  $U(x, y, z)$  заряда к величине заряда:

$$\phi(x, y, z) = \frac{U(x, y, z)}{q}. \quad (1)$$

Потенциал электрического поля является размernой физической величиной, по определению, размерность потенциала  $[\phi] = \frac{[U]}{[q]} = \frac{\text{дюль}}{\text{кулон}}$ . В системе единиц СИ единица измерения потенциала называется **Вольт** (сокращенно В) и названа в честь итальянского физика АLESSANDRO Вольта. По определению,

$$1 \text{ вольт} = \frac{1 \text{ джоуль}}{1 \text{ кулон}}, 1 B = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ Кл}},$$

или разность потенциалов между двумя точками равна 1 вольту, если при перемещении заряда в 1 кулон электрическое поле совершают работу в 1 джоуль.

### *Задание для самостоятельной работы.*

*1. Выразите единицу разности потенциалов вольт через основные единицы системы СИ.*

Рассуждая о потенциальной энергии, мы неоднократно подчеркивали, что физический смысл имеет только разность потенциальных энергий между точками, или потенциальная энергия определяется с точностью до постоянного слагаемого, которое, в свою очередь, зависит от выбора «нулевого» уровня энергии. Аналогичные рассуждения полностью применимы и к потенциальной энергии взаимодействия поля и заряда, и к потенциалу электростатического поля. Таким образом, для однозначного определения потенциала в любой точке пространства необходимо выбрать *произвольную* точку, в которой потенциал *принимается* равным нулю. Так же, как и в случае гравитационного поля, в качестве точки нулевого потенциала выбирается «бесконечность», то есть точки, удаленные от зарядов на очень большое расстояние  $\phi(\infty) = 0$ .

Особо подчеркнем, что такой выбор является произвольным, не обусловленным никакими физическими законами. Более того, в некоторых

случаях работа поля по перемещению заряда из данной точки на бесконечно большое расстояние равна бесконечности, в таких случаях условие  $\varphi(\infty) = 0$  невозможно.

При выборе «нулевого» уровня на бесконечности  $\varphi(\infty) = 0$  потенциал электростатического поля равен работе поля по перемещению единичного положительного заряда из данной точки на бесконечность:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{A_{(x, y, z) \rightarrow \infty}}{q}.$$

Разность потенциалов двух точек не зависит от выбора уровня нулевого потенциала, поэтому именно эта величина имеет явный физический смысл и поддается измерению. Работа, совершаемая силами электрического поля по перемещению единичного положительного заряда, равна разности потенциалов между этими точками, взятой с противоположным знаком:  $A_{1 \rightarrow 2} = -(\varphi_2 - \varphi_1)$ . Данное высказывание также можно рассматривать как определение разности потенциалов.

Введенная нами ранее напряженность электрического поля является точечной характеристикой поля: она однозначно определяется свойствами поля в рассматриваемой точке. Несмотря на то что мы определили потенциал тоже в конкретной пространственной точке, потенциал является интегральной характеристикой поля, так как зависит от свойств поля в области от рассматриваемой точки вплоть до точки нулевого потенциала.

Используя определение потенциала и выведенную формулу для потенциальной энергии взаимодействия зарядов, легко получить выражение для потенциала электростатического поля, созданного точечным зарядом  $Q$ :

$$\varphi(x, y, z) = \frac{U(r)}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, \quad (2)$$

где  $r$  – расстояние от заряда – источника  $Q$  до точки наблюдения с координатами  $(x, y, z)$ , в которой вычисляется потенциал поля. Так, если заряд находится в точке с координатами  $(x_1, y_1, z_1)$ , а потенциал вычисляется в точке с координатами  $(x_0, y_0, z_0)$ , расстояние между этими точками рассчитывается по формуле

$$r = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}.$$

Легко доказать, что для потенциала электростатического поля **также справедлив принцип суперпозиции: потенциал поля, созданного системой зарядов  $Q_1, Q_2, \dots, Q_k \dots (k = 1, 2, \dots, N)$  равен сумме потенциалов, создаваемых каждым зарядом в отдельности:**

$$\Phi_{рез.} = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_k + \dots = \sum_{k=1}^N \Phi_k.$$

Таким образом, при известном распределении зарядов задача вычисления потенциала в произвольной точке становится чисто технической проблемой вычисления громоздких сумм. В некоторых случаях такое суммирование проводится элементарно, в других – требует привлечения ин-

тегрального исчисления, а иногда и компьютерных расчетов. Однако в любом случае это проблема математическая; физически задача решена: для потенциала справедлив принцип суперпозиции, а потенциал поля точечного заряда определяется формулой (2).

### *Задание для самостоятельной работы.*

*1. Докажите принцип суперпозиции для потенциала электростатического поля.*

### **3.3 Связь между потенциалом и напряженностью электрического поля**

Потенциал является важной характеристикой электрического поля, он определяет всевозможные энергетические характеристики процессов, проходящих в электрическом поле. Кроме того, расчет потенциала поля проще расчета напряженности хотя бы потому, что является скалярной (а не векторной) величиной. Безусловно, потенциал и напряженность поля связаны между собой, и сейчас мы установим эту связь.

Пусть в произвольном электростатическом поле точечный заряд  $q$  совершил малое перемещение  $\Delta\vec{r}$  из точки 1 в точку 2 (рис. 51). Пренебрегая изменением напряженности поля  $\vec{E}$  на этом участке, работу, совершенную полем, можно записать в виде:

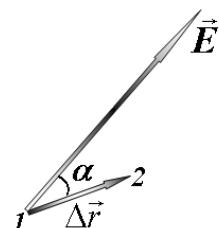


Рис. 51

$$\delta A = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = q \vec{E} \cdot \Delta \vec{r}.$$

По определению, эта величина равна разности потенциалов, взятой с противоположным знаком, деленной на величину заряда, поэтому

$$\Delta\phi = -(\phi_2 - \phi_1) = -\frac{\delta A}{q} = -\vec{E} \cdot \Delta \vec{r}. \quad (1)$$

Если расстояние между точками 1 и 2 не является малым, то необходимо эти точки соединить произвольной линией (рис. 52), разбить ее на малые участки  $\Delta \vec{r}_1, \Delta \vec{r}_2, \Delta \vec{r}_3$  и просуммировать разности потенциалов (1) между ними:

$$\phi_1 - \phi_2 = \vec{E}_1 \cdot \Delta \vec{r}_1 + \vec{E}_2 \cdot \Delta \vec{r}_2 + \vec{E}_3 \cdot \Delta \vec{r}_3 + \dots \quad (2)$$

Формула (2) позволяет рассчитать разность потенциалов между произвольными точками по известным значениям напряженности поля во всех точках.

Особенно просто выражается связь между разностью потенциалов и напряженностью поля, если поле является однородным. В этом случае разность потенциалов между точками, находящимися на одной силовой линии (она в этом случае – прямая) на расстоянии  $l$  друг от друга, равна  $\Delta\phi = -El$ .

Как и следовало ожидать, связь между разностью потенциалов и напряженностью поля аналогична связи между изменением потенциальной энергии и действующей силой. Так, если проек-

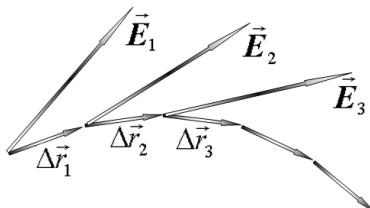


Рис. 52

ция вектора напряженности на ось  $X$  изменяется по некоторому закону  $E_x(x)$  (рис. 53), то площадь под графиком этой функции между точками с координатами  $x_1$  и  $x_2$  численно равна разности потенциалов между этими точками, взятой с противоположным знаком (рис. 54).

Если двигаться вдоль направления вектора напряженности, то потенциал поля будет уменьшаться, так как при таком движении поле совершает положительную работу, поэтому энергия взаимодействия уменьшается.

Так как электростатическое поле является потенциальным, то результат суммирования в формуле (2) не зависит от выбранной линии, важно только, чтобы она начиналась в точке 1 и заканчивалась в точке 2. Кстати, с подобной конструкцией – сумма скалярных произведений вектора на малый элемент траектории – мы уже неоднократно встречались. Напомним, что такая сумма, вычисленная по замкнутой траектории, называется циркуляцией векторного поля.

Так как электростатическое поле потенциально, то циркуляция вектора напряженности электростатического поля по любой замкнутой линии равна нулю:  $\Gamma_E = 0$  (рис. 55).

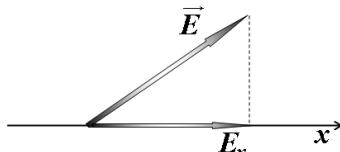


Рис. 53

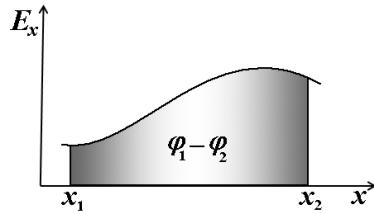


Рис. 54

$$\Gamma_E = 0$$

Рис. 55

Таким образом, мы сформулировали вторую важнейшую теорему для вектора напряженности стационарного электрического поля. Никакого нового физического содержания в этой теореме нет – это просто повторение в иной форме свойства потенциальности. Заметим также, что теорема о циркуляции утверждает, что в электростатическом поле не может быть замкнутых силовых линий, все силовые линии начинаются и заканчиваются на электрических зарядах, или, что равносильно, единственными источниками электростатического поля являются электрические заряды. Заметим, что данное утверждение справедливо только в статических полях (не зависящих от времени); в дальнейшем мы познакомимся с электрическими полями, в которых существуют замкнутые силовые линии, такие поля порождаются изменяющимися магнитными полями.

*Задание для самостоятельной работы.*

*Докажите, что в электростатическом поле не могут существовать замкнутые силовые линии.*

Формула (1) позволяет выразить значение вектора напряженности через известное распределение потенциала поля. Только не следует делить на вектор: такая операция в математике еще не определена. Рассмотрим две близкие точки 1 и 2, находящиеся на прямой, параллельной оси  $x$  на малом расстоянии  $\Delta x$  (рис. 56). Пусть напряженность вблизи этих точек равна  $\vec{E}$ , ее изменением

пренебрежем из-за близости рассматриваемых точек. Тогда разность потенциалов между этими точками равна  $-\Delta\phi = \varphi_1 - \varphi_2 = \vec{E} \cdot \Delta\vec{r} = E_x \Delta x$ .

Из этого выражения\* законно находим проекцию вектора напряженности на ось  $X$ :

$$E_x = -\frac{\Delta\phi}{\Delta x} = -\frac{\varphi(x + \Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z)}{\Delta x}. \quad (3)$$

Аналогично, рассматривая две близкие точки 1 и 3, находящиеся на прямой, параллельной оси  $Y$  на малом расстоянии  $\Delta y$ , можно получить выражение для проекции вектора напряженности на ось  $Y$ :

$$E_y = -\frac{\Delta\phi}{\Delta y} = -\frac{\varphi(x, y + \Delta y, z) - \varphi(x, y, z)}{\Delta y}. \quad (4)$$

Выражение для проекции вектора на ось  $Z$  —  $E_z$  также полностью аналогично

$$E_z = -\frac{\Delta\phi}{\Delta z} = -\frac{\varphi(x, y, z + \Delta z) - \varphi(x, y, z)}{\Delta z}. \quad (5)$$

Особо отметим, что величины  $\Delta\phi$ , фигурирующие в формулах (3)–(5), различны, так как они выражают разности потенциалов между близкими, но смещенными в различных направлениях точками.

Полученным выражениям для напряженности поля можно дать и графическую интерпретацию

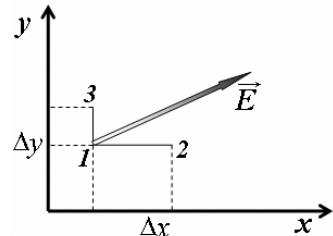


Рис. 56

---

\* Для тех, кто не боится простейшей высшей математики, — эта операция есть вычисление производной!

(рис. 57): коэффициент наклона касательной к графику зависимости  $\varphi(x)$ , взятый с обратным знаком, численно равен проекции вектора напряженности на ось  $x$ .

В общем случае потенциал электрического поля зависит от трех координат точки, поэтому графически представить эту зависимость невозможно. Мы уже пользовались зависимостью потенциала от одной координаты  $\varphi(x)$  и строили графики этой зависимости. Фактически, мы задавали зависимость потенциала от одной координаты при движении вдоль прямой, параллельной оси  $x$ ; если мы выберем другую прямую, также параллельную оси  $x$ , то получим другую функцию  $\varphi(x)$ . Поэтому при рассмотрении подобных зависимостей надо явно указывать, на какой прямой рассматривается потенциал. Проще всего, во избежание путаницы, указывать в явном виде, при каких значениях других координат  $y_0 = \text{const}$ ,  $z_0 = \text{const}$  рассматривается зависимость  $\varphi(x) = \varphi(x, y_0, z_0)$ . Точно так же можно изучать зависимость потенциала от двух координат, считая третью постоянной: например,  $\varphi(x, y) = \varphi(x, y, z_0)$ . То есть рассматривать распределение потенциала в некоторой плоскости, параллельной координатной плоскости  $xOy$ , находящейся на расстоянии  $z_0$  от нее. Графически эта зависимость может быть представлена некоторой поверхностью, высота точек которой пропорциональна потенциа-

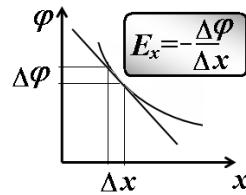


Рис. 57

лу в данной точке; такую поверхность далее будем называть потенциальной, по аналогии с потенциальными кривыми, рассмотренными нами ранее. Так, на рисунке в качестве примера показана потенциальная поверхность поля точечного заряда в плоскости, содержащей этот заряд.

Если точечный заряд  $q$  находится в начале некоторой системы координат, то потенциал поля, создаваемого этим зарядом в произвольной точке с координатами  $(x, y, z)$ , определяется формулой

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (6)$$

Если мы хотим построить распределение потенциала в плоскости  $xOy$ , то в формуле (6) следует положить  $z = 0$ . Поверхность, описываемая этим уравнением, показана на рис. 58. Заметим, что в начале координат потенциал стремится к бесконечности, поэтому изображение потенциальной поверхности искусственно обрезано сверху.

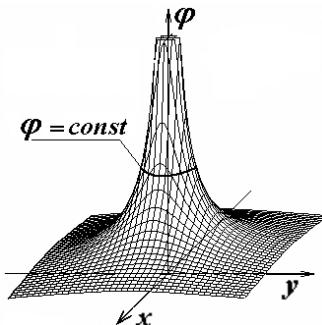


Рис. 58

Потенциальные поверхности строить нелегко, для этого, как правило, используется компьютер. Однако изображения таких поверхностей бывают очень полезными при анализе движения заряженных частиц. Так, движение положительно заряженной частицы в поле, описываемом заданной потенциальной поверхностью, аналогично движе-

нию массивного шарика в поле тяжести земли по геометрической поверхности, которая совпадает с потенциальной.

На рис. 59 построены потенциальные поверхности поля, создаваемого двумя одинаковыми по модулю зарядами: а) одинаковых знаков; б) противоположных знаков.

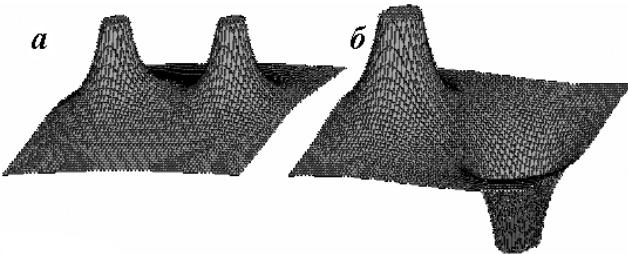


Рис. 59

Вторым способом графического представление потенциала является построение **эквипотенциальных поверхностей**, то есть геометрического места точек, имеющих одинаковый потенциал, то есть удовлетворяющих уравнению  $\phi(x, y, z) = \phi_0 = \text{const.}$

Так, для поля точечного заряда (1) эквипотенциальными поверхностями являются сферы, концентрические с точечным зарядом – все точки, находящиеся на одинаковом расстоянии от заряда, имеют одинаковый потенциал. Формально, уравнение эквипотенциальной сферы можно получить из функции (6). Из уравнения

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \phi_0$$

следует уравнение сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0\Phi_0}\right)^2$ , причем сфера большего потенциала имеет меньший радиус.

Симметрия эквипотенциальных поверхностей повторяет симметрию источников поля. Так, поле точечного заряда сферически симметрично, но и эквипотенциальные поверхности обязаны быть сферами.

Конечно, для увеличения наглядности, следует рассматривать не одну эквипотенциальную поверхность, а их семейство. Однако изобразить графически семейство сложных поверхностей на одном рисунке крайне затруднительно. Поэтому часто графически изображают только сечения эквипотенциальных поверхностей некоторой плоскостью, или, что равносильно, множества точек равного потенциала в некоторой плоскости (которые являются линиями).

Линии равного потенциала и потенциальные поверхности тесно связаны между собой. Фактически, линии равного потенциала являются сечениями потенциальной поверхности.

Семейство эквипотенциальных линий полностью аналогично линиям равной высоты (изолиниям) на географической карте. На карте эти линии соединяют точки поверхности, находящиеся на одной высоте над уровнем моря. Кроме того, принято проводить эти линии так, чтобы высота уровня изменялась между соседними линиями на одну

и ту же высоту (например, 10 м). Аналогичное правило применяется и при построении эквипотенциальных линий электрического поля: разность потенциалов между двумя соседними линиями постоянна. Поэтому густота этих линий больше там, где потенциал изменяется быстрее, следовательно, в этих областях напряженность поля выше.

На рис. 60 показана потенциальная поверхность электростатического поля, созданного двумя точечными зарядами одного знака, но разной величины, в плоскости, содержащей эти заряды. Ниже построено семейство эквипотенциальных линий этого поля в той же плоскости. Эти линии являются линиями уровня для потенциальной поверхности.

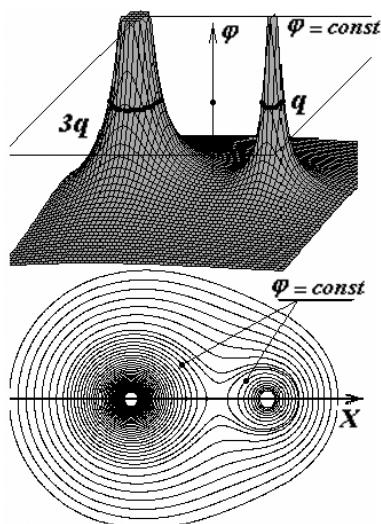


Рис. 60

В данном примере легко вообразить и семейство трехмерных эквипотенциальных поверхностей. Система двух точечных зарядов обладает осевой симметрией: осью симметрии является прямая, проходящая через оба заряда; на рисунке она обозначена как ось  $X$ . Поэтому и поле, и его эквипотенциальные поверхности обладают осевой симметрией – достаточно повернуть картину эквипотенциальных линий вокруг оси  $X$ ,

чтобы получить семейство эквипотенциальных поверхностей.

Эквипотенциальные поверхности также тесно связаны с силовыми линиями электрического поля. Если электрический заряд перемещается по эквипотенциальной поверхности, то работа поля равна нулю; так, работа по перемещению заряда  $q$  пропорциональна изменению потенциала  $\delta A = -q\Delta\phi$ , а на эквипотенциальной поверхности  $\Delta\phi = 0$ . С другой стороны, эта работа выражается через напряженность поля  $\vec{E}$  как  $\delta A = q\vec{E} \cdot \Delta\vec{r} = qE\Delta r \cos\alpha$  (где  $\Delta\vec{r}$  – вектор перемещения заряда,  $\alpha$  – угол между векторами напряженности поля и перемещения). Если вектор перемещения направлен вдоль эквипотенциальной поверхности, то работа поля равна нулю, следовательно, вектор напряженности в этом случае перпендикулярен вектору перемещения (косинус прямого угла равен нулю).

Таким образом, силовые линии электростатического поля всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям (рис. 61).

Если же вектор перемещения направлен вдоль силовой линии, то изменение потенциала будет максимальным, следовательно, силовые линии указывают направления максимального изменения (точнее, уменьшения) потенциала.

В заключение данного раздела для его украшения на рис. 62 показаны одновременно семейства

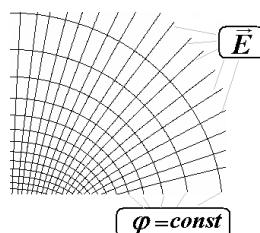


Рис. 61

силовых линий и семейство эквипотенциальных поверхностей поля двух точечных зарядов, рассмотренных ранее. Постарайтесь вообразить пространственную картину силовых линий и эквипотенциальных поверхностей в этом случае.

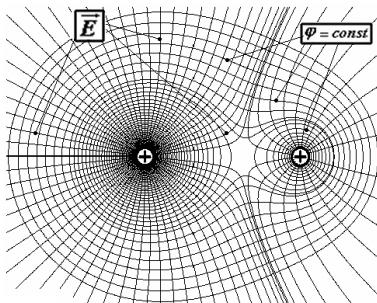


Рис. 62

### *Задание для самостоятельной работы.*

*Как будет выглядеть эта картина на расстояниях, значительно превышающих расстояние между заряженными телами?*

## 3.4 Примеры расчета потенциалов электростатических полей

### 3.4.1 Поле равномерно заряженной сферы

Пусть электрическое поле создается зарядом  $Q$ , равномерно распределенным по поверхности сферы радиуса  $R$  (рис. 63). Примем, что потенциал поля обращается в нуль на бесконечном расстоянии от сферы:  $\phi(\infty) = 0$ . Для вычисления потенциала поля в произвольной точке, находящейся на расстоянии  $r$  от центра сферы, необходимо вычислить работу, совершающую по-

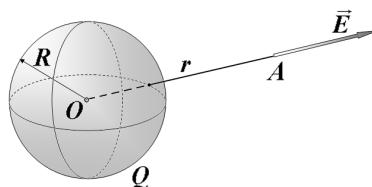


Рис. 63

лем при перемещении единичного положительного заряда от данной точки до бесконечности. Ранее мы доказали, что напряженность поля равномерно заряженной сферы вне ее эквивалентна полю точечного заряда, расположенного в центре сферы:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Так как потенциал поля равен работе по перемещению единичного положительного заряда из данной точки на бесконечность (в этой области поля сферы и точечного заряда совпадают), то вне сферы потенциал поля сферы будет совпадать с потенциалом поля точечного заряда:

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1)$$

В частности, на поверхности сферы потенциал равен  $\varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ .

Внутри сферы электростатическое поле отсутствует, поэтому работа по перемещению заряда из произвольной точки, находящейся внутри сферы, на ее поверхность равна нулю  $A = 0$ , поэтому и разность потенциалов между этими точками также равна нулю:  $\Delta\varphi = -A = 0$ . Следовательно, все точки внутри сферы имеют один и тот же потенциал, совпадающий с потенциалом ее поверхности:

$$\varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Итак, потенциал поля определяется выражением

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}, & \text{при } r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, & \text{при } r > R. \end{cases} \quad (2)$$

Графики зависимости модуля напряженности и потенциала поля, созданного равномерно заряженной сферой, показаны на рис. 64. Еще раз напомним: значение потенциала в точке, находящейся на расстоянии от центра сферы, численно равно площади под кривой зависимости напряженности от расстояния (на рис. 64 она заштрихована).

Обратите внимание: поле внутри сферы отсутствует, а потенциал отличен от нуля! Этот пример является яркой иллюстрацией того, что потенциал определяется распределением поля от данной точки до бесконечности.

Наконец, построим картину силовых линий и эквипотенциальных поверхностей поля, созданного равномерно заряженной сферой: силовые линии являются радиальными прямыми лучами, начинаящимися на поверхности сферы; а эквипотенциальные поверхности —

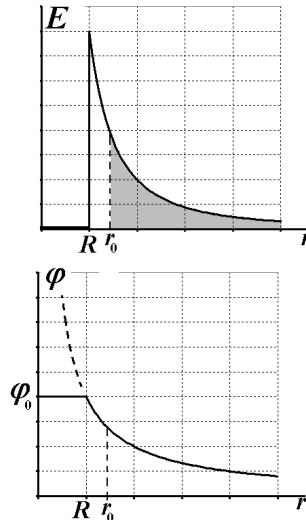


Рис. 64

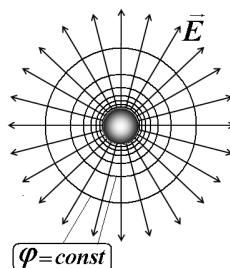


Рис. 65

концентрические сферы. На рис. 65 эквипотенциальные поверхности проведены так, что разности потенциалов между соседними сферами постоянны, поэтому радиусы сфер изменяются непропорционально.

### 3.4.2 Поле равномерно заряженного кольца

Вычислим потенциал поля, создаваемого зарядом  $Q$ , равномерно распределенным по тонкому кольцу радиуса  $R$ , причем ограничимся расчетом потенциала поля только на оси кольца (рис. 66). Ранее мы вычислили напряженность поля на оси кольца как функцию расстояния до его центра. Поэтому для вычисления потенциала можно, в принципе, подсчитать работу, совершающую полем при перемещении заряда от данной точки до бесконечности. Однако в данном случае проще воспользоваться принципом суперпозиции для потенциала поля. Для этого мысленно разобьем кольцо на малые участки, несущие заряд  $\Delta Q_k$ . Тогда в точке, находящейся на расстоянии  $z$  от его центра, этот заряд создает поле, потенциал которого равен

$$\delta\varphi_k = \frac{\Delta Q_k}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\Delta Q_k}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}}.$$

Так как все точки кольца находятся на одинаковом расстоянии  $r = \sqrt{R^2 + z^2}$  от рассматриваемой

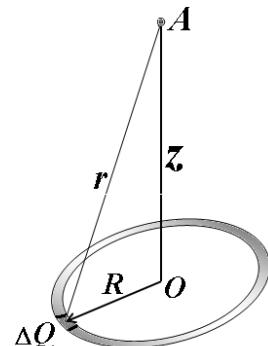


Рис. 66

точки, то суммирование потенциалов полей, создаваемых зарядами  $\Delta Q_k$ , сводится к суммированию самих зарядов

$$\begin{aligned}\varphi = \sum_k \delta\varphi_k &= \sum_k \frac{\Delta Q_k}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} \sum_k \Delta Q_k = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}}.\end{aligned}\quad (3)$$

График этой функции показан на рис. 67. Там же повторен график зависимости напряженности поля кольца на его оси от расстояния до центра кольца. Напомним, что значения потенциала  $\varphi(z_0)$  в точке с координатой  $z_0$  численно равны площади под графиком зависимости  $E(z)$  в интервале от  $z_0$  до  $z \rightarrow \infty$ .

Обратите внимание: так как проекция вектора напряженности не изменяет свой знак, то функция  $\varphi(z)$  является монотонной.

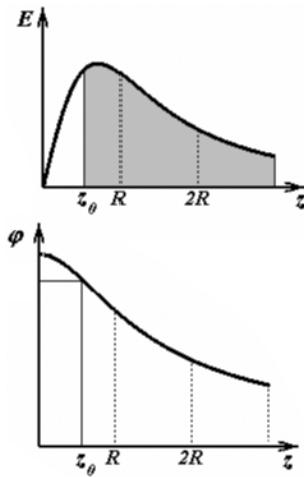


Рис. 67

### 3.4.3 Поле равномерно заряженной бесконечной пластины

Ранее мы показали, что электрическое поле, создаваемое бесконечной равномерно заряженной пластиной, является однородным, то есть напряженность поля одинакова во всех точках, при-

чем вектор напряженности направлен перпендикулярно плоскости, а его модуль равен  $E_0 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ , где  $\sigma$  – поверхностная плотность зарядов на пластине (рис. 68). Семейством силовых линий такого поля является набор параллельных прямых,

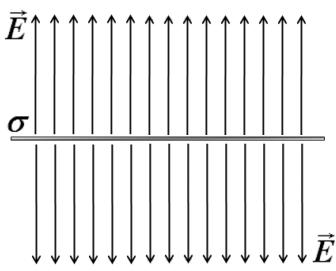


Рис. 69

от координаты  $z$ , то есть эквипотенциальные поверхности в данном случае являются плоскостями, параллельными заряженной пластине.

При традиционном выборе нулевого уровня потенциала  $\phi(z \rightarrow \infty) = 0$  потенциал произвольной точки равен работе по перемещению единичного положительного заряда из данной точки в бесконечность. Так как модуль напряженности постоян-

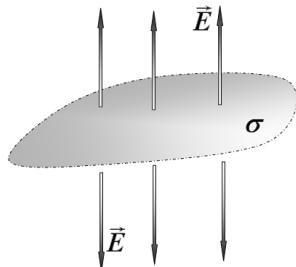


Рис. 68

перпендикулярных пластине (рис. 69). На рис. 70 изображен график зависимости проекции вектора напряженности поля  $E_z$  на ось  $Z$ , перпендикулярную пластине (начало отсчета этой оси расположим на пластине). Понятно, что потенциал данного поля зависит только

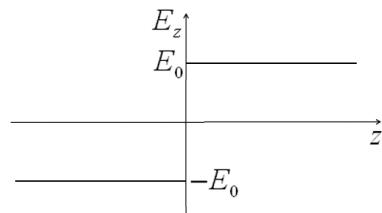


Рис. 70

нен, то такая работа (а следовательно, и потенциал) оказывается равной бесконечности! Следовательно, указанный выбор нулевого уровня потенциала в данном случае непригоден.

Поэтому следует воспользоваться произволом выбора нулевого уровня. Достаточно выбрать произвольную точку с координатой  $z = z_0$  и приписать ей произвольное значение потенциала  $\phi(z_0) = \phi_0$ . Теперь, чтобы вычислить значение потенциала в произвольной точке  $\phi(z)$ , можно воспользоваться соотношением между напряженностью и потенциалом поля  $\Delta\phi = -\vec{E} \cdot \Delta\vec{r}$ . Учитывая, что в данном случае напряженность поля постоянна (при  $z > 0$ ), это выражение записывается в виде

$$\phi(z_0) - \phi(z) = -E_0(z_0 - z),$$

из которого следует искомая зависимость потенциала от координаты (при  $z > 0$ )

$$\phi(z) = \phi_0 - E_0(z - z_0). \quad (4)$$

В частности, можно задать произвольное значение потенциала самой пластины, то есть положить при  $z = z_0 = 0$   $\phi = \phi_0$ . Тогда значение потенциала в произвольной точке определяется функцией

$$\phi(z) = \phi_0 - E_0|z|, \quad (5)$$

график которой показан на рисунке 71.

Построим также семейство эквипотенциальных поверхностей, которое в данном случае состоит из плоскостей, параллельных пластине. Если

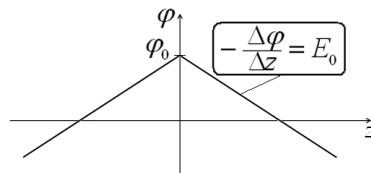


Рис. 71

использовать общепринятое правило построения (разность потенциалов между соседними плоскостями постоянна), то эти плоскости будут равноотстоящими\* (рис. 72).

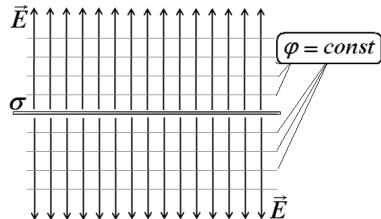


Рис. 72

То, что потенциал относительно бесконечности оказался бесконечно большим, вполне очевидно: ведь и бесконечная пластина обладает бесконечно большим зарядом. Как мы уже подчеркивали, такая система является идеализацией: бесконечных пластин не существует. В реальности все тела имеют конечные размеры, поэтому для них традиционный выбор нулевого потенциала возможен, правда, в этом случае распределение поля может быть очень сложным. В рамках же рассматриваемой идеализации удобнее воспользоваться использованным нами выбором нулевого уровня.

#### **3.4.4 Поле двух параллельных равномерно заряженных пластин**

Найдем распределение потенциала поля, создаваемого двумя одинаковыми равномерно заряженными параллельными пластинами, заряды которых равны по модулю и противоположны по знаку\*\* (рис. 73). Обозначим поверхностную плот-

\* Попробуйте придумать более простой вид поля!

\*\* Такая система называется плоским конденсатором, подробнее эти устройства мы будем изучать позже.

ность заряда на одной пластине  $+σ$ , а на другой  $-σ$ . Расстояние между пластинами  $h$  будем считать значительно меньшим размеров пластин. Введем систему координат, ось  $z$  которой перпендикулярна пластинам, начало координат разместим посередине между пластинами. Очевидно, что для бесконечно больших пластин все характеристики поля (напряженность и потенциал) зависят только от координаты  $z$ . Для расчета напряженности поля в различных точках пространства воспользуемся полученным выражением для напряженности поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной пластиной, и принципом суперпозиции.

Каждая равномерно заряженная пластина создает однородное поле, модуль напряженности которого равен  $E_0 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ , а направления указаны на рис. 74.

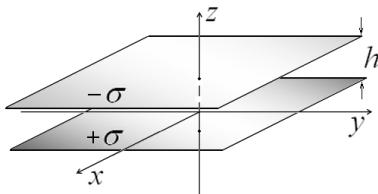


Рис. 73

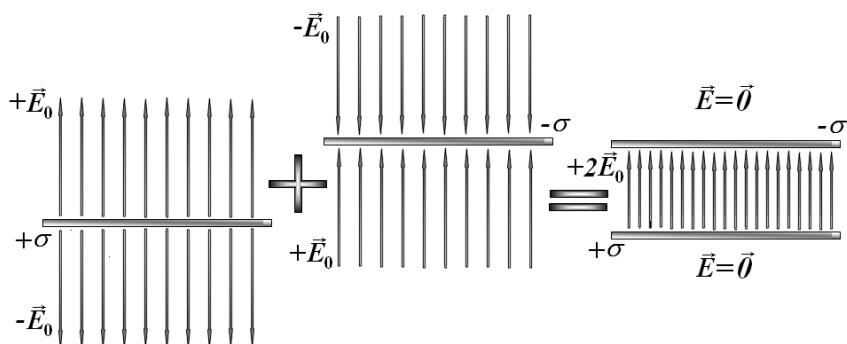


Рис. 74

Складывая напряженности полей по принципу суперпозиции, получим, что в пространстве между пластинами напряженность поля  $E = 2E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  вдвое превышает напряженность поля одной пластины (здесь поля отдельных пластин параллельны), а вне пластин поле отсутствует (здесь поля отдельных пластин противоположны).

Строго говоря, для пластин конечных размеров поле не является однородным, силовые линии поля пластин конечных размеров показаны на рис. 75. Наиболее сильные отклонения от однородности наблюдаются вблизи краев пластин, часто эти отклонения называют **краевыми эффектами**. Но в области, прилегающей к середине пластин, поле с высокой степенью точности можно считать однородным, то есть в этой области можно пренебречь краевыми эффектами. Заметим, что погрешности такого приближения тем меньше, чем меньше отношение расстояния между пластинами к их размерам.

Для однозначного определения распределения потенциала поля необходимо выбрать уровень нулевого потенциала. Будем считать, что потенциал равен нулю в плоскости, расположенной посередине между пластинами, то есть положим  $\phi = 0$  при  $z = 0$ .

Несмотря на произвол в выборе нулевого уровня потенциала, наш выбор может быть логически

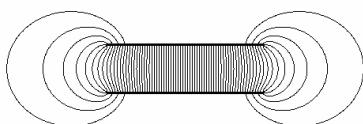


Рис. 75

обоснован на основании симметрии системы. Действительно, рассматриваемая система зарядов зеркально повторяет себя при зеркальном отражении относительно плоскости  $z = 0$  и одновременном изменении знаков зарядов. Поэтому желательно, чтобы и распределение потенциала обладало такой же симметрией: восстановливалось при зеркальном отражении с одновременным изменением знака всех функций поля. Выбранный нами способ выбора нулевого потенциала удовлетворяет такой симметрии.

Обозначим потенциал положительно заряженной пластины  $+\varphi_0$ , тогда потенциал отрицательно заряженной пластины будет равен  $-\varphi_0$ . Эти потенциалы легко определить, используя найденное значение напряженности поля между пластинами и связь между напряженностью и разностью потенциалов электрического поля. Уравнение этой связи в данном случае имеет вид  $\varphi_0 - (-\varphi_0) = Eh$ . Из этого соотношения определяем значения потенциалов пластин  $\varphi_0 = \frac{\sigma h}{2\varepsilon_0}$ . Учитывая, что между пластинами поле однородное (поэтому потенциал изменяется линейно), а вне пластин поле отсутствует (поэтому здесь потенциал постоянен), зависимость потенциала от координаты  $z$  имеет вид (рис. 76)

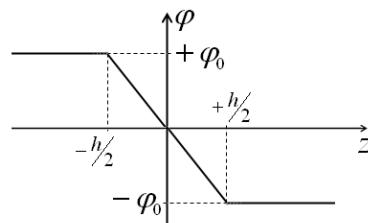


Рис. 76

$$\varphi(z) = \begin{cases} +\Phi_0, & \text{при } z < -\frac{h}{2} \\ -2\frac{\Phi_0}{h}z, & \text{при } -\frac{h}{2} < z < +\frac{h}{2} \\ -\Phi_0, & \text{при } z > +\frac{h}{2}. \end{cases} \quad (6)$$

### **Задания для самостоятельной работы.**

**1. Во всех рассмотренных примерах проделайте обратную операцию: по найденному распределению потенциала с помощью формулы  $E_x = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$  рассчитайте напряженности рассмотренных полей.**

**2. Качественно объясните следующий «парадокс». В поле плоского конденсатора неоднозначно определен потенциал «бесконечности»: при движении в положительном направлении оси  $Z$  потенциал «бесконечности» оказался равным  $-\Phi_0$ ; при движении в отрицательном направлении оси  $Z$  –  $+\Phi_0$ , при движении вдоль осей  $X$  или  $Y$  – равен нулю. Так чему равен потенциал «бесконечности» в реальной системе двух пластин конечных размеров?**

#### **3.4.5 Электрический диполь**

Часто возникает необходимость найти характеристики электрического поля, создаваемого системой зарядов, локализованных в небольшой области пространства. Примером такой системы зарядов могут служить атомы и молекулы, состоящие из электрически заряженных ядер и электро-

нов. Если требуется найти поле на расстояниях, которые значительно больше размеров области расположения частиц, то нет необходимости пользоваться точными, но громоздкими формулами, достаточно ограничиться более простыми приближенными выражениями.

Пусть электрическое поле создается набором точечных зарядов  $q_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ), расположенных в пределах небольшой области пространства, характерные размеры которой обозначим  $l$  (рис. 77). Для расчета характеристик электрического поля в некоторой точке  $A$ , находящейся на расстоянии  $r$ , значительно превышающем  $l$ , все заряды системы можно «объединить» и рассматривать систему зарядов как точечный заряд  $Q$ , величина которого равна сумме зарядов исходной системы:

$$Q = q_1 + q_2 + \dots + q_N = \sum_{k=1}^N q_k \quad (1)$$

Этот заряд можно мысленно расположить в любой точке области расположения системы зарядов  $q_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ), так как при  $l \ll r$  изменение положения в пределах малой области незначительно влияет на изменение поля в рассматриваемой точке.

В рамках такого приближения напряженность и потенциал электрического поля определяются по известным формулам

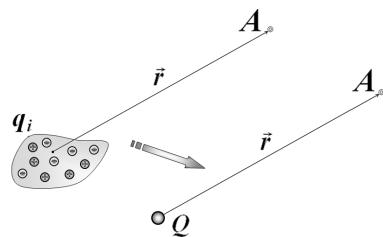


Рис. 77

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (2)$$

Если суммарный заряд системы равен нулю, то указанное приближение является слишком грубым, приводящим к выводу об отсутствии электрического поля.

Более точное приближение можно получить, если мысленно собрать отдельно положительные и отрицательные заряды рассматриваемой системы. Если их «центры» смещены друг относительно друга, то электрическое поле такой системы может быть описано как поле двух точечных зарядов, равных по величине и противоположных по знаку, смещенных друг относительно друга. Более точную характеристику системы зарядов в этом приближении мы дадим немного позднее, после изучения свойств электрического диполя.

**Электрическим диполем называется система, состоящая из двух точечных зарядов, одинаковых по величине и противоположных по знаку, расположенных на малом расстоянии друг от друга.**

Рассчитаем характеристики электрического поля, создаваемого диполем, состоящим из двух точечных зарядов  $+q$  и  $-q$ , расположенных на расстоянии  $a$  друг от друга (рис.

78). Сначала найдем потенциал и напряженность электрического поля диполя на его оси, то есть на прямой, проходящей через оба заряда. Пусть точ-

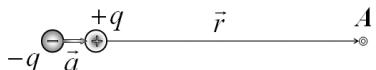


Рис. 78

ка  $A$  находится на расстоянии  $r$  от центра диполя, причем будем считать, что  $r \gg a$ . В соответствии с принципом суперпозиции потенциал поля в данной точке описывается выражением

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left( r - \frac{a}{2} \right)} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left( r + \frac{a}{2} \right)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{a}{r^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2} \approx \frac{qa}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (3)$$

На последнем шаге мы пренебрегли малой величиной  $\left( \frac{a}{2} \right)^2$  по сравнению с  $r^2$ . Величину вектора напряженности электрического поля также можно вычислить на основании принципа суперпозиции:

$$\begin{aligned} E &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left( r - \frac{a}{2} \right)^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left( r + \frac{a}{2} \right)^2} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2ar}{\left( r^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right)^2} \approx \frac{qa}{2\pi\epsilon_0 r^3}. \end{aligned} \quad (4)$$

Напряженность поля можно вычислить другим способом, используя соотношение между потенциалом и напряженностью поля  $E_x = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}$ . В данном случае вектор напряженности направлен вдоль оси диполя, поэтому его модуль рассчитывается следующим образом:

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\Delta\Phi}{\Delta r} = -\frac{\Phi(r + \Delta r) - \Phi(r)}{\Delta r} = -\frac{qa}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\Delta r} \left( \frac{1}{(r + \Delta r)^2} - \frac{1}{r^2} \right) = \\ &= -\frac{qa}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\Delta r} \frac{-2r\Delta r - (\Delta r)^2}{r^2 (r + \Delta r)^2} \approx \frac{qa}{2\pi\epsilon_0 r^3}. \end{aligned} \quad (5)$$

Обратите внимание, что поле диполя ослабевает быстрее поля точечного заряда, так как потенциал поля диполя убывает обратно пропорционально квадрату расстояния, а напряженность поля – обратно пропорционально кубу расстояния.

Аналогичным, но более громоздким, способом можно найти потенциал и напряженность поля диполя в произвольной точке, положение которой определим с помощью полярных координат: расстояния до центра диполя  $r$  и угла  $\theta$  (рис. 79). По принципу суперпозиции потенциал поля в точке  $A$  равен

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(r_- - r_+)}{r_- r_+}.$$

Учитывая, что  $r \gg a$ , формулу (6) можно упростить с помощью приближений  $r_- r_+ \approx r^2$ ,  $r_- - r_+ \approx a \cos \theta$ , в этом случае получаем:

$$\varphi = \frac{qa \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (6)$$

Вектор напряженности поля  $\vec{E}$  удобно разложить на две составляющие: радиальную  $\vec{E}_r$ , направленную вдоль прямой, соединяющей данную точку с центром диполя, и перпендикулярную ей  $\vec{E}_\theta$  (рис. 80). При таком разложении каждая компонента направлена вдоль направления изменения

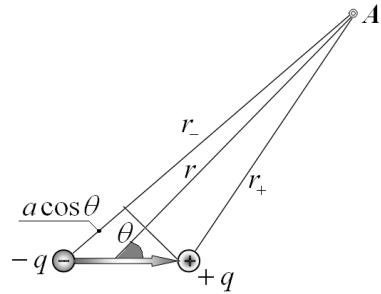


Рис. 79

каждой из координат точки наблюдения, поэтому может быть найдена из соотношения, связывающего напряженность поля и изменение потенциала.

Для того чтобы найти компоненты вектора напряженности поля, запишем отношение изменения потенциала при смещении точки наблюдения в направлении соответствующих векторов к этому смещению.

Радиальная составляющая (рис. 81) тогда выразится соотношением:

$$E_r = -\frac{\Delta\phi}{\Delta r} = -\frac{\varphi(r + \Delta r) - \varphi(r)}{\Delta r} = -\frac{qa \cos\theta}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\Delta r} \left( \frac{1}{(r + \Delta r)^2} - \frac{1}{r^2} \right) = \\ = \frac{qa \cos\theta}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2r\Delta r + (\Delta r)^2}{\Delta r(r + \Delta r)^2 r^2} \approx \frac{qa \cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Для расчета перпендикулярной составляющей (рис. 82) следует учесть, что величина малого смещения в перпендикулярном направлении выражается через изменение угла следующим образом:  $\Delta l = r\Delta\theta$ . Поэтому величина этой компоненты поля равна:

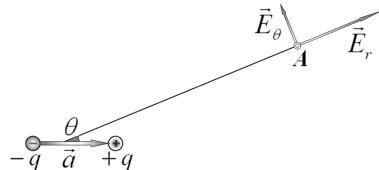


Рис. 80

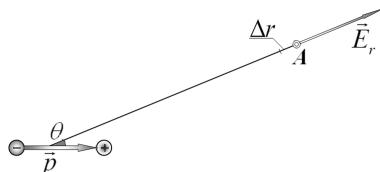


Рис. 81

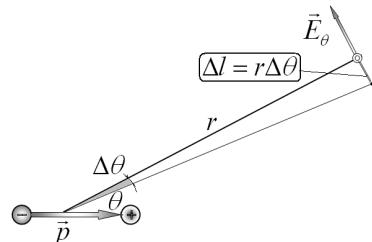


Рис. 82

$$\begin{aligned}
 E_{\theta} &= -\frac{\Delta\phi}{r\Delta\theta} = -\frac{\varphi(\theta + \Delta\theta) - \varphi(\theta)}{r\Delta\theta} = \\
 &= -\frac{qa}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \frac{\cos(\theta + \Delta\theta) - \cos\theta}{\Delta\theta} = \\
 &= \frac{qa\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta} \approx \frac{qa\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}.
 \end{aligned}$$

При выводе последнего соотношения использована тригонометрическая формула для разности косинусов и приближенное соотношение, справедливое при малых  $\Delta\theta$ :  $\sin\Delta\theta \approx \Delta\theta$ .

Полученные соотношения полностью определяют поле диполя в произвольной точке и позволяют построить картину силовых линий этого поля (рис. 83).

Теперь обратим внимание, что во всех формулах, определяющих потенциал и напряженность поля диполя, фигурирует только произведение величины

одного из зарядов диполя на расстояние между зарядами. Поэтому именно это произведение является полной характеристикой электрических свойств и называется **дипольным моментом** системы. Так как диполь является системой двух точечных зарядов, то он обладает осевой симметрией, осью которой является прямая, проходящая через заряды. Следовательно, для задания полной характеристики диполя следует указать и ориентацию

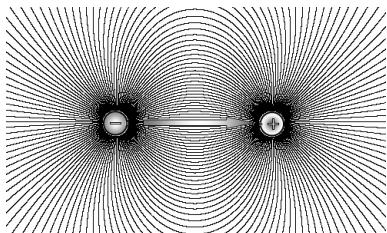


Рис. 83

оси диполя. Проще всего это сделать, задавая **вектор дипольного момента**, величина которого равна дипольному моменту, а направление совпадает с осью диполя

$$\vec{p} = q\vec{a}, \quad (7)$$

где  $\vec{a}$  – вектор, соединяющий отрицательный и положительный заряды диполя\*. Такая характеристика диполя весьма удобна и позволяет во многих случаях упрощать формулы, придавая им векторный вид. Так, например, потенциал поля диполя в произвольной точке, описываемый формулой (6), может быть записан в векторной форме:

$$\varphi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (8)$$

После введения векторной характеристики диполя, его дипольного момента появляется возможность использовать еще одну упрощающую модель – точечный диполь: систему зарядов, геометрическими размерами которой можно пренебречь, но которая обладает дипольным моментом\*\*.

Рассмотрим поведение диполя в электрическом поле.

---

\* Направление вектора дипольного момента, в принципе, можно задать и противоположным, но исторически сложилось задание направления дипольного момента от отрицательного к положительному заряду. При таком определении силовые линии как бы являются продолжением вектора дипольного момента.

\*\* Очередная, абсурдная на первый взгляд, но удобная абстракция – материальная точка, имеющая два заряда, разнесенных в пространстве.

Пусть два точечных заряда, находящиеся на фиксированном расстоянии друг от друга, помещены в однородное электрическое поле (рис. 84).

Со стороны поля на заряды действуют силы  $F = \pm qE$ , равные по величине и противоположные по направлению. Суммарная сила, действующая на диполь, равна нулю, однако эти силы приложены к различным точкам, поэтому суммарный момент этих сил отличен от нуля и равен

$$M = Fa \sin \alpha = qEa \sin \alpha = pE \sin \alpha, \quad (9)$$

где  $\alpha$  – угол между вектором напряженности поля и вектором дипольного момента. Наличие момента силы приводит к тому, что дипольный момент системы стремится повернуться по направлению вектора напряженности электрического поля.

Обратите внимание, что и момент силы, действующий на диполь, полностью определяется его дипольным моментом. Как мы показали ранее, если сумма сил, действующих на систему, равна нулю, то суммарный момент сил не зависит от оси, относительно которой этот момент рассчитывается. Положению равновесия диполя соответствуют как направление по полю  $\alpha = 0$ , так и против него  $\alpha = \pi$ , однако легко показать, что первое положение равновесия устойчиво, а второе нет.

Если электрический диполь находится в неоднородном электрическом поле, то силы, действую-

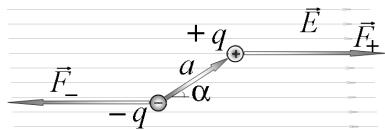


Рис. 84

щие на заряды диполя, различны, поэтому результирующая сила отлична от нуля.

Для упрощения будем считать, что ось диполя совпадает с направлением вектора напряженности внешнего электрического поля. Совместим ось  $x$  системы координат с направлением вектора напряженности (рис. 85). Результирующая сила, действующая на диполь, равна векторной сумме сил, действующих на заряды диполя:

$$F = F_+ - F_- = q(E(x+a) - E(x)) = qa \frac{\Delta E}{\Delta x}. \quad (10)$$

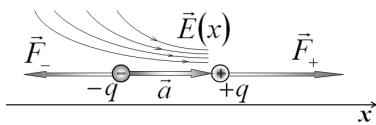


Рис. 85

Здесь  $E(x)$  – напряженность поля в точке расположения отрицательного заряда,  $E(x+a)$  – напряженность в точке положительного заряда. Так как расстояние между зарядами мало, разность напряженностей представлена как произведение скорости изменения напряженности на размер диполя. Таким образом, в неоднородном поле на диполь действует сила, направленная в сторону возрастания поля, или диполь втягивается в область более сильного поля.

В заключение вернемся к строгому определению дипольного момента произвольной системы зарядов.

Вектор дипольного момента, системы, состоящей из двух зарядов (рис. 86), может быть записан в виде:

$$\vec{p} = q\vec{a} = q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = (+q)\vec{r}_+ + (-q)\vec{r}_-.$$

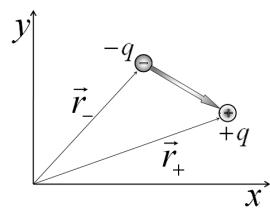


Рис. 86

Если теперь пронумеровать заряды, то эта формула приобретает вид

$$\vec{p} = (+q)\vec{r}_+ + (-q)\vec{r}_- = q_1\vec{r}_1 + q_2\vec{r}_2,$$

где величины зарядов понимаются в алгебраическом смысле, с учетом их знаков. Последняя формула допускает очевидное обобщение (обоснованием которого является принцип суперпозиции) на систему произвольного числа зарядов:

$$\vec{p} = q_1\vec{r}_1 + q_2\vec{r}_2 + q_3\vec{r}_3 + \dots = \sum_k q_k\vec{r}_k. \quad (11)$$

Эта формула определяет дипольный момент произвольной системы зарядов, с ее помощью произвольная система зарядов может быть заменена на точечный диполь (рис. 87). Положение диполя внутри области расположения зарядов произвольно, естественно, если электрическое поле рассматривается на расстояниях, значительно превышающих размеры системы.

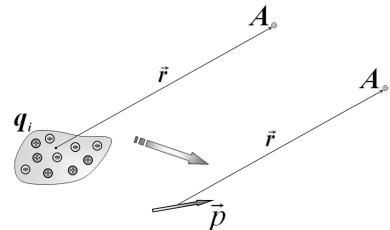


Рис. 87

### *Задания для самостоятельной работы.*

1. Докажите, что для произвольной системы зарядов, алгебраическая сумма которых равна нулю, дипольный момент, определяемый по формуле (11), не зависит от выбора системы отсчета.

2. Определите «центры» положительных и отрицательных зарядов системы по формулам, аналогичным формулам для координат центра

*масс системы. Если все положительные и все отрицательные заряды собрать в своих «центрах», то получим диполь, состоящий из двух зарядов. Покажите, что его дипольный момент совпадает с дипольным моментом, рассчитанным по формуле (11).*

*3. Получите двумя способами формулу, выражающую силу взаимодействия точечного диполя и точечного заряда, находящегося на оси диполя: во-первых, найдите силу, действующую на точечный заряд со стороны диполя; во-вторых, найдите силу, действующую на диполь со стороны точечного заряда; в-третьих, убедитесь, что эти силы равны по модулю и противоположны по направлению.*

## **§ 4. Проводники в электростатическом поле**

При известном распределении всех зарядов расчет всех характеристик электростатического поля представляет собой чисто техническую проблему, связанную в общем случае только с множеством математических преобразований.

Формально, электрическое поле  $\vec{E}(\vec{r})$  однозначно и напрямую посредством ряда математических операций выражается через распределение зарядов  $q(\vec{r})$ :  $\vec{E}(\vec{r}) = F[q(\vec{r})]$ .

К сожалению, точное расположение зарядов известно далеко не всегда. Во многом это связано с тем, что электростатическое поле способно из-

менять распределение зарядов в материальных телах. Под действием поля могут возникать<sup>\*</sup> новые электрические заряды, поэтому распределение электрических зарядов зависит от структуры электрического поля, что формально можно выразить соотношением  $q(\vec{r})=G[\vec{E}(\vec{r})]$ , причем вид этой зависимости зависит и от электрических свойств вещества, взаимодействующего с полем.

Взаимодействие электрического поля и вещества носит взаимный характер: электрическое поле изменяет распределение зарядов в веществе, которое в свою очередь изменяет электрическое поле. Формальные соотношения между структурой поля и распределением зарядов имеют «заключенный» вид:

$$\vec{E}(\vec{r})=F[q(\vec{r})]=F[G[\vec{E}(\vec{r})]], \text{ или}$$
$$q(\vec{r})=G[\vec{E}(\vec{r})]=G[F[q(\vec{r})]],$$

где функции  $q(\vec{r})$ ,  $\vec{E}(\vec{r})$  заранее неизвестны. Решить эти уравнения удается далеко не всегда. Поэтому для описания взаимодействия электрического поля с веществом разработаны особые методы, введены специальные физические величины, характеризующие это взаимодействие.

Особенно сложна эта проблема в случае изменяющихся во времени полей, поэтому ее изучение начнем с рассмотрения статического взаимодействия, когда установилось равновесие между за-

---

\* Конечно, в любом случае закон сохранения электрического заряда остается незыблым.

рядами и полем. Чтобы показать, насколько мы упрощаем себе задачу, приведем такую аналогию: попробуйте описать процесс наливания жидкости в стакан (струи, волны, брызги ...), а в состоянии равновесия все предельно просто: покоящаяся жидкость заполняет часть стакана, причем ее свободная поверхность горизонтальна. Этой проблеме – описанию состояния неподвижной «электрической жидкости» внутри неподвижных материальных тел – посвящен данный параграф. Во многом мы будем использовать математический аппарат, рассмотренный нами при описании равновесия жидкостей, поэтому перед изучением данного параграфа полезно повторить гидростатику – условия равновесия обычных жидкостей, описание «электрической жидкости» во многом аналогично.

## 4.1 Проводники

Строение вещества и его многообразные физические свойства мы будем изучать в дальнейшем. Тем не менее, уже сейчас нам необходимы некоторые начальные сведения из этой области физики.

Все различные вещества состоят из молекул и атомов, которые, в свою очередь, состоят из заряженных частиц – положительно заряженных ядер и движущихся вокруг них отрицательно заряженных электронов. Поэтому все вещества взаимодействуют с электрическим полем. Электрические свойства различных веществ различаются весьма

заметно. Тем не менее, все вещества по своим электрическим свойствам можно разделить на две большие группы – проводники и диэлектрики.

**Проводниками называются вещества, способные проводить электрический ток.** Для того чтобы вещество являлось проводником, оно должно содержать заряженные частицы, способные достаточно свободно передвигаться по объему проводника. Типичными представителями проводников являются металлы. Внутренняя структура металлов представляет собой кристаллическую решетку, образованную положительно заряженными ионами. Электроны атомов металлов, находящиеся на внешних электронных оболочках, слабо связаны с ядром. При образовании кристалла они отрываются от своего атома и могут свободно передвигаться по объему всего кристалла, образуя своеобразное облако свободных электронов. Суммарный электрический заряд проводника остается равным нулю, электрическое поле облака свободных электронов компенсируется полем положительных ионов кристаллической решетки. Наличие этих свободных электронов обуславливает проводящие свойства металлов.

Подчеркнем, что свободные электроны связаны с кристаллической решеткой, поэтому для того чтобы покинуть металл, электроны должны получить довольно значительную дополнительную энергию. Поведение электрона подобно поведению шарика в глубокой яме с плоским дном: двигаться по дну

может свободно, а выскочить наружу трудно (рис. 88).

Проводниками также являются растворы солей, кислот, щелочей. При попадании этих молекул в жидкую среду они распадаются (диссоциируют) на ионы, способные перемещаться по объему раствора и тем самым проводить электрический ток.

При некоторых условиях проводить электрический ток могут и газы.

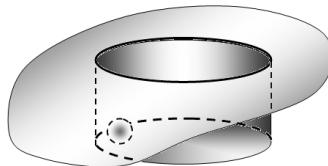


Рис. 88

## 4.2 Условия равновесия между зарядами и электрическим полем

При помещении металла<sup>\*</sup> в электрическое поле  $\vec{E}_0$  на свободные электроны действуют электрические силы, под действием которых электроны приходят в движение. Если электрическое поле не слишком велико, то электроны не могут покинуть объем металла и скапливаются на одной стороне проводника, с другой стороны проводника образуется недостаток электронов, поэтому положительный заряд ионов решетки оказывается нескомпенсированным

\* В данном разделе мы будем говорить, главным образом, о поведении металлов в электрическом поле, хотя аналогичные явления происходят и в других типах проводников.

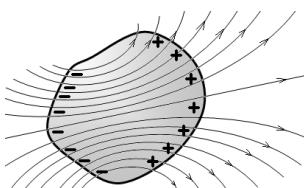


Рис. 89

(рис. 89). Таким образом, на поверхности проводника появляются электрические заряды, при этом суммарный заряд проводника остается, конечно, неизменным.

**Явление возникновения электрических зарядов на проводнике под воздействием электрического поля называется электростатической индукцией, а возникшие заряды – индуцированными.**

Появившиеся индуцированные заряды создают собственное индуцированное электрическое поле  $\vec{E}'$ , которое направлено в сторону, противоположную внешнему полю. Конечно, эти заряды создают поле как внутри проводника, так и вне его. Поэтому суммарное поле  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$  становится отличным от исходного поля  $\vec{E}_0$ .

Рассмотренные особенности поведение проводников достаточно легко проиллюстрировать экспериментально.

Мы уже упоминали, что стрелка электроскопа отклоняется даже в том случае, когда заряженное тело не прикасается к его стержню (рис. 90).

Это явление легко объясняется явлением электростатической индукции. Для увеличения эффекта на стержень электроскопа следует насадить сферическую насадку. Поднесем к металлической сфере заряженную стеклянную палочку, заряд которой положительный. Под действием электрического поля зарядов палочки произойдет

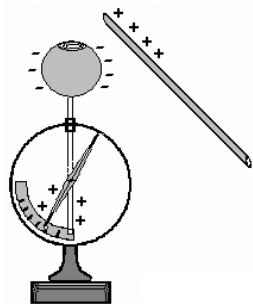


Рис. 90

перераспределение зарядов на сферической насадке, стержне и стрелке. Отрицательно заряженные электроны под действием электрического поля будут приближаться к палочке, поэтому сфера приобретет отрицательный заряд, равный ему положительный заряд распределится между стержнем и стрелкой. Суммарный заряд электроскопа останется равным нулю. Вследствие электрического отталкивания между положительными зарядами стержня и стрелки последняя отклонится.

Зарядим электроскоп, прикоснувшись к нему заряженной стеклянной палочкой. Если теперь к насадке поднести незаряженное проводящее тело (например, просто свою руку), не касаясь насадки, отклонение стрелки электроскопа уменьшится (рис. 91). Это явление объясняется следующим образом: под действием положительного заряда электроскопа на руке индуцируются заряды противоположного знака, которые притянут положительные заряды стрелки и стержня к насадке, то есть между ними произойдет перераспределение зарядов, в результате чего заряд стрелки и стержня уменьшится.

Электростатической индукцией объясняется и притяжение незаряженного тела к заряженному. Если заряженную стеклянную палочку поднести к небольшому проводящему телу (например,

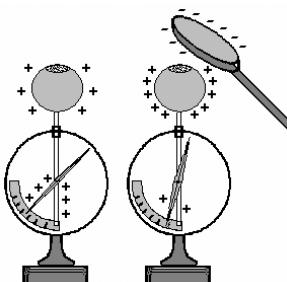


Рис. 91

кусочку фольги), то в этом теле произойдет перераспределение зарядов: ближняя к палочке часть

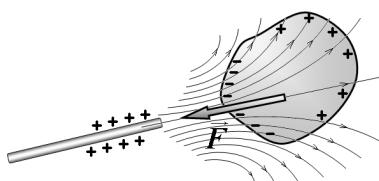


Рис. 92

зарядится отрицательно, дальнняя – положительно (рис. 92). Следовательно, тело приобретет дипольный момент. Так как электрическое поле, создаваемое зарядом палочки, не

является однородным, а убывает с расстоянием, то на кусочек фольги будет действовать сила притяжения, поэтому незаряженное тело втягивается в область более сильного поля.

Подчеркнем: одним из необходимых условий притяжения незаряженного тела к заряженному является неоднородность электрического поля – если поместить проводящее тело в однородное электрическое поле, то индуцированные заряды возникнут, но суммарная сила, действующая на них, будет равна нулю!

### *Задание для самостоятельной работы.*

*1. Что произойдет с отклонением стрелки заряженного электроскопа, если к его насадке поднести другое заряженное тело (не касаясь насадки)?*

Некоторые важнейшие свойства электрического поля и распределения зарядов на проводниках можно получить, рассматривая только условия равновесия электрических зарядов. Условия равновесия не изменятся, если проводнику сообщить избыточный заряд, который также перерас-

пределится по поверхности проводника и также будет создавать электрическое поле. Далее, мы рассмотрим условия равновесия зарядов на проводнике и электрического поля, независимо от того, какими зарядами это поле создается – изначально находящимися на проводнике, индуцированными, или внешними; тем более что нет принципиальной возможности разделить и различить эти поля, так как единственной реальностью является суммарное электрическое поле.

### *1. Напряженность электрического поля внутри проводника равна нулю: $\vec{E} = \vec{0}$ .*

Можно предположить, что заряды, возникающие на поверхности проводника, образуются крайне незначительной долей общего количества свободных электронов, поэтому внутри проводника всегда имеется значительное число свободных электронов. Если внутри проводника существует отличное от нуля электрическое поле, то под его действием свободные электроны будут продолжать перемещаться, в стационарном же состоянии равновесия такое движение прекращается. Следовательно, в состоянии равновесия поле индуцированных зарядов  $\vec{E}'$  полностью компенсирует внешнее поле  $\vec{E}_o$ .

В некоторых пособиях утверждается, что проводники «не пропускают» электрическое поле. Данное высказывание не совсем корректно: проводник создает собственное поле, которое компенсирует внешнее, породившее его поле.

Проверим высказанное предположение о малости числа электронов, образующих индуцированные заряды. Пусть медная пластинка помещена в однородное электрическое поле перпендикулярно его силовым линиям (рис. 93).

Под действием внешнего электрического поля на гранях пластинки возникнут индуцированные электрические заряды, поверхностную плотность которых обозначим  $\sigma$ . Эти заряды породят электрическое поле, напряженность которого равна  $E' = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ . В состоянии равновесия это поле полностью компенсирует внешнее поле  $\vec{E}_0$ , поэтому  $E' = E_0$ , а поверхностная плотность индуцированных зарядов связана с напряженностью внешнего поля соотношением  $\sigma = \epsilon_0 E_0$ . Число электронов, приходящихся на единицу площади поверхности (поверхностная концентрация), равно  $n_{\text{нов.}} = \frac{\sigma}{e} = \frac{\epsilon_0 E_0}{e}$ , где  $e$  – заряд электрона. Для численной оценки примем, что напряженность внешнего поля равна  $E_0 = 1 \cdot 10^5 \frac{B}{M} = 1 \cdot 10^3 \frac{B}{\text{см}}$  (что в тысячу раз превышает напряженность электрического поля Земли). Тогда поверхностная концентрация электронов равна  $n_{\text{нов.}} = \frac{\epsilon_0 E_0}{e} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 10^5}{1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 6 \cdot 10^{12} \text{ м}^{-2} = 6 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$ .

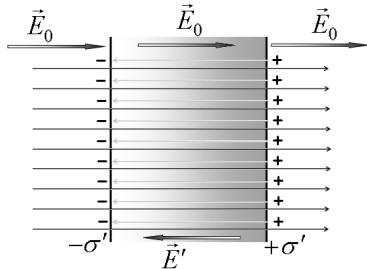


Рис. 93

На первый взгляд, достаточно много, но сравним с общим числом электронов в единице объема. Для расчета концентрации электронов примем, что каждый атом меди отдает один электрон в электронное облако. Число атомов меди (следовательно, и число свободных электронов) в единице объема рассчитаем следующим образом: масса единицы объема равна плотности меди  $\rho \approx 9 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ ; число молей вещества в единице объема равно  $v = \frac{m}{M} = \frac{\rho}{M}$ , где  $M \approx 65 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$  – молярная масса меди; концентрация атомов\* (и свободных электронов)

$$n_{\text{об.}} = v N_A = \frac{\rho}{M} N_A = \frac{9 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}}{65 \frac{\text{г}}{\text{моль}}} \cdot 6 \cdot 10^{23} \text{моль}^{-1} \approx 8 \cdot 10^{22} \text{см}^{-3}.$$

Если принять толщину пластиинки  $h = 1 \text{ см}$ , то доля электронов, которые оказались на поверхности, оказывается равной  $\eta = \frac{n_{\text{пов.}}}{n_{\text{об.}}} h \approx 10^{-12}$ , что действительно крайне мало (одна десятимиллиардная доля процента).

Напомним, такая доля электронов создает индуцированные заряды, если к медной пластиинке толщиной в один сантиметр приложить напряжение в тысячу вольт! Поэтому с высокой степенью точности можно считать, что появление индуцированных зарядов не изменяет объемную концентрацию свободных электронов.

---

\* Здесь  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$  – число Авогадро.

## *2. Все точки проводника имеют одинаковые потенциалы $\phi = const$ .*

Это утверждение является прямым следствием связи между разностью потенциалов и напряженностью поля  $\Delta\phi = -\vec{E} \cdot \Delta\vec{l}$ . Если напряженность поля внутри проводника равна нулю, то разность потенциалов также равна нулю, поэтому потенциалы всех точек проводника одинаковы. Также можно привести еще одно равноценное доказательство: если между двумя точками проводника существует разность потенциалов, то между ними будет течь электрический ток, то есть равновесия не будет.

## *3. В состоянии равновесия все заряды располагаются только на поверхности проводника, объемная плотность электрического заряда внутри проводника равна нулю.*

Доказательство этого утверждения проведем методом от противного. Допустим, что в некоторой части проводника существует заряженная область. Окружим эту область замкнутой поверхностью  $S$  (рис. 94). Согласно теореме Гаусса, поток вектора напряженности электрического поля через эту поверхность отличен от нуля и пропорционален заряду, находящемуся внутри поверхности. Следовательно, в точках этой поверхности напряженность электрического поля отлична от нуля. Но мы доказали, что в состоянии

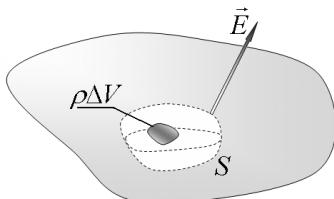


Рис. 94

равновесия внутри проводника электрическое поле отсутствует, мы пришли к противоречию, поэтому внутри проводника электрические заряды отсутствуют. Реально, если каким-то образом внутрь проводника поместить избыточный электрический заряд, то под действием сил отталкивания этот заряд «разбежится» на поверхность проводника.

Строго говоря, электрические заряды существуют в очень тонком слое вблизи поверхности, толщина которого измеряется несколькими атомными слоями, поэтому практически можно говорить о поверхностном заряде, пренебрегая толщиной заряженного слоя.

#### *4. У поверхности проводника вектор напряженности электрического поля направлен перпендикулярно поверхности проводника.*

Опять воспользуемся доказательством методом от противного: предположим, что в некоторой точке поверхности проводника вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$  направлен под некоторым углом к поверхности проводника (рис. 95). Разложим этот вектор на две составляющие: нормальную  $\vec{E}_n$ , перпендикулярную поверхности, и тангенциальную  $\vec{E}_\tau$ , направленную по касательной к поверхности. Аналогично можно провести и разложения векто-

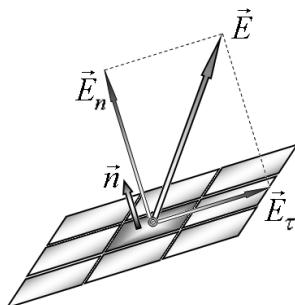


Рис. 95

ра силы, действующей на электроны. Нормальная составляющая этой электрической силы уравновешивается силой, действующей на электрон со стороны кристаллической решетки. Под действием же тангенциальной составляющей электроны придут в движение вдоль поверхности, но ... нас интересует состояние равновесия, поэтому в состоянии равновесия тангенциальная составляющая электрического поля отсутствует.

Если в какой-то момент времени тангенциальная составляющая поля отлична от нуля, то под ее действием начнется движение электрических зарядов, которое будет продолжаться до тех пор, пока не установится такое распределение зарядов, при котором вектор поля будет перпендикулярен поверхности во всех ее точках.

*5. Напряженность электрического поля у поверхности проводника связана с поверхностной плотностью зарядов соотношением*  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ .

Итак, мы установили, что внутри проводника напряженность электрического поля равна нулю, а у поверхности вектор напряженности перпендикулярен поверхности проводника. Кроме того, электрические заряды локализованы на поверхности проводника. Эти факты позволяют с помощью теоремы Гаусса установить связь между напряженностью поля и поверхностной плотностью заряда.

Выделим на поверхности проводника малую площадку площадью  $\Delta S$ , поверхностную плотность

заряда на ней обозначим  $\sigma$  и будем считать ее постоянной в пределах выбранной малой площадки (рис. 96). Окружим эту площадку замкнутой цилиндрической поверхностью, состоящей из двух частей. Первая –  $\Omega_1$  – расположена над поверхностью и непосредственно примыкает к выбранной площадке  $\Delta S$ , причем основание цилиндра параллельно рассматриваемой поверхности. Вторая –  $\Omega_2$  – находится под поверхностью, внутри проводника. Поток вектора напряженности через поверхность  $\Omega_1$  равен нулю, так как внутри проводника поле отсутствует:  $\Phi_{E2} = 0$ . Поток вектора напряженности через поверхность  $\Omega_1$  равен произведению напряженности поля на площадь площадки  $\Phi_{E1} = E\Delta S$ , так как на этой поверхности вектор напряженности направлен вдоль нормали\*. Так как  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  образуют замкнутую поверхность, то суммарный поток через нее равен заряду, находящемуся внутри поверхности  $q = \sigma\Delta S$ , деленному на электрическую постоянную  $\epsilon_0$ :  $\Phi_{E1} + \Phi_{E2} = \frac{q}{\epsilon_0}$ . Подставив выражения для потоков и заряда  $E\Delta S + 0 = \frac{\sigma\Delta S}{\epsilon_0}$ , получим искомое соотношение

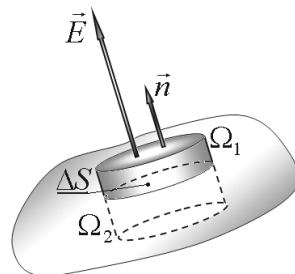


Рис. 96

---

\* Поток через боковую поверхность равен нулю по двум причинам: во-первых, ее площадь пренебрежимо мала; во-вторых, на ней вектор напряженности перпендикулярен нормали.

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (1)$$

К сожалению, эта формула только устанавливает связь между напряженностью поля и плотностью заряда, хотя обе величины остаются неизвестными.

Следует отметить, что электрическое поле  $E$ , входящее в формулу (1), создается не только зарядами, находящимися на выбранной площадке  $\Delta S$ , но и всеми остальными зарядами на проводнике и вне его (рис. 97). Представим это поле в виде суммы полей  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1$ , где  $\vec{E}_0$  – напряженность поля, созданного зарядами на площадке  $\sigma_0$ ;  $\vec{E}_1$  – напряженность поля, созданного всеми остальными зарядами  $\sigma_1$ . Рассмотрим теперь эти поля непосредственно под площадкой  $\Delta S$  внутри проводника. Напряженность поля  $\vec{E}'_0$  зарядов  $\sigma_0$  будет направлена в противоположную сторону, так как рассматривается точка с противоположной стороны площадки  $\vec{E}'_0 = -\vec{E}_0$ . А напряженность поля остальных зарядов  $\vec{E}'_1$  остается неизменной, так как мы выбираем две точки в непосредственной близости друг от друга  $\vec{E}'_1 = \vec{E}_1$ . Теперь внимание: так как внутри

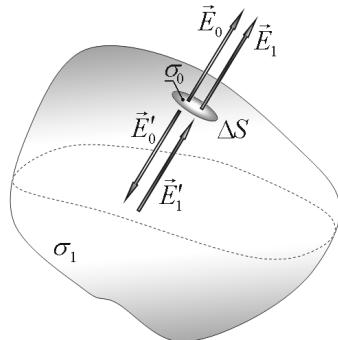


Рис. 97

\* Напомним, поток вектора напряженности через замкнутую поверхность полностью определяется зарядами внутри поверхности, то есть в данном случае зарядами на поверхности.

проводника поле отсутствует, то  $\vec{E}' - \vec{E}_0' = \vec{0}$ , поэтому модули напряженности этих полей равны и определяются формулой  $E_0 = E_1 = \frac{E}{2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ .

Данный пример иллюстрирует смысл теоремы Гаусса: поле на рассматриваемой замкнутой поверхности создается всеми электрическими зарядами, находящимися как внутри выделенной поверхности, так и вне ее; но электрический поток определяется только зарядами, находящимися внутри поверхности!

### *6. Давление электростатического поля на поверхность проводника равно плотности энергии поля у поверхности проводника.*

С помощью полученного соотношения можно вычислить силу, действующую на выбранную площадку поверхности, как произведение заряда площадки  $q = \sigma\Delta S = \epsilon_0 E S$  на напряженность поля  $E_1$ , созданного всеми зарядами, кроме заряда на самой площадке  $F = qE_1 = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}\Delta S$ . Сила, действующая на единицу площади поверхности проводника со стороны электрического поля (то есть давление поля), вычисляется по формуле  $P = \frac{F}{\Delta S} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$ .

Далее мы покажем, что этой же формулой определяется и объемная плотность энергии электростатического поля.

Удивитесь (и попытайтесь его осмыслить) полученному результату: давление электростатиче-

ского поля на поверхность проводника равно плотности энергии электрического поля!

### 4.3 Применение электростатических свойств проводников

Приведем некоторые примеры использования рассмотренных свойств поведения проводников в электрическом поле.

#### 4.3.1 Электростатическая защита

Иногда возникает необходимость изолировать некоторые тела, приборы от воздействия внешних электрических полей. Для такой изоляции их помещают внутрь металлического корпуса. Мы показали, что при помещении проводника во внешнее электрическое поле индуцированные заряды возникают только на поверхности проводника, а поле внутри проводника оказывается равным нулю.

Пусть, например, металлический шар помещен в однородное электрическое поле напряженностью  $\vec{E}_0$  (рис. 98). Под действием этого поля на поверхности шара возникнут индуцированные заряды, поверхностная плотность которых  $\sigma_0$  будет различна в различных точках поверхности шара. Эти заря-

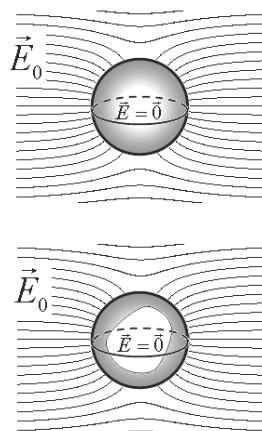


Рис. 98

ды приведут к изменению электрического поля: внутри шара напряженность поля станет равной нулю, снаружи силовые линии поля будут перпендикулярны поверхности шара. Если теперь внутри шара вырезать произвольную полость, то от этой «операции» распределение поля и индуцированных зарядов не изменится, так как изъята та часть шара, где нет ни зарядов, ни поля. Аналогичные рассуждения можно распространить на произвольную полость внутри проводящего тела произвольной формы, находящегося в произвольном электростатическом поле — в любом случае поле внутри полости будет отсутствовать. Говорят, что проводящая оболочка **экранирует** внешнее электрическое поле.

Более того, можно показать, что аналогичный эффект достигается даже в том случае, если сплошную проводящую оболочку заменить на металлическую сетку с мелкими ячейками. В этом случае электрическое поле проникает за сетку на глубину порядка размеров ячейки сетки.

Подчеркнем, что сплошная металлическая оболочка экранирует электрическое поле, находящееся снаружи от оболочки, но не то, которое находится внутри нее.

Пусть точечный заряд  $+q_0$  находится внутри металлической сферической оболочки (рис. 99). Этот заряд создает электрическое поле, которое

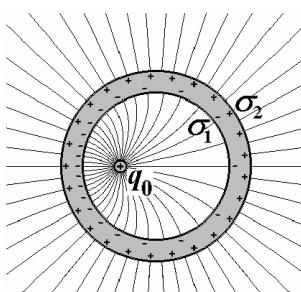


Рис. 99

индуцирует электрические заряды как на внутренней, так и на внешней поверхностях оболочки. Рассмотрим, как в этом случае изменится распределение электрического поля.

На внутренней поверхности распределяются отрицательные заряды с некоторой поверхностной плотностью  $\sigma_1$ . Внутри металла напряженность поля равна нулю, поэтому отрицательные индуцированные заряды  $\sigma_1$  полностью экранируют поля заряда  $q_0$ . Используя теорему Гаусса, легко показать, что суммарный заряд, индуцированный на внутренней поверхности, равен  $-q_0$ . Суммарный заряд оболочки остается равным нулю, следовательно, на ее внешней поверхности индуцируется положительный заряд, равный  $+q_0$ . На поверхностное распределение этого заряда  $\sigma_2$  заряды внутренней поверхности и заряд полости не действуют, поэтому они распределяются по поверхности оболочки равномерно и вне оболочки будут создавать электрическое поле, эквивалентное полю точечного заряда  $+q_0$ , помещенного в центр сферической оболочки. Подчеркнем: такое распределение поля вне оболочки не зависит от положения заряда внутри полости – смещение этого заряда приведет к изменению поля внутри полости, изменению распределения зарядов на внутренней поверхности, но не изменяет распределения зарядов на внешней поверхности и поля вне оболочки.

Чтобы «убрать» поле снаружи от оболочки, ей необходимо сообщить дополнительный отрица-

тельный заряд; такого эффекта можно добиться, заземлив оболочку.

### 4.3.2 Заземление

Как распределяются заряды между двумя связанными проводящими телами?

С точки зрения здравого смысла, на теле больших размеров должен накапливаться больший электрический заряд.

Чтобы обосновать это утверждение, рассмотрим два проводящих шара, радиусы которых обозначим  $R_1, R_2$ , находящихся на большом расстоянии  $l$  друг от друга ( $l \gg R_1, R_2$ ) и соединенных проводником (рис. 100). Если этой системе сообщить электрический заряд  $Q$ , то заряды шаров  $q_1, q_2$  распределяются так, чтобы их потенциалы были равны; суммарный же заряд системы, конечно, останется равным сообщенному заряду  $q_1 + q_2 = Q$ . Так как расстояние между шарами значительно больше их радиусов, то при расчете потенциала каждого шара можно пренебречь их взаимным влиянием и воспользоваться формулой для потенциала уединенного шара:

$$\Phi_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1}, \quad \Phi_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}.$$

Приравнивая эти потенциалы, получим, что заряды шаров пропорциональны их радиусам:

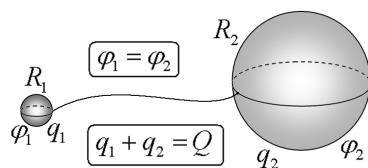


Рис. 100

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2},$$

или

$$q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} Q, \quad q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} Q. \quad (1)$$

Качественно аналогичный вывод справедлив и для проводящих тел произвольной формы. Если одно из тел значительно больше другого, то практически весь заряд окажется на большем теле. Действительно, из формул (1) следует, что при  $R_2 \gg R_1$

$$q_1 \approx 0, \quad q_2 \approx Q. \quad (2)$$

Именно это обстоятельство используется для того, чтобы разрядить небольшое заряженное тело: его необходимо соединить с телом больших размеров. Так, если к заряженному электроскопу прикоснуться рукой, то заряд перераспределится между электроскопом и телом человека, но так как размер последнего значительно больше размеров электроскопа, то можно считать, что весь заряд «сбежит» на человека. Часто в качестве тела больших размеров используют весь земной шар. Приборы, на которых не должен собираться электрический заряд, «заземляют», для чего подключают их к массивному проводнику, закопанному в землю. В этом случае можно считать, что соотношения (2) выполняются точно.

В теоретических расчетах полагают, что заземление, есть соединение данного тела с телом бесконечно больших размеров, так что потенциал этого тела не изменяется при сообщении ему произволь-

ного заряда, и, наоборот, при необходимости это тело может сообщить произвольный заряд, не изменяя его потенциала, который, естественно, можно положить равным нулю. Поэтому также можно сказать, что заземление – это «соединение с бесконечностью», а потенциал заземленного тела равен нулю; кроме того, суммарный заряд заземленного тела может изменяться.

Уместно привести следующую аналогию. Если небольшое тело находится в тепловом контакте с окружающей средой, то с течением времени его температура станет равной температуре окружающей среды, независимо от того, было тело первоначально нагрето или охлаждено. То есть окружающая среда может получить любое количество теплоты или отдать любое количество теплоты, и при этом ее температура не изменяется. Такая модель окружающей среды называется термостатом. Заземление в электростатике играет такую же роль, как окружающая среда (термостат) в теории тепловых явлений.

Если рассмотренную в предыдущем разделе сферическую оболочку заземлить, то положительные заряды на внешней поверхности «исчезнут – уйдут в землю», поэтому поле вне оболочки также исчезнет (рис. 101). Можно рассуждать и в обратном порядке: если внутрь полости заземленной оболочки поместить электрический заряд, то его поле индуцирует заряды

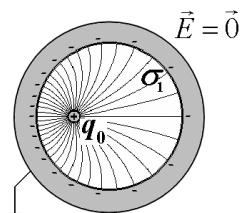


Рис. 101

противоположного знака на внутренней поверхности, эти заряды «прибегут из заземления».

Заметим, что поле внутри заземленной полости полностью определяется ее формой и распределением зарядов внутри нее и не зависит от формы всего тела и заряда последнего.

#### 4.3.3 Генератор Ван-дер-Граафа

Как мы показали, в условиях равновесия электрический заряд распределяется по внешней поверхности проводника – это позволяет в некоторых случаях накапливать на проводниках значительные электрические заряды.

Можно провести следующий эксперимент. На изолирующей ручке расположена небольшой металлический шарик (рис. 102). Если этому шарику сообщить небольшой электрический заряд  $q_0$  (например, с помощью стеклянной палочки) и прикоснуться шариком к поверхности сферической насадки электроскопа, то только часть этого заряда перейдет на электроскоп. Если затем опять зарядить шарик до прежнего значения заряда  $q_0$  и опять прикоснуться к внешней поверхности насадки, то меньшая часть заряда шарика перейдет на электроскоп. Таким способом можно сообщить

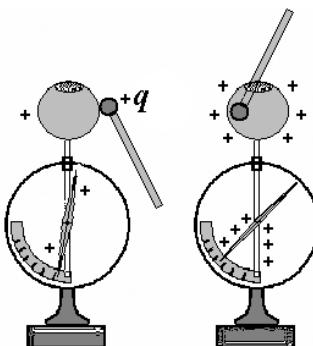


Рис. 102

электроскопу только конечный заряд, сколько бы раз мы ни подзаряжали шарик. Действительно, когда потенциалы уединенного шарика и электроскопа сравняются, то перераспределение зарядов прекратится. Приближенно максимальный заряд электроскопа  $Q_{\max}$  при таком способе зарядки можно оценить из условия равенства потенциалов, поэтому  $Q_{\max} \approx q_0 \frac{R}{r}$ , где  $R$  – радиус насадки электроскопа,  $r$  – радиус шарика. Если же зарядку электроскопа проводить с помощью такого же шарика, но прикасаясь к внутренней поверхности насадки, то электроскопу можно сообщить гораздо больший заряд. Действительно, если прикоснуться шариком к внутренней поверхности, то весь его заряд перейдет на внешнюю поверхность насадки, независимо от того, какой заряд на ней находится. В этом случае максимальный заряд электроскопа будет определяться внешними причинами: при очень большом заряде насадки начнется утечка зарядов через окружающую среду, т.е. через воздух.

Поэтому принципу работают устройства, позволяющие накапливать очень большие заряды (соответственно, создающие большие разности потенциалов). Одним из первых таких устройств (заметим, использующихся до настоящего времени) является электростатический генератор Ван-дер-Граафа, принципиальная схема которого показана на рис. 103. В генераторе Ван-дер-Граафа резиновая лента приводится в движение с небольшой скоростью электродвигателем. При движении лента про-

ходит между электрически заряженными пластинами. Возникшие на ленте индуцированные заряды снимаются с внешней поверхности ленты с помощью контактной щетки и подаются на внутреннюю поверхность металлического купола генератора, создавая достаточно сильные электростатические поля (высокие напряжения) в окружающем купол пространстве. Заряды с внутренней стороны ленты отводятся через шину заземления.

Максимальный электрический заряд купола (и его потенциал) ограничиваются только утечкой заряда с купола через воздух (рис. 104). Такие генераторы используются для создания высокой разности потенциалов в линейных ускорителях частиц. Диаметр купола генератора может составлять несколько метров, а создаваемая разность потенциалов – несколько миллионов вольт.

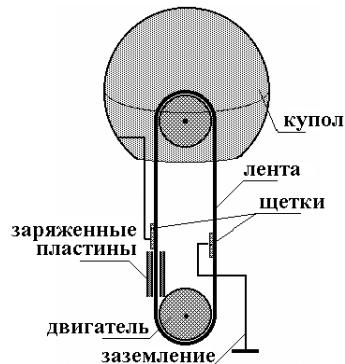


Рис. 103

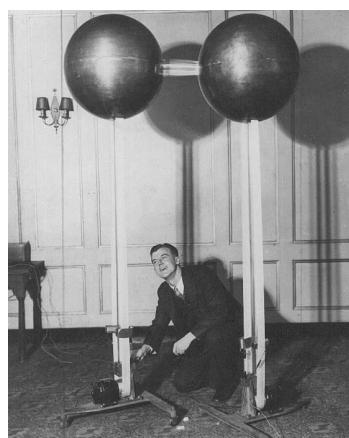


Рис. 104

## § 5. Расчет поля в присутствии проводников. Метод изображений<sup>\*</sup>

Мы уже подчеркивали, что основная проблема расчета полей в присутствии проводников заключается в появлении индуцированных зарядов, распределение которых заранее неизвестно. В связи с этим рассмотренные ранее методы, основанные на законе Кулона и принципе суперпозиции, в данном случае оказываются непригодными. Принципиально иной подход к решению данной задачи заключается в расчете распределения потенциала электростатического поля. Действительно, на поверхности проводника распределение заряда неизвестно, но ведь потенциал проводника постоянен!

Сам метод основан на решении уравнений<sup>\*\*</sup> для потенциала поля. Сами эти уравнения довольно сложны и рассматриваются в курсе физики высшей школы, однако их физический смысл основывается на законе Кулона и связи потенциала с напряженностью поля.

Однако в некоторых случаях можно рассчитать электрическое поле и распределение индуцированных на поверхности проводника зарядов,

---

\* Этот параграф при первом чтении можно пропустить.

\*\* Эти уравнения называются уравнениями С. Пуассона, или, в частных случаях, уравнениями П. Лапласа. С математической точки зрения, они являются уравнениями в частных производных, поэтому их изучение выходит далеко за рамки наших возможностей.

используя искусственный прием, который называется метод изображений.

Изложим кратко суть и дадим обоснование этого метода.

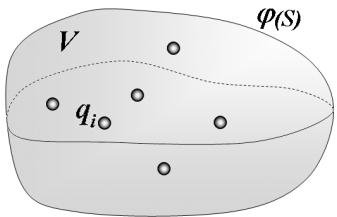


Рис. 105

Пусть в некоторой области пространства  $V$ , ограниченной поверхностью  $S$  (в частном случае граница области может простираться до бесконечности), задано распределение зарядов  $q_i$  (рис. 105).

Электрическое поле в выделенной области определяется однозначно, если

- задано распределение зарядов внутри этой области;
- задано распределение потенциала на границе области.

Заметим, что на границе области могут существовать заряды, однако даже при неизвестном их распределении задание потенциала на границе однозначно определяет поле внутри области. Поэтому две различные задачи, но с одинаковыми распределениями зарядов внутри области и одинаковыми потенциалами на границе, имеют внутри области одинаковые решения. Иногда при неизвестном распределении индуцированных зарядов на границе удается подобрать такое распределение зарядов вне рассматриваемой области, что для нового распределения выполняются граничные условия исходной задачи. В этом случае дополнительные

заряды называются зарядами-изображениями. Вести поиск изображений имеет смысл тогда, когда новая задача оказывается проще исходной и имеет простое решение.

Помимо задания распределения потенциала, в качестве граничных условий могут использоватьсь и некоторые другие, например, значение напряженности поля. Формулировке граничных условий по этой причине уделяется серьезное внимание в курсе электродинамики.

## 5.1 Точечный заряд над плоской проводящей поверхностью

Рассмотрим простейшую задачу, допускающую решение с помощью метода изображений.

Пусть точечный заряд  $+q_0$  находится на расстоянии  $l$  от бесконечной металлической пластины (рис. 106).

Очередной раз мы пользуемся моделями: в данном случае под бесконечной понимается пластина, размеры которой значительно больше расстояния до заряда. Кроме того, можно считать, что пластина заземлена, так как она «касается бесконечности».

Под действием электрического поля заряда  $+q_0$  электроны пластины придут в движение и начнут

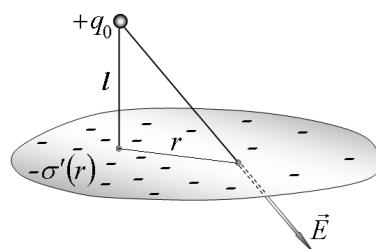


Рис. 106

скапливаться под точечным зарядом, создавая отрицательный индуцированный заряд.

Если пластина реально заземлена, то эти заряды натекут из заземления. На большой незаземленной пластине возникнут положительные заряды на краях пластины, но так как эти края находятся далеко, то их полем в рассматриваемой области можно пренебречь.

Распределение поверхностной плотности индуцированных зарядов на пластине неизвестно, но известно, что ее потенциал постоянен и равен нулю.

Легко придумать другую задачу, для которой будет выполнено такое же граничное условие. Действительно,

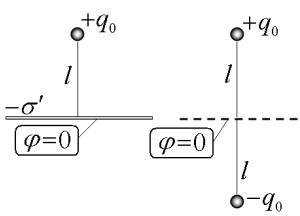


Рис. 107

рассмотрим поле, создаваемое двумя точечными зарядами  $q = +q_0$  и  $q' = -q_0$ , находящимися на расстоянии  $2l$  друг от друга (рис. 107). Во всех точках плоскости, перпендикулярной отрезку, соединяющему заряды и проходящей

через его середину, потенциал равен нулю, так как эти точки находятся на равном расстоянии от двух зарядов, равных по величине и противоположных по направлению. Сравним данную простую задачу (два точечных заряда) с исходной (точечный заряд и индуцированные им заряды  $\sigma$  на проводящей пластине): в полупространстве над пластиной распределения зарядов одинаковы (в обоих случаях – один точечный заряд), на граничной плоскости по-

тенциалы равны; следовательно, в этом полупространстве электрические поля также одинаковы.

Строго говоря, мы должны рассматривать замкнутую область пространства, поэтому мысленно накроем заряд  $+q_0$  полусферой, опирающейся на плоскость, положим ее потенциал равным нулю, устремим ее радиус к бесконечности и таким образом придем к рассматриваемому полупространству (рис. 108).

Таким образом, в верхнем полупространстве задачи эквивалентны: заряды и поле распределены одинаково. Следовательно, можно утверждать, что индуцированные на металлической пластиине заряды создают в верхнем полупространстве такое же электрическое поле, как заряд  $q' = -q_0$ , расположенный симметрично относительно верхней поверхности пластины. Следовательно, для расчета электрического поля следует зеркально, симметрично под пластииной, расположить **заряд-изображение**  $q' = -q_0$ . Подчеркнем, что реально никакого такого заряда не возникает, его роль – описать поле, создаваемое реальными индуцированными зарядами на поверхности пластины. Ввиду явной симметрии такое же поле возникает и в нижнем полупространстве (то есть поле заряда  $q'$ , расположенного в той же точке, что и исходный заряд  $+q_0$ ). Это поле индуцированных зарядов складывается с полем исходного заряда, поэтому и оказывается, что в нижнем

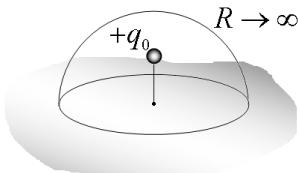


Рис. 108

полупространстве поле равно нулю, как и должно быть внутри проводника.

Напряженность суммарного поля у границы  $\vec{E}_0$  можно рассчитать по принципу суперпозиции как сумму полей, создаваемых исходным зарядом  $\vec{E}$  и его изображением  $\vec{E}'$  (рис. 109):

$$\vec{E}_0 = \vec{E}' + \vec{E}.$$

Суммарный вектор направлен перпендикулярно границе и равен

$$E_0 = 2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0(l^2 + r^2)} \cos\alpha = \frac{ql}{2\pi\epsilon_0(l^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

здесь  $r$  – расстояние от основания перпендикуляра из заряда на плоскость пластины до рассматриваемой точки. Поверхностная плотность заряда у поверхности проводника связана с напряженностью поля соотношением  $\sigma = \epsilon_0 E$ , поэтому распределение поверхностной плотности индуцированных зарядов на пластине осесимметрично и имеет вид

$$\sigma = \frac{ql}{2\pi(l^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Сила притяжения заряда к пластине определяется полем, создаваемым индуцированными зарядами, которое, в свою очередь, эквивалентно полю заряда-изображения, поэтому равно силе взаимодействия двух точечных зарядов  $q$  и  $q'$ :

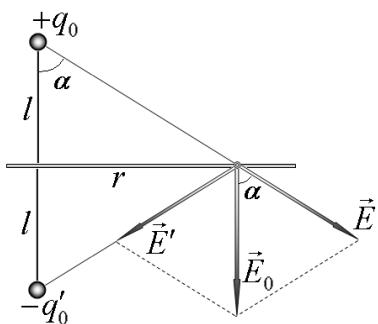


Рис. 109

$$F = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2l)^2} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2}.$$

Энергия взаимодействия исходного и индуцированных зарядов равна только половине (!) энергии взаимодействия зарядов  $q$  и  $q'$ . Заметьте, что две задачи (заряд и пластина – два заряда) эквивалентны только в верхнем полупространстве. Реально поле существует только в верхней половине пространства. Так как энергия взаимодействия есть энергия поля, то энергия взаимодействия будет в два раза меньше. Поэтому

$$W = -\frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2l)} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l}.$$

Этот вывод можно пояснить следующим образом: при двух реальных точечных зарядах при перемещении одного из них второй остается неподвижным. Если же уносить заряд от проводящей границы, то его изображение также удаляется, поэтому совершаемая работа будет меньше.

Картина силовых линий также может быть рассчитана, как поле двух точечных зарядов (рис. 110). Обратите внимание, что во всех точках плоскости силовые линии перпендикулярны поверхности.

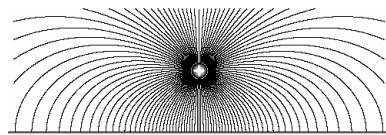


Рис. 110

## 5.2 Точечный заряд в двугранном проводящем углу

Продолжим развитие идей построения зарядов-изображений.

Пусть точечный заряд  $q$  находится на биссектрисе прямого двугранного угла  $AOB$ , образованного двумя бесконечными проводящими плоскостями (рис. 111). Попытаемся построить набор зарядов изображений так, чтобы удовлетворить граничным условиям: на гранях угла потенциал должен быть равен нулю. Прежде всего, зеркально отобразим исходный заряд в двух плоскостях – получим два изображения  $q'$ . Но эти три заряда не обеспечивают равенство нулю потенциала на гранях угла. Необходимо еще один раз отобразить изображения в другой грани – тем самым появляется еще один заряд-изображение  $q''$ . Отметим, что этот заряд является одновременно изображением обоих зарядов  $q'$ . Однако его величина также равна  $q$  (а не  $2q$ ), так как единственное и основное правило построения – удовлетворение граничных условий. Легко проверить, что поле четырех зарядов имеет нулевой потенциал как на плоскости  $OA$ , так и на плоскости  $OB$ .

Таким образом, поле, образованное зарядом  $q$  и индуцированными на плоскостях зарядами, экви-

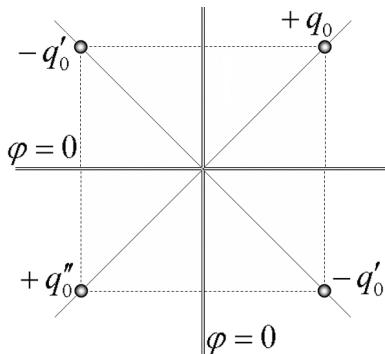


Рис. 111

валентно полю четырех точечных зарядов, причем эта эквивалентность выполняется только в одной четверти угла, содержащей исходный заряд. В оставшихся четвертях поле отсутствует. Но картина силовых линий получается достаточно симпатичной, если построить поле четырех зарядов, подразумевая, что реально поле только в одной четверти, поэтому в остальных четвертях оно заштриховано (рис. 112).

Совершенно аналогично можно построить поле заряда, помещенного на биссектрису двугранного угла, величина которого целое число раз уклады-

вается в полном угле, например, в угле  $60^\circ$ . Шесть зарядов, знаки которых чередуются, расположенных в вершинах правильного шестиугольника, обеспечивают равенство нулю потенциала на гранях угла. Силовые линии поля, созданного этими шестью зарядами, показаны на рис. 113.

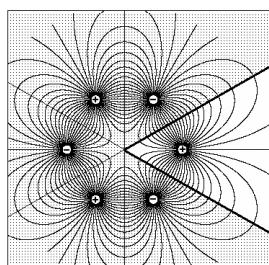


Рис. 112

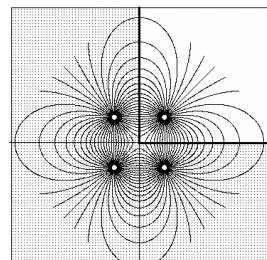


Рис. 112

### 5.3 Изображение заряда в сфере

Прежде чем приступить к рассмотрению следующей группы задач, связанных с описанием взаимодействия точечного заряда и проводящей сферы, решим одну вспомогательную задачу.

Пусть электростатическое поле создается двумя точечными зарядами, находящимися на расстоянии  $l$  друг от друга. Величины и знаки зарядов различны и равны  $q_1$  и  $-q_2$ . Покажем, что поверхность нулевого потенциала этого поля представляет собой сферу.

Выберем систему координат так, чтобы заряд  $q_1$  находился в начале координат, а заряд  $q_2$  – на оси  $Ox$  (рис. 114). Так как задача обладает осевой симметрией, то достаточно показать, что в плоскости  $xOy$  линия нулевого потенциала является окружностью. Запишем выражение для потенциала электростатического поля в произвольной точке  $A$  с координатами  $(x, y)$ :

$$\varphi = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{(x-l)^2 + y^2}} \right).$$

Полагая  $\varphi = 0$ , получим уравнение, определяющее линию нулевого потенциала. Обозначим  $\frac{q_2}{q_1} = k$  и преобразуем это уравнение к виду:

$$(x + \frac{l}{k^2 - 1})^2 + y^2 = \frac{k^2 l^2}{(k^2 - 1)^2}.$$

А это есть уравнение окружности радиуса  $R = \frac{kl}{k^2 - 1}$  с центром, лежащим на оси  $X$  в точке с координатой  $x_c = -\frac{l}{k^2 - 1}$ . В пространстве, с учетом

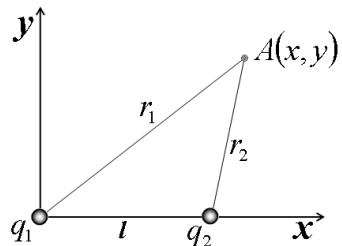


Рис. 114

осевой симметрии (вращаясь вокруг оси  $X$ ), эта линия образует сферу.

Итак, запомним: в поле, создаваемом двумя точечными зарядами, разными по знаку и величине, поверхность нулевого потенциала является сферой.

Рассмотрим теперь такую систему: точечный заряд  $q$  расположен на расстоянии  $l$  от центра металлической заземленной сферы радиуса  $R$ . Исследуем электрическое поле в этом случае.

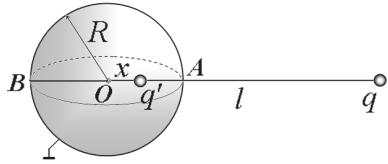
На поверхности металлической заземленной сферы возникнут индуцированные заряды, распределение которых заранее неизвестно, однако потенциал сферы равен нулю. Мы показали, что поле двух точечных зарядов имеет в качестве поверхности нулевого потенциала сферу. Теперь мы можем использовать этот результат.

Для этого необходимо внутри сферы построить заряд-изображение  $q'$ , такой, чтобы поле двух точечных зарядов имело нулевой потенциал на поверхности сферы. В этом случае вне сферы поле двух точечных зарядов  $q$ ,  $q'$  и поле, созданное зарядом  $q$  и зарядами, индуцированными на поверхности металлической сферы, будут одинаковыми. (Вне сферы распределения зарядов одинаковы, на границе – одинаковые граничные условия, поэтому поля вне сферы будут одинаковыми).

Для определения величины заряда-изображения  $q'$  и его положения можно потребовать выполнения условия  $\phi = 0$  в двух точках сферы, например,  $A$  и  $B$  (рис. 115):

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{l-R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{R-x} = 0$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{l+R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{R+x} = 0.$$



Решив эту систему относительно неизвестных  $q'$  и  $x$ , получим:

$$q' = -q \frac{R}{l}; \quad x = \frac{R^2}{l}.$$

Таким образом, вне сферы поле эквивалентно полю двух точечных зарядов: исходного  $q$  и найденного заряда-изображения  $q'$ . Внутри сферы эти поля, конечно же, различаются – внутри реальной проводящей сферы поле отсутствует.

Для определения суммарного индуцированного заряда воспользуемся теоремой Гаусса. Окружим сферу замкнутой поверхностью. По теореме Гаусса, поток вектора напряженности электрического поля через эту поверхность равен суммарному заряду внутри поверхности, деленному на  $\epsilon_0$ . Так, поле индуцированных зарядов эквивалентно полю заряда-изображения, и суммарный индуцированный заряд равен величине заряда-изображения  $q' = -q \frac{R}{l}$ .

На рис. 116 показаны силовые линии поля при двух различных значениях расстояния до точечного заряда. Обратите внимание, что при увеличении расстояния между зарядом и сферой искажения поля точечного заряда уменьшаются. Как всегда,

Рис. 115

у поверхности проводника силовые линии перпендикулярны границе, что соответствует условию равновесия индуцированных зарядов на поверхности проводника.

Еще раз подчеркнем: вне сферы поля эквивалентны, но это не значит, что индуцированные заряды концентрируются в одной точке – они распределены по поверхности сферы.

Силу взаимодействия между сферой и точечным зарядом можно найти как силу взаимодействия между двумя точечными зарядами  $q, q'$ :

$$F = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0(l-x)^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Rl}{(l^2-R^2)^2}.$$

Заметим, что при  $l \gg R$  сила взаимодействия становится равной

$$F = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R}{l^3},$$

то есть сила убывает обратно пропорционально кубу расстояния. Такая зависимость может быть качественно объяснена: величина заряда, индуцированного на сфере, обратно пропорциональна расстоянию до исходного заряда, а сила взаимодействия между точечными зарядами обратно пропорциональна квадрату расстояния – следовательно, сила взаимодействия сферы и заряда обратно пропорциональна кубу расстояния.

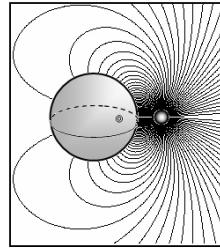
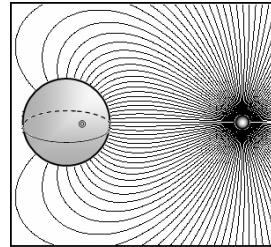


Рис. 116

Рассмотрим, как изменится картина поля, если сфера не заземлена. Потенциал незаземленной сферы отличен от нуля, но по-прежнему постоянен; величина его заранее неизвестна. Но для изолированной сферы суммарный индуцированный заряд равен нулю – в поле точечного заряда произойдет только перераспределение зарядов по поверхности сферы.

Мы можем добиться выполнения граничных условий, поместив в центр шара еще один заряд-изображение  $q'' = -q'$  (рис. 117). Действительно, заряды  $q$ ,  $q'$  создают поле, потенциал которого на поверхности сферы равен нулю, а заряд, помещенный в центре сферы, на ее поверхности создает постоянный (но не равный нулю) потенциал, поэтому эквипотенциальность сферы не нарушится. Из теоремы Гаусса следует, что суммарный индуцированный заряд сферы равен сумме зарядов изображений, поэтому при выполнении условия  $q'' = -q'$  этот заряд окажется равным нулю.

Итак, вне сферы поле, создаваемое точечным зарядом  $q$  и индуцированными зарядами на поверхности, эквивалентно полю трех точечных зарядов  $q$ ,  $q'$ ,  $q''$ .

Обратите внимание: число зарядов-изображений определяется только необходимостью выполнения граничных условий.

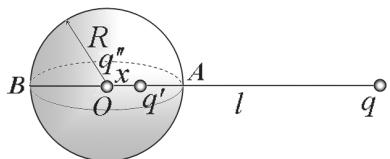


Рис. 117

На рис. 118 показана картина силовых линий электрического поля рассматриваемой системы зарядов. Обратите внимание, что имеются силовые линии, начинающиеся на положительных зарядах сферы. Незаземленная сфера гораздо меньше возмущает поле точечного заряда, чем заземленная. Действительно, на ней происходит только перераспределение зарядов.

Сила, действующая на заряд  $q$ , вычисляется как сумма сил, действующих со стороны двух изображений:

$$F = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0(l-x)^2} + \frac{qq''}{4\pi l^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R^3(2l^2 - R^2)}{l^3(l^2 - R^2)^2}.$$

При  $l \gg R$  сила взаимодействия

$$F = -\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R^3}{l^5}$$

убывает обратно пропорционально пятой степени расстояния, что также легко объяснимо: величина индуцированного дипольного момента пропорциональна величине внешнего поля (которое убывает обратно пропорционально квадрату расстояния), а величина поля диполя убывает обратно пропорционально кубу расстояния.

Заметим, что в данном случае можно вычислить потенциал сферы, не рассчитывая распределения зарядов на поверхности. По принципу суперпозиции, потенциал центра сферы равен сумме

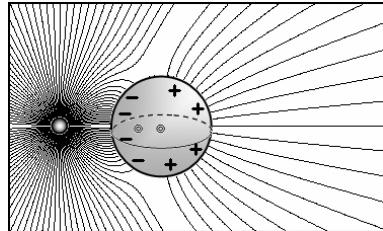


Рис. 118

потенциалов заряда  $q$  и индуцированных зарядов на поверхности сферы. Все индуцированные заряды находятся на одном и том же расстоянии от центра, и их сумма равна нулю, следовательно, равен нулю и потенциал, создаваемый ими в центре сферы. Поэтому потенциал в центре сферы, следовательно, и в любой ее точке, равен потенциалу поля

$$\text{точечного заряда } \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l}.$$

Суммарный заряд сферы остается равным нулю, но сфера приобретает индуцированный дипольный момент, который равен дипольному моменту двух зарядов-изображений:

$$p = q'x = q \frac{R^3}{l^2}.$$

Перепишем эту формулу в виде:

$$p = q \frac{R^3}{l^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l^2} \cdot (4\pi R^3) = 3V\epsilon_0 E_0,$$

где  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  – объем сферы,  $E_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l^2}$  – напряженность поля, создаваемого точечным зарядом в центре сферы. Таким образом, мы видим, что индуцированный дипольный момент сферы пропорционален напряженности внешнего поля. В общем случае связь между напряженностью внешнего поля и величиной индуцированного заряда записывают в виде:

$$p = \alpha\epsilon_0 E,$$

где  $E$  – напряженность внешнего электрического поля, коэффициент пропорциональности  $\alpha$  имеет размерность объема и называется **поляризуемостью**

**тела.** Мы показали, что для проводящей сферы (аналогично шара) поляризуемость равна ее утроенному объему. В общем случае поляризуемость зависит от формы тела и его электрических свойств, однако по порядку величины она равна объему тела.

Достаточно интересно рассмотреть распределение потенциала в плоскости, проходящей через точечный заряд и центр сферы. Эти потенциальные функции для заземленной (а) и незаземленной (б) сфер изображены на рисунке 119. Функция, описывающая потенциал поля, вне сферы совпадает с потенциалом поля точечных зарядов (исходного и изображений), а внутри сферы равна нулю в случае (а) и постоянна в случае (б) – круглые горизонтальные площадки совпадают с сечением сферы. Резкое «возвышение» есть потенциал поля точечного заряда, который стремится к бесконечности; здесь, как и на других рисунках, он «обрезан».

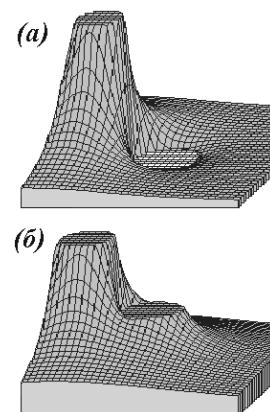


Рис. 119

## 5.4 Проводящий шар в однородном поле

Посмотрим, какие изменения внесет проводящий шар, помещенный в однородное электрическое поле. Данная задача весьма популярна, известно несколько принципиально различных методов ее решения.

Мы же воспользуемся уже полученными нами результатами. Поместим шар посредине между двумя одинаковыми по величине, но противоположными по знаку точечными зарядами  $+Q$  и  $-Q$  (рис. 120). Обозначим расстояния от зарядов до центра шара  $l$ .

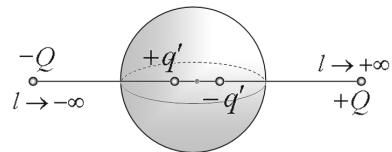


Рис. 120

Построим изображения каждого заряда в шаре – два заряда, величины которых равны  $q' = Q \frac{R}{l}$ , расположены на расстоянии  $x = \frac{R^2}{l}$  от центра шара. Теперь мысленно начнем уносить заряды  $Q$  на бесконечность  $l \rightarrow \infty$ . При этом заряды-изображения будут приближаться к центру шара, образуя точечный диполь с дипольным моментом

$$p = 2q'x = 2 \frac{QR^3}{l^2}.$$

При увеличении расстояния между зарядами поле в области шара становится практически однородным с напряженностью

$$E = 2 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 l^2}.$$

Выразим индуцированный дипольный момент шара через напряженность поля:

$$p = 4\pi\epsilon_0 R^3 E.$$

Как видите, этот дипольный момент не зависит от «придуманных» зарядов  $Q$  и расстояния  $l$ , поэтому и в однородном поле шар будет иметь такой же ди-

польный момент. Обратите внимание, что и в данном случае поляризуемость шара равна его утроенному объему.

Таким образом, поле индуцированных на поверхности шара зарядов эквивалентно полю точечного диполя, находящегося в центре шара. Картину силовых линий такого поля мы уже использовали ранее (рис. 98).

Неплохо также смотрится и распределение потенциала (рис. 121).

Потенциал однородного поля изменяется по линейному закону, поэтому распределение потенциала в таком поле изображается наклонной плоскостью. При помещении в это поле проводящего шара на наклонной плоскости появляется горизонтальная площадка постоянного потенциала на проводнике.

#### *Задание для самостоятельной работы.*

1. Найдите распределение поверхностной плотности индуцированных зарядов на поверхности металлического шара, помещенного во внешнее электрическое поле.

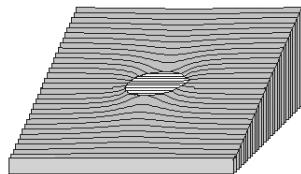


Рис. 121

## **§ 6. Диэлектрики.**

### **Поляризация диэлектриков**

Вторая группа – большая группа веществ, различаемых по их электрическим свойствам, – диэ-

лектрики (изоляторы), вещества, не проводящие электрический ток. К диэлектрикам относятся различные виды пластмасс, стекол, керамики, кристаллы солей, сухая древесина, многие чистые жидкости (дистиллированная вода, масла, бензины), газы при не очень сильных внешних полях. Все заряженные частицы, образующие данное непроводящее вещество, связаны между собой и не способны передвигаться по объему тела.

Заметим, что резкой границы между проводниками и изоляторами нет, так как все вещества в той или иной степени способны проводить электрический ток, однако во многих случаях слабой проводимостью веществ можно пренебречь и считать их идеальными изоляторами. Возможность такого приближения необходимо рассматривать в каждом конкретном случае отдельно. Заметим, что во многом применимость модели идеального изолятора определяется временем протекания рассматриваемых процессов, более подробно эта проблема будет рассмотрена позднее.

Так как все вещества состоят из электрически заряженных частиц, то все вещества взаимодействуют с электрическим полем. В диэлектриках под действием электрического поля заряды могут смещаться на незначительное расстояние, величина этого смещения меньше размеров атомов и молекул. Тем не менее, эти смещения могут приводить к весьма заметным последствиям, таким, как появление индуцированных зарядов. В отличие от проводников, в диэлектриках индуцированные за-

ряды могут возникать как на их поверхности, так и внутри их объема.

**Явление возникновения зарядов под действием внешнего поля называется поляризацией диэлектрика, а сами возникающие заряды называются поляризованными.**

Существуют несколько механизмов поляризации диэлектрика, соответственно с которыми различают несколько типов диэлектриков, некоторые из них мы сейчас кратко рассмотрим.

## 6.1 Виды диэлектриков

### 6.1.1 Неполярные диэлектрики

К этому классу диэлектриков относятся вещества, состоящие из атомов и молекул, не обладающих собственными дипольными моментами в отсутствии поля. Типичными примерами таких веществ являются одноатомные благородные газы; газы, состоящие из симметричных двухатомных молекул – кислород, водород, азот; различные органические жидкости: масла, бензины; из твердых тел – пластмассы.

В молекулах этих веществ центры положительных зарядов ядер и отрицательных зарядов электронных облаков совпадают (рис. 122). Под действием внешнего элек-

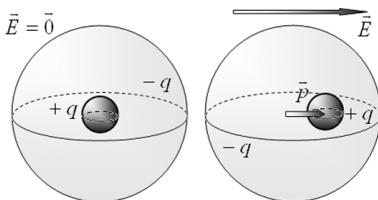


Рис. 122

трического поля происходит незначительное смещение центров этих зарядов, благодаря чему каждый атом приобретает индуцированный дипольный момент, направление которого совпадает с направлением внешнего приложенного электрического поля. Величина этого дипольного момента сложным образом зависит от напряженности внешнего поля. Однако в полях слабых по сравнению с внутриатомными полями величина индуцированного дипольного момента оказывается пропорциональной напряженности внешнего поля

$$\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E},$$

где коэффициент пропорциональности  $\alpha$  называется **поляризуемостью** молекулы.

Справедливость такой записи обосновывается малостью смещения центров положительных и отрицательных зарядов, а на малых изменениях любая функция может быть приближенно заменена на линейную.

### *Задание для самостоятельной работы.*

*1. Оцените напряженность электрического поля внутри атома водорода.*

Так как каждая молекула приобретает дипольный момент, то и весь диэлектрик в целом приобретает дипольный момент. Величина этого дипольного момента может служить характеристикой степени поляризации диэлектрика. Однако более удобно ввести «точечную» характеристику воздействия электрического поля на диэлектрик. Для этого внутри диэлектрика рассмотрим небольшой

объем  $\Delta V$ , индуцированный дипольный момент этого объема равен сумме дипольных моментов отдельных молекул, находящихся внутри рассматриваемого объема  $\sum_i \vec{p}_i$ , отношение этого дипольного момента к объему называется **поляризацией**\* (вектором поляризации) диэлектрика

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V}. \quad (1)$$

Как обычно, данная характеристика становится «точечной» при объеме выделенной части, стремящейся к нулю ( $\Delta V \rightarrow 0$ ).

Если индуцированный дипольный момент каждой молекулы пропорционален напряженности внешнего поля, то и дипольный момент каждой части диэлектрика также пропорционален напряженности внешнего поля. Поэтому связь между вектором поляризации и напряженностью внешнего поля принято записывать в виде

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}, \quad (2)$$

где  $\chi$  (греческая буква «хи») называется поляризуемостью вещества. Поляризуемость вещества, в отличие от поляризуемости тела и молекулы, является безразмерной величиной, характеризующей данное вещество. В отличие от проводников, где воздействие поля характеризуется величиной

\* Обращайте внимание на терминологию: поляризация диэлектрика – явление, поляризация или вектор поляризации – характеристика воздействия поля на вещество. Еще сложнее с поляризуемостью: поляризуемость тела, поляризуемость молекулы, далее появится поляризация вещества.

индуцированных зарядов, для диэлектриков такой характеристикой является дипольный момент единицы объема, то есть вектор поляризации.

Рассмотренный механизм поляризации неполярных диэлектриков называется **индукционным**.

Формально из сравнения формул (1) и (2) следует, что поляризуемость вещества связана с поляризуемостью отдельной молекулы соотношением  $\chi = an$  (где  $n$  – число молекул в единице объема, то есть концентрация). Однако такое простое соотношение справедливо только для разреженных газов, где можно пренебречь взаимодействием молекул. В жидких и твердых телах каждая молекула находится в поле, которое создается не только внешними источниками, но и дипольными моментами других молекул. Иными словами, та же «заклиненная» задача, только в еще более сложной постановке.

### ***Задание для самостоятельной работы.***

*1. Считая, что поляризуемость молекулы равна ее объему, оцените поляризуемость молекул газов. Оцените также поляризуемость воздуха при нормальных условиях. Для проведения оценок примите, что диаметр молекулы примерно равен 1 ангстрему.*

#### ***6.1.2 Полярные диэлектрики***

Некоторые молекулы обладают собственным дипольным моментом даже в отсутствие внешнего электрического поля. Такие молекулы называ-

ются **полярными**, и диэлектрики, образованные такими молекулами, – **полярными**. Полярные молекулы несимметричны, электронные плотности в них смещены к одному из атомов.

Типичным примером такой молекулы служит молекула воды  $H_2O$ , в которой электронные облака смещены к атому кислорода, вследствие чего центры положительных и отрицательных зарядов смещены друг относительно друга, поэтому молекула обладает собственным дипольным моментом (рис. 123).

Механизм поляризации полярных диэлектриков иной, чем неполярных. В отсутствие внешнего поля дипольные моменты молекул ориентированы хаотически, поэтому в любом объеме диэлектрика, содержащем достаточно много молекул, суммарный дипольный момент равен нулю. Во внешнем электрическом поле на молекулы действует врачающий момент, поэтому молекулы начинают ориентироваться так, что вектор дипольного момента выстраивается

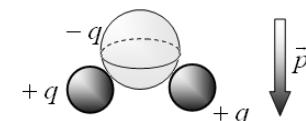


Рис. 123

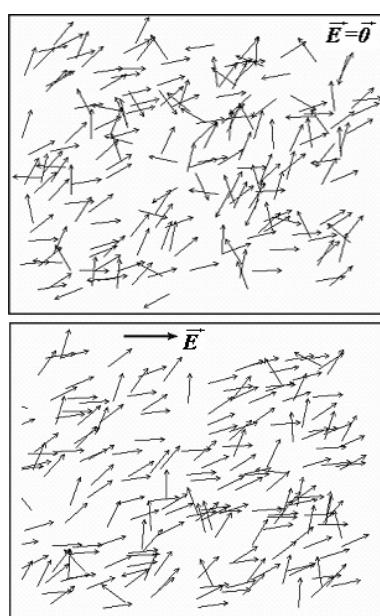


Рис. 124

ется вдоль вектора напряженности внешнего поля (рис. 124). Тем самым диэлектрик и каждая его часть приобретает индуцированный дипольный момент. Такой механизм поляризации называется **ориентационным**. Полной ориентации всех молекул препятствует хаотическое тепловое движение, поэтому молекулы диэлектрика лишь частично ориентируются по внешнему полю.

Понятно, что в очень сильных полях подавляющая часть молекул выстроится вдоль вектора напряженности внешнего поля. Однако при комнатных температурах степень ориентации молекул является незначительной, поэтому и в случае полярных диэлектриков можно приближенно считать, что вектор поляризации диэлектрика пропорционален напряженности электрического поля:

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}.$$

Отметим, что поляризуемость полярных диэлектриков на несколько порядков превышает поляризуемость неполярных.

Заметим, что индукционный механизм поляризации присутствует и в полярных диэлектриках. То есть под действием электрического поля происходит смещение зарядов в молекулах, однако эффект ориентации на несколько порядков превосходит индукционный эффект, поэтому последним часто пренебрегают.

### *Задание для самостоятельной работы.*

1. Объясните, почему поляризуемость полярных диэлектриков зависит от температуры, а

*неполярных – практически нет. Как ведет себя поляризуемость полярных диэлектриков с ростом температуры?*

### **6.1.3 Электреты**

Интересный класс веществ образуют диэлектрики, способные длительное время сохранять наэлектризованное состояние и создающие собственное электрическое поле в окружающем пространстве. Такие вещества называются электретами, они аналогичны постоянным магнитам, сохраняющим состояние намагниченности.

Стабильные электреты можно получить, нагревая диэлектрик до температуры плавления, а затем охлаждая их в сильном электрическом поле. В жидком состоянии полярные молекулы, находящиеся в электрическом поле, ориентируются, при отвердевании подвижность молекул исчезает, поэтому ориентированное состояние молекул может сохраняться длительное время. Изготавливают электреты из органических (воск, парафин, нафталин, эbonит) и неорганических (сера, некоторые виды стекол) полярных диэлектриков. Первые электреты были изготовлены в начале XIX века итальянским физиком А. Вольта.

## **6.2 Описание электрического поля в диэлектриках**

Описание электрического поля в диэлектриках, помимо проблем, рассмотренных при расче-

те полей в присутствии проводников, усложняется тем, что внутри диэлектриков могут возникать объемные поляризационные заряды. Поэтому мы в состоянии рассмотреть только простейшие задачи, связанные с описанием полей в присутствии диэлектриков.

Прежде всего, мы ограничимся рассмотрением однородных и изотропных диэлектриков, то есть веществами, у которых поляризуемость одинакова во всех точках и не зависит от направления поля. Кроме того, будем рассматривать электрические поля только простейшей конфигурации.

Заметим, что среди диэлектриков существуют такие кристаллические диэлектрики, в которых поляризуемость зависит от направления поля (анизотропия). Качественно понять такую зависимость можно: смещение зарядов различно в различных направлениях. В таких диэлектриках направление вектора поляризации может не совпадать с направлением вектора напряженности электрического поля.

Пусть во внешнее однородное электрическое поле помещена плоскопаралельная пластина толщиной  $h$ , изготовленная из однородного диэлектрика, причем силовые линии электрического поля перпендикулярны граням пластины.

Под действием электрического поля диэлектрик поляризуется, то есть происходит смещение положительных и отрицательных зарядов. Схематически картину поляризации можно представить следующим образом. Мысленно разделим пласти-

ну на две – однородно заряженные (положительно и отрицательно), вложенные друг в друга (рис. 125). Объемные плотности зарядов этих воображаемых пластин равны по модулю. Поэтому, когда пластины полностью вложены одна в другую, суммарная объемная плотность заряда равна нулю. При наложении внешнего однородного поля происходит малое смещение этих пластин друг относительно друга. В области их перекрытия объемный заряд по-прежнему отсутствует, а там, где они расходятся, появляются нескомпенсированные заряды. Так как смещения зарядов крайне малы, то можно считать, что на поверхностях появляются поверхностные заряды, поверхностную плотность которых обозначим  $\sigma$ . Заметим, что в данном случае поляризационные заряды не создают электрического поля вне пластины, поэтому здесь поле остается неизменным.

Связем поверхностную плотность индуцированных поляризационных зарядов с величиной вектора поляризации диэлектрика. Для этого выделим в пластине цилиндр, основания которого (площадью  $\Delta S$ ) расположены на гранях пластины. С одной стороны, по определению вектора поляризации  $P$ , дипольный момент выделенного цилиндра равен произведению модуля вектора поляризации на объем цилиндра  $\Delta V = h\Delta S$ :

$$p = P\Delta V = Ph\Delta S,$$

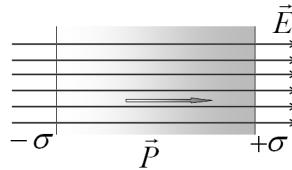


Рис. 125

а с другой, по определению дипольного момента, эта же величина равна произведению заряда основания  $q = \sigma\Delta S$  на расстояние между зарядами  $h$ :

$$p = qh = \sigma\Delta Sh.$$

Из сравнения этих выражений следует замечательный результат: **поверхностная плотность поляризационных зарядов равна модулю вектора поляризации диэлектрика**:

$$\sigma = P. \quad (1)$$

В общем случае вектор поляризации диэлектрика может быть направлен под некоторым углом  $\alpha$  к поверхности. Также выделим внутри пластины наклонный цилиндр, основания которого находятся на гранях пластины, а образующие параллельны вектору поляризации  $\vec{P}$  (рис. 126). В этом случае запишем нормальную к поверхности составляющую дипольного момента выделенного цилиндра в двух формах:

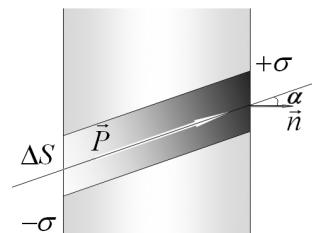


Рис. 126

– по определению вектора поляризации,

$$p_n = P_n \Delta V = P \cos \alpha \cdot h \Delta S;$$

– по определению дипольного момента,

$$p_n = qh = \sigma\Delta Sh.$$

Из сравнения этих выражений следует, что **поверхностная плотность поляризационных зарядов равна нормальной составляющей вектора поляризации диэлектрика**:

$$\sigma = P_n. \quad (2)$$

Вернемся к расчету поля внутри диэлектрической пластины. Напряженность электрического поля внутри пластины

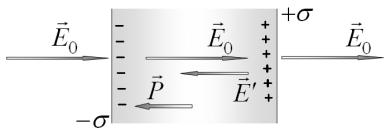


Рис. 127

равна сумме напряженностей внешнего поля  $\vec{E}_0$  и поля, создаваемого поляризационными зарядами  $\vec{E}'$  (рис. 127):

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \quad (3)$$

Напряженность поля поляризационных зарядов выражается через поверхностную плотность зарядов  $\sigma$

$$E' = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

которая, в свою очередь, равна модулю вектора поляризации  $\sigma = P$ . Поляризация среды определяется полем внутри нее, то есть величиной суммарной напряженности  $P = \chi\epsilon_0 E$ . Подставляя значение напряженности  $E'$  в выражение (3), записанное в проекции на направление внешнего поля, получим:

$$E = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma}{\epsilon_0} = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0} = E_0 - \frac{\chi\epsilon_0 E}{\epsilon_0}. \quad (4)$$

Обратите внимание: искомая величина напряженности поля внутри диэлектрика входит в обе части уравнения (4). Яркая иллюстрация «зацикленности»: поле внутри зависит от индуцированных зарядов, индуцированные заряды зависят от поля внутри. Однако в данном простейшем случае задача определения поля оказалась разрешимой.

Из уравнения (4) получаем:

$$E = \frac{E_0}{1 + \chi} = \frac{E_0}{\epsilon}. \quad (5)$$

Из записанных соотношений также можно выразить поверхностную плотность поляризационных зарядов:

$$\sigma = P = \chi \epsilon_0 E = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \epsilon_0 E_0. \quad (6)$$

В этих соотношениях обозначено  $\epsilon = 1 + \chi$ . Таким образом, поляризационные заряды уменьшают поле внутри диэлектрика в  $(1 + \chi)$  раз по сравнению с внешним полем. Величина  $\epsilon = 1 + \chi$  называется **диэлектрической проницаемостью вещества**. Именно эта величина выступает в качестве основной характеристики электрических свойств веществ и чаще всего приводится в справочниках физических величин.

Диэлектрическая проницаемость веществ может изменяться в широких пределах: так, для газов она отличается от единицы на величину порядка  $10^{-4} - 10^{-6}$  (поэтому часто диэлектрическими свойствами газов пренебрегают);

- для жидких и твердых неполярных диэлектриков она составляет несколько единиц (например, для керосина  $\epsilon = 2$ );
- для полярных диэлектриков – несколько десятков единиц (например, для воды  $\epsilon = 81$ );
- есть вещества, для которых диэлектрическая проницаемость составляет величины порядка десятков и сотен тысяч (эти вещества называются сегнетоэлектриками).

Диэлектрическая проницаемость вещества показывает, во сколько раз это вещество уменьшает напряженность электрического поля при условии, что силовые линии поля перпендикулярны поверхности диэлектрика. Конечно, это уменьшение связано с тем, что на поверхности диэлектрика возникают поляризационные заряды, поле которого направлено противоположно внешнему полю, породившему эти заряды.

Особо подчеркнем, что поле внутри диэлектрического тела зависит от:

- внешнего поля  $\vec{E}_0$ ;
- диэлектрической проницаемости вещества;
- формы тела.

Утверждение о том, что диэлектрик всегда уменьшает поле в  $\epsilon$  раз, мягко говоря, не всегда справедливо; оно верно тогда, когда силовые линии перпендикулярны границам тела, или если эти границы находятся так далеко, что полем поляризационных зарядов можно пренебречь.

Пусть теперь внешнее однородное поле  $\vec{E}_0$  направлено под некоторым углом  $\alpha$  к нормали поверхности пластины (рис. 128). Напряженность поля внутри пластины и в этом случае равно сумме напряженностей внешнего поля  $\vec{E}_0$  и поля, создаваемого поляризационными зарядами  $\vec{E}'$ :

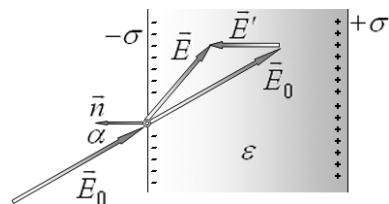


Рис. 128

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'.$$

Напряженность поля, создаваемого поляризационными зарядами  $\vec{E}'$ , направлена перпендикулярно поверхности пластин (не совпадает с направлением внешнего поля  $\vec{E}_0$ ), поэтому вектор напряженности электрического поля внутри пластины направлен под другим углом к поверхности пластины.

Для определения поля разложим векторы напряженности полей вне и внутри пластины на нормальные (перпендикулярные к поверхности)  $\vec{E}_{0n}$ ,  $\vec{E}_{1n}$  и тангенциальные (параллельные поверхности)  $\vec{E}_{0\tau}$ ,  $\vec{E}_{1\tau}$  составляющие (рис. 129).

Согласно принципу суперпозиции, эти компоненты поля можно рассматривать независимо.

Случай нормальных составляющих мы уже рассмотрели и показали, что для напряженностей полей выполняется соотношение  $E_{1n} = \frac{E_{0n}}{\epsilon}$ , которое можно переписать в виде

$$E_{0n} = \epsilon E_{1n}. \quad (7)$$

Так как поляризационные заряды создают поле, вектор напряженности которого направлен перпендикулярно поверхности, то тангенциальные составляющие полей вне и внутри пластины будут равны

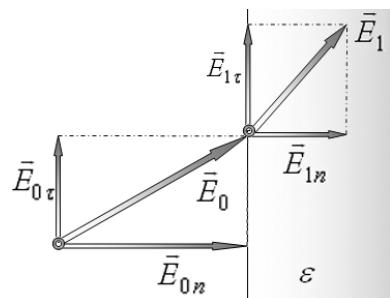


Рис. 129

$$E_{0t} = E_{1t}. \quad (8)$$

Соотношения (7) и (8) определяют законы изменения векторов напряженностей полей на границе диэлектрика (задают **граничные условия**). Они играют важную роль при расчетах полей в присутствии диэлектриков.

Выразим модуль вектора напряженности поля внутри диэлектрика

$$\begin{aligned} E_1 &= \sqrt{E_{1n}^2 + E_{1t}^2} = \sqrt{\left(\frac{E_0 \cos\alpha}{\epsilon}\right)^2 + (E_0 \sin\alpha)^2} = \\ &= \frac{E_0}{\epsilon} \sqrt{\cos^2 \alpha + \epsilon^2 \sin^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Как видите, вектор напряженности поля внутри диэлектрика не только не совпадает по направлению с напряженностью внешнего поля, но и его модуль зависит от угла между напряженностью внешнего поля и вектором нормали к поверхности диэлектрика.

Таким образом, на границе диэлектрика тангенциальная составляющая поля не изменяется, а нормальная уменьшается в  $\epsilon$  раз. Следовательно, если силовые линии электрического поля перпендикулярны границе диэлектрика во всех точках его поверхности, то диэлектрик не изменяет структуру поля (картину силовых линий), но уменьшает напряженность поля в  $\epsilon$  раз.

Часто утверждают, что диэлектрическая проницаемость вещества показывает, во сколько раз уменьшается напряженность поля. Это утвержде-

ние верно...но только когда вектор напряженности перпендикулярен границе диэлектрика!

Если проводящее тело находится внутри диэлектрика, то на границе проводника и диэлектрика возникают поляризационные заряды, которые уменьшают поле внутри диэлектрика (рис. 130). Найдем поверхностную плотность этих зарядов. Пусть в некоторой точке поверхности проводника поверхностная плотность заряда равна  $\sigma_0$ , тогда напряженность поля, создаваемого зарядами на проводнике, определяется выражением  $E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$ . Это поле выступает в качестве внешнего по отношению к диэлектрику и направлено перпендикулярно границе диэлектрика. Поэтому, согласно формуле (6), поверхностная плотность поляризационных зарядов на диэлектрике равна

$$\sigma' = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \epsilon_0 E_0 = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \sigma_0.$$

Понятно, что эти заряды противоположны по знаку зарядам на проводнике, поэтому суммарная поверхностная плотность заряда в данной точке границы равна

$$\sigma_0 - \sigma' = \frac{\sigma_0}{\epsilon}.$$

Причем такое соотношение выполняется во всех точках поверхности проводника. Иными сло-

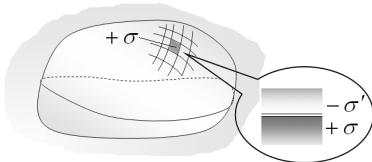


Рис. 130

вами, структура поля не изменяется, но модуль напряженности уменьшается в  $\epsilon$  раз! Вот еще одно явное объяснение уменьшения поля в диэлектрике: на границе проводника и диэлектрика возникают поляризационные заряды противоположного знака, при этом суммарный поверхностный заряд уменьшается в  $\epsilon$  раз, соответственно, во всех точках внутри диэлектрика поле также уменьшается во столько же раз (конечно, если пренебречь полем зарядов, возникающих на других границах диэлектрика).

Если два небольших заряженных тела (которые можно считать точечными зарядами) находятся внутри бесконечного диэлектрика, то сила взаимодействия между ними уменьшается, по сравнению с силой взаимодействия в вакууме. На границе раздела заряженных тел и диэлектрика возникают поляризационные заряды, которые частично экранируют поля, создаваемые точечными зарядами. Как мы показали, напряженность поля, созданного одним из зарядов, уменьшается в  $\epsilon$  раз по сравнению с полем в вакууме. Поэтому сила, действующая на второе тело, также уменьшается в  $\epsilon$  раз. Заметьте, что речь идет о силе, действующей на само заряженное тело, без учета сил, действующих на поляризационные заряды, возникшие вблизи этого тела. Ведь эти поляризационные заряды «привязаны» к диэлектрику, а не к рассматриваемому телу. Поэтому сила взаимодействия двух точечных зарядов, находящихся в однородном бесконечном диэлектрике, рассчитывается по формуле

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}.$$

В некоторых учебных и справочных пособиях по физике именно эту формулу приводят в качестве формулировки закона Кулона. Однако такое расширение закона Кулона нельзя признать удовлетворительным. Во-первых, эта формула получена как следствие применения законов электрического поля и свойств веществ, во-вторых, ее применение требует значительных оговорок – диэлектрик должен быть бесконечным, однородным, для него должна выполняться линейная связь между напряженностью поля и поляризацией диэлектрика. Далее, диэлектрическая проницаемость является усредненной характеристикой вещества, она никоим образом не учитывает атомную структуру строения материи – очень интересный вопрос: «Чему равна сила взаимодействия между двумя электронами, находящимися в воде?». Ведь размеры электрона намного меньше размеров молекулы воды. Поэтому разумно формулировать как постулат (подтверждаемый экспериментально) закон Кулона, как закон взаимодействия точечных зарядов в вакууме, а влияние среды на взаимодействие заряженных тел рассматривать отдельно и полученные результаты рассматривать как следствие из закона Кулона и электрических свойств среды.

## 6.3 Метод изображений для диэлектриков\*

Идеи метода изображений, развитые для описания поля в присутствии проводников, могут быть распространены и для описания поля в присутствии диэлектриков. Существенным отличием этих методов в случае диэлектриков является изменение (существенное усложнение) граничных условий. Если поверхность металла является экспоненциальной, то на поверхности диэлектрика должны выполняться граничные условия для нормальных и тангенциальных составляющих векторов напряженности полей. Поэтому чаще всего приходится «угадывать» вид распределения поверхностной плотности поляризационных зарядов, что удается сделать только в редких случаях.

Рассмотрим для примера электрическое поле, создаваемое точечным зарядом  $q$ , который находится на расстоянии  $h$  от бесконечной плоской границы с бесконечным диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon$ .

Предположим, что на плоской границе диэлектрика, взаимодействующего с точечным зарядом  $q$ , возникают поляризационные заряды, распределение  $\sigma'$  которых совпадает с распределением зарядов на поверхности проводника, находящегося в аналогичных условиях. Такое распределение поверхностных зарядов создает в полупространстве поле, эквивалентное полю точечного заряда. Таким образом, будем рассматривать поле в верхнем

---

\* Этот раздел при первом чтении можно опустить.

полупространстве над диэлектриком как суперпозицию зарядов  $q$  и  $q'$ , расположенных симметрично по разные стороны от границы, а поле внутри диэлектрика как поле двух точечных зарядов  $q$  и  $q'$ , расположенных в одной точке (рис. 131).

Для того чтобы доказать справедливость нашего предположения, необходимо добиться выполнения граничных условий:

$$E_{0n} = \epsilon E_n; \quad E_{0t} = \epsilon E_t.$$

Легко видеть, что

условие постоянства тангенциальной составляющей выполняется при любом значении заряда изображения  $q'$ . Попытаемся подобрать такую величину этого заряда, чтобы выполнялось граничное условие и для нормальных составляющих поля. Согласно нашему предположению, в пространстве над диэлектриком возле границы нормальная составляющая поля определяется формулой

$$E_{0n} = \frac{q - q'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos\theta,$$

а внутри диэлектрика, непосредственно у границы, —

$$E_n = \frac{q + q'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos\theta.$$

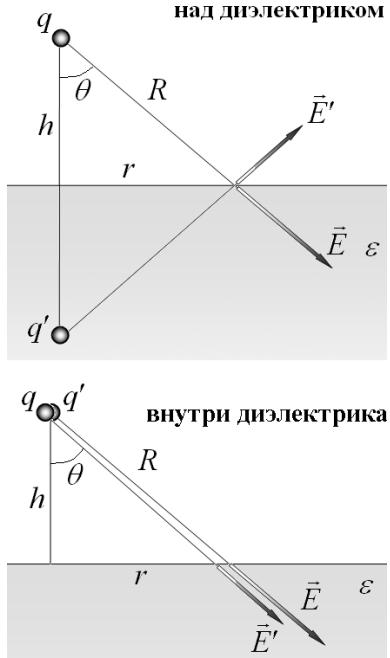


Рис. 131

Граничное условие для нормальных составляющих поля  $E_{0n} = \epsilon E_n$  будет выполняться в любой точке границы, если положить  $q - q' = \epsilon(q - q')$ , или

$$q' = -q \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1}. \quad (1)$$

Итак, мы показали, что предположение о характере распределения поляризационных зарядов на границе диэлектрика справедливо, так как выполняются оба граничных условия.

Таким образом, для расчета полей приходится строить заряд-изображение, расположенный внутри диэлектрика, если рассчитывается поле вне его; и наоборот – снаружи от диэлектрика, если рассматривается поле внутри него.

Отметим, что поле внутри диэлектрика в данном случае совпадает с полем точечного заряда, величина которого равна  $q + q' = \frac{2}{\epsilon + 1}$ , соответственно, напряженность поля внутри диэлектрика равна  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = \frac{2}{\epsilon + 1} \vec{E}_0$ . То есть диэлектрик уменьшает поле, но не в  $\epsilon$  раз, как это бывает в случае бесконечного диэлектрика или когда силовые линии поля перпендикулярны границе. Поле вне диэлектрика отличается от поля точечного заряда.

Аналогично может быть решена задача о расчете поля, созданного диэлектрическим шаром, помещенным во внешнее однородное электрическое поле. Оказывается, что и в этом случае вид распределения поляризационных зарядов на поверхности шара совпадает с видом распределения

индуцированных зарядов на поверхности проводящего шара. Использование этого обстоятельства позволяет найти напряженности полей как внутри шара, так и вне его. Суммарное поле внутри шарика будет оставаться однородным и направленным так же, как и внешнее поле, однако его величина будет меньше:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = \frac{3}{\varepsilon + 2} \vec{E}_0. \quad (2)$$

Поле вне шара перестанет быть однородным.

Обратите внимание, что множитель, показывающий, во сколько раз изменилась напряженность поля, отличается от аналогичного множителя для случая плоской границы – форма границы оказывает существенное влияние на поле внутри и снаружи от диэлектрика.

Заметим, что переход от диэлектрика к проводнику в задачах электростатики может быть осуществлен, полагая  $\varepsilon \rightarrow \infty$ ; действительно, в этом пределе формулы, определяющие заряды-изображения и напряженности полей в диэлектрике, переходят в соответствующие формулы, полученные ранее для проводника\*.

Если же положить  $\varepsilon = 1$ , то все индуцированные заряды исчезают, как и должно быть в отсутствие диэлектрика.

*Задание для самостоятельной работы.*

*1. Докажите формулу (2).*

---

\* Обратный переход от проводника к диэлектрику невозможен. Иными словами, «уйти на бесконечность легко, вернуться трудно!»

## § 7. Энергия электрического поля. Плотность энергии электрического поля

### 7.1 Энергия взаимодействия точечных зарядов

Вернемся к обсуждению вопроса об энергии взаимодействия электрических зарядов. Ранее мы показали, что потенциальная энергия электростатического взаимодействия двух точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , находящихся на расстоянии  $r$  друг от друга (рис. 132), рассчитывается по формуле

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (1)$$

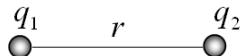


Рис. 132

Придадим этой формуле несколько иной вид:

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} = q_1 \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r} \right) = q_1 \Phi_1,$$

здесь  $\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r}$  – потенциал поля, создаваемого вторым зарядом, в точке, где находится первый заряд. Аналогично можно записать

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} = q_2 \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r} \right) = q_2 \Phi_2,$$

где  $\Phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r}$  – потенциал поля, создаваемого первым зарядом, в точке, где находится второй заряд. Теперь перепишем выражение (1) в симметричной форме, легко допускающей обобщение:

$$U(r) = \frac{1}{2} (q_1 \phi_1 + q_2 \phi_2). \quad (2)$$

В этой формуле мы выписали два равных слагаемых, каждое из которых можно трактовать как энергию взаимодействия одного из зарядов с другим, но мы подчеркивали, что энергия взаимодействия не «принадлежит» ни одному из зарядов, поэтому нельзя учитывать эту энергию дважды – из-за этого и появляется в формуле множитель  $1/2$ .

Если система состоит из нескольких зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_N$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ), то полная энергия их взаимодействия есть сумма энергий взаимодействий всех пар зарядов. Используя симметричное выражение (2), суммирование по **парам** зарядов (двойную сумму) можно заменить на суммирование по **самим зарядам**, то есть записать:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{\text{по парам}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_k}{r_{ik}} = \frac{1}{2} (q_1 \phi_1 + q_2 \phi_2 + \dots + q_k \phi_k + \dots) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\text{по зарядам}} q_k \phi_k. \end{aligned} \quad (3)$$

В этой формуле  $\phi_k$  – потенциал поля в точке, где находится заряд  $q_k$ , причем поля, создаваемого всеми зарядами, кроме самого заряда  $q_k$  (как говорят, исключая самовоздействие заряда на самого себя).

Использование понятия энергии взаимодействия требует чрезвычайной точности и внимательности. Произвол в выборе нулевого уровня энергии, с одной стороны, предоставляет определенную свободу, а с другой, требует четкого понимания о какой именно энергии идет речь. Так, если

в формуле (3) потенциалы отсчитываются относительно точек, бесконечно удаленных от зарядов, то эта формула определяет работу, которую совершил электрическое поле при удалении всех зарядов на бесконечно большие расстояния друг от друга. Если же требуется рассчитать работу поля при изменении положения зарядов, то выбор нулевого уровня не принципиален: эта работа не зависит от нулевого уровня потенциала.

Для того чтобы разобраться в некоторых нюансах применения формулы (3), рассмотрим пример расчета энергии электростатического взаимодействия.

Пусть три одинаковых точечных заряда, величины которых равны между собой  $q_1 = q_2 = q_3 = q$ , расположены в вершинах правильного треугольника со стороной  $a$  (рис. 133). Для расчета энергии взаимодействия этих зарядов заметим, что все заряды равноправны, находятся в одинаковых условиях. В месте расположения одного из зарядов потенциал поля, создаваемого двумя другими зарядами, равен

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

В соответствии с формулой (3) энергия взаимодействия зарядов равна

$$U_0 = \frac{1}{2} (q_1\Phi_1 + q_2\Phi_2 + q_3\Phi_3) = 3 \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}. \quad (4)$$

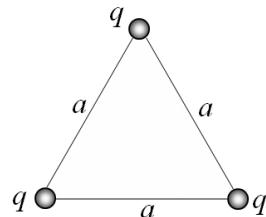


Рис. 133

Такую работу совершил электрическое поле при удалении всех зарядов на бесконечное расстояние друг от друга.

Если заряды сместятся так, что окажутся в вершинах правильного треугольника со стороной  $a_1$  (рис. 134), то их энергия окажется равной

$$U_1 = 3 \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a_1}.$$

При таком смещении работа электрического поля будет равна уменьшению энергии системы:

$$A = U_0 - U_1 = 3 \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a_1} \right).$$

Обратите внимание: при  $a_1 \rightarrow \infty$  эта работа становится в точности равной начальной энергии  $U_0$ .

Если из первоначальной системы мы удалим один заряд при неподвижных оставшихся (рис. 135), то энергия системы станет равной

$$U_1 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a},$$

при этом поле совершил работу

$$A_1 = U_0 - U_1 = 3 \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} = 2 \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

Если теперь удалить еще один заряд, то энергия системы станет равной нулю, при этом поле со-

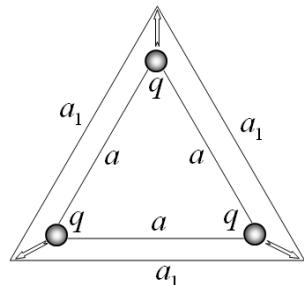


Рис. 134

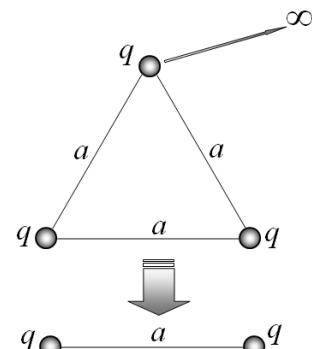


Рис. 135

вершит работу  $A_2 = U_1$ . В итоге начальная энергия полностью расходуется на совершение полной работы  $U_0 = A_1 + A_2$ .

*Задание для самостоятельной работы.*

1. Проанализируйте изменение энергии и совершенные работы в рассмотренной системе, если один из зарядов отрицательный.

## 7.2 Энергия взаимодействия двух равномерно заряженных параллельных пластин

Найдем энергию взаимодействия двух равных по модулю зарядов противоположного знака, равномерно распределенных по двум параллельным пластинам. Обозначим поверхностную плотность заряда на одной пластине  $+\sigma$ , а на другой  $-\sigma$ . Расстояние между пластинами  $h$  будем считать значительно меньшим размеров пластин, площадь каждой пластины обозначим  $S$  (рис. 136). Краевыми эффектами пренебрежем.

Рассчитаем энергию взаимодействия тремя различными способами.

### Способ 1. Формально-потенциальный.

Для расчета энергии взаимодействия воспользуемся формулой  $U = q\phi'$ , где  $\phi'$  – потенциал поля, создаваемого всеми зарядами, кроме заряда  $q$ .

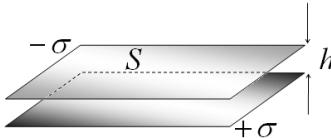


Рис. 136

Напряженность поля между пластинаами была вычислена нами ранее, она равна

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (5)$$

Для «упрощения» расчетов положим потенциал отрицательно заряженной пластины равным нулю (рис. 137), тогда потенциал другой пластины будет равен

$$\phi = -\vec{E} \cdot \Delta \vec{r} = Eh = \frac{\sigma h}{\epsilon_0}. \quad (6)$$

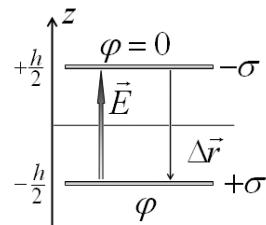


Рис. 137

Здесь  $\Delta \vec{r}$  – вектор перемещения от отрицательной пластины к положительной. Данная формула определяет потенциал поля, создаваемого зарядами на обеих пластинах.

Теперь необходимо найти потенциал поля  $\phi'$ , создаваемого только одной пластиной. Напряженность поля  $E'$ , созданного одной пластиной, в два раза меньше напряженности поля между пластинами  $E' = \frac{E}{2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ , поэтому искомый потенциал будет равен  $\phi' = E'h = \frac{\sigma h}{2\epsilon_0}$ . Таким образом, энергия взаимодействия зарядов оказывается равной

$$U = q\phi' = (\sigma S) \frac{\sigma h}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} Sh, \quad (7)$$

здесь  $\sigma S$  – заряд положительно заряженной пластины.

Интересно отметить, что мы можем положить потенциал отрицательно заряженной пластины любым, результат расчета энергии при этом не из-

менится! Действительно, примем потенциал этой пластины равным  $\varphi_0$  (рис. 138), тогда потенциал положительно заряженной пластины станет равным

$$\varphi = \varphi_0 + E'h = \varphi_0 + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} h.$$

Энергию взаимодействия рассчитаем следующим образом:

$$U = -\sigma S\varphi_0 + \sigma S\varphi_1 = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} Sh$$

Несмотря на то что противоположно заряженные пластины притягиваются, их энергия оказалась положительной – в этом нет ничего удивительного. Это значит, что нулевой энергии соответствует положение, когда положительно заряженная пластина совпадает с отрицательно заряженной, то есть когда пластины совпадают, а электрическое поле отсутствует. Если пластины находятся на некотором расстоянии  $h$  друг от друга, то при их сближении поле совершил положительную работу. Наоборот, чтобы разнести пластины, внешние силы должны совершить работу, увеличивая энергию системы. Это рассуждение позволяет нам предложить еще один способ расчета энергии взаимодействия пластин.

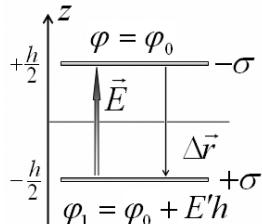


Рис. 138

## Способ 2. Рабоче-механический.

Энергию рассматриваемой системы можно найти, рассчитывая работу внешних сил по разнесению пластин. На одну из пластин со стороны дру-

гой действует сила электрического притяжения  $F = qE' = (\sigma S) \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} S$ , причем эта сила не зависит от расстояния между пластина-ми. Для того чтобы раздвинуть пластины на расстояние  $h$ , необходимо приложить внешнюю силу, равную по модулю силе электрического притяже-ния (рис. 139). При этом эта сила совершил работу (равную увеличению энергии системы):

$$A = U = Fh = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} Sh. \quad (7')$$

Таким образом, мы получаем ту же формулу для энергии рассматриваемой системы зарядов.

### Способ 3. Рабоче-электрический.

Создать рассматриваемую систему можно еще одним способом: считать пластины неподвижны-ми и небольшими порциями переносить заряд с одной пластины на другую (рис. 140). Очевидно, что при таком способе зарядки необходимо совершать рабо-ту, величина которой и будет равна энергии заряженных пластин. Рассчитаем эту ра-боту. Итак, с нижней пластины забираем «горсть электронов», имеющую очень малый заряд  $-\Delta q$ , и переносим их на верхнюю. Так как пластины

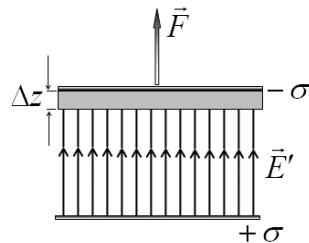


Рис. 139

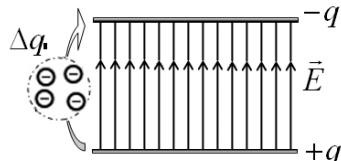


Рис. 140

не заряжены, то работа в этом случае не совершается. Если мы захотим перенести следующую малую порцию заряда, то уже придется совершить некоторую работу: нижняя пластина заряжена положительно, верхняя – отрицательно, поэтому возникшее электрическое поле препятствует перемещению отрицательного заряда, нужно прикладывать силу, чтобы преодолеть силу электрического отталкивания. Для переноса каждой следующей порции заряда необходимо совершать всё большую работу. Рассчитаем эту работу. Пусть мы перенесли  $(n - 1)$  порций зарядов, каждая из которых равна  $(-\Delta q)$ , тогда нижняя пластина приобрела заряд  $+(n - 1)\Delta q$ , а верхняя, соответственно, заряд  $-(n - 1)\Delta q$ . При этом разность потенциалов между пластинами стала равной

$$\Delta\varphi = Eh = \frac{\sigma}{\epsilon_0} h = \frac{(n-1)\Delta q}{\epsilon_0 S} h. \quad (8)$$

Чтобы перенести следующую  $n$ -ую порцию заряда, необходимо совершить работу

$$\delta A_n = \Delta\varphi \cdot \Delta q = (n-1) \frac{(\Delta q)^2 h}{\epsilon_0 S}. \quad (9)$$

Просуммируем все эти работы:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n=1}^N \delta A_n = \sum_{n=1}^N (n-1) \frac{(\Delta q)^2 h}{\epsilon_0 S} = \frac{(\Delta q)^2 h}{\epsilon_0 S} \sum_{n=1}^N (n-1) = \\ &= \frac{(\Delta q)^2 h}{\epsilon_0 S} \frac{N(N-1)}{2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Далее учтем, что величина  $\Delta q$  предполагается малой, поэтому число перенесенных порций за-

рядов  $N = \frac{q}{\Delta q}$  велико. Следовательно, можно положить  $N(N - 1) \approx N^2$ . В таком приближении формула (10) приобретает вид

$$A = \frac{(\Delta q)^2 h N(N-1)}{\varepsilon_0 S} \approx \frac{(\Delta q)^2 h N^2}{\varepsilon_0 S} = \frac{(N \Delta q)^2 h}{2 \varepsilon_0 S} = \frac{q^2 h}{2 \varepsilon_0 S} = \frac{\sigma^2}{2 \varepsilon_0} Sh. \quad (11)$$

Таким образом, мы в третий раз приходим к той же формуле для энергии взаимодействия зарядов на пластинах.

Приведем еще один возможный вывод (графический) этой формулы в рамках третьего подхода. На рис. 141 построен график линейной зависимости разности потенциалов между пластинами от заряда одной из них. Произведение  $\delta A_n = \Delta\varphi \cdot \Delta q$  численно равно площади под этим графиком. Если считать  $\Delta q$  бесконечно малым, то суммарная площадь равна площади треугольника, заштрихованного на рисунке, т.е.

$$A = U = \frac{1}{2} q \Delta\varphi = \frac{\sigma^2}{2 \varepsilon_0} Sh.$$

Сумма площадей «темных» треугольников равна погрешности перехода от дискретного к непрерывному методу зарядки пластин.

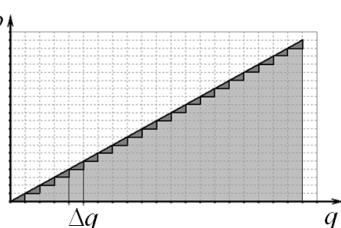


Рис. 141

Итак, три способа вычисления энергии заряженных пластин приводят к одному результату. Настало время четко определить, о какой же энергии идет речь в данном случае. Все три способа расчета явно или не явно используют один и тот же «нулевой» уровень энергии – рассчитанная энергия равна нулю при  $h = 0$  (или при  $q = 0$ ). Второй и третий способы расчета основаны на очевидном (для тех, кто слышал о законе сохранения энергии) утверждении: работа внешних сил равна изменению энергии системы. Обратите внимание: нулевой уровень энергии соответствует отсутствию электрического поля (случай 2 – есть заряды, нет расстояния между ними; случай 3 – есть расстояние, нет зарядов). Иными словами, если нет электрического поля, то нет и энергии! Поэтому вполне логично рассмотреть связь между энергией взаимодействия зарядов и характеристиками электрического поля.

Используя соотношение между напряженностью поля между пластинами и поверхностной плотностью заряда  $\sigma = \epsilon_0 E$ , выразим энергию взаимодействия через напряженность поля:

$$U = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} Sh. \quad (12)$$

В процессе разнесения пластин создается электрическое поле во всё большем объеме между пластинами, поэтому можно утверждать, что совершенная работа увеличивает энергию электрического поля или работа расходуется на создание поля. Так, при смещении пластины на расстояние

$\Delta z$  объем, занятый полем, увеличивается на  $S\Delta z$ , если расстояние между пластинами увеличилось от нуля до некоторого значения  $h$ , то поле создается в объеме  $Sh$ . Таким образом, найденная энергия взаимодействия зарядов (7) есть энергия электрического поля – энергия, «размазанная» по той области пространства, где создано поле. Косвенным подтверждением сделанного заключения является тот факт, что энергия взаимодействия пропорциональна объему части пространства  $V = Sh$ , занятого полем, и выражается через характеристику поля (его напряженность) – в формуле (8) нет характеристик зарядов. Электрическое поле, уже благодаря своему существованию, обладает энергией.

В качестве энергетической характеристики поля следует рассматривать энергию, содержащуюся в единице объема, то есть **объемную плотность энергии**:  $w = \frac{U}{V}$ . Из выражения (8) следует, что объемная плотность энергии электрического поля определяется формулой

$$w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}. \quad (13)$$

Как обычно, в неоднородном поле корректное определение плотности энергии «в данной точке» требует предельного перехода: плотностью энергии электрического поля называется отношение энергии поля, заключенной в малом объеме, к величине этого объема, при стремлении последнего к нулю:

$$w = \frac{\Delta U}{\Delta V}, \text{ при } \Delta V \rightarrow 0.$$

### 7.3 Энергия поля равномерно заряженной сферы

Пусть электрический заряд  $Q$  равномерно распределен по поверхности сферы радиуса  $R$ . Вне сферы электрическое поле, создаваемое зарядами на сфере, эквивалентно полю точечного заряда, помещенного в центре сферы (рис. 142). Внутри сферы поле отсутствует. Так, напряженность поля в точке, находящейся на расстоянии  $r$  от центра сферы, равна

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (14)$$

в частности, непосредственно у поверхности сферы напряженность поля равна

$$E_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (15)$$

Обратим внимание, что произведение  $S = 4\pi R^2$  есть площадь сферы, тогда отношение  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} = \sigma$  является поверхностной плотностью заряда на сфере, поэтому напряженность поля у поверхности сферы выражается той же формулой, что и напряженность поля между пластинами, рассмотренными в предыдущем разделе:  $E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ . Потенциал поверхности сферы также был вычислен нами ранее:

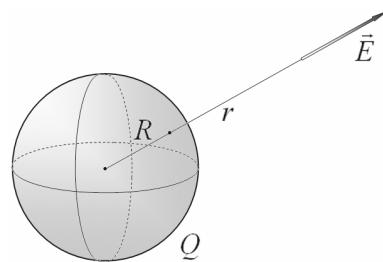


Рис. 142

$$\varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (16)$$

Рассчитаем теперь энергию поля, создаваемого зарядами на сфере. Мысленно разделим заряд сферы на  $N$  равных малых частей, величины которых равны  $\delta Q_k = \frac{Q}{N}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ . Рассмотрим один из этих малых зарядов. В точке его расположения потенциал поля, создаваемого всеми остальными ( $N - 1$ ) зарядами, равен  $\varphi_k = \frac{(N-1)\delta Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ . С использованием симметричной формулы  $U = \frac{1}{2} \sum_k q_k \varphi_k$  выражение для энергии взаимодействия приобретает вид:

$$U = \frac{1}{2} \sum_k q_k \varphi_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \delta Q_k \frac{(N-1)\delta Q}{4\pi\epsilon_0 R},$$

данная сумма содержит  $N$  одинаковых слагаемых, поэтому равна

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \delta Q_k \frac{(N-1)\delta Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{2} N \delta Q \frac{(N-1)\delta Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \\ &= \frac{1}{2} N (N-1) \frac{(\delta Q)^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \left(1 - \frac{1}{N}\right). \end{aligned} \quad (16)$$

Так как число частей  $N$ , на которые разбивается сфера, может быть сделано сколь угодно большим, то в пределе  $N \rightarrow \infty$  слагаемое  $1/N$  исчезает, поэтому окончательное выражение для энергии взаимодействия зарядов сферы имеет вид

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}. \quad (17)$$

Заметим, что полученное выражение имеет вид  $U = \frac{1}{2}Q\phi_0$ . Если сразу заявить, что уменьшение заряда на малую величину  $\delta Q$  пренебрежимо мало изменяет потенциал сферы, то результат (17) получается прямым применением формулы для энергии взаимодействия зарядов. Однако обращение с малыми величинами требует известной строгости, поэтому мы и привели несколько «удлиненный» вывод.

Приведем еще один вывод этой же формулы\*. Для этого энергию системы рассчитаем как работу, которую необходимо совершить, чтобы зарядить сферу. Мысленно будем заряжать сферу малыми равными порциями заряда  $\delta Q_k = \frac{Q}{N}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , которые будем переносить на сферу из «бесконечности». Если сфера не заряжена, то перенесение первой «порции» заряда не требует совершения никакой работы. После того как сфера приобрела некоторый электрический заряд, перенесение следующей порции заряда требует совершения работы по преодолению сил отталкивания со стороны зарядов сферы. Если на сферу перенесено  $(k-1)$  порций заряда, то ее потенциал равен  $\phi_{(k-1)} = \frac{(k-1)\delta Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ . Поэтому для того чтобы перенести на сферу сле-

---

\* Полностью повторяем путь, пройденный ранее при расчете энергии поля между двумя пластинами! Повторение – мать учения!

дующую порцию заряда, необходимо совершить работу:

$$A_k = \phi_{(k-1)} \cdot \delta Q = (k-1) \frac{(\delta Q)^2}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Полная работа по зарядке сферы (равная энергии электрического поля сферы) выражается суммой геометрической прогрессии:

$$\begin{aligned} U = A &= \sum_{k=1}^N A_k = \frac{(\delta Q)^2}{4\pi\epsilon_0 R} \sum_{k=1}^N (k-1) = \\ &= \frac{(\delta Q)^2}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{N(N-1)}{2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \left(1 - \frac{1}{N}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Как и следовало ожидать, мы получили выражение, полностью совпадающее с (17); при бесконечном уменьшении порций переносимых зарядов мы опять приходим к формуле (14).

В этом нет ничего удивительного, так как в первом случае мы подсчитали энергию, которая выделится при разбегании зарядов со сферы, а во втором – энергию, которую необходимо затратить, чтобы собрать их обратно.

Покажем, что энергию взаимодействия зарядов и в этом случае можно истолковать как энергию электрического поля, «размазанную» по всему пространству, где существует поле. Представим, что радиус сферы увеличился на малую величину  $\Delta R$ , а ее заряд при этом не изменился. Согласно формуле (14), энергия взаимодействия зарядов при этом уменьшится. В пространстве, вне сферы увеличенного радиуса, электрическое поле не измени-

лось, а в тонком сферическом слое между начальной и расширенной сферами – исчезло (рис. 143). Поэтому следует считать, что уменьшение энергии взаимодействия зарядов при увеличении радиуса сферы равно энергии, которая заключена в этом тонком сферическом слое. При малой толщине слоя его объем можно вычислить как произведение площади сферы на толщину слоя  $\Delta V = 4\pi R^2 \Delta r$ . Пренебрегая изменением напряженности поля в пределах тонкого слоя, энергию, заключенную в нем, запишем в виде

$$\Delta U = w \Delta V = 4\pi R^2 \Delta r w, \quad (16)$$

где  $w$  – плотность энергии поля. С другой стороны, эта энергия равна изменению энергии взаимодействия зарядов при увеличении радиуса сферы:

$$\Delta U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 (R + \Delta R)} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\Delta R}{R(R + \Delta R)} \approx \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\Delta R}{R^2}.$$

На последнем шаге мы пренебрегли малым изменением радиуса  $\Delta R$ . Наконец, выражим заряд шара через напряженность электрического поля у его поверхности  $Q = 4\pi\epsilon_0 R^2 E$ , тогда

$$\Delta U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\Delta R}{R^2} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} 4\pi R^2 \Delta R.$$

Из сравнения с формулой (16) следует, что и в рассматриваемом случае плотность энергии электрического поля выражается формулой

$$w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}.$$

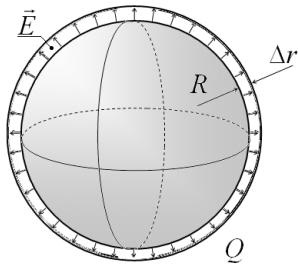


Рис. 143

## 7.4 Энергия поля и энергия взаимодействия зарядов

Рассмотрим еще раз взаимодействие двух точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , находящихся на расстоянии  $r$  друг от друга. Мы показали, что энергия их взаимодействия рассчитывается по формуле

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (1)$$

С другой стороны, мы показали, что электрическое поле обладает энергией, объемная плотность которой определяется формулой

$$w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}. \quad (2)$$

Для того чтобы рассчитать полную энергию электрического поля  $W$ , напряженность которого изменяется от точки к точке, необходимо разбить пространство, где существует поле, на малые объемы  $\Delta V_k$ , в каждом из которых вычислить плотность энергии поля  $w_k$  (если изменяется напряженность поля, то изменяется и его плотность энергии), после чего просуммировать энергию по всему пространству, где существует поле (рис. 144):

$$W = \sum_k w_k \Delta V_k. \quad (3)$$

Выполнить такое суммирование не всегда просто, но такая операция вполне выполнима. В данном случае нас интересуют не математи-

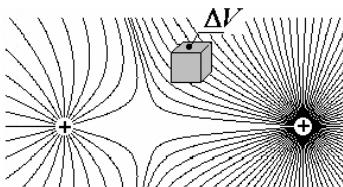


Рис. 144

ческие проблемы, связанные с вычислением подобных сумм, а физический смысл получаемых результатов.

Применим формулы (2)-(3) к расчету энергии поля, создаваемого двумя точечными зарядами. По принципу суперпозиции напряженность электрического поля в произвольной точке, окруженной объемом  $\Delta V_k$ , равна сумме напряженностей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности (рис. 145):  $\vec{E}_k = \vec{E}_{1k} + \vec{E}_{2k}$ .

Полную энергию поля запишем в виде<sup>\*</sup>

$$W = \sum_k w_k \Delta V_k = \sum_k \frac{\epsilon_0}{2} \left( \vec{E}_{1k} + \vec{E}_{2k} \right)^2 \Delta V_k = \\ = \sum_k \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}_{1k}^2 \Delta V_k + \sum_k \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}_{2k}^2 \Delta V_k + 2 \sum_k \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}_{1k} \cdot \vec{E}_{2k} \Delta V_k. \quad (4)$$

Прежде всего, обратим внимание, что для энергии поля **принцип суперпозиции не выполняется** – энергия системы зарядов не равна сумме энергий зарядов, взятых по отдельности. Математическим выражением нарушения принципа суперпозиции является нелинейная зависимость энергии от напряженности поля – плотность энергии пропорциональна квадрату напряженности. Если напряженность поля увеличится в два раза, то плотность энергии увеличивается в четыре раза! Кстати, аналогичное заключение можно сделать и для полу-

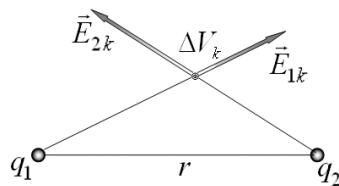


Рис. 145

---

\* Квадрат вектора следует понимать как скалярное произведение вектора на себя.

ченной ранее энергии заряженной сферы: энергия пропорциональная квадрату заряда.

Первое слагаемое в формуле (4)

$$W_1 = \sum_k \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}_{1k}^2 \Delta V_k$$

полностью определяется зарядом  $q_1$  и не зависит от наличия второго заряда – это слагаемое описывает энергию поля, создаваемого этим зарядом. Аналогично, второе слагаемое

$$W_2 = \sum_k \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}_{2k}^2 \Delta V_k$$

описывает энергию поля, создаваемого зарядом  $q_2$ . Наконец, третье слагаемое

$$W_{\text{вз}} = 2 \sum_k \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}_{1k} \cdot \vec{E}_{2k} \Delta V_k$$

зависит от величин зарядов и от взаимного расположения. Аккуратное вычисление этой суммы приводит к результату\*

$$W_{\text{вз}} = 2 \sum_k \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}_{1k} \cdot \vec{E}_{2k} \Delta V_k = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} = U.$$

Таким образом, именно это слагаемое определяет энергию взаимодействия зарядов, которая является частью энергии электрического поля.

Если сами заряды не изменяются, то первые два слагаемых в энергии поля (4) не изменяются при изменении взаимного расположения зарядов, поэтому их можно не учитывать. Вспомните: прохождение всех физических процессов определяется изменением энергии, поэтому постоянная, неизменяющаяся часть энергии для описания этих процессов не существенна.

\* Поверьте на слово, если не можете проверить.

Мы показали, что энергия заряженной сферы обратно пропорциональна ее радиусу. Точечный заряд можно рассматривать как заряженную сферу бесконечно малого радиуса. При стремлении радиуса сферы к нулю (при сохранении ее заряда) энергия поля стремится к бесконечности – энергия поля точечного заряда бесконечно велика. Конечно, можно утверждать, что точечный заряд является математической абстракцией. Однако до настоящего времени нет никаких экспериментальных данных о том, что электрон имеет конечные размеры, поэтому должен рассматриваться как реально существующий точечный заряд. Эта серьезная проблема современной физики еще ждет своего разрешения.

Аналогичным образом можно рассмотреть энергию поля, создаваемого несколькими точечными зарядами  $q_1, q_2, q_3 \dots$ . Энергия поля, рассчитанная с помощью принципа суперпозиции и формулы (3), представляется в виде

$$\begin{aligned}
W = \sum_k w_k \Delta V_k &= \sum_k \frac{\epsilon_0}{2} \left( \vec{E}_{1k} + \vec{E}_{2k} + \vec{E}_{3k} + \dots \right)^2 \Delta V_k = \\
&= \sum_k \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}_{1k}^2 \Delta V_k + \sum_k \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}_{2k}^2 \Delta V_k + \sum_k \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}_{3k}^2 \Delta V_k + \dots + \\
&+ 2 \sum_k \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}_{1k} \cdot \vec{E}_{2k} \Delta V_k + 2 \sum_k \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}_{1k} \cdot \vec{E}_{3k} \Delta V_k + \dots + \\
&+ 2 \sum_k \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}_{2k} \cdot \vec{E}_{3k} \Delta V_k + \dots = W_1 + W_2 + W_3 + \dots + U_{12} + \\
&+ U_{13} + \dots + U_{23} + \dots
\end{aligned} \tag{5}$$

То есть энергия этого поля является суммой энергий полей отдельных зарядов и энергий всех парных взаимодействий.

Ранее мы обещали показать, что энергия взаимодействия зарядов может быть представлена как сумма энергий парных взаимодействий. Полученное выражение (5) доказывает это утверждение. Действительно, если бы плотность энергии зависела от напряженности не квадратично, а по более сложному закону, то в полной энергии появились бы слагаемые, учитывающие тройные и другие взаимодействия.

Таким образом, формулы (2)-(3) описывают полную энергию электрического поля, а формула (1) только ее часть – энергию взаимодействия, изменяющуюся при изменении взаимного расположения зарядов.

Наконец, обсудим еще один парадокс, связанный с расчетами энергии электрического поля. При расчете **энергии взаимодействия** зарядов, распределенных по поверхности сферы, нами получен следующий результат:

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}. \quad (6)$$

Расчет **полной энергии** электрического поля равномерно заряженной сферы по формуле (3) приводит к тому же результату!

Данное утверждение слишком важно, поэтому укажем пути его доказательства. Выделим сферический

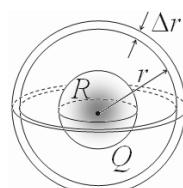


Рис. 146

слой радиуса  $r$  и толщиной  $\Delta r$ , концентрический с заряженной сферой (рис. 146). Напряженность поля в пределах этого слоя равна (если пренебречь ее малым изменением)

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Плотность энергии электрического поля определяется формулой  $w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$ , а объем слоя равен  $\Delta V = 4\pi r^2 \Delta r$ , поэтому энергия, заключенная в слое, равна

$$\Delta U = w \Delta V = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \cdot 4\pi r^2 \Delta r = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 \cdot 4\pi r^2 \Delta r.$$

Для вычисления полной энергии электрического поля необходимо просуммировать это выражение по всем слоям, радиусы которых изменяются от радиуса сферы  $R$  до бесконечности  $\infty$ . Конечно, такое суммирование предполагает вычисление интеграла\*:

$$U = \int_R^\infty \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Таким образом, кажется, что собственная энергия зарядов «исчезает». Покажем, что это противоречие возникло при разбиении заряда на **бесконечно малые части**.

Если исходный заряд разбит на  $N$  частей величиной  $\delta Q = \frac{Q}{N}$  каждый, то энергия взаимодействия

\* Процедуру вычисления этого интеграла излагать не будем, ведь не можем мы включить в данное пособие еще и курс математического анализа!

вия этих зарядов между собой пропорциональна квадрату заряда  $(\delta Q)^2$  и числу взаимодействующих пар  $\frac{1}{2}N(N-1)$ . Таким образом,

$$U \sim (\delta Q)^2 N(N-1) = \left(\frac{Q}{N}\right)^2 N(N-1), \text{ а при } N \rightarrow \infty U \sim Q^2,$$

то есть энергия взаимодействия не зависит от числа частей, на которые мы мысленно разбиваем исходный заряд. Собственная энергия зарядов пропорциональна квадрату заряда  $(\delta Q)^2$  и их числу  $N$ , поэтому при  $N \rightarrow \infty$  собственная энергия стремится к нулю:  $W_{соб.} \sim N(\delta Q)^2 = N\left(\frac{Q}{N}\right)^2 = \frac{Q^2}{N} \rightarrow 0$ . Строго говоря, предельный переход  $\delta Q \rightarrow 0$  физически некорректен, так как электрический заряд дискретен – существует минимальный электрический заряд. Тем не менее, учитывая малость элементарного заряда, наши расчеты обеспечивают достаточную точность.

Кстати, при расчете энергии заряженной сферы (и энергии поля пластин) мы также пренебрегли слагаемым, пропорциональным  $\frac{1}{N}$ . Для того чтобы учесть дискретность заряда (то есть заряжать сферу по одному электрону), следует положить  $N = \frac{Q}{e}$ , где  $e$  – элементарный заряд.

Подведем итоги нашего ознакомления с проблемами энергетического описания взаимодействия зарядов. При вычислении энергии (неважно какой) важно четко помнить и понимать, что фи-

зический (следовательно, и практический) смысл имеет только та часть энергии, которая изменяется в описываемых процессах! Все постоянные составляющие энергии, безо всякого ущерба, могут быть отброшены, так как только изменение энергии определяет протекание процессов и их описание; только изменение энергии и связанные с ней физические величины (силы, работа и ее стоимость) могут быть экспериментально измерены и соотнесены с теоретическими расчетами!

## § 8. Электроемкость тела. Конденсаторы. Емкость конденсаторов

Во всех предыдущих параграфах мы рассуждали об электрических зарядах и полях, ими создаваемых. Неоднократно говорили о заряженных телах. Настало время поговорить о способности тела накапливать электрический заряд. На первый взгляд кажется, что любому телу можно сообщить любой, сколь угодно большой, заряд. Однако в реальности заряд любого тела ограничен целым рядом факторов. Тела находятся в воздухе, который является слабым, но проводником. Поэтому всегда происходит утечка заряда в окружающую среду. Причем величина тока утечки очень сильно зависит от напряженности электрического поля. Если последняя становится очень большой\*, то возни-

---

\* Что означает в данном случае «большая», выясним позднее.

кают даже видимые разряды, сначала коронный, а затем и искровой. Даже если тело находится в вакууме, то и в этом случае возможна утечка электрического заряда. Поэтому необходима некая характеристика тела (строго говоря, и окружающей среды), описывающая способность данного тела накапливать электрический заряд.

## 8.1 Электроемкость уединенного проводника

Рассмотрим уединенный проводник, которому сообщается некоторый электрический заряд  $Q$ . Как мы знаем, этот электрический заряд распределяется по поверхности проводника и в окружающем пространстве создает электрическое поле. Напряженность этого поля не постоянна, она изменяется как по величине, так и по направлению (рис. 147). Но потенциал проводника постоянен во всех его точках. Очевидно, что данный потенциал пропорционален заряду проводника. Следовательно, отношение заряда проводника к его потенциальну не зависит от величины электрического заряда, поэтому это отношение является «чистой» характеристикой проводника, находящегося в определенной среде, которая называется электрической емкостью проводника (электроемкостью).

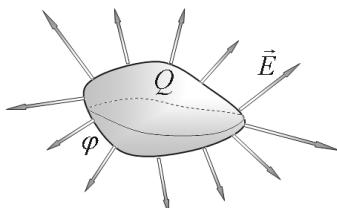


Рис. 147

Итак, электроемкостью проводника называется отношения электрического заряда проводника к его потенциалу:

$$C = \frac{Q}{\phi}. \quad (1)$$

Как неоднократно было сказано, электрический потенциал определяется с точностью до произвольной постоянной. Во избежание неопределенности, в определении (1) полагают, что потенциал стремится к нулю при бесконечном удалении от рассматриваемого проводника:  $\phi = 0$  при  $r \rightarrow \infty$ .

Можно дать эквивалентное определение: **электроемкость проводника равна электрическому заряду, который необходимо сообщить проводнику, чтобы повысить его потенциал на единицу**\*

В данном определении, да и в самом названии, слышны отголоски старых представлений о некой электрической жидкости: заряд перетекает, заряд накапливается в емкости... Даже традиционное обозначение емкости  $C$  является первой буквой английского (а ранее латинского) слова *capacity*. Впрочем, аналогично определение теплоемкости – количество теплоты, которое необходимо сообщить телу (количество теплорода, налитого в тело), чтобы повысить его температуру на один градус. С таких же позиций можно дать и определение емкости сосуда – объем жидкости, который необходимо влить в сосуд, чтобы

---

\* Например, в системе СИ на 1 В.

повысить ее уровень, например, на 1 сантиметр (рис. 148). Правда, в этом определении емкость вертикального цилиндрического сосуда совпадает с площадью его поперечного сечения.

Для примера рассчитаем емкость проводящей сферы (рис. 149) радиуса  $R$ , находящейся в однородной бесконечной среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Если заряд сферы равен  $Q$ , то ее потенциал определяется формулой

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R}. \quad (2)$$

Заметим, что уменьшение потенциала в  $\epsilon$  раз обусловлено уменьшением напряженности поля, которое в свою очередь связано с появлением поляризационных зарядов на границе сферы и окружающей среды.

Тогда, по определению, электроемкость сферы оказывается равной

$$C = \frac{Q}{\varphi} = 4\pi\epsilon_0\epsilon R. \quad (3)$$

Любая физическая величина должна иметь единицу измерения. Так, согласно определению, в системе СИ единицей емкости обладает тело, при увеличении заряда которого на 1 К потенци-

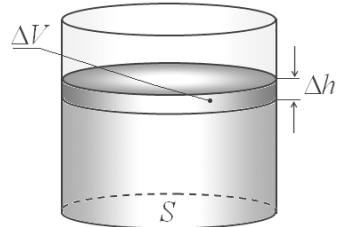


Рис. 148

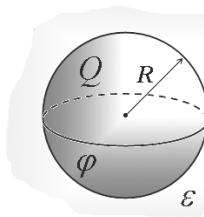


Рис. 149

ал повышается на 1 В. Эта единица емкости получила наименование **фарад**<sup>\*</sup>. 1 фарад – большая емкость. Используя формулу (3), найдем емкость земного шара (радиус  $R \approx 6350$  км, находится в вакууме  $\epsilon = 1$ ):

$$C = 4\pi\epsilon_0 R = 4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}} \cdot 6,35 \cdot 10^6 \text{ м} \approx 7 \cdot 10^{-4} \Phi.$$

Как видите, емкость нашей Земли значительно меньше 1 Ф.

Обратите внимание, что, согласно полученным формулам, размерность электрической постоянной  $\epsilon_0$  кратко может быть записана как  $\Phi/\text{м}$ .

## 8.2 Конденсаторы

Так как емкости уединенных тел малы, то для накопления электрических зарядов предпочтительнее использовать другие устройства – конденсаторы. В общем случае конденсатор представляет собой два близко расположенных проводящих тела, называемых обкладками конденсатора (рис. 150). Этим телам сообщают равные по модулю и противоположные по знаку заряды  $+Q$  и  $-Q$ .

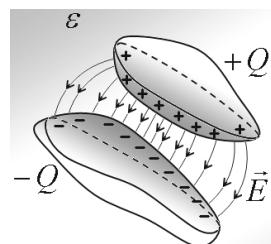


Рис. 150

---

\* В честь английского физика Майкла Фарадея. Ему «повезло»: единицу измерения сократили ненамного; так, например, единицу давления в 1 миллиметр ртутного столба, названную в честь Эванжелиста Торричелли, сократили до «торр».

Зарядом конденсатора принято называть именно заряд одной обкладки (положительно заряженной). Взаимодействие зарядов между собой приводит к их преимущественной локализации на частях обкладок, расположенных рядом друг с другом. В этом случае электрическое поле также, главным образом, формируется в пространстве между обкладками. Благодаря этому полю, заряды как бы удерживают друг друга. Для конденсаторов определение емкости несколько видоизменяется по сравнению с емкостью уединенного проводника. **Электроемкостью конденсатора называется отношение заряда одной из обкладок к разности потенциалов между обкладками:**

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi}. \quad (4)$$

**Равносильное определение: емкость конденсатора равна электрическому заряду, который необходимо сообщить конденсатору, чтобы увеличить разность потенциалов на 1 вольт.**

Для расчета электроемкости применяют традиционную схему: считают заряды на обкладках (равные по величине и противоположные по знаку) известными, затем рассчитывают разность потенциалов между обкладками и находят отношение заряда к разности потенциалов. Так как (и в случае конденсатора) разность потенциалов пропорциональна заряду, то их отношение не зависит от заряда, а является характеристикой самого конденсатора. Таким образом, емкость конденсатора зависит только от его размеров, формы и диэлек-

трической проницаемости среды между обкладками.

**Рассчитаемем емкость плоского конденсатора** – устройства, состоящего из двух параллельных пластин, расстояние между которыми значительно меньше размеров самих пластин (рис. 151). Если каждая пластина несет заряд  $\pm Q$ , то поверхностная плотность заряда равна<sup>\*</sup>  $\sigma = \frac{Q}{S}$ . Напряженность электрического поля между пластинами определяется по формуле

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0 S} \frac{Q}{d}. \quad (4)$$

В однородном поле связь между напряженностью поля и разностью потенциалов проста:

$$\Delta\varphi = Ed = \frac{1}{\epsilon_0 S} \frac{Q}{d} d. \quad (5)$$

Наконец, вычисляя отношение заряда к найденной разности потенциалов, получим формулу для расчета емкости плоского конденсатора:

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{\epsilon_0 S}{d}. \quad (6)$$

Полученный результат качественно понятен и почти очевиден: емкость конденсатора пропорциональна площади пластин-обкладок (чем боль-

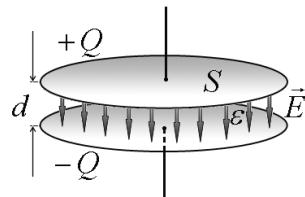


Рис. 151

---

\* Оговорка о малом расстоянии между пластинами неслучайна: в этом случае можно пренебречь краевыми эффектами, то есть считать, что пластины «почти бесконечные», равномерно заряжены, а поле между ними однородное.

ше площадь, тем больше заряд на них); обратно пропорциональна расстоянию между пластинами (чем меньше это расстояние, тем меньше разность потенциалов); пропорциональна диэлектрической проницаемости среды между обкладками (что также уменьшает разность потенциалов); а электрическая постоянная нужна хотя бы для того, чтобы получить правильную размерность емкости.

Проведем теперь расчет емкости сферического конденсатора, обкладками которого являются две концентрические проводящие сферы радиусами  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 152). Если заряды обкладок равны  $\pm Q$ , то разность потенциалов между ними рассчитывается как разность между потенциалами двух сфер:

$$\Delta\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_2 \cdot R_1}. \quad (7)$$

Следовательно, емкость такого сферического конденсатора равна

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_2 \cdot R_1}{R_2 - R_1}. \quad (8)$$

Если радиус большей сферы устремить к бесконечности ( $R_2 \gg R_1$ ), то емкость такого конденсатора окажется равной

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_2 \cdot R_1}{R_2 - R_1} \approx 4\pi\epsilon_0 R_1,$$

что совпадает с формулой (3) для емкости уединенной сферы. Иными словами, емкость уединенного

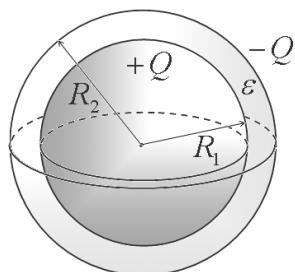


Рис. 152

тела можно рассматривать как емкость конденсатора, одна из обкладок которого находится бесконечно далеко.

Рассмотрим теперь второй крайний случай: расстояние между сферами значительно меньше их радиусов  $R_2 - R_1 = d \ll R_2$ . В этом случае можно положить, что  $R_2 \cdot R_1 \approx R^2$ , и тогда формула для емкости конденсатора приобретает вид

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_2 \cdot R_1}{R_2 - R_1} \approx \frac{4\pi\epsilon_0 R^2}{d} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d},$$

где  $S = 4\pi R^2$  – площадь поверхности сферы. В этом случае формула для емкости совпадет с формулой (6) для емкости плоского конденсатора. Действительно, в этом случае можно пренебречь изменением модуля напряженности электрического поля между обкладками, что и позволяет считать такой конденсатор плоским.

Такое приближение хорошо выполняется и для конденсаторов, выпускаемых промышленностью. Два слоя проводника (например, алюминиевой фольги), разделяют слоем диэлектрика (бумаги, слюды, керамики) – рис. 153. Полученный сандвич потом можно скрутить в спираль (рис. 154) для плотной упаковки.

Конденсаторы находят широкое использование во всех электротехнических и электронных устройствах, впоследствии мы познакомимся с



Рис. 153

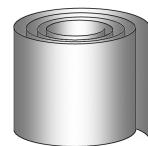


Рис. 154

основными назначениями конденсаторов в электрических цепях. Поэтому промышленностью выпускаются многочисленные виды конденсаторов. Их классификация в основном ведется по типу диэлектрика – бумажные, керамические, слюдяные и т.д. Их емкости могут изменяться в широких пределах – от пикофарад до сотен и тысяч микрофарад (рис. 155).

Наибольшей емкостью обладают электролитические конденсаторы (рис. 156), в которых одной обкладкой служит полоса из фольги, покрытой тонким слоем окисла, играющим роль диэлектрика, а второй обкладкой – проводящая жидкость – электролит. Так как толщина слоя окисла может быть сделана очень малой (порядка нескольких микрон), то емкость таких конденсаторов очень велика и может превышать емкость Земли.

Важную роль играют конденсаторы, емкость которых можно изменять (конденсаторы переменной емкости, или просто – переменные конденса-



Рис. 155



Рис. 156



Рис. 157

торы). Как правило, емкость такого конденсатора изменяют, изменяя площадь перекрытия пластин. На рис. 157 показан воздушный конденсатор переменной емкости.

### 8.3 Параллельное соединение конденсаторов

Конденсаторы можно соединять между собой, получая батарею конденсаторов. Рассмотрим правила расчета емкостей соединенных конденсаторов. Прежде всего, дадим определение емкости батареи конденсаторов. В общем случае такую батарею можно рассматривать как «черный ящик» с двумя выводами\* (рис. 158). Внутри батареи конденсаторы могут быть соединены произвольным образом. На выводы батареи подаются заряды  $\pm Q_0$ , одинаковые по величине и противоположные по знаку. Заряд, помещенный на один из выводов, мы будем называть зарядом батареи.

Конечно, суммарный заряд батареи, как и отдельного конденсатора, равен нулю – на одном полюсе положительный, на другом отрицательный. Поэтому мы специально оговариваем, что заряд

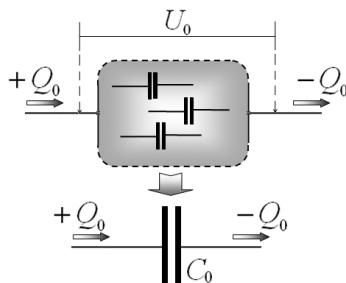


Рис. 158

\* Обратите внимание и запомните обозначения конденсаторов на схемах – два жирных параллельных отрезка, схематически обозначающих обкладки конденсатора.

конденсатора, заряд батареи подразумевает заряд одной обкладки конденсатора, заряд, сообщенный одному из выводов батареи.

Эти заряды могут сложным образом перераспределяться внутри батареи. Между выводами возникает разность потенциалов, которая также называется **электрическим напряжением**\*  $U_0$ . Емкостью батареи называется отношение заряда, сообщенного батареей, к напряжению на ее концах:

$$C_0 = \frac{Q_0}{U_0}. \quad (9)$$

На практике, как правило, реализуется иная схема: конденсаторы подключаются к источнику постоянного напряжения, конденсаторы заряжаются (электрические заряды поставляет источник) до тех пор, пока напряжение на батарее конденсаторов не уравняется с напряжением источника. Так как напряжение на конденсаторе и его заряд пропорциональны друг другу, то оба способа рассмотрения (первый – сообщаем заряд, находим напряжение; второй – подаем напряжение, рассчитываем электрические заряды) приводят к одному и тому же результату.

Рассмотрим **параллельное соединение** конденсаторов (рис. 159), при котором обкладки обоих

---

\* Строго говоря, электрическое напряжение и разность потенциалов могут быть различными, но в электростатике эти понятия являются синонимами. Четкое различие разности потенциалов и электрического напряжения мы проведем при изучении электрического тока.

конденсаторов подключаются к входному и выходному выводу батареи.

Если на выводы батареи подать электрические заряды  $\pm Q_0$ , то они перераспределяются по обкладкам конденсаторов. Это перераспределение зарядов будет продолжаться до тех пор, пока напряжения

на конденсаторах не сравняются. Действительно, если между соединенными обкладками будет существовать разность потенциалов, то это приведет к возникновению электрического тока, то есть перетеканию зарядов между обкладками. Нас же интересует установившееся статическое распределение. Можно дать и другое обоснование равенства напряжений на конденсаторах. При установлении статического электрического поля внутри конденсаторов, равенство напряжений (разностей потенциалов) обусловлено потенциальностью электрического поля – работа поля по перемещению заряда не зависит от формы траектории, а определяется только начальной и конечной точкой. Так, если мы рассмотрим воображаемый перенос заряда от входа до выхода батареи, то работа поля не должна зависеть от того, переносится пробный заряд через один конденсатор или через другой. Учитывая, что соединенные проводники эквипотенциальны (то есть внутри них электрическое поле отсутству-

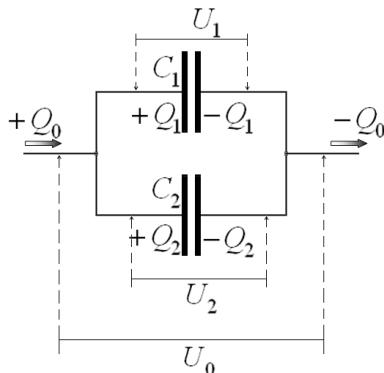


Рис. 159

ет), получим, что работа поля по переносу пробного заряда внутри каждого конденсатора имеет одно и то же значение.

Итак, проведенные рассуждения доказывают, что напряжения на конденсаторах равны между собой и равны напряжению на рассматриваемой батарее:

$$U_1 = U_2 = U_0. \quad (10)$$

Далее используем закон сохранения электрического заряда. В данном случае он позволяет утверждать, что сумма зарядов конденсаторов равна заряду, сообщенному батареей:

$$Q_0 = Q_1 + Q_2. \quad (11)$$

Выразим заряд каждого конденсатора через его емкость и напряжение на нем (используя определение емкости  $Q = CU$ ):

$$C_0 U_0 = C_1 U_1 + C_2 U_2. \quad (12)$$

Так как все напряжения равны, то их в равенстве (12) можно сократить и получить формулу для емкости батареи конденсаторов, соединенных параллельно:

$$C_0 = C_1 + C_2. \quad (13)$$

При параллельном соединении емкость батареи конденсаторов равна сумме емкостей всех конденсаторов. Этот результат, очевидно, обобщается для произвольного числа параллельно соединенных конденсаторов (рис. 160):

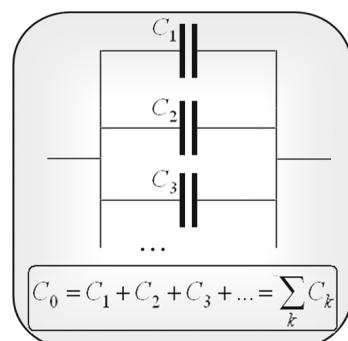


Рис. 160

$$C_0 = C_1 + C_2 + C_3 + \dots = \sum_k C_k. \quad (14)$$

Не представляет труда рассчитать, как распределяются заряды по конденсаторам. Во-первых, их сумма равна заряду, сообщенному всей батареей, что выражается уравнением (11). Во-вторых, напряжения на конденсаторах одинаковы, поэтому их заряды пропорциональны емкостям:

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}. \quad (15)$$

Из уравнений (11) и (15) следуют формулы для величин зарядов:

$$Q_1 = Q_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2}, \quad Q_2 = Q_0 \frac{C_2}{C_1 + C_2}. \quad (16)$$

Частным, но наглядным примером параллельного соединения является соединение двух плоских конденсаторов, различающихся только площадью обкладок, когда толщины и диэлектрические проницаемости зазоров между пластинами одинаковы (рис. 161). В этом случае правило сложения емкостей приводит к очевидному результату – надо складывать площади пластин:

$$C_0 = \frac{\epsilon \epsilon_0 S_0}{d} = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon \epsilon_0 S_1}{d} + \frac{\epsilon \epsilon_0 S_2}{d} = \frac{\epsilon \epsilon_0 (S_1 + S_2)}{d}.$$

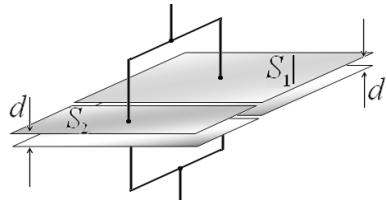


Рис. 161

## 8.4 Последовательное соединение конденсаторов

Рассмотрим последовательное соединение конденсаторов (рис. 162), при котором выход одного конденсатора соединяется со входом второго.

При таком соединении напряжение на батарее конденсаторов равно сумме напряжений на каждом из них:

$$U_0 = U_1 + U_2. \quad (17)$$

Действительно, в данном случае, чтобы подсчитать напряжение (разность потенциалов) между входом и выходом батареи, пробный заряд следует перенести через оба конденсатора последовательно, поэтому суммарная работа электрического поля будет равна сумме работ по перемещению в первом и втором конденсаторах\*.

Покажем, что при последовательном соединении заряды конденсаторов оказываются равными. Во-первых, мы сообщаем батарее с разных сторон заряды, равные по величине (но противоположные по знаку). Во-вторых, суммарный заряд на внутренних обкладках должен быть равным нулю, ведь изначально эти обкладки были не заряжены,

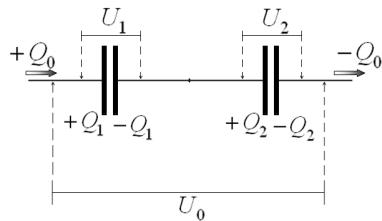


Рис. 162

\* Иными словами – чтобы занести шкаф на третий этаж, его сначала надо поднять с первого на второй, а затем со второго на третий!

и никакой заряд появиться на них не может, так как эта часть батареи не соединена ни с какими внешними устройствами! Поэтому между этими обкладками происходит только перераспределение зарядов. Электроны с внутренней обкладки второго конденсатора притягиваются положительными зарядами внешней обкладки первого конденсатора. При этом внутренняя обкладка первого конденсатора приобретает заряд  $-Q_0$ , а внутренняя обкладка второго – заряд  $+Q_0$ . Таким образом, мы показали, что выполняется условие

$$Q_0 = Q_1 = Q_2. \quad (18)$$

Выразим теперь напряжения на конденсаторах (и на всей батарее) через их заряды и емкости:

$$\frac{Q_0}{C_0} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}. \quad (19)$$

Так как все заряды равны, их можно сократить и получить формулы для расчета емкости последовательно соединенных конденсаторов:

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (20)$$

**При последовательном соединении конденсаторов складываются величины, обратные емкостям всех конденсаторов.**

Полученный результат можно обобщить на случай последовательного соединения произвольного числа конденсаторов (рис. 163)

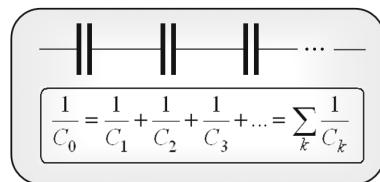


Рис. 163

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots = \sum_k \frac{1}{C_k}. \quad (21)$$

Для случая плоских конденсаторов с одинаковыми площадями пластин и одинаковыми диэлектриками внутри формула для соединения конденсаторов показывает, что необходимо складывать толщины зазоров между обкладками (рис. 164):

$$\frac{1}{C_0} = \frac{d_0}{\epsilon \epsilon_0 S} = \frac{d_1}{\epsilon \epsilon_0 S} + \frac{d_2}{\epsilon \epsilon_0 S} = \frac{(d_1 + d_2)}{\epsilon \epsilon_0 S}.$$

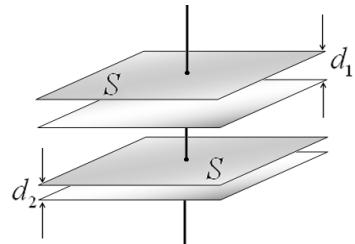


Рис. 164

### *Страница истории*

После того как было установлено разделение тел на проводники и непроводники, а опыты с электростатическими машинами получили широчайшее распространение, совершенно естественной была попытка «накопить» электрические заряды в каком-то стеклянном сосуде, который мог их сохранить. Среди многих физиков, занявшихся подобными экспериментами, наибольшую известность получил голландский профессор из г. Лейдена Мушенбрук (1692–1761 гг.).

Зная, что стекло не проводит электричества, он (в 1745 г.) взял банку (колбу), наполненную водой, опустил в нее медную проволоку, висевшую на кондукторе электрической машины, и, взяв банку в правую руку, попросил своего помощника вращать шар машины (рис. 165). При этом он правильно предположил, что заряды, поступавшие с кондуктора, будут накапливаться в стеклянной банке. После того как, по его мнению, в банке накопилось достаточно количество зарядов, он решил левой рукой отсоеди-

нить медную проволоку. При этом он ощутил сильный удар, ему показалось, что «пришел конец». В письме Реомюру в Париж (в 1746 г.) он писал, что этот «новый и страшный опыт советую самим никак не повторять» и что «ради короны Франции» он не согласится подвергнуться «столь ужасному сотрясению».

Так была изобретена лейденская банка (по имени г. Лейдена), а вскоре и первый простейший конденсатор. Опыт Мушенбрука произвел подлинную сенсацию не только среди физиков, но и многих любителей, интересовавшихся электрическими опытами. Независимо от Мушенбрука, в том же 1745 г. к созданию лейденской банки пришел и немецкий ученый Э. Г. Клейст. Опыты с лейденской банкой стали производить физики разных стран, а в 1746–1747 гг. первые теории лейденской банки разработали знаменитый американский ученый Б. Франклин и хранитель физического кабинета, англичанин В. Уатсон. Одним из важнейших последствий изобретения лейденской банки явилось установление влияния электрических разрядов на организм человека, что привело к зарождению электромедицины – это было первое сравнительно широкое практическое применение электричества, сыгравшее важную роль в углублении изучения электрических явлений.

Опыт Мушенбрука был повторен в присутствии французского короля аббатом Нолле. Он образовал цепь из 180 гвардейцев, взявшись за руки, причем первый держал банку в руке, а последний прикасался к проволоке, извлекая искру. «Удар почувствовался всеми в один момент; было курьезно видеть разнообразие жестов и слышать мгновенный вскрик» десятков людей. От этой цепи солдат и произошел термин «электрическая цепь».



Рис. 165

Постепенно конструкция лейденской банки совершенствовалась: воду заменили дробью, а затем наружная поверхность покрывалась тонкими свинцовыми пластинами; позднее внутреннюю и наружную поверхности стали покрывать оловянной фольгой, и банка приобрела современный вид.

При проведении исследований с банкой было установлено (в 1746 г. англичанином Б. Вильсоном), что количество электричества, собираемое в банке, прямо пропорционально размеру обкладок и обратно пропорционально толщине изоляционного слоя. В 70-х гг. XVIII в. металлические пластины стали разделять не стеклом, а воздушным промежутком. Так появился простейший конденсатор.

## § 9. Постоянный электрический ток

Мы подробно рассмотрели свойства электростатического поля, порождаемого неподвижными электрическими зарядами. При движении электрических зарядов возникает целый ряд новых физических явлений, к изучению которых мы приступаем.

В настоящее время широко известно, что электрические заряды имеют дискретную структуру, то есть носителями зарядов являются элементарные частицы – электроны, протоны и т.д. Однако в большинстве практически значимых случаев эта дискретность зарядов не проявляется, поэтому модель сплошной электрически заряженной среды хорошо описывает явления, связанные с движением заряженных частиц, то есть с электрическим током.

**Электрическим током называется направленное движение заряженных частиц.**

С использованием электрического тока вы хорошо знакомы, так как электрический ток чрезвычайно широко используется в нашей жизни. Не секрет, что наша нынешняя цивилизация в основном базируется на производстве и использовании электрической энергии. Электрическую энергию достаточно просто производить, предавать на большие расстояния, преобразовывать в другие требуемые формы.

Кратко остановимся на возможных проявлениях действия электрического тока.

**Тепловое действие электрического тока** проявляется практически во всех случаях протекания тока. Благодаря наличию электрического сопротивления, при протекании тока выделяется теплота, количество которой определяется законом Джоуля-Ленца, с которым вы должны быть знакомы. В некоторых случаях выделяемая теплота полезна (в разнообразных электронагревательных приборах), часто выделение теплоты приводит к бесполезным потерям энергии при передаче электроэнергии.

**Магнитное действие тока** проявляется в создании магнитного поля, приводящего к появлению взаимодействия между электрическими токами и движущимися заряженными частицами.

**Механическое действие тока** используется в разнообразных электродвигателях, преобразующих энергию электрического тока в механическую энергию.

**Химическое действие** проявляется в том, что протекающий электрический ток может инициировать различные химические реакции. Так, например, процесс производства алюминия и ряда других металлов основан на явлении электролиза – реакции разложения расплавов оксидов металлов под действием электрического тока.

**Световое действие электрического тока** проявляется в появлении светового излучения при прохождении электрического тока. В некоторых случаях свечение является следствием теплового разогрева (например, в лампочках накаливания), в других – движущиеся заряженные частицы непосредственно вызывают появление светового излучения.

В самом названии явления (электрический ток) слышны отголоски старых физических взглядов, когда все электрические свойства приписывались гипотетической электрической жидкости, заполняющей все тела. Поэтому при описании движения заряженных частиц используется терминология, аналогичная используемой при описании движения обычных жидкостей. Указанная аналогия простирается дальше простого совпадения терминов, многие законы движения «электрической жидкости» аналогичны законам движения обычных жидкостей, а частично знакомые вам законы течения постоянного электрического тока по проводам аналогичны законам движения жидкости по трубам. Поэтому настоятельно реко-

мендуем вам повторить раздел, в котором описаны эти явления, – гидродинамику.

## 9.1 Характеристики электрического тока

Все заряженные тела взаимодействуют друг с другом посредством электрических сил, которые для неподвижных частиц описываются законом Кулона. При относительном движении заряженных частиц сила взаимодействия изменяется. Следовательно, движущиеся частицы создают поле, отличное от электростатического; такое поле называется **магнитным**. Если заряженные частицы движутся хаотически, то суммарное магнитное поле оказывается равным нулю. Поэтому при описании движения заряженных частиц наибольший интерес представляет усредненное направленное движение, приводящее к переносу электрического заряда.

В настоящее время известно, что электрические заряды имеют дискретную структуру, то есть носителями зарядов являются элементарные частицы – электроны, протоны и т.д. Однако в большинстве практически значимых случаев эта дискретность зарядов не проявляется, поэтому модель сплошной электрически заряженной среды хорошо описывает явления, связанные с движением заряженных частиц, то есть с электрическим током.

В электростатике мы ввели понятие объемной плотности электрического заряда  $\rho$  как усредненной характеристики распределения дискретных

точечных зарядов. В рамках этой же модели можно говорить о движении зарядов как о движении некоторой сплошной среды и использовать математический аппарат, рассмотренный нами при описании движения жидкости, то есть ввести понятия скорости движения «электрической жидкости в данной точке», векторного поля скоростей, линий тока и т.д. Однако нас интересует не столько движение самой «электрической жидкости», сколько электрический заряд, переносимый ею.

Рассмотрим некоторую пространственную область, в которой движутся электрические заряды («электрическая жидкость»); на рисунке изображены линии тока этого движения. Выделим в этой области малую площадку пло́щадью  $\Delta S$ , перпендикулярную линиям тока (рис. 166). Пусть скорость движения заряда в пределах площадки равна  $\vec{v}$ .

За промежуток времени  $\Delta t$  через площадку пройдет заряд, заключенный в объеме параллелепипеда длиной  $v\Delta t$ , опирающийся на выбранную площадку (рис. 167). Величина этого заряда равна  $\Delta q = \rho v \Delta t \Delta S$ . Чтобы определить «точечную» характеристику переноса заряда, разделим величину заряда, прошедшего через площадку, на площадь площадки и рассматриваемый промежуток времени. Полученная таким

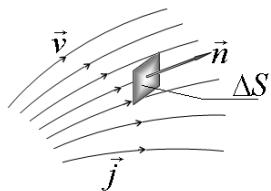


Рис. 166

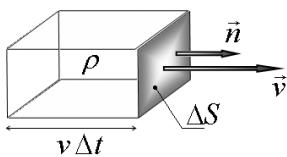


Рис. 167

характеристику переноса заряда, разделим величину заряда, прошедшего через площадку, на площадь площадки и рассматриваемый промежуток времени. Полученная таким

образом характеристика называется плотностью электрического тока:

$$j = \frac{\Delta q}{\Delta t \Delta S} = \rho v. \quad (1)$$

Имеет смысл считать данную характеристику векторной, направление которой совпадает с направлением скорости движения зарядов:

$$\vec{j} = \rho \vec{v}. \quad (2)$$

Таким образом, плотностью электрического тока называется векторная физическая величина, модуль которой равен количеству электрического заряда, протекающего в единицу времени через площадку единичной площади, расположенную перпендикулярно направлению движения заряда, а направление совпадает с направлением передвижения заряда.

Для того чтобы плотность тока была определена «в каждой точке», рассмотренную площадку следует сделать бесконечно малой.

Рассмотрим определение плотности электрического тока с точки зрения дискретного описания. Выделим в объеме движения дискретных зарядов небольшую часть объемом  $\Delta V$ , содержащую достаточно много заряженных частиц (рис. 168). Пронумеруем все заряженные частицы, находящиеся в этом объеме; обозначим величины зарядов этих частиц  $q_k$ , а их

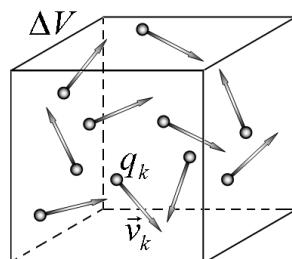


Рис. 168

скорости  $\vec{v}_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, N$ ). Построим векторную сумму:

$$\vec{J} = \sum_k q_k \vec{v}_k.$$

Если движение заряженных частиц является хаотическим, то есть скорости частиц равновероятно направлены во все стороны, то данная сумма будет приблизительно равна нулю; если же в движении заряженных частиц присутствует преимущественное направление, то построенная величина будет указывать направление переноса заряда и характеризовать количество этого заряда. Чтобы построенная таким образом характеристика была точечной, необходимо разделить ее на величину выделенного объема и устремить последний к нулю:

$$\vec{j} = \frac{\sum_k q_k \vec{v}_k}{\Delta V}. \quad (3)$$

Покажем теперь, что построенная таким образом величина совпадает с определенной нами выше плотностью тока. Для простоты будем считать, что все заряженные частицы одинаковы:  $q_k = q$  (например, электроны в металле). Определим среднюю арифметическую скорость движения частиц  $\langle \vec{v} \rangle = \frac{\sum \vec{v}_k}{N}$ , из которой следует, что  $\sum_k \vec{v}_k = N \langle \vec{v} \rangle$ . С учетом этого выражения, формула преобразуется к виду

$$\vec{j} = \frac{\sum_k q_k \vec{v}_k}{\Delta V} = \frac{q \sum_k \vec{v}_k}{\Delta V} = \frac{q N \langle \vec{v} \rangle}{\Delta V} = q n \langle \vec{v} \rangle, \quad (4)$$

где обозначено  $n = \frac{N}{\Delta V}$  – число заряженных частиц в единице объема, то есть их концентрация. Произведение же концентрации частиц на их электрический заряд равно электрическому заряду, заключенному в единице объема, то есть объемной плотности заряда  $qn = \rho$ . Таким образом, формула (4) совпадает с формулой (2), если скорость движения «электрической жидкости» отождествить со средней скоростью движения заряженных частиц.

В качестве наглядной модели движения заряженных частиц можно представить движения облака комаров, каждый из которых движется хаотически в пределах облака, а под действием ветерка это облако целиком смещается в некотором направлении.

Если в переносе заряда участвует несколько типов заряженных частиц, то можно определить плотность тока каждого типа частиц, а суммарную плотность тока как сумму плотностей токов всех типов частиц. Так, в растворе поваренной соли могут двигаться положительно заряженные ионы натрия  $Na^+$  и отрицательно заряженные ионы хлора  $Cl^-$ . В этом случае вектор плотности тока выражается суммой

$$\vec{j} = \vec{j}^+ + \vec{j}^- = q^+ n^+ \langle \vec{v}^+ \rangle + q^- n^- \langle \vec{v}^- \rangle, \quad (5)$$

где  $\vec{j}^+$ ,  $\vec{j}^-$  – плотности токов,  $q^+$ ,  $q^-$  – заряды,  $n^+$ ,  $n^-$  – концентрации,  $\langle \vec{v}^+ \rangle$ ,  $\langle \vec{v}^- \rangle$  – средние скорости ионов натрия и хлора, соответственно.

Заметим, что, согласно данному определению, направление вектора плотности тока со-

впадает со скоростью движения положительных зарядов, при движении отрицательных зарядов вектор плотности тока противоположен вектору их скорости. Иными словами, за положительное направление движения электрического тока принимается направление движения положительных зарядов.

В большинстве применений электрический ток проходит по металлам, в которых носителями тока являются отрицательно заряженные электроны, поэтому, как ни странно, чаще всего направление тока противоположно направлению движения реальных частиц электронов. Такая несуразность также является следствием исторической традиции: направление электрического тока было определено еще в начале XIX века, когда о природе носителей тока не имели ни малейшего представления.

Таким образом, мы определили векторную характеристику переноса заряда – плотность тока. Этот вектор определен в каждой точке пространства, поэтому математически движение зарядов описывается векторным полем  $\vec{j}(x, y, z)$ .

Рассмотрим физический смысл потока<sup>\*</sup> данного векторного поля. Для этого мысленно выделим малую площадку площадью  $\Delta S$ , в пределах которой вектор плотности тока  $\vec{j}$  можно считать постоянным и направленным под углом  $\alpha$  к вектору нормали

---

\* Речь идет, конечно, о математическом понятии потока векторного поля.

мали площадки  $\vec{n}$  (рис. 169). Если скорость направленного движения заряда равна  $v$ , то за время  $\Delta t$  через площадку пройдет заряд, содержащийся в наклонном параллелепипеде, длина стороны которого равна  $v\Delta t$ . Величина этого заряда равна произведению объемной плотности заряда на объем параллелепипеда:  $\Delta q = \rho\Delta S \cdot h = \rho \cdot \Delta S \cdot v\Delta t \cos \alpha$ . Следовательно, в единицу времени через площадку протекает электрический заряд, равный

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \rho\Delta S v \cos \alpha = j\Delta S \cos \alpha = \vec{j} \cdot \vec{n} \Delta S = \Phi_j. \quad (6)$$

Как следует из полученного соотношения, данная величина равна потоку вектора плотности тока  $\vec{j}$  через площадку  $\Delta S$ . Если требуется найти количество заряда, протекающего через некоторую поверхность (рис. 170), в пределах которой вектор плотности тока изменяется, то следует поступать традиционным образом: разбить поверхность на малые площадки, найти по формуле (6) поток через каждую площадку, после чего просуммировать эти потоки:

$$\Phi_j = \sum_k \Delta \Phi_{jk} = \sum_k \vec{j}_k \cdot \vec{n}_k \Delta S_k = \sum_k \vec{j}_k \cos \alpha_k \Delta S_k.$$

Поток вектора плотности тока играет важную роль в изучении электрического тока, поэтому получил «персональное» наименование – сила электрического тока.

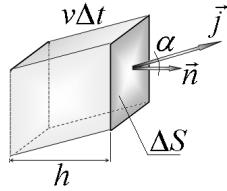


Рис. 169

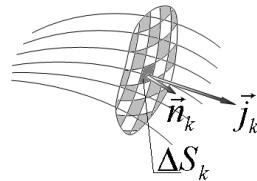


Рис. 170

**Силой электрического тока называется заряд, протекающий через площадку в единицу времени:**

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

По определению, сила тока является скалярной физической величиной, описывающей движение электрических зарядов усредненно, являясь характеристикой, описывающей свойства тока в пределах некоторой площадки целиком, без конкретизации распределения в пределах рассматриваемой поверхности.

При течении электрического тока по проводам распределение тока в продольном сечении провода малоинтересно – вполне достаточно знать значение суммарного тока через поперечное сечение провода, так как эта физическая величина позволяет находить интересующие характеристики: мощность, передаваемую энергию и так далее. Поэтому часто именно силу электрического тока определяют как заряд, протекающий через поперечное сечение проводника в единицу времени, и считают основной характеристикой электрического тока.

Как уже отмечалось ранее, единица силы электрического тока ампер (обозначается А) является основной единицей международной системы единиц СИ. Строгое определение этой единицы мы дадим позднее, на основании закона взаимодействия электрических токов. Характерные значения сил токов, используемых в бытовых приборах, составляют величины порядка одного ампера; так, лам-

почка накаливания мощностью 100 Вт потребляет электрический ток немного меньше чем 0,5 А.

Оценим скорость направленного движения электронов в металлических проводниках. Ранее мы оценили концентрацию свободных электронов в меди, получив значение  $n \approx 8 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3} = 8 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ . Если электрический ток силой в  $I = 1 \text{ А}$  протекает по медному проводнику с площадью поперечного сечения  $S \approx 1 \text{ мм}^2$ , то для оценки средней скорости движения электронов (заряд которых  $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ ) можно воспользоваться соотношением  $I = jS = en\langle v \rangle S$ , из которого следует:

$$\langle v \rangle = \frac{I}{enS} = \frac{1 \text{ А}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 8 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2} \approx 8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

то есть составляет очень малую величину порядка одной десятой доли миллиметра в секунду. При силе тока в 10 А скорость направленного движения электронов «достигает» величины порядка миллиметра в секунду! И при таких мизерных скоростях эти движущиеся электроны переносят значительную энергию.

Во избежание возможных недоразумений, подчеркнем, что мы оценили скорость направленного движения электронов, а не скорость распространения тока. При подключении сети к источнику тока движение зарядов во всех проводниках начинается практически мгновенно: электрическое поле, заставляющее двигаться электроны, распространяется по проводнику со скоростью света (триста тысяч километров в секунду). Аналогично, при открывании водопроводного крана практичес-

ски мгновенно вся вода в трубе начинает двигаться: упругие силы, приводящие воду в движение, распространяются со скоростью звука в воде (несколько тысяч километров в секунду), хотя сама вода может двигаться по трубе очень медленно.

## 9.2 Закон Ома

В данном разделе нам предстоит выяснить причины возникновения направленного движения заряженных частиц, то есть электрического тока. Природа электрического тока в различных проводящих средах (металлах, электролитах, газах и т.д.) различна – носителями тока могут выступать разные заряженные частицы; силы, действующие на них со стороны окружающей среды, так же различаются. Подробное изучение электропроводящих свойств различных веществ мы проведем позднее. Сейчас наша задача – установить ряд общих закономерностей, присущих протеканию электрического тока в различных средах. В качестве основного объекта нашего нынешнего рассмотрения будет выступать электрический ток в металлах. Мы уже оговаривали в общих чертах строение металлов. Все металлы в твердом состоянии имеют кристаллическую структуру, образованную ионами – атомами, потерявшими один или два электрона. Эти электроны (их также называют свободными) «обобществляются», то есть могут перемещаться, «блуждать» по кристаллической решетке в пределах всего объема металлического тела.

При отсутствии внешнего воздействия свободные электроны хаотически движутся; такое движение называется тепловым, скорость его возрастает с ростом температуры. Для того чтобы заставить электроны двигаться направлено, к ним необходимо приложить внешнюю силу. В качестве такой силы чаще всего выступает сила со стороны электрического поля.

При изучении электростатики мы утверждали, что электрическое поле внутри проводника отсутствует. Но не забывайте: электростатика рассматривает условия равновесия, когда индуцированные внешним полем заряды создают собственное поле, которое полностью компенсирует внешнее поле. Можно сказать, что сейчас мы рассматриваем процесс перехода к этому равновесному состоянию и условия, при которых процесс движения электрических зарядов может продолжаться сколь угодно долго.

Итак, если внутри проводника создано электрическое поле напряженности  $\vec{E}$ , то свободные электроны начинают двигаться с ускорением, определяемым вторым законом Ньютона\*  $\vec{a} = \frac{e\vec{E}}{m}$  (где  $e$  – заряд электрона,  $m$  – его масса) и направленным по направлению внешнего поля. При уве-

---

\* Строго говоря, движение электронов внутри кристаллической решетки подчиняется законам квантовой физики (физики микрочастиц). Однако качественное описание и объяснение законов электрического тока может быть дано в рамках классических моделей движения этих частиц.

личении скорости электрона он чаще сталкивается с ионами кристаллической решетки, отдавая ей часть своей кинетической энергии. Эта энергия, передаваемая решетке, идет на увеличение энергии движения ее ионов, то есть увеличение тепловой, внутренней энергии металла, благодаря чему его температура возрастает. Наличие неупругих столкновений свободных электронов с ионами решетки приводит к тому, что средняя скорость направленного движения не растет неограниченно, а стабилизируется.

Для упрощенного описания движения электронов примем, что в течение некоторого промежутка времени  $\tau$  электрон движется без столкновений, а затем в результате неупругого столкновения полностью отдает свою кинетическую энергию иону решетки. Введенное время  $\tau$  имеет смысл среднего времени движения электрона между столкновениями. В рамках такой модели между столкновениями скорость электрона возрастает от  $v = 0$  до  $\vec{v}_{\max} = \vec{a}\tau = \frac{e\vec{E}}{m}\tau$ . Так как мы считаем движение электрона равноускоренным, то средняя скорость направленного движения электрона равна  $\langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{2}\vec{v}_{\max} = \frac{e\vec{E}}{2m}\tau$ . Следовательно, плотность электрического тока описывается формулой

$$\vec{j} = en\langle \vec{v} \rangle = \frac{e^2 n \tau}{2m} \vec{E}. \quad (1)$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что **плотность электрического тока оказывается**

## пропорциональной напряженности электрического поля.

Этот же результат можно получить в рамках несколько иной модели. Будем считать, что при движении заряженной частицы со стороны окружающей среды действует тормозящая сила, пропорциональная скорости движения частицы:  $\vec{F}_{\text{сопр.}} = -\beta \vec{v}$ . Под действием электрического поля скорость электрона будет возрастать до тех пор, пока сила сопротивления не уравновесит силу со стороны электрического поля (рис. 171). Таким образом, в установившемся равномерном движении выполняется соотношение

$$\vec{F}_{\text{сопр.}} + e\vec{E} = -\beta \vec{v} + e\vec{E} = \vec{0},$$

из которого также следует, что скорость установившегося движения (а следовательно, и плотность тока) пропорциональна напряженности действующего электрического поля:

$$\vec{j} = en\vec{v} = \frac{e^2 n}{\beta} \vec{E}. \quad (2)$$

Две рассмотренные модели не противоречат друг другу. Фактически, в рамках второй модели рассматривается движение, усредненное по промежутку времени, превышающему среднее время между столкновениями. Для полного согласования результатов необходимо принять, что коэффициент пропорциональности между силой сопротивления среды и средней скоростью электрона равен  $\beta = \frac{2m}{\tau}$ .

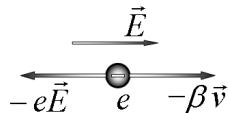


Рис. 171

Рассмотренные модели, как мы подчеркивали, носят качественный характер, поэтому основной вывод о пропорциональности между плотностью тока и напряженностью требует экспериментальной проверки. Более того, введенные параметры  $\tau$  и  $\beta$  не могут быть измерены экспериментально. Запишем полученные выражения в общепринятом виде:

$$\vec{j} = \lambda \vec{E} = \frac{1}{\rho} \vec{E}, \quad (3)$$

где введенные коэффициенты характеризуют свойства проводящей среды и называются:  $\rho$  – удельное электрическое сопротивление,  $\lambda$  – удельная проводимость среды.

Удельное электрическое сопротивление является макроскопической характеристикой вещества, в рамках рассмотренных нами моделей оно может быть выражено через микроскопические характеристики строения металла:

$$\rho = \frac{2m}{e^2 n \tau} = \frac{\beta}{e^2 n}. \quad (4)$$

Применим формулу (3) для расчета силы электрического тока по проводящей проволоке. Выделим участок проволоки длиной  $l$ , площадь поперечного сечения проволоки обозначим  $S$ . Если электрическое поле внутри проволоки является однородным, то и плотность электрического тока  $\vec{j}$  также будет постоянна во всех точках проводника. В этом случае сила тока через поперечное сечение проволоки будет равна произведению плотности тока на площадь поперечного сечения:  $I = jS$ . Для

плотности тока используем выражение (3), тогда силу тока  $I$  можно представить в виде

$$I = jS = \frac{1}{\rho} ES = \frac{S}{\rho l} El = \frac{U}{R}, \quad (5)$$

где обозначено  $U = El = \Delta\phi$  – разность потенциалов между концами рассматриваемого участка, которая в данном случае также называется **электрическим напряжением**;

$$R = \rho \frac{l}{S} - \quad (6)$$

электрическое сопротивление участка проводника. Обратная величина  $\Lambda = \frac{1}{R}$  называется **электрической проводимостью** участка.

Формула (5) может быть легко проверена экспериментально, так как достаточно давно разработаны простые и знакомые вам приборы для измерения силы тока (амперметры) и электрического напряжения (вольтметры). Многократно проведенные исследования (в том числе многочисленными учащимися средних школ) действительно свидетельствуют, что для многих веществ, в том числе для металлов, это соотношение выполняется с высокой степенью точности.

Впервые экспериментально эту зависимость установил в 1826 году немецкий физик Георг Симон Ом, поэтому она носит название **закона Ома для участка цепи**. Связанное с ним соотношение между плотностью тока и напряженностью поля (3) носит название **закона Ома в дифференциальной форме**.

Установленный закон Ома не носит универсального характера: имеется целый ряд веществ (газы, полупроводники) и электронных устройств, для которых связь между током и напряжением носит более сложный характер.

Еще раз подчеркнем аналогию между законами электрического тока и законами движения жидкости. Так, закон Ома может быть сформулирован в виде, аналогичном формуле Пуазейля для движения вязкой жидкости по трубе: сила электрического тока, т.е. заряд, протекающий через поперечное сечение проводника (*расход жидкости, то есть объем жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы*), пропорционален разности потенциалов, приложенной к концам проводника (*разности давлений, приложенной к концам трубы*). Причина такой аналогии заключается в том, что и движению зарядов, и движению жидкости препятствуют силы сопротивления (вязкого трения), которые пропорциональны скорости движения.

### 9.3 Закон Джоуля-Ленца

Рассмотренному закону Ома для участка цепи можно дать энергетическое истолкование. Действительно, по определению, разность потенциалов (напряжение) равна работе, которую совершает электрическое поле по перемещению единичного положительного заряда. При движении заряженных частиц в среде необходимо преодолевать силы сопротивления среды, поэтому для поддержания

постоянного тока к движущимся частицам постоянно необходимо прикладывать внешнюю силу. Очевидно, что работа электрического поля по перемещению заряда по проводнику пропорциональна силе сопротивления, которая, в свою очередь, пропорциональна скорости движения заряженных частиц, или силе тока. Именно поэтому сила тока оказывается пропорциональной приложенному напряжению.

В таком установившемся режиме работа электрических сил по перемещению заряженных частиц тратится на увеличение внутренней энергии среды. Заметим, что в некоторых случаях электрическое сопротивление обусловлено не только неупругими столкновениями электронов с кристаллической решеткой, но и иными причинами. Так, при работе электрического двигателя на движущиеся электроны действуют тормозящие силы со стороны магнитного поля, в этом случае работа электрического поля равна механической работе, совершаемой двигателем.

Приведем еще одну простую механическую аналогию. Если тело движется под действием только одной постоянной силы, то его движение является равноускоренным и вся работа этой силы идет на увеличение кинетической энергии тела. Если же тело движется в вязкой среде, то на него также действует сила вязкого трения, пропорциональная скорости. Поэтому по прошествии некоторого промежутка времени после начала движения скорость тела становится постоянной. Так,

например, при движении лодки в воде ее скорость пропорциональна мощности двигателя (то есть работе, совершаемой двигателем). В установившемся режиме кинетическая энергия тела так же, как и скорость, остается постоянной, а работа внешней силы расходуется на увеличение внутренней энергии среды.

Если среда не обладает электрическим сопротивлением, то для создания постоянного тока постоянное электрическое поле не требуется – достаточно заряженным частицам сообщить некоторую скорость, а дальше они будут двигаться по инерции. Таким образом, в установившемся режиме работа электрического поля по поддержанию постоянного тока равна увеличению энергии рассматриваемой системы. За некоторый промежуток времени  $\Delta t$  при силе тока  $I$  через поперечное сечение проводника протекает электрический заряд  $\Delta q = I\Delta t$ . Электрическое поле при этом совершает работу

$$A = U\Delta q = UI\Delta t. \quad (1)$$

Используя закон Ома, это выражение также можно записать в виде

$$A = UI\Delta t = I^2 R \Delta t = \frac{U^2}{R} \Delta t. \quad (2)$$

Как известно, работа, совершаемая в единицу времени, называется мощностью, поэтому мощность электрического тока рассчитывается по формулам

$$P = \frac{A}{\Delta t} = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \quad (3)$$

Если единственной причиной электрического сопротивления являются неупругие столкновения заряженных частиц с частицами окружающей среды, то работа электрического поля по поддержанию электрического тока равна количеству теплоты, выделяющемуся в проводнике при прохождении электрического тока:

$$Q = UI\Delta t = I^2 R \Delta t = \frac{U^2}{R} \Delta t. \quad (4)$$

Эти соотношения выражают закон Джоуля-Ленца, открытый экспериментально английским физиком Джеймсом Джоулем и русским физиком Эмилем Ленцем.

Подчеркнем, что формулы для работы и мощности тока (2) и (3) справедливы в любом случае при любом действии электрического тока (тепловом, механическом, химическом и т.д.).

## 9.4 Электрическое сопротивление

Если для участка цепи выполняется закон Ома, то коэффициент пропорциональности между приложенным напряжением и силой тока ( $U = RI$ ) называется **электрическим сопротивлением** участка. Электрическое сопротивление зависит от материала проводника, его формы и размеров. Единицей измерения электрического сопротивления в Международной системе единиц СИ является **Ом** – сопротивление участка проводника, в котором при напряжении в 1 вольт возникает электрический ток силой 1 ампер:

$$[1\text{ Ом}] = \frac{[1\text{ В}]}{[1\text{ А}]}.$$

Электропроводящие свойства веществ характеризуются их удельным электрическим сопротивлением  $\rho$ . Из формулы (6) предыдущего раздела следует, что размерностью удельного электрического сопротивления является  $[\rho] = \frac{[R] \cdot [S]}{[l]} = \text{Ом} \cdot \text{м}$ .

Величины удельных сопротивлений различных веществ чаще всего определяются экспериментально и приводятся в физических справочниках. Для различных веществ удельное электрическое сопротивление может изменяться в очень широких пределах. Так, среди чистых металлов наилучшими проводниками являются серебро ( $\rho \approx 1,6 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ ), медь ( $\rho \approx 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ ), алюминий ( $\rho \approx 2,8 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ ). В некоторых приборах (например, электронагревательных) используются сплавы, обладающие гораздо большим удельным сопротивлением, например, нихром ( $\rho \approx 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ ). Строго говоря, между проводниками и изоляторами нет резкой грани, все вещества (в том числе и те, которые относятся к изоляторам) в той или иной степени проводят электрический ток. Для изоляторов удельное электрическое сопротивление велико, например, для различных типов стекол удельное электрическое сопротивление лежит в пределах  $\rho \approx 10^9 - 10^{13} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ , для воздуха  $\rho \approx 10^{15} - 10^{18} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ .

**Обратите внимание: в приведенных примерах диапазон изменения удельного сопротивления – 26 порядков!**

К настоящему времени теории строения вещества разработаны достаточно глубоко, в рамках этих теорий удаётся рассчитывать такую важную характеристику, как удельное сопротивление. Так, даже в рассмотренных нами элементарных моделях макроскопическая характеристика – удельное электрическое сопротивление – выражается через микроскопические параметры.

Приведенные табличные данные являются приближенными, так как удельное электрическое сопротивление может заметно изменяться при наличии крайне незначительных примесей.

Кроме того, электрическое сопротивление всех веществ зависит от температуры. Так, для металлов удельное электрическое сопротивление возрастает с ростом температуры. Механизм этого явления достаточно сложный, мы рассмотрим его в ходе изучения физических теорий строения веществ. Заметим, что имеются вещества (графит, полупроводники, некоторые растворы электролитов), для которых электрическое сопротивление уменьшается при возрастании температуры.

Для большинства металлов удельное электрическое сопротивление в небольшом диапазоне температур (естественно, не включающем точку плавления) зависит от температуры линейно, то есть может быть описано формулой

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t^\circ), \quad (1)$$

где  $t^\circ$  – температура вещества, измеренная в градусах Цельсия,  $\rho_0$  – удельное электрическое сопротивление,  $\alpha$  – температурный коэффициент электрического сопротивления, равный относительному изменению сопротивления при изменении температуры на  $1^\circ$ . Температурный коэффициент электрического сопротивления является «индивидуальной» характеристикой веществ, он также определяется экспериментально. Так, например, для серебра, меди, алюминия он приблизительно равен  $\alpha \approx 4 \cdot 10^{-8} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . В некоторых случаях необходимы вещества, у которых сопротивление слабо зависит от температуры; так, например, для такого сплава, как константан\*,  $\alpha \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ , что почти в сто раз меньше аналогичного показателя для меди и алюминия.

В 1911 году голландским физиком Г. Камерлинг-Оннесом было открыто явления **сверхпроводимости**. При очень низких температурах электрическое сопротивление металлов скачком падает до нуля. Температуры перехода в сверхпроводящее состояние различны для различных материалов; так, для первого сверхпроводника, открытого Г. Камерлинг-Оннесом, ртути, эта температура составляет всего  $4^\circ\text{K}$ . Теория этого явления чрезвычайно сложна и была построена только через пятьдесят лет после его открытия.

\* Само название этого сплава означает «постоянный», то есть его сопротивление практически не зависит от температуры.

Электрическое сопротивление проводника зависит не только от материала, но и от его размеров и формы. Широко известна полученная нами формула для расчета сопротивления проводника

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (2)$$

где  $l$  – длина проводника,  $S$  – площадь его поперечного сечения.

Однако ее использование допустимо только при выполнении дополнительных условий:

1. Ток в проводнике должен быть постоянным (или изменяющимся медленно, в некотором смысле), так как закон Ома описывает только уставновившийся режим протекания тока.

2. Плотность тока должна быть постоянна в поперечном сечении проводника, в противном случае связь между силой и плотностью тока более сложная.

3. Длина проводника  $l$  должна быть измерена в направлении движения тока, а площадь  $S$  в плоскости, перпендикулярной вектору плотности тока.

Незнание этих дополнительных условий или пренебрежение ими может приводить к курьезным ситуациям. Так попробуйте ответить на вопрос (рис. 172): «Чему равно электрическое сопротивление прямоугольного параллелепипеда, изготовленного из материала с удельным электрическим сопротивлением  $\rho$ , размеры которого равны  $a \times b \times c$ ?».

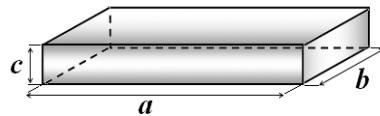


Рис. 172

Традиционно ответ на данный вопрос следует незамедлительно:  $R = \rho \frac{a}{bc}$ .

Почему же в качестве длины проводника используется величина  $a$ , а не  $b$  или  $c$ ? Ответ также традиционен: «Потому, что она длиннее!»

Исходная задача некорректна! Без указания направления распространения тока вопрос бессмысленный!

В общем случае для расчета сопротивления необходимо знать распределение токов внутри проводника.

### *Задание для самостоятельной работы.*

1. Выразите единицу электрического сопротивления Ом через основные единицы системы СИ.

2. Найдите размерность произведения электрической емкости и электрического сопротивления (Фарад на Ом).

При использовании электрического тока применяются электрические цепи, различные устройства которых обладают различными электрическими свойствами. Расчеты распределения токов и напряжений в таких цепях играют важную роль при конструировании разнообразных приборов, потребляющих энергию электрического тока.

Реально электрическим сопротивлением обладают все проводники, то есть электрическое сопротивление распределено по всей электрической цепи. Однако во многих случаях удобно мысленно сосредоточить электрическое сопротивление на

каком-то элементе цепи, считая, что остальные участки являются идеальными проводниками. Более того, во многих случаях электрические цепи содержат элементы, электрическое сопротивление которых заметно превышает сопротивления подводящих проводов. Такие элементы цепи называются **резисторами**.

На электрических схемах резисторы обозначаются общепринятым знаком (рис. 173 а); иногда в устройствах используются резисторы, сопротивление которых можно изменять, такие элементы называются **переменными резисторами** и обозначаются на схемах, как показано на рис. 173 б.

Промышленностью производятся различные типы резисторов, сопротивления которых изменяются в широких пределах: от нескольких Ом до миллионов Ом – Мегаом ( $1 \text{ МОм} = 10^6 \text{ Ом}$ ). Конструктивно в качестве проводящего элемента используется либо проволока (проводочные резисторы), либо напыленные на поверхность керамики слои различных материалов. Важной характеристикой резисторов является максимальная мощность тока, который можно пропустить через резистор без его разрушения.

Несмотря на многообразие производимых резисторов, иногда возникает необходимость соединения резисторов в батареи. Кроме того, расчет электрических цепей (то есть нахождение сопро-

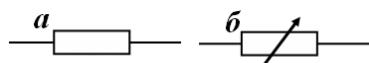


Рис. 173

тивлений отдельных участков, напряжений на них, сил токов, выделяющихся мощностей) является важной задачей. Поэтому сейчас мы вынуждены остановиться на методах таких расчетов для цепей постоянного тока.

Основная идея расчетов общих сопротивлений совпадает с рассмотренными нами ранее расчетами характеристик батарей конденсаторов.

В общем виде электрическую цепь, состоящую из резисторов, соединенных различными способами, будем представлять в виде «черного ящика» с двумя выводами – входом и выходом (рис. 174). Считаем, что на входе в наш «ящик» втекает электрический ток силой  $I_0$ , такой же ток вытекает на выходе (предполагается, что находящаяся внутри цепь допускает это – есть контакт между входом и выходом). По правилам, которые нам предстоит изучить, проводится расчет напряжения  $U_0$  между выводами схемы. Тогда отношение напряжения между входом и выходом к силе тока на входе будем называть общим сопротивлением цепи:

$$R_0 = \frac{U_0}{I_0}. \quad (3)$$

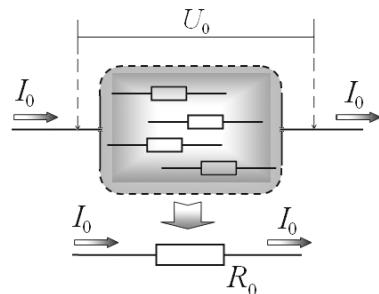


Рис. 174

Иными словами, наша задача заключается в замене всей цепи (в «черном ящике») одним эквивалентным резистором с сопротивлением  $R_0$ .

В некоторых случаях нас будут интересовать и значения сил токов, и напряжения на отдельных участках цепи.

Конечно, возможен и противоположный подход к расчету такой цепи – задавать общее напряжение на выводах схемы  $U_0$ , а рассчитывать распределения сил токов в изучаемой цепи.

## 9.5 Последовательное соединение резисторов

Пусть 2 резистора соединены последовательно, то есть электрический ток первоначально полностью протекает через один резистор, затем через второй (рис. 175). Обозначим сопротивления резисторов  $R_1$ ,  $R_2$ , напряжения на них  $U_1$ ,  $U_2$ , силы токов через резисторы  $I_1$ ,  $I_2$ .

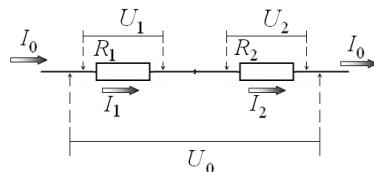


Рис. 175

Еще раз обращаем внимание на правильное использование терминов: напряжение (разность потенциалов) определяется только между двумя точками, поэтому говорят: «напряжение на таком-то элементе»; сила тока определяется для поперечного сечения проводника, для конкретной точки цепи, поэтому говорят: «сила тока через такой-то элемент».

По определению напряжения как работы электрического поля, общее напряжение равно сумме напряжений на всех элементах данной цепи. Дей-

ствительно, электрические заряды последовательно проходят через все элементы цепи, поэтому работа по перенесению заряда через всю цепь равна сумме работ по перенесению заряда через каждый резистор:

$$U_0 = U_1 + U_2. \quad (1)$$

Далее, на основании закона сохранения электрического заряда, следует признать, что силы токов через все резисторы одинаковы. Действительно, электрический заряд, прошедший через первый резистор, должен пройти через второй и т.д.: заряд не может появиться и не может исчезнуть, поэтому

$$I_0 = I_1 = I_2. \quad (2)$$

Разделив равенство (2) на постоянное значение силы тока в цепи и используя закон Ома для каждого резистора, получим, что общее сопротивление двух резисторов равно сумме сопротивлений каждого из них:

$$R_0 = R_1 + R_2. \quad (3)$$

Полученные соотношения обобщаются на произвольное число последовательно соединенных резисторов. Итак, при последовательном соединении резисторов (рис. 176):

– силы токов через каждый резистор равны и равны силе тока в общей цепи;

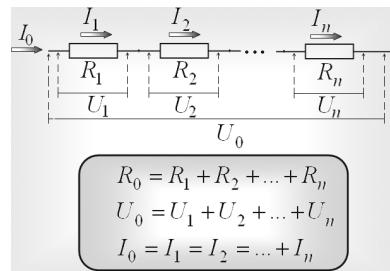


Рис. 176

– общее напряжение равно сумме напряжений на каждом резисторе;

– общее сопротивление цепи равно сумме сопротивлений всех элементов цепи

$$R_0 = R_1 + R_2 + \dots + R_n. \quad (4)$$

В частном случае, когда  $n$  одинаковых резисторов, сопротивлением  $R$  каждый, соединены последовательно, то общее сопротивление цепи равно  $R_0 = nR$ .

В очень простом случае, когда последовательно соединены два куска проволоки из одного материала, одной площади поперечного сечения, но разных длин (рис. 177), правило сложения сопротивлений утверждает, что суммарная длина равна сумме длин отдельных кусков. Действительно, в этом случае

$$R_0 = \rho \frac{l_0}{S} = R_1 + R_2 = \rho \frac{l_1}{S} + \rho \frac{l_2}{S} = \rho \frac{l_1 + l_2}{S}.$$

Затронем еще один интересный вопрос, касающийся распределения напряжения на участке последовательно соединенных резисторов (рис. 177). Без труда мы пока-

зали, что суммарное напряжение равно сумме напряжений на каждом

из резисторов. Теперь будем считать, что к этим двум последовательно соединенным резисторам мы подключили источник, поддерживающий на данном участке цепи постоянное напряжение  $U_0$ . Это напряжение должно «разделиться» на две, в

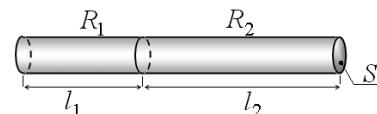


Рис. 177

общем случае, неравные части – напряжения на каждом из резисторов  $U_1$ ,  $U_2$ . Причем должно выполняться условие

$$I_1 = I_2 \Rightarrow \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2}.$$

Иными словами, напряжения на резисторах должны быть пропорциональны их сопротивлениям. Без труда математически можно выразить эти напряжения:

$$U_1 = U_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad U_2 = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Теперь этот вопрос поставим физически: каким образом происходит нужное деление общего напряжения?

Рассмотрим простую модель. Два проволочных резистора имеют одинаковые размеры, но изготовлены из различных материалов, удельные сопротивления которых равны  $\rho_1$  и  $\rho_2$  (рис. 178).

Пусть внешний источник внутри такого составного проводника имеет разность потенциалов  $\phi_0$ . Не теряя общности, можем считать, что потенциал одного из концов проводника равен  $\phi_0$ , а второго равен нулю. Сразу после подключения источника электрическое поле внутри проводника создается только зарядами на

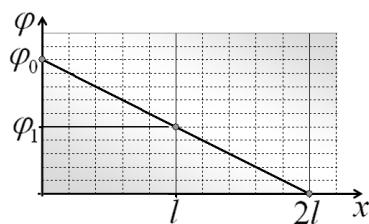
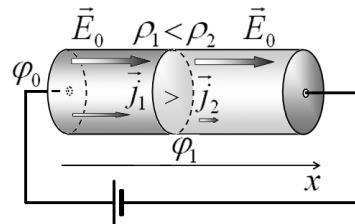


Рис. 178

его торцах (набежавшими с источника), поэтому напряженности полей внутри обеих частей проводника равны между собой (обозначим ее значение  $E_0$ ). В этом случае потенциал поля будет линейно изменяться по длине проводника от  $\varphi_0$  до нуля. Однако силы (или плотности) токов в разных частях проводника будут различны (!), так как различны их удельные сопротивления. Для определенности будем считать, что  $\rho_1 < \rho_2$ . В таком случае плотность тока в первом проводнике окажется больше, чем во втором, т.е.  $j_1 > j_2$ . К границе раздела будет подходить больший заряд, чем уходить от нее. Следовательно, на этой границе будет накапливаться электрический заряд. Этот заряд создает свое электрическое поле  $\vec{E}'$ , причем его направление будет различным в первой и второй частях проводника (рис. 179). Это поле будет уменьшать суммарную напряженность в первом проводнике и увеличивать ее во втором. Что, в свою очередь, приведет к уменьшению плотности тока в первом проводнике и увеличению ее во втором! Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока плотности токов (или их силы) не сравняются. После выравнивания плотностей токов процесс

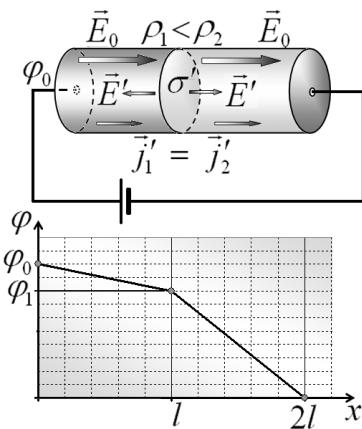


Рис. 179

накопления зарядов прекратится, после этого напряженности полей, разности потенциалов, силы и плотности токов изменяться не будут. Распределение потенциала по длине проводника приобретет вид, требуемый правилами последовательного соединения: там, где сопротивление меньше, напряженность поля меньше, меньше и разность потенциалов на его концах. Значение потенциала на границе раздела станет таким, чтобы силы и плотности токов были равны.

Таким образом, мы обнаруживаем, что протекающий электрический ток сам регулирует распределение напряжения на отдельных участках цепи: перераспределения зарядов, напряженностей, потенциалов продолжаются до тех пор, пока не начинают выполняться условия стационарности токов («сколько пришло – столько ушло»). Иными словами, установленные нами правила для расчета характеристик цепей фактически выражают условия стационарности токов, так же, как это устанавливает закон Ома!

## 9.6 Параллельное соединение резисторов

При параллельном соединении резисторов электрический ток разветвляется, одновременно проходя через все элементы цепи. Можно также сказать, что входные точки всех параллельно соединенных резисторов соединены, также соединены их выходные точки.

Найдем общее сопротивление цепи, состоящей из  $n$  параллельно соединенных резисторов\* (рис. 180). Обозначения сопротивлений, сил токов и напряжений оставим прежними. На основании закона сохранения электрического заряда можно утверждать, что общая сила тока равна сумме токов, протекающих через все резисторы:

$$I_0 = I_1 + I_2 + \dots + I_n. \quad (1)$$

Электрическое поле является потенциальным, поэтому разности потенциалов (напряжения) между концами всех резисторов одинаковы и равны общему напряжению на концах цепи:

$$U_0 = U_1 = U_2 = \dots = U_n. \quad (2)$$

Разделим равенство (1) на равное напряжение, с помощью закона Ома получим:

$$\frac{1}{R_{\text{общ}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}. \quad (3)$$

Величина, обратная сопротивлению, называется проводимостью, поэтому правило расчета параллельной цепи формулируется следующим образом: **общая проводимость параллельно соединенной цепи равна сумме проводимостей всех элементов цепи.** Добавим:

---

\* Мы уже столько раз рассматривали два элемента, а потом обобщали на случай их произвольного числа, что можно уже на рис. 180 с двумя резисторами «увидеть» произвольное число  $n$  резисторов.

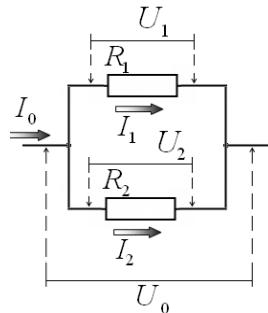


Рис. 180

- общая сила тока в цепи равна сумме сил токов через каждый из резисторов;
- напряжения на всех резисторах равны общему напряжению.

В частном случае, когда  $n$  одинаковых резисторов, сопротивлением  $R$  каждый, соединены параллельно, то общее сопротивление цепи, как следует из формулы (3), равно  $R_0 = \frac{R}{n}$ .

Если в качестве резисторов используются куски проволоки из одного материала одинаковой длины (рис. 181), то полученое правило равносильно утверждению, что общая площадь поперечного сечения всех кусков равна сумме площадей сечения отдельных кусков. Смотрите:

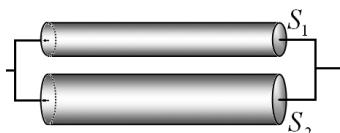


Рис. 181

$$\frac{1}{R_0} = \frac{S_0}{\rho l} = \frac{S_1}{\rho l} + \frac{S_2}{\rho l} = \frac{S_1 + S_2}{\rho l}.$$

## 9.7 Примеры расчета сопротивлений цепи

Пользуясь полученными правилами расчета последовательного и параллельного соединения, можно рассчитать сопротивление сложной цепи, содержащей резисторы, соединенные различными комбинированными способами. Для этого необходимо последовательно заменять участки цепи (последовательного, параллельного соединения) эквивалентными сопротивлениями.

Подчеркнем, что вид соединения определяется порядком протекания электрического тока, а не тем, как элементы расположены в том или ином приборе, и, тем более, не тем, как они изображены на схеме. Так, два резистора, показанные на рис. 182, соединены последовательно, а не перпендикулярно!

Рассмотрим несколько примеров расчета сопротивлений разветвленных цепей.

Рассчитаем сопротивление цепи, изображенной на рис. 183 а). Для упрощения расчетов и экономии места положим, что сопротивления всех резисторов одинаковы и равны  $R$ .

Будем шаг за шагом упрощать схему, заменяя ее части эквивалентными сопротивлениями:

– резисторы  $R_2$  и  $R_3$  соединены параллельно (рис. 183 а), поэтому их общее сопротивление равно

$$R_{23} = \frac{1}{2}R;$$

– резисторы  $R_1$  и  $R_{23}$  соединены последовательно (рис. 183 б), следовательно, их сопротивление

$$R_{123} = R_1 + R_{23} = R + \frac{1}{2}R = \frac{3}{2}R;$$

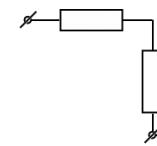


Рис. 182

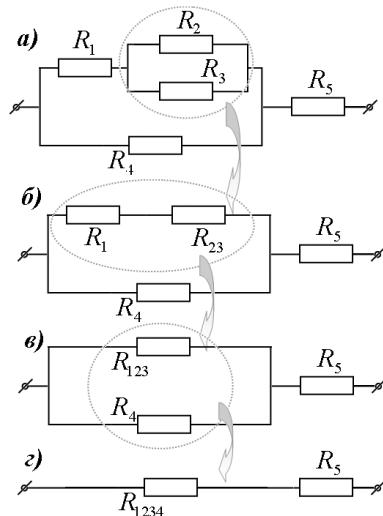


Рис. 183

– для расчета параллельно соединенных резисторов  $R_{123}$  и  $R_4$  (рис. 183в) воспользуемся формулой

$$R_{1234} = \frac{R_{123} \cdot R_4}{R_{123} + R_4} = \frac{\frac{3}{2}R \cdot R}{\frac{3}{2}R + R} = \frac{3}{5}R;$$

– наконец, этот резистор последовательно соединен с резистором  $R_5$ , поэтому общее сопротивление исходной цепи равно

$$R_{об.} = R_{1234} + R_5 = \frac{3}{5}R + R = \frac{8}{5}R.$$

Рассмотрим теперь две схемы, изображенные на рис. 184. Элементарные расчеты, которые можно провести в уме, приводят к результату: сопротивления обеих цепей равны  $R$ .

Зададимся вопросом: является ли это совпадение случайным? Схема *a* превращается в схему *b*, если соединить проводником точки *A* и *B* (рис. 185). Однако из симметрии схемы следует, что электрический ток по этому проводнику *AB* не пойдет. Действительно, в какую сторону ему идти? Оба направления равноправны. Еще одним доказа-

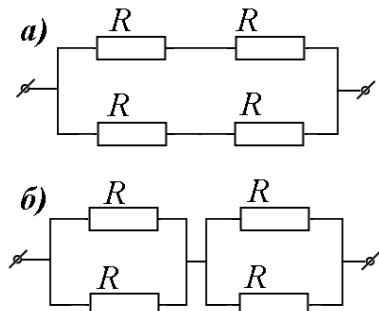


Рис. 184

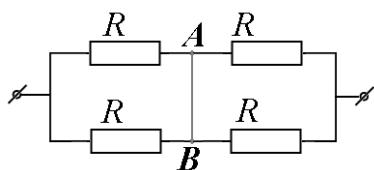


Рис. 185

тельством отсутствия тока в этом проводнике является равенство потенциалов точек **A** и **B**.

Рассмотрим общую схему такого соединения с произвольными значениями сопротивлений резисторов (рис. 186) и вычислим потенциалы точек **A** и **B**.

Сила тока через последовательно соединенные резисторы  $R_1$  и  $R_2$  определяется законом Ома:

$$I_1 = \frac{\Phi_0 - \Phi_1}{R_1 + R_2}.$$

Разность потенциалов на резисторе  $R_1$  равна

$$\Phi_0 - \Phi_A = I_1 R_1 = \frac{\Phi_0 - \Phi_1}{R_1 + R_2} R_1,$$

поэтому потенциал точки **A** равен  $\Phi_A = \Phi_0 - \frac{\Phi_0 - \Phi_1}{R_1 + R_2} R_1$ .

Аналогичные рассуждения для нижней ветви цепи позволяют записать потенциал точки **B**:

$$\Phi_B = \Phi_0 - \frac{\Phi_0 - \Phi_1}{R_3 + R_4} R_3.$$

Итак, условие отсутствия тока между точками **A** и **B** при их соединении, следующее из равенства потенциалов  $\Phi_A = \Phi_B$ , имеет вид

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_3}{R_3 + R_4}, \text{ или } \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}. \quad (1)$$

Рассмотренная схема называется мостиком Уитсона, а условие (1) – условием уравновешенности (или сбалансированности) моста. Подобные

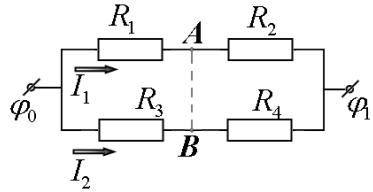


Рис. 186

схемы широко используются в различных электроизмерительных устройствах.

Простейший пример такого использования показан на рис. 187. Кусок однородной проволоки (1-2) с достаточно высоким удельным сопротивлением натянут на измерительную линейку, параллельно ей подключают два резистора, сопротивление одного из них ( $R_0$ ) известно, сопротивление второго ( $R_x$ ) измеряется. К образованной таким образом мостовой схеме подключается источник тока. К точке соединения резисторов  $A$  подключен чувствительный гальванометр\*, второй вывод которого с помощью скользящего контакта  $B$  подключается к проволоке. Передвигая контакт по проволоке, добиваются того, чтобы ток через гальванометр прекратился. В этом случае мост оказывается уравновешенным. Так как сопротивление проволоки пропорционально ее длине, то условие уравновешенности (1) в данном случае имеет вид

$$\frac{R_x}{R_0} = \frac{l_2}{l_1},$$

из которого легко определить неизвестное сопротивление по измерению длин частей проволоки. В

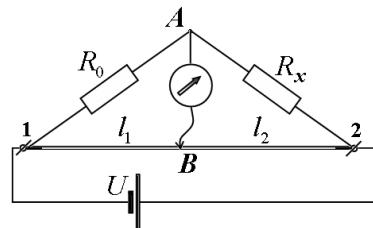


Рис. 187

---

\* Гальванометр – индикаторный прибор, задача которого показывать наличие даже малых токов.

данной схеме электрическое сопротивление изменяется, фактически, с помощью линейки. Помимо простоты данной схемы, ее достоинством является отсутствие необходимости измерять значение силы тока, достаточно убедиться в его отсутствии, что может быть сделано с высокой точностью. Подобный метод измерения называется «нулевым».

В некоторых случаях точки цепи, имеющие одинаковый потенциал, определяются просто, исходя из симметрии схемы. В таких ситуациях расчет электрического сопротивления значительно упрощается: во-первых, если между такими точками включены элементы цепи, то их можно отбросить, так как электрический ток через них не течет; во-вторых, точки равного потенциала можно соединить проводником — это не приведет к изменению сопротивления, так как распределение токов в цепи не изменится.

Рассчитаем, например, сопротивление каркасного октаэдра\*, изготовленного из проволоки, сопротивление каждого ребра которого равно  $R$  (рис. 188). При подключении источника тока к противоположным вершинам  $A$  и  $B$  точки 1, 2, 3, 4 равноправны, поэтому имеют одинаковый потенциал. Следовательно, ток не течет по ребрам октаэдра, соединяющим

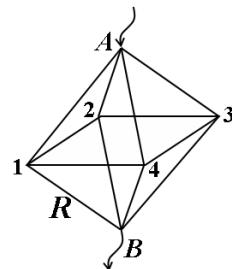


Рис. 188

\* Октаэдр — один из пяти правильных многогранников, образованный восьмью правильными треугольниками.

эти вершины, поэтому их можно отбросить, не нарушая распределения токов по остальным ребрам. Тогда сопротивление каркаса становится эквивалентным сопротивлению четырех параллельно соединенных ветвей, состоящих из двух ребер, общее сопротивление равно  $R/2$ .

Найдем сопротивление проволочного куба, сопротивление каждого ребра которого равно  $R$ , при подключении источника тока к противоположным вершинам  $A$  и  $B$  (рис. 189). Вершины куба 2, 4, 5 находятся на расстоянии одного ребра от точки «входа»  $A$ , поэтому их потенциалы равны, следовательно, их можно соединить между собой, не нарушая при этом распределения токов по ребрам куба. Аналогично можно соединить между собой вершины 3, 6, 8. Таким образом, точка  $A$  оказывается соединенной с «объединенной точкой 2, 4, 5» тремя параллельно соединенными ребрами, от «точки 2, 4, 5» до «точки 3, 6, 8» включено параллельно шесть ребер и далее до выхода, точки  $B$ , еще три параллельно соединенных ребра. Таким образом, получаем

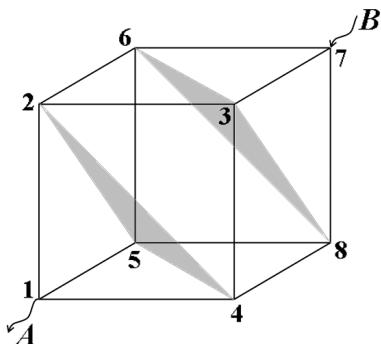


Рис. 189

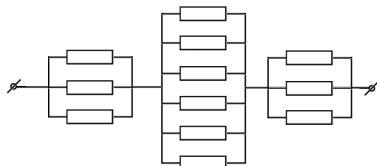


Рис. 190

эквивалентную схему рассматриваемого каркаса (рис. 190), общее сопротивление которой рассчитывается элементарно:

$$R_{об.} = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{5}{6}R.$$

## 9.8 Электрическое сопротивление среды при пространственно распределенных токах

Электрический ток может протекать не только «концентрированно», по проводам. Движение электрических зарядов может занимать определенную область проводника, при этом векторное поле плотности тока  $\vec{j}(x, y, z)$  не обязательно может являться однородным, а может представлять достаточно сложную структуру. Расчет электрического сопротивления между различными точками среды в этом случае принципиально отличается от рассмотренных выше. Особо отметим, что электрическое сопротивление среды зависит не только от ее свойств (удельного электрического сопротивления), но и от распределения токов в среде. Продемонстрируем это положение двумя примерами, заодно покажем и методы расчета сопротивления для пространственно распределенных токов.

**Пример 1.** Пространство между двумя концентрическими, хорошо проводящими сферами радиусами  $r_1$  и  $r_2$  заполнено слабо проводящим веществом с удельным электрическим сопротивлением  $\rho$  (рис.

191). Определим сопротивление среды между сферами.

Оговорки о проводимости сфер и среды между ними позволяют использовать следующие приближения:

- считать потенциалы сфер постоянными и пренебречь их сопротивлением;

- пренебречь объемными зарядами в пространстве между сферами, которые, в принципе, могут возникать при протекании электрического тока.

Для расчета сопротивления среды между сферами положим, что на внутренней сфере поддерживается постоянный электрический заряд  $+q$  (то есть сфера подключена к источнику тока, который компенсирует заряд, стекающий с него через проводящую среду). Электрическое поле в пространстве между сферами эквивалентно полю точечного заряда  $+q$ , помещенного в центр сфер. Следовательно, разность потенциалов между сферами может быть рассчитана по знакомой из электростатики формуле

$$\Delta\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1)$$

Так как система обладает сферической симметрией, то вектор плотности электрического тока  $\vec{j}$  во всех точках направлен радиально (вдоль прямой, проходящей через центр сфер).

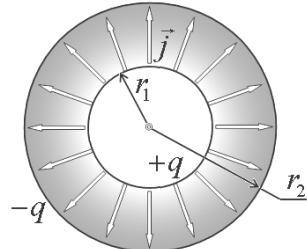


Рис. 191

### *Задание для самостоятельной работы.*

*1. Докажите, что модуль вектора плотности тока убывает обратно пропорционально квадрату расстояния до центра сфер.*

Непосредственно у поверхности внутренней сферы напряженность электрического поля равна

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}. \quad (2)$$

По закону Ома, плотность тока у поверхности сферы равна

$$j = \frac{1}{\rho} E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \rho r_1^2}. \quad (3)$$

Вектор плотности тока направлен радиально, по нормали к поверхности сферы, и постоянен по модулю. Следовательно, сила электрического тока, стекающего со сферы, равная потоку вектора плотности тока, равна произведению плотности тока на площадь сферы:  $I = jS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \rho r_1^2} \cdot 4\pi r_1^2 = \frac{q}{\epsilon_0 \rho}$ . Зная силу тока и разность потенциалов, по закону Ома определим электрическое сопротивление рассматриваемой системы:

$$R = \frac{\Delta\phi}{I} = \frac{\rho}{4\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{\rho(r_2 - r_1)}{4\pi r_2 r_1}. \quad (4)$$

Как и следовало ожидать, полученное значение сопротивления не зависит от «придуманного» заряда внутренней сферы.

Итак, суть использованного метода сводится к независимому расчету разности потенциалов и силы тока между сферами, при заданном значении

заряда сферы. Величина этого заряда сокращается при вычислении сопротивления.

Если расстояние между сферами  $\Delta r = (r_2 - r_1)$  значительно меньше их радиусов, то в знаменателе формулы (4) можно пренебречь различием в их радиусах; тогда знаменатель упрощается  $4\pi r_2 r_1 \approx 4\pi r^2 = S$ , то есть становится равным площади поверхности сферы. В этом случае полученная формула (4) превращается в банальную  $R = \rho \frac{l}{S}$ . Если радиус внешней сферы устремить к бесконечности ( $r_2 \rightarrow \infty$ ,  $\frac{1}{r_2} \rightarrow 0$ ), то рассматриваемая система превращается в заряженный шарик, помещенный в бесконечную проводящую среду. В этом случае сопротивление среды от шарика радиуса  $r$  до «бесконечности» оказывается равным

$$R = \frac{\rho}{4\pi r}. \quad (5)$$

**Пример 2.** Два одинаковых металлических шарика, радиусы которых равны  $r$ , находятся на большом расстоянии  $a$  ( $a \gg r$ ) друг от друга в слабо проводящей среде с удельным электрическим сопротивлением  $\rho$  (рис. 192). Вычислим электрическое сопротивление среды между шариками.

Для расчета электрического сопротивления мысленно сообщим шарикам электрические за-

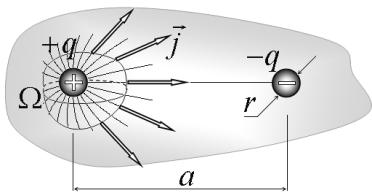


Рис. 192

ряды, равные по величине и противоположные по знаку ( $+q$ ,  $-q$ ). Так как расстояние между шариками значительно больше размеров шарика, то можно пренебречь влиянием заряда одного шарика на потенциал другого, тогда разность потенциалов между шариками определяется по формуле

$$\Delta\phi = \phi^+ - \phi^- = \frac{(+q)}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{(-q)}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad (6)$$

где  $\phi^+$ ,  $\phi^-$  – потенциалы положительно и отрицательно заряженных шариков, соответственно.

Распределение напряженности электрического поля (и соответствующей ему плотности тока) в данном случае достаточно сложно\*. Однако для вычисления силы тока, стекающего с одного из шариков, знание его не требуется. Мысленно окружим положительно заряженный шарик произвольной замкнутой поверхностью  $\Omega$ . Поток вектора плотности тока через эту поверхность и будет равен суммарной силе тока между шариками  $I = \Phi_j$ . По закону Ома, плотность тока пропорциональна напряженности электрического поля  $j = \frac{1}{\rho} \vec{E}$ ; так как поток пропорционален этому вектору, то такое же соотношение будет выполняться и для потоков векторов плотности тока и напряженности поля  $\Phi_j = \frac{1}{\rho} \Phi_{\vec{E}}$ . Для потока вектора напряженности электрического поля справедлива теорема Гаусса

\* Оно соответствует полю двух точечных зарядов, рассмотренному и нарисованному ранее.

$\Phi_{\tilde{E}} = \frac{q}{\epsilon_0}$ . Таким образом, сила тока между шариками выражается элементарно:

$$I = \Phi_j = \frac{1}{\rho} \Phi_{\tilde{E}} = \frac{q}{\rho \epsilon_0}. \quad (7)$$

Теперь легко вычислить искомое сопротивление:

$$R = \frac{\Delta\phi}{I} = \frac{\rho}{2\pi r}. \quad (8)$$

### *Задания для самостоятельной работы.*

*1. В каком месте при выводе формулы (8) мы учили, что ток идет между шариками?*

*2. Получите более точную формулу для сопротивления между шариками с учетом расстояния между ними (не полагая его бесконечно большим).*

Теперь внимание! Сравним два результата, формулы (5) и (8): сопротивления, рассчитанные по этим формулам, отличаются в два раза, хотя и в одном, и другом случае рассматривается стекание тока с металлического шарика в неограниченную среду. Причина такого существенного расхождения заключается в различной структуре поля электрических токов: если в первом случае ток растекается радиально, одинаково во все стороны, то во втором: ток преимущественно направлен в одну сторону, ко второму шарику. Тем самым мы наглядно продемонстрировали, что электрическое сопротивление зависит не только от свойств среды и размеров источника, но и от распределения токов.

## 9.9 Время установления стационарного тока

В окружающем мире ничто не происходит мгновенно – всякому стационарному процессу предшествует процесс установления, имеющий конечную длительность. Оценка характерных времен установления стационарного режима необходима для анализа применимости различных упрощающих моделей, в частности, стационарных. Процессы перехода в стационарный режим часто называют **переходными, или релаксационными**. В данном разделе мы обсудим некоторые факторы, влияющие и определяющие длительность таких процессов для электрического тока.

**Время распространения электрического поля** определяется скоростью света и размерами рассматриваемой электрической цепи. Мы уже отмечали, что при подключении проводящей цепи к источнику первоначально проходит процесс распространения электрического поля вдоль цепи. Само же электрическое поле распространяется вдоль проводов со скоростью, близкой к скорости света  $c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ .

Поэтому время установления электрического поля вдоль цепи длиной  $l$  оценивается как

$$\tau_1 \approx \frac{l}{c}. \quad (1)$$

Так, если электрическая осветительная лампочка находится на расстоянии 10 метров от выключателя, то после его замыкания электрическое

поле достигает лампочки через время  $\tau \approx 3 \cdot 10^{-8}$  с. Скорость света велика настолько, что если выключатель расположить на северном полюсе Земли, а лампочку на южном, то поле достигнет лампочку через время, меньшее 0,1 с (учитывая, что длина меридиана приблизительно равна 20 000 км =  $= 2 \cdot 10^7$  м).

Закон Ома описывает установившееся движение заряженных частиц. Прежде чем эти частицы начнут двигаться с постоянной скоростью (в среднем), они разгоняются. Время разгона заряженных частиц определяется массой частиц и тормозящей силой. Для оценки этого времени воспользуемся рассмотренной моделью движения электронов в металле, в рамках которой считается, что на движущиеся электроны действует тормозящая сила, пропорциональная скорости движения. В рамках этой модели уравнение второго закона Ньютона имеет вид (с сохранением всех прежних традиционных обозначений)

$$ma = eE - \beta v.$$

Движение, описываемое этим уравнением, не является ни равномерным, ни равноускоренным. Пусть в начальный момент времени скорость электрона равна нулю  $v_0 = 0$ , тогда он начинает двигаться с ускорением  $a_0 = \frac{eE}{m}$ , по мере роста скорости ускорение уменьшается, наконец, когда тормозящая сила уравновесит силу, действующую со стороны электрического поля, ускорение обратится в нуль и дальнейшее движение будет

проходить с постоянной установившейся скоростью  $\bar{v} = \frac{eE}{\beta}$  (рис. 193).

Для оценки характерного времени разгона можно принять, что скорость нарастает с ускорением  $a_0$  от нуля до установившегося значения, поэтому это время равно

$$\tau_2 = \frac{\bar{v}}{a_0} = \frac{m}{\beta}. \quad (2)$$

Заметим, что использованный метод получения оценок является традиционным для многих подобных задач.

Модельный параметр  $\beta$  выражается через характеристики проводника посредством формулы для удельного электрического сопротивления, полученной нами ранее:

$$\rho = \frac{2m}{e^2 n \tau} = \frac{\beta}{e^2 n}. \quad (3)$$

Таким образом, время разгона электронов в металле оценивается формулой

$$\tau_2 \approx \frac{m}{\beta} \approx \frac{m}{e^2 n \rho}. \quad (4)$$

Обратите внимание, что полученный результат не зависит от напряженности электрического поля, действующего на электрон. Так, для меди (концентрация свободных электронов для которой  $n \approx 8 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ , а  $\rho \approx 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ ) время разгона равно

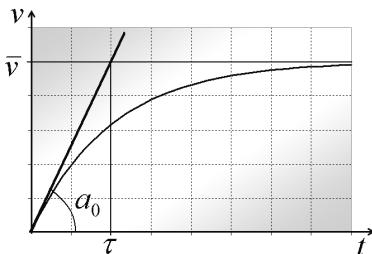


Рис. 193

$$\tau_2 \approx \frac{9 \cdot 10^{-31} \text{ кг}}{(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл})^2 \cdot 8 \cdot 10^{28} \text{ м}^3 \cdot 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}} \approx 3 \cdot 10^{-14} \text{ с.} \quad (5)$$

Полученное время настолько мало, что экспериментально его зарегистрировать невозможно, поэтому временем разгона электронов практически всегда можно пренебречь. Малость полученного времени во многом обусловлена малостью массы электрона.

Для наглядного представления о полученной длительности укажем, что за такой промежуток времени свет проходит расстояние порядка  $10^{-7}$  м, которое приблизительно равно толщине человеческого волоса.

Интересно отметить, что характерное время разгона по порядку величины совпадает со средним временем свободного движения электрона между столкновениями. Это время легко выразить из формулы (3):  $\tau = \frac{2m}{e^2 n \rho}$ .

### *Задания для самостоятельной работы.*

1. Оцените время разгона иона  $Na^+$  в 10% растворе поваренной соли в воде. Удельное электрическое сопротивление такого раствора приблизительно равно  $\rho \approx 8 \cdot 10^{-2}$  Ом · м.

2. Из формулы (4) следует, что для сверхпроводников (для которых  $\rho = 0$ ) время разгона электронов стремится к бесконечности. Объясните данный результат.

Изучив основные законы движения заряженных частиц в веществе, можно оценить примени-

мость электростатических моделей. Так, при изучении поведения веществ в электрическом поле мы говорили, что в проводниках очень быстро устанавливается равновесное распределение индуцированных зарядов на его поверхности. Диэлектриками мы назвали вещества, которые не проводят электрический ток. Однако все вещества в той или иной степени проводят электрический ток, поэтому граница между проводниками и диэлектриками условна. Сейчас мы можем дать количественный критерий возможности использования моделей идеальных проводников (веществ, электрическим сопротивлением которых можно пренебречь) и идеальных диэлектриков (веществ, проводимостью которых можно пренебречь). Для этого нам необходимо оценить время установления равновесного распределения индуцированных зарядов.

Для этого рассмотрим следующую систему: пространство между двумя параллельными, хорошо проводящими пластинами заполнено однородным веществом с удельным электрическим сопротивлением  $\rho$  (рис. 194), то есть представляет собой обычный плоский конденсатор. Пусть в начальный момент времени на пластинах равномерно распределены электрические заряды с поверхностными плотностями  $+\sigma$  и  $-\sigma$ . Оценим время, за которое конденсатор разрядится, то есть электрические заряды перетекут через слой вещества. Пренебрегая ди-

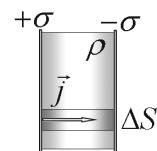


Рис. 194

лектрическими свойствами заполняющего вещества, напряженность однородного электрического поля внутри конденсатора может быть описана формулой  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ , тогда, по закону Ома, плотность электрического тока будет равна

$$j = \frac{1}{\rho} E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \rho}. \quad (6)$$

Выделим в конденсаторе небольшой цилиндр, основания которого лежат на пластинах и имеют площадь  $\Delta S$ . Сила электрического тока, протекающего по цилиндру, равна  $I = j \Delta S = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \rho} \Delta S$ . Этот ток равен скорости уменьшения электрического заряда  $q = \sigma \Delta S$  на основаниях цилиндра. Поэтому изменение поверхностной плотности заряда описывается уравнением

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = -I, \text{ или } \frac{\Delta \sigma}{\Delta t} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0 \rho}. \quad (7)$$

Как следует из этого уравнения, скорость уменьшения заряда пропорциональна поверхностной плотности заряда. Поэтому в начальный момент времени, когда плотность заряда  $\sigma_0$  максимальна, скорость уменьшения заряда также максимальна и равна  $j_0 = \left( \frac{\Delta \sigma}{\Delta t} \right)_{\sigma_0} = -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \rho}$ . Далее, по мере уменьшения зарядов на пластинах, скорость разрядки (равная плотности тока) будет уменьшаться (см.

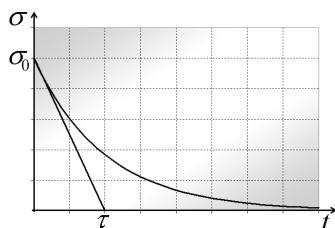


Рис. 195

рис. 195). Оценку характерного времени разрядки можно получить, полагая, что поверхностная плотность уменьшается от  $\sigma_0$  до нуля с постоянной скоростью разрядки  $j_0$ . Таким образом, получаем интересующее нас время

$$\tau_3 = \frac{\sigma_0}{j_0} = \epsilon_0 \rho. \quad (8)$$

Эта важная формула может быть получена и в более общем случае. Предположим, что внутри большого тела, изготовленного из однородного вещества с удельным электрическим сопротивлением  $\rho$ , возникла малая область, имеющая электрический заряд  $q$  (рис. 196). Уменьшение заряда этой области связано с его растеканием по всему объему тела. Окружим рассматриваемую заряженную область замкнутой поверхностью  $\Omega$ . Сила электрического тока, пересекающего эту поверхность, равна скорости уменьшения заряда внутри поверхности. Эта сила тока равна потоку вектора плотности тока через поверхность  $I = \Phi_{\vec{j}}$ . Так как, по закону Ома, плотность тока пропорциональна напряженности электрического поля  $\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$ , то потоки этих векторов связаны аналогичным соотношением  $\Phi_{\vec{j}} = \frac{1}{\rho} \Phi_{\vec{E}}$ .

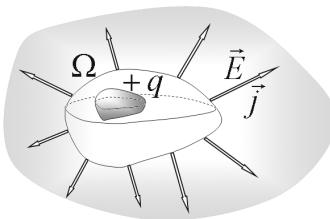


Рис. 196

Поток вектора напряженности электрического поля определяется

теоремой Гаусса  $\Phi_{\vec{E}} = \frac{q}{\epsilon_0}$ . Таким образом, величина заряда внутри рассматриваемой области подчиняется уравнению

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = -I = -\Phi_j = -\frac{1}{\rho} \Phi_{\vec{E}} = -\frac{q}{\rho \epsilon_0},$$

которое полностью совпадает с уравнением (7), поэтому время растекания заряда также оценивается формулой (8).

Полученная нами оценка времени установления зарядов на проводнике называется **максвелловским\* временем релаксации**. Мы уже указывали, что удельные электрические сопротивления веществ изменяются в очень широких пределах, соответственно изменяются и времена установления зарядов на них. Так, для хороших проводников, например меди, это время равно

$$\tau_3 = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{М}} \approx 1,5 \cdot 10^{-19} \text{ с.}$$

Это время чрезвычайно мало, поэтому такие вещества при описании электростатических явлений с высокой степенью точности можно считать идеальными проводниками.

В качестве противоположного примера (изолятора) возьмем широко известный полиэтилен, для которого  $\rho \approx 10^{15} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ , соответственно, максвелловское время релаксации  $\tau_3 \approx 10^{15} \text{ Ом} \cdot \text{м} \cdot 8,85 \times 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{М}} \approx 10^4 \text{ с} \approx 3 \text{ ч.}$  Поэтому если вам необходимо

---

\* В честь английского физика Дж. К. Максвелла, впервые получившего эту формулу в середине XIX века.

мо рассматривать процессы, протекающие в полиэтилене в течение нескольких минут, то с высокой степенью точности полиэтилен можно считать идеальным диэлектриком (изолятором). Для веществ, имеющих удельное сопротивление порядка  $10^{11} - 10^{12}$  Ом · м (сухая древесина, резина, некоторые виды стекол и пластмасс), максвелловское время составляет от десятых долей секунды до нескольких секунд.

Таким образом, относить вещество к проводникам или изоляторам можно только при учете характерных времен протекающих электрических процессов: если эти времена значительно меньше  $\tau_3 = \epsilon_0 \rho$ , то вещество можно отнести к диэлектрикам; если же времена процессов значительно больше времени релаксации, то вещество следует считать диэлектриком. Действительно, для быстрых процессов перемещением зарядов внутри вещества можно пренебречь.

Так, например, если внутри рассмотренного конденсатора находится деревянная дощечка ( $\rho \approx 10^{10}$  Ом · м,  $\tau_3 = 0,1$  с), то при включении его в цепь переменного тока с частотой порядка\*  $10^3$  с<sup>-1</sup> (тысяча колебаний в секунду, период колебания – одна тысячная секунды) древесину можно считать идеальными диэлектриком. Если этот конденсатор зарядить, то он разрядится через одну десятую долю секунды, то есть через этот промежуток вре-

---

\* Для современных технологий очень малая частота: компьютеры работают на частотах, превышающих 1 ГГц =  $10^9$  с<sup>-1</sup>.

мени древесину можно считать проводником (но, конечно, не идеальным).

Итак, мы рассмотрели некоторые процессы, определяющие времена установления тока и распределения зарядов на проводнике. Сразу оговоримся, что мы рассмотрели не все явления, влияющие на переходные процессы в электрических цепях. Еще одним из важнейших процессов подобного рода является возникновение магнитного поля при протекании электрического тока. С ним познакомимся позднее, при изучении свойств магнитного поля.

### *Страницы истории*



Рис. 197

Георг Симон Ом (1787-1854) – немецкий физик. Установил основной закон электрической цепи (закон Ома). Труды по акустике, кристаллооптике, член Баварской АН (1845), член-корреспондент Берлинской АН, иностранный почетный член Лондонского Королевского общества (1842) (рис. 197).

Георг Ом родился 16 марта 1787, в немецком городе Эрлангене. Скончался 6 июля 1854, в Мюнхене.

Отец Георга Симона – Иоганн Вольфганг Ом – был потомственным слесарем, много времени уделявшим вопросам самообразования. Он занимался по учебникам математики, посещал в Берлине школу технического рисования. В 1785 мастер Иоганн Ом возвратился в свой родной город Эрланген и получил разрешение на открытие собственного дела.

Иоганн Ом уделял воспитанию оставшихся на его руках детей огромное внимание. Чтобы обеспечить семью, он ежедневно с утра до вечера занимался выполнением кузнецких и слесарных заказов, а каждую свободную минуту он посвящал детям. Впоследствии оба сына слесаря Иоганна стали профессорами: Георг – физиком, а Мартин – математиком.

Школа, в которой начиналось обучение сыновей кузнеца Ома, была более чем скромной, хотя обучение было платным: ее владелец, он же единственный учитель, бывший чулочник. Он, хотя и не имел педагогического образования, обладал, кроме прекрасного почерка и умения быстро решать арифметические задачи, также некоторыми врожденными талантами преподавателя, любознательностью и живостью ума. Он подготовил Георга к поступлению в городскую гимназию.

В этом учебном заведении основное внимание уделялось изучению латыни и греческого языка. Что касается математики и особенно физики, то лишь занятия, которые проводил вместе с сыновьями дома Иоганн Ом, позволили им пройти в изучении этих наук.

В 1805 Георг Ом сам стал студентом Эрлангенского университета.

При той подготовке, которая у него была, учиться в университете Георгу Ому было легко. Может быть, и по этой причине он с азартом окунулся в спорт (стал, в частности, лучшим бильярдистом и конькобежцем в университете), увлекся танцами. Отца такая перемена в сыне не могла не обеспокоить. К тому же, обеспечивать семью ему становилось все труднее. Георг, проучившись в университете всего полтора года, покинул родительский дом, чтобы в швейцарском городке Готтштадте занять место преподавателя математики в частной школе.

Швейцария очаровала Георга, но однообразие жизни, отсутствие увлекательной перспективы работы и научного роста охлаждали первые юношеские восторги. Все чаще в его письмах прорывается тоска по дому и мечта продолжить уче-

бу в университете. Георг штудировал оригинальные труды крупнейших математиков. И эти занятия оказались весьма плодотворными. Когда Ом в 1811 все же вернулся в Эрланген, то уже в том же году сумел закончить университет, защитить диссертацию и получить ученую степень доктора философии. Более того, ему тут же была предложена в университете должность приват-доцента кафедры математики.

Это было прекрасно, но всего через три семестра Георг Ом вынужден был по материальным соображениям искать другое место. Эти поиски были мучительными и долгое время безуспешными, лишь в январе 1813 получил работу учителя математики и физики школы в Бамберге.

Методика преподавания в этой школе (как и во многих других) была такова, что Ом счел своим долгом направить в Генеральный комиссариат по преподаванию свои критические соображения. Итогом этого явилось то, что в 1816 школа в Бамберге была попросту закрыта, а Ома перевели в местную подготовительную школу, где и контингент учеников, и условия работы преподавателей были гораздо хуже.

Но даже из этого печального опыта Ом извлек некоторую пользу. Он написал обширную заметку о методике преподавания. Это был его первый опубликованный труд. Он вышел в 1817. Работа была встречена сдержанно, чтобы не сказать враждебно.

Ом старался энергично отстаивать свои идеи, посыпал письма с экземплярами статьи не только в университеты и школы, но и в министерства и даже королям (Вюртенберга и Пруссии). На многие письма ему вовсе не отвечают или же приходят уклончивые или даже отрицательные ответы. Тем ярче воспринималась «нечаянная радость». Пришло приглашение занять место учителя физики и математики в иезуитской коллегии Кельна. 37-летний Ом немедленно направился в Кельн.

Он пишет о большой коллекции физических приборов, о благожелательном отношении коллег, об удобном расписании его уроков (всю первую половину дня он свободен,

да и вся педагогическая нагрузка сравнительно невелика). Можно заняться наукой, и Ом пользуется этой драгоценной возможностью. Первым делом Георг проводит обследование всего парка приборов. Здесь обнаруживается, что многие приборы требуют ремонта, а то и замены. Но Ом не зря был прилежным учеником своего отца, он многое умеет. Тщательность работы, стремление как можно детальнее продумывать постановку экспериментов и готовить для них аппаратуру стало основой будущих успехов.

Школьникам наших дней, изучающим закон Ома, сегодня кажется, что закон Ома – один из простейших законов физики. Но попробуйте мысленно перенестись в двадцатые годы 19 века! Тогда электрические токи в проводниках были, правда, уже известны, уже существовали источники тока, в частности, батареи гальванических элементов, датский физик Ханс Кристиан Эрстед открыл даже, что электрический ток оказывает воздействие на стрелку компаса, но что собой представляет этот ток, как его измерять, от чего он зависит – об этом физики почти ничего не знали. Не было не только никаких измерительных приборов, но даже еще и необходимой терминологии.

Путь, по которому пошел Георг Ом, определялся ясным пониманием того, что первым делом нужно научиться количественно исследовать физическое явление. Для измерения тока уже раньше пытались использовать тот факт, что он вызывает нагревание проводника. Однако Г. Ом избрал для измерения тока не тепловое, а именно его магнитное действие, открытое Эрстедом. В приборе Ома ток, протекавший по проводнику, вызывал поворот магнитной стрелки, подвешенной на упругой расплощенной золотой проволочке. Экспериментатор, поворачивая микрометрический винт, к которому крепился верхний конец проволочки, добивался компенсации поворота, вызванного магнитным действием, и угол поворота этого винта и являлся мерилом тока.

Первоначально Ом использовал гальванические источники тока, но вскоре он обнаружил, что они создают ток, бы-

стро убывающий со временем. Это обстоятельство даже явилось причиной неточностей в первой из публикаций Ома. Он нашел выход из этого положения, перейдя к использованию открытого Т. И. Зеебеком явления – возникновения тока в цепи из двух различных проводов, если спаи между ними имеют различные температуры. Ом в качестве источника тока использовал термоэлемент из висмута и меди, один из спаев которых находился в кипящей воде, а другой – в тающем снеге.

Установка была смонтирована со всей возможной тщательностью и обеспечивала достаточную стабильность тока. Только после этого Ом устранил все первоначально имевшиеся источники неточностей и получил надежные результаты, касающиеся влияния на ток как геометрической формы проводников (их длины и сечения), так и их химического состава. В 1826 появилась обширная статья Георга Ома «Определение закона, по которому металлы проводят контактное электричество, вместе с наброском теории вольтаического аппарата мультиплликатора Швейгера» (так Ом называл применявшийся им гальванометр), в которой излагались основные результаты его исследований.

Публикация результатов опытов Ома в первое время не вызвала почти никаких отзывов. Было, однако, одно поучительное обстоятельство. Узнав о работах Ома, сам великий Майкл Фарадей заинтересовался ими и выразил сожаление, что из-за незнания немецкого языка не может изучить их обстоятельнее. Что же касается немецких коллег Ома, то, когда наконец был опубликован пространный отзыв одного из них, его автор счел, что исследования Ома «не внушают серьезного уважения».

Тем не менее, хлопоты Ома о предоставлении ему годичного освобождения от учебных занятий ради возможности посвятить себя полностью научным исследованиям были в 1826 удовлетворены (правда, с сохранением лишь половинного оклада).

Георг Ом переезжает в Берлин, и ровно через год выходит обширная, содержащая 245 страниц, монография «Теоретическое исследование электрических цепей». Ее автор вдохновлялся идеями теории теплопроводности французского математика и физика Ж. Б. Ж. Фурье, рассматривая электрический ток как течение некоего флюида, вызываемое перепадами «электроскопических сил», подобно тому, как поток тепла вызывается разностями температур. Ом руководствовался и аналогией между токами в проводниках и течением жидкостей по трубам.

Хотя Ом и пользовался терминологией, отличающейся от современной (хотя, например, введенная им в употребление величина «сопротивление» используется и поныне), но при надлежащем «переводе» нельзя не поразиться, как далеко продвинулся Ом в понимании законов электрического тока. Он понял даже, как описывать электрические цепи, в которых и проводники, и источники тока соединяются между собой как последовательно, так и параллельно.

Тем удивительнее, что современники не только не оценили должным образом его труда, но даже стали ожесточенно поносить его. Видимо, причиной этого были и господствовавшие тогда философские взгляды. Многие ученые придерживались того мнения, что истина должна постигаться умозрительным путем, что опыт не может (и даже не должен) занимать в науке лидирующего положения. Труды же Ома, по мнению его критиков – натурфилософов (в числе которых были и высокопоставленные), пахли не «высшей гармонией», а потом.

Понимая важность полученных им научных результатов, он тщетно хлопотал о предоставлении ему той должности, которой он по праву заслуживал. Хотя срок его командировки в Берлин истекал, он считал невозможным оставить этот научный центр. В конце концов, ему предложили работу в Военной школе Берлина, но почти с символической нагрузкой – 3 часа в неделю (и с соответствующей оплатой). Ом принял и такое предложение. Он продолжал

упорно работать. В 1829 в «Журнале физики и химии» вышла еще одна его работа. В ней фактически закладывались принципиальные основы работы электроизмерительных приборов. В частности, был предложен используемый и сегодня эталон электрического сопротивления.

На родине он все еще не находил признания. Ом решился на крайнюю меру: он написал прошение королю Баварии о предоставлении работы, но и это не возымело желаемого действия. Только в 1833, через 6 лет после выхода основного труда Ома, ему предложили место профессора физики во вновь организованной политехнической школе Нюрнберга. Ом немедленно перебрался в Нюрнберг. Вскоре его назначили инспектором по методике преподавания и поручили заведование кафедрой математики. В 1839 к этому добавились и обязанности ректора школы.

В 1841 работы Ома были переведены на английский язык, в 1847 – на итальянский, в 1860 – на французский. Хотя перевода трудов Ома на русский язык не было, но именно работавшие в России Э. Х. Ленц и Б. С. Якоби первыми привлекли внимание широкой научной общественности к трудам Ома. В 1842 произошло событие, которое явилось первым важным знаком признания научных заслуг Георга Ома: он явился вторым немецким ученым, которого Лондонское Королевское общество наградило золотой медалью и избрало своим членом. В Америке раньше других оценил важность работ Ома Дж. Генри. Наконец, через 20 лет ожидания, Георг Ом получил признание и на родине. В 1845 его избрали в Баварскую АН, а через четыре года пригласили в Мюнхен на должность экстраординарного профессора. Тогда же, по королевскому указу, он назначается хранителем государственного собрания физико-математических приборов и референтом по телеграфному ведомству при физико-техническом отделе Министерства государственной торговли. Одновременно он продолжает читать лекции по физике и по математике.

Шестидесятилетний профессор Георг Симон Ом не только справляется с этими многочисленными обязанностями, но и продолжает научные исследования и занимается конструированием и изготовлением демонстрационных приборов. Много внимания уделяет методике преподавания. В последние годы жизни начал работать над учебником физики, но успел закончить лишь первый том «Вклад в молекулярную физику».

Вся жизнь Георга Ома была отдана науке, и поэтому семья он не создал.

В 1852 исполнилось давнишнее желание Ома: он получил должность ординарного профессора. Но здоровье его уже пошатнулось. В 1854 он перенес серьезный сердечный приступ. 28 июня 1854 король Максимилиан издал указ об освобождении его от обязательного чтения лекций. Но до конца жизни Георга Ома оставалось всего 12 дней.

На здании кельнской коллегии установлена мемориальная доска. На ней надпись: «Георгу Симону Ому, известному физику, который в должности учителя старой кельнской гимназии открыл в 1826 г. основной закон электрического тока, 6 марта 1939 г., в день 150-летия со дня его рождения, установлена эта памятная доска».

В честь Г.С. Ома в 1881 была названа единица электрического сопротивления.

## **9.10 Условия существования постоянного электрического тока в цепи**

В предыдущих разделах, обсуждая проблемы описания постоянного электрического тока, мы стыдливо опускали вопросы о том, как создать этот самый постоянный электрический ток, что может служить источником постоянного электрического тока.

Для того чтобы выявить общие подходы к рассмотрению данных проблем, обратимся к аналогии\* описания электрического тока и движения жидкости по трубам.

Допустим, нам необходимо обеспечить постоянный ток жидкости (воды) по системе труб, например, для отопления дома (рис. 198). Решение проблемы почти очевидно: выше всей трубопроводной системы размещаем бак с водой, подключаем его к трубопроводам, и ... вода потекла. Сила тяжести, действующая на саму воду, создает необходимую разность давлений для преодоления сил сопротивления (точнее, вязкого трения). Средняя скорость течения воды однозначно определяется разностью давлений\*\*. Только вот проблема – вода-то из верхнего бака вытекает: во-первых, когда-нибудь закончится, во-вторых, давление падает! Первую проблему разрешим – поставим снизу такой же бак для сбора воды. Но те-

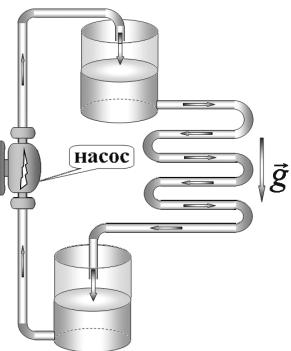


Рис. 198

\* Аналогии ничего не доказывают, но многое проясняют! Не стоит бояться такого «ненаучного» подхода: им пользовались и продолжают пользоваться многие ученые. Например, эту аналогию широко использовал Г.С. Ом.

\*\* В очередной раз можем высказать: распределение давлений на различных участках трубопроводной системы приходит в соответствие с постоянством расхода воды – где сопротивление больше, там больше и разность давлений!

перь ее надо переместить в верхний бак! Сама она туда не потечет: сила тяжести мешает! Что делать? Берем ведро, зачерпываем в нижнем баке, несем его наверх и заливаем в верхний! Или, учитывая достижения научно-технического прогресса, ставим насос, который перекачивает воду из нижнего бака в верхний. Принципиальной разницы нет – то ли мы самостоятельно, за счет съеденной котлеты, поднимаем воду; то ли платим (за счет несъеденной котлеты) за электроэнергию, потребленную насосом, при подъеме воды. Можно ли «заставить» поле тяжести Земли (или другое гравитационное поле) поднимать воду вверх? Сомнительно! Вспомним: поле тяжести потенциально – работа этого поля по перемещению тела по замкнутой траектории равна нулю. Если на одном участке оно совершает положительную работу (например, разгоняет воду при ее течении вниз), то на другом эту самую тяжесть надо преодолевать: за счет внешних сил, за счет внешней энергии. Можно, конечно, предложить к обсуждению идеальную ситуацию – жидкость идеальна\* (т.е. силы вязкости отсутствуют), под действием силы тяжести вода на спадающем участке траектории приобретает скорость, достаточную для того, чтобы по инерции подняться на прежний

---

\* Такие идеальные жидкости есть – жидкий гелий обладает сверхтекучестью (вязкость отсутствует, как отсутствует сопротивление в сверхпроводнике). Но никакой полезной работы такая жидкость совершить не может (возникнут силы сопротивления). И еще: жидкий гелий очень холодный, его температура примерно равна  $-270^{\circ}\text{C}$  – не очень согреешься!

уровень. Да, в этом случае вода будет непрерывно циркулировать по замкнутому контуру и без насоса. Но какая польза для нас от этого? Все эти рассуждения очевидны и привычны, но обобщим их.

Итак, для непрерывного движения жидкости, во-первых, необходимо иметь замкнутый контур, во-вторых, в этом контуре должно быть устройство, потребляющее энергию извне для компенсации потерь, неизбежно появляющихся при движении жидкости по замкнутому контуру.

Наконец, отметим еще одну важную особенность рассмотренной схемы. Движение жидкости во внешнем контуре (вне насоса) происходит под действием силы тяжести. Но суммарная работа силы тяжести при перемещении отдельной порции жидкости равна нулю: при движении во внешнем контуре эта работа положительна, а при подъеме она отрицательна. В итоге оказывается, что работа насоса полностью направлена на преодоление только сил сопротивления.

Обсудим теперь с такой же точки зрения, при каких общих условиях можно создать устройство, в котором длительное время может существовать электрический ток.

Первое обязательное условие – **наличие проводников**, так как зарженные частицы могут двигаться только в проводниках.

Допустим, мы хотим заставить электрический ток непрерывно и постоянно двигаться по проводнику *AB* (рис. 199). Подсоединим к данному про-

воднику большое проводящее тело и сообщим ему некий положительный заряд. С другой стороны проводника  $AB$  подсоединим еще одно большое тело, чтобы заряду было куда стекать. Еще лучше этому второму телу сообщить отрицательный заряд. В этом случае и электрическое поле в проводнике будет сильнее, и суммарный заряд системы окажется равным нулю. Эти два заряда создадут в рассматриваемом проводнике электрическое поле, которое заставит двигаться заряды по проводнику, преодолевая его электрическое сопротивление. Задача решена? Нет, заряды перетекают, тем самым на концах проводника они уменьшаются, уменьшается напряженность поля в проводнике, и, самое главное, что же будет перетекать дальше? Для постоянства тока необходимо перенести положительные заряды с отрицательного полюса на положительный или заставить их самостоятельно переместиться в этом направлении. Следовательно, для поддержания электрического тока в проводнике необходимо постоянно переносить заряды с одной стороны проводника на другую.

**Иными словами, необходимо создать замкнутый проводящий контур, по которому может циркулировать постоянный ток. Обязательность наличия замкнутого контура также обосновывается**

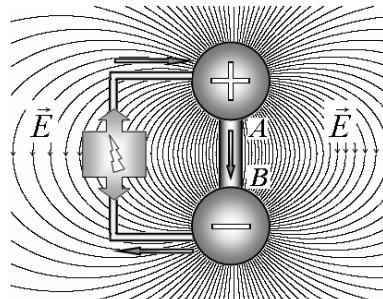


Рис. 199

законом сохранения электрического заряда; также, как для постоянной циркуляции воды, желательно ее не терять напрасно.

Но заряженные большие тела создают поле не только в проводнике *AB*, но и в окружающем пространстве. И это поле обязательно будет препятствовать переносу заряда – переносимый положительный заряд необходимо «оторвать» от отрицательно заряженного тела и «втолкнуть» в положительно заряженное. И то и другое требует определенных усилий, определенных затрат энергии. Следовательно, необходимо устройство, заставляющее заряды двигаться против сил электрического поля, совершающее работу против сил электрического поля. Сразу сообразим, что указанная работа не может быть совершена электростатическим полем, так как электростатическое поле потенциально – работа сил поля по перемещению зарядов по любому замкнутому контуру равна нулю. Поэтому попытки придумать такое расположение зарядов, которое создает электростатическое поле, обеспечивающее существование постоянного тока, обречены на неудачу. Следовательно, упомянутое устройство для переноса зарядов против сил электростатического поля (назовем его источником или генератором тока) должно переносить заряды с помощью любых сил, кроме электростатических. Сторонние силы не должны быть потенциальными; так, работа этих сил по замкнутому контуру должна быть положительна, то есть отлична от нуля.

Можно также говорить, что источник тока должен разделять электрические заряды, перенося заряды одного знака на один полюс источника, а заряды другого знака – на второй. Но при появлении зарядов на полюсах источника внутри него также создается электрическое поле; чтобы продолжить разделение зарядов, необходимо совершать работу по преодолению сил этого поля.

**Силы, совершающие работу по перенесению электрических зарядов против сил электростатического поля, называются *сторонними силами*.** Природа сторонних сил может быть самой различной: эти силы могут возникать в результате протекания химических реакций (в гальванических элементах и аккумуляторах), они могут возникать при изменении магнитного поля (в электромагнитных генераторах), в фотоэлементах разделение зарядов происходит под действием света и т.д.

Ситуация аналогична рассмотренной ранее: неважно, как вода перетекает из нижнего бака в верхний – важно, чтобы этот перенос осуществлялся то ли электрическим насосом, то ли ветряной мельницей, то ли ведром в ваших руках.

## **9.11 Электродвижущая сила (ЭДС) и внутреннее сопротивление источника**

Мы пришли к выводу, что для поддержания постоянного тока в замкнутой цепи в нее необходимо включить источник тока. Подчеркнем, что задача источника заключается не в том, чтобы поставлять

заряды в электрическую цепь (в проводниках этих зарядов достаточно), а в том, чтобы заставлять их двигаться, совершать работу по перемещению зарядов против сил электрического поля. Основной характеристики источника является **электродвижущая сила**<sup>\*</sup> (ЭДС) – работа, совершаемая сторонними силами по перемещению единичного положительного заряда:

$$\varepsilon = \frac{A_{cm.}}{q}. \quad (1)$$

Единицей измерения ЭДС в системе единиц СИ является вольт. ЭДС источника равна 1 В, если он совершает работу 1 Дж при перемещении заряда 1 Кл:

$$[1 \text{ В}] = \frac{[1 \text{ Дж}]}{[1 \text{ Кл}]}.$$

Для обозначения источников тока на электрических схемах используется специальное обозначение (рис. 200).

Электростатическое поле совершает положительную работу по перемещению положительного заряда в направлении уменьшения потенциала поля. Источник тока проводит разделение электрических зарядов: на одном полюсе накапливаются положительные заряды, на

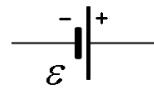


Рис. 200

---

\* Название этой физической величины неудачно, так как электродвижущая сила является работой, а не силой в обычном механическом понимании. Но этот термин настолько устоялся, что изменять его не «в наших силах». К слову, сила тока тоже не является механической силой! Не говоря уж о таких понятиях, как «сила духа», «сила воли», «божественная сила» и т.д.

другом – отрицательные. Напряженность электрического поля в источнике направлена от положительного полюса к отрицательному, поэтому работа электрического поля по перемещению положительного заряда будет положительной при его движения от «плюса» к «минусу». Работа сторонних сил, наоборот, положительна в том случае, если положительные заряды перемещаются от отрицательного полюса к положительному, то есть от «минуса» к «плюсу».

В этом принципиальное отличие понятий разности потенциалов и ЭДС, о котором всегда необходимо помнить.

Таким образом, электродвижущую силу источника можно считать алгебраической величиной, знак которой («плюс» или «минус») зависит от направления тока.

В схеме, показанной на рис. 201, вне источника (во внешней цепи) ток течет\* от «плюса» источника к «минусу», внутри источника от «минуса» к «плюсу». В этом случае как сторонние силы источника, так и электростатические силы во внешней цепи совершают положительную работу.

Если на некотором участке электрической цепи, помимо электростатиче-

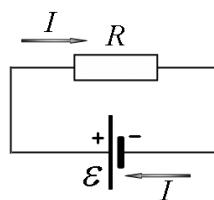


Рис. 201

\* Еще раз напомним: за направление движения электрического тока принято направление движения положительных зарядов.

ских, действуют и сторонние силы, то над перемещением зарядов «работают» как электростатические, так и сторонние силы. Суммарная работа электростатических и сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда называется *электрическим напряжением*\* на участке цепи:

$$U = \frac{A_{\text{эл.}} + A_{\text{стн.}}}{q} = \varphi_0 - \varphi_1 + \varepsilon. \quad (2)$$

В том случае, когда сторонние силы отсутствуют, электрическое напряжение совпадает с разностью потенциалов электрического поля.

Поясним определение напряжения и знака ЭДС на простом примере. Пусть на участке цепи, по которому протекает электрический ток, имеются источник сторонних сил и резистор (рис. 202). Для определенности будем считать, что  $\varphi_0 > \varphi_1$ , то есть электрический ток направлен от точки 1 к точке 2. При подключении источника, как показано на рис. 202 а, сторонние силы источника совершают положительную работу (жирная стрелка указывает направления действия сторонних сил), поэтому

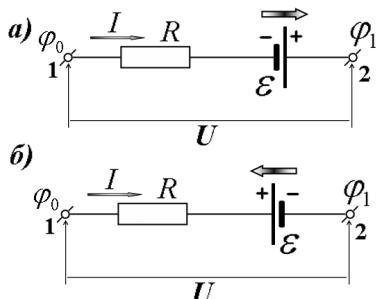


Рис. 202

\* Наконец-то, мы добрались до различия между разностью потенциалов и напряжением: первое описывает работу электростатического поля, второе – работу всех сил, в том числе и электростатических.

соотношение (2) в этом случае может быть записано в виде

$$U = \varphi_0 - \varphi_1 + |\varepsilon|.$$

При обратном включении источника (рис. 202 б) внутри него заряды движутся против сторонних сил, поэтому работа последних отрицательна. Фактически, силы внешнего электрического поля преодолевают сторонние силы. Следовательно, в этом случае рассматриваемое соотношение (2) имеет вид

$$U = \varphi_0 - \varphi_1 - |\varepsilon|.$$

Для протекания электрического тока по участку цепи, обладающему электрическим сопротивлением, необходимо совершать работу по преодолению сил сопротивления. Для единичного положительного заряда эта работа, согласно закону Ома, равна произведению  $IR = U$ , которое, естественно, совпадает с напряжением на данном участке.

Зарженные частицы (как электроны, так и ионы) внутри источника движутся в некоторой окружающей среде, поэтому со стороны среды на них также действуют тормозящие силы, которые также необходимо преодолевать. Зарженные частицы преодолевают силы сопротивления благодаря действию сторонних сил (если ток в источнике направлен от «плюса» к «минусу») либо благодаря электростатическим силам (если ток направлен от «минуса» к «плюсу»). Очевидно, что работа по преодолению этих сил не зависит от направления движения, так как силы сопротивления всегда направлены в сторону, противоположную скорости

движения частиц\*. Так как силы сопротивления пропорциональны средней скорости движения частиц, то работа по их преодолению пропорциональна скорости движения, следовательно, силе тока. Таким образом, мы можем ввести еще характеристику источника – его **внутреннее сопротивление**  $r$ , аналогичное обычному электрическому сопротивлению. Работа по преодолению сил сопротивления при перемещении единичного положительного заряда между полюсами источника равна  $\frac{A}{q} = Ir$ .

## 9.12 Закон Ома для полной цепи

Рассмотрим подробнее процессы, протекающие в замкнутой цепи электрического тока, содержащей источник (рис. 203).

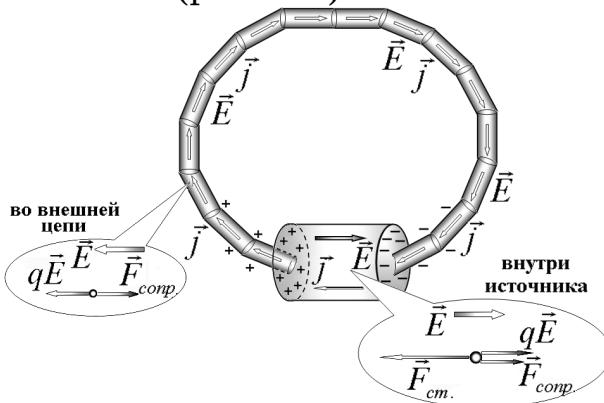


Рис. 203

---

\* Аналогично, при движении жидкости внутри насоса на нее также действуют силы вязкого трения, величина которых не зависит от направления движения.

Внутри источника, под действием сторонних сил, начинается разделение зарядов: положительно заряженные частицы движутся к положительному полюсу источника, а отрицательные частицы – к отрицательному. Разделенные заряды создают внутри источника электрическое поле  $\vec{E}$ , которое направлено от «плюса» к «минусу» и препятствует дальнейшему движению зарядов. Кроме того, на движущиеся заряженные частицы действуют силы сопротивления среды  $F_{\text{сопр.}}$ . Чтобы заряженные частицы продолжали двигаться, к ним должна быть приложена сторонняя сила  $F_{\text{см.}}$ . При постоянном токе (в установившемся режиме) соотношение между действующими силами очевидно: сумма сил, действующих на частицу, должна быть равна нулю, или

$$F_{\text{см.}} = qE + F_{\text{сопр.}}$$

Работа сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда, по определению, равна ЭДС источника  $\varepsilon$ . Работа сил сопротивления отрицательна и по модулю равна произведению силы тока на внутреннее сопротивление источника  $Ir$ . Работа сил электрического поля при движении зарядов внутри источника также отрицательна.

При подключении внешней цепи внутри проводника возникает электрическое поле. Механизм создания этого поля достаточно сложен. Несколько упрощенно можно сказать, что на поверхности проводника появляются заряды, распределение которых таково, что они создают внутри проводни-

ка такое электрическое поле\*, которое поддерживает постоянный по всей цепи электрический ток.

Подобно тому как в электростатике индуцированные заряды и электрическое поле приходят в равновесие, при котором прекращается движение зарядов, в случае постоянного тока наступает равновесие несколько иного вида – постоянство электрического тока. Если в каком-то месте электрический ток превышает равновесное значение, то происходит накопление заряда, которое уменьшает электрический ток, и наоборот, при недостатке зарядов в некоторой области цепи увеличивающийся электрический ток компенсирует недостаток заряда.

Во внешней цепи зарженные частицы движутся под действием силы со стороны созданного электрического поля, которая при постоянном токе равна силе сопротивления

$$qE = F_{\text{сопр.}}$$

Во внешней цепи работа электрического поля по перемещению зарядов положительна (и для единичного заряда равна разности потенциалов на концах внешней цепи), а работа сил сопротивления по-прежнему отрицательна и равна по модулю произведению силы тока на сопротивление цепи  $IR$ .

Проследим за движением отдельной зарженной частицы по всему контуру: совершив полный

---

\* Мы не утверждаем, что напряженность этого поля равна напряженности поля внутри источника; более того, электрические поля могут быть различны в различных точках как внутри источника, так и во внешней цепи.

обход, эта частица возвращается в исходное состояние. Следовательно, ее энергия также принимает начальное значение. Поэтому полная работа внешних сил при движении частицы по замкнутому контуру равна нулю. Во время движения на рассматриваемую частицу действовали силы сопротивления, сторонние силы и силы электростатического поля:

$$A_{\text{ст.}} + A_{\text{сопр.}} + A_{\text{эл.}} = 0.$$

Но электростатическое поле всегда потенциально, поэтому работа этих сил по контуру равна нулю – положительная работа во внешней цепи равна по модулю отрицательной работе внутри источника  $A_{\text{эл.}} = 0$ . Поэтому при движении по контуру работа сторонних сил равна по модулю работе сил сопротивления  $A_{\text{ст.}} + A_{\text{сопр.}} = 0$ . Для единичного заряда это утверждение выражается уравнением

$$\varepsilon = IR + Ir,$$

из которого следует, что сила тока в цепи рассчитывается по формуле

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}. \quad (1)$$

**Сила тока в замкнутом контуре цепи равна отношению ЭДС контура к полному сопротивлению контура.** Данное утверждение называется законом Г.С. Ома для полной цепи. Фактически данный закон можно рассматривать как закон сохранения энергии для системы движущихся зарядов. Действительно, энергия, сообщенная заряженной частице, равна работе по преодолению сил сопротивления. Если все потери энергии частицы обу-

словлены сопротивлением цепи, то указанная работа равна количеству теплоты, выделившейся во внешней цепи и внутри источника. Если в цепи имеются приборы, преобразующие энергию электрического тока в другие формы (механическую, световую, химическую и т.д.), то работа источника состоит из суммы энергии, потребляемой этими приборами, и количества теплоты, выделившегося в цепи – иными словами, закон сохранения энергии не знает исключений и в данных явлениях.

### *Страницы истории*



Рис. 204

ГАЛЬВАНИ Луиджи (Galvani, Luigi) (1737–1798), итальянский анатом и физиолог, основоположник электрофизиологии (рис. 204). Родился 9 сентября 1737 в Болонье. В 1759 окончил Болонский университет, в 1762 получил степень доктора медицины. Преподавал медицину в Болонском университете, откуда незадолго до смерти был уволен за то, что отказался

принести присягу Цизальпинской республике, основанной в 1797 Наполеоном Бонапартом. Первые работы Гальвани были посвящены сравнительной анатомии. В 1771 он начал опыты по изучению мышечного сокращения и вскоре открыл феномен сокращения мышц препарированной лягушки под действием электрического тока. Это открытие положило начало его исследованиям по динамическому электричеству, или гальванизму (термин, введенный позже в память о первых опытах Гальвани). В своих экспериментах Гальвани обнаружил, что мышцы сокращаются и в отсутствие внешнего источника тока, при простом наложении на них двух разных металлов, соединенных проводником. Гальвани объяснил это явление существованием «животно-

го электричества», благодаря которому мышцы заряжаются, подобно лейденской банке. Результаты своих наблюдений и теорию животного электричества Гальвани изложил в 1791 в работе «Трактат о силах электричества при мышечном движении». Правильное объяснение его опытам дал А. Вольта, что в дальнейшем способствовало изобретению нового источника тока – гальванического элемента. Исследования Гальвани имели большое значение для разработки электрофизиологических методов. Умер Гальвани в Болонье 4 декабря 1798.



Рис. 205

ВОЛЬТА, АЛЕССАНДРО (Alessandro Giuseppe Antonio Anastasio Volta) (1745–1827), итальянский физик и физиолог (рис. 204). Родился 18 февраля 1745 в Комо близ Милана. Образование получил в школе ордена иезуитов в Комо, где обнаружил способности к риторике и проявил интерес к естественным наукам. В 24 года опубликовал первую научную работу, она была посвящена теории лейденской бани.

В 1774–1779 преподавал физику в гимназии в Комо. К этому времени относятся его исследования по химии и изготовление ряда физических и химических приборов. Он изучал горючие газы, открыл «болотный газ» – метан, сконструировал водородную лампу и эвдиометр. Но настоящую известность Вольте принесло изобретение электрофора (прибора, наглядно иллюстрирующего электризацию тел с помощью индукции), что позволило ему в 1779 занять место профессора в университете Павии. В 1784 он создал чувствительный электроскоп с соломинками, изобрел плоский конденсатор, обнаружил проводимость пламени. В 1815 стал ректором философского факультета Падуанского университета, в 1819 ушел в отставку.

В 1792, заинтересовавшись опытами Л. Гальвани с «животным» электричеством, Вольта решил проверить их ре-

зультаты и очень скоро пришел к выводу, что наблюдаемый эффект имеет не физиологическую, а физическую природу. Он установил важность использования в качестве электродов разнородных металлов и поставил опыты с разными парами электродов. Мышца лягушки была лишь пассивным, хотя и очень чувствительным электрометром, а активными звеньями являлись металлы, от контакта которых и происходила их взаимная электризация (возникала контактная разность потенциалов). Пытаясь повысить контактное напряжение, Вольта строил цепи из разных металлов, что привело его к изобретению, произведшему революцию в науке об электричестве: в 1800 он сконструировал первый источник постоянного тока – «вольтов столб». Устройство состояло из 20 пар медных и цинковых кружочков, которые были разделены суконными прокладками, смоченными соленой водой. В 1801 Вольта был приглашен во Францию для демонстрации «столба», был награжден золотой медалью и получил титул графа. Именем Вольты названа единица разности потенциалов и напряжения.

Умер Вольта в Комо 5 марта 1827 в один час с умершим в Париже знаменитым Лапласом.

### ***Гальвани – «Воскреситель мертвых»***

Трактат Гальвани «Об электрических силах в мускуле» вышел в 1791 году. Буря страстей, поднятая им, по свидетельству современников, была сравнима с политической бурей, вызванной поднимавшейся Французской революцией.

Опыты Гальвани, в силу их интригующей необычности, сразу же завоевали громадную популярность – бесконечное множество физиков, химиков, философов, врачей стали одно время проявлять повышенный интерес к лягушкам, в особенности к их лапкам.

Этот «интерес» попал даже в старую техническую энциклопедию.

«В течение целых тысячелетий холоднокровное племя лягушек беззаботно совершало свой жизненный путь, как

наметила его природа, зная одного только врага, господина аиста, да еще, пожалуй, терпя урон от гурманов, которые требовали для себя жертвы в виде пары лягушачьих лапок со всего несметного рода. Но в исходе позапрошлого столетия наступил злосчастный век для лягушек. Злой рок воцарился над ними, и вряд ли когда-либо лягушки от него освободятся. Затравлены, схвачены, замучены, скальпированы, убиты, обезглавлены – но и со смертью не пришел конец их бедствиям. Лягушка стала физическим прибором, отдала себя в распоряжение науки. Срежут ей голову, сдерут с нее кожу, расправят мускулы и проткнут спину проволокой, а она все же не смеет уйти к месту вечного упокоения; повинуясь приказанию физиков или физиологов, нервы ее придут в раздражение, и мускулы будут сокращаться, пока не высохнет последняя капля «живой воды». И все это лежит на совести у Алоизо Луиджи Гальвани».

Не только лягушачья «живая вода» подвергалась действию электричества. Итальянец Запотти добился стрекотания мертвого кузнеца. Сам Гальвани заставлял дергаться конечности свежезабитых овец и кроликов, а французский хирург Ларрей производил аналогичные опыты с только что ампутированной человеческой ногой (рис. 206).

Но особенно большие надежды возникли при исследовании нервной системы умерших людей. Вообще, мысли о бессмертии, о восстановлении жизни умерших занимали большое место в попытках приложить электроды к трупу. Первые исследования, проведенные французами Дюпюитреном, Нистеном и Гильотеном, были, правда, не очень обнадеживающими. Зато племянник Гальвани – Жан Альдини – добился некоторого успеха. В 1803 году он приложил



Рис. 206

электроды к телу повешенного. Губы трупа и его веки стали подергиваться.

Однако наибольший резонанс среди широкой публики вызвали эксперименты доктора Ура из Глазго. Он производил опыты с повешенными преступниками. Первый его успех – воспроизведение у трупа дыхательных движений. Но если у трупа можно восстановить дыхание, то, может быть, можно восстановить и другие функции организма?

Однажды доктор Ура приложил один электрод к пятке трупа, другой – к ресничному нерву. Лицо повешенного внезапно ожило, он приоткрыл рот, глаза его стали оглядывать окружающих. Ужас сковал присутствующих, многие упали в обморок, другие не могли в течение нескольких дней прийти в себя...

Мечты о бессмертии! Сколько разбитых надежд породили вы во все времена! И одно из самых сильных разочарований – провал всех надежд на электрический ток, с помощью которого якобы можно оживлять трупы.

Рассказывая о Гальвани, особо отметим тот факт, что его открытие было сделано как раз вовремя. Ведь за 100 с лишним лет до Гальвани, в 1678 году, физиолог Шваммердам показывал великому герцогу Тосканскому точно такой же, как у Гальвани, опыт с лягушкой, подвешенной на серебряной нити. Видимо, то открытие сделано было слишком рано. Шваммердама успели забыть. Гальвани ничего и никогда о нем не слышал.

За много лет до Гальвани, в 1752 году, шведский философ Иоган Георг Зульцер опубликовал следующее наблюдение: «Если два куска металла, один – оловянный, другой – серебряный, соединить... и если приложить их к языку, то последний будет ощущать некоторый вкус, довольно похожий на вкус железного купороса, в то время как каждый кусок металла в отдельности не дает и следа этого вкуса». Это видоизмененный опыт Гальвани: вместо лягушки индикатором электричества является язык. Более того, в 1756 году Марко Кальдани наблюдал и описал содрогание лапки

лягушки вблизи электрической машины, но... не придал этому никакого значения.

### ***Почему вольтов столб назвали гальваническим элементом?***

В 1801 году в Париже произошло яркое событие, неоднократно описанное историками науки: в присутствии Наполеона Бонапарта состоялось представление работы «Искусственный электрический орган, имитирующий натуральный электрический орган угря или ската» с демонстрацией модели этого органа. Демонстрация проводилась с подчеркнутой помпезностью и при большом стечении народа.

Наполеон щедро наградил автора: в честь ученого была выбита медаль и учреждена премия в 80 000 экю. Все ведущие научные общества того времени, включая Петербургскую академию наук, изъявили желание видеть его в своих рядах, а лучшие университеты Европы были готовы предоставить ему свои кафедры. Позднее он получил титул графа и был назначен членом сената Королевства Италия. Имя этого человека хорошо известно и сегодня, а различные варианты искусственных электрических органов, имитирующих натуральные, выпускаются в миллиардных количествах. Речь идет об Алессандро Вольте и его изобретении – вольтовом столбе, прообразе всех современных батарей и аккумуляторов.

Вольтов столб предположительно давал напряжение 40-50 вольт и ток менее одного ампера. Что же именно должен был показать Вольта, чтобы поразить всеобщее воображение? Представьте, что не Вольта, а вы стоите перед Наполеоном с полным ящиком лучших батареек и хотите продемонстрировать с их помощью что-нибудь эффектное. Лампочек, моторчиков, плееров и прочего нет еще даже в идее – как Вольта мог использовать свои батарейки?

Электрофорная машина к тому времени давно известна, лейденская банка изобретена более чем за 50 лет до этого. Все связанное с искрами, треском, светящимися наэлек-

тризованными шарами, одновременным подпрыгиванием от электрического удара большой группы людей уже не раз демонстрировалось и не вызвало даже малой доли таких почестей и наград. Почему же триумф выпал на долю Вольтова столба?

По-видимому, секрет успеха заключался в том, что Вольта повторил перед Наполеоном опыты по оживлению отрезанных членов с помощью малых количеств электричества. «Я делал их не только над лягушками, но и над угрями и над другими рыбами, над ящерицами, саламандрами, змеями и, что важнее, над мелкими теплокровными животными, именно над мышами и птицами», – писал ученый в 1792 году, в самом начале исследований, приведших в итоге к великому изобретению. Представьте себе разнообразные отрезанные части различных животных, лежащие совершенно недвижно, как и подобает отрезанным членам, из коих вытекла жизненная сила. Малейшее прикосновение вольтова столба – и плоть оживает, трепещет, сокращается и содрогается. Были ли в истории науки опыты, более потрясающие воображение?

Но все знают, что идея этих опытов принадлежит отнюдь не Вольте, а Луиджи Гальвани. Почему же он не был осыпан почестями в первую очередь или, по меньшей мере, рядом с Вольтой? Причина отнюдь не в том, что Гальвани к тому времени уже скончался, – будь он жив, наполеоновская награда, скорее всего, досталась бы Вольте. Да и не в Наполеоне дело – в последующие годы не он один возвышал Вольту и принижал Гальвани. И на то были свои резоны.

Из учебников физики о Луиджи Гальвани известно примерно следующее: итальянский врач, анатом и физиолог конца XVIII века; на явление, получившее название «опыт Гальвани», он наткнулся случайно и не смог правильно объяснить, поскольку исходил из ложной гипотезы о существовании некоего животного электричества. А вот разобраться в явлении и создать полезное устройство на его основе смог физик Александро Вольта.

Казалось бы, картина ясная: анатом резал лягушек (а что еще умеет делать анатом?), случайно наткнулся на то, что лапка дергается под действием тока, и ничего не понял: не физик, куда ему понимать суть вещей. Вольта, физик, все тщательно повторил, все правильно объяснил и даже подтвердил практикой. А то, что анатом и врач то ли из упрямства, то ли по недомыслию продолжал настаивать на своем, окончательно плохо его характеризует.

Непонятно, почему человечество оказалось столь благосклонным к этому врачу, что присвоило его имя и токам проводимости, и целой области физики, и прибору для измерения тока, и важнейшему технологическому процессу электрохимического нанесения металлических покрытий, и даже изобретенным Вольтой источникам тока. Ни с одним из самых известных физиков: ни с Ньютоном, ни с Декартом, ни с Лейбницем, ни с Гюйгенсом, ни с любимцем классической физики Джеймсом Клерком Максвеллом – не связано такое количество терминов.

Попробуем разобраться, в чем тут дело. Гальвани, прежде всего, физиолог, но в конце XVIII века это слово воспринималось буквально: физика – природа, логия – ее изучение, физиолог – изучатель природы, или, по-русски, естествоиспытатель. К началу описываемых событий в лаборатории Гальвани находились электрофорная машина, электрофор конструкции Вольты, электроскоп, сделанный в соответствии с указаниями Вольты, лейденская банка, громоотвод, – то есть весь арсенал средств для исследования электричества, которым располагала физика того времени (рис. 207).

Что касается занятий врачеванием и анатомией, то медицина была весьма распространенным средством суще-

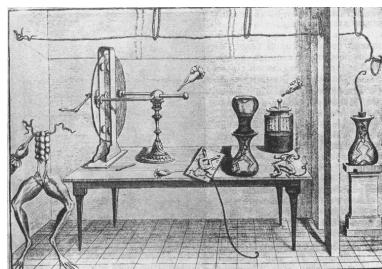


Рис. 207

ствования естествоиспытателей того времени. Из множества примеров можно привести основателя гидродинамики Даниила Бернулли, который писал свои знаменитые уравнения для объяснения системы кровообращения и был в один из периодов своей жизни профессором анатомии Петербургской академии наук. Кроме того, изучение электричества было теснейшим образом связано с медициной. Начало этим исследованиям положил врач королевы Елизаветы – Гильберт, от которого и пошла вся янтарная терминология и который в 1600 году издал большой трактат по магнетизму и электричеству.

Теперь о случайности открытия. С указания на случай начинает свой «Трактат о силах электричества при мышечном движении» сам Гальвани: «Итак, я считал, что сделаю нечто ценное, если я кратко и точно изложу историю моих открытий в таком порядке и расположении, в каком мне их доставили отчасти случай и счастливая судьба, отчасти трудолюбие и прилежание...»

Согласно мнению большинства историков науки, случай явился в лице молодой жены Гальвани – Лючии Галеацци, дочери учителя Гальвани, которая крутила ручку электрофорной машины, в то время как ассистент препарировал лягушку. Лапка билась под скальпелем, и наблюдательная женщина заметила, что судороги случаются тогда, когда между шарами машины проскакивает искра. Она обратила внимание мужа на это совпадение, и революция в физике началась.

Описываемые события произошли в 1780 году, а трактат вышел только в 1791-м, и за эти 11 лет было поставлено огромное число экспериментов, в ходе которых ярко проявился удивительнейший талант Гальвани обращать внимание на существенные детали и выносить на свет сокрытое. Прежде всего, Гальвани установил, что для устойчивой повторяемости явления необходимо, чтобы экспериментатор касался либо металлических заклепок скальпеля, либо его металлического острия, «открывая доступ электрическому

флюиду». Затем из опыта был исключен экспериментатор со скальпелем – его заменили на очень длинную проволоку, висящую на шелковых нитях и соединенную с нервом. Лапку при этом электрически соединяли с землей. В меньшей степени, но все-таки проявлялся эффект и в том случае, когда проводник присоединяли только к нерву или только к мышце. Гальвани провел один из первых в истории человечества экспериментов по электромагнитной связи. При этом требовались определенные анатомические умения, чтобы обеспечить полную электрическую изоляцию нерва от мышц. Дальность связи была невелика, но, во всяком случае, удалось получить устойчивые сокращения лапок при расположении электрофорной машины в соседней комнате. (Кстати говоря, более чем через сто лет, в 1923 году, лягушачью лапку применяли в качестве приемника в первых опытах по телеграфии на большие расстояния.) Препарированную лапку подвешивали на проволочках или вместе с антенной помещали в герметичный стеклянный сосуд и откачивали воздух – эффект сокращения все равно возникал. Малейшее же нарушение электрической цепи «проводник – нерв – мышца – проводник» приводило к остановке сокращений.

Другая серия опытов состояла в замене искусственно-го электричества от электрофорной машины и лейденских банок на естественное грозовое электричество. Лапку соединяли с громоотводом, и во время грозы наблюдались сокращения при разрядах молний и при прохождении туч. Гальвани обратил внимание на то, что в некоторых случаях одна вспышка молнии вызывала несколько сокращений.

Наконец, были предприняты исследования влияния атмосферного электричества, для чего лапки в ясную погоду вывесили на медных крючках на балконе с железными перилами. Гальвани стал прижимать медные крючки к железной решетке и тут впервые заметил сокращение лапки при контакте разнородных металлов. Этого оказалось достаточно, чтобы придать экспериментам новое направление и перенести опыты обратно в комнату. Гальвани с изумлени-

ем убеждается в том, «что сокращения были различны сообразно разницею металлов, именно в случае одних – сильнее и быстрее, а в случае других – слабее и медленнее». Было чему удивляться: до этого никаких различий электрических свойств металлов физики не отмечали. Теперь опыты состояли в замыкании нерва с наружной стороной мышцы дугой из металлов. Пытливый экспериментатор выявил, что «если вся дуга железная или крючок железный и если также проводящая пластина железная, то чаще всего сокращения либо отсутствуют, либо весьма незначительны. Если, однако, один из этих предметов железный, а другой – медный или же, что гораздо лучше, серебряный, то сокращения немедленно становились гораздо больше и гораздо продолжительнее».

Теперь о «ложной гипотезе о животном электричестве». Ко времени написания трактата Гальвани существование животного электричества было уже не гипотезой, а фактом: в 1773 году Уолш с помощью Кавендиша окончательно доказал электрическую природу разрядов электрических рыб. По мнению Гальвани, разряды электрических органов рыб отличаются от электрических сокращений мышц лягушек только количественно, но не качественно. Весь мир пронизан электричеством, в каждой лягушачьей лапке, в каждом живом органе текут слабые гальванические токи, вызывающие поразительные физиологические эффекты.

Натуральные разряды электрических рыб в те времена ценились крайне высоко: есть сведения, что в Англии желающие платили 12 шиллингов 6 пенсов за оцепеняющий разряд угря, другие называют более дешевые разряды – по 2 шиллинга, но, возможно, цены колебались. В любом случае этот путь для массовой медицины не годился: больно хлопотно ездить к пациентам с электрическим угрем в саквояже-аквариуме. Вот почему такой восторг вызвал вольтов столб – искусственный аналог электрического органа.

Аlessandro Вольта был на восемь лет моложе Гальвани, но последний в своем трактате называет его знаменитейшим

и изготавляет приборы, следуя опубликованным рекомендациям Вольты. Вольта происходил из более знатной семьи, чем Гальвани, получил прекрасное образование, был лично знаком со многими авторитетными физиками Европы, состоял в переписке с Английским королевским обществом и, будучи принятим в его ряды, явно хотел быть в нем заметным. Биографы Вольты утверждают, что ему несвойственно честолюбие, но по его письмам складывается обратное впечатление. В отличие от Гальвани, он легко идет на контакт с новой пронаполеоновской властью Италии, отрешившей Гальвани в последние годы его жизни от кафедры.

Первая реакция Вольты на трактат крайне эмоциональна: «Я должен, однако, признаться, что я приступил к первым опытам с недоверием и без больших надежд на успех: настолько поразительными казались мне описанные явления, которые если и не противоречили, то слишком превосходили все то, что до сих пор было известно об электричестве, такими чудесными они мне казались».

Сразу после ознакомления с этим трактатом Вольта подробно и гораздо более определенно, чем Гальвани, излагает аргументацию последнего и соглашается с ней. Один из основных выводов: проводники не могут быть источником электричества, электричество содержится только в изоляторах. Если при прикосновении дуги из металлов, неважно, одного или двух, течет ток, то источник его находится вне дуги, то есть внутри организма. «Таким образом, если проводящая дуга вызывает вышеуказанные сокращения мышцы, то мы должны предположить, что эти органы животного, естественно, обладают электричеством в любом состоянии или что электрический флюид в соответствующих частях не уравновешен». Позже именно этот пункт о естественном присутствии электричества в животных органах будет Вольтой опровергнут и предъявлен как главный источник ошибок Гальвани.

Вольта не видит особых заслуг Гальвани в обнаружении начального явления – сокращения лапки под действием

искр от электрофорной машины. «Только случай натолкнул Л. Гальвани на явление, которое его удивило гораздо больше, чем следовало бы. Впрочем, кто мог бы подумать, что электрический ток, до такой степени слабый, что его не могли обнаружить даже самые чувствительные электрометры, был способен действовать с такой силою на органы животного...»

Для физика Вольты высокая чувствительность – вопрос количественный. Для физиолога Гальвани, судя по всему, – качественный. Если количество электричества столь малое, что его почти не показывают электроскопы, вызывает ярко выраженный физиологический эффект, то природа посыпает через нервы в мышцы именно электрические импульсы. А значит, она умеет их генерировать.

Вольту явно волнует вопрос: какова степень величия открытий Гальвани? Он ясно сознает, что на новом поле исследований у него, физика-профессионала, больше шансов продвинуться вперед, чем у случайно набредшего на край поляны дилетанта Гальвани. И в первых же сообщениях спешит подчеркнуть свой профессионализм, пытаясь добиться количественного измерения электричества, вызывающего физиологические эффекты. Он подробнейше описывает конструкцию более чувствительного электрометра и повторяет опыты Гальвани с привязкой к ним неких численных значений. Через пару лет в письмах и статьях Вольты чисел почти не останется, при описании опытов главным образом будут описаны логические мотивы их постановки и примененные особенности анатомирования, но уважение к численным методам уже продемонстрировано.

Восторженность Вольты по отношению к Гальвани проходит почти сразу, хотя от повторения и бесконечных модификаций его опытов он оторваться не может. Вольта вводит термин «электрическая жизнеспособность» – способность организмов или их частей «оживать» при замыкании нервов дугой или при воздействии электричества электрофорной машины. Он выделяет четыре стадии, по степени проявле-

ния эффекта, при переходе от кажущейся смерти к полной. Далее он изучает зависимость электрической жизнеспособности лягушек от способов их умерщвления: «Я уже исследовал множество лягушек в силе и устойчивости каждой стадии остающейся жизненности. Некоторых из них я заставил погибнуть просто от усталости или недостаточного питания, других – в сосуде с более или менее нагретой водой, третьих – от тяжелых ран, калечения и всевозможного рода мучений, четвертых – от повторных электрических ударов и пятых – от одного только искрового разряда. Все эти наблюдения я аккуратно записывал в дневник, который опубликовую, когда распространю эти опыты, как я ставлю себе задачей, и на другие виды смерти этих и других животных, подвергнув их в отдельных случаях действию удушливого воздуха и паров, а также различных ядов». Вот такие опыты ставит физик-профессионал Александро Джузеппе Антонио Анастасио Вольта...

Ревниво проверяет он на прочность каждый кирпичик здания, построенного Гальвани, и находит два крупных изъяна. Во-первых, доказывает, что электрический ток в опытах Гальвани вызывает не непосредственно сокращение мышцы, а лишь возбуждение нерва, который далее неизвестным образом действует на мышцу. Во-вторых, на основании множества опытов Вольта приходит к убеждению, что обкладки из двух разных металлов являются не простыми проводниками, а «настоящими возбудителями и двигателями электрического флюида».

Из этих двух выводов делается третий: животные органы, равно как и их части, лишь пассивные проводники электричества. То есть животного электричества, помимо проявляемого в особым образом устроенных электрических органах рыб, не существует.

От всего, сделанного Гальвани, остается лишь случайно обнаруженный факт высокой чувствительности плоти к электрическим импульсам. И даже этот факт должен излагаться в редакции Вольты: к электричеству чувствительны

лишь нервы, а мышцы приводятся в возбуждение косвенным, неэлектрическим образом.

Сегодня, через 200 с лишним лет после описываемых событий, мы знаем, что в организме существует многое из того, что так рьяно отрицал Вольта: и собственное электричество, и сходство не только электроцитов, но и обычных мышечных волокон с батареями лейденских банок, и возможность возбуждения тканей без применения разнородных металлов.

Два разнородных металла могут быть источником электричества – для Вольты и других физиков это переворот в физических представлениях, переворот шокирующий, ибо достаточно прикосновения разнородных металлов, и начинает течь ток – «бесконечная циркуляция электрических истечений, вечное движение». Закон сохранения энергии еще не сформулирован – это сделает через полвека, в 1847 году, другой врач, физиолог и физик Герман Людвиг Фердинанд Гельмгольц, но этот закон как бы предо苦苦щается. И тут такой соблазн в нем усомниться! Для Гальвани, который уверен, что источник энергии находится внутри организма, существование металлического электричества – всего лишь повод модификации физиологических опытов. Но Вольта остается глух к аргументам Гальвани, полагая, что разнородные материалы присутствуют всегда, что источник электричества установлен и заключается в контакте разнородных проводников.

Придя к отрицанию животного электричества, Вольта продолжал работать с широким кругом живых организмов. Главные объекты интереса – электрические органы угрей и скатов. Он анатомирует их восемь лет. При этом мысли все время заняты проблемой: почему два разнородных металла, например серебро и цинк, дают большой физиологический эффект, а дуга из одного металла действует слабо? Наконец Вольта, имея перед глазами кукурузоподобную структуру электрических органов, начинает собирать в стопку кружки серебра и цинка, прокладывая их смоченным сукном, и по-

лучает вольтов столб. Другой вариант конструкции вольтова столба – чашечки с электролитом и проволоками разных металлов. Электроциты пресноводных электрических угрей очень похожи на диски, а морских электрических скатов – на чашечки, отсюда два базовых варианта.

Зачем для этого технического изобретения физику Вольте понадобились электрические рыбы? С точки зрения современной физиологии, электрический разряд в электрических органах и электрические явления в мышцах и нервах качественно похожи. Более того, специалисты сходятся во мнениях, что электрические органы – это модифицированные нервно-мышечные структуры. Главное отличие в том, что в обычных мышцах электровозбуждения отдельных клеток как бы гасят друг друга, а в электрических органах рыб – складываются, позволяя из отдельных электроцитов с напряжением несколько десятков милливольт составить батарею, которая дает сотни вольт (у электрического угря или сома).

Эффект суммирования – решающий шаг к вольтову столбу, шаг, который невозможно сделать на основе явления контактной разности потенциалов металлов. То, что позже будет названо правилом Вольты, гласит: «В цепи, состоящей из любого количества металлов, электродвижущая сила равна нулю». Прекрасный экспериментатор Вольта, давно выявивший в своих опытах необходимость электролитов, так описывает свое изобретение: «Я кладу на стол или на какую-нибудь опору одну из металлических пластинок, например серебряную, и на нее цинковую и затем мокрый диск и т.д. в том же порядке. Всегда цинк должен следовать за серебром или наоборот, в зависимости от расположения их в первой паре, и каждая пара перекладывается мокрым диском. Таким образом я складываю из этих этажей столб такой высоты, который может держаться, не обрушиваясь».

Из какой доступной физической модели, из каких уравнений следует такая конструкция? Только из биологической метафоры – из аналогии с электрическими органами

угря и ската. И, надо сказать, Вольта отнюдь не скрывает этого, более того, он утверждает, что и электрические органы рыб устроены и действуют по тому же принципу.

Представим себе, что не физик Вольта, а физиолог Гальвани, доказав наличие контактной разности потенциалов, утверждал бы существование вечного источника тока за счет простого контакта разнородных металлов. Простились бы ему то, что он не объяснил роли электролита и химических явлений на границах электродов и не предугадал закона сохранения энергии?

С этого момента электрическая теория в физике старается отгородиться от физиологии: она уверена, что «золотой ключик» уже в руках, и спешит открывать им дверки в своей каморке. Отрезанный от живой плоти и брошенный на алтарь физической науки искусственный электрический орган вызвал мощные движения огромных интеллектуальных сил. Повсеместно, от Петербурга до Нового Света, спешно создавались все более мощные вольтовы столбы. Основания для спешки были: те, кто первым изучал законы электрического тока, навсегда входили в историю науки. Кто более знаком массовому сознанию: авторитетнейший аббат Нолле и великий Машенбрук, изучавшие электричество до изобретения источника тока, или Ом, Кирхгофф, Эрстед и Ампер, располагавшие гальваническими элементами?

Впрочем, в списке создателей электрической теории по Максвеллу, помимо Фарадея, названы Кулон, Кавендиш, Лаплас, Пуассон, Эрстед, Ампер, Фурье, Вебер, Нейман. Здесь нет не только Гальвани, но и Вольты.

# **Содержание**

<b>§ 1. Электростатические взаимодействия.</b>	
<b>Электрический заряд. Закон Кулона .....</b>	<b>3</b>
1.1 Два вида электрических зарядов.....	4
1.2 Закон Кулона.....	16
1.3 Единицы измерения электрического заряда.....	28
1.4 Закон сохранения электрического заряда.....	31
1.5 Дискретность электрического заряда.	
Объемная плотность заряда.....	33
1.6 Инвариантность электрического заряда....	36
1.7 Принцип суперпозиции для электроста- тических сил .....	36
<b>§ 2. Электрическое поле и его свойства.....</b>	<b>40</b>
2.1 Напряженность электрического поля .....	47
2.2 Напряженность электрического поля точечного заряда .....	50
2.3 Принцип суперпозиции для напряжен- ности электрического поля .....	52
2.4 Силовые линии электростатического поля... <td>53</td>	53
2.5 Поток вектора напряженности электри- ческого поля. Теорема Гаусса .....	58
2.6 Поле равномерно заряженной плоскости....	65
2.7 Поле равномерно заряженной сферы .....	72
<b>§ 3. Потенциал электростатического поля.....</b>	<b>78</b>
3.1 Потенциальность электростатического поля. Потенциальная энергия взаимодействия элек- трического заряда с электрическим полем .....	78

3.2 Потенциал электростатического поля.....	86
3.3 Связь между потенциалом и напряжен- ностью электрического поля .....	90
3.4 Примеры расчета потенциалов электро- статических полей .....	101
3.4.1 Поле равномерно заряженной сферы ...	101
3.4.2 Поле равномерно заряженного кольца.....	104
3.4.3 Поле равномерно заряженной беско- нечной пластины .....	105
3.4.4 Поле двух параллельных равномер- но заряженных пластин .....	108
3.4.5 Электрический диполь .....	112
<b>§ 4. Проводники в электростатическом поле ....</b>	<b>123</b>
4.1 Проводники.....	125
4.2 Условия равновесия между зарядами и электрическим полем .....	127
4.3 Применение электростатических свойств проводников.....	140
4.3.1 Электростатическая защита.....	140
4.3.2 Заземление.....	143
4.3.3 Генератор Ван-дер-Граафа .....	146
<b>§ 5. Расчет поля в присутствии проводников. Метод изображений .....</b>	<b>149</b>
5.1 Точечный заряд над плоской проводящей поверхностью .....	151
5.2 Точечный заряд в двугранном проводя- щем углу .....	156
5.3 Изображение заряда в сфере.....	157
5.4 Проводящий шар в однородном поле .....	165

<b>§ 6. Диэлектрики. Поляризация диэлектриков ...</b>	<b>167</b>
6.1 Виды диэлектриков .....	169
6.1.1 Неполярные диэлектрики .....	169
6.1.2 Полярные диэлектрики.....	172
6.1.3 Электреты .....	175
6.2 Описание электрического поля в диэлектриках .....	175
6.3 Метод изображений для диэлектриков ...	187
<b>§ 7. Энергия электрического поля. Плотность энергии электрического поля.....</b>	<b>191</b>
7.1 Энергия взаимодействия точечных зарядов .....	191
7.2 Энергия взаимодействия двух равномерно заряженных параллельных пластин.....	195
7.3 Энергия поля равномерно заряженной сферы .....	203
7.4 Энергия поля и энергия взаимодействия зарядов .....	208
<b>§ 8. Электроемкость тела. Конденсаторы.</b>	
<b>Емкость конденсаторов .....</b>	<b>215</b>
8.1 Электроемкость уединенного проводника.....	216
8.2 Конденсаторы .....	219
8.3 Параллельное соединение конденсаторов.....	225
8.4 Последовательное соединение конденсаторов.....	230
<b>§ 9. Постоянный электрический ток.....</b>	<b>234</b>
9.1 Характеристики электрического тока ....	237
9.2 Закон Ома .....	246

9.3 Закон Джоуля-Ленца .....	252
9.4 Электрическое сопротивление .....	255
9.5 Последовательное соединение резисторов .....	263
9.6 Параллельное соединение резисторов .....	268
9.7 Примеры расчета сопротивлений цепи ...	270
9.8 Электрическое сопротивление среды при пространственно распределенных tokах .....	277
9.9 Время установления стационарного тока .....	283
9.10 Условия существования постоянного электрического тока в цепи.....	299
9.11 Электродвижущая сила (ЭДС) и внутреннее сопротивление источника .....	305
9.12 Закон Ома для полной цепи .....	310



Учебное издание  
Слободянюк Анатолий Иванович  
**ФИЗИКА ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ**  
**Электростатика. Постоянный электрический ток**  
*Пособие для учащихся учреждений  
общего среднего образования с русским языком обучения*  
Ответственный за выпуск Г. В. Нехай  
Редактор М. Л. Рудковская  
Литературный редактор Л. Г. Радкевич  
Технический редактор В. Н. Кравцова  
Компьютерная верстка М. Л. Рудковская  
Дизайн обложки В. И. Рынкевич  
Корректор А. С. Коляго

Подписано в печать 30.03.2015. Формат 60x84/16. Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 19,53. Уч.-изд. л. 11,02.  
Тираж 9500 экз. Заказ .

Общественное объединение «Белорусская ассоциация «Конкурс».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий № 1/288 от 14.04.2014.  
Ул. Беды, 24–100А, 220040, г. Минск.

Республиканское унитарное предприятие  
«Издательство «Белорусский Дом печати».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий № 2/102 от 01.04.2014.  
Пр-т Независимости, 79, 220013, г. Минск.