

**Задание 10(11)-1. «Разминка»**

**1.1** Будем считать, что при движении песчинки не мешают друг другу. Рассмотрим одну песчинку, находящуюся внутри вращающейся сферы. Поскольку трение в системе слабое, то примем, что движение песчинки происходит только под действием силы тяжести  $m\vec{g}$  и силы реакции опоры  $\vec{N}$  (см. рис).

В этом случае основной закон динамики примет вид

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} \quad (1)$$

Пусть в установившемся положении песчинки вектор силы реакции  $\vec{N}$  составляет угол  $\alpha$  с вертикалью. Песчинка, вращаясь вместе со сферой, описывает окружность, радиус которой  $r$  найдем из рисунка

$$r = R \sin \alpha.$$

При движении по окружности ее центростремительное ускорение может быть найдено, как

$$a = a_{ц.с.} = \omega^2 r = \omega^2 R \sin \alpha. \quad (2)$$

Проецируя (1) на оси  $Ox$  и  $Oy$  получаем систему уравнений

$$\begin{cases} ma = N \sin \alpha \\ mg = N \cos \alpha \end{cases}$$

Из первого уравнения полученной системы с учетом (2) найдем

$$m\omega^2 R \sin \alpha = N \sin \alpha,$$

откуда, сокращая на  $\sin \alpha$  ( $\sin \alpha \neq 0$ ), получим

$$N = m\omega^2 R. \quad (3)$$

Подставляя (3) во второе уравнение системы, найдем

$$\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 R}. \quad (4)$$

Как следует из (4) установившееся положение песчинки однозначно определяется угловой скоростью  $\omega$  вращения сферы, следовательно, песчинки при вращении сферы распределятся примерно равномерно и образуют кольцо, видимое из ее центра сферы под углом  $\alpha$  (см. рис).

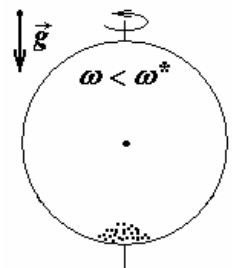
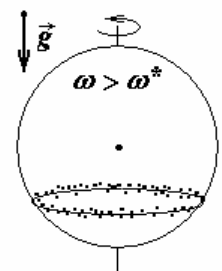
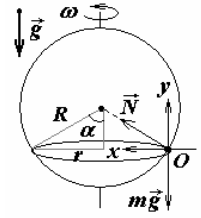
Это положение песчинок является устойчивым при больших угловых скоростях вращения, поскольку при любых малых смещениях песчинка стремится восстановить начальное значение угла  $\alpha$ .

Так при  $\omega \rightarrow \infty$   $\cos \alpha \rightarrow 0$ , т.е.  $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , и все песчинки соберутся «на экваторе» сферы. При этом радиус песчаного кольца станет равным радиусу сферы  $R$ .

При уменьшении угловой скорости вращения сферы до значения  $\omega^* = \sqrt{\frac{g}{R}}$  косинус угла принимает свое максимальное значение, равное 1.

Соответственно, при  $\omega < \omega^*$  все песчинки соберутся на дне сферы ( $\alpha = 0$ ), образуя небольшую кучку (см.рис).

Это также будет устойчивое положение равновесия песчинок на дне сферы при малых угловых скоростях ее вращения.



**1.2** Доски и цилиндр находятся в равновесии под действием сил тяжести ( $M\vec{g}, m\vec{g}$ ), трения ( $\vec{F}_{mp}, -\vec{F}_{mp}$ ) и реакций ( $\vec{N}, -\vec{N}$ ), изображенных на рисунках. Силы реакции в оси  $O$ , на рисунке не показаны, поскольку их моменты относительно точки  $O$  равны нулю.

Запишем второе условие равновесия (правило моментов) для одной из досок относительно точки  $O$

$$mg \frac{L}{2} \sin \alpha = N \frac{L}{2}. \quad (1)$$

Момент силы трения  $\vec{F}_{mp}$  также не входит в (1), поскольку линия ее действия проходит через ось вращения.

Поскольку цилиндр также находится в равновесии, то сумма сил, действующих на него должна быть равна нулю (рис. 01). Соответственно, первое условие равновесия, записанное для цилиндра в проекции на вертикальную ось, имеет вид

$$Mg + 2N \sin \alpha = 2F_{mp} \cos \alpha. \quad (2)$$

При записи (2) мы учли, что силы трения и реакции, действующие на цилиндр со стороны досок, согласно III закону Ньютона равны по модулю и противоположны по направлению соответствующим силам, действующим на доски со стороны цилиндра.

Из уравнений (1) – (2) получаем

$$N = mg \sin \alpha, \\ F_{mp} = \frac{Mg + 2mg \sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha}.$$

Поскольку предельное значение силы трения покоя определяется значением силы трения скольжения (явлением застоя пренебрежем), то

$$F_{mp} \leq \mu N. \quad (3)$$

Как следует из (3), система сможет находиться в равновесии только при выполнении условия

$$\mu \geq \frac{F_{mp}}{N}. \quad (4)$$

Из рисунка несложно выразить, что

$$\sin \alpha = \frac{2R}{\sqrt{4R^2 + L^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{L}{\sqrt{4R^2 + L^2}}.$$

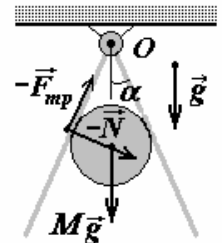
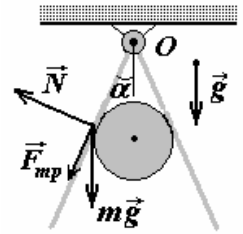
Из (4) с учетом выражений для силы трения и реакции, а также значений синуса и косинуса, получаем окончательный ответ

$$\mu \geq \frac{(L^2 + 4R^2)M}{4mRL} + \frac{2R}{L}.$$

Расчет дает

$$\mu \geq 1,0.$$

Полученное численное значение коэффициента трения достаточно большое, однако следует заметить, что современные синтетические материалы могут обладать даже большими коэффициентами трения.



**1.3** Для вычисления модуля вектора индукции магнитного поля на оси кольца с током используем закон Био-Савара-Лапласа, согласно которому малый элемент тока  $(I\vec{l})_k$  создает на оси кольца индукцию

$$\Delta B_k = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(I\vec{l})_k}{r_k^2}.$$

Вектор  $\Delta\vec{B}_k$  нормален вектору  $\vec{r}_k$ , проведенному от элемента тока в точку рассмотрения  $A$  (см.рис).

Поскольку все элементы тока  $I\vec{l}_k$  находятся на одинаковом расстоянии  $r_k = \sqrt{R^2 + z^2}$  от центра кольца и составляют с вертикалью одинаковый угол  $\varphi$ , то суммирование выполниться несложно

$$B = \sum_k \Delta B_{zk} = \sum_k \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(I\vec{l})_k}{r^2} \cos \varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cos \varphi}{r^2} \sum_k \Delta l_k = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cos \varphi}{r^2} 2\pi R = \frac{\mu_0 I R}{2r^2} \cos \varphi.$$

Из рисунка следует, что  $\cos \varphi = \frac{R}{r}$ , с учетом выражения для расстояния  $r$ , получим окончательное выражение для модуля вектора индукции магнитного поля на расстоянии  $z$  от центра кольца.

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R}{2r^2} \cos \varphi = \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (1)$$

На больших расстояниях  $z$  ( $z \gg R$ ) от кольца слагаемым  $R^2$  в знаменателе (1) можно пренебречь по сравнению со слагаемым  $z^2$ . В результате получим

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \{z \rightarrow \infty\} \approx \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{(z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{z^3} = \frac{a}{z^3}. \quad (2)$$

Соответственно, выражение для искомого коэффициента  $a$  принимает вид

$$a = \frac{\mu_0 I R^2}{2}. \quad (3)$$

Как следует из (2) при падении колечка и приближении его к кольцу модуль магнитной индукции поля возрастает, т.е. магнитный поток через колечко увеличивается.

Приращение магнитного потока через колечко при смещении его на величину  $\Delta z$

$$\Delta\Phi = -\pi r^2 B'(z) \Delta z.$$

Дифференцируя (2) по  $z$ , получим

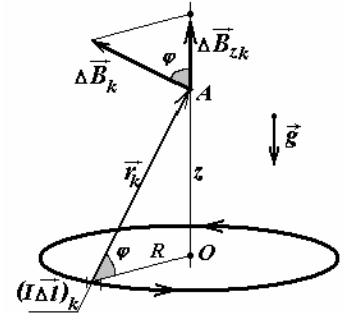
$$B'(z) = -\frac{3a}{z^4}.$$

Согласно закону электромагнитной индукции Фарадея в колечке возникнет ЭДС индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{3\pi r^2 a}{z^4} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{3\pi r^2 a}{z^4} \cdot v(z). \quad (4)$$

Соответственно, сила индукционного (наведенного) тока в колечке оказывается пропорциональной его скорости движения

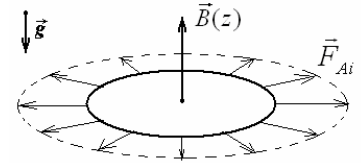
$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R_0} = \frac{3\pi r^2 a}{R_0 z^4} \cdot v(z). \quad (5)$$



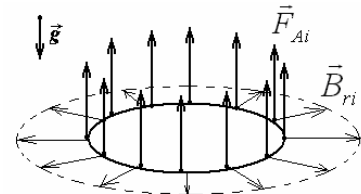
Поскольку в колечке появился индукционный ток, то на него со стороны магнитного поля кольца будут действовать силы Ампера.

Здесь следует заметить, что вертикальная (осевая) составляющая магнитного

поля  $\vec{B}(z)$  создает элементарные силы Ампера  $\vec{F}_{Ai}$ , которые лишь деформируют (сжимают или растягивают) колечко, но не могут замедлить или ускорить его движения, поскольку не имеют вертикальной проекции.



А вот радиальные составляющие  $\vec{B}_{ri}$  индукции магнитного поля, возникающие вследствие рассеяния линий магнитной индукции от оси  $Oz$ , в силу правила Ленца притормаживают колечко, поскольку имеют вертикальные проекции (см. рис).



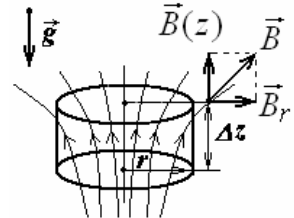
Для нахождения модуля  $B_r$  вблизи оси  $Oz$  применим теорему Гаусса для магнитного поля, которая утверждает, что поток вектора магнитной индукции по произвольной замкнутой поверхности равен нулю.

Рассмотрим цилиндр высотой  $\Delta z$ , радиус которого совпадает с радиусом колечка (см. рис). Будем считать, что в силу малости радиуса  $r$  колечка осевая составляющая  $B(z)$  магнитного поля в его пределах меняется незначительно. Тогда разность магнитных потоков через нижнее и верхнее основания цилиндра

$$\Delta\Phi = \pi r^2 B'(z) \Delta z \quad (6)$$

в силу теоремы Гаусса должна быть равна потоку вектора индукции магнитного поля через боковую поверхность цилиндра

$$\Phi_{бок} = B_r 2\pi r \Delta z. \quad (7)$$



Равенства (6)-(7) имеют наглядный геометрический смысл: неразрывные линии магнитной индукции, вошедшие в цилиндр через нижнее основание, могут выйти из него или через верхнее основание, или через его боковую поверхность.

Приравнявая (5) и (6) получим

$$B_r = -\frac{B'(z)}{2} r = \frac{3}{2} \cdot \frac{ar}{z^4}. \quad (8)$$

Соответственно, для суммарной компоненты силы Ампера, тормозящей падение кольца, получим выражение

$$F_A = I_i B_r 2\pi r = \{(5), (8)\} = \frac{9\pi r^3 a^2}{2R_0 z^8} v(z). \quad (9)$$

Поскольку, согласно условию, ускорение кольца мало (гораздо меньше ускорения свободного падения), то можно считать, что кольцо в любой момент времени движется равномерно. Подобные процессы называются квазистационарными.

Для подобных процессов характерное время установления равновесного состояния системы (время релаксации) должно быть достаточно мало.

В рамках данной модели можем записать

$$mg = F_A = \frac{9\pi r^3 a^2}{2R_0 z^8} v(z).$$

Из полученного уравнения найдем искомую зависимость скорости установившегося падения кольца на высоте  $z$

$$v(z) = \frac{2mgR_0 z^8}{9\pi r^3 a^2} = \frac{8mgR_0}{9\pi r^3 \mu_0^2 I^2 R^4} \cdot z^8. \quad (10)$$