

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ТУРА

Закручивание: построение потенциальной кривой

Часть 1. Теоретическое введение

1.1 Кинетическая энергия вращающегося стержня выражается формулой

$$E = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (1)$$

$I = \frac{m_1 a^2}{12} + 2m_2 \frac{h^2}{4}$ – момент инерции стержня относительно оси вращения (где l – длина стержня, h – расстояние между нитями), $\omega = 2\pi V$ - угловая скорость вращения стержня (ω – частота вращения).

Следовательно,

$$E = \pi^2 \left(\frac{m_1 a^2}{6} + m_2 h^2 \right) V^2 \quad (2)$$

При $V = 1 \text{ с}^{-1}$ энергия стержня является искомой единицей измерения. Здесь и далее полагается, что можно пренебречь энергией, связанной с вертикальной скоростью стержня по сравнению с энергией вращательного движения. По результатам измерений $a = 25 \text{ см}$, $h = 15 \text{ см}$, значения масс указаны в условии задачи. Поэтому

$$1 \text{ Ku} \approx 6.35 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.} \quad (3)$$

1.2 Вычислим производную от предлагаемой зависимости времени от координаты $t(k) = Ak^\alpha$ по k , учитывая, что координатой является число оборотов k (не обязательно целое):

$$V(k) = \frac{dk}{dt} = \frac{k^{1-\alpha}}{\alpha A}, \quad (4)$$

$$E(k) = V^2 = \left(\frac{k^{1-\alpha}}{\alpha A} \right)^2. \quad (5)$$

1.3 Выразим скорость вращения стержня из закона сохранения энергии:

$$V(k)^2 = U(N) - U(k). \quad (6)$$

Время раскручивания можно рассчитать по следующей формуле

$$T = \int_0^N \frac{dk}{V(k)}. \quad (7)$$

Проведя замену переменной интегрирования

$$\xi = \frac{N-k}{N} \quad (8)$$

и используя зависимость $U(N) = BN^\beta$, получаем

$$T(N) = N^{1-\frac{\beta}{2}} \sqrt{\frac{1}{B}} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^\beta}}. \quad (9)$$

Интеграл в этом выражении не зависит от величины N , он зависит только от показателя степени β , поэтому зависимость времени раскручивания от числа оборотов задается формулой $T(N) = GN^\gamma$, в которой показатель степени равен

$$\gamma = 1 - \frac{\beta}{2}. \quad (10)$$

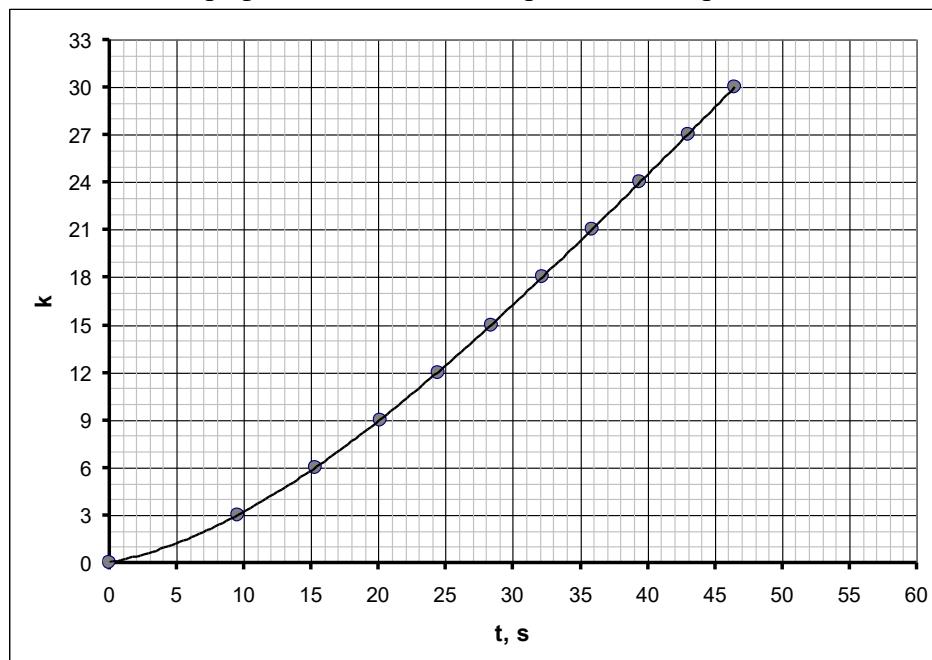
Часть 2. Изучение закона движения

2.1-2.2 Результаты измерений и необходимых расчетов приведены в Таблице 1.

<i>k</i>	<i>t, c</i>	<i>V, c⁻¹</i>	<i>E, Ku</i> (эксп.)	<i>ln k</i>	<i>ln t</i>	<i>E, Ku</i> (теор.)
0	0	0	0			
3	9,55	0,391	0,153	1,099	2,257	0,213
6	15,35	0,568	0,323	1,792	2,731	0,330
9	20,11	0,662	0,438	2,197	3,001	0,427
12	24,42	0,725	0,525	2,485	3,195	0,512
15	28,39	0,774	0,599	2,708	3,346	0,590
18	32,17	0,803	0,645	2,890	3,471	0,662

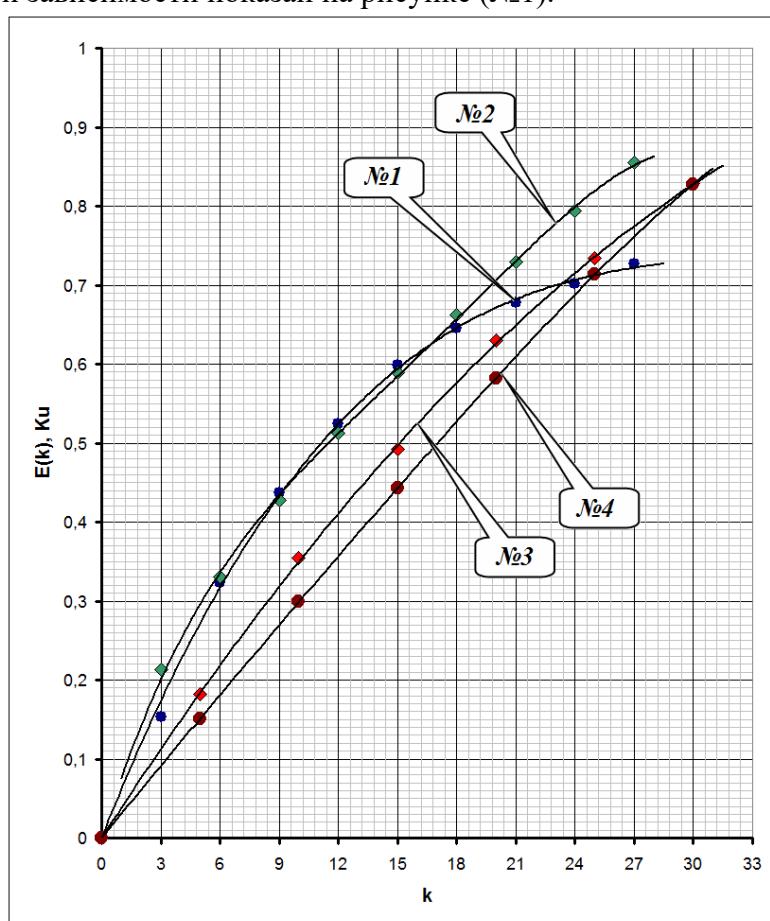
21	35,86	0,823	0,677	3,045	3,580	0,729
24	39,46	0,838	0,702	3,178	3,675	0,794
27	43,02	0,852	0,726	3,296	3,762	0,855
30	46,5			3,401	3,839	0,914

На рисунке ниже показан график зависимости координаты от времени.



2.3 В таблице 1 приведены значения скоростей стержня V , рассчитанные по формуле, приведенной в условии задачи. Значения кинетической энергии рассчитаны по формуле $E = V^2$.

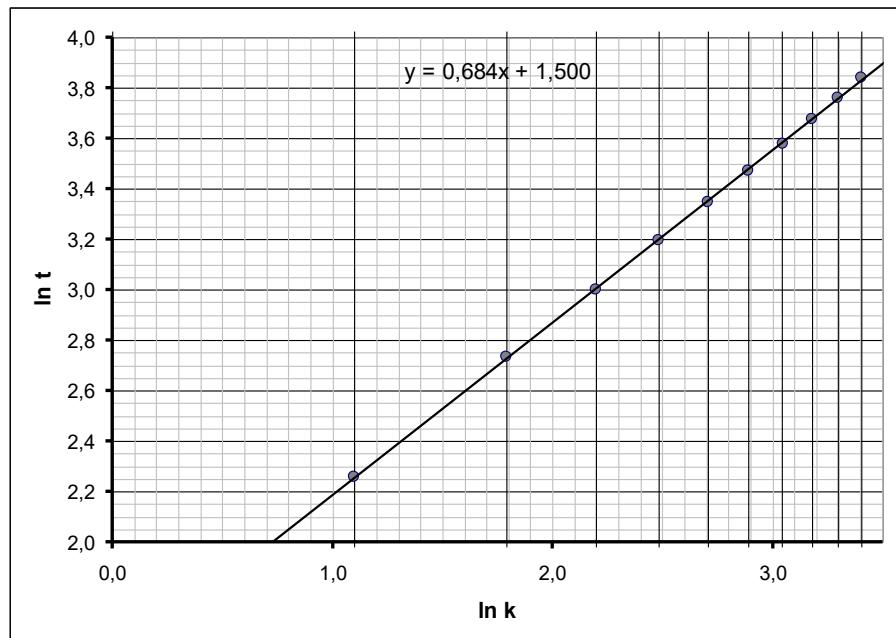
2.4 График полученной зависимости показан на рисунке (№1).



2.5 Потенциальная энергия при указанном нулевом уровне равна

$$U(k) = -E(k). \quad (11)$$

2.6 График зависимости времени движения от числа сделанных оборотов показан на рисунке ниже в логарифмическом масштабе.



2.7 Коэффициенты этой зависимости $\ln t = \alpha \ln k + \ln A$, рассчитанные по МНК равны

$$\alpha = 0.684 \pm 0.006, \quad (12)$$

$$\ln A = 1.50 \pm 0.02. \quad (13)$$

Расчет параметра A и его погрешности приводит к результатам

$$A = \exp(\ln A) = 4.48 \text{ Ku}, \quad (14)$$

$$\Delta A = A \Delta(\ln A) = \pm 0.07 \text{ Ku}. \quad (15)$$

2.8-2.9 Для расчета кинетической энергии следует воспользоваться формулой (5) с найденными численными значениями параметров. Результаты расчетов приведены в Таблице 1 и на графике п. 2.4 с обозначением №2.

Часть 3. Поэтапное зондирование

3.1-3.5 Результаты измерений, расчетов, графики и итоговый результат (рассчитанное значение изменения энергии E_{5-10}) для каждого интервала приведены ниже.

Значения параметра α рассчитаны как коэффициент наклона графика

$$\alpha = \frac{\Delta(\ln t)}{\Delta(\ln k)}. \quad (16)$$

Удобно снять значения крайних точек на графике (точки пресечения с границами графика) – их значения указаны как z_{min} и z_{max} , тогда как $\Delta(\ln k) = 2.5$.

Значение параметра $\ln A$ представляют собой значения координаты пересечения прямой с осью ординат.

Для расчета изменения энергии используется формула

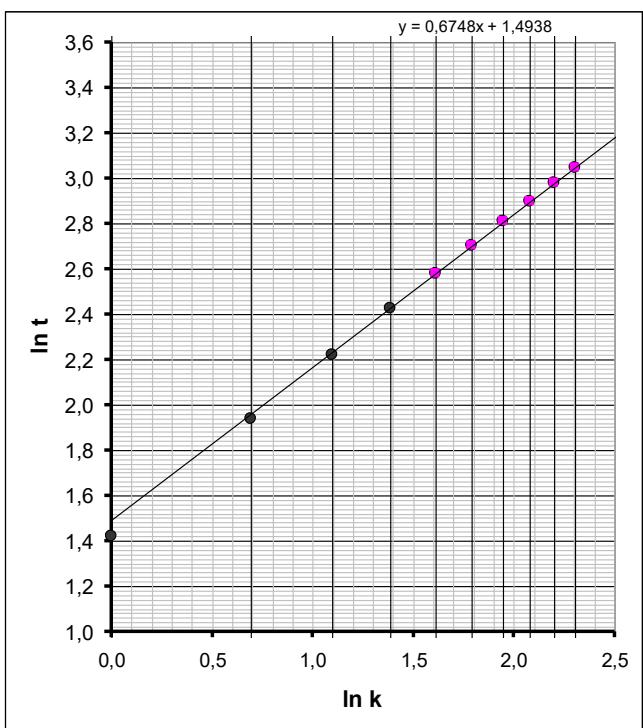
$$E_{5-10} = \left(\frac{10^{1-\alpha}}{\alpha A} \right)^2 - \left(\frac{5^{1-\alpha}}{\alpha A} \right)^2 = \left(\frac{5^{1-\alpha}}{\alpha A} \right)^2 (4^{1-\alpha} - 1). \quad (17)$$

Интервал 35-25

k	$t, \text{ с}$	$\ln k$	$\ln t$
0	0,00		
1	4,14	0,000	1,421
2	6,96	0,693	1,940
3	9,19	1,099	2,218
4	11,29	1,386	2,424
5	13,17	1,609	2,578
6	14,94	1,792	2,704
7	16,60	1,946	2,809
8	18,09	2,079	2,895
9	19,63	2,197	2,977
10	21,04	2,303	3,046

$$\begin{aligned}\alpha &= 0,672 & z_{\max} &= 3,18 \\ \ln A &= 1,500 & z_{\min} &= 1,50 \\ A &= 4,482\end{aligned}$$

$$E_{5-10} = \mathbf{0,182 \text{ Ku}}$$

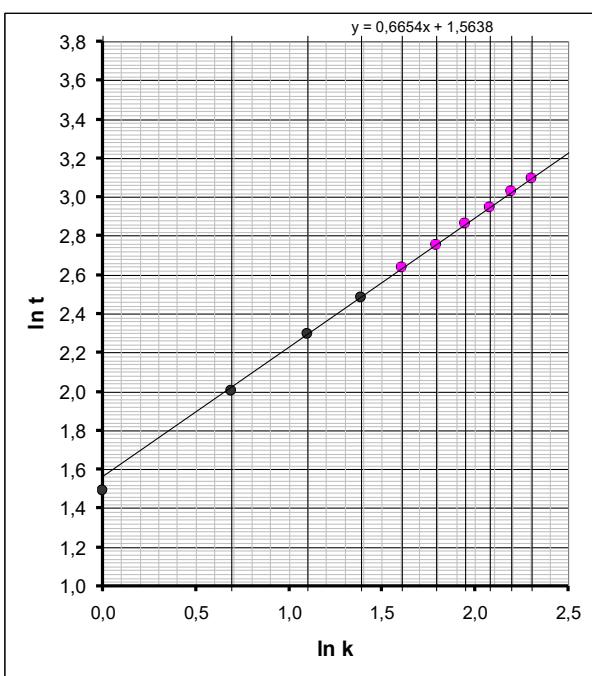


Интервал 30-20

k	$t, \text{ с}$	$\ln k$	$\ln t$
0	0		
1	4,43	0,000	1,488
2	7,43	0,693	2,006
3	9,92	1,099	2,295
4	11,96	1,386	2,482
5	13,94	1,609	2,635
6	15,71	1,792	2,754
7	17,47	1,946	2,860
8	19,06	2,079	2,948
9	20,61	2,197	3,026
10	22,09	2,303	3,095

$$\begin{aligned}\alpha &= 0,664 & z_{\max} &= 3,23 \\ \ln A &= 1,570 & z_{\min} &= 1,57 \\ A &= 4,807\end{aligned}$$

$$E_{5-10} = \mathbf{0,172 \text{ Ku}}$$

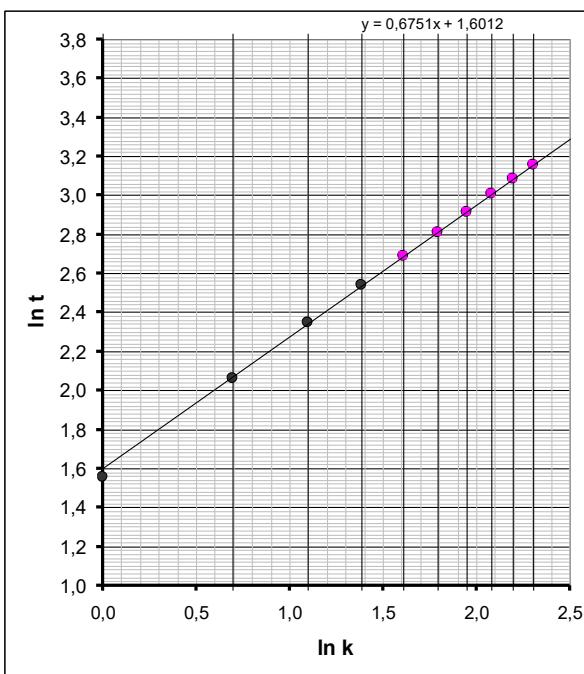


Интервал 25-15

k	$t, \text{ с}$	$\ln k$	$\ln t$
0	0,00		
1	4,73	0,000	1,554
2	7,85	0,693	2,061
3	10,44	1,099	2,346
4	12,69	1,386	2,541
5	14,73	1,609	2,690
6	16,59	1,792	2,809
7	18,41	1,946	2,913
8	20,20	2,079	3,006
9	21,87	2,197	3,085
10	23,48	2,303	3,156

$$\begin{aligned}\alpha &= 0,680 & z_{\max} &= 2,23 \\ \ln A &= 1,600 & z_{\min} &= 0,57 \\ A &= 4,953\end{aligned}$$

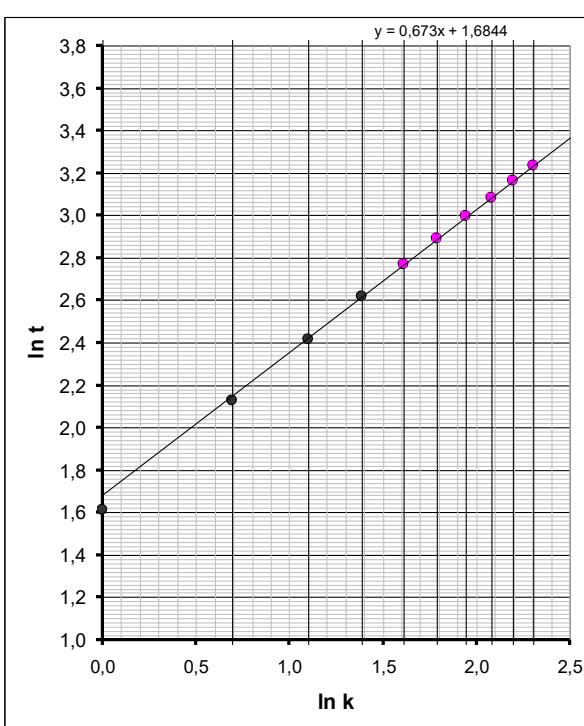
$$E_{5-10} = \mathbf{0,138 \text{ Ku}}$$

**Интервал 20-10**

k	$t, \text{ с}$	$\ln k$	$\ln t$
0	0		
1	5,01	0,000	1,611
2	8,38	0,693	2,126
3	11,19	1,099	2,415
4	13,67	1,386	2,615
5	15,92	1,609	2,768
6	17,98	1,792	2,889
7	19,99	1,946	2,995
8	21,86	2,079	3,085
9	23,61	2,197	3,162
10	25,39	2,303	3,234

$$\begin{aligned}\alpha &= 0,672 & z_{\max} &= 3,30 \\ \ln A &= 1,680 & z_{\min} &= 1,60 \\ A &= 5,366\end{aligned}$$

$$E_{5-10} = \mathbf{0,127 \text{ Ku}}$$

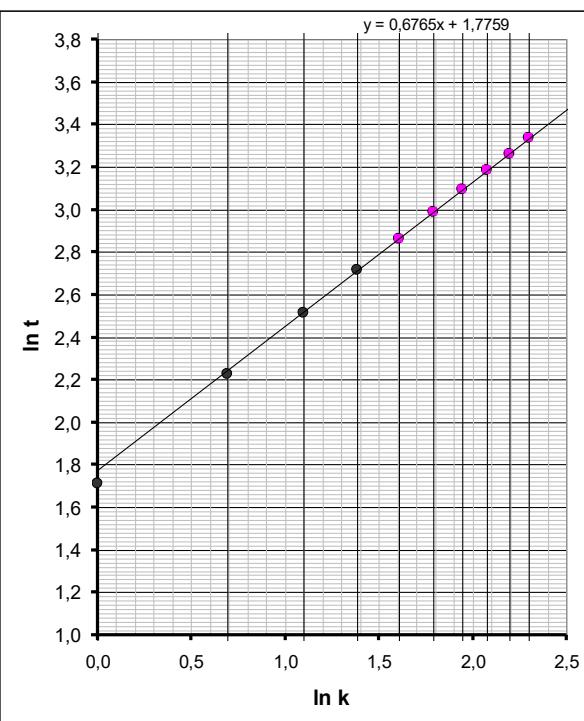


Интервал 15-5

k	$t, \text{ с}$	$\ln k$	$\ln t$
0	0		
1	5,55	0,000	1,714
2	9,28	0,693	2,228
3	12,33	1,099	2,512
4	15,08	1,386	2,713
5	17,53	1,609	2,864
6	19,86	1,792	2,989
7	22,04	1,946	3,093
8	24,13	2,079	3,183
9	26,07	2,197	3,261
10	28,05	2,303	3,334

$$\begin{array}{lll} \alpha = & 0,676 & z_{\max} = 3,47 \\ \ln A = & 1,780 & z_{\min} = 1,78 \\ A = & 5,930 & \end{array}$$

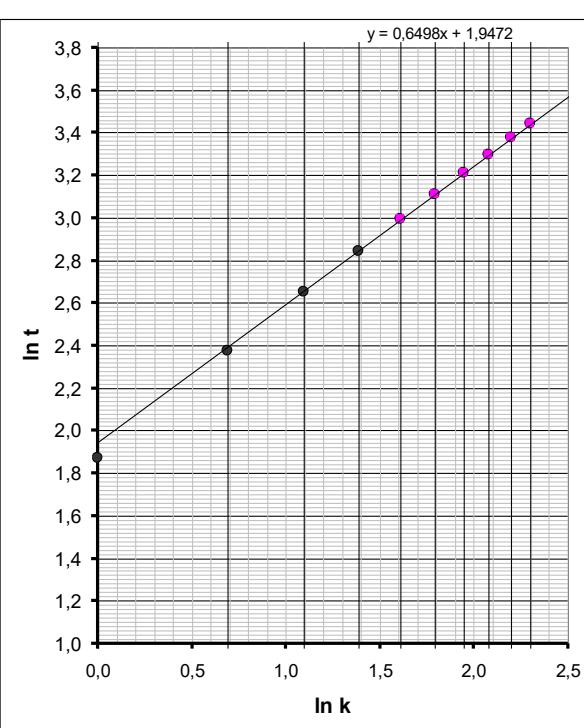
$$E_{5-10} = \mathbf{0,100 \ Ku}$$



k	$t, \text{ с}$	$\ln k$	$\ln t$
0	0		
1	6,48	0,000	1,869
2	10,74	0,693	2,374
3	14,16	1,099	2,650
4	17,16	1,386	2,843
5	19,94	1,609	2,993
6	22,44	1,792	3,111
7	24,84	1,946	3,212
8	27,08	2,079	3,299
9	29,28	2,197	3,377
10	31,23	2,303	3,441

$$\begin{array}{lll} \alpha = & 0,648 & z_{\max} = 2,57 \\ \ln A = & 1,950 & z_{\min} = 0,95 \\ A = & 7,029 & \end{array}$$

$$E_{5-10} = \mathbf{0,094 \ Ku}$$



3.6 Итоговая таблица выглядит следующим образом.

Верхняя граница N	Нижняя граница N	E_{5-10} , Ku	N	k	$E(k)$
35	25	0,182		0	0
30	20	0,172	30	5	0,182
25	15	0,138	25	10	0,354
20	10	0,127	20	15	0,492
15	5	0,100	15	20	0,619
10	0	0,094	10	25	0,719
			5	30	0,814

Значения $E(k)$ получены посредством поэтапного суммирования:

$$E_0 = 0 \quad (18)$$

$$E(k + 5) = E(k) + E_{5-10}.$$

График данной зависимости №3 приведен на графике п.2.4.

Часть 4. Время раскручивания

4.1 Таблица результатов измерений представлена ниже.

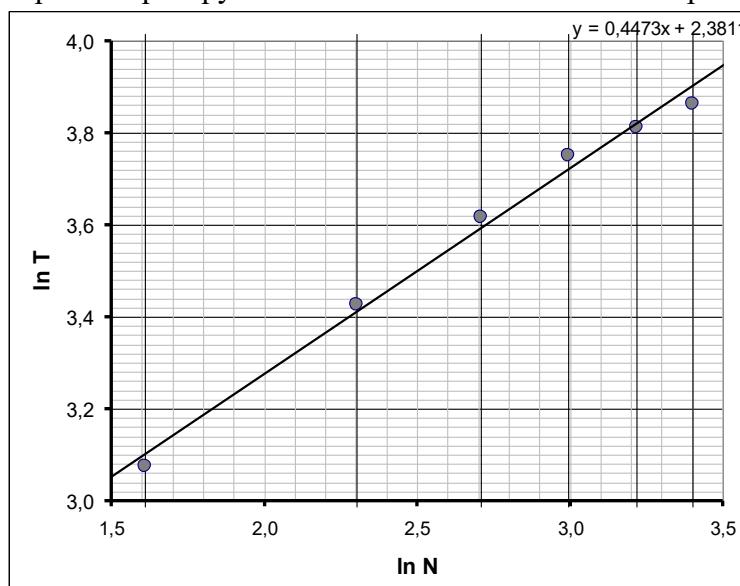
N	$T, с$		$\ln N$	$\ln T$	N	k	$E(k)$
30	47,63		3,40	3,86		0	0,000
25	45,30		3,22	3,81	30	5	0,149
20	42,62		3,00	3,75	25	10	0,294
15	37,25		2,71	3,62	20	15	0,436
10	30,81		2,30	3,43	15	20	0,572
5	21,65		1,61	3,07	10	25	0,702
					5	30	0,814

4.2. Для оценки погрешности измерения времени раскручивания необходимо провести несколько измерений. Расчет случайной погрешности строго проводится по формуле

$$\Delta T = t_{n,p} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}} \quad (19)$$

и составляет несколько сотых долей секунды.

4.3 График зависимости времени раскручивания от начального числа оборотов показан на рисунке.



4.4 Значение показателя степени может быть найдено, как по графику, так и по МНК. Его значение равно

$$\gamma = 0.45. \quad (20)$$

4.5 Показатель степени в формуле для потенциальной энергии равен

$$\beta = 2(1 - \gamma) = 1.10. \quad (21)$$

4.6 Для расчета кинетической энергии необходимо:

а) по формуле $U' = N^\beta$ рассчитать значения потенциальной энергии;

б) по этим значениям рассчитать значения кинетической энергии (с точностью до коэффициента)

$$E'(k) = U'(30) - U'(N - k). \quad (22)$$

в) провести нормировку энергии

$$E(k) = \frac{E(30)}{E'(30)} E'(k), \quad (23)$$

где $E(30)$ - значение кинетической энергии, найденное в части 3 задания (по нашим измерениям $E(30) = 0.814$).

Результаты расчетов приведены в таблице 4.1. График №4 приведен на графике п.2.4.

Схема оценивания

Правильные расчеты по неправильным формулам не оцениваются!
За неверное округление – штраф (-0,2 балла)

Пункт	Содержание	Баллы	Всего за пункт
Часть 1. Теоретическое введение			
1.1	Формула (2): $E = \pi^2 \left(\frac{m_1 a^2}{6} + m_2 h^2 \right) V^2$	0,2	0,5
	Измерены $a = (25 \pm 1)$ см и $h = (15 \pm 1)$ см	0,2	
	Численное значение в формуле (3): $1 Ku \approx 6.35 \cdot 10^{-3}$ Дж	0,1	
1.2	Формула (4): $V(k) = \frac{k^{1-\alpha}}{\alpha A}$	0,3	0,5
	Формула (5): $E(k) = \left(\frac{k^{1-\alpha}}{\alpha A} \right)^2$	0,2	
1.3	Интеграл (7): $T = \int_0^N \frac{dk}{V(k)}$	0,2	0,6
	Формула (9): $T(N) = N^{1-\frac{\beta}{2}} \sqrt{\frac{1}{B}} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^\beta}}$	0,3	
	Показатель степени (10): $\gamma = 1 - \frac{\beta}{2}$	0,1	
Часть 2. Изучение закона движения			
2.1	Проведены измерения времен $0,1 \times 10$ В пределах 10% $0,1 \times 10$ <i>(В пределах 20% $0,05 \times 10$)</i>	1	1
Пункты 2.2 – 2.4 и 2.6 – 2.9 оцениваются, если оценен п. 2.1			
2.2	Построение графика $k(t)$:		0,3
	точки нанесены в соответствии с таблицей	0,2	
	проведена сглаживающая линия	0,1	
2.3	Проведены расчеты кинетической энергии	0,4	0,4
2.4	Построение графика $E(k)$		0,3
	точки нанесены в соответствии с таблицей	0,2	
	проведена сглаживающая линия	0,1	
2.5	Формула (11) для потенциальной энергии: $U(k) = -E(k)$	0,2	0,2
2.6	Построение графика $\ln t$ от $\ln k$:		0,4
	рассчитаны логарифмы времен	0,1	
	точки нанесены в соответствии с таблицей	0,2	
	проведена сглаживающая прямая	0,1	
2.7	Расчет параметров зависимости		0,9
	использован МНК	0,2	
	численное значение в диапазоне $\alpha = 0,68 \pm 0,05$ <i>(в диапазоне $\alpha = 0,68 \pm 0,10$ - 0,1)</i>	0,2	
	погрешность $\Delta \alpha$	0,1	
	численное значение в диапазоне $A = 4,5 \pm 0,3$ <i>(в диапазоне $A = 4,5 \pm 0,6$ - 0,1)</i>	0,2	
	погрешность А (формула - число)	0,2	
2.8	Расчет значений энергии $E(k)$ «теор»		0,5
2.9	Построение графика $E(k)$ <i>(оценивается, если оценен п.2.8)</i>		0,3
	точки нанесены в соответствии с таблицей	0,2	
	проведена сглаживающая линия	0,1	

Часть 3. Поэтапное зондирование на всех этапах пункты 3.2 – 3.5 оцениваются, если оценены результаты измерений соответствующего п 3.1			
Интервал 35-25			
3.1	Проведены измерения В пределах 10% - 0,3 (В пределах 20% - 0,1)		0,3
3.2	Построение графика расчет $\ln t$ точки нанесены в соответствии с таблицей	0,1 0,1	0,2
3.3	проведена сглаживающая прямая		
3.4	Расчет параметров формула для α : $\alpha = \frac{\Delta(\ln t)}{\Delta(\ln k)}$ формула для A : $A = \exp(\ln A)$ численное значение в диапазоне $\alpha = 0,67 \pm 0,06$ (в диапазоне $\alpha = 0,67 \pm 0,10$ - 0,1) численное значение в диапазоне $A = 4,5 \pm 0,03$ (в диапазоне $A = 4,5 \pm 0,06$ - 0,1)	0,1 0,1 0,3 0,3	0,8
3.5	Расчет энергии формула (17): $E_{5-10} = \left(\frac{10^{1-\alpha}}{\alpha A}\right)^2 - \left(\frac{5^{1-\alpha}}{\alpha A}\right)^2 = \left(\frac{5^{1-\alpha}}{\alpha A}\right)^2 (4^{1-\alpha} - 1)$ Численное значение в диапазоне $E_{5-10} = 0,18 \pm 0,06$ (в диапазоне $E_{5-10} = 0,18 \pm 0,10$ - 0,1)	0,2 0,3	
Интервал 30-20			
3.1	Проведены измерения В пределах 10% - 0,3 (В пределах 20% - 0,1)		0,3
3.2	Построение графика расчет $\ln(t)$ точки нанесены в соответствии с таблицей	0,1 0,1	0,2
3.3	проведена сглаживающая прямая		
3.4	Расчет параметров численное значение в диапазоне $\alpha = 0,66 \pm 0,06$ (в диапазоне $\alpha = 0,66 \pm 0,10$ - 0,1) численное значение в диапазоне $A = 4,8 \pm 0,03$ (в диапазоне $A = 4,8 \pm 0,06$ - 0,1)	0,3 0,3	0,6
3.5	Численное значение в диапазоне $E_{5-10} = 0,17 \pm 0,06$ (в диапазоне $E_{5-10} = 0,17 \pm 0,10$ - 0,1)		
Интервал 25-15			
3.1	Проведены измерения В пределах 10% - 0,3 (В пределах 20% - 0,1)		0,3
3.2	Построение графика расчет $\ln(t)$ точки нанесены в соответствии с таблицей	0,1 0,1	0,2
3.3	проведена сглаживающая прямая		
3.4	Расчет параметров численное значение в диапазоне $\alpha = 0,68 \pm 0,06$ (в диапазоне $\alpha = 0,68 \pm 0,10$ - 0,1)	0,3	0,6

	численное значение в диапазоне $A = 4,95 \pm 0,03$ (в диапазоне $A = 4,95 \pm 0,06 - 0,1$)	0,3	
3.5	Численное значение в диапазоне $E_{5-10} = 0,14 \pm 0,06$ (в диапазоне $E_{5-10} = 0,14 \pm 0,10 - 0,1$)		0,3
	Интервал 20-10		
3.1	Проведены измерения В пределах 10% - 0,3 (В пределах 20% - 0,1)		0,3
3.2	Построение графика расчет $\ln(t)$	0,1	0,2
	точки нанесены в соответствии с таблицей	0,1	
3.3	проведена сглаживающая прямая		0,1
3.4	Расчет параметров численное значение в диапазоне $\alpha = 0,67 \pm 0,06$ (в диапазоне $\alpha = 0,67 \pm 0,10 - 0,1$)	0,3	0,6
	численное значение в диапазоне $A = 5,36 \pm 0,03$ (в диапазоне $A = 5,36 \pm 0,06 - 0,1$)	0,3	
3.5	Численное значение в диапазоне $E_{5-10} = 0,13 \pm 0,06$ (в диапазоне $E_{5-10} = 0,13 \pm 0,10 - 0,1$)		0,3
	Интервал 15-5		
3.1	Проведены измерения В пределах 10% - 0,3 (В пределах 20% - 0,1)		0,3
3.2	Построение графика расчет $\ln(t)$	0,1	0,2
	точки нанесены в соответствии с таблицей	0,1	
3.3	проведена сглаживающая прямая		0,1
3.4	Расчет параметров численное значение в диапазоне $\alpha = 0,67 \pm 0,06$ (в диапазоне $\alpha = 0,67 \pm 0,10 - 0,1$)	0,3	0,6
	численное значение в диапазоне $A = 5,93 \pm 0,03$ (в диапазоне $A = 5,93 \pm 0,06 - 0,1$)	0,3	
3.5	Численное значение в диапазоне $E_{5-10} = 0,10 \pm 0,06$ (в диапазоне $E_{5-10} = 0,10 \pm 0,10 - 0,1$)		0,3
	Интервал 10-0		
3.1	Проведены измерения В пределах 10% - 0,3 (В пределах 20% - 0,1)		0,3
3.2	Построение графика расчет $\ln(t)$	0,1	0,2
	точки нанесены в соответствии с таблицей	0,1	
3.3	проведена сглаживающая прямая		0,1
3.4	Расчет параметров численное значение в диапазоне $\alpha = 0,65 \pm 0,06$ (в диапазоне $\alpha = 0,65 \pm 0,10 - 0,1$)	0,3	0,6
	численное значение в диапазоне $A = 7,03 \pm 0,03$ (в диапазоне $A = 7,03 \pm 0,06 - 0,1$)	0,3	
3.5	Численное значение в диапазоне $E_{5-10} = 0,09 \pm 0,06$ (в диапазоне $E_{5-10} = 0,09 \pm 0,10 - 0,1$)		0,3

3.6	Расчет зависимости энергии от координаты		0,9
	$E_0 = 0$ формулы (18): $E(k + 5) = E(k) + E_{5-10}$	0,2	
	Проведен расчет энергий	0,4	
	Построение графика №3	0,3	
Часть 4. Время раскручивания			
4.1	Проведены измерения времен 0,2х6 в пределах 10% 0,2х6 (в пределах 20% 0,1х6)		1,2
<i>пункты 4.3 – 4.5 и 4.7 оцениваются, если оценены результаты измерений в п 4.1</i>			
4.2	Оценка погрешности измерения времени проведено 5-7 измерений (допустимая погрешность – 10%) (3-4 измерения – 0,1)	0,3	0,6
	проведено усреднение	0,1	
	оценена погрешность по любой правильной формуле	0,2	
4.3	Построение графика $T(N)$: рассчитаны $\ln T$		0,4
	точки нанесены в соответствии с таблицей	0,2	
	проведена сглаживающая прямая	0,1	
4.4	Определен показатель степени $\gamma = 0,45 \pm 0,03$ (в диапазоне $\gamma = 0,45 \pm 0,06$ - 0,1)		0,3
4.5	Рассчитано значение $\beta = 2(1 - \gamma)$		0,2
4.6	Расчет энергий		0,8
	Методика расчета		
	расчет потенциальной энергии	0,1	
	расчет кинетической энергии (22): $E'(k) = U'(30) - U'(N - k)$	0,1	
	нормировка по формуле (23): $E(k) = \frac{E(30)}{E'(30)} E'(k)$	0,1	
	проведены расчеты энергии	0,5	
4,7	построение графика №4	0,3	0,3
ВСЕГО			20