

Решения задач.

Задача 9.1. Простая задача про простые механизмы.

1.1 Ворот.

Если конец веревки, к которой приложена сила, сместить на расстояние l , то груз поднимется на высоту h , которую можно найти из условия равенства углов поворота:

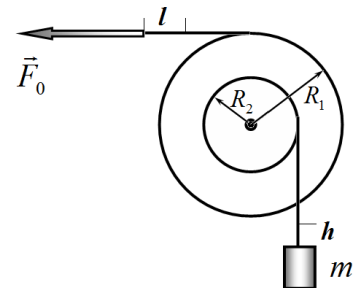
$$\frac{l}{R_1} = \frac{h}{R_2}. \quad (1)$$

В соответствии с «золотым правилом» выполняется условие

$$F_0 l = mgh. \quad (2)$$

Из этих выражений, следует, что масса поднимаемого груза равна

$$m = \frac{F_0}{g} \frac{R_1}{R_2}. \quad (3)$$



1.2 Полиспаст.

Из условия постоянства длины веревки следует, что если человек опустит конец веревки на величину l , то груз

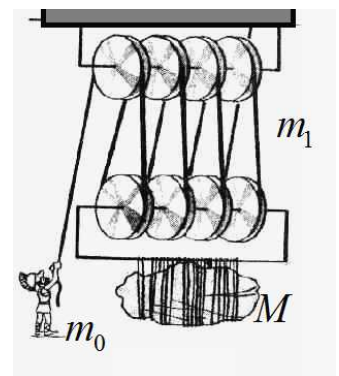
поднимется на высоту $h = \frac{l}{8}$. Так как максимальная сила,

которую может приложить человек равна $m_0 g$, то максимальный груз, который можно поднять, находится из «золотого правила механики»:

$$m_0 g l = \left(M + \frac{m_1}{2} \right) g h. \quad (1)$$

Откуда следует, что

$$M = 8m_0 - \frac{m_1}{2}. \quad (2)$$



1.3 Лебедка.

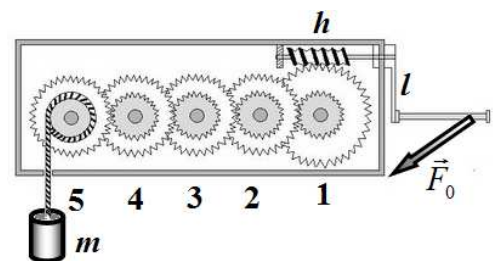
Допустим, рукоятку повернули на один оборот (при этом ее конец прошел расстояние равное $L = 2\pi l$),

первая шестерня повернулась на угол $\varphi_1 = \frac{2\pi}{n_1}$. Вторая

шестерня при этом повернется на угол в 2 раза меньший (так как на меньшей шестеренке в два раза меньше зубьев), угол поворота каждой следующей также будет в два раза меньше

предыдущей. Следовательно, пятая шестерня повернется на угол $\varphi_5 = \frac{\varphi_1}{16}$, при этом груз поднимется на высоту

$$h = r \varphi_5 = r \frac{1}{16} \frac{2\pi}{n_1}. \quad (1)$$



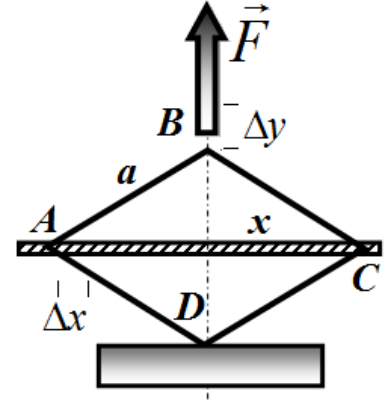
Из «золотого правила механики» следует равенство

$$F_0 L = mgh \Rightarrow m = F_0 \frac{L}{h} = F_0 \frac{2\pi l}{\left(r \frac{1}{16} \frac{2\pi}{n_1}\right)} = 16n_1 \frac{l}{r} F_0. \quad (2)$$

1.4 Домкрат.

Нам необходимо связать путь, пройденный рукояткой, с высотой подъема груза. Пусть узел A сместился на малое расстояние Δx , а груз поднялся на высоту Δy . Из теоремы Пифагора для длины стороны ромба можно записать два выражения (до смещения и после смещения)

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 &= a^2 \\ \left(\frac{x - \Delta x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y + \Delta y}{2}\right)^2 &= a^2 \end{aligned} \quad (1)$$



Здесь y высота BD до начала смещения.

Раскроем скобки во втором уравнении

$$\frac{x^2 - 2x\Delta x + (\Delta x)^2}{4} + \frac{y^2 - 2y\Delta y + (\Delta y)^2}{4} = a^2. \quad (2)$$

Так как мы считаем смещения малыми, то в этой формуле можно пренебречь еще более малыми квадратами смещений. Если теперь из уравнения (2) вычесть первое уравнение системы (1), то получим

$$-2x\Delta x + 2y\Delta y = 0 \Rightarrow \Delta y = \frac{y}{x} \Delta x. \quad (3)$$

Если рукоятка сделает один оборот (ее конец пройдет путь $S = 2\pi L$), то узел A сместится на величину шага винта $\Delta x = h$, при этом груз поднимется на величину $\Delta y = \frac{y}{x} h$. В очередной раз записываем уравнение, следующее из «золотого правила механики»

$$2\pi L F_0 = F \frac{y}{x} h \Rightarrow F = \frac{2\pi L}{h} \frac{x}{y} F_0. \quad (4)$$

Подставляя численные значения, получим окончательный результат

$$F = \frac{2\pi L}{h} \frac{x}{y} F_0 = \frac{2\pi \cdot 30 \text{ см}}{0,2 \text{ см}} \cdot 2 \cdot 50 \text{ Н} = 9,4 \cdot 10^4 \text{ Н}. \quad (5)$$

Итак, грузоподъемность – более 9 Тонн, а приложенная сила всего-то 5 Килограмм!

Для построения графика в формуле (4) необходимо выразить y как функцию x . Эту зависимость, можно выразить из первого уравнения системы (1):

$$y = \sqrt{4a^2 - x^2}. \quad (6)$$

Таким образом, искомая функция имеет вид

$$F = \frac{2\pi L}{h} \frac{x}{y} F_0 = \frac{2\pi L}{h} F_0 \frac{x}{\sqrt{4a^2 - x^2}} = \frac{2\pi L}{h} F_0 \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{4 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = 4,7 \cdot 10^4 \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{4 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}. \quad (7)$$

График этой функции можно построить по точкам. При $x \rightarrow 2a$, то есть в начале подъема грузоподъемность наибольшая, по мере подъема грузоподъемность падает.

