

Задание 3. ВЭС – волновая электростанция. (Решение)

1.1 Давление воздуха внутри рабочего цилиндра следует из условия равновесия воды

$$P = P_0 + h - z \quad (1)$$

1.2 При подъеме уровня воды моря начнется подъем уровня воды в цилиндре и сжатие воздуха в нем. Так как клапан выпускной клапан открывается, если давление воздуха внутри цилиндра достигнет значения

$$P_2 = P_0 + \delta P \quad (2)$$

Чтобы генератор начал работать, необходимо, чтобы при максимальном подъеме уровня воды $h = A$ давление воздуха достигло значения, определяемого формулой (2). Так как процесс сжатия происходит при постоянной температуре и постоянной массе воздуха в цилиндре, то он описывается законом Бойля - Мариотта $PV = \text{const}$, которое можно записать в виде

$$(P_0 + A - z_2)(z_0 - z_2) = P_0 z_0 \quad (3)$$

Принимая во внимание формулу (2), получим, что максимальный уровень подъема воды в рабочем цилиндре должен стать равным z_2 , который можно найти из уравнения

$$(P_0 + \delta P)(z_0 - z_2) = P_0 z_0 \Rightarrow z_0 - z_2 = \frac{P_0}{P_0 + \delta P} z_0 \Rightarrow z_2 = \frac{\delta P}{P_0 + \delta P} z_0. \quad (4)$$

Найденное значение позволяет найти минимальную высоту волны

$$P_0 + A - z_2 = P_0 + \delta P \Rightarrow A = \delta P + z_2. \quad (5)$$

Окончательно находим

$$A_{\min} = \frac{\delta P}{P_0 + \delta P} z_0 + \delta P = 3,2 \text{ м}. \quad (6)$$

1.3 Модуль скорости движения воды снаружи равен

$$v = \frac{4A}{T} = 2,0 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (7)$$

1.4 Параметры в состоянии 1 задаются начальными условиями.

На временном интервале между точками 1 и 2 (а также 2 и 3) подъем уровня воды вне цилиндра происходит по закону

$$h = vt \quad (8)$$

Процесс 1-2 (до открытия клапана) есть процесс изотермический при постоянной массе воздуха, поэтому описывается уравнением

$$(P_0 + h - z)(z_0 - z) = P_0 z_0. \quad (9)$$

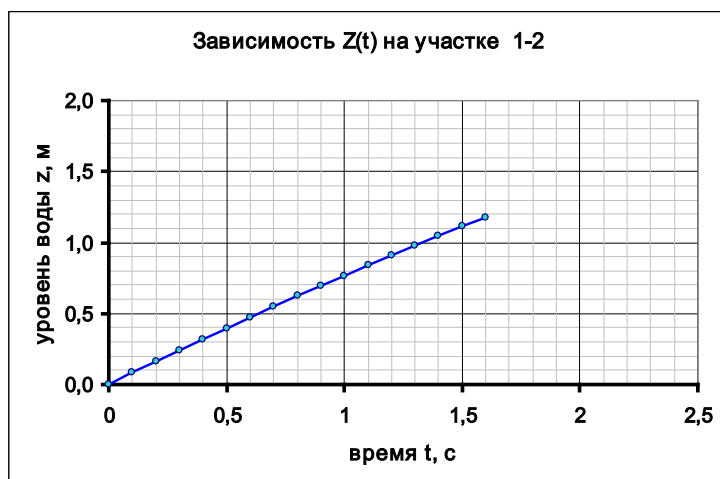
Из этого квадратного уравнения, которое после раскрытия скобок имеет стандартный вид

$$z^2 - z(P_0 + z_0 + h) + h z_0 = 0 \quad (10)$$

находим зависимость высоты уровня воды в цилиндре от времени

$$z = \frac{(P_0 + z_0 + vt)}{2} - \sqrt{\frac{(P_0 + z_0 + vt)^2}{4} - vt z_0} \quad (11)$$

График этой зависимости показан на рисунке.



1.5 Для расчета характеристик воздуха в момент времени t_1 следует принять во внимание, что в этот момент открывается клапан, т.е. давление достигает значения

$$P_1 = P_0 + \delta P = 12 \text{ м} . \quad (12)$$

Тогда из уравнения (8) можно получить линейное уравнение

$$(P_0 + \delta P)(z_0 - z_1) = P_0 z_0 . \quad (13)$$

Из которого легко находятся все необходимые параметры воздуха в состоянии 2:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0 - \frac{P_0}{P_0 + \delta P} z_0 = \frac{\delta P}{P_0 + \delta P} z_0 = 1,17 \text{ м} \\ \delta P &= h_1 - z_1 \Rightarrow h_1 = z_1 + \delta P = \frac{\delta P}{P_0 + \delta P} z_0 + \delta P = 3,17 \text{ м} \\ h_1 &= vt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{v} \left(\frac{\delta P}{P_0 + \delta P} z_0 + \delta P \right) = 1,58 \text{ с} \end{aligned} \quad (14)$$

1.6

Участок 1-2. В момент времени t_2 клапан откроется и воздух начнет выходить в атмосферу, при это разность давлений с наружи и внутри будет оставаться постоянной и равной δP . Давление внутри, высота уровня воды внутри цилиндра и вне его будут описываться линейными функциями

$$\begin{aligned} h(t) &= vt \\ P(t) &= P_0 - \delta P = \text{const} \\ z(t) &= h - \delta P = h - vt \end{aligned} \quad (15)$$

В точке 3 параметры воздуха станут равными

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{T}{4} = 2,5 \text{ с} \\ h_2 &= A = 5,0 \text{ м} \\ z_2 &= A - \delta P = 3,0 \text{ м} \\ P_2 &= P_0 - \delta P = 8,0 \text{ м} \end{aligned} \quad (16)$$

Участок 2-3. Далее уровень воды вне цилиндра начнет уменьшаться, следовательно, начнет понижаться и уровень воды в рабочем цилиндре. Давление воздуха внутри уменьшится.

поэтому клапан закроется. Поэтому процесс 3-4 будет изотермическим при постоянной массе газа, т.е. описываться уравнением

$$(P_0 + h - z)(z_0 - z) = (P_0 + \delta P)(A - \delta P) \quad (17)$$

Высота z будет уменьшаться до тех пор, пока давление внутри цилиндра не станет равным

$$P_3 = P_0 - \delta P = 8,0 \text{ м} \quad (18)$$

В этот момент воздух начнет поступать в цилиндр. Теперь из уравнения (17) с учетом выражения (18) можно рассчитать все характеристики состояния воздуха в точке 3:

$$\begin{aligned} (P_0 - \delta P)(z_0 - z_3) &= (P_0 + \delta P)(A - \delta P) \Rightarrow z_3 = z_0 - \frac{(P_0 + \delta P)(A - \delta P)}{P_0 - \delta P} = 2,5 \text{ м} \\ P_0 + h_3 - z_3 &= P_0 - \delta P \Rightarrow h_3 = z_3 - \delta P = 0,50 \text{ м} \\ h_3 &= A - v\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{A - h_3}{v} = 2,25 \text{ с} \Rightarrow t_3 = \frac{T}{4} + \Delta t = 4,75 \text{ с} \end{aligned} \quad (19)$$

Участок 3-4. Далее процесс будет идти при постоянной разности давлений, вплоть до того момента пока уровень воды не начнет снова повышаться, т.е. на в точках 5 и 6 значения h определяются заданным в условии графиком. а значения z и P рассчитываются «в уме» по формулам

$$\begin{aligned} P_4 &= P_0 - \delta P \\ z_4 &= h_4 + \delta P \end{aligned} \quad (20)$$

Численные значения параметров в этой точке равны:

$$t_4 = 7,5 \text{ с}; \quad h_4 = -A = -5,0 \text{ м}; \quad z_4 = -A + \delta P = -3,0 \text{ м}; \quad P_5 = 8,0 \text{ м} \quad (21)$$

Участок 4-5. На участке 4-5 (при подъеме уровня воды) клапан опять закроется, масса воздуха в цилиндре будет неизменной, давление будет изотермически возрастать до открытия клапана (когда давление станет равным $P_5 = P_0 + \delta P$). Для определения параметров в состоянии 5 следует воспользоваться системой уравнений, которые аналогичны уравнениям, записанным ранее:

$$\begin{aligned} (P_0 + \delta P)(z_0 - z_5) &= (P_0 - \delta P)(z_0 - z_5) = (P_0 - \delta P)(z_0 + A - \delta P) \\ (P_0 + \delta P) &= P_0 + h_5 - z_5 \end{aligned} \quad (21)$$

Из этой системы без труда находим:

$$\begin{aligned} z_5 &= z_0 - \frac{P_0 - \delta P}{P_0 + \delta P}(z_0 + A - \delta P) = 0,33 \text{ м} \\ h_5 &= z_5 + \delta P = 2,3 \text{ м} \end{aligned} \quad (22)$$

Момент времени, когда уровень воды достигнет значения h_7 , находится из закона движения

$$-A + v(t_5 - t_4) = h_5. \quad (23)$$

Из которого вычисляем

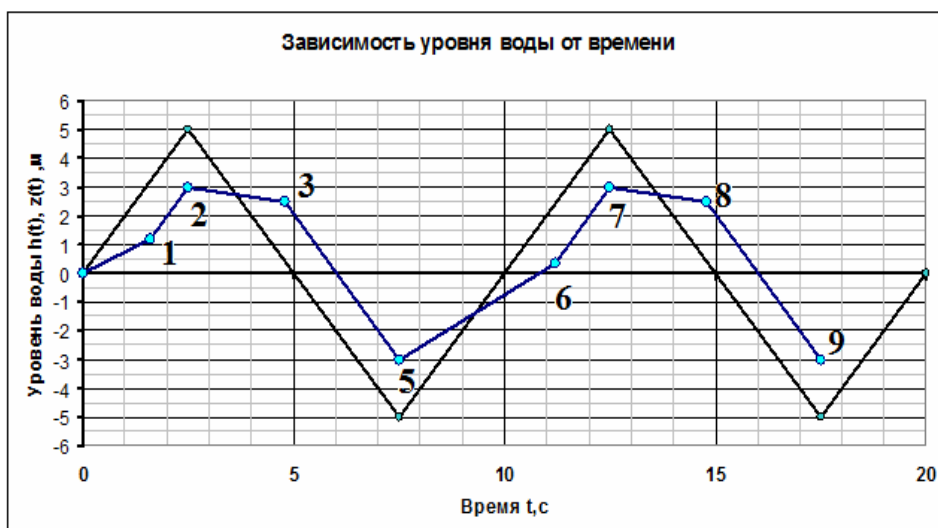
$$t_5 = t_4 + \frac{A + h_5}{v} = 11,2 \text{ с} \quad (24)$$

Далее значения параметров h, z, P будут периодически повторяться. Т.е. значения в точке 6 совпадают со значениями в точке 2 и т.д. Для расчета времен следует прибавить период волны, т.е. 10 с. Все эти значения переписаны в Таблице 1.

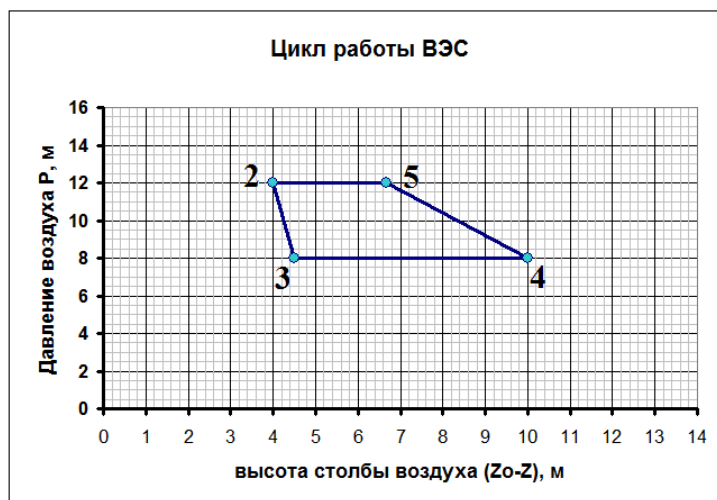
Таблица 1. Узловые точки

Номер точки	время t , с	высота воды снаружи h , м	высота воды внутри z , м	Давление внутри P , м
0	0	0	0	10
1	1,6	3,2	1,2	12
2	2,5	5,0	3,0	12
3	4,8	0,5	2,5	8,0
4	7,5	-5,0	-3,0	8,0
5	11,2	2,3	0,33	12
6	12,5	5,0	3,0	12
7	14,8	0,5	2,5	8,0
8	17,5	-5	-3	8,0

График рассчитанной зависимости (все данные, необходимые для построения графика приведены в Таблице 1) показан ниже.



1.7 Рассчитанные значения параметров позволяют построить диаграмму рабочего цикла рассматриваемой установки. Результат построения — на рисунке.



1.8 Циклический процесс начинается в точке 2, конец цикла — точка 5.

Часть 2. Энергетические характеристики ВЭС.

2.1 Генератор вырабатывает электроэнергию, когда воздух проходит через турбину в любом направлении. Это происходит на участках цикла 3-4 (воздух всасывается внутрь рабочего цилиндра) и 5-6 (воздух выталкивается из цилиндра).

2.2 Воздух вытесняется из цилиндра на участке 5-6. На этом участке давление воздуха внутри цилиндра постоянно и равно $P = P_0 + \delta P$. Объем вытесненного воздуха равен

$$\Delta V = S(z_6 - z_5) \quad (25)$$

Масса вытесненного воздуха рассчитывается с помощью уравнения состояния

$$P\Delta V = \frac{\Delta m}{M} RT. \quad (26)$$

При численных расчетах необходимо все величины выразить в системе СИ (прежде всего это касается давления). Подставляя эти численные значения, находим

$$\Delta m = \frac{MS(P_0 + \delta P)(z_6 - z_5)}{RT} = \frac{29 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}} \cdot 12 \cdot 10^4 \text{ Па} \cdot (3,0 - 0,33) \text{ м}}{8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot (273 + 7,0) \text{ К}} = 4,0 \text{ кг} \quad (27)$$

2.3 Для расчета кинетической энергии необходимо найти скорость движения выходящего газа. Так как давление воздуха в цилиндре и выходной трубе одно и то же, то плотность воздуха остается постоянной, поэтому справедливо уравнение

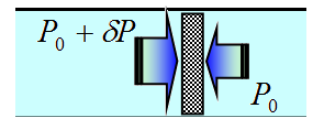
$$Sv = sv_1. \quad (28)$$

где v - найденная ранее скорость подъема воды в цилиндре, v_1 - скорость воздуха в выходной трубе. Таким образом, кинетическая энергия выходящего воздуха равна

$$E_{\text{кин.}} = \frac{\Delta m}{2} v_1^2 = \frac{\Delta m}{2} \left(\frac{S}{s} v \right)^2 = \frac{4,0 \text{ кг}}{2} \left(10 \cdot 2,0 \frac{\text{м}}{\text{с}} \right)^2 = 0,80 \cdot 10 \text{ Дж}. \quad (29)$$

Примечание. В реальности при протекании газа давления газа в цилиндре и в выходной трубе должны различаться, но по условию задачи этой разностью следует пренебрегать.

2.4 Можно считать, что со стороны цилиндра на турбину действует сила пропорциональная давлению в цилиндре, а с другой – пропорциональная атмосферному давлению. Поэтому работа, совершенная над турбиной генератора, должна рассчитываться по формуле



$$A_{5-6} = \delta P \cdot \Delta V = \delta PS(z_6 - z_5) \quad (30)$$

Подставим численные значения и проведем расчет

$$A_5 = \delta PS(z_6 - z_5) = 2,0 \cdot 10^4 \text{ Па} \cdot 10 \text{ м}^2 \cdot 2,7 \text{ м} = 5,4 \cdot 10^5 \text{ Дж} \quad (31)$$

2.5 За полный цикл работа совершается и при всасывании воздуха (на участке 3-5). Ее можно рассчитать по формуле аналогичной формуле (30):

$$A_{3-4} = \delta P \cdot \Delta V = \delta PS(z_3 - z_4) = 2,0 \cdot 10^4 \text{ Па} \cdot 10 \text{ м}^2 \cdot 5,5 \text{ м} = 11 \cdot 10^5 \text{ Дж} \quad (32)$$

Учитывая коэффициент полезного действия электрогенератора, для средней мощности установки получаем выражение

$$N = \frac{\eta_0(A_{3-4} + A_{5-6})}{T} = \frac{0,60 \cdot (11 + 5,4) \cdot 10^4 \text{ Дж}}{10 \text{ с}} = 9,8 \cdot 10^4 \text{ Вт} . \quad (33)$$

Округляя, получаем мощность данной установки – примерно 100 киловатт.