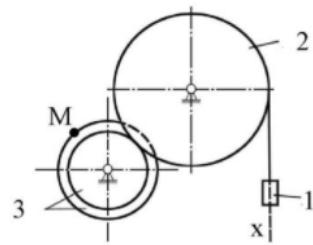


Твердое тело.

Абсолютно твёрдое тело — модель классической механики. Тело, расстояние между произвольными точками которого не изменяется.

В данной задаче предлагается вывести некоторые факты, связанные с твердым телом, без которых дальнейшее решение задач затруднительно.

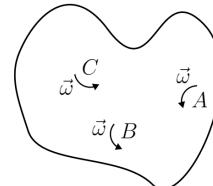


!!! Во всех частях задачи мы рассматриваем плоское движение твердого тела !!!

Часть О. Теоретико-творческая.

Рассмотрим 2 произвольные точки вращающегося твердого тела.

(О.1) Докажите, что угловая скорость $\vec{\omega}$ твердого тела относительно любой точки твердого тела одна и та же.



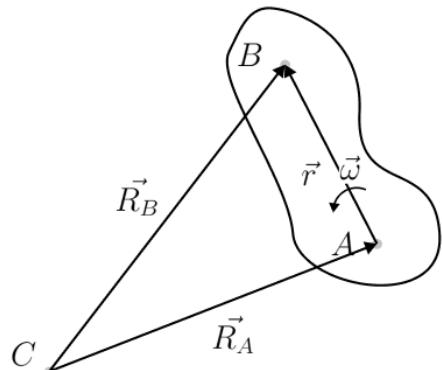
Пусть вектор \vec{a} остается постоянным по модулю. $\vec{\omega}$ — угловая скорость вектора \vec{a} . (Подсказка: постоянный по модулю вектор можно рассматривать как твердое тело.)

(О.2) Докажите, что $\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{a}$

Даже если вы не смогли доказать факты из Части О, вы можете их свободно использовать.

Часть 1. Кинематика твердого тела.

В ИСО покоятся точка C и движется твердое тело. Точки A и B принадлежат твердому телу. Все параметры указаны на рисунке.



(1.1) Запишите соотношение для векторов R_A, R_B, \vec{r} .

(1.2) Найдите \dot{r} . Ответ выразите через $\vec{\omega}, \vec{r}$.

Скорости точек твердого тела связаны формулой Эйлера:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}$$

(1.3) Докажите формулу Эйлера.

Ускорения точек твердого тела связаны формулой Ривальса:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

(1.4) Чему равно \vec{a}_n ? Ответ выразите через $\vec{\omega}, \vec{r}$

(1.5) Чему равно \vec{a}_τ ? Ответ выразите через $\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}$

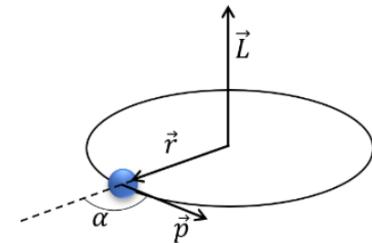
(1.6) Покажите, что $\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r}$

Часть 2. Динамика твердого тела.

Для описания движения твердого тела удобной является величина, называемая **момент импульса**. Для материальной точки момент импульса:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Где \vec{p} - импульс материальной точки, \vec{r} - радиус-вектор положения точки (см рис.).

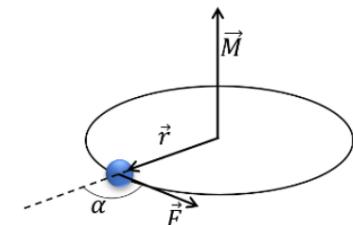


По аналогии со вторым законом Ньютона:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Для момента импульса справедливо (основное уравнение динамики вращательного движения):

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$



Где \vec{M} - момент силы \vec{F} :

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Нас интересует, как преобразуется момент импульса.

Движущаяся точка.

Иногда бывает удобно записывать основное уравнение динамики вращательного движения относительно движущейся точки.

(1.4) Чему равно \vec{a}_n ? Ответ выразите через $\vec{\omega}, \vec{r}$

(1.5) Чему равно \vec{a}_τ ? Ответ выразите через $\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}$

(1.6) Покажите, что $\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r}$

Рассмотрим твердое тело. Его можно разбить на множество материальных точек массами $m_1, m_2, m_3 \dots m_n$ и скоростями $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \dots \vec{v}_n$ относительно некоторой точки С, покоящейся в ИСО. Радиус-вектор до i-ой точки \vec{r}_i .

Скорость некоторой точки (нематериальной) А \vec{V} - **постоянна**, а радиус вектор этой точки \vec{r}_A .

(2.1) Чему равен момент импульса \vec{L}_i i-ой точки. Ответ выразите через $\vec{r}_i, \vec{v}_i, m_i$

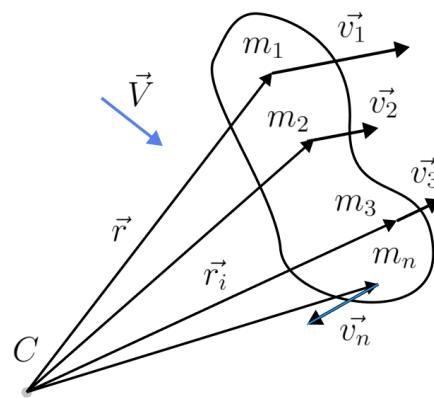
(2.2) Запишите, чему равен суммарный момент импульса тела \vec{L}_C относительно точки С. В ответе запишите сумму. Ответ выразите через $\vec{r}_i, \vec{v}_i, m_i$

(2.3) Найдите расстояние R_i и скорость \vec{u}_i до i-ой точки тела относительно точки А. Ответ выразите через \vec{r}_i, \vec{r}_A

(2.4) Запишите, чему равен суммарный момент импульса тела \vec{L}_C относительно точки С. В ответе запишите сумму. Ответ выразите через $\vec{R}_i, \vec{r}_A, \vec{u}_i, m_i, \vec{V}$

(2.5) Запишите, чему равен суммарный момент импульса тела относительно точки А. Ответ выразите через скорость центра масс тела \vec{V}_C , массу тела M , скорость \vec{V} , \vec{r}_A и момент импульса тела относительно точки С \vec{L}_A .

(2.6) Покажите, что $\vec{L}_x = \vec{L}_C + \vec{r}_C \times \vec{p}$. Где \vec{L}_x - момент импульса относительно некоторой точки X. \vec{L}_C - момент импульса относительно некоторой центра масс тела. \vec{r}_C - положение центра масс тела относительно точки X. \vec{p} - импульс тела относительно точки X.



Т.е. момент импульса тела относительно точки равен моменту импульса тела относительно центра масс и моменту тела относительно точки как целого.

Математические подсказки:

$$\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$$