



Задание 2. Взаимодействия цилиндрических магнитов

Описание магнитных полей и магнитных взаимодействий является математически более сложной задачей, чем описание электростатических взаимодействий. Во многом это связано с отсутствием точечных магнитных зарядов, из-за чего простейшим источником магнитного поля является магнитный диполь. Однако, во многих задачах можно формально (но математически корректно) ввести точечные магнитные заряды, не забывая при этом, что реально существующие источники магнитного поля имеют нулевой суммарный магнитный заряд. Такой подход используется в данном задании при расчете магнитных полей, создаваемых постоянными магнитами, и характеристик их взаимодействия.

Теоретическое введение.

Согласно современному представлению магнитное поле постоянных магнитов создается токами намагничивания, протекающими по поверхности намагниченного тела (эта идея первоначально была сформулирована А.М. Ампером и часто называется гипотезой Ампера).

Таким образом, поле небольшого цилиндрического магнита эквивалентно полю кругового тока. В качестве основной характеристики витка с током выступает магнитный момент, который равен

$$p_m = IS, \quad (1)$$

где I - сила тока в контуре, S - площадь этого контура.

Альтернативный подход к описанию поля цилиндрического магнита является рассмотрение поля магнитного диполя – частицы, состоящей из двух точечных противоположных магнитных зарядов ($+q_m$ и $-q_m$), находящихся на малом расстоянии a друг от друга. Магнитный момент в этом случае определяется как

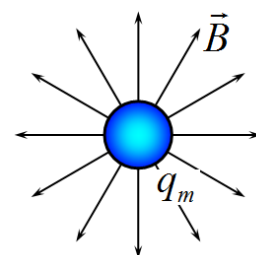
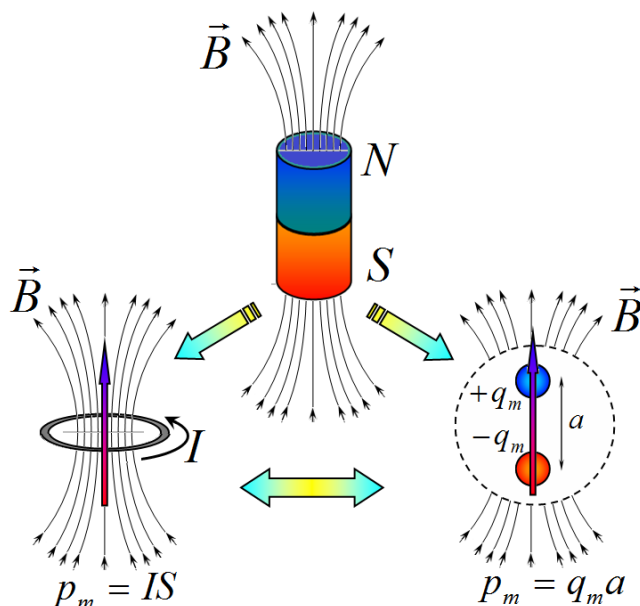
$$p_m = q_m a, \quad (2)$$

Отметим, что оба способа описания магнитных полей справедливы для точек, расстояние до которых от источников (магнита, кольца с током, магнитного диполя) значительно больше размеров самих источников. Считайте, что это условие выполняется во всех пунктах данной задачи.

Точечный магнитный заряд q_m создает центральное магнитное поле, модуль вектора индукции которого определяется по закону, аналогичному закону Кулона для электростатических полей

$$B = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi R^2}, \quad (3)$$

здесь R - расстояние от точечного заряда, то точки, в которой рассчитывается поле, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн} \cdot \text{м}$ - магнитная постоянная.



На точечный магнитный заряд q_m со стороны магнитного поля с индукцией \vec{B} действует сила, равная

$$\vec{F} = q_m \vec{B} \quad (3)$$

Основной характеристикой постоянных магнитов является остаточная намагниченность M_R ,

которая определяется как магнитный момент единицы объема $M_R = \frac{p_m}{\Delta V}$.

Эта величина обычно указывается в паспорте магнита. Вместо остаточной намагниченности также приводят величину $B_R = \mu_0 M_R$, которая называется остаточная индукция (т.е. индукция магнитного поля внутри магнита).

Еще раз подчеркнем, в настоящее время магнитных зарядов не обнаружена, поэтому величины магнитных зарядов q_m не должны входить в конечные результаты, которые должны выражаться через реальные характеристики магнитов – их магнитный момент p_m и намагниченность M .

Часть 1. Характеристики магнита.

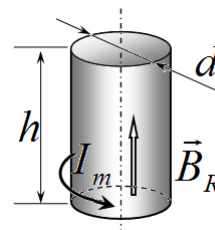
В данной задаче рассматривается постоянный цилиндрический неодимовый магнит со следующими характеристиками:

диаметр магнита $d = 4,0 \text{ мм}$;

высота магнита $h = 10,0 \text{ мм}$;

остаточная индукция поля магнита $B_R = 1,4 \text{ Тл}$ и направлена вдоль оси магнита;

плотность материала магнита $\rho_{Nd} = 7,6 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.



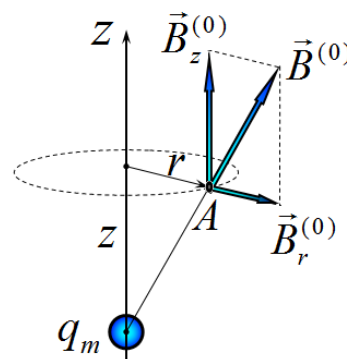
1.1 Рассчитайте массу магнита m .

1.2 Рассчитайте магнитный момент магнита p_m .

1.3 Рассчитайте силу тока намагничивания, текущего по боковой поверхности магнита I_m .

Часть 2. Магнитное поле магнита.

Рассмотрите магнитное поле, создаваемое точечным магнитным зарядом q_m . Точечный заряд находится в начале отсчета оси z . Положение произвольной точки задается координатой z и расстоянием до этой оси r . В этом случае вектор индукции магнитного поля $\vec{B}^{(0)}$ разумно разложить на две компоненты: осевую $\vec{B}_z^{(0)}$, направленную параллельно оси z ; радиальную $\vec{B}_r^{(0)}$, направленную перпендикулярно оси.

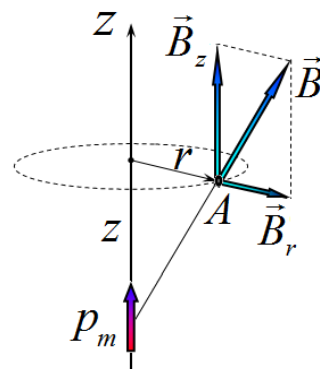


2.1 Запишите формулы для осевой $B_z^{(0)}(z, r)$ и радиальной $B_r^{(0)}(z, r)$ компонент вектора индукции поля точечного заряда, как функции координат точки (z, r) .

Теперь Вам необходимо рассмотреть магнитное поле, создаваемое описанным цилиндрическим магнитом. Для расчета этого поля можно считать, что оно совпадает с магнитным полем магнитного диполя.

2.2 Нарисуйте схематически картину силовых линий магнитного поля, создаваемого магнитным диполем (цилиндрическим магнитом).

Пусть в начале оси z находится магнитный диполь с магнитным моментом p_m , направленным вдоль оси z . Положение произвольной точки A , как и ранее, задается координатами (z, r) .



2.3 Найдите зависимость осевой компоненты индукции поля магнитного диполя $B_z(z, r)$, от координат точки (z, r) .

2.4 Постройте схематический график зависимости осевой компоненты вектора индукции $B_z(z_0, r)$ от координаты r при некотором фиксированном значении координаты $z_0 > 0$.

2.5 Найдите зависимость индукции поля на оси z в зависимости от координаты z - $B_z(z)$.

2.6 Найдите зависимость радиальной компоненты индукции поля магнитного диполя $B_r(z, r)$, от координат точки (z, r) .

2.7 Постройте схематический график зависимости радиальной компоненты вектора индукции $B_r(z, r_0)$ от координаты z при некотором фиксированном значении координаты $r_0 > 0$.

2.8 Найдите значения модуля координаты $z = b$, при котором модуль функции $B_z(z, r_0)$ принимает максимальные значения $B_{r, \max}$. Найдите, чему равно это максимальное значение.

Примечания.

1. Вы можете построить схематические графики, даже если вам не удалось получить явные функциональные зависимости – это будет оценено!

2. Для облегчения вашей работы дадим математическую подсказку. Если величина a мала, то для расчета поля диполя Вы можете использовать следующее приближение, справедливое для любой функции

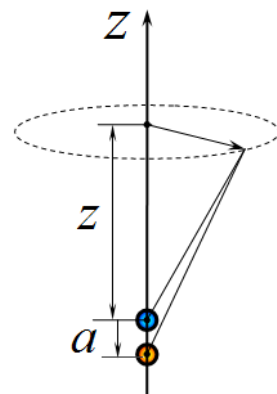
$$F(z + a) \approx F(z) + F'(z) \cdot a. \quad (4)$$

где $F'(z)$ - производная функции $F(z)$, вычисленная в точке z .

3. При необходимости Вы можете использовать приближенную формулу

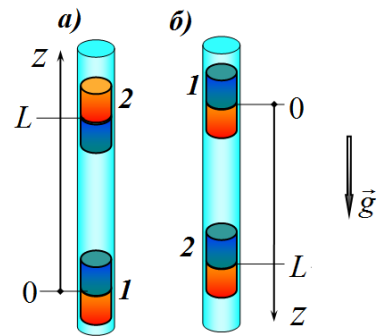
$$(1 + x)^\gamma \approx 1 + \gamma x, \quad (5)$$

справедливую при $x \ll 1$ и любых степенях γ .



Часть 3. Притяжение и отталкивание.

Два одинаковых цилиндрических магнита помещены в вертикальную стеклянную трубку. Магнит 1 закреплен, магнит 2 может свободно двигаться вдоль трубки. Расстояние между магнитами можно считать значительно больше размеров магнитов. Ускорение свободного падения считать равным $g = 9,8 \frac{м}{с^2}$. Ответы выразите через магнитный момент магнитов p_m и их массу m .



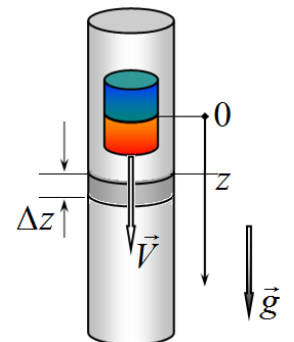
- 3.1** Найдите зависимость силы магнитного взаимодействия между магнитами, как функцию расстояния z между ними.
- 3.2** Найдите, при каком расстоянии между магнитами L , магнит 2 может находиться в равновесии. Рассмотрите два случая, а) и б) ориентации магнитов, показанные на рисунке.
- 3.3** Укажите, какой из экспериментов, а) или б) может быть продемонстрирован экспериментально. Ответ кратко обоснуйте.
- 3.4** Рассчитайте численное значение равновесного расстояния L , для магнитов, параметры которого приведены в Части 1.

Часть 4. Магнитная вязкость – токи Фуко.

Цилиндрический магнит помещают внутрь длинной вертикальной тонкостенной алюминиевой трубки. Внутренний радиус трубки равен $r_0 = 3,0 \text{ мм}$, толщина стенок равна $h_0 = 0,30 \text{ мм}$. Удельное электрическое сопротивление алюминия равно $\rho = 2,8 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$.

По-прежнему, считаем массу магнита m и его магнитный момент p_m известными.

Пусть скорость движения магнита постоянна и равна V . Выделим на стенке трубки тонкий слой толщиной Δz , находящийся на расстоянии z от середины магнита. В пп. 4.1 – 4.4 ответы выразите через параметры магнитного поля b и $B_{r \max}$, найденные в п. 2.8.



- 4.1** Найдите силу индуцированного тока ΔI , протекающего по выделенному кольцу Δz .
- 4.2** Найдите мощность теплоты, выделяющейся в трубке при движении магнита.
- 4.3** Найдите силу вязкого магнитного трения, действующую на движущийся магнит.
- 4.4** Найдите скорость установившегося падения магнита в трубке V .
- 4.5** Рассчитайте численное значение скорости падения магнита, характеристики которого приведены в Части 1.

Примечание.

Зависимость радиальной составляющей магнитного поля магнита на стенке трубки можно приближенно заменить на ступенчатую функцию, показанную на рисунке. Используйте параметры этой функции b и $B_{r \max}$, найденные в п. 2.8.

Если вам не удалось найти ответы в п.2.8, то в данной части считайте их известными.

