10 класс 11-летней школы.

Задача 1. «Ошибочная разминка»

1.1. «Из пушки по…»

Уравнения движения тела, брошенного с начальной скоростью v под углом к горизонту α:

$$x = v\cos\alpha \cdot t, \tag{1}$$

$$y = v\sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{2}$$

Дальность полета s можно определить, как горизонтальное расстояние, которое пролетел снаряд до момента падения

$$t^* = \frac{2v\sin\alpha}{g}, \tag{3}$$

$$s = \frac{2v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v^2}{g}\sin 2\alpha. \tag{4}$$

Если скорость вылета снаряда испытывает малые флуктуации $v = v_0 \pm \Delta v_0$, то и дальность полета будет испытывать малые флуктуации

$$s \pm \Delta s = \frac{(v_0 \pm \Delta v_0)^2}{g}\sin 2\alpha = \frac{v_0^2 \pm 2v_0\Delta v_0 + \Delta v_0^2}{g}\sin 2\alpha \approx \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha \pm \frac{2v_0\Delta v_0}{g}\sin 2\alpha, \tag{5}$$

откуда

$$\Delta s = \frac{2v_0\Delta v_0}{g}\sin 2\alpha. \tag{6}$$

При стрельбе под углом $\alpha_0 = 45^\circ$ неточность стрельбы максимальна и равна

$$\Delta s_0 = \frac{2v_0\Delta v_0}{g}. \tag{7}$$

Отсюда

$$\Delta s = \Delta s_0 \sin 2\alpha. \tag{8}$$

Примерный график зависимости $\Delta s(\alpha)$ изображен на рисунке.

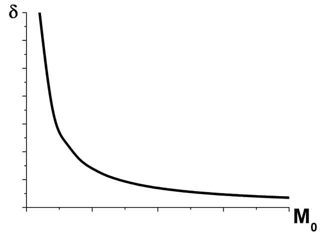
1.2. «Пружинные весы»

Очевидно, что показания весов оказались завышенными из-за того, что сама пружина имеет массу, а градуировка по закону Гука производилась при горизонтальном положении пружины. Это значит, что даже без груза весы будет показывать вес ΔP_0 - это и есть их абсолютная погрешность.

Относительная погрешность пружинных весов равна

$$\delta = \frac{\Delta P_0}{M_0 g}. \tag{9}$$

Примерный график зависимости $\delta(M_0)$ - гипербола - представлен на



рисунке.

1.3. «Гальванометр»

Показания вольтметра будут пропорциональны силе тока, протекающего по нему. При подключении к его клеммам напряжения U сила тока в нем будет равна

$$I_0 \pm \Delta I_0 = \frac{U}{R_V + R \mp \Delta R} = \frac{U}{(R_V + R)(1 \mp \frac{\Delta R}{R_V + R})} \approx \frac{U}{(R_V + R)}(1 \pm \frac{\Delta R}{R_v + R}), \tag{10}$$

$$I_0 = \frac{U}{(R_V + R)}, \tag{11}$$

$$\Delta I_0 = \frac{U \Delta R}{(R_v + R)^2}. \tag{12}$$

Максимальное напряжение, которое можно измерить таким вольтметром, равно

$$U_{\max} = (R_V + R) I_{\max}, \tag{13}$$

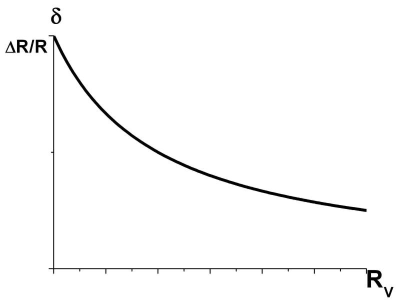
поэтому максимальная погрешность прибора

$$\Delta U_{\max} = (R_V + R)\Delta I_0 = \frac{U_{\max} \Delta R}{(R_v + R)} = I_{\max} \Delta R. \tag{14}$$

Относительная погрешность вольтметра равна

$$\delta_U = \frac{\Delta U}{U_{\max}} = \frac{\Delta I_0}{I_0} = \frac{\Delta R}{R_V + R}. \tag{15}$$

Примерный график зависимости относительной погрешности напряжения, измеренного вольтметром, от сопротивления R_V изображен на рисунке.



Поскольку для создания из гальванометра амперметра резистор R_A подключается к нему параллельно, сила тока I_0, втекающая в прибор, будет перераспределяться между гальванометром I_G и подключенным к нему резистором I_R по правилам для параллельно соединенных проводников:

$$I_0 = I_G + I_R, \tag{16}$$

$$I_G R_G = I_R R_A. \tag{17}$$

Сила тока, текущего через гальванометр из (16) и (17) равна

$$I_G = I_0 \frac{R_A}{R_A + R_G}. \tag{18}$$

Поскольку сопротивление гальванометра имеет погрешность $R_G = R \mp \Delta R$, то и сила тока, измеряемая им, будет определена с погрешностью

$$I_G \pm \Delta I_G = I_0 \frac{R_A}{R_A + R \mp \Delta R} = I_0 \frac{R_A}{R_A + R(1 \mp \frac{\Delta R}{R + R_A})} = I_0 \frac{R_A}{R_A + R} \pm I_0 \frac{R_A \Delta R}{(R_A + R)^2}. \quad (19)$$

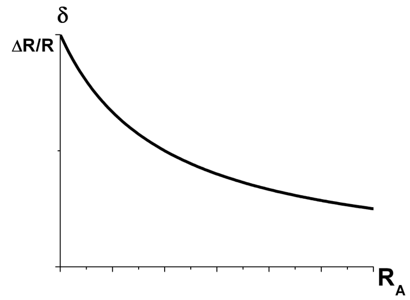
Погрешность измерения будет максимальна при пропускании через гальванометр максимального тока $I_{\max} = I_{0\max} \dfrac{R_A}{R_A + R}$ и равна

$$\Delta I_{G\max} = I_{0\max} \frac{R_A \Delta R}{(R_A + R)^2} = I_{\max} \frac{\Delta R}{R_A + R}. \quad (20)$$

Относительная погрешность измерений будет равна

$$\delta_I = \frac{\Delta I_G}{I_G} = \frac{\Delta R}{R + R_A}. \quad (21)$$

Примерный график зависимости относительной погрешности силы тока, измеренной амперметром, от сопротивления R_A изображен на рисунке.



1.4. «Термометр»

Уравнение теплового баланса

$$mcT + C_0 T_0 = (mc + C_0)\Theta, \quad (22)$$

где $\Theta -$ установившаяся в равновесии температура.

$$\Theta = \frac{mcT + C_0 T_0}{mc + C_0}. \quad (23)$$

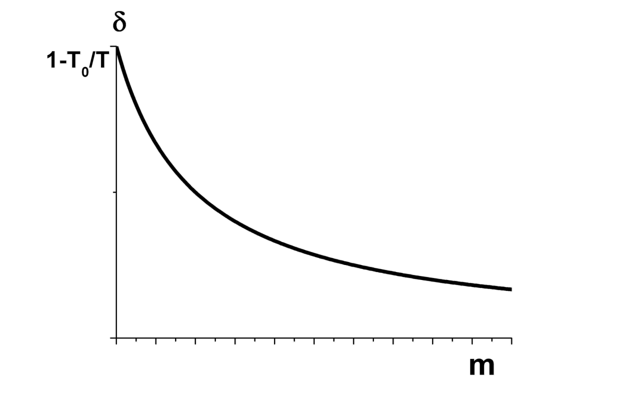
Погрешность измерения будет характеризоваться разностью между температурой воды до измерения и установившейся в тепловом равновесии температуры

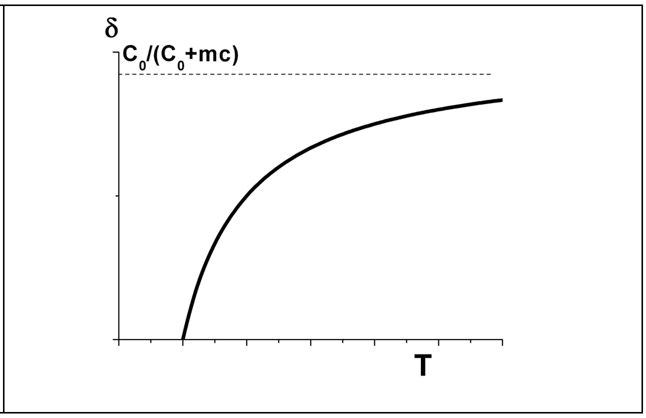
$$\Delta T = T - \Theta = T - \frac{mcT + C_0 T_0}{mc + C_0} = \frac{C_0 (T - T_0)}{mc + C_0}. \quad (24)$$

Относительная погрешность

$$\delta = \frac{\Delta T}{T} = \frac{C_0}{C_0 + mc}\left(1 - \frac{T_0}{T}\right). \quad (25)$$

Примерные графики зависимости относительной погрешности δ от измеряемой температуры воды T и от массы воды в калориметре m изображены на рисунках.





1.5. «Лазерный зайчик»

Координата лазерного зайчика равна

$$x = L \cdot tg\varphi. \tag{26}$$

Поскольку угол испытывает флуктуации $\varphi \pm \Delta\varphi$, то зайчик смещается по стене.

В случае, когда лазерный луч перпендикулярен стенке

$$\pm\Delta x_0 = L \cdot tg(0 \pm \Delta\varphi) \approx \pm L\Delta\varphi, \tag{27}$$

откуда можно определить флуктуации угла

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta x_0}{L}. \tag{28}$$

В случае, когда лазерный луч идет под углом φ, координата равна

$$x \pm \Delta x = L \cdot tg(\varphi \pm \Delta\varphi) \approx L \cdot tg\varphi \pm L\frac{\Delta\varphi}{\cos^2\varphi}, \tag{29}$$

а флуктуации координаты зайчика

$$\Delta x = \frac{L\Delta\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{\Delta x_0}{\cos^2\varphi}. \tag{30}$$

График зависимости $\Delta x(\varphi)$ изображен на рисунке.