

Задача 11.1. Переносы...

Часть 1 Перенос вещества.

Для решения данной задачи необходимо последовательно рассмотреть изменения концентраций растворов при каждом переливании. Понятно, что при сливании растворов будут сохраняться суммарная масса растворенного вещества и их общий объем.

1.1 Массы растворенного вещества в сосудах и их общая масса определяются по очевидным формулам

$$m_A = x_0 V; \quad m_B = y_0 V \Rightarrow m_0 = x_0 V + y_0 V. \quad (1.1)$$

1.2 При наполнении малого сосуда в него попадет масса раствора, равная $\delta m_{A \rightarrow B} = x_0 v$. Эта масса попадет во второй сосуд, поэтому масса растворенного вещества во втором сосуде окажется равной $m_B = y_0 V + \delta m_{A \rightarrow B} = y_0 V + x_0 v$, а его концентрация станет равной

$$y_1 = \frac{m_B}{V + v} = \frac{y_0 V + x_0 v}{V + v}. \quad (1.2)$$

Зачерпнув из второго сосуда, мы «захватим» массу растворенного вещества равную $\delta m_{B \rightarrow A} = y_1 v$. Она попадет в первый сосуд, при этом концентрация раствора в этом сосуде станет равной

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x_0(V - v) + y_1 v}{(V - v) + v} = \frac{x_0(V - v) + \frac{y_0 V + x_0 v}{V + v} v}{V} = \\ &= \frac{x_0(V^2 - v^2) + y_0 V v + x_0 v^2}{V(V + v)} = \frac{x_0 V^2 + y_0 V v}{V(V + v)} = \frac{x_0 V + y_0 v}{V + v} \end{aligned} \quad (1.3)$$

1.3 Расчет разностей концентраций требует только аккуратности в алгебраических преобразованиях:

$$y_1 - x_0 = \frac{y_0 V + x_0 v}{V + v} - x_0 = \frac{y_0 V + x_0 v - x_0 V - x_0 v}{V + v} = (y_0 - x_0) \frac{V}{V + v}. \quad (1.4)$$

$$x_1 - y_1 = \frac{x_0 V + y_0 v}{V + v} - \frac{y_0 V + x_0 v}{V + v} = \frac{x_0(V - v) + y_0(v - V)}{V + v} = (x_0 - y_0) \frac{V - v}{V + v}. \quad (1.5)$$

Полученная формула является основой дальнейшего решения: разность концентраций после одного цикла уменьшается в

$$\lambda = \frac{V - v}{V + v} \quad (1.6)$$

раз. Это соотношение можно обобщить на любой следующий полный цикл переливания

$$x_k - y_k = \lambda(x_{k-1} - y_{k-1}). \quad (1.7)$$

Следовательно, разности концентраций образуют геометрическую прогрессию, поэтому разность концентрации можно выразить в явном виде.

$$x_k - y_k = (x_0 - y_0) \lambda^k \quad (1.8)$$

1.4 Массы растворенных веществ выражаются через концентрации растворов

$$m_{Ak} = x_k V; \quad m_{Bk} = y_k V. \quad (1.9)$$

Общая масса этого вещества осталась неизменной, определяемой по формуле (1). Поэтому можно выразить и сумму концентраций растворов

$$(x_k + y_k) V = (x_0 + y_0) V \Rightarrow x_k + y_k = x_0 + y_0. \quad (1.10)$$

1.5 Таким образом, мы получили два уравнения (1.8) и (1.10) для определения концентраций растворов, решение которых представляет чисто техническую проблему, складывая эти уравнения получим концентрацию раствора в первом сосуде

$$\begin{cases} x_k - y_k = (x_0 - y_0)\lambda^k \\ x_k + y_k = x_0 + y_0 \end{cases} \Rightarrow x_k = \frac{1}{2}x_0(1 + \lambda^k) + \frac{1}{2}y_0(1 - \lambda^k). \quad (1.11)$$

Концентрацию раствора во втором сосуде можно выразить из уравнения (1.8):

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - (x_0 - y_0)\lambda^k = x_k = \frac{1}{2}x_0(1 + \lambda^k) + \frac{1}{2}y_0(1 - \lambda^k) - (x_0 - y_0)\lambda^k = \\ &= \frac{1}{2}x_0(1 - \lambda^k) + \frac{1}{2}y_0(1 + \lambda^k) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Наконец, подставляя значение параметра λ , получим выражения для концентраций через известные исходные параметры

$$x_k = \frac{1}{2}x_0 \left(1 + \left(\frac{V-v}{V+v} \right)^k \right) + \frac{1}{2}y_0 \left(1 - \left(\frac{V-v}{V+v} \right)^k \right). \quad (1.13)$$

$$y_k = \frac{1}{2}x_0 \left(1 - \left(\frac{V-v}{V+v} \right)^k \right) + \frac{1}{2}y_0 \left(1 + \left(\frac{V-v}{V+v} \right)^k \right). \quad (1.14)$$

Часть 2. Перенос теплоты «вручную».

Эта задача практически полностью аналогична первой части. Аналогом массы растворенного вещества служит количество переданной теплоты, а аналогом концентрации раствора – температура. Поэтому следует ожидать, что разности температур после одного цикла переноса («туда и обратно») будут составлять геометрическую прогрессию. Так в после опускания тела (имеющего температуру равную начальной температуре в первом сосуде), установится температура y_1 , которую можно найти из уравнения теплового баланса²

$$C_0(x_0 - y_1) = cm(y_1 - y_0) \Rightarrow y_1 = \frac{C_0x_0 + cmy_0}{C_0 + cm}. \quad (2.1)$$

Аналогичное уравнение можно записать для определения установившуюся температуру в первом сосуде, после повторного опуская тела

$$C_0(x_1 - y_1) = cm(x_0 - x_1) \Rightarrow x_1 = \frac{cmx_0 + C_0y_1}{C_0 + cm}. \quad (2.2)$$

Вычислив разности температур после первого цикла переноса

$$\begin{aligned} x_1 - y_1 &= \frac{cmx_0 + C_0y_1}{C_0 + cm} - y_1 = \frac{cmx_0 - cmy_1}{C_0 + cm} = \\ &= \frac{cmx_0 - cm \frac{C_0x_0 + cmy_0}{C_0 + cm}}{C_0 + cm} = \left(\frac{cm}{C_0 + cm} \right)^2 (x_0 - y_0) \end{aligned} \quad (2.3)$$

видим, что аналогичное соотношения справедливо для любого цикла переноса, поэтому соотношение (3) показывает, что разности температур изменяются в геометрической прогрессии

$$x_k - y_k = (x_0 - y_0) \left(\frac{cm}{cm + C_0} \right)^{2k} = (x_0 - y_0)\lambda^k. \quad (2.4)$$

² В принципе, можно записывать уравнения вида (4) из первой части, истолковывая их в духе закона сохранения энергии. Однако мы предпочитаем более традиционную запись в виде уравнений теплового баланса.