

А. И. Слободянюк

ФИЗИКА ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

Механика

*Пособие для учащихся учреждений
общего среднего образования
с русским языком обучения*

*Рекомендовано
Научно-методическим учреждением
«Национальный институт образования»
Министерства образования Республики Беларусь*

Минск
«Белорусская ассоциация «Конкурс»
2014

УДК 53(075.3=161.1)

ББК 22.3я721

С48

Рецензенты:

кафедра методики преподавания физики учреждения образования
«Белорусский государственный педагогический университет имени
Максима Танка» (доктор технических наук, заведующий кафе-
дрой *И. М. Елисеева*);

учитель физики высшей категории учреждения образования «Мо-
гилевский государственный областной лицей № 1» *В. В. Барашков*

Книга издана за счет взносов участников конкурсов

Распространяется бесплатно

Слободянюк, А. И.

C48 Физика для любознательных. Механика : пособие для учащихся учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / А. И. Слободянюк. – Минск : Белорус. ассоц. «Конкурс», 2014. – 336 с. : ил.

ISBN 978-985-557-061-6.

В книге систематически изложен раздел физики «Механика». Особое внимание уделяется общим подходам к различным частям этого раздела, а также фундаментальным физическим теориям и законам. Значительное место занимает рассмотрение гидростатики и гидродинамики, так как в этих частях закладываются основы математического описания электромагнитных явлений. Книга содержит целый ряд исторических сведений, касающихся ученых физиков и их открытий.

Данное пособие предназначено для учащихся учреждений общего среднего образования, а также может быть полезно учителям и родителям.

УДК 53(075.3=161.1)

ББК 22.3я721

ISBN 978-985-557-061-6

© Слободянюк А. И., 2014

© Оформление. ОО «БА «Конкурс», 2014

СЛОВО К ЧИТАТЕЛЮ

В последние годы стали модными различные книги, написанные для «чайников». Их столь много, что в стране уже наблюдается явное «перепроизводство» этих самых «чайников».

Если вы решили серьезно заниматься такой замечательной наукой, как физика, то вам необходимо знакомиться с ней серьезно. На первый взгляд, физика — наука очень непростая: возьмите любой учебник, научную статью, монографию — они переполнены громоздкими формулами, графиками, чертежами...

Физика состоит из множества разделов: механики, термодинамики, электродинамики, оптики и т. д. Каждый из них, в свою очередь, делится на более мелкие части. Так, например, в механике вы найдете кинематику, динамику, статику... Часто отдельным физическим явлениям посвящаются отдельные подразделы со своими названиями, например, силу трения изучает трибология, вязкости, пластичности, упругости посвящена наука реология. А попробуйте догадаться, что хромодинамика изучает свойства элементарных частиц!

Физические законы имеют множество приложений, которые объясняют большинство явлений природы. На их основе построена наша современная цивилизация — вы сами без труда можете перечислить не один десяток промышленных, транспортных, бытовых устройств, в основе работы которых лежат физические законы и принципы.

Тем не менее можно утверждать, что в основе физики лежат простые законы, вполне доступные пониманию обычного человека. Надо только постараться их понять. Иными словами, физика — это здравый смысл, часто изложенный на математическом языке. Автор данной книги постарался построить изложение вполне традиционного курса физики средней школы таким образом, чтобы «за деревьями» множества фактов, явлений, правил был виден «лес» — цельные физические теории, основанные на малом числе исходных фундаментальных законов и принципов. Возможно, что не все математические выкладки вам будут понятны «с первого взгляда» — не бойтесь этого и не смущайтесь, а прежде всего постараитесь понять физический смысл, понять основные идеи, тогда и математика, возможно, вам станет родней. Не случайно же многие математические методы были придуманы физиками, и для физики. Будьте смелее и не забывайте думать над прочитанным, все-таки физика — это наука, а не детектив, хотя история развития ее идей драматичнее любого детектива.

Успехов вам на трудном, но интересном пути изучения этой замечательной науки!

ЧАСТЬ I. КИНЕМАТИКА

§ 1. Математическое описание положения тела

В повседневной жизни нам довольно часто приходится указывать положение того или иного предмета, и мы без особых трудностей справляемся с этой задачей. Так, например, на вопрос «Где находится Белгосуниверситет?» можно дать ответ: «Белгосуниверситет находится в городе Минске». Признать этот ответ удовлетворительным во всех случаях невозможно. Так, если спрашивающий инопланетянин не знает, что Минск — столица Республики Беларусь, государства, расположенного в восточной Европе, то данный ответ для него не несет никакой новой информации. С другой стороны, если спрашивающий — абитуриент, приехавший на вокзал города Минска, то ваш ответ для него ясен, но явно недостаточен.

Указание местоположения, во-первых, должно быть однозначно понято и, во-вторых, должно обеспечивать необходимую точность описания.

Словесный способ описания положения распространен очень широко: это названия планет, материков, стран, городов, улиц и так далее. Однако, несмотря на повсеместное использование такого описания и его поэтичность, оно имеет ряд существенных недостатков:

— невозможно дать персональное «имя» каждой точке пространства;

- уточнение положения требует существенного усложнения описания;
- словесное описание, как правило, ничего не говорит о взаимном расположении описываемых мест.

Эти недостатки можно частично преодолеть, используя численное описание положения тела. В отличие от количества слов, количество чисел не ограничено; уточнение положения достигается заданием чисел с большей точностью; числовое описание упорядочивает места в пространстве, позволяет говорить об их взаимном расположении.

Впрочем, с числовым описанием положения вы также сталкивались в обычных жизненных ситуациях — это нумерация домов, квартир, мест в кинотеатре, страниц книги и тому подобное.

Математический способ описания точек пространства (или, что равносильно, положения тел в пространстве) указывает их числовой «адрес» — каждой точке пространства ставится во взаимно однозначное соответствие некоторый набор чисел. Эти числа, которые однозначно определяют положение точки, называются ее *координатами*.

1.1. Координаты точки на прямой

Очевидно, что не всегда от нас требуется задавать «адреса» всех точек пространства. Если мы хотим описать движение тела вдоль заданной линии (например, автомобиля, движущегося по ма-

гистрали Минск — Брест), то достаточно указать способ задания координат на этой линии.

Для простоты будем считать, что такой линией является прямая. Наша задача — каждой точке этой прямой поставить во взаимно однозначное соответствие некоторое число — координату точки.

Выберем на данной прямой некоторую точку O (рис. 1), которую назовем началом отсчета.

Подчеркнем, что и сама

прямая, и начало отсчета должны быть изначально заданы, то есть известны всем, для кого предназначено наше описание. С точки зрения геометрии, все точки на прямой равноправны, поэтому выбор начала отсчета произволен, с точки здравого смысла, предпочтительнее выбрать точку начала отсчета так, чтобы она чем-то отличалась, была хорошо известна. Например, если выбранная прямая «описывает» дорогу, то начало отсчета следует выбирать в крупном населенном пункте, хорошо всем известном. Но, как мы увидим в дальнейшем, и с физической точки зрения выбор начала отсчета также произволен.

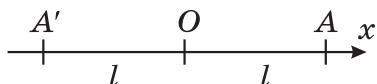


Рис. 1

Действительно, выбор точки начала отсчета определяется произвольно, но эта точка, во-первых, должна быть однозначно определена, во-вторых, достаточно известна. Как, например, в нашей республике задан «нулевой километр» (рис. 2)? В прежние годы нулевой километр отсчитывался от главпочтамта. Новый знак оказался ровно на 1 км в стороне от него.

В самом центре Минска, на юго-восточной кромке Октябрьской площади, размещен этот «Гринвичский меридиан» Беларуси. Его еще называют «нулевой километр».

Гранитный камень в форме пирамиды, символизирующий вечность и прочность, вытесан в солнечной Португалии. Обрамляют знак бронзовые картины, на которых размещены карта дорог, латинское изречение, стихи, написанные Я. Коласом. На бронзовой отмостке «нулевого километра» указаны расстояния от Минска до столиц соседних государств, областных и районных центров Беларуси.

Авторы знака — архитектор А. Сардаров, скульптор А. Финский, художник по металлу В. Заведеев.



Рис. 2

После того, как начало отсчета задано, положение любой другой точки A на прямой может быть охарактеризовано расстоянием l от этой точки до начала отсчета. Однако только расстояние не определяет положение точки однозначно — необходимо указать, с какой стороны от начала отсчета находится точка A . Конечно, это можно сделать и словесно: справа — слева, восточнее — западнее... Но гораздо проще и удобней договориться обозначать направление с помощью знаков — в одну сторону «плюс», в другую «минус». Иными словами, точке A , находящейся на расстоянии l от начала отсчета с одной стороны, приписывается координата $x = l$, а точке A' , находящейся на расстоянии l с другой стороны, присваивается координата $x = -l$ (рис. 1). Удобства такого соглашения очевидны: такое описание остается числовым (хотя числа могут быть

как положительными, так и отрицательными), над этими числами можно проводить математические операции, результаты которых будут иметь определенный физический смысл. Таким образом, прямая становится направленной (т.е. осью координат), причем выбор положительного направления столь же произволен, как и выбор начала отсчета. Для того чтобы каждой точке оси можно было поставить в соответствие число (оцифровать ось), необходимо также указать единицу измерения расстояний, так как только при заданной единице измерения физическая величина приобретает однозначный смысл.

Заметьте, что построенная нами оцифрованная направленная прямая с заданной точкой отсчета является фактически числовой осью (с которой вы познакомились в курсе математики). Однако в физическом описании числа этой оси (координаты точки) имеют строгий смысл: декартовой координатой точки на прямой является число, модуль которого равен расстоянию до начала отсчета, а знак указывает, с какой стороны от начала отсчета находится данная точка.

Так как координата точки указывает расстояние до начала отсчета, то ее размерность — размерность длины (в СИ такой единицей измерения является *метр*).

Метр был впервые введен во Франции в XVIII веке и имел первоначально два конкурирующих определения:

а) как длина маятника с полупериодом качания на широте 45° , равным 1 с (в современных единицах эта длина равна примерно 0,981 м);

б) как одна сорокамиллионная часть Парижского меридиана (то есть одна десятимиллионная часть расстояния от северного полюса до экватора по поверхности земного эллипсоида на долготе Парижа).

Первоначально за основу было принято первое определение (8 мая 1790 года, Французское Национальное собрание). Однако, поскольку ускорение свободного падения зависит от широты и, следовательно, маятниковый эталон недостаточно воспроизводим, Французская академия наук в 1791 году предложила Национальному собранию определить метр через длину меридиана. 30 марта 1791 года это предложение было принято. 7 апреля 1795 года Национальный Конвент принял закон о введении метрической системы во Франции и поручил комиссарам, в число которых входили Ш. О. Кулон, Ж. Л. Лагранж, А. Л. Лавуазье, П.-С. Лаплас и другие учёные, выполнить работы по экспериментальному определению единиц длины и массы.

Первый прототип эталона метра был изготовлен из латуни в 1795 году. Следует отметить, что единица массы (килограмм, определение которого было основано на массе 1 дм³ воды), тоже была привязана к определению метра.

В 1799 году из сплава 90% платины и 10% иридия был изготовлен эталон метра, длина которого соответствовала одной сорокамиллионной части Парижского меридиана. Впоследствии, однако, выяснилось, что из-за неправильного учёта полюсного сжатия Земли эталон оказался короче на 0,2 мм; таким образом, длина меридиана лишь приблизительно равна 40 000 км.

Во время правления Наполеона метрическая система распространилась по всей Европе. В 1917 году она была введена в России. Только в Великобритании, которая не была завоёвана Наполеоном, остались традиционные меры длины: дюйм, фут и ярд.

В 1889 году был изготовлен более точный международный эталон метра — тоже из сплава платины и иридия — и имеет поперечное сечение в виде буквы «Х» (рис. 3). Его копии были переданы на хранение в страны, в которых метр был признан в качестве стандартной единицы длины. Этот эталон всё ещё хранится в Международном бюро мер и весов, хотя больше по своему первоначальному назначению не используется.



Рис. 3

С 1960 года было решено отказаться от использования изготовленного людьми предмета в качестве эталона метра, и с этого времени по 1983 год метр определялся как число 1 650 763,73, умноженное на длину волны оранжевой линии (6 056 Å) спектра, излучаемого изотопом криптона-86 в вакууме.

Современное определение метра в терминах времени и скорости света было введено в 1983 году: **метр — это длина пути, проходимого светом в вакууме за 1 / 299 792 458 секунды.**

Из этого определения следует, что в СИ скорость света в вакууме принята равной в точности 299 792 458 м/с. Таким образом, определение метра, как и два столетия назад, вновь привязано к секунде, но на этот раз с помощью универсальной мировой константы — скорости света.

Заметим, что можно ввести координату точки на произвольной заданной линии, измеряя длину участка этой линии между данной точкой и началом отсчета и указывая с помощью знаков, с какой стороны от начала отсчета находится эта точка. Километровые столбы на дорогах могут служить прекрасной иллюстрацией таких координатных отметок.

Таким образом, положение точки на любой линии однозначно определяется одним числом. Поэтому говорят, что линия имеет одно измерение, а движение тела вдоль заданной линии называется одномерным.

1.2. Координаты точки на плоскости

Положение точки на плоскости нельзя задать с помощью одного числа, так как нельзя провести линию, проходящую через все точки плоскости. Положение точки на плоскости (и на любой другой заданной поверхности), как мы сейчас это покажем, можно описать с помощью двух чисел (двух координат). Поэтому говорят, что заданная поверхность имеет два измерения, а движение по поверхности является двумерным.

Рассмотрим один из способов описания положения точки на плоскости (способ указания «адреса» точки) — декартовую систему координат. Для этого выберем на заданной плоскости произвольную точку O , которую назовем началом отсчета, и проведем через нее две произвольные взаимно перпендикулярные прямые — оси координат. Выберем положительные направления этих осей и зададим на них координаты, так как мы это сделали в случае одной оси. Совместим начала отсчетов на этих прямых с их точкой пересечения. Обозначим координаты точек на одной прямой x , а на другой y (рис. 4). Координаты произвольной точки A на плоскости определим следующим образом:

— опустим перпендикуляры из точки A на ось OX (основание перпендикуляра — точка A_x) и на ось OY (точка A_y), (говорят также: спроектируем точку на оси координат — точка A_x есть проекция точки A на ось OX ; точка A_y — проекция точки A на ось OY);

— координаты x, y точек проекций A_x и A_y являются координатами точки A .

Этой паре чисел x, y можно дать и несколько иное толкование (не противоречащее данному выше): модуль координаты x равен расстоянию до оси Y , а знак указывает, с какой стороны от оси лежит данная точка (аналогично для координаты y).

Начало отсчета и оцифрованные оси координат (то есть задана единица измерения расстояния) называются **системой отсчета**. Если начало отсчета «привязано» к какому-нибудь конкретному телу, то часто его называют **телом отсчета**.

Прекрасной и хорошо знакомой иллюстрацией декартовой системы координат на плоскости служит тетрадный лист в клеточку, если на нем провести две перпендикулярные прямые линии — оси координат.

В принципе, можно с помощью двух чисел задать положение произвольной точки на любой заданной известной поверхности (а не только плоскости). Однако это сделать сложнее, чем определить координату на произвольной ли-

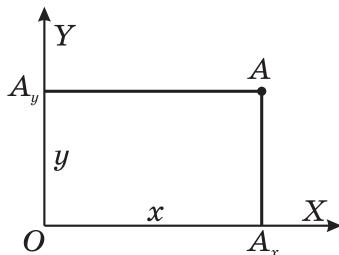


Рис. 4

нии. Поэтому мы ограничимся известным примером — географические широта и долгота являются координатами точки на поверхности земного шара, так как они однозначно определяют положение точки (рис. 5). В общем случае задание координат на произвольной поверхности равносильно нанесению на поверхность некоторой координатной сетки — набора линий, которые можно построить следующим образом: зафиксируем одну из координат, а вторую будем изменять во всей области допустимых значений. Тогда множество точек поверхности, для которых одна из координат задана, представляет собой линию, которая называется координатной.



Рис. 5

Два семейства координатных линий и задают координатную сетку. Например, на глобусе набор параллелей и меридианов является координатной сеткой.

Отметим, что построенная декартовая система координат не является единственной возможной. Достаточно широко в физике используются и другие (криволинейные) системы координат, например, полярная, с которой мы познакомимся несколько позже.

1.3. Координаты точки в пространстве

Положение точки в пространстве однозначно может быть определено с помощью трех чисел — координат. Это утверждение является следствием того факта, что пространство, в котором мы живем, является трехмерным.

После подробного изучения декартовых координат на прямой и на плоскости построение системы пространственных координат легко провести по аналогии. Выберем произвольно точку O — начало отсчета, через которую проведем произвольно три взаимно перпендикулярные прямые — оси координат X, Y, Z . Зададим положительные направления осей и стандартным образом введем координаты точек на этих осях (назовем их x, y, z) (рис. 6). Декартовыми координатами произвольной точки A в пространстве являются координаты x, y, z точек — проекций A_x, A_y, A_z на выбранные оси координат X, Y, Z .

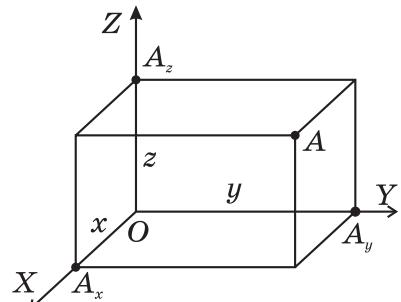


Рис. 6

Для того чтобы спроектировать точку A на ось X трехмерной системы координат, можно поступать различными способами: опустить перпендикуляр на плоскость XOY , а затем спроектировать точку — основание этого перпендикуляра на ось X ; можно и сразу опустить перпендикуляр из точки A на ось X . Еще один способ — построить прямоугольный параллелепипед с противоположными вершинами в точках A и O , ребра которого параллельны осям координат. Тогда длины этих ребер (с учетом знаков) будут являться координатами точки A .

Числа — координаты проекций — определяются стандартным образом: модуль числа равен

расстоянию до начала отсчета, а знак определяет, с какой стороны от начала отсчета лежит данная точка. Таким образом, каждой точке пространства ставится в соответствие тройка чисел — x, y, z .

Естественно, декартовая система координат в пространстве не является единственной возможной, используются и другие системы координат.

1.4. Относительность координат

Итак, мы добились поставленной цели: дали «имя», указали «точный адрес» произвольной точке пространства — каждой точке пространства поставили в однозначное соответствие набор чисел — координат. Однако знание только этих чисел не дает возможности указать конкретную точку. Эти числа-координаты имеют смысл только тогда, когда указана (известна) система отсчета — начало отсчета, направление осей и единица измерения расстояний. Только в этом случае координаты указывают на конкретную точку пространства. Если изменить систему отсчета (начало отсчета, направление осей) или единицу измерения, то изменятся и координаты всех точек. Иными словами, координаты всех точек *относительны, заданы относительно оговоренной системы координат*.

Выбор системы координат, как мы неоднократно подчеркивали, совершенно произведен. Существенна ли эта неопределенность в выборе системы координат? Нужно ли вообще говорить о коорди-

так, если каждый имеет полное право ввести свою собственную систему координат? Мы вынуждены примириться с этим произволом и бояться его не надо, потому что:

- иного способа математического описания положения точки в пространстве не существует;
- всегда можно в каждом конкретном случае договориться о выборе системы отсчета, тем более что часто наиболее удачный выбор системы отсчета очевиден и определяется описываемой ситуацией, например: расположение мебели в конкретной комнате не слишком удобно проводить в системе отсчета, связанной с почтамтом, скорее всего, каждый расположит начало отсчета в одном из углов комнаты и направит оси координат вдоль «ребер» комнаты;
- произвол в выборе системы отсчета дает нам определенную свободу, дает право воспользоваться возможностью выбора в своих интересах так, чтобы в каждом конкретном случае упростить описание физического явления;
- всегда можно (и нужно) найти такие физические величины, которые не зависят от выбора системы координат (например, расстояния между точками, углы между прямыми, площади фигур);
- всегда возможно установить формулы преобразования координат при переходе из одной системы отсчета в другую.*

* Как видим (и в этом мы сможем убедиться неоднократно в дальнейшем), физика — наука демократичная, она предо-

1.5. Преобразования координат

Рассмотрим, как будут изменяться координаты точек при различных преобразованиях системы отсчета. Первый пример — изменение единицы измерения длины при неизменных началах отсчета и направлениях осей координат. Так как координаты точки представляют собой расстояния от проекций точки на оси координат до начала отсчета, то при изменении единицы измерения длины координаты будут изменяться так же, как изменяется численное значение длин и расстояний, то есть умножаться на коэффициент, связывающий различные единицы измерения. При изменении направления оси очевидно, что соответствующие координаты изменят знак на противоположный.

Получим теперь формулы преобразования координат при сдвиге начала отсчета. Пусть на плоскости введены две системы декартовых координат XOY и $X'O'Y'$, оси которых попарно параллельны (рис. 7)

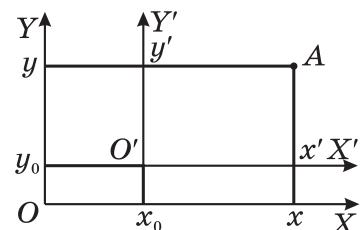


Рис. 7

ставляет каждому «свободу выбора», только надо уметь и не бояться ею пользоваться. В физике существует множество законов, но «все, что не запрещено, разрешено», различные точки зрения допустимы, но вполне примиримы друг с другом либо путем компромисса, либо путем установления общих «правил игры». Наконец, в физике существуют некие «абсолютные ценности», не зависящие от выбранной точки зрения.

Обозначим координаты точки O' в системе отсчета XOY через x_0 и y_0 . Пусть координаты произвольной точки A в системе отсчета $X'O'Y'$ равны x' и y' . Тогда, как следует из рисунка, координаты x , y этой же точки в системе отсчета XOY могут быть найдены по формулам

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + x'; \\y_1 &= y_0 + y'.\end{aligned}\quad (1)$$

Легко записать формулы обратного перехода от координат в системе отсчета XOY к координатам в системе отсчета $X'O'Y'$:

$$\begin{aligned}x' &= -x_0 + x; \\y' &= -y_0 + y.\end{aligned}\quad (2)$$

Как и следовало ожидать, формулы обратного преобразования (2) полностью аналогичны формулам (1), так как $-x_0$ и $-y_0$ есть координаты точки O в системе отсчета $X'O'Y'$. Эти формулы называют преобразованиями сдвига. Назовем систему отсчета XOY *исходной*, а систему отсчета $X'O'Y'$ *смещенной*. (Очевидно, что эти названия условны, так как две рассматриваемые системы равноправны, и их можно поменять местами.) Тогда правила преобразований сдвига можно сформулировать следующим образом: при смещении начала координат координаты всех точек уменьшаются на величину соответствующего смещения начала отсчета; координата точки в смещенной системе координат равна координате в исходной системе минус соответствующая координата начала отсчета смещенной системы.

Упражнение.

Получите формулы преобразования сдвига для одномерного и трехмерного случаев.

Существенным является тот факт, что в любом случае, при любом изменении системы отсчета можно найти формулы преобразования координат. Следовательно, если положение тела описано в одной системе отсчета, то оно описано и в любой другой.

1.6. Расстояние между двумя точками

Если нам известны координаты точек (естественно, в заданной системе координат), то однозначно известно их положение. Поэтому можно найти любые геометрические характеристики их взаимного расположения. Получим формулы, позволяющие по известным координатам двух точек вычислить расстояние между ними.

В простейшем случае, когда две точки A_1 и A_2 находятся на одной оси, расстояние между ними определяется формулой

$$s = |x_2 - x_1|, \quad (3)$$

где x_1 , x_2 – координаты точек A_1 и A_2 соответственно.

Очевидно, что расстояние от A_1 до A_2 равно расстоянию от A_2 до A_1 , что и привело к тому, что в формуле (3) появился знак модуля числа.

Пусть на плоскости задана система координат XOY , в которой координаты точки A_1 равны x_1 и y_1 ,

а координаты точки A_2 , соответственно, равны x_2 и y_2 (рис. 8). В прямоугольном треугольнике A_1A_2B длина стороны A_2B равна $|x_2 - x_1|$, а длина стороны $A_1B = |y_2 - y_1|$, поэтому расстояние между точками A_1 и A_2 можно найти по теореме Пифагора:

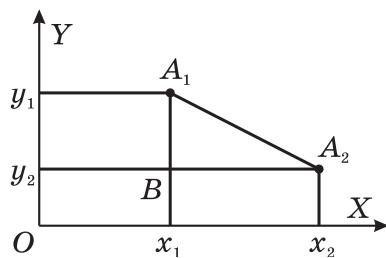


Рис. 8

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (4)$$

Упражнение.

Покажите, что расстояние между двумя точками в пространстве вычисляется по формуле

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Давайте теперь попытаемся вычислить расстояние между этими же точками, но в другой системе отсчета $X'Y'O'$, которая сдвинута относительно исходной системы координат XOY . В этой системе отсчета координаты точек A_1 и A_2 можно найти по формулам преобразований (1)

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_0 + x_1; \\ x_2' &= -x_0 + x_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Как следует из этих формул, $x_2 - x_1 = x_2' - x_1'$, что, впрочем, и должно быть: если вторая точка лежит правее первой, то это их взаимное расположение не зависит от выбора системы координат, расстояние между проекциями точек на одну и ту же ось не зависит от начала отсчета. Аналогичное со-

отношение можно записать и для координат y этих точек, поэтому, как следует из здравого смысла, результат вычисления по формуле (4) не зависит от выбора системы координат (конечно, при неизменной единице измерения длины). Мы показали это для преобразования сдвига, однако очевидно, что и при повороте системы координат формула (4) должна давать один и тот же результат. Весьма интересная ситуация: все четыре координаты при изменении системы отсчета изменяются, а величина расстояния остается неизменной!

Величины, которые остаются неизменными при изменении системы координат, называются **инвариантными**.

Вот еще одно подтверждение возможности использования систем координат — можно найти физические величины, которые не зависят от выбора системы координат. Поиск таких инвариантных физических величин очень важен, потому что, как правило, именно они проще всего поддаются измерению, именно они фактически определяют протекание того или иного физического процесса, именно они убеждают скептиков в возможностях правильного физического описания различных явлений.

1.7. Полярная система координат

Декартовая система координат на плоскости является, безусловно, самой простой, однако не единственной возможной. Во многих случаях пред-

почтильнее использовать другие криволинейные системы координат.

Среди этих координат наиболее часто используется полярная система (рис. 9). Положение точки A на плоскости в этом случае описывается координатами: величинами ρ — полярное расстояние (OA) и φ — полярный угол (AOx). Очевидно, что координата ρ неотрицательна, угол φ может принимать любые значения. Легко выразить декартовые координаты точки через полярные:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi; \\ y &= \rho \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

Обратное преобразование несколько сложнее:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \pm k\pi. \end{aligned} \quad (2)$$

Заметим, что полярный угол определяется неоднозначно, при добавлении к нему любого кратного 2π положение точки на плоскости не изменяется. Эта неоднозначность редко приводит к недоразумениям, зато оговоренное произвольное (от минус до плюс бесконечности) изменение угла позволяет легко и красиво описывать некоторые виды механического движения тел (например, вращение).

Получим теперь формулы преобразования координат точки при повороте системы координат. Рассмотрим две декартовые системы координат

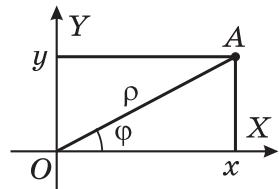


Рис. 9

XOY и $X'OY'$, начала отсчета которых совпадают, а оси повернуты на некоторый угол φ_0 (рис. 10). Очевидно, что в обеих системах расстояния до начала отсчета одинаковы, а полярные углы связаны линейным соотношением

$$\begin{aligned}\rho' &= \rho; \\ \varphi' &= \varphi - \varphi_0.\end{aligned}\tag{3}$$

Эти простые формулы и выражают преобразования координат при повороте осей.

Получим также и формулы преобразования поворота для декартовых координат. Запишем выражения для декартовых координат в «штрихованной» системе отсчета

$$\begin{aligned}x' &= \rho' \cos\varphi' = \rho \cos(\varphi - \varphi_0); \\ y' &= \rho' \sin\varphi' = \rho \sin(\varphi - \varphi_0)\end{aligned}$$

и используем известные тригонометрические формулы для синуса и косинуса разности углов:

$$\begin{aligned}x' &= \rho \cos(\varphi - \varphi_0) = \rho \cos\varphi \cos\varphi_0 + \rho \sin\varphi \sin\varphi_0; \\ y' &= \rho \sin(\varphi - \varphi_0) = \rho \sin\varphi \cos\varphi_0 - \rho \cos\varphi \sin\varphi_0.\end{aligned}$$

Наконец, замечая, что $\rho \cos\varphi = x$, а $\rho \sin\varphi = y$, получим искомые выражения:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos\varphi_0 + y \sin\varphi_0; \\ y' &= y \cos\varphi_0 - x \sin\varphi_0.\end{aligned}\tag{4}$$

Заметьте, что формулы обратного преобразования получаются из системы (4) посредством очевидной замены φ_0 на $-\varphi_0$, что также является следствием относительности координат.

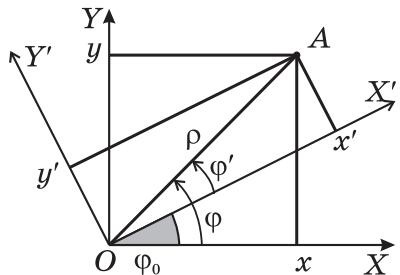


Рис. 10

Эти преобразования, конечно, можно было получить и геометрическим способом с помощью приведенного рисунка.

Упражнения.

1. Покажите, что формулы преобразования (4) не изменяют расстояния до начала координат.

2. Покажите, что расстояние между двумя точками, полярные координаты которых (ρ_1, φ_1) и (ρ_2, φ_2) , определяется по формуле

$$S = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

1.8. «Недекартовые» системы координат в пространстве

Для задания положения точки в пространстве необходимо задать три числа-координаты, причем далеко не всегда декартовая система координат является наиболее удобной. Поэтому в геометрии трех измерений используются и другие системы координат. Познакомимся со своеобразным «гибридом»: полярную систему координат на плоскости дополним третьей координатой — расстоянием до плоскости. Такая система координат называется *цилиндрической*.

В этой системе координатами произвольной точки *A* являются (рис. 11):

а) ρ — полярное расстояние, расстояние от точки до полярной оси (в качестве которой в данном случае выступает ось *Z* декартовой системы коор-

динат) либо, что равносильно, расстояние от проекции точки A на плоскость XOY (точка A') до начала координат O ;

б) φ — полярный угол, угол между направлением на точку A' и осью X ;

в) z — расстояние от точки до плоскости XOY .

Для наглядного представления системы координат часто изображают координатные поверхности, то есть множества точек, для которых одна из координат постоянна. Для декартовой системы координат такими поверхностями являются плоскости. Так, например, условию $z = \text{const}$ удовлетворяют точки плоскости, параллельной XOY .

В отличие от декартовых, цилиндрические координаты являются *криволинейными* — их координатные поверхности не являются плоскостями. На рис. 12 изображены семейства координатных плоскостей для цилиндрической системы:

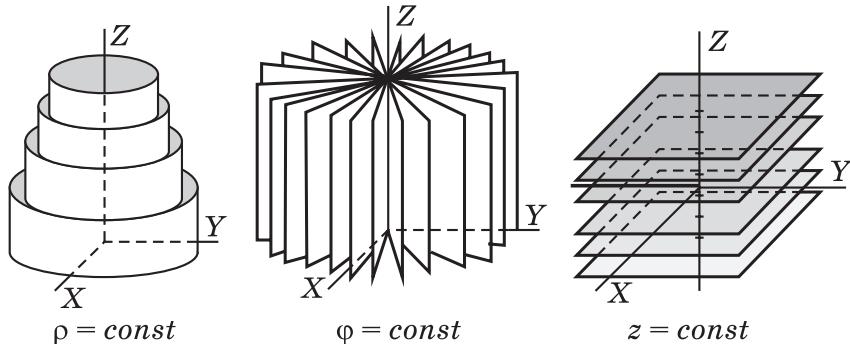


Рис. 12

- условию $\rho = \text{const}$ удовлетворяют точки, лежащие на поверхности цилиндра радиуса ρ , коаксиального (коосного) с осью Z ;
- поверхности постоянного полярного угла $\phi = \text{const}$ представляют собой полуплоскости, проходящие через ось Z ;
- поверхности $z = \text{const}$ по-прежнему плоскости перпендикулярные оси Z .

В заключение данного раздела заметим, что число различных криволинейных систем координат в пространстве трех измерений достаточно велико.

1.9. Существует ли четвертое измерение?

В научно-фантастических произведениях иногда встречаются сюжеты (рис. 13 — автор Эшер), в которых разумные существа осваивают четвертое, пятое и так далее измерения*. Повышение размерности пространства предоставляет новые, богатейшие возможности как для этих существ, так и для писателей-фантастов. Сравните двухмерную плоскость и трехмерное пространство! Для



Рис. 13

* Для примера можно вспомнить знаменитый роман М. Булгакова «Мастер и Маргарита».

того чтобы «выйти» из плоскости в трехмерное пространство, можно предложить следующий метод: из центра окружности необходимо провести бесконечный луч, который нигде не пересекает окружность — такой луч лежит в третьем измерении. По аналогии можно предложить «путь в четвертое измерение»: из центра сферы необходимо провести луч, который нигде не пересекает сферу. Вообразили? Еще один способ: провести прямую, которая перпендикулярна трем взаимно перпендикулярным прямым. Конечно, если вам не удалось представить себе такой луч или такую прямую, то это еще не является доказательством отсутствия четвертого измерения в нашем пространстве.

Попытаемся представить, к каким наблюдаемым явлениям могло бы привести наличие дополнительного измерения. Например, из четвертого измерения можно было бы заглянуть внутрь любого трехмерного тела (как из третьего измерения можно видеть «внутренности» любой плоской фигуры). Далее, был бы возможен бесследный «уход» и обратное появление в любом другом месте любых материальных тел (опять же представьте себе, что будет происходить на плоскости, которую пересекает трехмерное тело). К настоящему времени таких фактов не зафиксировано. Более того, не известны такие явления, которые не могли бы быть объяснены с точки зрения пространства трех измерений.

Еще одним доказательством трехмерности пространства, в котором мы обитаем, является ряд физических законов. Рассмотрим, например, то-

чечный источник, который посыпает свет во все стороны равномерно. Понятно, что энергия, пересекающая поверхность любой сферы, внутри которой находится источник, должна быть постоянна. Следовательно, интенсивность света (то есть энергия, приходящаяся на единицу площади) должна убывать обратно пропорционально площади сферы, то есть обратно пропорционально квадрату расстояния. Если бы свет распространялся и в четвертом измерении, то его интенсивность убывала бы обратно пропорционально кубу расстояния. Эксперимент однозначно утверждает, что интенсивность убывает обратно пропорционально квадрату расстояния. Эти и другие факты утверждают, что наше пространство действительно трехмерно. Таким образом, ответ на вопрос этого раздела в настоящее время следующий: пространство четырех и более измерений является математической абстракцией. Можно изучать свойства геометрических объектов в таких пространствах при решении целого ряда задач, в том числе физических, бывает полезно их рассматривать в многомерных пространствах. Однако в настоящее время нет никаких оснований полагать о реальном существовании четвертого измерения в том смысле, что реально существуют некоторые материальные тела вне пространства трех измерений.

Декарт Рене

Ренé Декáрт (фр. René Descartes; лат. Renatus Cartesius — Картезий) — французский математик, философ, физик и физиолог, создатель аналитической геометрии и со-

временной алгебраической символики, автор метода радикального сомнения в философии (рис. 14).

Декарт происходил из старинного, но обедневшего дворянского рода. Он родился 31 марта 1596 года в городе Лаэ во Франции. Его мать умерла, когда ему был один год. Воспитанием мальчика занималась бабушка по матери.

Начальное образование Декарт получил в иезуитском коллеже. Религиозное образование, как ни странно, только укрепило в молодом Декарте скептическое недоверие к тогдашним философским авторитетам. Позже он сформулировал свой метод познания — дедуктивные (математические) рассуждения над результатами воспроизводимых опытов.

В 1612 году Декарт закончил коллеж^{*}, некоторое время изучал право, затем уехал в Париж, где несколько лет чередовал рассеянную жизнь с математическими исследованиями. Затем в 1617 году он поступил на военную службу — сначала в революционную Голландию, затем в Германию, где участвовал в битве за Прагу во время тридцатилетней войны. Несколько лет Декарт провёл в Париже, предаваясь научной работе. Затем — ещё несколько лет участия в войне (осада Ларошели^{**}). По возвращении во Францию оказалось, что свободомыслие Декарта стало известно иезуитам, и те обвинили его в ереси. Поэтому в 1628 году Декарт переехал в Голландию, где провёл 20 лет.

Он вёл обширную переписку с лучшими учёными Европы, изучал самые различные науки — от медицины доeteorологии. Наконец в 1634 году он закончил свою первую



Рис. 14

* А через год в России закончилась смута и на царский престол избран первый из Романовых — Михаил.

** Там он мог встречаться с «тремя мушкетерами» — Атосом, Портосом, Арамисом и Д'Артаньянном.

программную книгу под названием «Мир». Но момент для издания был неудачным — годом ранее инквизиция чуть не замучила Галилея. Теория Коперника, принятая и в книге Декарта, была официально запрещена. Поэтому Декарт решил при жизни не печатать этот труд.

Вскоре, однако, одна за другой появляются другие книги Декарта: «Рассуждение о методе...» (1637 г.); «Размышления о первой философии...» (1641 г.); «Начала философии» (1644 г.).

В «Началах философии» сформулированы главные идеи Декарта:

- *бог сотворил мир и законы природы, а далее Вселенная действует как самостоятельный механизм;*
- *в мире нет ничего, кроме движущейся материи различных видов. Материя состоит из элементарных частиц, локальное взаимодействие которых и производит все природные явления;*
- *математика — мощный и универсальный метод познания природы, образец для других наук.*

Кардинал Ришелье благожелательно отнёсся к трукам Декарта и разрешил их издание во Франции, а вот протестантские богословы Голландии наложили на них проклятие.

В 1649 году Декарт, измученный многолетней травлей за вольнодумство, поддался уговорам шведской королевы Кристины и переехал в Стокгольм. Почти сразу после переезда он серьёзно простудился и вскоре умер (11 февраля 1650 года). Предположительной причиной смерти явилась пневмония. Существует гипотеза об его отравлении, поскольку симптомы болезни очень сходны с симптомами при остром отравлении мышьяком.

К концу жизни Декарта отношение церкви к его учению стало резко враждебным. Вскоре после его смерти основные сочинения Декарта были внесены в «Индекс запрещенных книг», а Людовик XIV специальным указом запретил пре-

подавание философии Декарта («картизанства») во всех учебных заведениях Франции.

Спустя 17 лет после смерти учёного его останки были перевезены в Париж (позже он был погребён в Пантеоне). В 1819 году многострадальный прах Декарта был вновь похоронен и ныне покоятся в церкви Сен-Жермен де Пре.

Научная деятельность Декарта очень разнообразна. В 1637 году вышел в свет главный математический труд Декарта — «Рассуждение о методе» (полное название — «Рассуждение о методе, позволяющем направлять свой разум и отыскивать истину в науках»). Символическую алгебру Декарт называл «Всеобщей математикой» и писал, что она должна объяснить «всё относящееся к порядку и мере».

Создание аналитической геометрии позволило перевести исследование геометрических свойств кривых и тел на алгебраический язык, то есть анализировать уравнение кривой в некоторой *системе координат*. Достоинства нового метода были исключительно велики, и Декарт продемонстрировал их в той же книге, открыв множество положений, неизвестных древним и современным ему математикам.

Вместе с конкретными научными открытиями было совершено ещё одно открытие. Обнаружилась необходимость и возможность постоянной работы над собственным умом, необходимость и возможность постоянного обращения мысли на мысль, постоянного развития самой способности мыслить, открывать, изобретать. Исходной точкой философских рассуждений Декарта является «сомнение во всем». Скептицизм был всегда выдающейся чертой французского ума, равно как и стремление к математической точности знаний.

Cogito, ergo sum (мыслю, следовательно существую) — есть первое и вернейшее из всех познаний, встречающееся каждому, кто философствует в порядке.

§ 2. Материальная точка и абсолютно твердое тело — модели реальных тел

Обсуждая вопрос об описании положения тела в пространстве, мы стыдливо умолчали о том, что не определили понятия «тело». Фактически речь шла о геометрических точках пространства. Любой реальный объект имеет конечные геометрические размеры и определенную форму. Кроме того, реальные тела обладают множеством иных характеристик — массой, температурой, цветом и так далее. Полностью описать все свойства реальных тел, все физические процессы в рассматриваемых телах невозможно из-за их бесконечного многообразия. Поэтому, рассматривая те или иные явления, необходимо отвлечься, забыть на время, пренебречь некоторыми характеристиками тел и явлений, иными словами, построить **модель** явления, **модель** тела. Какими свойствами тела можно в данных условиях пренебречь — зависит от конкретной физической задачи, конкретной цели физического исследования.

2.1. Материальная точка

Во многих кинематических задачах оказывается возможным пренебречь размерами самого тела. Еще раз рассмотрим автомобиль, движущийся из Минска в Брест. Расстояние между этими городами — порядка 350 километров, размеры автомо-

бия — несколько метров, поэтому в такой ситуации при описании положения автомобиля можно не учитывать его размеры (если капот автомобиля находится в Бресте у нужного подъезда нужного дома, то можно считать, что и его багажник находится приблизительно там же). Таким образом, в данной задаче можно мысленно заменить автомобиль его моделью — телом, размеры которого пре-небрежимо малы. Такая модель тела очень часто используется в физике и называется *материальной точкой*.

Материальная точка — это идеальная модель тела, размерами которого в данных условиях можно пренебречь.

Общим у геометрической и материальной точек является отсутствие собственных размеров. Материальную точку по мере необходимости можно «наделять» свойствами, которыми обладают реальные тела, например, массой, энергией, электрическим зарядом и так далее.

Одним из критериев применимости модели материальной точки является малость его размеров по сравнению с расстоянием, на которое перемещается тело. Однако это условие не является абсолютно однозначным. Так, описывая движение Земли вокруг Солнца при расчете ее положения на орбите, размерами Земли можно пренебречь,



Рис. 15

считая ее материальной точкой (рис. 15 — Николай Коперник и его гелиоцентрическая модель Солнечной системы. Картина Я. Матейко). Однако если нам необходимо рассчитать времена восхода и заката Солнца, модель материальной точки принципиально неприменима, так как это описание требует учета вращения Земли, ее размеров и формы (рис. 16. Восход Земли — вид с Луны).



Рис. 16

Рассмотрим еще один пример. Спринтеры соревнуются на стометровой дистанции. Цель описания движения — выявить, кто из спортсменов пробегает дистанцию за меньшее время (то есть задача чисто кинематическая). Можно ли в данной задаче считать бегуна материальной точкой? Его размеры значительно меньше дистанции забега, но достаточно ли они малы, чтобы ими можно было пренебречь? Ответ на эти вопросы зависит от требуемой точности описания. Так, на серьезных соревнованиях время измеряется с точностью 0,01 секунды. За это время бегун смещается на расстояние порядка 10 сантиметров (простая оценка, полученная исходя из средней скорости спринтера 10 м/с). Следовательно, погрешность, с которой определяется положение бегуна (10 см), меньше, чем его поперечные размеры, поэтому модель материальной точки в данном случае не-

применима. Не случайно мастера спринтерского бега на финише «бросают грудь вперед», выигрывая драгоценные сотые доли секунды (рис. 17. Есть мировой рекорд! У. Болд).



Рис. 17

Упражнение.

Оцените, можно ли использовать модель материальной точки, если время забега измеряется с точностьюю 0,1 с.

В некоторых ситуациях можно использовать модель материальной точки, даже если размеры тела сравнимы и больше расстояний, на которое смещается тело. Это допустимо тогда, когда положение одной точки тела однозначно определяет положение всего тела. Так, при скольжении бруска по наклонной плоскости можно найти положение всего тела, зная положение его центра (как, впрочем, и любой другой точки).

Если модель материальной точки оказывается неприменимой, то необходимо использовать другие, более сложные модели.

2.2. Абсолютно твердое тело

Многие реальные тела являются твердыми, то есть в течение длительного времени сохраняют

свои размеры и форму, точнее говоря, изменения размеров и формы настолько незначительны, что ими можно пренебречь. Моделью таких тел служит *абсолютно твердое тело*.

Абсолютно твердое тело — это идеальная модель тела, изменением размеров и формы которого в данных условиях можно пренебречь.

Из этого определения следует, что расстояние между двумя любыми точками абсолютно твердого тела остается неизменным. Абсолютно твердое тело можно также рассматривать как совокупность материальных точек, жестко связанных между собой. Так, положение океанского лайнера в открытом море можно описать, пользуясь моделью материальной точки, а его пространственную ориентацию (курс, наклон) — с помощью модели абсолютно твердого тела (рис. 18). Применимость модели абсолютно твердого тела обусловлена



Рис. 18

только конкретной исследуемой проблемой — целью моделирования и требуемой точностью.

В заключение отметим, что рассмотренные нами модели не исчерпывают всех типов моделей тел, используемых в физике. Например, того же бегуна нельзя описать и в рамках модели абсолютно твердого тела, так как здесь важно взаимное расположение частей тела — туловища, рук, ног, го-

ловы и изменение этого положения. В таких ситуациях можно использовать модель, состоящую из нескольких движущихся друг относительно друга твердых тел и материальных точек (рис. 19).

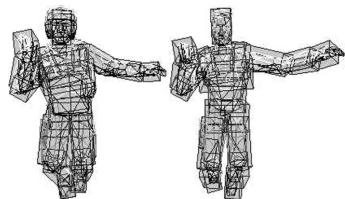


Рис. 19

2.3. Число степеней свободы тела

Теперь после того, как мы изучили несколько моделей тел, можно окончательно и корректно сформулировать ответ на вопрос о том, что значит задать, определить положение тела: указать численное значение координат некоторых точек тела так, чтобы положение всего тела (любой его части) было определено однозначно.

Число независимых координат, которые однозначно определяют положение тела или системы тел в пространстве, называется числом степеней свободы.

Число степеней свободы — очень важная характеристика описываемой системы хотя бы потому, что определяет число независимых уравнений, описывающих движение системы.

Подсчитаем число степеней свободы некоторых простых систем.

Материальная точка, по определению, не имеет размеров, поэтому ее положение в пространстве определяется однозначно тремя координатами. Сле-

довательно, число степеней свободы свободно материальной точки равно трем. Если на движение материальной точки накладываются дополнительные условия, то число ее степеней свободы может уменьшиться. Так, если точка движется по заданной поверхности, то ее положение определяется двумя независимыми координатами. Следовательно, число степеней свободы равно двум; при движении по заданной линии число степеней свободы уменьшается до одной. Подчеркнем, это не значит, что при движении по заданной линии может изменяться только одна — и могут изменяться все три, но положение точки на заданной линии определяется одной координатой, и если она известна, то могут быть определены и две другие. Тем не менее описание положения точки на заданной линии с помощью одной координаты оказывается не всегда удобным. Ценность рассмотренных нами декартовых координат в том, что они позволяют установить физические законы, описывающие движение вдоль всех прямых (все прямые одинаковы!). В то же время для описания изменения координат на произвольной линии пришлось бы записывать свои законы для каждой линии — окружности, параболы, синусоиды и т. д. Поэтому часто одномерное движение вдоль известной линии описывают с помощью двух или трех координат. Однако и в этом случае число степеней свободы остается равным единице.

Если механическая система может быть промоделирована как N материальных точек, движу-

щихся в пространстве, то очевидно — полное число ее степеней свободы равняется $3N$. Но если на движение этих материальных точек накладываются дополнительные ограничения, то число степеней свободы уменьшается.

Рассмотрим, как можно описать положение в пространстве двух материальных точек, жестко связанных между собой (что-то похожее на гантели) (рис. 20). Две точки имеют шесть степеней свободы, которые могут быть описаны шестью координатами — $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$, но так как расстояние между точками неизменно, то на эти координаты накладывается условие

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l^2,$$

где l — расстояние между точками. Поэтому число независимых координат, или число степеней свободы, равно пяти.

Таким образом, число степеней свободы системы, состоящей из N материальных точек, равно $3N$ минус число дополнительных условий (связей), накладываемых на движение этих точек.

Число степеней свободы может быть подсчитано и другим способом. Обратим внимание, что точное определение координат уменьшает «подвижность» точки (или системы точек). Так, например, если для материальной точки задана координата

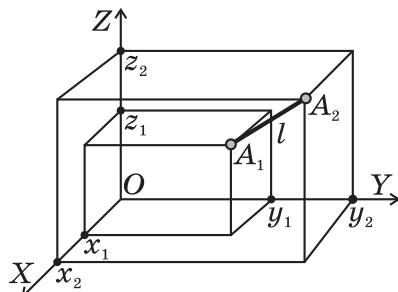


Рис. 20

z , то точка может двигаться только в плоскости, перпендикулярной оси Z , а задание еще одной координаты (скажем y) приводит к тому, что точка может двигаться только вдоль прямой, параллельной оси X . Поэтому число степеней свободы можно находить, подсчитывая, сколько независимых координат необходимо определить, чтобы жестко «закрепить» тело. С помощью такого подхода найдем число степеней свободы системы, состоящей из двух жестко связанных точек. Задавая три координаты одной точки, мы ее мысленно закрепляем (рис. 21). Тогда вторая точка может двигаться только так, чтобы ее расстояние до первой оставалось неизменным, то есть по поверхности сферы радиуса l . Понятно, что если определено положение двух точек твердого тонкого стержня, то задано и положение всего стержня, поэтому тонкий стержень имеет пять степеней свободы.

Посчитаем число степеней свободы свободно движущегося абсолютно твердого тела. Выберем внутри тела три произвольные точки A , B , C , не лежащие на одной прямой (рис. 22). Положение одной точки A определяется тремя координатами; если задано положение точки A , то положение точки B может быть описано двумя координатами. Наконец, при «за-

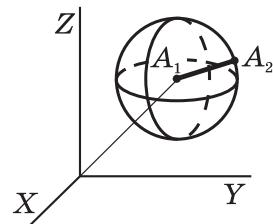


Рис. 21

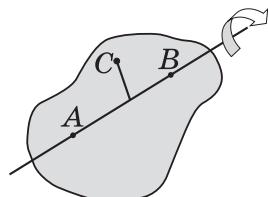


Рис. 22

крепленных» точках *A* и *B* тело может только вращаться вокруг оси, проходящей через эти точки. Следовательно, точка *C* имеет одну степень свободы. Таким образом, абсолютно твердое тело имеет шесть степеней свободы.

Как мы уже отмечали, для описания положения точки можно использовать разные системы координат, аналогично, положение твердого тела также может быть описано различными способами, только число независимых координат во всех способах описания будет одним и тем же, равным числу степеней свободы. Так, во многих случаях положение твердого тела описывают, задавая три декартовые координаты одной из его точек (чаще центра) и три угла, определяющие его ориентацию.

Эти углы можно задавать по-разному. Но наиболее популярной является система углов Л. Эйлера. Интересно, что специалисты разных областей используют фактически одну и ту же систему, но называют эти углы по своему. Так физики обычно рассматривают движение волчка (рис. 23) – хорошо знакомой с раннего детства юлы. Ее движение можно представить в таком виде:



Рис. 23

1) быстрое вращение вокруг собственной оси (*собственное вращение*);

2) медленный поворот оси юлы вокруг вертикали, при этом ось юлы описывает конус – такое движение называют *прецессией*;

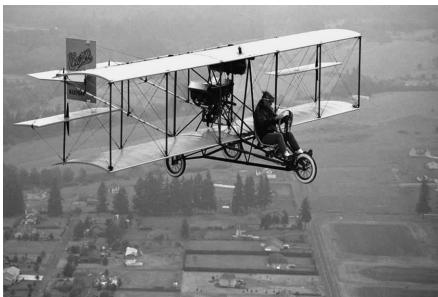


Рис. 24

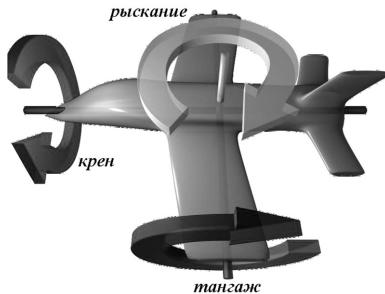


Рис. 25

3) колебания оси юлы, то есть изменение угла между осью юлы и вертикалью – это движение называют *нутацией*.

Соответственно, углы, задающие положение твердого тела, называются *углами прецессии, нутации и собственного вращения*.

Если внимательно присмотреться к этим углам, то в углах прецессии и нутации можно узнать географическую широту и долготу.

Специалисты по динамике движения самолетов (рис. 24) также используют три угла для задания его ориентации, но названия углов у них иные – крен, тангаж, рыскание (рис. 25):

– *крен* (от фр. *caréne* – киль, подводная часть корабля или от англ. *kren-gen* – класть судно на бок) – поворот самолёта вокруг его продольной оси;

– *тангаж* (фр. *tangage* – килевая качка), поворот или раскачивание самолета вокруг поперечной горизонтальной оси (когда нос опускается вниз – *пикирование* или поднимается вверх – *кабрирование*);

– *рыскание* (*рысканье*) – угловое вращение или раскачивание самолёта вокруг вертикальной оси на небольшой угол, а также небольшие изменения курса вправо или влево.

У моряков своя терминология (для тех же углов): тангаж заменен на дифферент, рыскание на курс, но крен остался креном.

В заключение раздела посчитаем число степеней свободы, которым обладает человеческая рука: 2 – в плечевом суставе; 2 – в локтевом, 2 – в кистевом; 4 – в каждом пальце. Итого – 26 степеней свободы. 26 чисел необходимо задать, чтобы описать положение одной человеческой руки! (Рис. 26).



Рис. 26

§ 3. Механическое движение. Закон движения

Окружающий нас мир не является застывшим, в нем постоянно происходят всевозможные изменения: «все течет, все изменяется» — и нет необходимости убеждать кого-либо в этой очевидной истине. Простейшим видом изменений, происходящих в окружающем нас мире, является изменение положений тел в пространстве — механическое движение.

Механическим движением называется изменение положений тел в пространстве с течением времени.

А что такое пространство и время? Понятия настолько привычные, что трудно дать им точное определение! В энциклопедиях и справочниках говорят, что пространство выражает порядок в расположении объектов, а время — порядок следования отдельных событий. Задумайтесь: если нет

никаких материальных объектов, то нет пространства, если не происходят никакие изменения, никакие события, то нет времени (или оно остановилось). Если измерение «пространства» сводится к сравнению расстояний с эталоном длины, то измерение времени основано на наблюдении периодических процессов и сравнении длительности временного интервала с периодом эталонного процесса.

Уже в глубокой древности в основу измерения промежутков времени легли астрономические явления, прежде всего — вращение Земли вокруг собственной оси и вокруг Солнца (рис. 27 — модель Солнечной системы из книги Н. Коперника). Подумайте: не странное ли совпадение, что период вращения Земли вокруг собственной оси равен точно одним суткам, а период обращения вокруг Солнца равен одному году?

Однако современную науку и технику не устраивает точность воспроизведения эталона времени на основе астрономических наблюдений. Поэтому основной единицей измерения времени принята секунда, определение и эталон которой построены на свойстве атомов испускать электромагнитные волны строго определенных частот. В 1967 году на XIII Генеральной конференции по мерам и весам была принята Резолюция I: «Секунда равна 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133».

Что может случиться за одну секунду:

- свет пробегает 299 792 458 м в вакууме;
- Земля проходит по орбите вокруг Солнца 29 785,9 м;
- кристаллы, на которых работают кварцевые часы, колеблются 32 768 раз.

Этот список без труда можете продолжить сами.

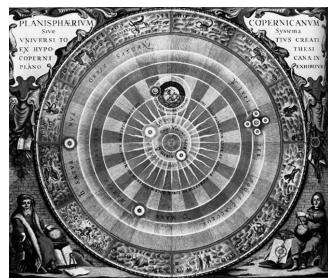


Рис. 27

Двигаясь, материальная точка описывает в пространстве некоторую линию (рис. 28). Для описания движения можно попытаться найти эту линию, а затем описывать положение точки на ней (то есть задать координаты на заданной линии). Для этого можно, например, задать зависимость пройденного пути от времени движения.



Рис. 28

Линия, вдоль которой движется материальная точка, называется *траекторией движения*.

Путь, пройденный точкой, равен длине участка траектории между двумя последовательными положениями тела.

Однако определение траектории движения часто представляет собой отдельную и достаточно сложную задачу (посмотрите для примера на траектории точек движущегося колеса — рис. 29), поэтому часто оказывается более простым и удобным описывать механическое движение иным способом.

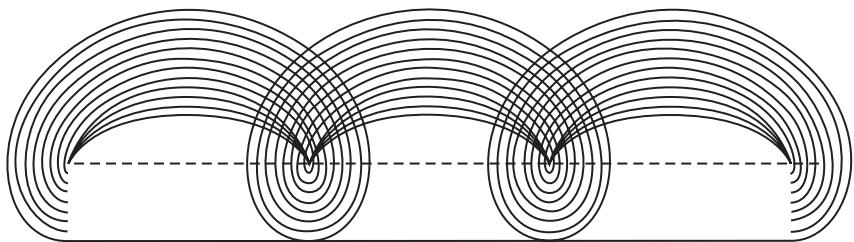


Рис. 29

Мы уже знаем, что положение тела в пространстве описывается с помощью координат. Если положение тела изменяется, то изменяются и его координаты. Они становятся зависящими от времени, становятся функциями времени.

Зависимость всех координат тела от времени называется законом движения, то есть закон движения определяет положение тела в любой произвольный момент времени. Математическим выражением закона движения является набор функций — зависимостей координат от времени. Таким образом, нам необходимо дополнить рассмотренную систему координат прибором для измерения времени — часами (рис. 30 — часы). Далее такой набор системы координат и часов мы будем называть **системой отсчета**.

Как всякая функция, закон движения может быть представлен в нескольких формах — в виде таблицы, графика, формулы. Закон движения любого тела может быть определен с некоторой точностью, измерен экспериментально. Для этого необходимо измерить координаты тела в различные последовательные моменты времени. Чем больше таких измерений будет проведено, тем более подробно будет описано движение.



Рис. 30

При одномерном движении результатом таких измерений будет набор пар чисел: времени t_k и соответствующих координат x_k . Примером такого описания может служить график движения пассажирского поезда, в котором записано время прибытия на различные станции. Если известны расстояния между станциями, то можно определить их координаты, а затем построить закон движения. Впрочем, график движения поезда можно рассматривать как закон движения: определенным точкам пространства (пусть они определены только словесно) ставятся в соответствие определенные моменты времени.

Для экспериментального исследования закона движения могут быть использованы различные методы. Фиксировать положение тела можно с помощью фотографии, в том числе и цифровой. Только это необходимо делать неоднократно, желательно через равные промежутки времени. Так, на рис. 31 показаны положения гимнаста на перекладине в различные моменты времени. Для фиксации положения можно использовать стробоскопическое освещение, подобное тому, что используется на дискотеках. Глаз или фотоаппарат фиксирует положение только в моменты кратковременных вспышек стробоскопа. Можно также использовать видеокамеру с последующим наложением кадров.

Если у вас нет видеокамеры, то можно воспользоваться и фотоаппаратом с однократной вспышкой. В этом случае

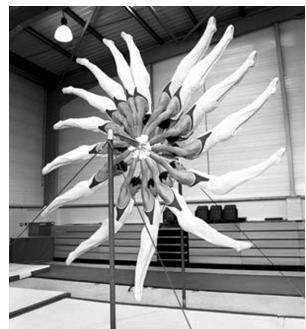


Рис. 31

исследуемый процесс следует сделать периодическим, тогда на одном снимке можно зафиксировать различные стадии процесса, правда, происходящие с разными телами. Так, например, с хорошей степенью точности можно считать, что капли из крана отрываются через равные промежутки времени. Движение всех капель происходит одинаково, поэтому забудем о том, что на рис. 32 реально видны различные капли, их положения в данный момент времени соответствуют положениям одной капли в различные моменты времени.



Рис. 32

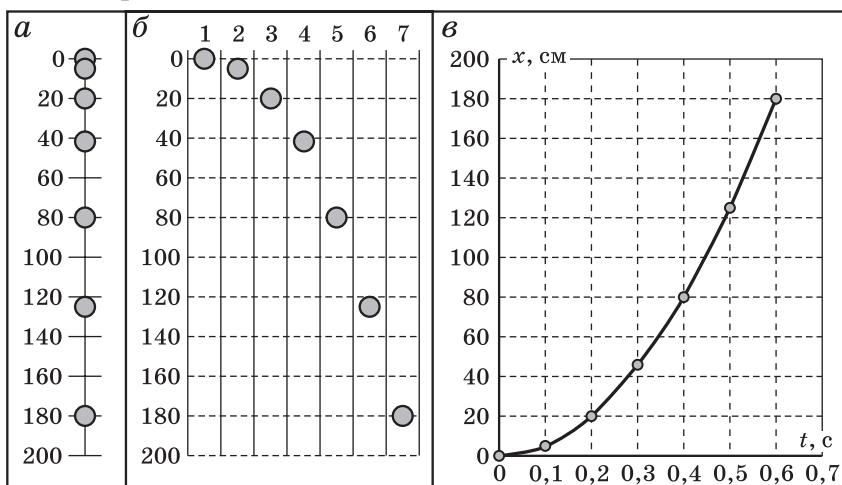


Рис. 33

На рис. 33 α показаны положения свободно падающего шарика* через равные промежутки времени, равные 0,1 с (шкала высот приведена

* Представьте, что это фотография в стробоскопическом освещении при интервале между вспышками, равными 0,1 с. Возможно, что это наложение кадров, снятых с указанным временным интервалом.

в см). Построим по этой фотографии закон движения шарика. Давайте снимок каждого положения (каждый кадр) сместим и расположим их рядом (рис. 33б — сверху указан номер кадра). Фактически этот рисунок уже можно рассматривать как график закона движения шарика, особенно если соединить центры изображений шариков плавной линией.

Но поступим более формально, «по правилам». Направим ось X декартовой системы координат вертикально вниз и совместим начала отсчета с начальным положением шарика. Далее измерим координаты последовательных положений центра шарика. Результаты таких измерений занесены в таблицу.

Закон движения шарика

Время t , с	Координата x , см
0,0	0
0,1	5
0,2	20
0,3	45
0,4	80
0,5	125
0,6	180
0,7	245

Эта таблица описывает движение шарика не полностью, так как не определяет его положение в моменты времени между вспышками. Нанесем полученные данные на график зависимости коор-

динаты от времени и соединим точки плавной кривой (рис. 33в). Эта кривая полностью описывает движение, так как позволяет определить (пусть и приближенно) координату шарика в произвольный момент времени. По своему виду полученная кривая очень напоминает параболу — можно предположить, что она описывается формулой вида

$$x = ct^2,$$

где c — некоторый постоянный коэффициент, имеющий размерность в СИ $\text{м}/\text{с}^2$. Подбором можно найти, что численно он приблизительно равен $500 \text{ см}/\text{с}^2$. Таким образом, мы представили закон движения в трех формах — табличной, графической и символьной (в виде формулы), то есть рассмотрели достаточно простой закон движения.

Подчеркнем, что закон движения полностью описывает движение, дает исчерпывающую информацию о нем. Зная его, можно найти любую кинематическую характеристику. Однако задача физики заключается не только в том, чтобы просто описать наблюдаемое движение, более важная задача — научиться предсказывать и рассчитывать его, строить модели, создавать условия для того, чтобы получить движение требуемого вида. Для успешного решения таких проблем нам необходимо ввести и изучить некоторые характеристики механического движения (скорость, ускорение и т. д.), которые позволяют теоретически находить зависимости координат от времени, то есть законы движения.

§ 4. Равномерное движение материальной точки вдоль прямой

4.1. Математическое описание равномерного движения

Пусть некоторое тело, которое можно считать материальной точкой, движется вдоль заданной прямой. Для описания его движения направим ось X декартовой системы координат вдоль этой прямой (которая является траекторией движения), выберем также на этой оси начало отсчета. Положение тела однозначно определяется одной координатой, поэтому закон движения в данном случае представляет собой одну функцию — зависимость координаты x от времени t — $x(t)$. Рассмотрим наиболее простой вид движения — *равномерное*.

Равномерным называется такое движение точки, при котором за любые равные промежутки времени она проходит равные пути.

При таком движении легко определить физическую характеристику быстроты движения — *скорость*.

Путевой скоростью равномерного движения называется отношение пути, пройденного телом, к интервалу времени, за который этот путь пройден.

В дальнейшем мы определим скорость несколько по-другому, поэтому в данном определении мы оговорили термин «путевая скорость».

Если обозначить пройденный путь S , а интервал времени t , то скорость^{*} v , как вам известно, определяется формулой

$$v = \frac{S}{t}. \quad (1)$$

При равномерном движении это отношение не зависит от рассматриваемого промежутка времени, так как пройденный путь пропорционален времененному интервалу. Можно дать еще одно истолкование скорости: **скорость тела равна пути, пройденному телом за единицу времени.**^{**}

Скорость есть физическая величина, имеющая в системе СИ размерность м/с (метр в секунду). Кроме этой единицы измерения скорости довольно часто используется внесистемная единица — км/ч, а в некоторых странах — миль/ч.

Величина пройденного пути S показывает, на сколько сместилось тело, но не указывает направление этого смещения. Используя введенные коор-

* Хотя обозначения физических величин, в принципе, произвольны, имеется ряд обозначений традиционных, общепринятых. К числу таких относится и традиционное обозначение скорости латинской буквой v , что соответствует английскому слову *velocity* — скорость.

** В принципе, можно ввести и иную характеристику быстроты передвижения — величину, обратную скорости, — отношение $\frac{t}{S}$, смысл которой — путь, пройденный за единицу времени. Согласитесь, что такая величина также характеризует движение и иногда используется в жизни: километр пробежал за три минуты. Однако более удобной физической величиной является все-таки скорость.

динаты, можно определить смещение тела как изменение его координаты:

$$\Delta x = x - x_0, \quad (2)$$

где x — координата тела в некоторый момент времени t , а x_0 — координата тела в начальный момент t_0 .

Символом Δ (греческая буква «дельта») мы будем обозначать изменение любой физической величины (в данном случае координаты) — конечное значение минус начальное; такое обозначение является общепринятым.

Изменение координаты может быть как положительным (при увеличении значения координаты), так и отрицательным (при ее уменьшении). Таким образом, знак величины Δx просто указывает направление движения в положительном либо отрицательном направлении оси X . Очевидно, что путь, пройденный материальной точкой при движении вдоль оси в одном направлении, связан с изменением координаты соотношением

$$S = |\Delta x|. \quad (3)$$

Таким образом, если вместо пути использовать изменение координаты, то с помощью знака \pm (плюс — минус) можно указать дополнительно и направление движения. Соответствующим образом можно переопределить и скорость движения: **скорость равномерного движения вдоль прямой равна отношению изменения координаты к промежутку времени, в течение которого это изменение произошло:**

$$v = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (4)$$

Заметьте, для величины интервала времени мы также используем обозначение Δt — разность между показаниями часов в конечный и начальный моменты времени. В данном определении скорость может быть положительной (если тело движется в положительном направлении оси) и отрицательной (при движении в противоположном направлении). Таким образом, знак скорости указывает направление движения, а ее модуль сохраняет прежнее значение путевой скорости — путь, пройденный в единицу времени.

Найдем теперь зависимость координаты от времени (закон движения) при равномерном движении вдоль прямой, то есть в том случае, когда скорость остается постоянной величиной. Непосредственно из формулы, определяющей скорость, движение можно выразить так:

$$x = x_0 + v(t - t_0). \quad (5)$$

Эта формула дает закон движения материальной точки при ее равномерном движении вдоль прямой. Знание только скорости движения не позволяет однозначно определить его закон — необходимо знать положение (то есть координату) тела в какой-нибудь момент времени. Часто это дополнительное условие называют *начальным*: в начальный момент времени t_0 тело находится в точке с координатой x_0 . Однако совсем не обязательно, чтобы движение начиналось в момент времени t_0 —

формулу (5) можно применять для любого времени t (в том числе и $t < t_0$), важно только, чтобы во все рассматриваемые моменты времени продолжалось движение с той же скоростью. В этом смысле закон движения обратим — его можно использовать как для того, чтобы предсказать положение тела в будущем ($t > t_0$), так и для того, чтобы определить, где оно находилось в прошлом ($t < t_0$).

При рассмотрении системы координат мы неоднократно подчеркивали, что выбор начала отсчета координат произволен, также произволен и выбор начала отсчета времени t_0 . Физический смысл этого «произвола»: вы можете «запустить» свои часы в любой удобный для вас момент времени. Поэтому часто в формуле закона движения полагают, что $t_0 = 0$, тогда

$$x = x_0 + vt. \quad (6)$$

Различие между формулами (5) и (6) при описании одного и того же движения только в начальном отсчете времени: при описании движения с помощью формулы (5) полагают, что тело находилось в точке с координатой x_0 при $t = t_0$, а в формуле (6) — при $t = 0$.

С математической точки зрения закон движения является функцией и, как всякая функция, может быть проиллюстрирован графиком. Графическое представление различных законов наглядно, информативно и чрезвычайно распространено как в физике, так и в других естественных науках.

Построим график функции, описываемой уравнением (5). Зависимость $x(t)$ в данном случае

линейна, поэтому ее график является прямой линией (рис. 34). Эта прямая проходит через точку^{*} A с координатами (t_0, x_0) . Точки пересечения графика с осями координат также имеют наглядный физический смысл: x_1 — положение тела в момент времени $t = 0$; t_2 — момент времени, когда тело находилось в точке начала отсчета. Наклон графика определяется скоростью точки — чем выше скорость, тем больший угол образует график с осью t .

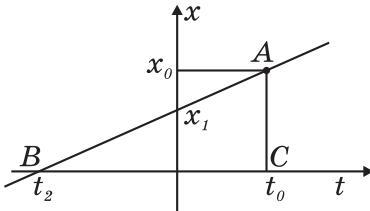


Рис. 34

Иногда говорят, что скорость численно равна тангенсу угла наклона графика закона движения к оси времени. Действительно, в прямоугольном треугольнике ABC длина отрезка BC равна Δt , а длина отрезка AC равна Δx . Следовательно, их отношение, с одной стороны, равно скорости движения $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, с другой — тангенсу угла $\angle ABC$. Однако к этому утверждению следует относиться с большой осторожностью, так как изменения координаты Δx и времени Δt являются физическими величинами и имеют разные размерности, поэтому масштабы соответствующих осей могут выбираться произвольно, независимо друг от друга.

* У нас начинают проявляться недостатки разговорного языка: «материальная точка (модель тела) находится в точке (положение тела в пространстве) с координатой x_0 , что соответствует точке A (точка на рисунке) на графике закона движения». Эти недостатки создают определенные трудности, однако в большинстве случаев из смысла фразы понятно, о каких точках и координатах идет речь.

Изменение масштаба одной из осей приведет к изменению угла наклона графика, скорость же при этом, конечно, не изменится. Поэтому измерять скорость с помощью транспортира неразумно. Поэтому «тангенс наклона» $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ следует понимать как отношение физических величин, а не длин отрезков, на рисунке с произвольным масштабом. Во избежание подобной путаницы в дальнейшем для обозначения отношения $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ мы будем использовать термин «коэффициент наклона».

На рис. 35 приведены графики законов движения нескольких человек вдоль одной прямой, причем их движение может быть словесно описано следующим образом: «Из пункта A (расположенного в точке с координатой x_A) одновременно вышли два пешехода, причем второй двигался со скоростью в два раза большей скорости первого. Навстречу им из пункта B (расположенного в точке с координатой x_B) вышел третий пешеход со скоростью, равной скорости второго. Третий пешеход встретил второго в момент времени t_1 в точке с координатой x_1 , а затем первого в момент времени t_2 в точке с координатой x_2 . В момент времени t_3 он прибыл в пункт A ». Вот такая «история» изображена на этом графике! Согласитесь, графический способ описания гораздо короче и нагляднее.

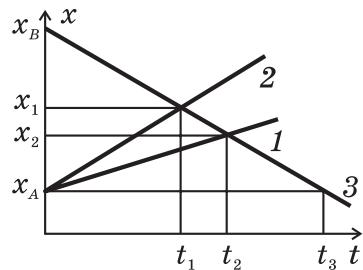


Рис. 35

Если закон равномерного движения выражается функцией $x = x_0 + vt$, то график этой функции — прямая линия, причем параметр v (скорость) определяет наклон графика (на рис. 36 значения скорости в м/с указаны справа, здесь $x_0 = 1,0$ м), а изменение параметра x_0 приводит к сдвигу графика вдоль оси X (на рис. 37 $v = 2,0$ м/с, а начальная координата x_0 совпадает с разметкой оси).

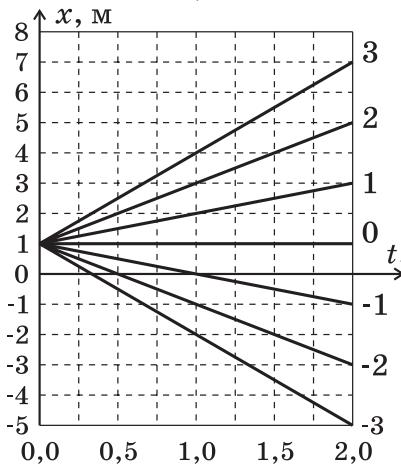


Рис. 36

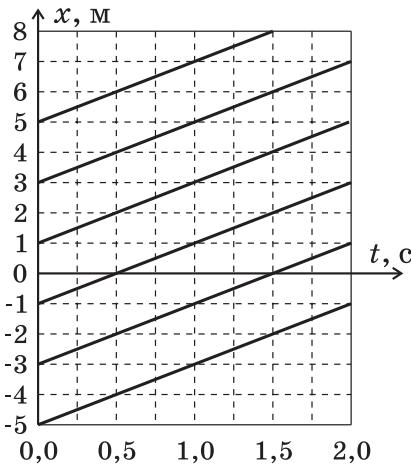


Рис. 37

4.2. О применимости модели равномерного движения

Мы рассмотрели простейший вид механического движения. Теперь с огорчением вынуждены признать, что такое движение практически не встреча-

ется в реальном мире^{*}: шарик, катящийся по столу, рано или поздно останавливается; автомобили и поезда постоянно изменяют скорость своего движения... Тем не менее наши усилия по изучению равномерного движения не напрасны — мы построили и описали одну из *моделей* механического движения, которая, как всякая модель, упрощает действительное движение. Но эта модель может применяться (и применяется!) для описания некоторых реальных движений. Необходимо только строго очертить рамки ее применимости, которые определяются постановкой задачи: насколько подробно, детально и с какой точностью требуется описать движение. По определению, движение является равномерным, если за равные промежутки времени тело проходит равные отрезки пути. Следовательно, **движение можно считать (моделировать) равномерным, если можно пренебречь различиями в расстояниях, проходимых телом за равные промежутки времени.**

Допустим, нам необходимо описать движение пассажирского поезда дальнего следования: нас интересует его положение через интервалы времени порядка одного часа. Если поезд делает остановки длительностью несколько минут, то можно говорить, что поезд движется приблизительно равномерно, считая, что остановки просто незначи-

* Наиболее значительным примером равномерного движения является распространение света в вакууме, скорость которого постоянна. Но существует ли абсолютный вакуум?

тельно снижают его среднюю скорость. Проясним смысл такого приближения.

В таблице приведен график движения славянского экспресса «Минск — Москва». Время прибытия и отправления местное.

№ п/п	Название станции	Время при- бытия	Время сто- янки, мин	Время от- прав- ления	Рас- стоя- ние, км
1.	Минск-Пассажир.	—	—	18.28	0
2.	Смолевичи	19.02	2	19.04	39
3.	Жодино	19.22	2	19.24	61
4.	Борисов	19.40	3	19.43	79
5.	Крупки	20.12	8	20.20	119
6.	Толочин	20.56	2	20.58	169
7.	Орша-Центральная	21.31	14	21.45	212
8.	Осиновка	22.07	2	22.09	238
9.	Смоленск-Централ.	0.07	5	0.12	331
10.	Вязьма	2.21	22	2.43	507
11.	Москва, Бел. вокзал	6.00	—	—	750

Несложно посчитать время прибытия и отправления поезда по каждой станции с момента его отправления из Минска. Не забудьте учесть, что белорусское и московское время отличаются на один час. Переход от одного к другому происходит на границе, между станциями Осиновка и Смоленск. Нанесем эти данные (время прибытия, отправления и соответствующие расстояния) на график и соединим их отрезками прямых (рис. 38). Тем самым получим график закона движения поезда. Заметим, что и при таком построении мы получим

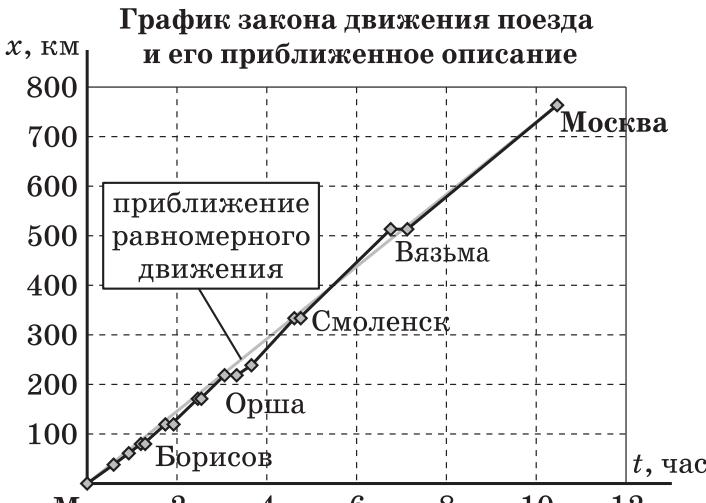


Рис. 38

приближенный график, на котором видим, что движение между станциями происходит равномерно, без разгонов и торможений.

Модель равномерного движения предполагает, что скорость на всем пути постоянна. Для построения графика этого приближения следует просто соединить начальную и конечную точки. По наклону этого графика либо с помощью формулы легко найти среднюю скорость движения: $v = \frac{S}{t} =$

$= \frac{750}{10,5} \approx 71$ км/ч. Сравнение двух графиков ступенчатого (с учетом остановок) и прямолинейного (приближение постоянной скорости) позволяет оценить погрешность сделанного приближения. В рассмотренном примере погрешность определения координаты (в определенный момент вре-

мени) не превышает 25 км. Устраивает вас такая точность описания? Если да, то можете «забыть» об остановках!

Но, по-видимому, для пассажира важнее точность, с которой определяется время прибытия и отправления поезда на станцию – как бы не проспать свою остановку или не опоздать к отправлению!

В качестве последнего примера в данном разделе рассмотрим движение гладкого твердого шара по горизонтальному столу, пущенного с начальной скоростью $v_0 = 1,0$ м/с. Если считать, что эта скорость не изменяется, то график такого приближенного описания будет являться прямой линией (рис. 39). В действительности из-за неизбежного трения скорость шара с течением времени будет уменьшаться, поэтому его координата будет меньше, чем предсказывается законом равномерного движения. Причем это «отставание» будет нарастать с

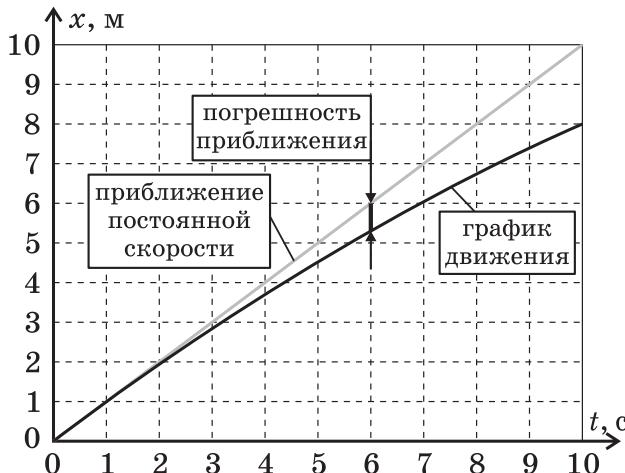


Рис. 39

течением времени. Если задана (или вы сами определили) максимально допустимая погрешность определения координаты, то вы можете с помощью графиков определить тот промежуток времени, в течение которого погрешность приближения постоянной скорости вас удовлетворяет. То есть в этом случае требуемая точность описания определяет промежуток времени, в течение которого можно пользоваться моделью равномерно движения.

Подведем итог: критерии применимости модели следует формулировать самостоятельно в каждом конкретном случае.

§ 5. Средняя и мгновенная скорость при движении точки по прямой

Как мы уже отмечали, равномерное движение является простейшей моделью механического движения. Если такая модель неприменима, то необходимо использовать более сложные. Для их построения нам необходимо ввести и рассмотреть понятие скорости в случае неравномерного движения.

Пусть материальная точка движется так, что ее закон движения имеет вид плавной кривой ACB (рис. 40). За интервал времени от t_0 до t_1 координата

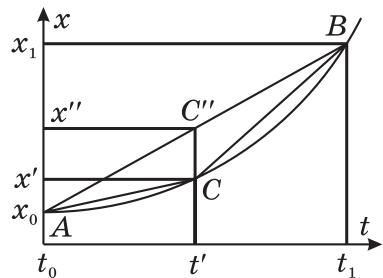


Рис. 40

точки изменилась от x_0 до x_1 . Если мы вычислим скорость по прежнему правилу

$$v_{cp} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} \quad (1)$$

и запишем уравнение закона движения как для равномерного движения

$$x = x_0 + v_{cp}(t - t_0), \quad (2)$$

то эта функция будет совпадать с реальным законом движения только в крайних точках интервала, там, где прямая AB (которая описывается уравнением (2)) пересекается с кривой ACB . Если же мы захотим вычислить по формуле (2) координату точки в промежуточный момент времени t' , то получим значение x'' , которое может заметно отличаться от истинного значения x' .

Таким образом, скорость (она называется *средней скоростью*), вычисленная по формуле (1), в данном случае характеризует быстроту перемещения точки на всем интервале в среднем, но она не позволяет вычислять координаты точки в произвольный момент времени.

Средней скоростью называется физическая величина, равная отношению изменения координаты точки к интервалу времени, в течение которого это изменение произошло.

Геометрический смысл средней скорости — коэффициент наклона секущей AB графика закона движения.

Для более детального, более точного описания движения можно задать два значения средней скорости:

а) на промежутке времени от t_0 до t' —

$$v_{cp1} = \frac{x' - x_0}{t' - t_0};$$

б) на промежутке времени от t' до t_1 —

$$v_{cp2} = \frac{x_1 - x'}{t_1 - t'}.$$

Если по этим двум средним скоростям построить закон движения, то он будет изображаться ломаной ACB , которая точнее описывает реальное движение точки. А если и такая точность нас не устраивает, то необходимо дробить временные интервалы дальше — на четыре, восемь и т. д. частей. При этом необходимо задавать соответственно четыре, восемь и т. д. значений средних скоростей. Согласитесь, такое описание становится громоздким и неудобным. Выход из этой ситуации давно найден — он заключается в том, что нужно рассматривать скорость как функцию времени.

Давайте посмотрим, как будет меняться средняя скорость при уменьшении промежутка времени, за который мы эту скорость вычисляем. Будем вычислять среднюю скорость за интервал времени от t_0 до t_1 , последовательно приближая значение t_1 к t_0 . При этом семейство секущих A_0A_1 , A_0A_1' , A_0A_1'' (рис. 41) будет стремиться к некоторому предельному положению прямой A_0B , которая является касатель-

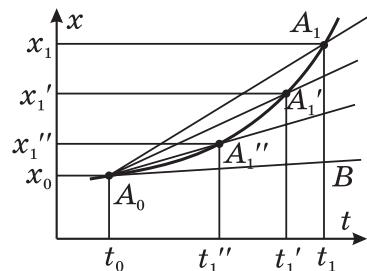


Рис. 41

ной к графику закона движения.

Приведем иной пример закона движения, чтобы показать, что мгновенная скорость может быть как больше, так и меньше средней скорости (рис. 42 с теми же обозначениями, что и на рис. 41).

Процедуру уточнения описания движения можно показать и алгебраически, последовательно вычисляя отношения $v_{cp} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}$, $v'_{cp} = \frac{x'_1 - x_0}{t'_1 - t_0}$, $v''_{cp} = \frac{x''_1 - x_0}{t''_1 - t_0}$. При этом оказывается, что эти величины приближаются к некоторому вполне определенному значению. Это предельное значение получило название *мгновенной скорости*.

Мгновенной скоростью называется отношение изменения координаты точки к интервалу времени, за которое это изменение произошло, при интервале времени, стремящемся к нулю*:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{при } \Delta t \rightarrow 0. \quad (3)$$

* В высшей математике это определение записывают с помощью специального символа

$$\lim (\text{предел} - limit): v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

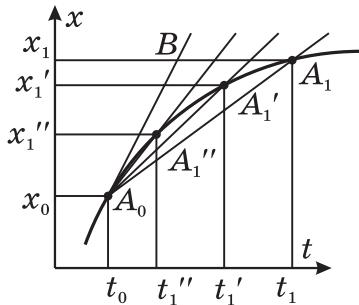


Рис. 42

Геометрический смысл мгновенной скорости — коэффициент наклона касательной к графику закона движения.

Таким образом, мы «привязали» значение мгновенной скорости к конкретному моменту времени — задали значение скорости в данный момент времени в данной точке пространства. Тем самым у нас появилась возможность **рассматривать скорость тела как функцию времени**, или функцию координаты.

С математической точки зрения это гораздо удобней, чем задавать значения средних скоростей на многих малых временных промежутках. Давайте задумаемся: а имеет ли физический смысл — скорость в данный момент времени? Скорость — характеристика движения, в данном случае — перемещения тела в пространстве. Для того чтобы зафиксировать перемещение, необходимо наблюдать за движением в течение некоторого промежутка времени. Чтобы измерить скорость, также необходим промежуток времени. Даже самые совершенные измерители скорости — радарные установки — измеряют скорость движущихся автомобилей пусть за малый (порядка одной миллионной доли секунды) промежуток, но не в какой-то момент времени. Следовательно, выражение «скорость в данный момент времени» с точки зрения физики некорректно. Тем не менее в механике постоянно пользуются понятием мгновенной скорости, которое очень удобно в математических расчетах. Математически, логически мы можем рассмотреть предельный переход $\Delta t \rightarrow 0$, а физически имеется минимально возможное значение промежутка Δt , за который можно измерить скорость.

Однако если мы изучаем движение автомобиля в течение нескольких часов, то промежуток времени в одну секунду может считаться бесконечно малым.

Таким образом, понятие мгновенной скорости является разумным компромиссом между простотой математического описания и строгим физическим смыслом. Такие «компромиссы» нам будут встречаться в ходе изучения физики постоянно.

В дальнейшем, говоря о скорости, мы будем иметь в виду именно **мгновенную скорость**. Заметим, при равномерном движении мгновенная скорость равна ранее определенной скорости потому, что при равномерном движении отношение $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ не зависит от величины промежутка времени, поэтому остается неизменным и при сколь угодно малом Δt .

Так как скорость может зависеть от времени, то ее следует рассматривать как функцию времени и изображать ее в виде графика.

При равномерном движении с постоянной скоростью v_0 график зависимости скорости от времени является прямой линией, параллельной оси времени (на рис. 43 — прямая AB).

Рассмотрим промежуток времени от t_0 до t_1 . Произведение величины этого интервала ($t_1 - t_0$) на скорость v_0 равно, с одной стороны, изменению координаты Δx , а с другой — площади прямоугольника под графиком зависимости скорости от времени.

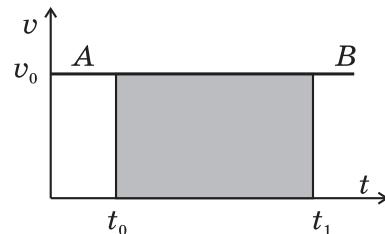


Рис. 43

Площадь под графиком следует понимать, опять же таки в физическом смысле, как произведение физических величин, имеющих различную размерность, а не в чисто геометрическом смысле — как произведение длин отрезков.

Покажем, что площадь под графиком зависимости скорости от времени равна изменению координаты при любой зависимости скорости от времени $v(t)$. Разобьем время движения от t_0 до t_1 на малые интервалы величиной Δt ; на каждом интервале определим среднюю скорость v_i . Тогда площадь прямоугольника с основанием Δt и высотой v_i (на рис. 44 он отмечен более плотной штриховкой) будет равна изменению координаты за этот малый промежуток времени. Сумма площадей всех таких прямоугольников (на рис. 44 заштрихованы) будет равна изменению координаты точки за рассматриваемый промежуток времени движения от t_0 до t_1 . Если теперь все интервалы времени Δt уменьшать (соответственно увеличивая при этом их число), то суммы площадей прямоугольников будут стремиться к площади криволинейной трапеции под графиком функции $v(t)$.

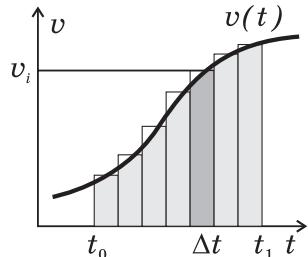


Рис. 44

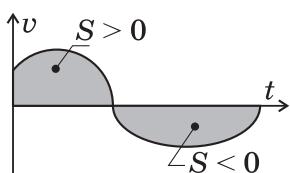


Рис. 45

Дополним наше определение площади под кривой еще одной договоренностью: будем считать, что если кривая лежит

под осью времени (то есть скорость отрицательна), то и соответствующую площадь будем считать отрицательной (рис. 45).

5.1. Расчет средней скорости

Составители различных сборников задач по физике очень любят задачи, в которых требуется рассчитать среднюю скорость (чаще всего путевую) на всем интервале движения, когда заданы значения скоростей на отдельных интервалах. Рассмотрим методику решения таких задач.

Прежде всего запомните определение: **средняя путевая скорость равна отношению *всего* пройденного пути ко *всему* времени движения**. Так как это определение, то дискутировать о правильности такого определения нет смысла.

1. Известно, что в течение промежутка времени Δt_1 тело двигалось со скоростью v_1 ; потом в течение промежутка времени Δt_2 — со скоростью v_2 ; потом в течение промежутка времени Δt_3 — со скоростью v_3 и так далее (пока у автора задачи не заговорит совесть). Мы же остановимся на трех интервалах. Необходимо рассчитать среднюю скорость за все время движения.

Считая, что на каждом участке скорость постоянна, найдем весь путь, пройденный телом:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + v_3 \Delta t_3. \quad (1)$$

Очевидно, что время движения равно сумме времени движения на всех интервалах:

$$t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3. \quad (2)$$

По определению, средняя скорость за все время движения будет равна:

$$V_{\text{cp}} = \frac{S}{t} = \frac{v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + v_3 \Delta t_3}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3}. \quad (3)$$

В общем случае, средняя скорость не равна среднему арифметическому скоростей на отдельных интервалах. Только в том случае, когда эти *временные интервалы равны* ($\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3$), из формулы (3) следует, что средняя скорость равна среднему арифметическому:

$$V_{\text{cp}} = \frac{v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + v_3 \Delta t_3}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3} = \frac{v_1 + v_2 + v_3}{3}. \quad (4)$$

2. Известно, что тело прошло участок пути S_1 со скоростью v_1 , потом участок пути S_2 со скоростью v_2 , наконец, участок пути S_3 со скоростью v_3 . Расчитаем среднюю скорость за все время движения.

Понятно, что весь пройденный путь равен:

$$S = S_1 + S_2 + S_3. \quad (5)$$

Несложно найти и время движения (если не забыли, что при равномерном движении время равно отношению пути к скорости):

$$t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 = \frac{S_1}{v_1} + \frac{S_2}{v_2} + \frac{S_3}{v_3}. \quad (6)$$

Теперь подставим эти выражения в формулу для средней скорости и получим достаточно громоздкое выражение:

$$V_{\text{cp}} = \frac{S}{t} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{\frac{S_1}{v_1} + \frac{S_2}{v_2} + \frac{S_3}{v_3}}. \quad (7)$$

Этой формуле можно придать более красивый вид:

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3}{V_{cp}} = \frac{S_1}{v_1} + \frac{S_2}{v_2} + \frac{S_3}{v_3}. \quad (8)$$

Мы уже отмечали, что величина, обратная скорости, имеет смысл времени, которое необходимо для преодоления единицы пути.

Назовем* эту величину «проходимостью». Тогда если отдельные участки пути одинаковы — $S_1 = S_2 = S_3$, то из формулы (8) следует, что средняя «проходимость» равна среднему арифметическому от «проходимостей» на различных одинаковых по длине участках:

$$\frac{1}{V_{cp}} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} \right). \quad (9)$$

§ 6. Ускорение при движении точки по прямой

После того как мы разобрались с понятием мгновенной скорости (скорости в данный момент времени), у нас появилась возможность говорить об изменении скорости, определить физическую величину, описывающую это изменение. Пусть в момент времени t_0 скорость точки была v_0 , а в момент времени $t_1 > t_0$ стала равной v_1 . Тогда **отношение изменения скорости к промежутку времени**, в

* Термин не официальный!

течение которого это изменение произошло, называется ускорением точки^{*}:

$$a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (1)$$

Можно сказать, что ускорение — это *скорость изменения скорости тела*.

Ускорение — физическая величина, размерность которой есть отношение размерности скорости к размерности времени, поэтому в СИ размерность ускорения $[a] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{(m/c)}{c} = \frac{m}{c^2}$, то есть «метр разделить на секунду в квадрате», или «метр в секунду за секунду».

Обсуждая данное определение, мы должны повторить все наши рассуждения, касающиеся перехода от понятия средней к понятию мгновенной скорости. Так, возможны ситуации, когда отношение $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ не зависит от величины интервала Δt — в этом случае ускорение является постоянной величиной и такое движение называется равнousкоренным. Если же величина $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ зависит от промежутка времени, то формула (1) дает значение **среднего ускорения** на интервале времени от t_0 до t_1 . Для более детального описания движения необходимо

* Мы будем обозначать ускорение латинской буквой a как сокращение английского слова *acceleration* — ускорение (кстати, слово «акселерация» происходит от того же корня).

димо рассмотреть предельный переход к малому промежутку времени. В этом случае предельное значение отношения $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ будет являться мгновенным ускорением, или ускорением «в данный момент времени».

При таком определении необходимо повторить все замечания о математическом и физическом смысле предельного перехода $\Delta t \rightarrow 0$, однако они полностью аналогичны рассуждениям о мгновенной скорости, поэтому проведите их самостоятельно.

Заметим, что ускорение, как и скорость, может быть как положительным, так и отрицательным. Напомним, что знак скорости указывает направление движения. Смысл знака ускорения иной — он показывает направление изменения скорости. Рассмотрим возможные комбинации знаков скорости и ускорения.

1) $v > 0, a > 0$: тело движется в положительном направлении выбранной оси, изменение скорости также положительно, то есть скорость возрастает, иными словами — тело ускоряется.

2) $v > 0, a < 0$: тело движется в положительном направлении оси, но его скорость убывает — тело притормаживает.

3) $v < 0, a > 0$: тело движется в отрицательном направлении, но его скорость увеличивается, следовательно, уменьшается по абсолютной величине: тело, двигаясь в отрицательном направлении, притормаживает.

4) $v < 0, a < 0$: тело движется в отрицательном направлении, при этом его скорость уменьшается, но по абсолютной величине возрастает — тело движется ускоряясь.

Рассмотрим теперь геометрический смысл мгновенного ускорения. Для этого построим график зависимости скорости от времени для некоторой движущейся точки (на рис. 46 — плавная кривая A_0A_1). Пусть в момент времени t_0 скорость тела равна v_0 (точка A_0 на графике), а в момент времени t_1 — скорость v_1 (точка A_1 на графике). В прямоугольном треугольнике

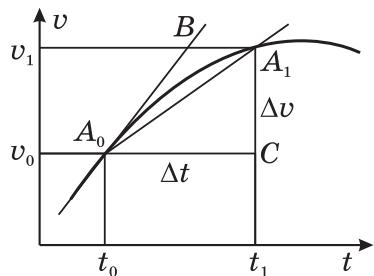


Рис. 46

A_0A_1C отношение длин катетов $\frac{|A_1C|}{|A_0C|} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ (то есть среднее ускорение) численно равно тангенсу угла наклона секущей A_0A_1 к оси времени. При уменьшении интервала времени (то есть при $t_1 \rightarrow t_0$) секущая A_0A_1 стремится к касательной A_0B . Следовательно, тангенс угла наклона касательной к графику зависимости скорости от времени численно равен мгновенному ускорению.

Обязательно следует отметить, что к выражению «тангенс угла наклона» (как и в случае скорости) необходимо относиться с физической, а не с геометрической точки зрения: длины рассматриваемых катетов являются физическими величина-

ми, имеющими различную размерность, поэтому и «тангенс» имеет размерность, в данном случае, ускорения. Поэтому в дальнейшем мы будем использовать термин «коэффициент наклона» касательной к оси времени.

§ 7. Равноускоренное движение точки по прямой

Пусть материальная точка движется вдоль заданной прямой линии так, что ее ускорение остается постоянным. Такое движение точки называется **равноускоренным**^{*}, или **равнопеременным** движением. По-прежнему направим ось X вдоль прямой, по которой движется точка, и введем обычным образом координаты на этой прямой.

Используя определение ускорения

$$a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (1)$$

и учитывая, что при постоянном ускорении это отношение не зависит от значения интервала времени, мы можем выразить значение скорости в

* Мы будем использовать термин «равноускоренное движение» в любом случае, когда ускорение постоянно, независимо от того, увеличивается или уменьшается скорость движения. Поэтому, по нашему определению, точка может двигаться равноускоренно, замедляясь. Иногда движение с отрицательным ускорением называют равнозамедленным, но чтобы избегать лишних сложностей, этот термин употреблять не будем.

произвольный момент времени t (опуская индексы «1»):

$$v = v_0 + a(t - t_0). \quad (2)$$

Это выражение определяет скорость как функцию времени. Как следует из полученного уравнения, зная только ускорение, нельзя однозначно определить скорость в произвольный момент времени. Для этого необходимо задать дополнительное условие — скорость v_0 в некоторый момент времени t_0 . Часто это условие называют начальным и, полагая $t_0 = 0$, называют величину v_0 начальной скоростью.

Графиком зависимости скорости от времени при равноускоренном движении (то есть графиком функции (2)) является прямая линия, проходящая через точку A с координатами (t_0, v_0) , коэффициент наклона которой равен ускорению точки (рис. 47).

Как было показано ранее — площадь под графиком зависимости скорости от времени равна изменению координаты точки. Воспользуемся этим правилом для того, чтобы решить основную задачу кинематики — найти закон движения для равноускоренного движения. Изменение координаты Δx в данном случае численно равно площади трапеции $t_0 t_1 A_1 A$, которая вычисляется как произведение полусуммы оснований на высоту:

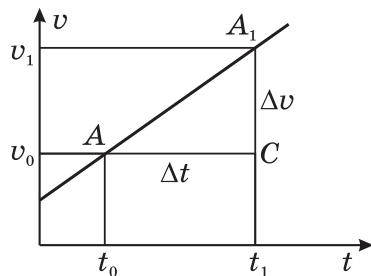


Рис. 47

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{v_0 + v_1}{2} \cdot (t_1 - t_0) = \frac{v_0 + v_0 + a(t_1 - t_0)}{2} \cdot (t_1 - t_0) = \\ &= v_0(t_1 - t_0) + \frac{a(t_1 - t_0)^2}{2}.\end{aligned}\quad (3)$$

При выводе этого соотношения мы учли, что $v_1 = v_0 + a(t_1 - t_0)$. При равноускоренном движении полученное соотношение справедливо для любого момента времени t_1 , поэтому вместо конкретного значения t_1 можно подставить переменную величину — текущее время. Изменение координаты, по определению, равно: $\Delta x = x - x_0$, следовательно, закон движения имеет вид

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a(t - t_0)^2}{2}.\quad (4)$$

В той формуле x_0 — координата, а v_0 — скорость в момент времени t_0 . Часто эти параметры называют **начальными**. Обратите внимание: чтобы найти закон движения при постоянном ускорении, помимо значения ускорения необходимо задать два дополнительных условия — координату и скорость в некоторый момент времени. Закон движения (4) можно использовать не только для $t > t_0$, но и в любые другие моменты времени, если, конечно, вы уверены, что в это время характер движения не изменился.

Вернемся к цепочке преобразований (3). Из уравнения (2) следует: $t_1 - t_0 = \frac{v_1 - v_0}{a}$. Подставим это выражение в формулу (3):

$$\Delta x = \frac{v_0 + v_1}{2} \cdot (t_1 - t_0) = \frac{v_0 + v_1}{2} \cdot \frac{v_1 - v_0}{a} = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2a}. \quad (5)$$

Мы получили важное соотношение, позволяющее найти изменение координаты тела по известным начальной и конечной скоростям и ускорению. Так, например, тормозной путь автомобиля S может быть легко подсчитан по этой формуле: полагая конечную скорость равной нулю и учитывая, что при торможении ускорение отрицательно —

$$a = -|a|, \text{ из формулы (5) следует, что } S = \frac{v_0^2}{2|a|}.$$

Рассмотрим подробнее характер движения при различных значениях параметров равноускоренного движения. Выбор начала отсчета времени, как и выбор начала отсчета координаты, произведен, поэтому при изучении движения одного тела мы можем положить^{*} $t_0 = 0$ и $x_0 = 0$. Таким образом, рассмотрим закон движения в форме

$$x = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (6)$$

При этом скорость тела изменяется по закону

$$v = v_0 + at. \quad (7)$$

Удобно одновременно исследовать обе функции — зависимости от времени скорости и координаты. С графиками функции (7) мы уже позна-

^{*} Если же мы рассматриваем одновременно движение нескольких тел, то можем выбрать только одно начало отсчета, общее для всех рассматриваемых тел. Поэтому добиться того, чтобы $x_0 = 0$ для всех тел, невозможно (за исключением случая, когда все тела стартуют из одной точки).

комились — это прямые линии. В общем случае, координата зависит от времени по квадратичному закону, поэтому графиком этой функции является парабола.

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Начальная скорость $v_0 = 0$.

В этом случае исследуемые функции имеют вид

$$v = at, \quad x = \frac{at^2}{2}.$$

Прямые зависимостей $v(t)$ проходят через начало координат, вершины парабол зависимостей $x(t)$ совпадают с началом координат (естественно, своих). Увеличение ускорения приводит к увеличению коэффициента наклона прямой $v(t)$ и увеличению крутизны парабол $x(t)$. При отрицательном значении ускорения наклон прямых $v(t)$ становится отрицательным, а ветви парабол $x(t)$ опускаются вниз.

На рис. 48 показаны описанные зависимости для значений ускорения $0,5 \text{ м/с}^2, 1,0 \text{ м/с}^2, 1,5 \text{ м/с}^2$ (графики 1, 2, 3) и отрицательных ускорений $-0,5 \text{ м/с}^2, -1,0 \text{ м/с}^2, -1,5 \text{ м/с}^2$ (графики 4, 5, 6).

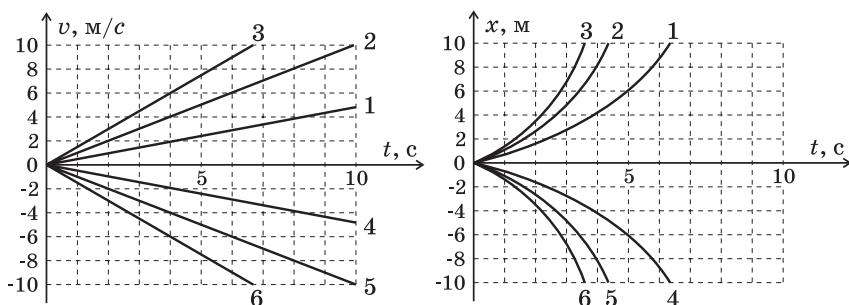


Рис. 48

2. Положительное ускорение $a > 0$, начальная скорость отлична от нуля — $v_0 \neq 0$.

Пусть $v_0 > 0$. Тогда график зависимости скорости от времени имеет вид прямой, показанной на рис. 49. Значение начальной скорости равно длине отрезка, который отсекает график на оси скорости. График зависимости координаты от времени является параболой, ветви которой направлены вверх, проходящей через начало координат. Проведем касательную к этой параболе в начальной точке. Как мы показали ранее, коэффициент наклона касательной равен мгновенной скорости. В момент времени $t = 0$ коэффициент наклона касательной, следовательно, совпадает с начальной скоростью v_0 . В рассматриваемом случае он положителен, поэтому парабола стремится вверх.

Рассмотрим теперь случай, когда ускорение осталось прежним — $a > 0$, но начальная скорость отрицательна — $v_0 < 0$. В этом случае прямая зависимости $v(t)$ «стартует» с отрицательных значений скорости. Поэтому касательная к параболе зависимости $x(t)$ в начальный момент имеет отрицательный наклон, хотя ветви параболы по-прежнему направлены вверх. До

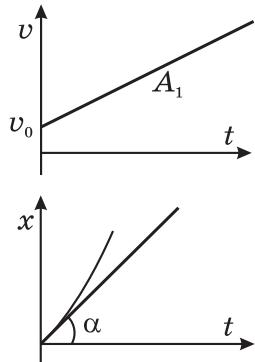


Рис. 49

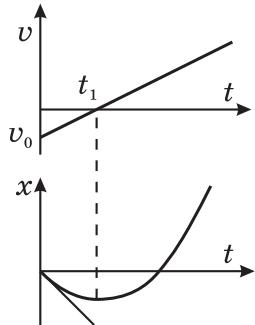


Рис. 50

тех пор, пока скорость отрицательна (на рис. 50 — до момента времени t_1), координата убывает, достигая минимального значения в момент времени, когда скорость становится равной нулю. Это и понятно, с точки зрения здравого смысла: до момента времени t_1 точка двигалась в отрицательном направлении оси, а затем стала двигаться в противоположном направлении, следовательно, в момент времени t_1 она находилась на максимальном удалении от начала отсчета. Это утверждение является универсальным правилом — **если скорость точки изменяет знак, то в момент времени, когда скорость равна нулю, точка находится в своем крайнем положении(координата минимальна или максимальна).**

Посмотрите, как изменяются графики зависимостей скорости и координаты при изменении начальной скорости. На рис. 51 построены зависимости $v(t)$ и $x(t)$ при одинаковом ускорении $a = 1,0 \text{ м/с}^2$, но при разных начальных скоростях. Заметьте, что прямые $v(t)$ параллельны, а все параболы $x(t)$ одинаковы — они отличаются только положением вершины.

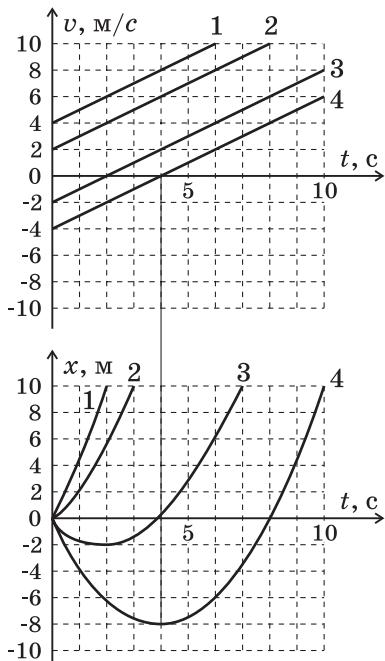


Рис. 51

Другие комбинации начальных параметров можно рассмотреть аналогично: в частности, случай $a < 0$, $v_0 \neq 0$ является зеркальным отражением только что рассмотренной ситуации — его можно свести к рассмотренному варианту, просто изменив направление оси X .

Итак, мы рассмотрели еще одну модель — равноускоренное движение. Надо отметить, что движение, близкое к равноускоренному, довольно часто встречается в окружающем нас мире. Так, если тело движется под действием постоянных сил, то его движение является равноускоренным. Например, скатывание шара с наклонной плоскости. Еще один очень популярный пример равноускоренного движения — падение тела (рис. 52) с нулевой начальной скоростью или движение тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью, отличной от нуля.



Рис. 52

Если направить ось координат z вертикально вверх, то ускорение тела (при отсутствии сопротивления воздуха^{*}) будет постоянно, отрицательно и по модулю равно ускорению

* Очередной раз есть повод поговорить о применимости моделей ... Поговорите! Модель равноускоренного движения также является приближенной. Если в названных примерах сопротивление воздуха играет существенную роль, то ускорение тел будет заметно изменяться, поэтому модель равноускоренного движения окажется неприменимой.

свободного падения: $g \approx 9,8$ м/с². Поэтому закон движения тела будет иметь вид

$$z = z_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}, \quad (8)$$

где z_0 — высота, с которой брошено тело, v_0 — начальная скорость.

§ 8. Расчет закона движения

8.1. Вычисление мгновенной скорости и ускорения по известному закону движения

В предыдущих параграфах мы занимались решением основной задачи механики — искали закон движения материальной точки. Покажем теперь, как, зная закон движения, рассчитать кинематические характеристики движения — мгновенную скорость и ускорение.

Пусть закон движения имеет вид функции* $x(t)$. Тогда мгновенную скорость можно вычислить по ее определению:

$$v(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

При этом следует учесть, что величина Δt должна быть малой. Покажем использование этого метода для случая равноускоренного движения, при котором $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$:

* Эта запись $x(t)$ обозначает координату x в момент времени t .

$$\begin{aligned}
v(t) &= \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \\
&= \frac{\left(x_0 + v_0(t + \Delta t) + \frac{a(t + \Delta t)^2}{2} \right) - \left(x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \right)}{\Delta t} = \\
&= \frac{v_0(t + \Delta t - t) + \frac{a(t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2 - t^2)}{2}}{\Delta t} = \\
&= \frac{v_0 \Delta t + at \Delta t + \frac{a(\Delta t)^2}{2}}{\Delta t} = v_0 + at + \frac{a}{2} \Delta t.
\end{aligned}$$

Последнее слагаемое при уменьшении Δt становится пренебрежимо малым, поэтому его можно опустить. Таким образом, мы получим известную функцию зависимости скорости от времени при равноускоренном движении: $v = v_0 + at$.

Аналогично, в принципе, можно вычислять значения мгновенной скорости при любом законе движения.

Рассмотрим еще один пример таких вычислений. Пусть закон движения имеет вид $x(t) = bt^3$, где b — некоторая известная постоянная величина. Мгновенную скорость вычисляем посредством следующих преобразований:

$$\begin{aligned}
v(t) &= \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{b(t + \Delta t)^3 - bt^3}{\Delta t} = \\
&= \frac{b(t^3 + 3t^2 \Delta t + 3t(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3 - t^3)}{\Delta t} = \\
&= 3bt^2 + 3bt\Delta t + (\Delta t)^2.
\end{aligned}$$

В этом случае можно пренебречь двумя последними слагаемыми, которые становятся пренебрежимо малыми при уменьшении Δt . Таким образом, в этом случае зависимость скорости от времени имеет вид $v(t) = 3bt^2$. По определению ускорения, вычислим:

$$a = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{3b(t + \Delta t)^2 - 3bt^2}{\Delta t} = \\ = 3b \frac{t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = 6bt + 3b\Delta t.$$

Пренебрегая последним слагаемым, получим выражение для мгновенного ускорения: $a = 6bt$.

Подобные вычисления, в принципе, можно проводить для любого закона движения. Методика таких преобразований хорошо разработана в высшей математике, и для всех известных функций расчет отношения приращения функции к приращению аргумента выполняется по достаточно простым правилам вычисления так называемых производных.

Поэтому говорят, что мгновенная скорость является первой производной от зависимости координаты от времени, ускорение — первая производная от скорости, или вторая производная от координаты.

К сожалению, у нас нет возможности использовать аппарат высшей математики в данном курсе (так как вы с ним просто незнакомы), поэтому мы будем ограничиваться примерами, где можно обойтись без высшей математики.

8.2. Определение закона движения по известной зависимости скорости от времени

Сейчас мы покажем, что по известной произвольной зависимости скорости движения от времени и начальному положению можно, в принципе, найти закон движения. Решение этой задачи может вызвать определенные математические проблемы, но, подчеркнем, эта задача разрешима.

Пусть материальная точка движется вдоль прямой, вдоль которой направим координатную ось X . Допустим, каким-то образом нам стала известна зависимость скорости материальной точки от времени, задаваемая функцией $v(t)$. Проблема заключается в построении закона движения материальной точки, т. е. в определении координаты точки $x(t)$ в произвольный момент времени t . Эта задача может быть разрешена следующим образом: мысленно разобьем время движения на N малых интервалов времени Δt_i , где i — номер интервала времени, пробегающий ряд натуральных чисел: $i = 1, 2, 3 \dots N$ (рис. 53). Ясно, что сумма всех временных промежутков должна быть равна рассматриваемому времененному интервалу:

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \dots + \Delta t_N = t - t_0.$$

Если выбранные промежутки времени достаточно малы, можно пренебречь изменением ско-

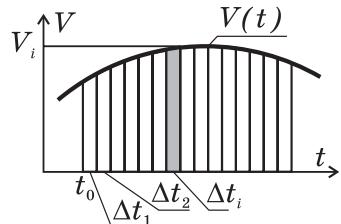


Рис. 53

рости в течение этого промежутка времени. Тогда изменение координаты за малый промежуток времени Δt_i приближенно можно считать равным: $\Delta x_i = v(t_i)\Delta t_i$, где $v(t_i)$ — средняя скорость на рассматриваемом промежутке времени. Если в момент времени t_0 координата точки равна x_0 , то в момент времени t координата точки рассчитывается по формуле

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \dots + \Delta x_N = \\&= x_0 + v_1\Delta t_1 + v_2\Delta t_2 + v_3\Delta t_3 + \dots + v_N\Delta t_N.\end{aligned}$$

Естественно, что чем меньше длина выбранных интервалов времени Δt_i , тем с большей точностью мы найдем координату точки в момент времени t . Следовательно, выбирая интервалы все более малыми, мы можем рассчитать координату точки с любой наперед заданной точностью. Таким образом, нахождение закона движения сводится к утомительной математической процедуре. К счастью, давно разработаны методы вычисления подобных сумм для произвольных зависимостей скоростей от времени. Эти методы составляют суть интегрального исчисления. Примененный нами графический метод определения закона движения фактически является одним из способов вычисления подобных сумм. Подчеркнем, что проблема вычисления подобных сумм является математической, физический смысл которой вполне очевиден — на бесконечно малом интервале времени движение приблизительно равномерное.

Подобный подход — разбиение на очень малые интервалы с последующим суммированием — чрезвычайно широко распространен в различных физических теориях. В дальнейшем мы будем им постоянно пользоваться. Поэтому имеет смысл использовать специальные обозначения для различных сумм, которые очень давно используются в математике.

Для обозначения операции суммирования используется специальный символ Σ — греческая буква «сигма» (рис. 54). С использованием этого символа любая сумма записывается в виде

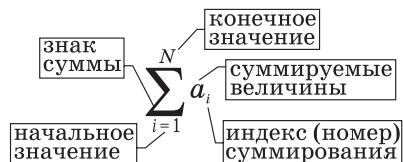


Рис. 54

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_N = \sum_{i=1}^N a_i .$$

Снизу и сверху суммы указываются пределы изменения номера слагаемого (индекса суммирования). В тех случаях, когда пределы суммирования очевидны, ограничиваются более краткой записью, указывая только обозначение индекса суммирования:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_i a_i .$$

С использованием обозначения суммы формула для расчета закона движения кратко может быть записана в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + v_3 \Delta t_3 + \\ &+ \dots + v_N \Delta t_N = x_0 + \sum_{i=1}^N v_i \Delta t_i . \end{aligned}$$

Подчеркнем очень важное обстоятельство: для однозначного определения закона движения мало знать зависимость скорости от времени $v(t)$, необходимо еще одно начальное условие — значение координаты x_0 в некоторый момент времени t_0 .

8.3. Определение закона движения по известной зависимости ускорения от времени

Если для материальной точки, движущейся вдоль прямой, известна зависимость ускорения от времени $a(t)$, то задача определения закона движения разбивается на два этапа — расчет зависимости скорости от времени $v(t)$, по которой рассчитывается закон движения $x(t)$. Для расчета зависимости скорости от времени можно использовать процедуру, аналогичную рассмотренной в предыдущем разделе. Следует разбить время движения на малые промежутки Δt_i , в течение которых движение приблизительно можно считать равноускоренным. Изменение скорости за этот промежуток времени равно $\Delta v_i = a_i \Delta t_i$. Если в момент времени t_0 скорость точки равнялась v_0 , то в момент времени t скорость может быть рассчитана по формуле

$$v(t) = v_0 + a_1 \Delta t_1 + a_2 \Delta t_2 + a_3 \Delta t_3 + \\ + \dots + a_N \Delta t_N = v_0 + \sum_{i=1}^N a_i \Delta t_i.$$

Далее можно провести процедуру расчета координаты, описанную в предыдущем параграфе.

Таким образом, знание зависимости ускорения точки от времени и двух дополнительных условий (начальной скорости и начальной координаты) позволяет построить закон движения материальной точки.

8.4. Определение закона движения — основная задача кинематики

Мы определили кинематические характеристики механического движения — скорость, ускорение (скорость изменения скорости). В общем случае ускорение также может изменяться в процессе движения, поэтому можно было бы ввести и такую характеристику движения, как «скорость изменения ускорения». Однако она уже является излишней, так как законы динамики позволяют находить именно ускорение движения. Поэтому основная задача кинематики в самой общей постановке формулируется следующим образом: **по известной зависимости ускорения от времени, координаты и скорости найти закон движения тела.**

Рассмотрим общий алгоритм решения уравнений динамики, которые имеют вид

$$a = f(t, x, v), \quad (1)$$

где $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ — ускорение точки, движущейся вдоль оси X , $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ — скорость тела, f — отношение суммы сил, действующих на тело, к массе тела.

Действительно, на тело могут действовать силы, которые зависят от координат (силы упругости, гравитационного, электрического и магнитного взаимодействий и т. д.), скорости (рассматриваемая сила сопротивления воздуха, сила Лоренца и т. д.) и от времени (внешние переменные силы). Поэтому уравнение (1) является наиболее общим.

Трудно предложить что-нибудь более оригинальное, чем в очередной раз разбить время движения на малые промежутки времени Δt и попытаться определить приближенные значения координаты x_k и скорости v_k в дискретные моменты времени: $t_k = t_0 + k\Delta t$ ($k = 1, 2, 3\dots$). Зная начальные условия (при $t = t_0$, $x = x_0$, $v = v_0$), по формуле (1) можно вычислить начальное ускорение: $a_0 = f(t_0, x_0, v_0)$. В течение малого промежутка времени Δt можно пренебречь изменением ускорения и считать движение равноускоренным. В этом приближении скорость и координата тела по окончании промежутка Δt рассчитываются по формулам

$$v_1 = v_0 + a_0 \Delta t;$$

$$x_1 = x_0 + v_0 \Delta t + \frac{a_0 (\Delta t)^2}{2}.$$

Далее расчет можно продолжить: вычислить ускорение в момент времени t_1 , считая его постоянным в течение следующего промежутка Δt , найти скорость и ускорение в следующий момент времени и т. д.

Таким образом, мы приходим к пошаговому алгоритму определения закона движения по из-

вестной зависимости ускорения тела от времени, координат и скорости. Этот метод называется *методом Эйлера* и выражается формулами

$$\begin{aligned} a_k &= f(t_k, x_k, v_k); \\ v_{k+1} &= v_k + a_k \Delta t; \\ x_{k+1} &= x_k + v_k \Delta t + \frac{a_k (\Delta t)^2}{2}. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что описанный метод решения основной задачи механики носит, скорее, теоретический характер — он является доказательством принципиальной разрешимости поставленной задачи. При решении большинства задач он используется крайне редко — разработаны более совершенные методы, иногда позволяющие получить аналитическое (в виде формулы) выражение для закона движения. Для решения многих задач механики используются чрезвычайно сложные математические методы, более того, именно потребности механики во многом стимулировали развитие математики (достаточно сказать, что основы дифференциального и интегрального исчислений были разработаны И. Ньютоном для решения механических задач). Правда, число задач, допускающих аналитическое решение, невелико, поэтому в настоящее время для расчета движения широко используют приближенные компьютерные методы, позволяющие получить решение с любой требуемой точностью. Суть этих методов и сводится к разбиению движения на малые интервалы, аналогично рассмотренному методу Эйлера.

Самое существенное в нашем изложении — убежденность в том, что **знание зависимости ускорения от времени, координат и скорости, а также начальных условий (координат и скоростей в некоторый момент времени)** позволяет рассчитать закон движения любой механической системы.

Задание для самостоятельной работы.

Пусть для материальной точки, движущейся вдоль оси X , известна зависимость скорости точки от координаты $v(x)$. Построим график зависимости величины обратной скорости $\frac{1}{v(x)}$ от координаты. Какой смысл имеет площадь под графиком зависимости $\frac{1}{v(x)}$? Разработайте процедуру расчета закона движения материальной точки $x(t)$ по известной зависимости $v(x)$.

§ 9. Кинематические характеристики движения материальной точки в трехмерном пространстве

Положение материальной точки в пространстве описывается тремя координатами. Если положение точки изменяется с течением времени, то ее координаты становятся функциями времени. **Закон движения** в таком случае задается тремя функциями — зависимостями трех координат от времени:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ z = z(t). \end{cases} \quad (1)$$

Система функций (1) полностью определяет движение материальной точки, то есть позволяет найти ее положение в произвольный момент времени. Основное отличие движения в пространстве от движения вдоль заданной прямой заключается в наличии трех координат. Поэтому следует говорить о трех скоростях, трех ускорениях, которые определяются полностью аналогично одномерному случаю.

Так, вместо скорости движения вдоль оси можно (и нужно) определить три скорости движения вдоль трех осей, вместо ускорения — три ускорения вдоль трех осей:

$$\begin{cases} v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}; \\ v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}; \\ v_z = \frac{\Delta z}{\Delta t}; \end{cases} \quad \begin{cases} a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}; \\ a_y = \frac{\Delta v_y}{\Delta t}; \\ a_z = \frac{\Delta v_z}{\Delta t}. \end{cases} \quad (2)$$

Дальнейшая процедура построения законов движения полностью аналогична рассмотренному одномерному движению.

В модели равномерного движения все три скорости постоянны, а закон движения имеет вид

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t; \\ y = y_0 + v_y t; \\ z = z_0 + v_z t. \end{cases} \quad (3)$$

При равноускоренном движении, когда все три ускорения постоянны, скорости изменяются по линейному закону, а координаты описываются квадратичными функциями:

$$\begin{cases} v_x = v_{x0} + a_x t; \\ v_y = v_{y0} + a_y t; \\ v_z = v_{z0} + a_z t; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t + \frac{a_x t^2}{2}; \\ y = y_0 + v_y t + \frac{a_y t^2}{2}; \\ z = z_0 + v_z t + \frac{a_z t^2}{2}. \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом, координатный способ описания движения в пространстве принципиально ничем не отличается от описания движения вдоль прямой — только уравнений (и начальных условий) становится в три раза больше.

Координатный способ описания движения является универсальным. Однако он имеет несколько существенных недостатков. Прежде всего, он очень громоздкий — требует написания большого числа однотипных формул, часто отличающихся только индексами (подобно уравнениям (2)). Еще более существенным недостатком этого метода является необходимость «привязываться» к конкретной системе отсчета. Поэтому в кинематике (да и во всей физике) часто используется векторный метод описания механического движения (и других физических явлений).

Возможно, что не все знакомы с основами векторного исчисления, поэтому на время прервем последовательное изложение физических проблем и сделаем небольшое математическое отступление.

§ 10. Математическое отступление: векторы и действия над ними

10.1. Геометрическое представление векторов

Во многих случаях при описании различных физических явлений возникает необходимость задавать не только численное значение некоторой физической характеристики, но и ее направление. Например, если мы говорим, что тело сместились на расстояние S , то для определения конечного положения тела нам необходимо указать, в каком направлении произошло это смещение.

Для математического описания таких физических характеристик «изобрели» понятие **вектор*** и разработали правила математических операций над ним.

* Существует несколько строгих математических определений векторов, однако сейчас мы не будем стремиться к абсолютной математической строгости в изложении векторного исчисления (предоставим решение этой проблемы специалистам математикам) — нам необходимо получить наглядное представление о векторах и правилах действий над ними.

Вектором мы будем называть математический объект, который задается численной величиной (модулем) и направлением.

Наиболее наглядным представлением вектора является направленный отрезок прямой (рис. 55), который можно изобразить в виде «стрелки» A_0A_1 , длина которой равна модулю вектора. Можно говорить о начале вектора (точка A_0) и его конце (точка A_1). Заметим, что все параллельные «стрелки» одинаковой длины являются изображениями одного и того же вектора. Иначе говоря, вектор можно переносить параллельно самому себе — при этом его модуль и направление не изменяются. Будем обозначать векторы латинским буквами со «стрелочкой» сверху, например, вектор \vec{A} . Длину вектора (его модуль) будем обозначать $|\vec{A}|$ либо той же буквой, но без «стрелочки»: $|\vec{A}| = A$.

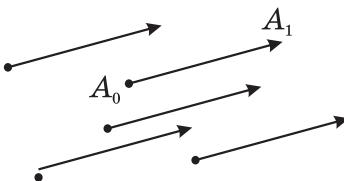


Рис. 55

Рассмотрим математические операции, которые можно проводить над векторами. Заметим, что эти правила не доказываются — они задаются «по определению».

1. Умножение вектора на число (рис. 56). Произведением вектора \vec{A} на число λ называется вектор \vec{B} , модуль которого равен про-

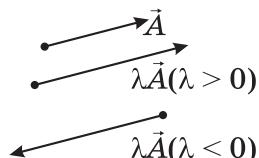


Рис. 56

изведению модуля вектора \vec{A} на модуль числа λ :
 $|\vec{B}| = |\lambda| \times |\vec{A}|$, а направление не изменяется, если
 $\lambda > 0$; изменяется на противоположное, если $\lambda < 0$.
Если $\lambda = -1$, то вектор $\vec{B} = (-1)\vec{A}$ называется век-
тором, противоположным вектору \vec{A} , и обознача-
ется $-\vec{A}$.

2. Сложение векторов. Для того чтобы найти сумму двух векторов \vec{A} и \vec{B} (вектор $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$), необходимо изобразить векторы-слагаемые так, чтобы начало второго вектора совпадало с концом первого. Тогда суммой будет век-
тор, начала которого совпадает с нача-
лом первого, а конец — с концом
второго. Это правило сложения век-
торов называется «правилом треу-
гольника» (рис. 57).

Легко доказать, что для векторов «от перемены мест слагаемых сумма не изменяется».

Укажем еще одно правило сложения векто-
ров — «правило параллелограмма». Если совме-
стить начала векторов-слагаемых и построить на
них параллелограмм, то суммой будет
вектор, совпадающий с диагональю это-
го параллелограмма (рис. 58). Понятно,
что сложение по «правилу параллело-
грамм» приводит к тому же результа-
ту, что и по «правилу треугольника».

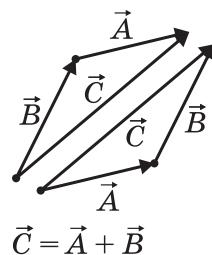


Рис. 57

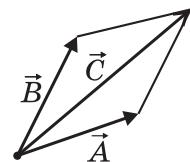


Рис. 58

«Правило треугольника» легко обобщить (на случай нескольких слагаемых). Для того чтобы найти сумму векторов $\vec{C} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \dots + \vec{A}_n$, необходимо начало второго вектора совместить с концом первого, начало третьего — с концом второго и т. д. Тогда начало вектора \vec{C} совпадет с началом первого, а конец \vec{C} — с концом последнего (рис. 59).

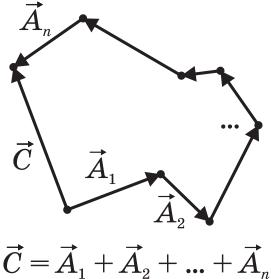


Рис. 59

3. Вычитание векторов. Операция вычитания сводится к двум предыдущим операциям: разностью двух векторов является сумма первого с вектором, противоположным второму:

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-1)\vec{B}.$$

Можно также сформулировать «правило треугольника» для вычитания векторов: необходимо совместить начала векторов \vec{A} и \vec{B} , тогда их разностью будет вектор $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$, проведенный от конца вектора \vec{B} к концу вектора \vec{A} (рис. 60).

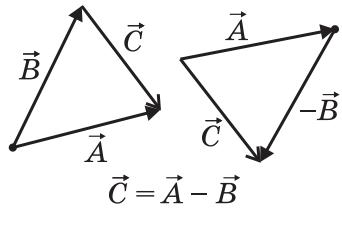


Рис. 60

В дальнейшем мы будем говорить о векторе перемещения материальной точки, то есть векторе, соединяющем начальное и конечное положения точки. Согласитесь, что введенные правила действия над векторами вполне очевидны для векторов перемещения.

4. Скалярное произведение векторов.

Результатом скалярного произведения двух векторов \vec{A} и \vec{B} является число c , равное произведению модулей векторов на косинус угла α между ними: $c = \vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos\alpha$ (рис. 61).

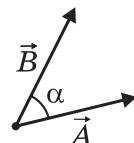


Рис. 61

Операция скалярного произведения векторов очень широко используется в физике. В дальнейшем нам достаточно часто придется сталкиваться с такой операцией.

10.1. Координатное представление векторов

Изображение векторов в виде «стрелок» наглядно, однако проводить несколько операций над векторами геометрическим способом не всегда удобно. Поэтому рассмотрим еще один способ описания векторов и действий над ними.

Введем декартовую систему координат XYZ , в которой построим вектор \vec{A} так, чтобы его начало совпадало с началом координат. Тогда **координатами вектора** (мы будем обозначать их A_x, A_y, A_z) называются координаты его конца. Координаты вектора также называют его **компонентами** (рис. 62).

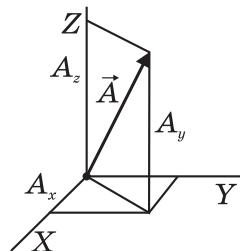


Рис. 62

Легко показать, что определенные ранее операции умножения вектора на число сложения и вычитания векторов сводятся к соответствующим

операциям над компонентами. Так, использование координатного представления вектора и теорему Пифагора можно записать выражением для модуля (длины вектора)

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \quad (1)$$

Покажем, например, правило сложения векторов. Для наглядности рассматриваем векторы, лежащие в одной плоскости, хотя соответствующие правила распространяются на векторы в трехмерном пространстве. Из рис. 63 и определения координат вектора непосредственно следует, что операция $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ в координатной форме имеет вид

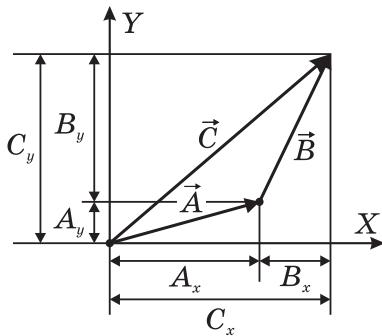


Рис. 63

$$\begin{cases} C_x = A_x + B_x; \\ C_y = A_y + B_y; \\ C_z = A_z + B_z. \end{cases} \quad (2)$$

Аналогично можно доказать и другие правила действий над векторами.

Несколько сложнее получить выражение для скалярного произведения через компоненты векторов, поэтому мы приведем окончательную формулу без доказательства:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (3)$$

Без труда можно показать, что для введенных операций справедливы переместительный и сочинительный законы:

$$\begin{aligned}
 \vec{A} + \vec{B} &= \vec{B} + \vec{A}; \\
 \vec{A} \cdot \vec{B} &= \vec{B} \cdot \vec{A}; \\
 \lambda(\vec{A} + \vec{B}) &= \lambda\vec{A} + \lambda\vec{B}; \\
 (\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C} &= \vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{C}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Таким образом, мы имеем прекрасный математический аппарат для компактной записи однотипных соотношений для координат векторов. Кроме того, правила действия над векторами совпадают с привычными правилами арифметики чисел.

Векторная запись имеет еще одно существенное достоинство. Проводя действия над векторами, мы можем не задумываться над системой отсчета, иными словами, они справедливы в любой системе отсчета! Правда, для того чтобы перейти к численным расчетам, необходимо, конечно, ввести систему отсчета, но это можно сделать только на последнем этапе, когда основные соотношения получены в векторной форме.

Заметим, что о векторе можно говорить как о тройке чисел (компоненты вектора). Однако не любая тройка чисел является вектором — компоненты вектора подчиняются определенным законам преобразований (например, при переходе в другую систему координат). В каких же случаях можно пользоваться векторным исчислением? Ответ на этот вопрос должна давать физика (а не математика). Подчиняются ли рассматриваемые физические величины тем же правилам, что и векторы?

Кстати, любое использование математического аппарата требует физического обоснования. Яркий пример: всегда ли в физике $1 + 1 = 2$? Попробуйте смешать один литр воды и один литр этилового спирта — суммарный объем смеси окажется меньше двух литров! Причиной этого является перестройка взаимного расположения молекул в растворе. Но как это объяснить математикам?

§ 11. Векторные характеристики движения материальной точки

Положение точки в пространстве можно задать с помощью вектора, соединяющего начало координат с данной точкой. Такой вектор называется радиус-вектором точки — мы будем обозначать его символом \vec{r}_1 . Очевидно, что координаты этого вектора совпадают с координатами точки (x, y, z), поэтому мы оставим эти обозначения и для координат радиус-вектора.

Если тело изменяет свое положение в пространстве, то его радиус-вектор будет изменяться с течением времени, то есть станет функцией времени. Зависимость радиус-вектора от времени $\vec{r}(t)$ будет являться законом движения.

Изменение положения в векторной форме удобно описывать с помощью вектора перемещения \vec{S} — вектора, соединяющего начальное \vec{r}_0 и конечное положение \vec{r}_1 движущейся точки. Вектор перемещения равен разности радиус-векторов конечного и начального положения (рис. 64):

$$\vec{S} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0. \quad (1)$$

Компоненты вектора перемещения равны изменению соответствующих координат материальной точки.

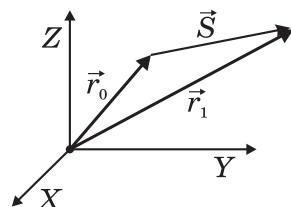


Рис. 64

Отношение изменения радиус-вектора к промежутку времени, за который это изменение произошло, называется средним вектором скорости (или просто средней скоростью):

$$\vec{V}_{cp.} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (2)$$

Если промежуток времени, за который измеряется изменение радиус-вектора, сделать очень малым (предельно малым), то вектор средней скорости перейдет в **вектор мгновенной скорости***:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \text{ при } \Delta t \rightarrow 0. \quad (3)$$

Это определение является наиболее общим определением скорости. Заметим, что при постоянном векторе скорости тела его траекторией обязательно является прямая линия.

Выясним, как направлен вектор мгновенной скорости по отношению к произвольной траектории движения материальной точки. Пусть тело (которое мы считаем материальной точкой) переместилось за промежуток времени Δt по некоторой траектории из точки A_0 в точку A_1 (рис. 65). Вектор средней скорости совпадает по направлению с вектором перемещения

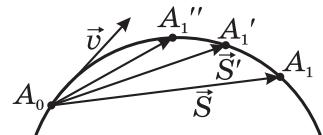


Рис. 65

* Вот это уже последнее, самое общее определение скорости — вектор мгновенной скорости. Так, при движении тела вдоль одной оси проекция этого вектора совпадает с введенной ранее мгновенной скоростью, модуль этого вектора равен путевой скорости.

\vec{S} . При уменьшении рассматриваемого промежутка времени Δt точка A_1 будет находиться все ближе к точке A_0 . Соответственно будет изменяться и вектор перемещения: при $\Delta t \rightarrow 0$ вектор перемещения будет стремиться по касательной к траектории, поэтому **вектор мгновенной скорости направлен вдоль касательной к траектории**.

Дадим определение вектора ускорения.

Вектором ускорения \vec{a} называется отношение изменения вектора скорости к промежутку времени, в течение которого это изменение произошло, при стремлении этого промежутка к нулю:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \text{ при } \Delta t \rightarrow 0. \quad (5)$$

Подчеркнем, что в данном определении ускорения фигурирует изменение вектора скорости — а вектор может изменяться как по величине, так и по направлению. Следовательно, непрямолинейное (криволинейное) движение тела обязательно является движением с ускорением (так как изменяется направление вектора скорости).

§ 12. Описание равноускоренного движения в пространстве

Полученные выражения для законов равномерного и равноускоренного движения легко обобщаются на случай движения материальной точки в трехмерном пространстве. Положение матери-

альной точки в пространстве описывается либо с помощью трех координат (x , y , z), либо эквивалентным векторным способом посредством задания радиус-вектора точки \vec{r} . При движении эти величины становятся функциями времени. Следовательно, механическое движение материальной точки в общем случае полностью описывается заданием трех функций ($x(t)$, $y(t)$, $z(t)$) или одной эквивалентной векторной функции $\vec{r}(t)$. В случае равноускоренного движения^{*} вид зависимости скорости от времени $\vec{V}(t)$ непосредственно следует из определения вектора ускорения:

$$\vec{V}(t) = \vec{V}_0 + \vec{a}t, \quad (1)$$

здесь \vec{V}_0 — вектор скорости в момент времени $t = 0$. Формула (1) является обобщением полученного ранее выражения для скорости при движении вдоль прямой. Векторная запись функции (1) эквивалентна развернутой «координатной» записи

$$\begin{cases} V_x = V_{x0} + a_x t; \\ V_y = V_{y0} + a_y t; \\ V_z = V_{z0} + a_z t, \end{cases} \quad (1a)$$

где V_{x0} , V_{y0} , V_{z0} и a_x , a_y , a_z — проекции векторов \vec{V}_0 , \vec{a} на соответствующие оси координат.

Аналогично можно обобщить зависимость координат материальной точки от времени при равноускоренном движении:

^{*} По-прежнему равноускоренным движением мы называем движение с постоянным ускорением, в данном случае — вектором ускорения \vec{a} .

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}, \quad (2)$$

здесь \vec{r}_0 — радиус-вектор точки в момент времени $t = 0$. Соотношение (2) также можно переписать в координатной форме:

$$\begin{cases} x = x_0 + V_{x0} t + \frac{a_x t^2}{2}; \\ y = y_0 + V_{y0} t + \frac{a_y t^2}{2}; \\ z = z_0 + V_{z0} t + \frac{a_z t^2}{2}, \end{cases} \quad (2a)$$

где (x_0, y_0, z_0) — координаты точки в момент времени $t = 0$. Мы не будем отдельно изучать равномерное движение, так как сейчас его можно рассматривать как частный случай движения равноускоренного, но с нулевым ускорением.

В качестве широко известного примера равноускоренного движения рассмотрим движение небольшого тела (которое мы будем считать материальной точкой) в поле тяжести земли без учета сопротивления воздуха (рис. 66).



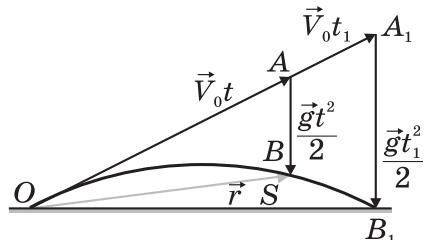
Рис. 66

Как известно, в этом случае тело движется с постоянным ускорением свободного падения \vec{g} , направленным вертикально вниз. Пусть небольшое тело брошено вдоль горизонтальной поверхности с начальной скоростью \vec{V}_0 , направленной под углом

α к горизонту. Совместим начало отсчета с точкой бросания. В этом случае в векторной форме закон движения тела записывается в виде

$$\vec{r} = \vec{V}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}. \quad (3)$$

Векторная форма записи допускает наглядную геометрическую интерпретацию (рис. 67): радиус-вектор тела \vec{r} (отрезок OB) в произвольный момент времени t равен сумме векторов $\vec{V}_0 t$ (отрезок OA) и $\frac{\vec{g}t^2}{2}$ (отре-



зок AB). При желании можно воспользоваться геометрическими соотношениями для определения любых характеристик движения. Например, для определения дальности S полета можно записать соотношения между сторонами прямоугольного треугольника OA_1B_1 :

$$S = V_0 t_1 \cos \alpha; \\ \frac{gt_1^2}{2} = V_0 t_1 \sin \alpha, \quad (4)$$

из которых без труда можно выразить как дальность полета, так и время движения t_1 :

$$t_1 = \frac{2V_0 \sin \alpha}{g}; \\ S = \frac{2V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}. \quad (5)$$

Более простым и распространенным способом кинематического описания является **координатный**.

Продемонстрируем преимущества этого метода на примере рассматриваемой задачи. Для этого введем систему декартовых координат, ось X которой направим горизонтально, а ось Y — вертикально, начало отсчета совпадает с точкой бросания (рис. 68). Векторы начальной скорости \vec{V}_0 и ускорения свободного падения лежат в плоскости XOY , поэтому для описания движения достаточно двух координат.

Проекции вектора начальной скорости \vec{V}_0 на оси X и Y соответственно равны $V_0 \cos \alpha$, $V_0 \sin \alpha$, проекция вектора ускорения свободного падения на ось X равна нулю, а на ось Y — $(-g)$. Перепишем теперь закон движения тела (3) в проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} x = V_0 t \cos \alpha; \\ y = V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{cases} \quad (3a)$$

Эти уравнения полностью описывают движение тела — из закона движения можно найти любую характеристику движения. Для этого надо уметь «переводить» возникающие вопросы на «язык» координатного описания, что мы сейчас продемонстрируем.

Траектория движения. Строго говоря, уравнения (3a) уже описывают траекторию движения в

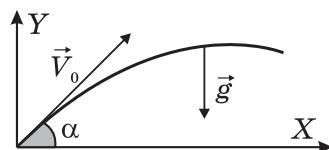


Рис. 68

так называемой параметрической форме. Тем не менее получим в явном виде зависимость $y(x)$, для чего достаточно выразить из первого уравнения $t = \frac{x}{V_0 \cos \alpha}$ и подставить его во второе:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Из вида этой функции явно следует, что траекторией движения является парабола.

Время движения. Когда тело упадет, его координата y станет равной нулю, поэтому время движения* t_1 может быть найдено из уравнения $y(t_1) = 0$:

$$V_0 t_1 \sin \alpha - \frac{gt_1^2}{2} = 0.$$

Решениями этого квадратного уравнения являются два числа: $t_1 = 0$ или $t_1 = \frac{2V_0 \sin \alpha}{g}$. Очевидно, что первый корень уравнения** соответствует времени бросания, а второй – времени падения.

Дальность полета. Дальность полета – это координата x в момент падения, поэтому

* Заметьте, что в законе движения время t является переменной величиной, аргументом функции. Когда же речь идет о конкретных моментах времени (как сейчас о времени падения), мы будем обозначать их с соответствующими индексами, подчеркивая, что это конкретные числа.

** Подчеркнем, что мы обязаны каждому математическому решению, даже абсурдному на первый взгляд, найти физическое истолкование. Иначе получится некая странная ситуация — в одних случаях математике доверяем, в других нет!

$$S = x(t_1) = \frac{2V_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}.$$

Максимальная высота подъема. Используя выражение для траектории движения, можно заметить, что траектория движения – симметричная парабола, поэтому высоту подъема можно найти как координату y в момент времени $t_2 = \frac{t_1}{2}$. Но сейчас мы сформулируем общий метод нахождения максимального значения координаты. Если проекция скорости V_y на ось Y положительна, то координата y возрастает, если же V_y отрицательна, то координата убывает, следовательно, *максимальное значение координаты достигается тогда, когда соответствующая проекция скорости обращается в нуль!*

Запишем выражение для скорости $V_y = V_0 \sin\alpha - gt$. Теперь из уравнения $V_y(t_2) = 0$ определим момент времени достижения максимальной высоты — $t_2 = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}$ и максимальную высоту — $h_{\max} = y(t_2) = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{g}$.

§ 13. Относительность движения

Когда мы рассуждали о координатах, мы подчеркивали, что указание координат имеет смысл только тогда, когда указана, задана система ко-

ординат. Поэтому координаты точки являются **относительными** физическими величинами, относительными являются и изменения координат с течением времени, иными словами, **относительным** является само механическое движение*. Выбор системы координат, в принципе, произволен и определяется, главным образом, удобством описания или личными вкусами исследователя. Так, например, некоторым приятно описывать свое движение среди неподвижных звезд. Отсутствие единой всеобщей системы координат приводит к тому, что все системы отсчета являются равноправными, движение в разных системах отсчета должно описываться принципиально одинаково. Мы, конечно, не утверждаем, что уравнения движения будут одинаковы во всех системах отсчета. В одних они будут проще, в других сложнее. Но методы описания, его результаты должны быть одинаковы: так, если два тела должны столкнуться в одной системе отсчета, то такой же результат должен быть и в другой системе. Реально, в природе существуют материальные тела, которые движутся, взаимодействуют, видоизменяются, а наше описание движения в конкретных системах

* Относительность движения можно понимать в нескольких смыслах. Во-первых, тело, покоящееся в одной системе отсчета, может двигаться относительно другой системы. Во-вторых, кинематические характеристики движения — координаты, скорость, ускорение — зависят от системы отсчета. Говоря об относительности движения, будем подразумевать именно второй его смысл.

отсчета является всего лишь попыткой построить его более-менее приличную модель. Согласование описания движения, переход из одной системы координат в другую является важной физической задачей, далеко выходящей за рамки проблем кинематики. Однако в данном параграфе мы рассмотрим эту проблему только с точки зрения кинематического описания. Для простоты и удобства графических иллюстраций будем изображать системы координат на плоскости. Обобщение на случай трехмерного пространства очевидно, а при векторной записи остается тем же самым. Кроме того, будем полагать, что соответствующие оси координат параллельны. Произвольная ориентация координат добавляет не много физического содержания, а математическое описание становится более громоздким.

13.1. Две неподвижные системы отсчета

Рассмотрим две системы координат*: исходную XOY и смещенную $X'O'Y'$ (рис. 69). Координаты начала отсчета O' смещенной системы координат в исходной системе обозначим (x_0, y_0) , а радиус-вектор этой точки — \vec{r}_0 . Тогда связь между координатами материальной точки A в этих системах определяется формулами

* Напомним, что названия «исходная» и «смещенная» условны. Ничего не изменится, если их поменять местами.

$$\begin{cases} x = x_0 + x'; \\ y = y_0 + y', \end{cases} \quad (1)$$

которые можно записать в компактной векторной форме:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}' . \quad (2)$$

Эти формулы уже были получены нами ранее, сейчас необходимо обобщить их на случай описания движения. То

есть нам из системы координат необходимо сделать систему отсчета, добавив в каждую из них часы. У нас нет никаких оснований считать, что одинаковые часы в разных системах отсчета будут идти по-разному. Поэтому будем полагать, что время в разных системах отсчета одинаково и начала отсчета времени также совпадают:

$$t = t' . \quad (3)$$

Пусть точка A движется с некоторой скоростью $\vec{v}' = \frac{\Delta \vec{r}'}{\Delta t}$ относительно смещенной системы координат. Найдем скорость точки в исходной системе отсчета XOY . Для этого воспользуемся формулой (2):

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}'}{\Delta t} = \frac{\Delta(\vec{r}_0 + \vec{r}')}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}_0}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{r}'}{\Delta t} = \vec{v}' . \quad (4)$$

При выводе мы учли, что вектор \vec{r}_0 является постоянным и его изменение равно нулю. Таким об-

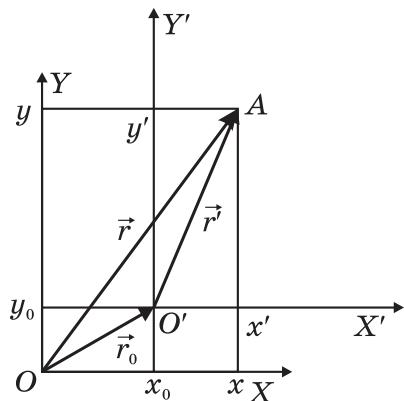


Рис. 69

разом, мы показали, что при переходе из одной неподвижной системы отсчета в другую скорость точки не изменяется. Впрочем, этот результат очевиден — течение времени и перемещение точек одинаковы в обеих системах отсчета. Если скорости точек не изменяются, то не будут изменяться и их ускорения, так как они выражаются через изменение скоростей.

13.2. Равномерно движущаяся система отсчета

Пусть система $X' O' Y'$ движется относительно системы $X O Y$ с постоянной скоростью \vec{V} . В любой момент времени соотношения между координатами выражаются соотношениями (1)–(2). В случае движущейся системы координат мы не можем логически строго утверждать, что течение времени будет таким же, как и в неподвижной системе. Вопрос о том, изменится ли ход часов, если они будут двигаться с постоянной скоростью, не может быть разрешен путем логических рассуждений. Ответ на него может дать только эксперимент, только опыт. Мы еще не раз будем возвращаться к этой проблеме, пока же примем как аксиому, подтвержденную многовековым опытом человечества, что течение времени одинаково в различных системах отсчета, движущихся друг относительно друга с постоянной скоростью.

Найдем соотношение между скоростями точки в подвижной* $X'Y'$ и неподвижной XOY системах координат. Опять воспользуемся соотношением (2) для вычисления скорости в неподвижной системе отсчета:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}'}{\Delta t} = \frac{\Delta(\vec{r}_0 + \vec{r}')}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}_0}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{r}'}{\Delta t} = \vec{V} + \vec{v}' . \quad (5)$$

Легко заметить, что $\frac{\Delta \vec{r}_0}{\Delta t} = \vec{V}$ — скорость движения подвижной системы, а $\frac{\Delta \vec{r}'}{\Delta t} = \vec{v}'$ — скорость точки относительно подвижной системы координат. Довольно часто применяется следующая терминология: скорость точки относительно подвижной системы координат \vec{v}' называют **относительной скоростью**; скорость точки относительно неподвижной системы координат называют **абсолютной скоростью**; скорость одной системы координат относительно другой называют **переносной скоростью**. Используя эти названия, очень важное соотношение (5) можно словесно сформулировать так: **абсолютная скорость точки равна сумме ее относительной скорости и переносной.**

Из соотношения (5) можно выразить относительную скорость:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V} . \quad (6)$$

* Очередной раз отметим условность названий систем отсчета: если одна система движется относительно другой, то справедливо и обратное — выбор неподвижной и движущейся систем остается за исследователем.

Относительная скорость точки равна разности между ее абсолютной скоростью и переносной.

Заметьте, что соотношению (6) можно дать и другое истолкование. Будем считать систему отсчета $X'O'Y'$ неподвижной, а систему XOY подвижной. Тогда переносная скорость (то есть скорость системы XOY относительно $X'O'Y'$) будет равна $-\vec{V}$, поэтому соотношение (6) просто совпадает с формулой (5).

Соотношения между скоростями (5)—(6) выполняются в любой момент времени, поэтому их можно использовать для того, чтобы установить связь между ускорениями точек в различных системах координат. Пусть точка A движется с ускорением \vec{a}' относительно подвижной системы координат (будем по-прежнему считать, что переносная скорость является постоянной), тогда ее ускорение в неподвижной системе можно вычислить по следующим формулам:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta(\vec{V} + \vec{v}')}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}'}{\Delta t} = \vec{a}'. \quad (7)$$

Мы доказали, что если одна система движется относительно другой с постоянной скоростью, то ускорения тел относительно этих систем отсчета одинаковы. Иными словами, ускорение является **инвариантной** величиной при переходе из одной системы отсчета в другую.

Наше изложение можно продолжить в том же духе — рассмотреть случай ускоренного движения одной системы относительно другой. Сейчас

мы не будем заниматься этим, так как при изучении динамики увидим, что системы, движущиеся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, занимают особое место в механике, именно им уделяется особое внимание, на что есть весьма серьезные физические причины.

§ 14. Криволинейное движение



Рис. 70

Рассмотренное ранее произвольное движение (рис. 70) в трехмерном пространстве и его векторное и координатное описание, в принципе, универсально. Однако во многих случаях предпочтительнее

использовать иные подходы. Так, при движении по известной траектории материальная точка обладает одной степенью свободы, поэтому ее движение может быть полностью задано с помощью одной функции (а не трех, как в случае использования декартовых координат). Кроме того, при построении уравнений движения часто также удобнее использовать координаты, отличные от декартовых. В связи с этим есть необходимость рассмотреть отдельно криволинейное движение, существенной особенностью которого является изменение направления вектора скорости и существование ускорения, описывающего изменение направления скорости.

14.1. Равномерное движение материальной точки по окружности

Движение по окружности является достаточно распространенным в окружающем нас мире: при вращении любого твердого тела вокруг фиксированной оси все точки этого тела движутся по окружностям. Так как все окружности подобны, то достаточно описать движение одной из них, чтобы описать вращение всего твердого тела. Кроме того, равномерное движение по окружности является простейшим криволинейным движением.

Пусть материальная точка движется с постоянной по модулю скоростью v по окружности радиуса R . При таком движении направление вектора скорости \vec{v} постоянно изменяется (рис. 71), следовательно, как и при любом криволинейном движении, движение по окружности есть движение с ускорением.

Рассмотрим изменение вектора скорости тела за малый промежуток времени Δt (рис. 72). Обозначим положение точки, движущейся по окружности радиуса R , в некоторый момент времени A_0 . Вектор скорости \vec{v}_0 в этот момент направлен по каса-

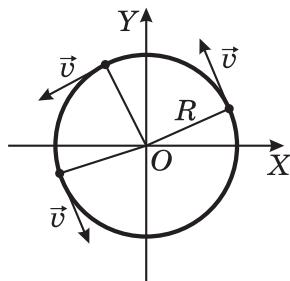


Рис. 71

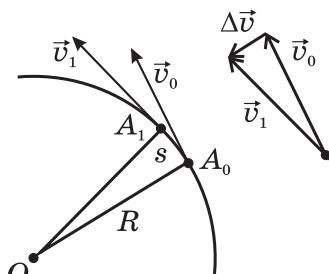


Рис. 72

тельной к окружности, то есть перпендикулярно радиусу OA_0 . За время Δt частица переместилась в точку A_1 , ее скорость \vec{v}_1 изменила направление и стала перпендикулярна радиусу OA_1 (но модуль ее остался неизменным: $|\vec{v}_0| = |\vec{v}_1| = v$). Для того чтобы вычислить изменение скорости, совместим начало векторов \vec{v}_0 и \vec{v}_1 . Тогда треугольник, образованный векторами скоростей, подобен треугольнику OA_0A_1 . Из подобия этих треугольников следует

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{|A_0A_1|}{R}. \quad (1)$$

Если рассматривать изменение положения частицы и ее скорости за очень малый промежуток времени, то длина хорды $|A_0A_1|$ будет очень близка к длине дуги $A_0A_1 = s = v\Delta t$, поэтому $\frac{\Delta v}{v} = \frac{v\Delta t}{R}$, откуда получаем $\Delta v = \frac{v^2}{R}\Delta t$. Таким образом, модуль ускорения точки равен:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}. \quad (2)$$

Чтобы полностью определить вектор ускорения, необходимо выяснить его направление. Заметим, что при малой величине Δt угол между векторами \vec{v}_0 и \vec{v}_1 крайне мал, поэтому можно считать, что вектор изменения скорости направлен перпендикулярно* как вектору \vec{v}_0 , так и вектору \vec{v}_1 . Сле-

* Иными словами, вектор скоростей представляет собой равнобедренный треугольник с очень малым углом при его вершине. Тогда равные углы при основании треугольника

довательно, вектор ускорения в данном случае направлен к центру окружности.

Вектор ускорения точки при ее равномерном движении по окружности направлен к центру окружности, а его модуль равен $\frac{v^2}{R}$. Такое ускорение называется центростремительным.

Как мы уже отмечали ранее, материальная точка, движущаяся по заданной линии, обладает одной степенью свободы, поэтому ее положение однозначно определяется одной координатой. В случае движения точки по окружности в качестве такой единственной координаты удобно выбрать угол поворота.

Математическое отступление: радианная мера угла

Градусная мера измерения углов оказывается не слишком удобной при описании механического движения. Поэтому в физике чаще используется другая единица измерения углов. Напомним, углом называется часть плоскости, ограниченная двумя лучами. Построим внутри угла несколько дуг окружностей разных радиусов, центры которых совпадают с вершиной угла (рис. 73). Длина дуги s , заключенной внутри угла, конечно, зависит от ее радиуса, однако отношение длины дуги к ее радиусу зависит только от величины угла: $\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2} = \frac{s_3}{r_3}$.

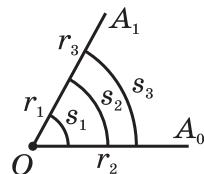


Рис. 73

Поэтому это отношение может служить мерой угла. Таким образом, радианной мерой угла называется отношение дли-

будут близки к прямым.

ны дуги окружности с центром в вершине угла и расположенной внутри угла к ее радиусу: $\phi = \frac{s}{r}$.

Легко установить соответствие между радианной и градусной мерой. Так как длина окружности равна $s = 2\pi r$, то полный угол равен $\omega = 2\pi$ радиан*. Соответственно, развернутый угол равен π радиан, прямой угол — $\frac{\pi}{2}$ радиан.

В общем виде связь между градусной ϕ° и радианной ϕ мерой выражается формулами

$$\phi^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \phi; \quad \phi = \frac{\pi}{180^\circ} \phi^\circ. \quad (3)$$

Один радиан равен $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ$.

Основные достоинства радианной меры заключаются в том, что, во-первых, единица измерения радиан является безразмерной величиной (отношение двух длин), во-вторых, очень просто выражается длина дуги через радиус и величину угла $s = r\phi$. Связывая меру угла с длиной дуги, мы можем рассматривать углы произвольной величины — большие, чем угол 2π (360°). Таким углам соответствует дуга, несколько раз охватывающая целую окружность. Так, например, угол поворота $\phi = 10\pi$ равен пяти полным оборотам. Это очень удобно при описании вращательного движения: чем больше вращается тело, тем больший угол его поворота. Конечно, при движении по окружности материальная точка регулярно проходит через одни и те же положения в пространстве, поэтому, зная угол поворота, мы однозначно определим положение точки, но зная только положение точки (например, ее декартовые координаты), мы не можем однозначно определить угол поворота, так как нам неизвестно, сколько оборотов совершила данная точка к данному моменту времени.

* Часто наименование «радиан» опускают и говорят: «полный угол равен 2π , прямой угол равен $\frac{\pi}{2}$ » и т. д.

Пусть материальная точка движется по окружности радиуса R . Введем декартовую систему координат, начало которой совместим с центром окружности (рис. 74). Положение точки на окружности однозначно определяется углом ϕ между осью X и радиус-вектором точки.

Конечно, оси координат можно направить произвольно, да и угол можно отсчитывать от оси Y , однако мы в дальнейшем для однозначности будем отсчитывать угол поворота от оси X в направлении против часовой стрелки.

Декартовые координаты точки однозначно выражаются через угол поворота по формулам

$$\begin{cases} x = R \cos \phi; \\ y = R \sin \phi. \end{cases} \quad (4)$$

При движении точки ее координата, то есть угол поворота, изменяется, становится функцией времени. Поэтому закон движения в этом случае представляется функцией $\phi(t)$, то есть зависимости угла поворота от времени.

По аналогии с одномерным движением введем понятие угловой скорости.

Угловой скоростью ω называется отношение угла поворота к промежутку времени, в течение которого этот поворот произошел, при промежутке времени, стремящемся к нулю:

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}, \text{ при } \Delta t \rightarrow 0. \quad (5)$$

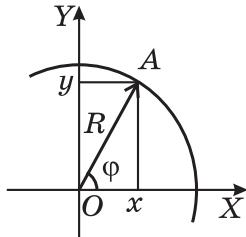


Рис. 74

Единицей угловой скорости является $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$ — радиан в секунду, однако так как радиан является безразмерной величиной, размерность угловой скорости может быть просто $\frac{1}{\text{с}} = \text{с}^{-1}$ — секунда в минус первой степени.

При равномерном движении по окружности угловая скорость является постоянной и равна углу поворота в единицу времени. Время одного оборота (эту величину еще называют **период вращения**) T легко найти, если вспомнить, что один оборот соответствует углу поворота 2π , поэтому

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (6)$$

Число оборотов в единицу времени называют частотой вращения, и она вычисляется по формуле

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (7)$$

Установим связь между угловой и линейной скоростями при движении материальной точки по окружности. Модуль линейной скорости определяется как отношение пройденного пути к промежутку времени, за который этот путь пройден $v = \frac{s}{\Delta t}$, а при движении по окружности длина пути (длина дуги окружности) выражается через угол поворота (выраженный в радианах): $s = R\Delta\phi$, поэтому

$$v = \frac{R\Delta\phi}{\Delta t} = R\omega. \quad (8)$$

Запишем также выражение для центростремительного ускорения, используя понятие угловой скорости:

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2. \quad (9)$$

Специально отметим, что формулы (8) и (9) остаются справедливыми при движении по окружности и в том случае, когда скорость точки изменяется по абсолютной величине. Так, при выводе формулы (8) можно рассмотреть случай $\Delta t \rightarrow 0$. В таком пределе скорость v будет являться мгновенной скоростью, а ω — мгновенной угловой скоростью.

При вращении вокруг фиксированной оси направление вращения может иметь только два значения — по часовой стрелке и против часовой стрелки. Поэтому в этом случае можно говорить о двух знаках угловой скорости, обычно — плюс при вращении против часовой стрелки и минус — при вращении по часовой стрелке. Для того чтобы описать произвольное вращение, необходимо задать также ось вращения. Оказывается, удобно задавать ось вращения с помощью вектора, направленного вдоль этой оси. Если совместить эти две характеристики вращения, то получим вектор угловой скорости $\vec{\omega}$, направление которого совпадает с осью вращения, а модуль равен определенной нами угловой скорости. Используя математическую операцию векторного произведения, можно записать выражение для связи между линейной и угловой скоростями: $\vec{v} = \vec{r} \times \vec{\omega}$. Аналогично можно определить вектор углового ускорения: $\vec{\epsilon} = \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t}$, который определяет не только изменение скорости вращения, но и изменение оси вращения.

14.2. Движение материальной точки по произвольной кривой

Если угловая скорость не является постоянной, то имеет смысл ввести понятие углового ускорения, которое мы обозначим греческой буквой ε (эпсилон).

Угловым ускорением называется отношение изменения угловой скорости к промежутку времени, в течение которого это изменение произошло, при промежутке времени, стремящемся к нулю:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \text{ при } \Delta t \rightarrow 0. \quad (1)$$

Используя связь между линейной и угловой скоростями, эту формулу можно переписать в виде

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{1}{R} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Заметим, что в данном выражении в числителе стоит изменение модуля скорости (а не вектора скорости!). Полное же ускорение — отношение изменения вектора скорости к промежутку времени, таким образом, оказывается состоящим из двух частей, одна из которых описывает изменение направления вектора скорости (это ускорение является центростремительным, или **нормальным**^{*}), а вторая — изменение модуля скорости (это ускорение называется касательным, или **тангенциальным**).

^{*} Название «нормальное» происходит от математического термина «нормаль», то есть перпендикуляр.

Если направление вектора скорости не изменяется, то вектор ускорения направлен вдоль той же прямой, что и скорость. Поэтому следует считать, что вектор тангенциального ускорения совпадает с направлением вектора скорости, если скорость возрастает, и противоположен ему, если величина скорости убывает.

При движении материальной точки по произвольной кривой малый участок траектории можно приближенно заменить небольшой дугой окружности. Для этого следует воспользоваться следующим способом построения такой окружности, который аналогичен построению касательной прямой. Напомним, что касательную можно считать предельным положением секущей прямой.

Возьмем слева и справа от точки A две точки — A' , A'' , лежащие на заданной линии (рис. 75). Приведем через эти три точки окружности секущую C' (если три точки лежат на одной прямой, то будем считать эту прямую окружностью очень большого радиуса). После этого начнем мысленно приближать точки A' , A'' к точке A , соответственно изменяя секущую окружность. При стремлении точек A' , A'' к точке A секущая окружность будет стремиться к предельному положению C_0 . Эта предельная окруж-

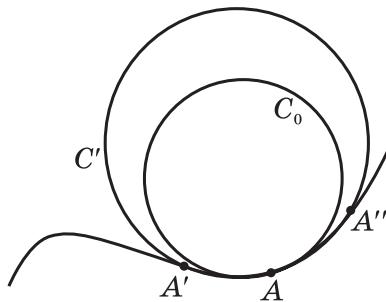


Рис. 75

ность называется **соприкасающейся** в точке A , ее радиус называется **радиусом кривизны** линии в данной точке, а центр — **центром кривизны**.

Таким образом, движение по произвольной кривой на малом участке можно рассматривать как движение по соприкасающейся окружности.

Вектор скорости \vec{v} частицы всегда направлен по касательной к линии траектории движения, а вектор ускорения можно разложить на две составляющие (рис. 76): одна из них, тангенциальное ускорение \vec{a}_t , описывает изменение модуля скорости и направлена по касательной к траектории, а другая, нормальное ускорение \vec{a}_n , описывает изменение направления вектора скорости и направлена перпендикулярно касательной (по нормали) к центру кривизны траектории (в сторону ее вогнутости). Модули этих компонент ускорений рассчитываются по формулам

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \varepsilon R; \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R, \quad (7)$$

где R — радиус кривизны траектории в данной точке.

Сумма векторов ускорений \vec{a}_t и \vec{a}_n является вектором полного ускорения \vec{a} . Конечно, вектор полного ускорения можно представить в виде суммы проекций \vec{a}_x и \vec{a}_y на произвольно выбранные оси координат (рис. 77). Но разложение вектора на нормальную и тангенциальную составляю-

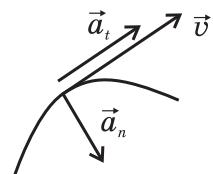


Рис. 76

щие имеет два существенных преимущества: первое — обе компоненты \vec{a}_t и \vec{a}_n имеют явный физический смысл; второе — такое разложение «привязывается» не к произвольно выбранной системе координат, а непосредственно к траектории движения и вектору скорости.

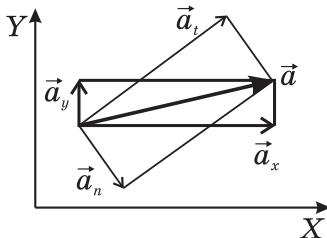


Рис. 77

14.3. Суперпозиция движений



Рис. 78

Мы изучили несколько простейших моделей движения. Сейчас постараемся показать, как из этих простых движений можно «конструировать» более сложные и красивые движения. Слово «суперпозиция» обозначает

сложение, наложение, сочетание, оно очень часто используется в физике. Возможность такого наложения различных видов движения обусловлена возможностью описывать его в различных системах отсчета и переходить из одной системы в другую по формулам $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$. Теперь мы можем независимо задавать закон движения в подвижной системе отсчета $\vec{r}'(t)$, закон движения самой движущейся системы $\vec{r}_0(t)$ и получать более сложный закон движения. Далее может быть, что и не-

подвижная система отсчета движется относительно другой, еще более неподвижной системы. Тем самым добавляется еще одно слагаемое и т. д. На этом пути открываются практически неограниченные возможности. Рассмотреть их всех невозможно, поэтому мы вынуждены ограничиться несколькими простыми, но красивыми движениями.

Движение тела, брошенного под углом к горизонту, можно представить в виде суперпозиции равномерного движения вдоль горизонтальной оси и равноускоренного движения вдоль вертикальной оси. Такой «суперпозиции» можно придать наглядный смысл: пусть в вагоне равномерно и прямолинейно движущегося поезда вверх подброшен небольшой шарик. В системе отсчета, связанной с вагоном, шарик движется вдоль вертикальной прямой с постоянным ускорением свободного падения. А в системе отсчета, связанной с землей, движение шарика будет движением по описанной ранее параболе. Отметим также, что «разложение движения на составляющие» не является однозначным*. Так, то же движение тела, брошенного под углом к горизонту, можно представить в виде «суммы» равномерного движения вдоль прямой, направленной под углом к горизонту, задаваемой вектором начальной скорости, и равноускоренного движения вдоль вертикальной прямой. Факти-

* Дискуссия о том, какое разложение является «правильным», равносильна спору о том, какое разложение « $7 = 5 + 2$ » или « $7 = 3 + 4$ » точнее описывает свойства «семерки».

чески эти разложения мы использовали ранее при описании этого движения.

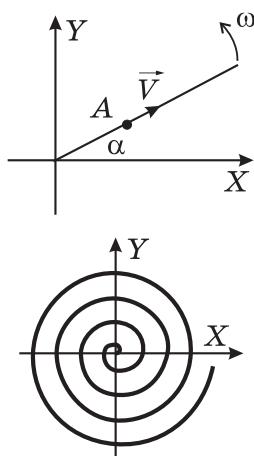


Рис. 79

Суперпозиция вращательного и поступательного движений. Пусть материальная точка A движется по прямому стержню с постоянной скоростью V , а стержень вращается вокруг оси с постоянной угловой скоростью ω . Совместим начало системы отсчета с осью вращения (рис. 79). Тогда расстояние от точки A до начала отсчета и угол поворота стержня зависят от времени по законам $l = Vt$, $\alpha = \omega t$.

Зависимость декартовых координат точки от времени имеет вид

$$x = l \cos \alpha = Vt \cos \omega t;$$

$$y = l \sin \alpha = Vt \sin \omega t$$

и описывает движение по спирали.

Еще одна суперпозиция поступательного и вращательного движений. Пусть колесо радиуса R катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания. Точка A расположена на расстоянии a от оси колеса (будем считать, что a может быть как меньше, так и больше R — такие точки можно найти, например, на железнодорожном колесе). Построим семейство траекторий точек колеса.

Пусть в начальный момент времени центр колеса находится в точке O . Введем систему коорди-

нат, ось X которой проходит вдоль поверхности, по которой катится колесо, а ось Y перпендикулярна этой поверхности и проходит через точку O (рис. 80). Выберем точку A на расстоянии a от центра и первоначально находящуюся на оси Y . Посмотрим, как изменится положение этой точки, когда колесо повернется на некоторый угол $\varphi = \omega t$ (на рисунке это $\angle A'O'D$). Центр колеса сместится на расстояние S и займет положение O' , а точка A окажется в точке A' . Так как движение происходит без проскальзывания, то смещение колеса $S = |OO'| = |BD|$ будет равно длине дуги DB' . Поэтому $S = R\varphi$, где угол φ , естественно, измеряется в радианах. Координаты центра колеса будут равны $x_{O'} = S = R\varphi$, $y_{O'} = R$. Рассматривая треугольник $O'A'C$, легко найти координаты рассматриваемой точки A' :

$$\begin{cases} x = R\varphi - a \sin \varphi = R\omega t - a \sin \omega t; \\ y = R - a \cos \varphi = R - a \cos \omega t. \end{cases}$$

Посмотрите на эти траектории (рис. 81) при a , изменяющемся от $-3R$ до $3R$ (с шагом $\frac{R}{4}$). Не правда ли, эффектные кривые?!

Суперпозиция двух вращательных движений. Посмотрим, какую траекторию описывает точка

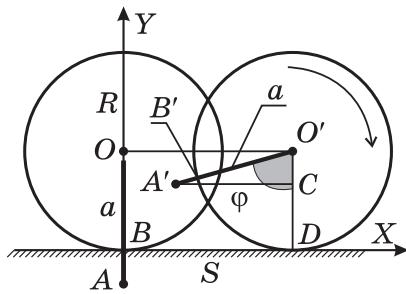


Рис. 80

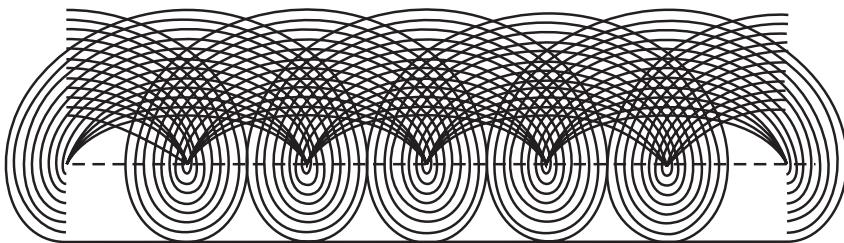


Рис. 81

M колеса радиуса r , катящегося без скольжения по другой неподвижной окружности радиуса R (рис. 82). Обозначим $\varphi = \omega t$ — угол поворота колеса, $m = \frac{r}{R}$ — отношение радиусов

колеса и неподвижной окружности. Пусть A — начальное положение рассматриваемой точки. Из геометрических соображений можно получить параметрическое уравнение траектории точки M :

$$\begin{cases} x = (R + r) \cos m\varphi - r \cos(\varphi + m\varphi); \\ y = (R + r) \sin m\varphi - r \sin(\varphi + m\varphi). \end{cases}$$

Вид траектории полностью определяется параметром m . Если этот параметр является рациональным числом $m = \frac{p}{q}$, (p, q — целые числа), то траектория является замкнутой.

Посмотрите на различные траектории, описываемые этими уравнениями (рис. 83). На всех ри-

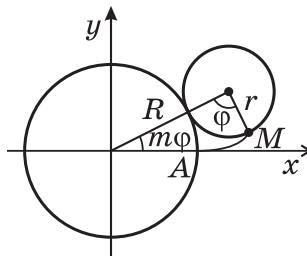


Рис. 82

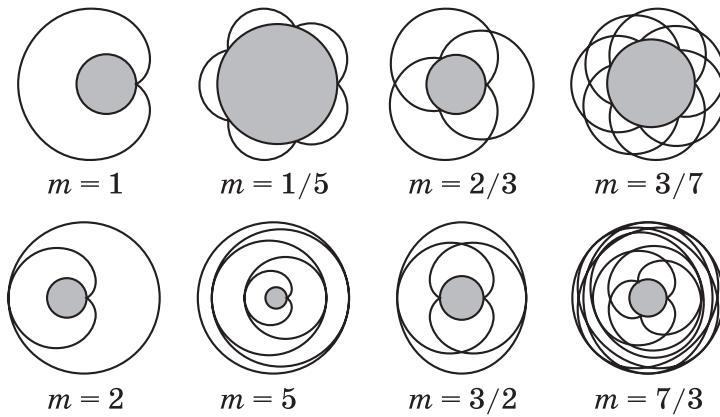


Рис. 83

сунках — в центре изображение окружности, по которой катится колесо.

14.4. Суперпозиция и линейность

Возможность «сложения» движений и соответствующих кинематических характеристик имеет и математическое воплощение. Поясним эту взаимосвязь на простейшем примере (рис. 84).

Пусть материальная точка A движется с угловой скоростью $\omega' = \frac{\Delta\alpha'}{\Delta t}$ по окружности радиуса r с центром, совпадающим с началом координат системы отсчета $X'Y'$, которая, в свою очередь, вращается с угловой скоро-

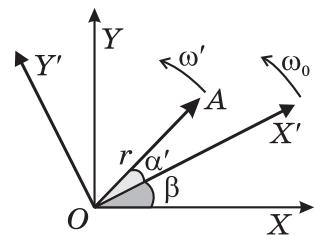


Рис. 84

стью $\omega_0 = \frac{\Delta\beta}{\Delta t}$ относительно неподвижной системы отсчета XOY . Угол поворота точки относительно неподвижной системы отсчета, как следует из элементарных геометрических соотношений, равен: $\alpha = \alpha' + \beta$. Поэтому угловая скорость вращения относительно неподвижной системы отсчета также равна сумме угловых скоростей: $\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \omega' + \omega_0$.

Вычислим теперь, с каким центростремительным ускорением движется точка A . Во вращающейся системе отсчета $X'OY'$ это ускорение равно: $a' = r(\omega')^2$. Ускорение подвижной системы отсчета относительно неподвижной — $a_0 = r(\omega_0)^2$. Ускорение же точки A относительно неподвижной системы отсчета — $a = r(\omega' + \omega_0)^2 \neq a' + a_0$. Таким образом, для угловых (и обычных) скоростей принцип суперпозиции выполняется, а для ускорений — нет! Легко заметить, что нарушение принципа суперпозиции для ускорений обусловлено квадратичной зависимостью ускорения от скорости. Скорость же линейно* (в данном случае даже пропорционально) выражается через углы поворота.

В общем случае, можно утверждать, что математическим выражением принципа суперпозиции для какой-либо физической величины является

* Напомним, что линейная зависимость между величинами y и x выражается уравнением $y = kx + b$, где k, b — постоянные. Если в этой зависимости $b = 0$, то говорят, что y и x пропорциональны друг другу.

ется линейность уравнений, определяющих эту величину.

§15. Описание движения твердого тела

Кинематическое описание движения твердого тела представляет собой гораздо более сложную математическую задачу, чем описание движения материальной точки, уже хотя бы потому, что твердое тело обладает шестью степенями свободы, а материальная точка только тремя. Представьте себе полет кувыркающегося в воздухе бруска, и вы сразу же оцените сложность описания его движения. Основной подход к математическому описанию движения твердого тела заключается в разложении его движения на составляющие: движение какой-либо точки тела относительно неподвижной системы координат и вращение тела относительно этой точки.

Если задавать закон движения одной точки мы уже научились, то описывать вращение вокруг изменяющейся в пространстве оси весьма сложно. Только для того, чтобы продемонстрировать проблемы, которые возникают при этом, покажем, что результат двух поворотов вокруг различных осей зависит от порядка, в котором они проводятся. На рис. 85 пока-

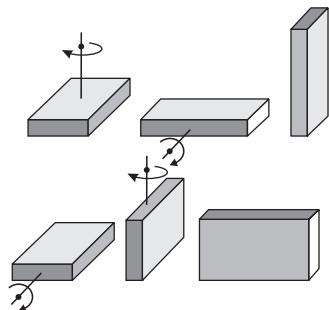


Рис. 85

заны результаты двух поворотов, проведенных в разном порядке — как видите, результат не один и тот же!

Плоскопараллельное движение

Движение твердого тела называется плоскопараллельным, если траектории движения всех его точек являются плоскими кривыми, лежащими в параллельных плоскостях.

Плоскопараллельное движение твердого тела можно представить как суперпозицию поступательного движения и вращения вокруг оси, направление которой не изменяется. Наглядными примерами такого движения являются качение колеса, движение книги без отрыва от стола и т. д.

Для описания положения абсолютно твердого тела при плоскопараллельном движении необходимо задать две декартовые координаты какой-либо точки тела^{*} и угол его поворота, то есть плоскопараллельное движение обладает тремя степенями свободы (рис. 86).

Выберем внутри тела две точки — A и B ; зададим координаты x_A, y_A точки A и угол φ , который образует отрезок AB с

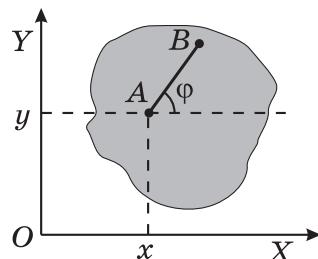


Рис. 86

* С точки зрения кинематического описания, выбор этой точки произволен. Только следует стремиться к тому, чтобы траектория этой точки была проще. Далее мы укажем, как можно легко найти такую точку.

направлением оси X . Три числа — x_A , y_A и ϕ однозначно определяют положение тела на плоскости, следовательно, являются его координатами. Зная эти координаты, можно определить положение в пространстве любой другой точки твердого тела путем геометрических построений.

Покажем теперь, как можно найти скорость любой точки твердого тела при плоскопараллельном движении (рис. 87). Разложим движение на две составляющие — поступательное движение, скорость которого обозначим \vec{V} , и вращение вокруг оси, проходящей через точку A с угловой скоростью $\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$. Тогда скорость любой другой точки тела (например, B) является

векторной суммой скоростей поступательного и вращательного движений:

$$\vec{V}_B = \vec{V} + \vec{V}_{ep}, \quad (1)$$

причем вектор скорости вращательного движения направлен перпендикулярно отрезку AB и равен по абсолютной величине: $V_{ep} = \omega r$, где r расстояние от точки B до оси вращения.

Рассмотрим катящееся без проскальзывания колесо радиуса R (рис. 88). Пусть его центр движется со скоростью \vec{V} . Найдем скорости некоторых других точек колеса. Для этого представим движение колеса как сумму поступательного движения его центра и вращения вокруг его оси. Так как

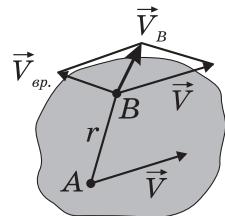


Рис. 87

движение происходит без проскальзывания, то угловая скорость вращения определяется формулой $\omega = \frac{V}{R}$. Для точек, находящихся на ободе колеса, линейная скорость вращательного движения равна по модулю скорости поступательного движения, так как для них расстояние до оси вращения равно радиусу колеса. Поэтому $V_{ep.} = \omega r = \frac{V}{R} R = V$. Однако направление этой скорости различно для разных точек. Так, для точки A скорость вращательного движения направлена горизонтально, также как и скорость поступательного движения. Поэтому суммарная скорость точки A равна $2V$ и направлена горизонтально. Скорость вращательного движения точки B направлена вертикально вверх, поэтому ее полная скорость направлена под углом 45° к горизонту, а ее модуль $V_B = V\sqrt{2}$. Очень интересна точка касания с поверхностью C : скорость ее вращательного движения направлена горизонтально в сторону, противоположную скорости поступательного движения, поэтому ее полная скорость равна нулю.

Так как разложение движения на составляющие не является однозначным, можно теперь представить качение колеса как сумму движения точки C и вращения вокруг оси, проходящей че-

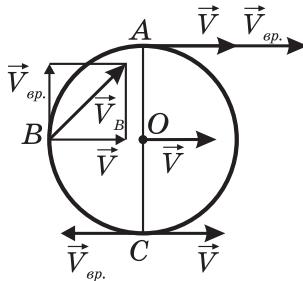


Рис. 88

рез эту точку. Мы показали, что скорость точки C равна нулю, поэтому появляется возможность рассматривать движение колеса как чистый поворот вокруг точки C . Правда, это возможно в течение только бесконечно малого промежутка времени, потому что в следующий момент точкой касания будет другая точка колеса. Множество точек твердого тела, скорости которых в данный момент равны нулю, образуют **мгновенную ось вращения** тела. Такая ось существует при любом движении твердого тела. Правда, положение этой оси постоянно изменяется, поэтому для вычисления координат точек такое представление движения не дает особых преимуществ. Но для вычисления скоростей точек рассматривать плоскопараллельное движение как чистый поворот очень удобно.

Легко доказать, что угол поворота тела не зависит от того, относительно какой оси мы его рассматриваем, следовательно, и угловая скорость не зависит от оси. С этой точки зрения скорость любой точки колеса определяется формулой $V = \omega r'$, где r' – расстояние от данной точки до мгновенной оси вращения.

Рассмотренная задача об определении скоростей точек катящегося колеса может быть легко решена, если рассматривать его движение как поворот вокруг точки C (рис. 89): точка A находится на рас-

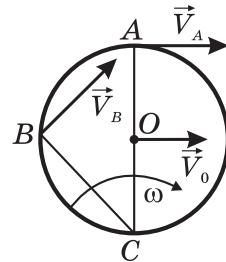


Рис. 89

стоянии $2R$ от мгновенной оси вращения, поэтому ее скорость равна: $V_A = 2R\omega = 2V$; точка B находится на расстоянии $R\sqrt{2}$ от оси, ее скорость — $V\sqrt{2}$. Направления векторов скоростей также совпадают с полученными ранее.

Таким образом, мы имеем два примерно одинаковых по сложности способа описания движения твердого тела: первый — суперпозиция поступательного и вращательного движений; второй — поворот вокруг мгновенной оси.

Дополнение. Если бы скорость света была поменьше!

Все взаимодействия, все сигналы распространяются с конечной скоростью, поэтому любая информация, воспринимаемая нашими органами чувств и приборами, «запаздывает»: то, что мы видим «сейчас», на самом деле произошло «раньше». Нам повезло — скорость света настолько велика, что упомянутое «запаздывание» практически не оказывает никакого влияния на наше поведение. Тем не менее в некоторых случаях его необходимо учитывать. Этой проблеме и посвящена нижеприведенная задача.

Условие задачи «Запаздывание»

Положение некоторого тела (объекта наблюдения), движущегося вдоль прямой, определяется с помощью сонара (звукового радара). Сонар посылает очень короткий звуковой сигнал в виде сферической волны и улавливает отраженную от тела волну. Скорость распространения волны известна и равна c . Сонар фиксирует время, когда послан сигнал — t_0 и время прихода отраженной волны — τ .

Будем считать, что сигналы сонара каким-то образом различаются, поэтому компьютер сонара в момент регистрации отраженного сигнала точно «знает», когда именно этот сигнал был послан. Затуханием сигнала можно пренебречь.

Введем ось координат Ox , начало которой совместим с сонаром. Будем рассматривать тела, движущиеся вдоль этой прямой. Размеры сонара и объекта достаточно малы, поэтому возможно, что объект проходит в непосредственной близости от сонара. Считайте, что время наблюдения изменяется от минус до плюс бесконечности.

Для определения положения тела принятые следующие правила: положение тела в момент прихода отраженного сигнала задается регистрируемым направлением на объект наблюдения, а расстояние до него рассчитывается по формуле

$$r' = c \frac{\tau - t_0}{2}. \quad (1)$$

Определенное по этим правилам положение тела будем называть *изображением* объекта.

Пусть наблюдаемое тело движется равномерно вдоль оси Ox . Закон движения тела имеет вид

$$x = x_0 + v_0 t. \quad (2)$$

Определите скорость движения изображения тела.

Найдите закон движения изображения. Постройте графики законов движения объекта и его изображения.

Наблюдаемое тело движется равноускоренно вдоль оси Ox . Закон движения тела имеет вид

$$x = \frac{at^2}{2}. \quad (3)$$

Найдите закон движения изображения. Постройте схематические графики законов движения объекта и его изображения.

Решение задачи

Сначала рассмотрим общие подходы к решению данной задачи.

Схематически (рис. 90) изобразим закон движения тела $x(t)$. Сигнал, посланный в момент вре-

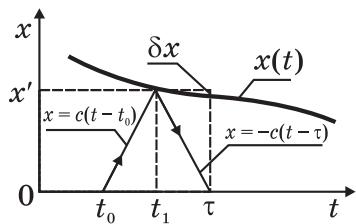


Рис. 90

мени t_0 распространяется по закону $x_c = c(t - t_0)$. Когда сигнал достигнет движущегося тела, их координаты будут равны, поэтому момент времени отражения сигнала t_1 может быть найден из уравнения

$$x(t_1) = c(t_1 - t_0). \quad (1)$$

Это уравнение позволяет найти момент времени отражения t_1 как функцию времени испускания сигнала t_0 . Отраженный сигнал движется в обратном направлении с той же скоростью, поэтому он вернется в исходную точку в момент времени τ , для которого выполняется соотношение

$$t_1 - t_0 = \tau - t_1. \quad (2)$$

Согласно описанной в условии методике, за положение объекта в момент прихода сигнала принимается его положение в момент отражения сигнала. На рисунке отмечена ошибка определения закона движения δx , связанная с тем, что координата движущегося тела в момент отражения сигнала приписывается изображению в момент прихода отраженного сигнала.

Итак, в принципе, первый путь решения задачи проясняется: из уравнения (1) находим t_1 как функцию t_0 ; вычисляем координату $x(t_1(t_0))$, затем из уравнения (2) $t_1(t_0) - t_0 = \tau - t_1(t_0)$ выражаем t_0 как функцию τ ; наконец, записываем закон движения* изображения: $x'(\tau) = x(t_1(t_0(\tau)))$.

Однако на этом пути придется решать два уравнения — (1) и (2), при этом необходимо находить промежуточную функцию $t_1(t_0)$, которая не нужна в окончательном результате. Поэтому можно элементарно избавиться от этой функции, переписав уравнение (1) с помощью соотношения (2):

$$x(t_1) = c(\tau - t_1). \quad (3)$$

Из этого уравнения можно найти время отражения как функцию времени приема отраженного сигнала $t_1(\tau)$, а за-

* Все кинематические характеристики движения изображений будем «штриховать».

кон движения изображения далее можно определить двумя способами:

$$x'(\tau) = x(t_1(\tau)) \quad (4)$$

либо

$$x'(\tau) = c(\tau - t_1(\tau)). \quad (5)$$

Этот путь явно короче — решение одного уравнения и одна подстановка.

Теперь еще одно дополнительное осложнение: а если координата объекта отрицательна? Сделаем рисунок для этого варианта (рис. 91). Тогда следует рассматривать сигнал, распространяющийся в отрицательном направлении оси Ox . В этом случае уравнение (1) надо заменить на

$$x(t_1) = -c(t_0 - t_1), \quad (1^*)$$

соответственно, изменится и более удобное уравнение (3):

$$x(t_1) = -c(\tau - t_1). \quad (3^*)$$

Уравнения (3) и (3^{*}) отличаются только знаком правой части, поэтому их можно объединить:

$$x(t_1) = \pm c(\tau - t_1) \quad (6)$$

или переписать в виде, который отражает явный физический смысл (расстояние до объекта равно расстоянию, которое проходит сигнал):

$$|x(t_1)| = c(\tau - t_1). \quad (7)$$

Кстати, при любом движении (не только вдоль оси Ox) справедливо такое уравнение!

Замечательно, но уравнение (7), или равносильное ему (6), может иметь несколько корней. Конечно, исходя из постановки задачи*, следует выбирать только те корни, для которых выполняется условие

$$t_0 < t_1 < \tau. \quad (8)$$

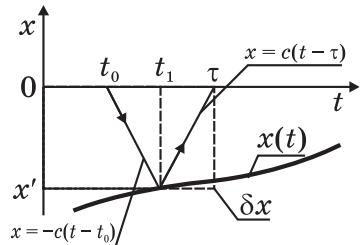


Рис. 91

* Сигнал распространяется во все стороны пространства, но только «из прошлого в будущее».

Каждый раз придется анализировать корни — искать их смысл, принимать, или отбрасывать. По-видимому, все же сначала лучше анализировать, а потом искать то, что нужно. Такой анализ можно унифицировать: построить график закона движения и график распространения сигнала (рис. 92), а затем рассмотреть точки их пересечения. При этом следует посмотреть, как меняется «картинка» при изменении параметров задачи.

Применим эти общие рассуждения к тем вариантам движения объекта, которые описаны в условии задачи.

1. Равномерное движение

Построим график закона движения тела

$$x(t) = x_0 + v_0 t, \quad (1.1)$$

который является прямой линией. Также изобразим графики движения сигналов, испущенных в различные моменты времени. Легко заметить, что необходимо решать различные уравнения в зависимости от знака координаты объекта в момент отражения сигнала (рис. 93). Эти два варианта легко различимы. Объект пересекает начало координат* в момент времени

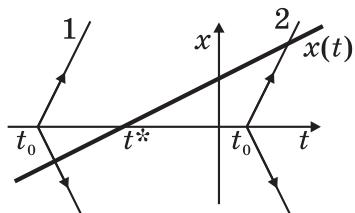


Рис. 92

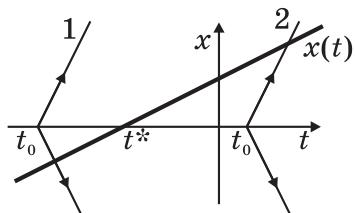


Рис. 93

Если сигнал послан в этот момент времени, то отражение и возвращение произойдут мгновенно, то есть при $t_0 = t^*$, $\tau = t_1 = t_0 = t^*$.

* В реальности, такая ситуация не очень приятна, как для объекта, так и для наблюдателя. Но в рамках нашей модели материальных точек, будем считать, что наши «герои» успешно разойдутся. Более правдоподобная ситуация будет рассмотрена чуть позже.

Итак, при $\tau = t_1 = t_0 < -\frac{x_0}{v_0}$ для определения закона движения следует решить уравнение

$$x_0 + v_0 t_1 = -c(\tau - t_1), \quad (1.3)$$

из которого следует, что $t_1 = \frac{c\tau + x_0}{c - v_0}$, а закон движения имеет вид:

$$x'(\tau) = -c(\tau - t_1) = \frac{c}{c - v_0} (x_0 + v_0 t). \quad (1.4)$$

При $\tau = t_1 = t_0 > -\frac{x_0}{v_0}$ уравнение для определения времени отражения имеет вид:

$$x_0 + v_0 t_1 = c(\tau - t_1), \quad (1.5)$$

из которого определяем $t_1 = \frac{c\tau - x_0}{c + v_0}$ и закон движения изображения:

$$x'(\tau) = -c(\tau - t_1) = \frac{c}{c + v_0} (x_0 + v_0 t). \quad (1.6)$$

Итак, закон движения изображения в рассматриваемом случае имеет вид:

$$x'(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{1-\gamma} (x_0 + v_0 \tau), & \text{при } \tau < -\frac{x_0}{v_0}; \\ \frac{1}{1+\gamma} (x_0 + v_0 \tau), & \text{при } \tau > -\frac{x_0}{v_0}. \end{cases}, \quad (1.7)$$

Здесь обозначено $\gamma = \frac{v_0}{c}$ (это обозначение мы будем использовать и в дальнейшем).

График этой функции показан на рис. 94, там же изображен и график движения самого объекта.

Скорость движения изображения изменяется скачком при пере-

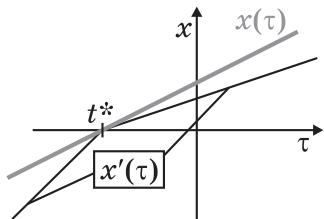


Рис. 94

ходе объекта через начало координат: при приближении объекта его изображение движется быстрее, при удалении наоборот — изображение движется медленнее:

$$v'(\tau) = \begin{cases} \frac{v_0}{1-\gamma}, & \text{при } \tau < -\frac{x_0}{v_0}; \\ \frac{v_0}{1+\gamma}, & \text{при } \tau > -\frac{x_0}{v_0}. \end{cases} \quad (1.8)$$

На этом решение данной части задачи не заканчивается — необходимо отдельно рассмотреть движение объекта со скоростью, большей скорости сигнала $v_0 > c$.

Опять построим графики законов движения объекта и сигналов, посланных в различные моменты времени (на рис. 95 ради экономии места масштаб оси времени изменен по сравнению с предыдущими рисунками). В этом случае ситуация кардинально изменяется. Во-первых, сигналы, посланные в моменты времени $t_0 > t^*$, не догонят объект, следовательно, не дают изображения (оно исчезает!). Во-вторых, сигналы, посланные при $t_0 < t^*$, отразятся от объекта дважды — один раз при приближении самолета (в момент времени $t_1^{(1)}$) и при его удалении (в момент времени $t_1^{(2)}$). Второе отражение произойдет, когда объект догонит сигнал. Таким образом, при $\tau > t^*$ сонар^{*} будет давать два изображения.

Для расчета закона движения первого изображения следует решить уравнение

$$x_0 + v_0 t_1^{(1)} = -c(\tau - t_1^{(1)}), \quad (1.9)$$

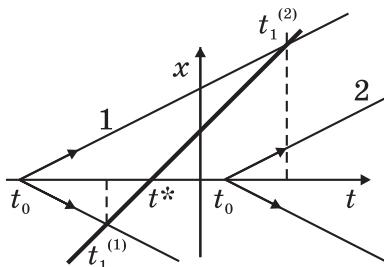


Рис. 95

* Не будем обсуждать, можно ли реально зарегистрировать оба отраженных сигнала — в нашем рассмотрении застуханием сигнала пренебрегаем.

которое совпадает с уравнением (1.3) и поэтому приводит к тому же закону движения (напомним, справедливому только при $\tau > t^*$):

$$x'_{(1)}(\tau) = \frac{c}{c - v_0} (x_0 + v_0 \tau). \quad (1.10)$$

Поразительно, так как $v_0 > c$, скорость изображения отрицательна — изображение движется в сторону противоположную движению объекта.

Объяснение этого парадокса дано на рис. 96. Сигнал, посланный раньше ($t_{01} < t_{02}$), возвратится позже ($\tau_1 > \tau_2$), поэтому быстрее будет поступать информация о более близком положении объекта.

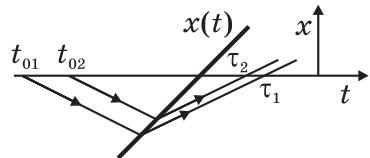


Рис. 96

Для описания движения второго изображения необходимо решить уравнение, совпадающее с уравнением (1.5):

$$x_0 + v_0 t_1^{(2)} = c(\tau - t_1^{(2)}), \quad (1.11)$$

что приводит к аналогичному закону движения изображения:

$$x'_{(2)}(\tau) = \frac{c}{c + v_0} (x_0 + v_0 \tau). \quad (1.12)$$

Графики этих законов движения построены на рис. 97.

Скорости движения изображений легко найти из законов движения:

$$v'_{(1)} = \frac{v_0}{1 - \gamma}, \text{ при } \tau > -\frac{x_0}{v_0};$$

$$v'_{(2)} = \frac{v_0}{1 + \gamma}, \text{ при } \tau > -\frac{x_0}{v_0}. \quad (1.13)$$

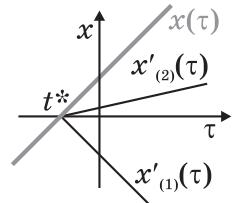


Рис. 97

Таким образом, изображения появляются в момент пересечения объектом начала координат, затем одно медленно удаляется в ту же сторону, что и движущийся объект, а второе движется быстрее в противоположную сторону.

2. Равноускоренное движение

Если при равномерном движении пришлось рассматривать четыре варианта, то сколько же их будет при равноускоренном движении объекта?

При законе движения

$$x(t) = \frac{at^2}{2} \quad (2.1)$$

объект все время находится с одной стороны от наблюдателя ($x \geq 0$), поэтому достаточно рассмотреть только сигнал, распространяющийся в положительном направлении оси Ox . Также обратим внимание, что скорость объекта изменяется, и на одних интервалах больше скорости сигнала, а на других меньше.

Графический анализ взаимного расположения графика движения объекта (парабола) и сигналов (лучей прямых) показывает (рис. 98), что от одного сигнала, испущенного в момент t_0 , может быть зарегистрировано два отражения — τ_1 , τ_2 : один раз сигнал догоняет объект, второй раз объект догоняет сигнал.

Возможна также ситуация, когда отраженных сигналов не будет — сигнал не может догнать объект, разогнавшийся до скорости большей скорости сигнала.

Границным между этими случаями является вариант, при котором график распространения сигнала является касательным к параболе — графику закона движения объекта (рис. 99). Легко понять, что в этом случае в момент отражения скорость объекта $v = at$ сравнивается со скоростью сигнала. Это позволяет найти этот

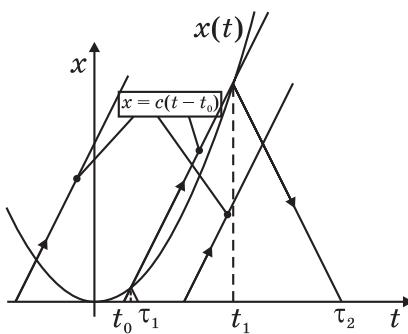


Рис. 98

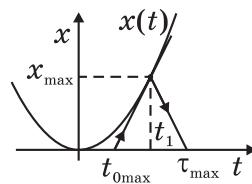


Рис. 99

момент (последнюю возможность догнать объект), используя уравнение $at_{1\max} = c$, из которого следует

$$t_{1\max} = \frac{c}{a}. \quad (2.2)$$

В этот момент объект находится в точке с координатой

$$x_{\max} = \frac{a(t_{1\max})^2}{2} = \frac{c^2}{2a}. \quad (2.3)$$

Максимальный момент отправления сигнала, который может догнать объект, определяется формулой

$$t_{0\max} = t_{1\max} - \frac{x_{\max}}{c} = \frac{c}{2a}, \quad (2.4)$$

а соответствующий момент возвращения «последнего» сигнала —

$$\tau_{\max} = t_{1\max} + \frac{x_{\max}}{c} = \frac{3c}{2a}, \quad (2.5)$$

На первый взгляд кажется, что решение задачи опять надо разбивать на различные этапы, но ведь мы разработали другой метод решения, основанный на «привязке» к моменту регистрации, а не к моменту «запуска». Продолжите это самостоятельно.

ЧАСТЬ II. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ

В предыдущем разделе «Кинематика» мы рассмотрели математические способы описания механического движения. Фактически мы занимались математикой — переводом расплывчатого словесного описания на точный и однозначный язык математических формул, функций, графиков и т. д. Сейчас нам предстоит выяснить физические причины, приводящие к тому или иному виду движения. Раздел механики, изучающий причины движения и его изменения, называется **динамика**.

§ 16. Закон инерции. Принцип относительности Галилея

Повседневный жизненный опыт показывает, что для того, чтобы какое-либо тело двигалось, необходимо прикладывать к нему определенные усилия*: для передвижения человек и животные используют свои мышцы; все средства транспорта снабжены двигателями; если не подталкивать скользящую по льду шайбу, то она останавливается. Вы можете без труда продолжить этот ряд примеров. Поэтому складывается впечатление, что причиной движения тела является воздействие на

* Мерой действия одного тела на другое является сила — строгое физическое понятие. Однако пока мы будем использовать этот термин в обыденном, житейском смысле.

него других тел. Такая точка зрения господствовала в научных представлениях человечества в течение полутора тысяч лет. Приходилось даже придумывать экзотические объяснения для описания простых движений. Так, например, для объяснения полета стрелы, выпущенной из лука, была придумана такая замысловатая теория. Стрела движется в воздухе. Воздушная среда перед стрелой является более разряженной, а позади нее — более плотной. И именно этот более плотный воздух постоянно подталкивает стрелу в полете* (рис. 100).

Однако посмотрим на движение с иной точки зрения — попытаемся более подробно рассмотреть результаты воздействия одного тела на другое.

Пусть некоторое тело, например, тяжелый металлический шар, падает с некоторой высоты на поверхность земли. Он начинает двигаться под действием притяжения к земле. В ходе падения его скорость возрастает. Экспериментально можно показать, что его движение можно описать как примерно равноускоренное. Чтобы уменьшить ускорение, пустим этот шар по желобу, наклоненному под некоторым углом к горизонту. Качение



Рис. 100

* На самом деле ситуация прямо противоположная: перед телом, движущимся в воздухе, среда более плотная, чем сзади него, — этим объясняется возникновение сил сопротивления.

такого шара по-прежнему остается равноускоренным, но величина ускорения уменьшается по мере уменьшения угла наклона. Поэтому разумно предположить, что при движении по горизонтальному желобу ускорение станет равным нулю. Именно ускорение, а не скорость! Иными словами, его движение будет равномерным, с постоянной скоростью. Конечно, со временем шар остановится, но его торможение можно объяснить действием сил сопротивления воздуха и сил трения.

Рассмотрим еще один пример. Толкнем шайбу по поверхности стола. Сдвинувшись на некоторое расстояние, она остановится, следовательно, она движется с уменьшающейся скоростью, с отрицательным ускорением. Заменим поверхность стола гладкой поверхностью льда. И сообщим шайбе ту же начальную скорость. В этом случае шайба пройдет до остановки гораздо большее расстояние. Следовательно, величина (модуль) ее ускорения будет меньше. Поэтому разумно считать, что причиной отрицательного ускорения является сила сопротивления со стороны поверхности. Если каким-либо образом исключить действие поверхности, то движение шайбы должно продолжаться бесконечно долго.

Во всех случаях, оказывается, можно найти причину изменения (!) скорости — действие других тел.

Таким образом, можно утверждать, что **при отсутствии воздействия других тел тело продолжает**

ет двигаться с постоянной скоростью, сохраняя скорость своего движения. Свойство тел сохранять свою скорость называется **инерцией**, а свободное движение тел называют движением по инерции. Сформулированное утверждение в физике носит название **закона инерции Галилея**.

Отметим, что когда говорят о движении с постоянной скоростью, подразумевают постоянство скорости как по величине, так и по направлению. Вспомните, как трудно сделать поворот на гладком льду — не хватает внешних сил, способных изменить направление скорости. Говоря в дальнейшем о равномерном движении, мы будем подразумевать движение с постоянной скоростью как по величине, так и по направлению.

Проявление инерции мы постоянно встречаем в окружающем мире, например: при резком торможении автобуса пассажиров «бросает» вперед — они продолжают двигаться с прежней скоростью; если на стол положить лист бумаги, а на него поставить какой-либо предмет, то можно резко выдернуть этот лист бумаги так, что сам предмет не сдвинется с места.

В разделе «Кинематика» мы неоднократно подчеркивали, что механическое движение относительно, т. е. имеет смысл говорить только о движении одного тела относительно другого. Поэтому в формулировке закона инерции Г. Галилея мы упустили одну существенную деталь — относительно какой системы отсчета рассматривается

движение. Нетрудно привести пример системы отсчета, в которой закон инерции не выполняется. Пусть поезд начинает отходить ускоренно от вокзала. Так вот в системе отсчета, связанной с поездом, — вокзал движется с ускорением, хотя явных взаимодействий, приводящих к изменению скорости вокзала, незаметно. Поэтому закону инерции Г. Галилея^{*} следует дать иную интерпретацию: **существуют такие системы отсчета, в которых тело движется равномерно при отсутствии взаимодействия с другими телами.** Такие системы отсчета называются инерциальными.

Пусть некоторое тело A движется равномерно и прямолинейно относительно некоторой системы отсчета XOY . В любой другой системе отсчета, которая движется относительно XOY равномерно, движение тела A будет равномерным (но, конечно, с другой скоростью). Следовательно, **любая система отсчета, которая движется равномерно относительно какой-нибудь инерциальной системы отсчета, сама является инерциальной.**

Вопрос о существовании инерциальных систем отсчета на самом деле не простой. Во многих случаях в качестве

* Перед самим Г. Галилеем такой проблемы не стояло — он был убежден в существовании «абсолютного» движения. Более четко эта позиция была сформулирована И. Ньютона: существует некое «абсолютное пространство», которое существует само по себе, независимо от существующих в нем материальных тел. Поэтому абсолютное движение есть движение относительно этого абсолютного пространства.

инерциальной системы отсчета рассматривают систему отсчета, связанную с поверхностью Земли. Строго говоря, эта система не является инерциальной, так как Земля вращается вокруг собственной оси, то есть движется с ускорением. Эта неинерциальность проявляется в целом ряде экспериментов — в движении маятника Фуко, отклонении в полете снарядов, подмыве одного из берегов рек и т.д. Безусловно, эти эффекты малы, и при решении многих задач ими можно пренебречь, то есть считать Землю инерциальной системой. Аналогичные рассуждения можно применить и к другим более грандиозным системам, например, связанным с Солнцем или другими звездами. Поэтому вопрос об инерциальности той или иной системы отсчета связан с той точностью, которая требуется для описания физических явлений.

Таким образом, закон инерции постулирует существование инерциальных систем отсчета. Далее, если не будет оговорено особо, мы будем рассматривать движение тел именно в инерциальных системах отсчета.

Для иллюстрации неинерциальности системы отсчета, связанной с поверхностью Земли, опишем широко известный эксперимент, который впервые продемонстрировал известный французский физик Леон Фуко в 1851 году.

Массивный шар был подведен на тросе длиной 67 м к куполу Парижского пантеона (рис. 101). В любой инерциальной системе отсчета выведенный из положения равновесия маятник должен совершать колебания в одной плоскости. Однако из-за вращения Земли плоскость колебания маятника медленно поворачивается. Этот поворот легко понять и описать, если закрепить маятник на полюсе земли. Тогда в инерциальной системе отсчета плоскость колебания маятника остается неизменной, но земной шар делает

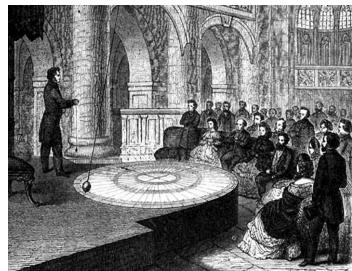


Рис. 101

один оборот за сутки. Поэтому и плоскость колебания поворачивается относительно Земли. Если опыт проводить не на полюсе, то описание движения маятника усложняется, но основная идея остается неизменной: медленный поворот плоскости колебания маятника относительно поверхности Земли однозначно свидетельствует о вращении Земли.

Опыт, публично проведенный Фуко и неоднократно повторенный в других странах, подтверждает слова великого Г. Галилея: «И все-таки она вертится!». Этот достаточно простой эксперимент произвел настолько глубокое впечатление на публику, что послужил источником для различных аллегорических изображений Л. Фуко, изучающего движение Земли (одно из которых показано на рис. 102).



Рис. 102

Задания для самостоятельной работы

1. Оцените центростремительное ускорение точек на экваторе Земли, связанное с суточным вращением.

2. Оцените центростремительное ускорение Земли, связанное с ее годовым движением вокруг Солнца.

Сравните полученные выше значения с ускорением свободного падения.

Историческое дополнение

Аристотель Стагирит (384–322 до н. э.) — великий древнегреческий философ и ученый, ученик Платона (рис. 103).

Родился в Стагире, греческом городе на восточном побережье полуострова Халкидика. Его отец Никомах был

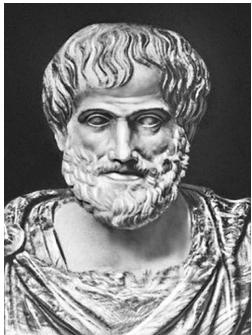


Рис. 103

придворным врачом и личным другом македонского царя Аминты Второго, и их погодки дети — юный Аристотель и наследник престола Филипп не раз проводили время вместе. Когда Аристотелю было 15 лет, отец его умер и опекуном был назначен его дядя Проксен, который, вероятно, и рассказал Аристотелю про Платона и его Академию. В 17 лет Аристотель приехал в Афины и с 367 по 347 год до н. э. был в платоновской Академии сначала на правах ученика, затем

в качестве преподавателя. После смерти Платона он уезжает из Афин и почти 14 лет (347–334) проводит в странствиях. Самым значительным эпизодом этого периода является его педагогическая работа с наследником македонского престола Александром, сыном Филиппа Македонского (с 343/342 по 340/39 г. до н. э.). В 334 году Аристотель возвращается в Афины и основывает собственную философскую школу — Ликей (Лицей). Умер он от болезни в изгнании, покинув Афины перед угрозой со стороны антимакедонски настроенной общественности. Согласно завещанию, был похоронен в родной Стагире.

По Аристотелю, круговое движение — самый совершенный из всех видов движения. Круговое движение может быть не только вечным, но и непрерывным. Для прямолинейного движения свойство это, согласно физике Аристотеля, невозможно: если движение предмета прямолинейное, то чем более приближается предмет к естественному месту своего движения, тем быстрее становится само его движение.

Аристотель выдвигает как непреложную аксиому следующее утверждение: если тело находится в месте, свойственном ему по природе, то оно будет неподвижно; но если оно находится в месте, не свойственном его природе, то оно будет двигаться из места, где оно оказалось, к месту, указанному ему его природой. Это утверждение он пытается

подкрепить, ссылаясь на данные наблюдений. Наша планета — Земля — неподвижна, потому что пребывает в своем естественном для нее месте — в центре Вселенной. Но если бросить ком земли вверх, то он будет двигаться, а именно, падать вниз, к поверхности Земли, так как направится к своему естественному месту. Или еще. Тот огонь, который находится на периферии Вселенной, остается там неподвижным. Но тот огонь, который зажжен внизу, на поверхности Земли, будет непременно двигаться в направлении к краю Вселенной.

Аристотель формулирует общие положения своего учения о движении. К ним относится, в частности, тезис о том, что всякое движение предполагает, с одной стороны, нечто движимое, а с другой — нечто движущее (двигатель). Двигатель также движется и вызывает движение в движимом путем непосредственного соприкосновения с ним. Мысль о возможности инерциального движения, видимо, не приходила Аристотелю в голову. Вид движения всегда привносится двигателем, который, таким образом, есть начало и причина движения. Возникает вопрос: а как же быть с природой, которая в первых строках этой же книги называется началом движения и изменения?

Не следует упрекать Аристотеля в неумении ставить научные опыты или использовать уже созданный к тому времени математический аппарат для описания простейших форм движения. И тем более не следует винить его в том, что он оставался сыном своего времени и не мог выйти за пределы античного мироощущения. И все же в обсуждении физических проблем он проявлял порой удивительную близорукость. Если бы он подошел к рассмотрению таких простых явлений, как падение камня, как полет брошенного тела, как всплытие и погружение предметов в жидкой среде, с той же наблюдательностью и непредвзятой пристальностью, с какой изучал особенности строения тела некоторых морских животных, он, возможно, во многом пришел бы к иным результатам. Не будучи по призванию физиком, он не мог понять неплодотворность своих представлений об

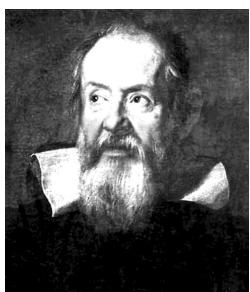
естественных местах для элементов, о разграничении естественных и насильственных движений, не говоря уже о поразительной слепоте Аристотеля в отношении движения по инерции, сыгравшей, без преувеличения, роковую роль в развитии теоретической механики.

Учение Аристотеля было возведено христианской церковью в ранг «истины в последней инстанции». Ссылка на Аристотеля во время научных дискуссий по любой теме признавалась как окончательное и неоспоримое доказательство. Именно поэтому ученым Нового времени пришлось провести революцию в физике, выступая против учения Аристотеля, освященного непререкаемым авторитетом католической церкви.

И все же Аристотель достоин нашей памяти уже хотя бы потому, что именно он придумал название науки, которую мы изучаем, — «ФИЗИКА».

Галилео Галилей

Галилео Галилей (1564—1642) — итальянский философ, математик, физик, механик и астроном, оказавший значительное влияние на науку своего времени. Галилей



первым использовал телескоп для наблюдения планет и других небесных тел и сделал ряд выдающихся астрономических открытий. Галилей — основатель экспериментальной физики. Своими экспериментами он убедительно опроверг умозрительную физику Аристотеля и заложил фундамент классической динамики (рис. 104).

Родился Галилей 15 февраля 1564 в Пизе в семье, принадлежавшей к знатному, но обедневшему флорентийскому роду. Отец Галилея, Винценцо, был известным музыковедом, но чтобы содержать семерых детей, вынужден был не только давать уроки музыки, но и заниматься торговлей сукном. На-

Рис. 104

чальное образование Галилей получил дома. В 1575 году, когда семья переехала во Флоренцию, он был направлен в школу при монастыре, где изучал тогдашние «семь искусств», в частности грамматику, риторику, диалектику, арифметику. Там он познакомился с работами латинских и греческих писателей. Опасаясь, что сын станет монахом, отец забрал его из монастыря в возрасте 15 лет под предлогом тяжелой болезни глаз, и следующие полтора года Галилей учился дома. В 1581 году Галилей поступил по настоянию отца в Пизанский университет, где должен был изучать медицину. Однако лекции в университете он посещал нерегулярно, предпочитая им самостоятельные занятия геометрией и практической механикой. В это время он впервые познакомился с физикой Аристотеля, с работами древних математиков — Евклида и Архимеда (последний стал его настоящим учителем). В Пизе Галилей пробыл четыре года, а затем, увлекшись геометрией и механикой, оставил университет. К тому же у его отца нечего было платить за дальнейшее обучение. Галилей вернулся во Флоренцию. Результатом четырехлетнего флорентийского периода жизни Галилея стало небольшое сочинение *Маленькие гидростатические весы* (*La bilancetta*, 1586). Работа предполагала чисто практические цели: усовершенствовав уже известный метод гидростатического взвешивания, Галилей применил его для определения плотности металлов и драгоценных камней.

В 1589 году Галилей получил место профессора математики в том самом Пизанском университете, где ранее был студентом. В 1591 году умер отец Галилея, и ему пришлось взять на себя заботу об остальных членах семьи. В 1592 году Галилей занял кафедру математики Падуанского университета в Венецианской республике. Он должен был преподавать геометрию, механику, астрономию. В Падуанский период жизни Галилея (1592—1610) созрели его основные работы из области динамики: о движении тела по наклонной плоскости и тела, брошенного под углом к горизонту; к этому же времени относятся исследования о прочности материалов.

Физика и механика в те годы изучались по сочинениям Аристотеля, которые содержали надуманные и необоснованные рассуждения о «первопричинах» природных процессов. В частности, Аристотель утверждал: «Скорость падения пропорциональна весу тела. Движение происходит, пока действует сила, и в отсутствии силы прекращается».

Находясь в Падуанском университете, Галилей изучал инерцию и свободное падение тел. В частности, он заметил, что ускорение свободного падения не зависит от массы тела, опровергнув, таким образом, утверждение Аристотеля. Существует легенда, что Галилей сбрасывал объекты разной массы с вершины Пизанской башни и измерял скорость их падения. Вероятно, Галилей действительно совершил подобные эксперименты, но к знаменитой наклонной башне в Пизе они вряд ли имели отношение.

Галилей доказал, чтоброшенное под углом к горизонту тело летит по параболе и что максимальная дальность полёта достигается для угла 45° . На основе этой модели Галилей составил первые артиллерийские таблицы.

Галилей опроверг и второй из приведённых законов Аристотеля, сформулировав закон инерции: при отсутствии внешних сил тело либо покоятся, либо равномерно движется.

Галилей является одним из основоположников принципа относительности, который был позже назван в его честь. Галилей заметил, что при одинаковых начальных условиях любое механическое явление протекает одинаково в изолированной системе, находящейся в покое либо движущейся прямолинейно и равномерно. Эти открытия Галилея позволили ему опровергнуть многие доводы противников гелиоцентрической системы мира, утверждавших, что движение Земли заметно сказалось бы на явлениях, происходящих на её поверхности.

Церковный запрет гелиоцентризма был неприемлем для Галилея. Он вернулся во Флоренцию и стал размышлять, как, формально не нарушая запрета, продолжать за-

щить истину. В конце концов, он решил издать книгу, содержащую нейтральное обсуждение разных точек зрения. Он писал эту книгу 16 лет, собирая материалы, оттачивая аргументы и выжидая благоприятного момента.

В 1632 году книга «Диалог о двух главнейших системах мира» (рис. 105) — птолемеевой и коперниковой — вышла в свет. Книга написана в форме диалога между двумя сторонниками Коперника и Симпличио, приверженцем Аристотеля. В книге нет авторских выводов, но сила аргументов говорит сама за себя. Знаменательно, что книга написана не на учёной латыни, а на «народном» итальянском языке.

Галилей надеялся, что Папа снисходительно отнесётся к его уловке, однако просчитался. В довершение всего он сам безрассудно рассыпает 30 экземпляров своей книги влиятельным духовным лицам в Риме.

Большинство биографов сходится во мнении, что в простаке-Симпличио римский Папа узнал самого себя, свои аргументы и пришёл в ярость. Уже через несколько месяцев книга была запрещена и изъята из продажи, а Галилея вызвали в Рим на суд инквизиции по подозрению в ереси. Следствие тянулось с 21 апреля по 21 июня 1633 года.

В итоге учёный был поставлен перед выбором: либо он покается и отречётся от своих «заблуждений», либо его постигнет участь Джордано Бруно и многих других, замученных инквизицией. Галилею пришлось произнести предложенный ему текст отречения. Затем объявили приговор: Галилей виновен в распространении «ложного, еретического, противного Св. Писанию учения» о движении Земли. Он осуждается к тюремному заключению на срок, который установит Папа. Галилея объявили не еретиком, а «сильно



Рис. 105

заподозренным в ереси»; такая формулировка также была тяжким обвинением, однако спасала от костра.

Общеизвестна легенда, по которой после суда Галилей сказал: «И всё-таки она вертится!». Однако доказательств тому нет. Есть основания считать, что данный миф был создан и запущен в обращение в 1757 году журналистом Джузеппе Баретти.

После суда остаток жизни Галилей провел под домашним арестом. Окруженный учениками (В. Вивиани, Э. Торричелли и др.), он тем не менее продолжал работать над приложениями к «Беседам» и над некоторыми экспериментальными проблемами. В 1641 году здоровье Галилея резко ухудшилось. Он умер 8 января 1642 года. В 1737 году была исполнена последняя воля Галилея — его прах был перенесен во Флоренцию, в церковь Санта-Кроче, где был погребен рядом с могилой Микеланжело (рис. 106).



Рис. 106

§ 17. Взаимодействие тел. Масса тела. Плотность. Сила

Мы показали, что при отсутствии взаимодействия тела движутся равномерно в инерциальных системах отсчета. Только действие одного тела на другое приводит к изменению скорости его движения, к появлению ускорения. Следовательно, ускорение тела служит показателем того, что тело подверглось воздействию со стороны других тел. Однако само ускорение не может служить мерой

взаимодействия тел, так как оно зависит не только от характеристик взаимодействия, но и от свойств самого тела. Поэтому нам необходимо определить, от каких характеристик тела и от каких характеристик взаимодействия зависит величина ускорения.

Как мы отмечали, способность тела сохранять свою скорость называется инерцией. Повседневный опыт убеждает нас, что труднее сдвинуть с места более тяжелое тело. Точно также труднее остановить более тяжелое тело. Следовательно, тяжелое тело является более инертным. **Мерой инертности является масса тела.** Понятие массы нам хорошо знакомо, мы без труда определяем массу тел с помощью весов, постоянно пользуемся знакомыми и привычными единицами измерения массы — грамм, килограмм, тонна и т. д. Массу тела интуитивно воспринимают* как «количество вещества, материи», содержащейся в теле. Однако такое понимание является весьма упрощенным: масса — это характеристика инерционных свойств тела. Нужно дать строгое научное определение массы.

Многочисленные физические эксперименты и практический опыт человека убеждают нас в том, что при любом взаимодействии между двумя телами отношение ускорений, приобретаемых ими, не зависит от вида и величины взаимодействия. Следовательно, отношение ускорений является величиной, зависящей только от свойств самих тел — от их инерционных свойств.

* Именно так определял массу И. Ньютон.

Принято считать, что отношение ускорений, приобретаемых телами в результате взаимодействия, обратно отношению масс тел:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (1)$$

Именно это соотношение фактически является определением массы тела. Если массу одного из тел взять в качестве эталона, то масса любого другого может быть определена из соотношения (1):

$$m = m_{\text{эт}} \cdot \frac{a_{\text{эт}}}{a}. \quad (2)$$

Единицей массы в системе СИ является 1 килограмм.

Единица массы — 1 кг (точно) — воспроизведена в виде платино-иридиевой гири, которая хранится в качестве международного эталона килограмма в Международном бюро мер и весов (в г. Севр близ Парижа). Розданные другим странам эталоны имеют номинальное значение 1 кг, их действительные значения получены по отношению к международному эталону.

Интересна история эталона единицы массы. Изначально 1 килограмм определялся как масса 1 кубического дециметра дистиллированной воды, находящейся при температуре 4,2 °C. «Килограмм Архива», который был принят за эталон массы в 1872 году, представляет собой платиновую цилиндрическую гирю, высота и диаметр которой равны по 39 мм. Прототипы (вторичные эталоны) для практического применения были сделаны из платино-иридиевого сплава. По решению I Генеральной конференции по мерам и весам из 42 экземпляров прототипов килограмма России были переданы № 12 и № 26, причем № 12 утвержден в качестве государственного эталона массы. Прототип № 26 использовался как вторичный эталон.

Национальный (государственный) эталон массы хранится в НПО «ВНИИМ им. Д. И. Менделеева» (г. Санкт-Петербург) на кварцевой подставке под двумя стеклянными колпаками в стальном сейфе, температура воздуха поддерживается в пределах $20 +/ - 3$ °С, относительная влажность 65% (рис. 107). Один раз в 10 лет с ним сличаются два вторичных эталона. При сличении с международным эталоном наш национальный эталон массы получил значение 1,0000000877 кг. Для передачи размера единицы массы от прототипа № 12 вторичным эталонам используются специальные весы № 1 и № 2 с дистанционным управлением на 1 кг; весы № 1 изготовлены фирмой «Рупрехт», а № 2 — НПО «ВНИИМ им. Д. И. Менделеева». Погрешность воспроизведения килограмма составляет $2 \cdot 10^{-9}$.

Несмотря на специальные условия хранения, эталон постоянно претерпевает изменения массы, до сих пор считавшиеся незначительными. Но недавние проверки, однако, показали, что в последнее время потеря массы не так уж незначительна: 50 микрограмм (ранее предполагалось, что за сто лет эталон теряет примерно три сотых микрограмма). Это может вызвать сильные расхождения с национальными эталонами. Кроме того, по определению, любое изменение массы эталона изменяет само понятие «килограмм», что неудобно.

За 100 с лишним лет существования описанного прототипа килограмма, конечно, были попытки создать более современный эталон на основе фундаментальных физических констант масс различных атомных частиц (протона, электрона и т. д.). Однако на современном уровне научно-технического прогресса пока не удалось воспроизвести этим новейшим методом массу килограмма с меньшей погрешностью, чем существующая.



Рис. 107

Конечно, обычно массу тела измеряют другими способами, например, взвешиванием. Но, строго говоря, при взвешивании мы измеряем не массу, а силу притяжения тела к земле, поэтому необходимы дополнительные доказательства того, что эта сила пропорциональна массе тела. Эти доказательства мы продемонстрируем позднее (рис. 108).



Рис. 108

После того, как мы четко определили массу как меру инертности тел, можно приступить к изучению характеристик взаимодействий тел. Для этого нам надо каким-либо образом создать, хотя бы мысленно, устройство, обеспечивающее постоянное воздействие на произвольное тело. В качестве такого устройства можно, например, рассматривать пружину, сжатую на определенную величину. Опыт показывает, что **при одном и том же воздействии на тело произведение массы тела на приобретаемое ускорение является постоянной величиной, не зависящей от самого тела, а полностью определяемой видом воздействия.** Следовательно, эта величина может служить характеристикой воздействия одного тела на другое — эта характеристика называется **силой** $\vec{F} = m\vec{a}$. Подчеркнем, что сила является векторной величиной, ее направление совпадает с направлением ускорения, которое приобретает тело. Изменение направления силы

приводит к изменению направления ускорения, вызванного этой силой.

Единицей измерения силы в СИ является **ньютон**. Сила в один ньютон сообщает телу массой один килограмм ускорение, равное одному метру в секунду за секунду:

$$[H] = \frac{[kg] \cdot [m]}{[s^2]}$$

Итак, теперь мы имеем возможность количественно изучать различные виды взаимодействия, для чего у нас есть физическая величина — сила, описывающая взаимодействие, есть единица ее измерения — ньютон. Сконструирован и прибор для измерения силы, который называются **динамометр**. Простейший из них показан на рис. 109.

Вернемся еще раз к понятию массы тела. Конечно, не представляет большой проблемы измерить массу тела, например, с помощью весов. Тем не менее, масса тела в некоторых случаях может (и должна) быть рассчитана. В таких ситуациях весьма полезным бывает понятие **плотности вещества**. Если тело изготовлено из одного материала, то очевидно, что его масса пропорциональна объему тела. Поэтому отношение массы тела к его объему является характеристикой вещества, из которого изготовлено тело, — эта характеристика называется **плотностью вещества**. Таким образом, плотность веще-



Рис. 109

ства ρ есть отношение массы тела m , изготовленного из данного вещества, к объему тела V :

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

В общем случае, когда тело не является однородным, следует ввести понятие средней плотности в пределах некоторой части тела объемом ΔV , имеющей массу Δm :

$$\rho_{cp.} = \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

Эта характеристика усредняет инерционные характеристики части тела. Если мы хотим с большей точностью описать распределение масс в объеме тела, мы должны вводить средние плотности для все более мелких частей тела. В пределе можно говорить о плотности тела как функции координат его отдельной, бесконечно малой части, то есть рассматривать плотность как функцию координат выбранной точки тела $\rho(x, y, z)$ (рис. 110). Безусловно, что понятие плотности в данной точке, с физической точки зрения, по крайней мере, противоречиво. Массой может обладать только тело конечного объема (хотя бы превышающего объем отдельной молекулы). Однако, с точки зрения простоты математического описания, удобней рассматривать плотность неоднородного тела как функцию координат $\rho(x, y, z)$, понимая, что физический смысл имеет толь-

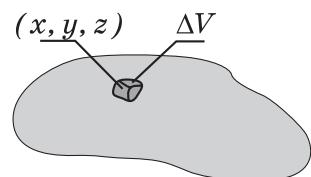


Рис. 110

ко произведение $\Delta m = \rho(x, y, z)\Delta V$, приблизительно равное массе малой части тела объемом ΔV , если эта часть включает точку с координатами (x, y, z) . Причем точность этой формулы тем выше, чем меньше величина выделенного объема ΔV .

Если задать распределение плотности тела $\rho(x, y, z)$, то для вычисления суммарной массы тела необходимо применить следующую математическую процедуру: мысленно разбить тело на малые части, объемы которых равны ΔV_i ($i = 1, 2, 3 \dots$ — номер выделенной части тела), подсчитать массы каждой части: $\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i$ и вычислить массу тела как сумму масс всех его частей:

$$m = \Delta m_1 + \Delta m_2 + \Delta m_3 + \dots = \sum_i \Delta m_i = \sum_i \rho_i \Delta V_i. \quad (3)$$

Обратите внимание на проведенные рассуждения о плотности неоднородного тела. Масса тела — характеристика конкретного тела, неважно, из чего оно сделано, является ли оно однородным или состоит из частей, изготовленных из различных материалов. Можно сказать, что масса характеризует тело целиком. Плотность же есть характеристика вещества, из которого изготовлено данное тело или его часть. Иными словами, плотность — «точечная» характеристика в том смысле, что мы приписываем эту характеристику каждой точке тела.

Вспомните наши рассуждения о переходе от средней к мгновенной скорости. Тогда мы критиковали, с физической точки зрения, понятие

мгновенной (в математическом смысле) скорости как неизмеримую, в принципе, физическую величину. Аналогичные претензии можно высказать и по поводу «точечной» плотности. Не имеет смысла говорить о сколь угодно малом объеме вещества — все тела состоят из атомов и молекул. Поэтому малость объема ограничена, по крайней мере, размером атома. Тем не менее понятие плотности оказывается удобным для описания распределения масс внутри тела — математическая простота окупает определенные логические проблемы. Поэтому мы и в данном случае, и во многих других будем пользоваться подобными «точечными» характеристиками веществ и процессов. Часто такой подход объясняют введением своеобразного физико-математического «кентавра». Будем называть ΔV **физическими малым объемом**, малым, с математической точки зрения, настолько, что можно пользоваться анализом* бесконечно малых величин, и достаточно большим, чтобы содержать значительное число атомов и молекул.

§ 18. Законы динамики Ньютона

Историческое вступление

Исаак Ньютон, сын мелкого, но зажиточного, фермера, родился в деревне Вулсторп (графство Линкольншир) в

* Более точно — интегральным и дифференциальным исчислением, но не пугайтесь — мы обойдемся без этого замечательного раздела математики.

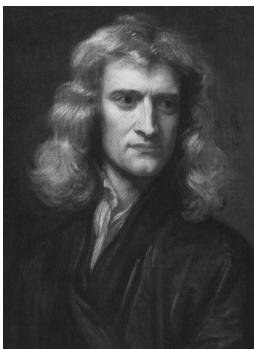


Рис. 111

1642 году, в год смерти Галилея и в канун гражданской войны. Отец Ньютона не дожил до рождения сына. Мальчик родился болезненным, до срока, но всё же выжил и прожил 84 года. Факт рождения под Рождество Ньютон считал особым знаком судьбы (рис. 111).

В детстве Ньютон, по отзывам современников, был замкнут и обособлен, любил читать и мастерить технические игрушки: часы, мельницу и т. п. По окончании школы (1661) он поступил

в Тринити-колледж (Колледж святой Троицы) Кембридженского университета. Уже тогда сложился его могучий характер — научная дотошность, стремление дойти до сути, нетерпимость к обману и угнетению, равнодушие к публичной славе.

Научной опорой и вдохновителями творчества Ньютона в наибольшей степени были физики Галилей, Декарт и Кеплер. Ньютон завершил их труды, объединив в универсальную систему мира. Похоже на то, что значительную часть своих математических открытий Ньютон сделал ещё студентом, в «чумные годы» (1664—1666). В 23 года он уже свободно владел методами дифференциального и интегрального исчислений. Тогда же, по его утверждению, он открыл закон всемирного тяготения, точнее, убедился, что этот закон следует из третьего закона Кеплера.

Все эти эпохальные открытия были опубликованы на 20—40 лет позже, чем были сделаны. Ньютон не гнался за славой. Стремление открыть истину было у него главной целью.

1667 год: эпидемия чумы отступает, и Ньютон возвращается в Кембридженский университет. Избран членом Тринити-колледжа, а в 1668 году становится магистром. В 1669 году Ньютон избирается профессором математики. Продолжаются эксперименты по оптике и теории цвета. Он строит смешанный телескоп-рефлектор (линза и вогнутое сферическое зеркало,

которое полирует сам). Всерьёз увлекается алхимией, проводит массу химических опытов.

1672 год: демонстрация рефлектора в Лондоне вызывает всеобщие восторженные отзывы. Ньютон становится знаменит и избирается членом Королевского общества (Британской академии наук). Позже усовершенствованные рефлектоны такой конструкции стали основными инструментами астрономов, с их помощью были открыты иные галактики, красное смещение и др.

Разгорается полемика с Гуком, Гюйгенсом и другими учеными по поводу природы света. Ньютон даёт зарок на будущее не ввязываться в научные споры. В письмах он жалуется, что поставлен перед выбором: либо не публиковать свои открытия, либо тратить всё время и все силы на отражение недружелюбной дилетантской критики. Судя по всему, он выбрал первый вариант.

1680 год: Ньютон получает письмо Гука с формулировкой закона всемирного тяготения, послужившее, по признанию первого, поводом его работ по определению планетных движений (правда, потом отложенных на некоторое время), составивших предмет «Начал». Впоследствии Ньютон по каким-то причинам, быть может, подозревая Гука в незаконном заимствовании каких-то более ранних результатов самого Ньютона, не желает признавать здесь никаких заслуг Гука, но потом соглашается это сделать, хотя и довольно неохотно и не полностью.

1684—1686 годы: после долгих уговоров Ньютон соглашается опубликовать свои главные достижения — работу над «Математическими началами натуральной философии» (весь трёхтомник издан в 1687 году) (рис. 112).

В 1689 году Ньютон был в первый раз избран в парламент от Кембриджского университета и заседал там не-

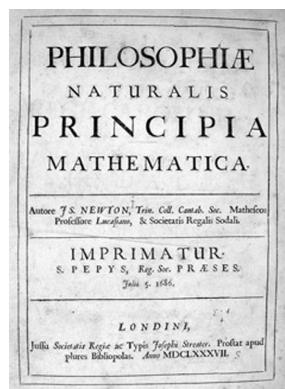


Рис. 112

многим более года. Второе избрание состоялось в 1701—1702 годах.

1696 год: королевским указом Ньютон назначен смотрителем Монетного двора (с 1699 года — директор). Он энергично проводит денежную реформу, восстановливая доверие к основательно запущенной его предшественниками монетной системе Великобритании.

1699 год: начало открытого приоритетного спора с Лейбницием, в который были вовлечены даже царствующие особы. Эта нелепая распрая двух гениев дорого обошлась науке — английская математическая школа вскоре увяла на целый век, а европейская проигнорировала многие выдающиеся идеи Ньютона, переоткрыв их много позднее.

В 1703 году Ньютон был избран президентом Королевского общества и управлял им до конца жизни — более двадцати лет.

1705 год: королева Анна возводит Ньютона в рыцарское достоинство. Отныне он сэр Исаак Ньютон. Впервые в английской истории звание рыцаря присвоено за научные заслуги.

Последние годы жизни Ньютон посвятил написанию «Хронологии древних царств», которой занимался около 40 лет, и подготовкой третьего издания «Начал».

В 1725 году здоровье Ньютона начало заметно ухудшаться (каменная болезнь), и он переселился в Кенсингтон не подалёку от Лондона, где и скончался ночью, во сне, 20 (31) марта 1727 года. Похоронен в Вестминстерском аббатстве.

Надпись на могиле Ньютона гласит: «Здесь покоится сэр Исаак Ньютон, дворянин, который почти божественным разумом первый доказал с факелом математики движение планет, пути комет и приливы океанов. Он исследовал различие световых лучей и появляющиеся при этом различные свойства цветов, чего ранее никто не подозревал. Прилежный, мудрый и верный истолкователь природы, древности и Св. Писания, он утверждал своей философией величие Все-могущего Бога, а нравом выражал евангельскую простоту.

Пусть смертные радуются, что существовало такое украшение рода человеческого (рис. 113).

Сам Ньютон оценивал свои достижения более скромно: «*Не знаю, как меня воспринимает мир, но сам себе я кажусь только мальчиком, играющим на морском берегу, который развлекается тем, что время от времени отыскивает камешек более пёстрый, чем другие, или красивую ракушку, в то время как великий океан истины расстилается передо мной неисследованным*».



Рис. 113

В 1687 году вышла книга английского ученого Исаака Ньютона «Математические начала натуральной философии», в которой была сформулирована система законов динамики, подобная системе аксиом геометрии Эвклида. В отличие от математических аксиом, законы физики являются обобщением громадного числа физических экспериментов, они также подтверждаются справедливостью многочисленных следствий применения этих законов при описании механического движения. Тем не менее с формальной точки зрения их можно рассматривать именно как аксиомы, не следующие из других, более общих законов.

Три закона динамики И. Ньютона следует рассматривать в тесной взаимосвязи, так как только в совокупности они составляют фундамент динамики — науки, позволяющей описывать механи-

ческое движение, выяснить причины изменения скоростей тел, объяснять и управлять этим движением. Сразу подчеркнем, что знание только трех законов динамики не дает возможности решить ни одной конкретной задачи: такие возможности появляются только в том случае, когда они дополняются большим числом других законов, дающих выражения для сил конкретных взаимодействий.

Законы динамики связывают ускорения тел с характеристиками тел (массами) и их взаимодействий (силами), поэтому неудивительно, что в основу динамики И. Ньютона были положены именно три закона, или три аксиомы, как называл их Ньютон.

Первый закон Ньютона. В качестве первого закона Ньютон взял закон инерции Г. Галилея, который был сформулирован и обоснован нами ранее: существуют инерциальные системы отсчета, т. е. такие системы отсчета, в которых тело движется равномерно и прямолинейно, если другие тела на него не действуют. Основная роль этого закона — подчеркнуть, что в этих системах отсчета все ускорения, приобретаемые телами, являются следствиями взаимодействий тел. Дальнейшее описание движения следует проводить только в инерциальных системах отсчета.

Второй закон Ньютона утверждает, что причина ускорения тела — взаимодействие тел, характеристикой которого является сила. Этот закон

дает основное уравнение динамики, позволяющее, в принципе, находить закон движения тела, если известны силы, действующие на него. Этот закон может быть сформулирован следующим образом (рис. 114): **ускорение точечного тела (материальной точки) прямо пропорционально сумме сил, действующих на тело, и обратно пропорционально массе тела:**

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad (1)$$

здесь \vec{F} — результирующая сила, то есть векторная сумма всех сил, действующих на тело.

На первый взгляд, уравнение (1) является другой формой записи определения силы, данного в предыдущем разделе. Однако это не совсем так. Во-первых, закон Ньютона утверждает, что в уравнение (1) входит сумма всех сил, действующих на тело, чего нет в определении силы. Во-вторых, второй закон Ньютона однозначно подчеркивает, что сила является причиной ускорения тела, а не наоборот.

Наконец, все физические величины определяются на основании частных случаев тех или иных физических законов, так что второй закон Ньютона не является в этом случае исключением. С одной стороны, этот закон позволяет изучать различные виды взаимодействий, т. е. экспериментально получать законы этих взаимодействий. С другой стороны, при известных силах этот закон дает уравнение, позволяющее находить закон движения

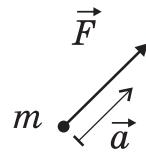


Рис. 114

тела. Неявно этот же закон утверждает, что силы, действующие на тело, следует складывать как векторные величины, так как полное ускорение определяется именно векторной суммой всех сил. Также подчеркнем, что первый закон не является следствием второго. Формально, если сумма сил, действующих на тело, равна нулю, то ускорение тела равно нулю, то есть тело движется равномерно и прямолинейно. Однако напомним, что именно первый закон указывает те системы отсчета, в которых выполняется второй закон.

Третий закон Ньютона подчеркивает, что причиной ускорения является взаимное действие тел друг на друга. Поэтому силы, действующие на взаимодействующие тела, являются характеристиками одного и того же взаимодействия. С этой точки зрения нет ничего удивительного в третьем законе Ньютона (рис. 115): **точечные тела (материальные точки) взаимодействуют с силами, равными по величине и противоположными по направлению и направленными вдоль прямой, соединяющей эти тела:**

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \quad (2)$$

где \vec{F}_{12} — сила, действующая на первое тело со стороны второго, а \vec{F}_{21} — сила, действующая на второе тело со стороны первого. Очевидно, что эти силы имеют одинаковую природу. Этот закон также является обобщением многочисленных экс-

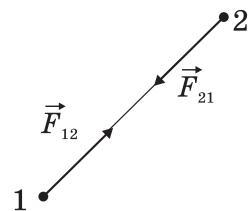


Рис. 115

периментальных фактов. Обратим внимание, что фактически именно этот закон является основой определения массы тел, данного в предыдущем разделе.

Сформулированные законы динамики играют роль своеобразных аксиом, то есть утверждений, не выводимых из более общих физических законов. Обратите внимание, что рассматриваемые законы сформулированы для точечных тел (материальных точек). Их применение для реальных тел, имеющих конечные размеры, требует уточнения и обоснования.

Иногда третий закон Ньютона вызывает крайнее удивление: если «сила действия равна силе противодействия», то как лошадь может сдвинуть телегу? Ведь сила \vec{F}_{12} , с которой лошадь тянет телегу, равна по модулю и противоположна по направлению силе \vec{F}_{21} , с которой телега тянет лошадь (рис. 116).

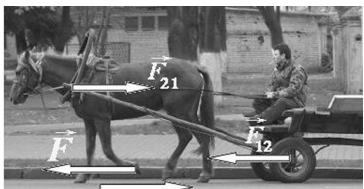


Рис. 116

Разрешение данного противоречия элементарно, если вам понятны законы Ньютона. Нет смысла складывать силы, приложенные к разным телам! Поэтому телега движется под действием силы, приложенной со стороны лошади. А лошадь в свою очередь движется потому, что она «отталкивает» землю, а по третьему закону Ньютона земля толкает лошадь с силой \vec{F} — именно эта сила и является движущей в системе «лошадь — телега».

§ 19. Следствия из законов динамики Ньютона

19.1. Поступательное движение твердого тела

Мысленно разобьем произвольное твердое тело на столь малые части, чтобы каждую из них можно было рассматривать как материальную точку, к которым применимы три закона динамики И. Ньютона.

Рассмотрим произвольную систему материальных точек (рис. 117), которые взаимодействуют между собой (эти силы назовем внутренними) и с другими телами, не входящими в рассматриваемую систему (внешние силы). Пронумеруем эти точки. В соответствии со вторым законом Ньютона, для каждой материальной точки (например, номер 1) справедливо уравнение

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_1^{(вн)} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1k} + \dots, \quad (1)$$

где m_1 — масса рассматриваемой точки; \vec{a}_1 — ее ускорение; $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{13}, \dots, \vec{F}_{1k}$ — силы*, действующие на

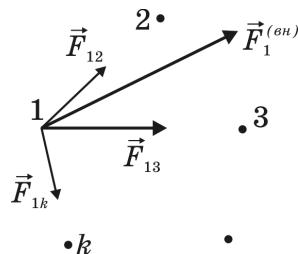


Рис. 117

* Обращайте внимание на индексные обозначения сил взаимодействия: здесь первый индекс указывает номер тела, на которое действует сила со стороны тела, номер которого указывает второй индекс. Некоторые авторы предпочитают противоположную индексацию.

точку 1, со стороны материальных точек 2,3,...k...; $\vec{F}_1^{(вн)}$ — сумма внешних сил, действующих на точку 1. Просуммируем уравнения вида (1) для всех точек, включенных в рассматриваемую систему, в результате чего получим очень громоздкое уравнение:

$$\begin{aligned} m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + m_3 \vec{a}_3 + \dots &= \vec{F}_1^{(вн)} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1k} + \dots \\ &+ \vec{F}_2^{(вн)} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \dots + \vec{F}_{2k} + \dots , \\ &+ \vec{F}_3^{(вн)} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} + \dots + \vec{F}_{3k} + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

В этом уравнении силы взаимодействия между двумя материальными точками взаимно уничтожаются (!), в соответствии с третьим законом Ньютона. Например, $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, поэтому $\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = \vec{0}$. Таким образом, в правой части уравнения (2) остается сумма только внешних сил, действующих на систему:

$$m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + m_3 \vec{a}_3 + \dots = \vec{F}_1^{(вн)} + \vec{F}_2^{(вн)} + \vec{F}_3^{(вн)} + \dots \quad (3)$$

При поступательном движении твердого тела ускорения всех точек тела одинаковы: $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}_3 = \dots = \vec{a}$, поэтому уравнение (3) еще больше упрощается и приобретает вид, совпадающий с уравнением второго закона Ньютона для материальной точки:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad (1)$$

здесь \vec{F} — сумма внешних сил, действующих на тело, m — масса тела.

Итак, при поступательном движении твердого тела ускорение тела пропорционально сумме

внешних сил, действующих на тело, и обратно пропорционально массе тела.

Обратите внимание, что обоснование применимости уравнения второго закона (4) к движению твердого тела потребовало также привлечения третьего закона Ньютона.

19.2. Произвольное движение твердого тела и системы тел

Рассмотрим теперь уравнение второго закона Ньютона для произвольной системы материальных точек и их произвольного движения. Оказывается, что в этом случае можно рассматривать движение некоторой геометрической точки, для которой уравнение движения полностью определяется только внешними силами. В качестве такой точки следует взять **центр масс системы**.

Пусть совокупность тел представлена набором материальных точек, массы которых обозначим $m_1, m_2, m_3\dots$, положения этих точек определим с помощью их радиус-векторов $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3\dots$ в некоторой системе координат XYZ (рис. 118). Радиус-вектор центра масс системы определяется по формуле

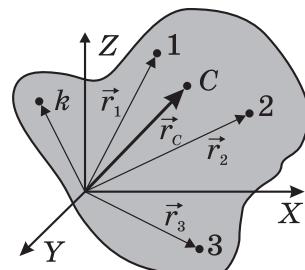


Рис. 118

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}. \quad (1)$$

Аналогично можно выразить векторы скорости и ускорения центра масс системы через соответствующие характеристики движения материальных точек:

$$\vec{V}_c = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}; \quad (2)$$

$$\vec{a}_c = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + m_3 \vec{a}_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i}. \quad (3)$$

В знаменателях этих формул стоит суммарная масса всей системы $m_1 + m_2 + m_3 + \dots = m$. В числителе формулы (3) стоит то же выражение, что и в уравнении (3) § 17. Поэтому из этих соотношений следует простое уравнение для ускорения центра масс: **для произвольной системы независимо от того, движутся ли части этой системы друг относительно друга или нет, ускорение центра масс системы определяется уравнением** $\vec{a}_c = \frac{\vec{F}}{m}$, в

котором \vec{F} — сумма внешних сил, действующих на систему, m — масса всей системы.

Мы определили особую точку системы материальных точек — центр масс. Фактически введение этого понятия оправдывается простотой уравнения, описывающего ее движение. Упрощенно можно сказать, что всю массу системы можно собрать в центре масс и при этом рассматривать движение системы как движение одной материальной точки.

Существенно, что движение центра масс полностью определяется внешними силами и не зависит от внутренних сил, действующих между отдельными телами, входящими в рассматриваемую систему. Например, центр масс осколков разорвавшегося в воздухе снаряда продолжает двигаться по параболе (если, конечно, пренебречь сопротивлением воздуха) независимо от того, какие дополнительные скорости приобрели эти осколки в момент разрыва.

Отметим еще одно существенное обстоятельство: **если в какой-либо инерциальной системе отсчета центр масс системы покойится, то никакие внутренние силы не могут изменить его положение.**

Для твердого тела, расстояния между точками которого остаются неизменными, центр масс однозначно «привязан» к самому телу.

Рассмотрим простейший пример твердого тела, состоящего из двух небольших шариков (материальных точек), массы которых равны m_1 и m_2 , соединенных жестким невесомым стержнем длиной l (рис. 119). Направим ось вдоль стержня, начало отсчета совместим с первым шариком. Из определения (1), следует, что центр масс находится на стержне (координаты y , z обоих шариков равны нулю, поэтому и соответствующие координаты центра масс также равны нулю). Координата x_C центра масс рассчитывается по формуле (с учетом $x_1 = 0$, $x_2 = l$)

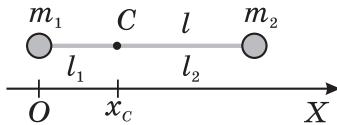


Рис. 119

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l. \quad (4)$$

Если массы шариков равны, то центр масс находится в середине стержня, если масса одного из шариков значительно превышает массу другого, то центр масс совпадает с массивным шариком. Так, при $m_1 \gg m_2$ $x_c = 0$, в противном случае при $m_1 \ll m_2$ $x_c = l$. При произвольном соотношении между массами шариков центр масс находится ближе к более тяжелому шарику. Отметим интересное соотношение, следующее из формулы (4):

$$m_1 l_1 = m_2 l_2,$$

где l_1 , l_2 — расстояния от центра масс до соответствующих материальных точек.

Для тел простой геометрической формы их центр масс может быть легко найден без громоздких вычислений по формуле (1). Так, для однородного стержня центр масс находится в его середине, для однородных кольца, диска, шара их центр масс совпадает с геометрическим центром. Центр масс однородной прямоугольной пластинки расположен в точке пересечения диагоналей, для треугольной пластинки — в точке пересечения медиан (рис. 120). (Докажите эти утверждения самостоятельно.)

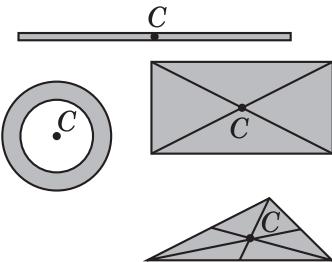


Рис. 120

19.3. Вращательное движение твердого тела. Момент силы

Конечно, положение одной, даже «особой», точки далеко не полностью описывает движение всей рассматриваемой системы тел, но все-таки лучше знать положение хотя бы одной точки, чем не знать ничего. Тем не менее рассмотрим применение законов Ньютона к описанию вращения твердого тела вокруг фиксированной оси*.

Начнем с простейшего случая: пусть материальная точка массы m прикреплена с помощью небесомого жесткого стержня длиной r к неподвижной оси OO' (рис. 121). Материальная точка может двигаться вокруг оси, оставаясь от нее на постоянном расстоянии, следовательно, ее траектория будет являться окружностью с центром на оси вращения.

Безусловно, движение точки подчиняется уравнению второго закона Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}_{\text{рез}}$. Однако непосредственное применение этого уравнения не оправдано: во-первых, точка обладает одной степенью свободы, поэтому в качестве единственной ко-

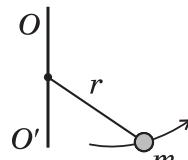


Рис. 121

* В данном случае мы ограничиваемся рассмотрением вращения вокруг фиксированной оси, потому что описание произвольного вращательного движения тела представляет собой сложную математическую проблему, далеко выходящую за рамки курса математики средней школы. Знания же других физических законов, кроме рассматриваемых нами, это описание не требует.

ординаты удобно использовать угол поворота, а не две декартовые координаты; во-вторых, на рассматриваемую систему действуют силы реакции в оси вращения, а непосредственно на материальную точку — сила натяжения стержня. Нахождение этих сил представляет собой отдельную проблему, решение которой излишне для описания вращения. Поэтому имеет смысл получить на основании законов Ньютона специальное уравнение, непосредственно описывающее вращательное движение.

Пусть в некоторый момент времени на материальную точку действует некоторая сила \vec{F} , лежащая в плоскости, перпендикулярной оси вращения (рис. 122). При кинематическом описании криволинейного движения вектор полного ускорения \vec{a} удобно разложить на две составляющие — нормальную \vec{a}_n , направленную к оси вращения, и тангенциальную \vec{a}_τ , направленную параллельно вектору скорости. Значение нормального ускорения для определения закона движения нам не нужно. Конечно, это ускорение также обусловлено действующими силами, одна из которых — неизвестная сила натяжения стержня.

Запишем уравнение второго закона в проекции на тангенциальное направление:

$$ma_\tau = F_\tau. \quad (1)$$

Заметим, что сила реакции стержня не входит в это уравнение, так как она направлена вдоль стержня

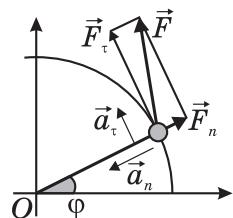


Рис. 122

и перпендикулярна выбранной проекции. Изменение угла поворота ϕ непосредственно определяется угловой скоростью $\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$, изменение которой, в свою очередь, описывается угловым ускорением $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$. Угловое ускорение связано с тангенциальной составляющей ускорения соотношением $a_\tau = r\varepsilon$. Если подставим это выражение в уравнение (1), то получим уравнение, пригодное для определения углового ускорения. Удобно ввести новую физическую величину, определяющую взаимодействие тел при их повороте. Для этого умножим обе части уравнения (1) на r :

$$mr^2\varepsilon = F_\tau r. \quad (2)$$

Рассмотрим выражение в его правой части $F_\tau r$, имеющее смысл произведения тангенциальной составляющей силы на расстояние от оси вращения до точки приложения силы. Это же произведение можно представить в несколько иной форме (рис. 123): $M = F_\tau r = Frcos\alpha = Fd$, здесь d — расстояние от оси вращения до линии действия силы, которое также называют **плечом силы**.

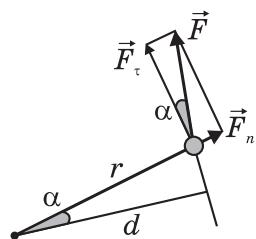


Рис. 123

Эта физическая величина — произведение модуля силы на расстояние от линии действия силы до оси вращения (**плечо силы**) $M = Fd$ — называется **моментом силы**. Действие силы может при-

водить к вращению как по часовой стрелке, так и против часовой стрелки. В соответствии с выбранным положительным направлением вращения следует определять и знак момента силы. Заметьте, что момент силы определяется той составляющей силы, которая перпендикулярна радиус-вектору точки приложения. Составляющая вектора силы, направленная вдоль отрезка, соединяющего точку приложения и ось вращения, не приводит к раскручиванию тела. Эта составляющая при закрепленной оси компенсируется силой реакции в оси, поэтому не влияет на вращение тела.

Запишем еще одно полезное выражение для момента силы. Пусть сила \vec{F} приложена к точке A , декартовые координаты которой равны x, y (рис. 124). Разложим силу \vec{F} на две составляющие \vec{F}_x, \vec{F}_y , параллельные соответствующим осям координат. Момент силы \vec{F} относительно оси, проходящей через начало координат, очевидно равен сумме моментов составляющих \vec{F}_x, \vec{F}_y , то есть $M = xF_y - yF_x$.

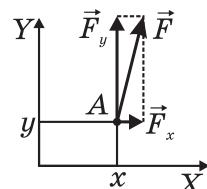


Рис. 124

Аналогично, тому, как нами было введено понятие вектора угловой скорости, можно определить также и понятие вектора момента силы. Модуль этого вектора соответствует данному выше определению, направлен же он перпендикулярно плоскости, содержащей вектор силы и отрезок, соединяющий точку приложения силы с осью вращения (рис. 125). Вектор момента силы также может

быть определен как векторное произведение радиус-вектора точки приложения силы на вектор силы

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Заметим, что при смещении точки приложения силы вдоль линии ее действия момент силы не изменяется.

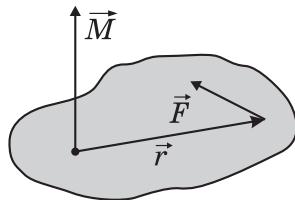


Рис. 125

Обозначим произведение массы материальной точки на квадрат расстояния до оси вращения $mr^2 = I$ (эта величина называется **моментом инерции материальной точки относительно оси**). С использованием этих обозначений уравнение (2) приобретает вид, формально совпадающий с уравнением второго закона Ньютона для поступательного движения:

$$I\varepsilon = M. \quad (3)$$

Это уравнение называется **основным уравнением динамики вращательного движения**. Итак, момент силы во вращательном движении играет такую же роль, как и сила в поступательном движении, — именно он определяет изменение угловой скорости. Оказывается (и это подтверждает наш повседневный опыт), влияние силы на скорость вращения определяет не только величина силы, но и точка его приложения. Момент инерции определяет инерционные свойства тела по отношению к вращению (говоря простым языком — показывает, легко ли раскрутить тело): чем дальше от оси вращения находится материальная точка, тем труднее привести ее во вращение.

Уравнение (3) допускает обобщение на случай вращения произвольного тела. При вращении тела вокруг фиксированной оси угловые ускорения всех точек тела одинаковы. Поэтому аналогично тому, как мы проделали при выводе уравнения Ньютона для поступательного движения тела, можно записать уравнения (3) для всех точек вращающегося тела и затем их просуммировать. В результате мы получим уравнение, внешне совпадающее с (3), в котором I — момент инерции всего тела, равный сумме моментов составляющих его материальных точек, M — сумма моментов внешних сил, действующих на тело.

Покажем, каким образом вычисляется момент инерции тела. Важно подчеркнуть, что момент инерции тела зависит не только от массы, формы и размеров тела, но и от положения и ориентации оси вращения. Формально процедура расчета сводится к разбиению тела на малые части, которые можно считать материальными точками (рис. 126), и суммированию моментов инерций этих материальных точек, которые равны произведению массы на квадрат расстояния до оси вращения:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots$$

Для тел простой формы такие суммы давно подсчитаны, поэтому часто достаточно вспомнить (или найти в справочнике) соответствующую формулу для нужного момента инерции.

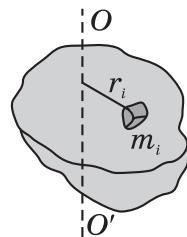


Рис. 126

В качестве примера: момент инерции кругового однородного цилиндра, массы m и радиуса R для оси вращения, совпадающей с осью цилиндра равен: $I = \frac{1}{2} mR^2$ (рис. 127).

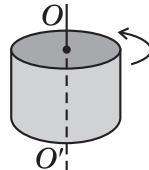


Рис. 127

§ 20. Статика — законы равновесия тел

Рассмотрим, при каких условиях тело может находиться в состоянии покоя, естественно, в какой-либо инерциальной системе отсчета. На основании законов динамики И. Ньютона можно сформулировать два обязательных условия равновесия (рис. 128).

1. Векторная сумма внешних сил, действующих на тело, должна быть равна нулю. Нами было показано, что ускорение центра масс тела полностью определяется внешними силами, действующими на рассматриваемое тело. Если эта сумма равна нулю, то ускорение центра масс тела равно нулю. Поэтому можно выбрать такую систему отсчета, в которой центр масс покойится. Заметим, что при вычислении суммы векторов нас не интересуют точки приложения различных сил, нам важны только величины и направления этих сил. Поэтому говорят, что при рассмотрении

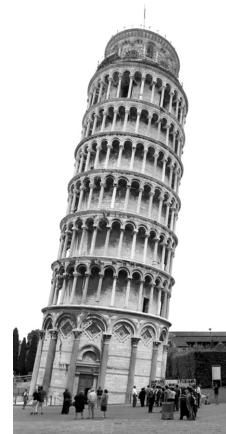


Рис. 128

поступательного движения все векторы сил можно переносить параллельно самому себе.

Так как центр масс твердого тела жестко связан с самим телом, то при покоящемся центре масс тело может только вращаться вокруг оси, проходящей через центр масс. Для того чтобы тело не начало вращаться, необходимо выполнение второго условия равновесия.

2. Сумма моментов внешних сил, действующих на тело, должна быть равна нулю. Согласно определению, момент силы зависит не только от величины и направления этой силы, но и от оси вращения. Поэтому, говоря о покоящемся теле, встает вопрос, относительно какой оси должны вычисляться моменты действующих сил. Ответ на данный вопрос следующий: для покоящегося тела суммарный момент равен нулю для любой мыслимой оси вращения! К счастью, при рассмотрении условий равновесия нет необходимости рассматривать все возможные оси вращения (что в принципе невозможно). Можно показать, что если векторная сумма сил равна нулю и сумма моментов сил относительно какой-либо оси равна нулю, то и сумма моментов сил относительно любой другой параллельной оси также равна нулю.

Проиллюстрируем это положение простым примером. Пусть силы, действующие на тело, лежат в одной плоскости и параллельны друг другу (рис. 129). Введем систему координат XOY , одна из осей которой X перпендикулярна направлению

действия сил и проходит через ось вращения O . Обозначим координаты точек приложения сил x_1, x_2, x_3, \dots , тогда суммарный момент сил относительно этой оси равен:

$$M = x_1 F_1 + x_2 F_2 + x_3 F_3 + \dots$$

Вычислим момент сил относительно оси O' , отстоящей от оси O на расстоянии a :

$$\begin{aligned} M' &= (x_1 + a)F_1 + (x_2 + a)F_2 + (x_3 + a)F_3 + \dots = \\ &= x_1 F_1 + x_2 F_2 + x_3 F_3 + \dots + a(F_1 + F_2 + F_3 + \dots) = \\ &= M + a(F_1 + F_2 + F_3 + \dots). \end{aligned}$$

Как следует из полученного соотношения, при $(F_1 + F_2 + F_3 + \dots) = 0$ $M' = M$. То есть, **если сумма сил равна нулю, то суммарные моменты сил относительно всех параллельных осей равны.**

Практически важным является случай, когда на тело действуют две силы, равные по величине и противоположные по направлению, но приложенные к разным точкам (в этом случае говорят о **паре сил**). Момент пары сил не зависит от оси вращения и равен $M = aF$ (где F — модуль каждой силы, a — расстояние между линиями действия сил) (рис. 130).

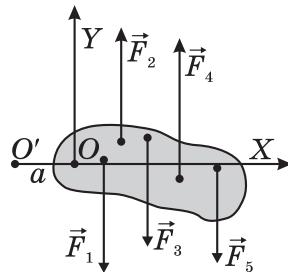


Рис. 129

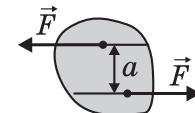


Рис. 130

ЧАСТЬ III. ВИДЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Для описания движения тел рассмотренных законов Ньютона явно недостаточно. Чтобы получить систему уравнений, позволяющих находить законы движения, система трех законов Ньютона дополняется значительной группой законов, определяющих выражения для сил различных типов взаимодействий. Сам И. Ньютон опубликовал свой основополагающий труд по основам динамики только после того, как им был установлен и обоснован закон гравитационного взаимодействия тел. Впоследствии экспериментально были установлены законы для других видов сил – упругости, трения, электрических, магнитных и так далее.

Развитие физики постоянно приводит к построению все более общих теорий, и в настоящее время все виды взаимодействий сводятся к четырем фундаментальным*, к числу которых относятся гравитационные, электромагнитные, слабые и сильные. Последние два присущи взаимодействиям между элементарными частицами и в классической физике не рассматриваются, так их описание возможно только в рамках современных квантово-релятивистских представлений.

* В течение нескольких десятилетий предпринимаются попытки объединить некоторые виды взаимодействий.

§ 21. Гравитационные взаимодействия

21.1. Закон всемирного тяготения Ньютона

Гравитационные взаимодействия присущи всем материальным телам (рис. 131). Закон, описывающий эти силы, открытый И. Ньютоном и опубликованный в 1687 году, получил название закона всемирного тяготения: две материальные точки притягиваются с силами, пропорциональными произведению масс этих точек, обратно пропорциональными квадрату расстояния между точками и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки:



Рис. 131

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (1)$$

Так как сила является векторной величиной, то в формуле, определяющей силу притяжения, следует придать векторную форму. Для этого введем вектор \vec{r}_{12} , соединяющий точки 1 и 2 (рис. 132). Тогда сила притяжения, действующая на второе тело, может быть записана в виде

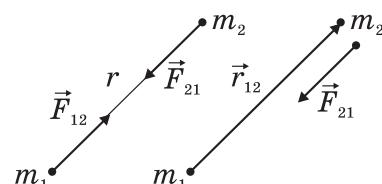


Рис. 132

$$\vec{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_{12}|^3} \vec{r}_{12}. \quad (2)$$

В формулах (1), (2) коэффициент пропорциональности G называется **гравитационной постоянной**. Значение этой величины не может быть найдено из других физических законов и определено экспериментально. Численное значение гравитационной постоянной зависит от выбора системы единиц, так, в СИ оно равно:

$$G = 6,6720 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}}.$$

Впервые гравитационную постоянную экспериментально измерил английский физик Генри Кавендиш. В 1798 году он сконструировал крутильные весы и измерил с их помощью силу притяжения двух сфер, подтвердив закон всемирного тяготения; определил гравитационную постоянную, массу и среднюю плотность Земли.

Вопрос о природе гравитационного взаимодействия является чрезвычайно сложным. Сам И. Ньютон на этот вопрос давал лаконичный ответ: «Гипотез не измышляю», тем самым отказываясь даже рассуждать на эту тему. Достаточно того, что закон всемирного тяготения с высокой степенью точности количественно описывает гравитационное взаимодействие. Громадные успехи ньютоновской механики почти на два столетия предопределили подобный подход ко всей физической науке, не только механике: достаточно открыть, найти законы, правильно описывающие физические яв-

ления, и научиться применять их к количественному описанию этих явлений.

Так, в изучении гравитации считалось, что непонятным образом одно тело может оказывать влияние на другое, причем это влияние передается мгновенно, то есть изменение положения одного из тел мгновенно изменяет силы, действующие на другие тела, независимо от того, на каком расстоянии эти тела расположены. Этот общий подход к характеру физических взаимодействий получил название **теории дальнодействия**. Подобный взгляд на взаимодействия тел был распространен на электрические и магнитные явления, изучение которых активно проводилось в течение XVIII—XIX веков. Лишь в 30-х годах XIX века английским физиком М. Фарадеем для электромагнитных взаимодействий были сформулированы основные положения альтернативной **теории близкодействия**: для передачи взаимодействия обязательно необходим «посредник», некая среда, передающая эти взаимодействия; сами взаимодействия не могут передаваться мгновенно, требуется определенное время для того, чтобы изменение в положении одного из тел «почувствовали» другие взаимодействующие тела. В начале XX столетия немецкий физик А. Эйнштейн построил новую теорию гравитации — общую теорию относительности. В рамках этой теории гравитационные взаимодействия объясняются следующим образом: каждое тело, обладающее массой, изменяет свой-

ства пространства времени вокруг себя (создает **гравитационное поле**), другие же тела движутся в этом измененном пространстве времени (**в гравитационном поле**), что приводит к появлению наблюдаемых сил, ускорению и т. д. С этой точки зрения выражение «находится в гравитационном поле» эквивалентно выражению «действуют гравитационные силы».

К этим вопросам мы обратимся позднее при изучении электромагнитного поля.

Самое поразительное в явлении тяготения заключается в том, что гравитационные силы пропорциональны массам тел. Действительно, ранее мы говорили о массе как о мере инертности тела. Оказалось, что масса также определяет принципиально иное свойство материальных тел — является мерой способности участвовать в гравитационных взаимодействиях. Поэтому можно говорить о двух массах — инерционной и гравитационной. Закон всемирного тяготения утверждает, что эти массы пропорциональны друг другу. Подтверждением этого утверждения является давно известный факт: все тела падают на землю с одинаковым ускорением. Экспериментально с высокой точностью пропорциональность гравитационной и инерционной масс была подтверждена в работах венгерского физика Лоранда Этвеша. Впоследствии пропорциональность инерционной и гравитационной масс легла в основу новой теории гравитации — общей теории относительности А. Эйнштейна.

В заключение отметим, что закон всемирного тяготения может быть положен в основу определения единицы массы (конечно, гравитационной). Например: два точечных тела единичной гравитационной массы, находящиеся на расстоянии в один метр, притягиваются с силой в один Н.

Задание для самостоятельной работы: определите массы двух точечных тел, находящихся на расстоянии 1,0 м друг от друга и взаимодействующих с силой 1,0 Н.

Для гравитационных сил справедлив **принцип суперпозиции**: сила, действующая на точечное тело со стороны нескольких других тел, равна сумме сил, действующих со стороны каждого тела. Это утверждение также является обобщением экспериментальных данных и фундаментальным свойством гравитационных взаимодействий.

Посмотрим на принцип суперпозиции с математической точки зрения: по закону всемирного тяготения сила гравитационного взаимодействия пропорциональна массе этих тела. Если бы зависимость от масс была нелинейна, то и принцип суперпозиции не выполнялся бы. Действительно, пусть тело массой m_0 взаимодействует с двумя точечными телами массами m_1 и m_2 . Поместим мысленно тела m_1 и m_2 в одну точку (тогда их можно рассматривать как одно тело). В этом случае сила, действующее на тело m_0 , равна:

$$F_0 = G \frac{m_0(m_1 + m_2)}{r^2} = G \frac{m_0 m_1}{r^2} + G \frac{m_0 m_2}{r^2}$$

и может быть представлена в виде суммы сил, действующих со стороны двух тел — m_1 и m_2 . В случае нелинейной зависимости между силой и массой принцип суперпозиции был бы несправедлив.

Закон всемирного тяготения для точечных тел и принцип суперпозиции позволяют, в принципе, вычислять силы взаимодействия между телами конечных размеров (рис. 133). Для этого необходимо мысленно разбить каждое из тел на малые участки, каждый из которых можно рассматривать как материальную точку. Затем вычислить двойную сумму сил взаимодействия между всеми парами точек. В общем случае вычисление такой суммы является сложной математической задачей.

Подчеркнем, что сила взаимодействия между телами конечных размеров вычисляется только методом разбиения тел и последующего суммирования. Ошибочно утверждение о том, что сила взаимодействия между телами может быть вычислена как сила взаимодействия, равная силе взаимодействия точечных тел, расположенных в центрах масс. Для обоснования этого утверждения рассмотрим простой пример.

Пусть одно из взаимодействующих тел можно считать материальной точкой массы m_0 , а второе

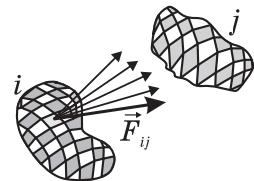


Рис. 133

тело представимо в виде двух материальных точек равных масс m , расположенных на фиксированном расстоянии a друг от друга (рис. 134). Все материальные точки расположены на одной прямой, расстояние от первого тела до центра второго обозначим r . Сила притяжения, действующая на тело m_0 , равна:

$$F_0 = G \frac{mm_0}{\left(r + \frac{a}{2}\right)^2} + G \frac{mm_0}{\left(r - \frac{a}{2}\right)^2}. \quad (3)$$

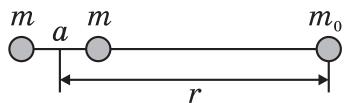


Рис. 134

Если же соединить материальные точки, составляющие второе тело, в одну массой $2m$, расположенную в центре тела, то сила взаимодействия будет равна:

$$F'_0 = G \frac{2mm_0}{r^2}, \quad (4)$$

что отличается от выражения (3). Только при $r \gg a$ выражение (3) переходит в формулу (2). Заметьте, что в этом случае второе тело следует рассматривать как материальную точку.

Задание для самостоятельной работы: при каком отношении a/r погрешность формулы (4) (по сравнению с точным выражением (3)) не превышает 1%?

21.2. Сила тяжести (рис. 135)



Рис. 135

вышеизложенной методикой расчета сил, необходимо разбить сферу на малые участки и просуммировать силы, действующие на материальную точку со стороны всех участков сферы. Такое суммирование впервые было проведено И. Ньютона. Не вдаваясь в математические тонкости проведенного расчета, приведем окончательный результат: **результатирующая сила направлена к центру шара (что вполне очевидно), а величина этой силы определяется формулой** $F = G \frac{Mm}{r^2}$. Иными словами, сила взаимодействия оказалась такой же, как сила взаимодействия двух точечных тел, одно из которых помещено в центр сферы и его масса равна массе сферы. Существенным в этом расчете оказалось то обстоятельство, что сила гравитационного взаимодействия обратно пропорциональна квадрату расстояния между то-

Рассмотрим гравитационное взаимодействие между однородной сферой радиуса R и массы M и материальной точкой массы m , находящейся на расстоянии r от центра сферы (рис. 136). В соответствии с

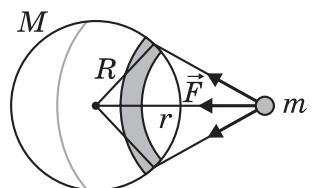


Рис. 136

чечными телами, при любой другой зависимости силы от расстояния приведенный результат расчета оказался бы неверным.

Полученный вывод очевидным образом обобщается на взаимодействие точечного заряда и однородного шара. Для доказательства достаточно разбить шар на тонкие сферические слои.

Аналогично можно показать, что сила гравитационного взаимодействия между двумя сферически симметричными телами равна силе взаимодействия между материальными точками таких же масс, расположенных в центрах тел. То есть при расчете гравитационного взаимодействия сферически симметричные тела можно считать материальными точками, расположенными в центрах этих тел, независимо от размеров самих тел и расстояния между ними (рис. 137).

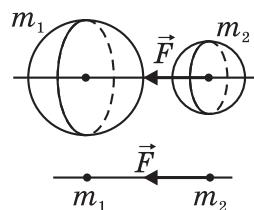


Рис. 137

Применим полученные результат к силе, действующей на все тела, находящиеся у поверхности Земли. Пусть тело массой m находится на высоте h над поверхностью Земли. С хорошей точностью форму Земли можно считать шарообразной, поэтому сила, действующая на тело со стороны Земли, направлена к ее центру, а модуль этой силы выражается формулой

$$F = G \frac{Mm}{(R+h)^2}, \quad (1)$$

где M — масса Земли, R — ее радиус. Известно, что средний радиус Земли равен: $R \approx 6350$ км. Если тело находится на небольших высотах по сравнению с радиусом Земли, то высотой подъема тела можно пренебречь и в этом случае сила притяжения оказывается равной:

$$F = G \frac{Mm}{R^2} = mg, \quad (2)$$

где обозначено $g = G \frac{M}{R^2}$ — ускорение свободного падения.

Гравитационная сила, действующая на все тела у поверхности Земли, называется **силой тяжести**. Векторы ускорения свободного падения в различных точках не параллельны, так как направлены к центру Земли. Однако если рассматривать точки, находящиеся на небольшой, по сравнению с радиусом Земли, высоте, то можно пренебречь различием в направлениях ускорения свободного падения и считать, что во всех точках рассматриваемой области вблизи поверхности Земли вектор ускорения постоянен как по величине, так и по направлению (рис. 138). В рамках такого приближения мы будем называть силу тяжести **однородной**.

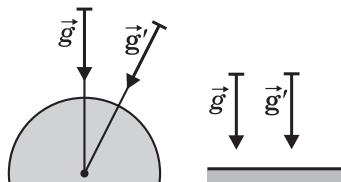


Рис. 138

Задания для самостоятельной работы

1. Оцените, на какой высоте над поверхностью Земли ускорение свободного падения уменьшается

на 1% по сравнению с ускорением на поверхности Земли.

2. На каком расстоянии у поверхности земли угол между векторами ускорений свободного падения равен 1° ?

Строго говоря, модуль ускорения свободного падения различен в различных точках земной поверхности. Эти различия обусловлены, во-первых, отличием формы Земли от шарообразной, во-вторых, непостоянством плотности Земли. Заметим, что при определении ускорения свободного падения необходимо принимать во внимание вращение Земли, которое приводит к уменьшению экспериментально наблюдаемого значения ускорения по сравнению с формулой $g = G \frac{M}{R^2}$. Кроме

того, вращение Земли также приводит к отклонению направления ускорения свободного падения от направления на центр Земли. В некоторых случаях эти поправки, связанные с вращением Земли, включают в силу тяжести. Мы же, однако, предполагаем называть силой тяжести только ту силу, которая вызвана гравитационным взаимодействием, а экспериментально наблюдаемые малые поправки к законам движения, вызванные вращением Земли, рассматривать отдельно, тем более что они малы и очень часто ими можно пренебречь.

Сила тяжести, действующая на тело, является суммой сил, действующей на его отдельные части. Если считать силу тяжести однородной, то сум-

марная сила тяжести, действующая на тело, равна произведению массы всего тела на ускорение свободного падения. Более сложным является вопрос точки приложения силы тяжести. По своей природе сила тяжести является распределенной, действующей на все части тела. Если нас интересует только величина суммарной силы тяжести, то ее точка приложения нас не интересует. Однако во многих случаях (например, при исследовании условий равновесия) нас интересует не только сама сила, но и ее момент. Можно выбрать такую точку приложения суммарной силы тяжести, чтобы ее момент был равен сумме моментов сил тяжести, действующей на отдельные части тела. Такая точка называется **центром тяжести** тела.

Очередной раз мысленно разобьем тело массой m на малые части, массы которых обозначим Δm_i ($i = 1, 2, 3 \dots$) (рис. 139). Выберем такую точку C приложения суммарной силы тяжести mg , чтобы момент этой силы относительно произвольной оси O был равен сумме моментов сил тяжести, действующих на отдельные части Δm_i ($i = 1, 2, 3 \dots$), что математически выражается виде тождества

$$mgx_C = \Delta m_1gx_1 + \Delta m_2gx_2 + \Delta m_3gx_3 + \dots,$$

где $x_1, x_2, x_3 \dots$ — горизонтальные координаты частей тела, x_C — горизонтальная координата иско-

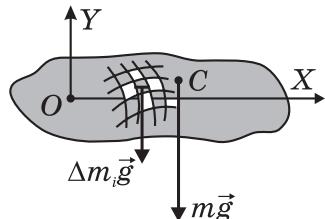


Рис. 139

мой точки приложения суммарной силы тяжести. Из данного выражения определяем координату центра тяжести:

$$x_c = \frac{\Delta m_1 x_1 + \Delta m_2 x_2 + \Delta m_3 x_3 + \dots}{m} = \frac{\sum_i \Delta m_i x_i}{m}.$$

Таким образом, если вектор ускорения свободного падения принимается постоянным, то центр тяжести совпадает с центром масс тела. Отметим, что в общем случае, когда вектор ускорения по величине или направлению изменяется от точки к точке, положение центра тяжести может отличаться от положения центра масс.

§ 22. Силы упругости

22.1. Закон Гука

Само существование жидких и твердых тел свидетельствует о наличии сил взаимодействия между молекулами (рис. 140). Эти силы определяются электромагнитными взаимодействиями между движущимися заряженными частицами, из которых состоят атомы и молекулы (электронами и ядрами). Теоретический расчет этих сил чрезвычайно сложен, и в общем виде эта задача не решена до на-

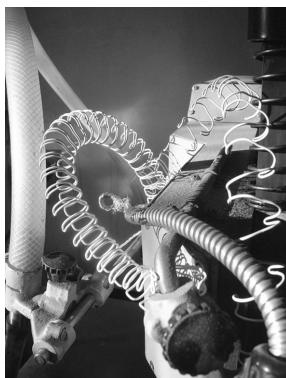


Рис. 140

стоящего времени. Однако можно утверждать, что эти силы могут быть как силами притяжения (без сил притяжения все молекулы разлетелись бы из-за их теплового движения), так и силами отталкивания (без которых все тела сжались бы в одну точку). Равновесному положению молекул в жидкости и твердом теле соответствует равенство сил притяжения и отталкивания. При деформации тел (как жидких, так и твердых) равновесные расстояния между молекулами изменяются, поэтому возникают силы, стремящиеся вернуть их в исходное состояние. Эти силы проявляются как **силы упругости**. Отметим, что силы упругости не относятся к фундаментальным, законы, позволяющие вычислять их значения, как правило, являются экспериментальными и выполняются приближенно.

В общем случае зависимость сил упругости от деформации может быть очень сложной, однако при малых деформациях справедлив закон Р. Гука: **сила упругости пропорциональна деформации тела и направлена в сторону, противоположную деформации**. В простейшем случае деформации растяжения и сжатия (закон Р. Гука) выражается формулой

$$F_{upr.} = -kx, \quad (1)$$

где x — изменение длины тела, k — коэффициент пропорциональности (также называемый коэффициентом упругости), зависящий от материала тела, его размеров и формы. Знак минус явно указывает, что сила упругости направлена в сторону,

противоположную деформации. Особенно хорошо выполняется этот закон для длинных пружин.

Всякий физический закон помимо чисто формальной связи между физическими величинами выражает также и причинно-следственные связи. По этому поводу в связи с силами упругости необходимо высказать следующее замечание. Для того чтобы деформировать тело, к нему необходимо приложить внешнюю силу, тогда возникающие деформации приведут к появлению сил упругости (рис. 141). Итак, причиной деформаций являются внешние воздействия, а сами деформации являются причиной сил упругости. Если деформированное тело находится в состоянии равновесия, то возникающая сила упругости

\vec{F}_{upr} оказывается равной по величине и противоположной по направлению внешней силе \vec{F} . Таким образом, соотношение $\vec{F}_{upr} = -\vec{F}$ справедливо только в состоянии равновесия и является следствием условий равновесия, а не третьего закона Ньютона, как это иногда легкомысленно утверждается. Соотношение между силой упругости и деформацией справедливо независимо от того, находится ли тело в состоянии равновесия.

Если к твердому телу приложена внешняя сила, направленная перпендикулярно его поверхности (нормально), то возникающая деформация будет сжатием или растяжением. Если к твердому

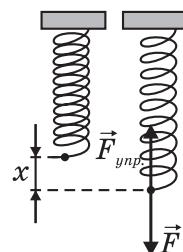


Рис. 141

телу приложить силу, направленную параллельно его поверхности (тангенциальную), то возникающая деформация является сдвигом. В обоих случаях возникающая сила упругости направлена в сторону, противоположную внешней силе (рис. 142).

Рассмотренные в данном разделе законы являются приближенными, так при больших деформациях нарушается пропорциональность между силами упругости и деформациями. Кроме того, во многих случаях тело может не восстанавливать свою форму после снятия нагрузки — такие деформации называются пластическими (рис. 143). Описание сил упругости в таких ситуациях является весьма сложным (мы познакомимся с этим после подробного изучения свойств твердых тел).

Заметим, что более сложные виды деформаций могут быть сведены к простейшим — «растяжению—сжатию» и сдвигу.

Силы упругости возникают как в твердых телах, так и в жидкостях и газах. Для жидких тел имеет смысл говорить только о нормальной силе, так как тангенциальные силы приведут к перетеканию жидкости. Вспомните: «твердые тела со-

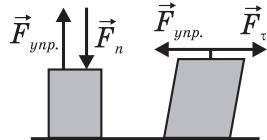


Рис. 142



Рис. 143

храняют свою форму и объем, а жидкости ее не сохраняют». Поэтому говорят, что в жидкостях отсутствуют тангенциальные силы упругости. Такие свойства жидкости обусловлены ее молекулярным строением: силы взаимодействия между молекулами проявляются только при изменении расстояния между молекулами, сдвиг одной молекулы относительно другой не приводит к появлению дополнительного взаимодействия. Отметим, что силы упругости жидкости могут быть направлены как внутрь, так и наружу от жидкости, то есть жидкость может быть как сжата, так и растянута. Так как жидкости при отсутствии внешних воздействий сохраняют свой объем, то существует равновесное расстояние между молекулами, при котором сила их взаимодействия равна нулю. При уменьшении равновесного объема расстояния между молекулами меньше равновесных, поэтому между молекулами начинают возникать силы отталкивания, в противном случае увеличения объема расстояния между молекулами превышают равновесные, поэтому начинают проявляться силы притяжения.

Пусть жидкость находится в сосуде под поршнем. Если к поршню приложить силу, направленную наружу от жидкости, то благодаря силам притяжения между молекулами жидкости, а также жидкости и поршня, жидкость окажется растянутой, вследствие чего появятся силы упругости, направленные внутрь жидкости (рис. 144). Боль-

шинство жидкостей деформируется чрезвычайно мало, то есть для того, чтобы получить заметную деформацию, необходимо приложить значительные внешние силы, и наоборот — малые деформации жидкости приводят к возникновению больших сил упругости. Во многих случаях связь между деформациями и силами упругости жидкостей может считаться линейной, соответствующей закону Гука.

Газы, в отличие от твердых тел и жидкостей, не обладают собственным объемом, полностью занимая весь сосуд, в котором они находятся. Поэтому говорить о деформации газа не имеет смысла. Тем не менее газы оказывают давление на стенки сосуда, поэтому можно говорить об упругости газов. Формально можно считать, что собственный равновесный объем газа равен бесконечности, поэтому при любом конечном объеме газ является сжатым. Зависимость давления газа от его объема носит более сложный характер, чем закон Гука, и будет изучаться нами позднее.

Историческое дополнение

Английский естествоиспытатель Роберт Гук (рис. 145) родился во Фрешуотере, графство Айл-офф-Уайт (остров Уайт), в семье священника местной церкви. В 1653 году поступил в Крайст-Чёрч-колледж Оксфордского университета, где впоследствии стал ассистентом Р. Бойля. В 1662 году был назначен ку-

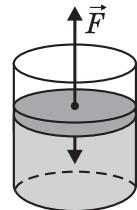


Рис. 144



Рис. 145

ратором экспериментов при только что основанном Королевском обществе; член Лондонского королевского общества с 1663 года. С 1665 года — профессор Лондонского университета, в 1677—1683 гг. — секретарь Лондонского Королевского общества.

Разносторонний учёный и изобретатель, Гук затронул в своих работах многие разделы естествознания. В 1659 году построил воздушный насос, совместно с Х. Гюйгенсом установил (около 1660 г.) постоянные точки термометра — таяния льда и кипения воды. Усовершенствовал барометр, зеркальный телескоп, применил зрительную трубу для измерения углов, сконструировал прибор для измерения силы ветра, машину для деления круга и другие приборы.

Большое значение имело открытие Гуком в 1660 году закона пропорциональности между силой, приложенной к упругому телу, и его деформацией (закон Гука).

Открытие пропорциональности между упругими расстояниями, сжатиями и изгибами и производящими их напряжениями, как утверждает он сам в своём сочинении «*De potentia restitutiva*», опубликованном в 1678 году, сделано им за 18 лет до этого времени, а в 1676 году было помещено в другой его книге под видом анаграммы «*ceiiinosssttuv*», означающей «*Ut tensio sic vis*» — «каково напряжение, таково и растяжение». По объяснению автора, высказанный закон пропорциональности применяется не только к металлам, но и к дереву, камням, рогу, костям, стеклу, шёлку, волосу и прочему. В настоящее время этот закон Гука в обобщённом виде служит основанием математической теории упругости.

Гук высказал идею, что все небесные тела тяготеют друг к другу, и дал общую картину движения планет. Он предвосхитил закон всемирного тяготения И. Ньютона; в 1679 году высказал мнение, что если сила притяжения обратно пропорциональна квадрату расстояния, то планета должна двигаться по эллипсу. Идею об универсальной силе тяготения Гук имел с середины 1660 годов, затем, ещё в недостаточно

определенной форме, он выразил её в 1674 году в трактате «Попытка доказательства движения Земли», но уже в письме 6 января 1680 года Ньютону Гук впервые ясно формулирует закон всемирного тяготения и предлагает Ньютону, как математически более компетентному исследователю, строго математически обосновать его, показав связь с первым законом Кеплера для некруговых орбит (вполне вероятно, уже имея приближённое решение). С этого письма, насколько сейчас известно, начинается документальная история закона всемирного тяготения. Ньютону также принадлежат некоторые работы по тяготению, предшествовавшие результатам Гука, однако большинство самых важных результатов, о которых позднее вспоминал Ньютон, во всяком случае, не было им никому сообщено.

С помощью усовершенствованного им микроскопа Гук наблюдал структуру растений и дал чёткий рисунок, впервые показавший клеточное строение пробки (термин «клетка» был введён Гуком). В своей работе «Микрография» (*Micrographia*, 1665) он описал клетки бузины, укропа, моркови, привел изображения весьма мелких объектов, таких как глаз мухи, комара и его личинки, детально описал клеточное строение пробки, крыла пчелы, плесени, мха. В этой же работе Гук изложил свою теорию цветов, объяснил окраску тонких слоёв отражением света от их верхней и нижней границ. Гук придерживался волновой теории света и оспаривал корпускулярную; теплоту считал результатом механического движения частиц вещества.

Гук высказывал мысли об изменении земной поверхности, которое, по его мнению, повлекло изменение фауны. Гук считал, что окаменелости — это остатки прежде живших существ, по которым можно воспроизвести историю Земли.

Гук был известен также как архитектор. Он был главным помощником Кристофера Рена при восстановлении Лондона после великого пожара 1666 года. В сотрудничестве с Реном и самостоятельно построил в качестве архитектора

множество зданий (например, Гринвичскую обсерваторию, церковь Вилленского прихода в Милтон Кинсе). В частности, сотрудничал с Реном в строительстве лондонского Собора св. Павла, купол которого построен с использованием метода, придуманного Гуком. Внёс серьёзный вклад в градостроительство, предложив новую схему планировки улиц при восстановлении Лондона.

22.2. Силы реакции

При соприкосновении тела могут деформироваться. Часто эти деформации могут быть чрезвычайно малыми, но тем не менее они приводят к возникновению сил упругости, которые в этом случае называются **силами реакции**. Как и все силы упругости, силы реакции направлены в сторону, противоположную возникшим деформациям. Если два тела могут скользить одно по другому без трения*, то такие тела называют гладкими. Для гладких поверхностей сила их взаимодействия направлена перпендикулярно поверхности их соприкосновения и называется силой нормальной реакции. Непосредственное вычисление сил реакции как проявление сил упругости затруднительно: для этого необходимо рассчитать деформации каждого тела, приводящие к возникновению равновесных сил упругости. В связи с этим при решении различных задач силы реакции, как правило, находят из условий равновесия или законов движения тел.

* Конечно, такая ситуация является идеализацией, точнее, надо говорить о возможности пренебрежения силами трения.

Рассмотрим простейшую ситуацию: твердый брусок массы m расположен на твердой горизонтальной поверхности (рис. 146). Под действием силы тяжести $m\vec{g}$ брусок крайне незначительно начнет опускаться вниз, что приведет к небольшим деформациям как самого бруска, так и поверхности. В результате появятся силы упругости бруска и поверхности. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока сила упругости, действующая со стороны поверхности на брусок (то есть сила нормальной реакции) \vec{N} , не уравновесит силу тяжести. Таким образом, в положении равновесия сила нормальной реакции оказывается равной по величине и противоположно направленной силе тяжести: $\vec{N} = -m\vec{g}$. Опять подчеркнем, что этот вывод сделан на основании второго закона Ньютона. На основании третьего закона Ньютона можно утверждать: первое — сила тяжести равна силе, с которой брусок притягивает Землю; второе — сила упругости (реакции) \vec{N} , действующая на брусок со стороны поверхности, равна по величине и противоположна силе упругости \vec{N}' , с которой брусок действует на поверхность: $\vec{N} = -\vec{N}'$. Встречающееся в некоторых неудачных учебных пособиях утверждение о том, что на поверхность действует сила тяжести бруска $m\vec{g}$, является бессмысленным.

Аналогичные рассуждения можно провести для сил, действующих на подвешенное тело. В

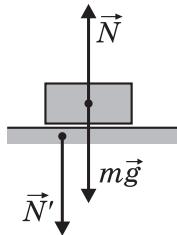


Рис. 146

в этом случае сила тяжести $m\vec{g}$, действующая на тело, уравновешивается силой упругости (называемой также силой натяжения) \vec{T} , возникающей в подвесе при его деформации (рис. 147).

Во многих случаях деформации опоры или подвеса являются настолько малыми, что ими можно пренебречь, однако следует помнить, что именно эти деформации являются причиной возникновения сил реакции. Иными словами, мы встречаемся с ситуацией «пренебречь можно – объяснить нельзя».

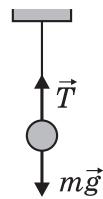


Рис. 147

Сделаем несколько замечаний, связанных с понятием **веса** тела. Наиболее популярное определение этой физической величины следующее: вес тела — это сила, с которой тело действует на горизонтальную опору или вертикальный подвес вследствие притяжения к Земле. При таком определении сила **веса** ничем не отличается от силы реакции опоры и подвеса, поэтому введение дополнительного этого понятия является излишним. Понятие веса тела может быть оправдано с физиологической точки зрения. Дело в том, что человек и другие живые существа ощущают собственный вес как силы воздействия одних внутренних органов на другие. Именно с этими ощущениями связаны понятия **перегрузки** и **невесомости**. В дальнейшем мы не будем пользоваться понятием веса тела.

§ 23. Силы сухого трения

Еще одним проявлением межмолекулярных взаимодействий являются **силы трения скольже-**



Рис. 148

ния — силы, возникающие при относительном движении двух тел и направленные вдоль границы их соприкосновения (рис. 148).

Одна из причин появления трения очевидна: поверхности взаимодействую-

щих тел не являются идеально гладкими, микроскопические выступы и впадины зацепляются друг за друга, в них возникают силы упругости, направленные вдоль поверхности соприкосновения (рис. 149).

Однако только эта причина не объясняет всех свойств и характеристик трения. В частности, для большинства веществ улучшение полировки поверхностей приводит не к уменьшению, а увеличению трения. Для шероховатых поверхностей площадь реального контакта, где действуют межмолекулярные силы прилипания, невелика (эти участки располагаются в районах выступов), при полировке поверхностей площади этих областей увеличиваются, что и приводит к увеличению сил трения. Рассматриваемое здесь явление называют также **сухим трением**.

Следует отметить, что законченная теория сил сухого трения до настоящего времени не построена. Поэтому законы, описывающие рассматриваемый

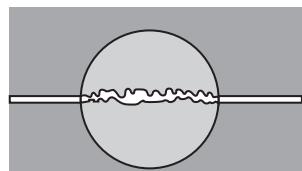


Рис. 149

вид взаимодействия, носят экспериментальный (эмпирический) характер. Наиболее простой вид закона, описывающего силу трения скольжения, установлен экспериментально и носит название закона Кулона-Амонтона. Это закон утверждает, что **сила трения скольжения пропорциональна силе нормальной реакции* взаимодействующих тел и направлена в сторону, противоположную скорости относительного движения тел** (рис. 150):

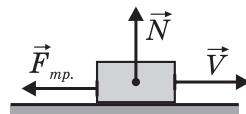


Рис. 150

$$F_{mp} = \mu N, \quad (1)$$

безразмерный коэффициент пропорциональности (называемый коэффициент трения) μ зависит от материала соприкасающихся поверхностей и степени их обработки. Как правило, этот коэффициент определяется экспериментально. Как уже было отмечено, закон Кулона-Амонтона приближенный: так, коэффициент трения может незначительно зависеть от скорости, причем, как правило, с ростом скорости коэффициент трения незначительно уменьшается. Из приведенного закона следует, что сила трения не зависит от площади соприкасающихся тел, экспериментально же такая зависимость иногда наблюдается. Однако эти указанные особенности незначительно влияют на величину

* Заметим, что записывать этот закон в векторной форме $\vec{F} = -\mu \vec{N}$, как это делается в некоторых справочниках, недопустимо, так как силы нормальной реакции и трения взаимно перпендикулярны.

силы трения, поэтому чаще ими пренебрегают и пользуются приближенной формулой (1). Подчеркнем, что, как любая другая сила, сила трения является характеристикой взаимодействия тел, поэтому в соответствии с третьим законом Ньютона следует говорить о силах трения, действующих на каждое из соприкасающихся тел.

В заключение укажем еще одну интерпретацию коэффициента сухого трения. При движении одного тела по поверхности другого суммарная сила взаимодействия тел \vec{F}_{peak} разлагается на силу нормальной реакции \vec{N} и силу трения \vec{F}_{mp} (рис. 151). Если величина силы трения определяется формулой (1), то угол α между суммарной силой реакции и нормалью к поверхности удовлетворяет условию $\operatorname{tg}\alpha = \mu$.

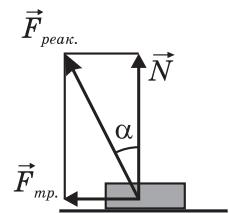


Рис. 151

Сила трения может возникнуть и в том случае, когда тела не движутся друг относительно друга. Такую силу называют **силой трения покоя**. Повседневный опыт указывает, что для того чтобы сдвинуть одно тело относительно другого, необходимо приложить силу, превышающую определенное пороговое значение (вспомните, например, свои опыты по перетаскиванию мебели). Если же к телу приложить силу меньшую, то тело остается в покое, следовательно, эта приложенная сила \vec{F} компенсируется равной ей силой трения покоя. Таким образом, сила трения покоя может прини-

мать максимальное значение, после чего трение покоя переходит в трение скольжения. Приблизенно можно считать, что максимальная сила трения покоя равна силе трения скольжения и определяется формулой (1). Однако, как правило, максимальная сила трения покоя превышает силу трения скольжения на 10—20%, поэтому в некоторых случаях вводят коэффициент трения покоя, незначительно превышающих коэффициент трения скольжения. В дальнейшем этим различием мы будем пренебречь.

Рассмотрим подробнее простую ситуацию: на горизонтальной поверхности расположен небольшой брускок, к которому прикладывают внешнюю горизонтально направленную силу \vec{F} (рис. 152). Действующая на брускок сила тяжести $m\vec{g}$ приводит к незначительной деформации поверхности, что вызывает появление силы реакции \vec{N} . Если горизонтальная сила \vec{F} не превышает по модулю максимально возможную силу трения покоя μN , то сила трения (покоя) численно равна приложенной силе и направлена в противоположную сторону. Как только модуль силы \vec{F} превысит значение μN , начнется скольжение бруска, при котором сила трения будет оставаться приблизительно постоянной. Аналогичная ситуация будет наблюдаться при изменении направления действия внешней силы. Таким

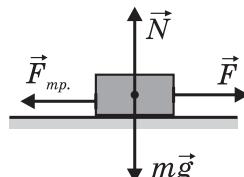


Рис. 152

образом, график зависимости проекции силы трения от внешней приложенной силы имеет вид, показанный на рис. 153.

Силы, препятствующие движению, наблюдаются и при качении одного тела по поверхности другого. Эти силы называются силами трения качения. Сразу подчеркнем, что природа этих сил отличается от сил сухого трения. Основной причиной возникновения трения качения являются неупругие деформации самого катящегося тела и поверхности, по которой происходит качение.

Так, колесо, расположенное на горизонтальной поверхности, деформирует последнюю. При движении колеса деформации не успевают восстановиться, поэтому колесу приходится как бы все время взбираться на небольшую горку, из-за чего появляется момент сил, тормозящий качение (рис. 154). Неупругие деформации колеса также приводят к появлению тормозящих сил.

Таким образом, силы трения качения определяются упругими свойствами взаимодействующих тел. Закон для силы трения также является экспериментальным и приближенным, его принято записывать в форме

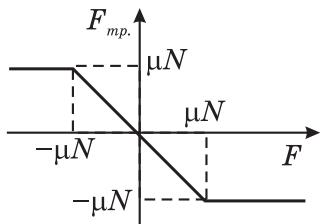


Рис. 153

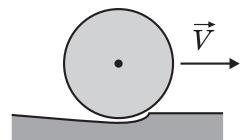


Рис. 154

$$F_{\text{тр. кач.}} = \frac{k}{R} N, \quad (2)$$

где N — сила нормальной реакции, R — радиус катящегося тела, k — коэффициент трения качения, имеющий размерность длины. При записи формулы в такой форме коэффициент трения качения определяется, главным образом, материалом взаимодействующих тел и не зависит от радиуса катящегося тела. Заметим, что для одних и тех же тел трение качения, как правило, во много раз меньше трения скольжения, что хорошо известно из повседневного опыта (рис. 155).

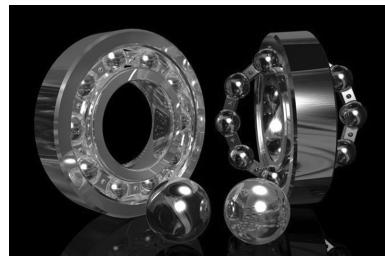


Рис. 155

§ 24. Силы вязкого трения

Хорошо известно, что для уменьшения трения применяют различного вида смазки. В этом случае между трущимися твердыми поверхностями образуется жидккая прослойка*. Как уже было сказано ранее, в жидкостях отсутствуют тангенциальные механические напряжения, что и является основной причиной уменьшения сил трения (рис. 156).

* Возможен промежуточный вариант — при малой толщине прослойки, могут оставаться небольшие области непосредственного контакта твердых поверхностей.



Рис. 156

При относительном движении одного твердого тела со скоростью V_0 по смазанной поверхности второго (которую считаем неподвижной) жидкость в прослойке также приходит в движение. Причем скорости различных слоев прослойки различны — они плавно изменяются от V_0 до нуля (рис. 157).

При относительном движении слоев жидкости между ними возникают силы вязкого трения, также обусловленные межмолекулярными взаимодействиями. Раз-

личия в скоростях граничащих слоев жидкости приводят к возникновению сил, направленных вдоль границы раздела рассматриваемых слоев. Величины этих сил зависят от свойств жидкости, толщины жидкого слоя и скорости движущегося тела. При небольших скоростях V_0 результирующая сила трения оказывается пропорциональной скорости тела и направленной в сторону, противоположную скорости, то есть может быть записана в векторной форме

$$\vec{F} = -\beta \vec{V}_0, \quad (1)$$

где β — коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств жидкой прослойки и толщины жидкого слоя.

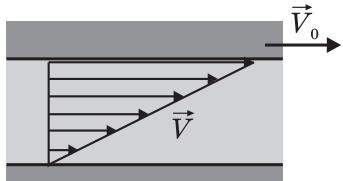


Рис. 157

При движении тела в жидкой или газообразной среде благодаря межмолекулярным взаимодействиям прилегающие к телу слои жидкости или газа также приходят в движение. Причем скорости различных слоев оказываются различными, что также приводит к появлению сил сопротивления. В общем случае вид зависимости силы сопротивления от скорости может быть различным, однако при малых скоростях сила сопротивления оказывается пропорциональной скорости, то есть описывается формулой (1). Вычисление сил сопротивления, действующих на движущиеся тела, требует расчета характера обтекания жидкости вокруг тела (рис. 158), что представляет собой очень сложную математическую задачу.

При больших скоростях основной причиной возникновения сил сопротивления оказываются столкновения частиц среды с движущимся телом. В этом случае сила сопротивления оказывается приблизительно пропорциональной квадрату скорости движения тела относительно жидкости:

$$F = \beta_2 v^2.$$

К несколько более подробному теоретическому обоснованию этой формулы мы вернемся чуть позднее.



Рис. 158

ЧАСТЬ IV. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

В предыдущих параграфах мы фактически построили общую схему решения основной задачи динамики:

- целый ряд физических законов дает возможность рассчитывать силы, действующие на тела;
- второй закон Ньютона и известные силы позволяют получить уравнения для определения ускорений тел;
- методы кинематики позволяют, в принципе, рассчитать законы движения тел по их известным ускорениям.

В данном параграфе мы рассмотрим фундаментальные физические законы сохранения энергии, импульса и момента импульса, также позволяющие получать уравнения для описания движения тел. Хотя эти законы нами будут получены на основании законов Ньютона, их обобщения имеют большую область применения, фактически, именно законы сохранения являются фундаментом современной физики. В некоторых случаях в качестве исходных аксиом механики (и других разделов физики) используют законы сохранения, тогда законы Ньютона могут рассматриваться как «теоремы», являющиеся следствием законов сохранения.

Рассматриваемые ниже законы сохранения тесно связаны со свойствами симметрии простран-

ства и времени. Симметрия в данном случае понимается в предельно широком смысле — наличие преобразований, оставляющих все свойства рассматриваемой системы неизменными. Согласно знаменитой теореме Эмми Нетер, каждой сохраняющейся величине соответствует некоторая симметрия, и, наоборот, наличие любого элемента симметрии приводит к появлению сохраняющейся физической величины.

§ 25. Импульс тела. Закон сохранения импульса

Уравнение второго закона Ньютона для материальной точки (или для твердого тела, движущегося поступательно) имеет вид

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad (1)$$

где m — масса тела, $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ — ее ускорение, \vec{F} — сумма внешних сил, действующих на тело. Используя определение ускорения, уравнение (1) можно переписать в виде $\frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t} = \vec{F}$. Векторная величина, равная произведению массы тела на его скорость $\vec{p} = m\vec{v}$ называется **импульсом тела*** (рис. 159). Тогда второй закон Ньютона может

* Также эту физическую величину называют количеством движения, однако этот термин постепенно выходит из употребления.

быть переформулирован следующим образом*: **скорость изменения импульса тела равна сумме внешних сил, действующих на тело:**

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}. \quad (2)$$



Рис. 159

На первый взгляд, эта новая формулировка закона полностью эквивалентна прежней. Но она оказывается применимой в том случае, когда масса тела изменяется с течением времени. Данный вывод не может быть подтвержден какими-либо теоретическими выкладками, обосновывается он только результатами многочисленных экспериментов и экспериментально проверяемыми следствиями из данного утверждения. Иными словами, уравнение (2) является обобщением экспериментальных данных.

В случае постоянной массы уравнения (2) и (1) полностью эквивалентны.

Часто произведение силы на время ее действия $\vec{F} \Delta t$ называют **импульсом силы**. Используя это понятие, дадим еще одну эквивалентную формулировку второго закона Ньютона: **изменение импульса тела равно импульсу суммарной внешней силы** $\Delta \vec{p} = \vec{F} \Delta t$.

Рассмотрим теперь движение двух материальных точек, взаимодействующих только между со-

* Заметим, что именно в такой форме закон был сформулирован И. Ньютоном.

бой (рис. 160). Такую систему можно назвать изолированной в том смысле, что нет взаимодействия с другими телами. По третьему закону Ньютона, силы, действующие на эти тела, равны по величине и противоположны по направлению: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Это можно выразить, используя второй закон Ньютона:

$$\vec{F}_{12} = m_1 \vec{a}_1, \quad \vec{F}_{21} = m_2 \vec{a}_2.$$

Объединяя эти выражения, получим

$$m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = \vec{0}.$$

Перепишем данное соотношение, используя понятие импульса: $m_1 \vec{a}_1 = m_1 \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta(m_1 \vec{v}_1)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t}$. Следовательно, $\frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t} = \vec{0}$, или $\frac{\Delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{\Delta t} = \vec{0}$. Если изменение какой-либо величины равно нулю, то эта физическая величина сохраняется. Таким образом, приходим к выводу: **сумма импульсов двух взаимодействующих изолированных точек остается постоянной, независимо от вида взаимодействия между ними**. Этот вывод можно обобщить на произвольную изолированную систему материальных точек, взаимодействующих между собой.

Ранее в качестве одного из следствий законов Ньютона мы получили уравнение, описывающее движение центра масс системы материальных точек:

$$m \vec{a}_C = \vec{F}, \tag{3}$$

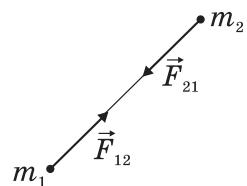


Рис. 160

где m — полная масса системы, \vec{a}_c — ускорение центра масс системы, \vec{F} — сумма внешних сил, действующих на систему. Если система изолирована, то сумма внешних сил равна нулю, поэтому в таком случае $m\vec{a}_c = \vec{0}$. Вспомним определение центра масс системы. Радиус-вектор центра масс определяется по формуле

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots}.$$

Тогда произведение $m\vec{a}_c$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2 + m_3 + \dots) \vec{a}_c &= m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + m_3 \vec{a}_3 + \dots = \\ &= m_1 \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} + m_2 \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t} + m_3 \frac{\Delta \vec{v}_3}{\Delta t} + \dots = \\ &= \frac{\Delta(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 + \dots)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \vec{0}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\vec{P} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 + \dots$ — векторная сумма импульсов тел, входящих в систему, которую в дальнейшем будет называть **импульс системы**. Из полученного соотношения следует, что **полный импульс замкнутой системы сохраняется** независимо от видов взаимодействий внутри системы. Это чрезвычайно важное утверждение носит название **закона сохранения импульса**.

Сделаем два существенных замечания, касающихся проделанного вывода.

1. Полный импульс системы материальных точек равен произведению массы системы на скорость центра масс системы. Действительно,

$$\vec{P} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 + \dots = \\ = m \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3} = m \vec{V}_c.$$

2. Пусть система материальных точек не является замкнутой. Допустим, что сумма внешних сил, действующих на систему, не равна нулю: $\vec{F} \neq \vec{0}$, но проекция результирующей внешней силы на некоторую ось (например, X) равна нулю: $F_x = 0$. Тогда уравнение (3) в проекции на эту ось будет иметь вид $ma_{cx} = 0$, из которого следует, что проекция импульса системы на эту ось будет сохраняться. Итак, **если сумма проекций внешних сил на некоторую ось равна нулю, то проекция импульса системы на эту ось сохраняется.**

Так, при движении системы материальных точек, движущихся в поле тяжести земли, когда внешней силой является сила тяжести, направленная вертикально, будет сохраняться проекция импульса системы на любую горизонтальную ось.

Мы вывели закон сохранения импульса с помощью законов динамики Ньютона. Однако закон сохранения импульса является фундаментальным физическим законом. В теоретической физике показано, что он является следствием однородности* пространства, в котором происходят все физические явления. Если вы уверены в том, что результаты физического эксперимента одина-

* Однородность означает равноправие, одинаковость всех точек пространства.

ковы независимо от того, в каком месте этот опыт поставлен, то вы должны признать закон сохранения импульса.

Задание для самостоятельной работы: движущийся кусок пластилина ударяется в стену и прилипает к ней. Куда «исчезает» импульс куска пластилина?

§ 26. Закон сохранения момента импульса

Основное уравнение динамики вращательного движения совпадает с уравнением второго закона Ньютона для поступательного движения. Поэтому для описания вращательного движения можно провести аналогичные обобщения, приведшие нас к закону сохранения импульса (рис. 161).

Уравнение динамики вращательного движения тела вокруг неподвижной оси

$$I\varepsilon = M \quad (1)$$

(где $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ — угловое ускорение тела, I — его момент инерции, M — сумма моментов внешних сил, действующих на тело) перепишем в виде

$$\frac{\Delta(I\omega)}{\Delta t} = M. \quad (2)$$



Рис. 161

Физическая величина $L = I\omega$ называется **моментом импульса**. Уравнение (2) оказывается применимым и для описания вращения тел, момент инерции которых изменяется в процессе движения, поэтому имеет более широкую область применимости, чем уравнение (1). Теперь основное уравнение динамики формулируется так: **скорость изменения момента импульса тела равна суммарному моменту сил, действующему на тело**. Доказать теоретически это утверждение невозможно — мы провели обобщение, которое подтверждается многочисленными экспериментами. Введенное нами определение момента импульса $L = I\omega$ является частным случаем для этой физической величины. Дадим еще одно определение этой физической величины. Пусть материальная точка массы m движется со скоростью \vec{v} . Импульсом тела называется векторная величина $\vec{p} = m\vec{v}$. Моментом импульса называется произведение импульса тела на плечо импульса (расстояние от оси вращения до прямой, вдоль которой направлен импульс):

$$L = mv \cdot d. \quad (3)$$

Это определение аналогично определению момента силы. Можно дать эквивалентные выражения формулы (3): $L = mv \cdot d = mvr \cos \alpha = mv_r r$, где r — расстояние от оси вращения до рассматриваемой материальной точки, v_r — составляющая скорости, перпендикулярная

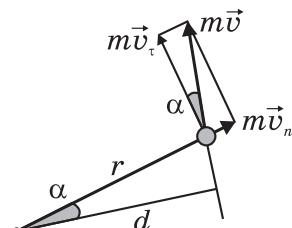


Рис. 162

радиус-вектору рассматриваемого точечного тела (рис. 162).

Аналогично моменту силы момент импульса может быть определен как векторная физическая величина, направленная перпендикулярно плоскости, содержащей вектор импульса $m\vec{v}$ и радиус-вектор \vec{r} . При таком определении вектор момента импульса равен векторному произведению указанных векторов $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$. Основное уравнение динамики вращательного движения также записывается в векторной форме:

$$\frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = \vec{M}. \quad (3')$$

Легко показать, что при вращении тела вокруг неподвижной оси из формулы (3) следует выражение для момента импульса $L = I\omega$. Действительно, при вращении вокруг неподвижной оси вектор скорости перпендикулярен прямой, соединяющей точку тела с осью вращения, величина скорости выражается через угловую скорость $v = \omega r$ (рис. 163). Поэтому момент импульса выражается формулой $L = mvr = mr^2\omega = I\omega$, где $I = mr^2$. Если же рассмотреть вращение произвольного тела, то для того, чтобы вычислить момент импульса всего тела, достаточно мысленно разбить его на малые части и просуммировать моменты импульсов всех малых частей. Так как угловые скорости всех точек одинаковы, то суммирование сводится к суммированию моментов инерции точек.

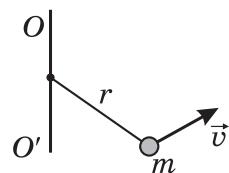


Рис. 163

Легко заметить, что при движении произвольной системы материальных точек изменение суммарного момента импульса полностью определяется моментом внешних сил. По третьему закону Ньютона, тела взаимодействуют с силами, равными по величине и противоположными по направлению. Так как силы взаимодействия направлены вдоль одной прямой, то плечи этих сил равны. Следовательно, при суммировании уравнений вращательного движения для произвольной системы моменты внутренних сил взаимно уничтожаются (подобно тому, как взаимно уничтожаются внутренние силы при сложении уравнений поступательного движения). Таким образом, для произвольной системы материальных точек оказывается справедливым уравнение (3'), в котором \vec{M} — вектор моментов только внешних сил.

Для замкнутой системы тел, не взаимодействующих с другими телами, не включенными в систему, момент внешних сил равен нулю, поэтому для **замкнутой системы суммарный момент импульса сохраняется**. Это утверждение выражает еще один фундаментальный физический закон — **закон сохранения момента импульса**.

В теоретической физике показано, что он является следствием изотропности^{*} пространства, в котором происходят все физические явления. Если вы уверены в том, что результаты физического экс-

* Изотропность означает *равноправие, одинаковость* всех направлений в пространстве.

перимента одинаковы независимо от того, как ориентирована ваша экспериментальная установка, то вы должны признать закон сохранения импульса.

§ 27. Закон сохранения энергии

27.1. Работа. Кинетическая энергия

Продолжим наш разговор о результате действия силы (рис. 164). Во-первых, сила есть причина ускорения (то есть изменения скорости) тела, во-вторых, если сила действует на систему в течение некоторого промежутка времени, то результатом этого действия является изменение импульса системы. Сейчас мы рассмотрим результат действия силы на некотором пространственном интервале пути.



Рис. 164

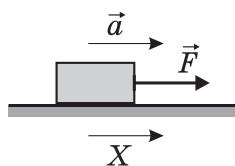


Рис. 165

Рассмотрим простейшую ситуацию, когда тело (материальная точка) движется вдоль прямой под действием постоянной силы F , направленной вдоль той же прямой (рис. 165). В этом случае ускорение тела остается постоянным и определяется вторым законом Ньютона $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$. Пусть тело сместилось на расстояние

Δx , которое может быть выражено по кинематической формуле $\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$. Объединяя эти две приведенные формулы, получим следующее выражение:

$$F\Delta x = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}. \quad (1)$$

Итак, мы видим, что если произведение силы на интервал времени ее действия равно изменению импульса тела, то произведение силы на смещение тела равно изменению такой характеристики движения*, как $K = \frac{mv^2}{2}$,

которая называется **кинетической энергией** тела (рис. 166).



Рис. 166

Обсудим теперь общую ситуацию: тело движется по произвольной траектории, результирующая внешняя сила не является постоянной, может изменяться как по величине, так и по направлению. Обозначим перемещение тела за малый промежуток времени $\Delta \vec{r}$ (рис. 167). Действующую силу (и ускорение) имеет смысл разложить на две составляющих — тангенциальную $F \cos \alpha$, параллельную вектору перемещения, и нормальную, перпендику-

* В течение более сотни лет среди ученых-физиков шла бурная дискуссия, что является «мерой движения» — импульс $m\vec{v}$ или кинетическая энергия $\frac{mv^2}{2}$, которую называли «живой силой».

лярную вектору перемещения $F \sin \alpha$. Как ранее было показано, нормальное ускорение (и его причина сила) не изменяет модуля скорости (изменяется только ее направление). Таким образом, изменение модуля скорости полностью определяется тангенциальной составляющей силы. На малом интервале времени траекторию движения можно приближенно считать отрезком прямой линии, поэтому для него применима формула (1). Поэтому изменение кинетической энергии тела на малом интервале траектории равно произведению тангенциальной составляющей силы на модуль перемещения:

$$\Delta \left(\frac{mv^2}{2} \right) = F \cos \alpha \cdot \Delta r.$$

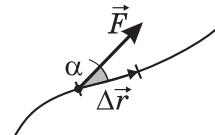


Рис. 167

Правую часть этого выражения можно компактно записать в виде скалярного произведения векторов силы и перемещения: $F \cos \alpha \cdot \Delta r = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$. Эта физическая величина играет чрезвычайно важную роль в физике, поэтому не случайно она получила «персональное» название — **«механическая работа»**: $A = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$. Также неслучайно, что имеются специальные единицы измерения работы (и энергии): так, в системе СИ единицей измерения работы является Джоуль — работа, которую совершают сила в один ньютон при перемещении тела на один метр в направлении действия силы. Работа есть характеристика действия силы: если под действием силы произошло перемещение тела,

то говорят, что сила совершила работу*. В результате совершенной работы происходит изменение кинетической энергии тела.

Результат, полученный для малого перемещения, можно распространить на любой участок траектории. Для этого достаточно разбить траекторию на малые участки (рис. 168) и просуммировать как произведенную работу, так и изменение кинетической энергии:

$$\vec{F}_1 \cdot \Delta \vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \Delta \vec{r}_2 + \vec{F}_3 \cdot \Delta \vec{r}_3 + \dots = \left(\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \right) + \left(\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \right) + \left(\frac{mv_3^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} \right) + \dots = \frac{mv_{\text{кон}}^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

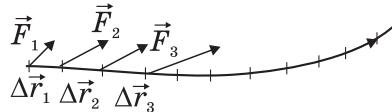


Рис. 168

Таким образом, мы доказали теорему о кинетической энергии тела: **изменение кинетической энергии тела равно работе внешних сил**.

В простейшем случае движения тела вдоль прямой и при постоянной силе работа равна произведению вектора силы на вектор перемещения: $A = \vec{F} \cdot \vec{S} = FS \cos \alpha$, где α — угол между указанными векторами. Как следует из определения, работа мо-

* Мы знаем, что сила есть характеристика взаимодействия тел, поэтому можно говорить о работе, совершенной одним телом над другим. Выражения «сила совершила работу», «тело совершило работу» можно рассматривать как эквивалентные. Также аналогичными являются выражения «внешняя сила совершила работу» и «над телом совершена работа».

жет быть как положительной, если угол α острый (в этом случае кинетическая энергия тела возрастает), так и отрицательной, если угол α — тупой (в этом случае кинетическая энергия уменьшается). Если сила не является постоянной, вычисление работы этой силы требует особых приемов.

Пусть на тело, движущееся вдоль оси X , действует внешняя сила, модуль которой зависит от координаты тела. Построим график (рис. 169) зависимости модуля этой силы от координаты $F(x)$. При смещении тела на малую величину Δx можно пренебречь изменением величины силы на этом малом интервале. Тогда работа, совершенная на этом участке, может быть вычислена по формуле $\delta A = F(x)\Delta x$. Легко заметить, что численно она равна площади «полоски», основанием которой является Δx , а высотой — $F(x)$. Для произвольного интервала изменения координаты тела от x_1 до x_2 , суммарная работа, совершенная переменной силой, будет численно равна площади криволинейной трапеции под графиком функции $F(x)$.

Обсудим теперь результат действия внешних сил не на отдельное взятое тело (материальную точку), а на систему взаимодействующих тел. В этом случае результат действия внешних сил может проявляться не только в изменении кинетической энергии системы, но и приводить к другим

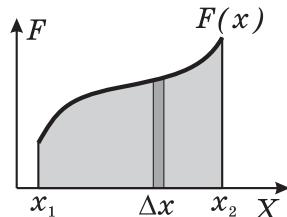


Рис. 169

последствиям — изменению взаимного расположения тел системы (например, деформации тела), изменению температуры системы, появлению звука, света, электрических зарядов и так далее. Иными словами, результат воздействия внешних сил зависит от внутренних свойств рассматриваемой системы, в частности, от характера внутренних сил системы. Однако оказывается возможным установить чрезвычайно общие закономерности поведения систем, введя для них специальную характеристику — **энергию**, частным случаем которой является кинетическая энергия.

Дать общее определение энергии системы чрезвычайно затруднительно (да и вряд ли возможно) — эта физическая величина фигурирует во всех разделах физики, принимает множество различных форм, с которыми вы будете знакомиться на протяжении всего изучения физики. Общим для всех этих форм является то, что различные формы энергии могут переходить друг в друга в ходе многообразных физических процессов, при этом оставаясь постоянной для замкнутых систем. Своебразным образом энергия является некоторой универсальной мерой различных форм движения*, а сохранение энергии свидетельствует о неуничтожимости движения.

В механике под энергией понимают **способность системы совершить механическую работу**. Если рассматриваемая система совершает положи-

* В данном случае мы имеем в виду не только механическое движение, но и движение в философском смысле — «всякое изменение вообще».

тельную работу над внешними телами, то энергия системы уменьшается на величину совершенной работы; если внешние силы совершают положительную работу над системой, то энергия системы возрастает на величину совершенной работы. Таким образом, энергия и работа являются близкими взаимосвязанными, но не идентичными понятиями. Так, работа является **характеристикой физических процессов**, а энергия — **характеристика состояния системы**, причем работа играет роль меры изменения энергии системы.

При изучении различных видов энергии мы будем рассматривать два подхода: первый — внешние силы совершают работу над системой, второй — система совершает работу над внешними телами. В обоих случаях изменение энергии равно совершенной работе, что позволяет получать математические выражения для различных форм энергии.

Подойдем с этой точки зрения к понятию кинетической энергии. Мы показали, что работа внешних сил, совершенная над телом, приводит к увеличению его кинетической энергии, которая выражается формулой

$$K = \frac{mV^2}{2}. \quad (2)$$

Сейчас покажем, что движущееся тело способно совершить работу, которая в точности определяется формулой (2).

Итак, пусть тело массой m , движется со скоростью V_0 . Для торможения тела до полной останов-

ки к нему необходимо приложить некоторую силу \vec{F} , направленную в сторону, противоположную его скорости. Для определенности будем считать, что рассматриваемое тело взаимодействует с другим телом M , причем природа сил взаимодействия может быть любой (рис. 170). По третьему закону Ньютона, движущееся тело действует на тормозящее тело с силой \vec{F}' , равной по величине и противоположной по направлению силе \vec{F} . Следовательно, тело m посредством этой силы будет совершать работу над телом M . Считая для простоты, что силы взаимодействия постоянны по величине, можем записать, что смещение S движущегося тела до остановки определяется кинематической формулой (т. к. конечная скорость равна нулю)

$$S = \frac{V_0^2}{2a},$$

где $a = \frac{F}{m}$ — модуль ускорения движущегося тела. С учетом этих соотношений работа, совершенная силой \vec{F}' (движущимся телом), рассчитывается следующим образом:

$$A = F'S = F \frac{V_0^2}{2a} = \frac{mV_0^2}{2},$$

что в точности равно начальной кинетической энергии тела.

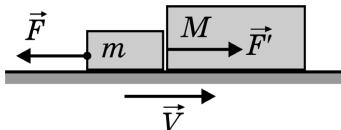


Рис. 170

27.2. Потенциальная энергия

Если тела взаимодействуют между собой, то есть если между ними действуют силы, то в процессе их взаимного движения также может совершаться механическая работа. Следовательно, можно говорить, что **взаимодействующие тела обладают энергией**. Энергия, обусловленная взаимодействием тел, их взаимным расположением, называется **потенциальной**. Если сила взаимодействия совершает положительную работу, то потенциальная энергия этого взаимодействия уменьшается на величину совершенной работы.

Как мы покажем в дальнейшем, многие взаимодействия обладают важнейшим свойством: **работа этих сил не зависит от формы траектории движения, а полностью определяется начальным и конечным положением тела**. Силы, которые удовлетворяют этому условию, называются **потенциальными, или консервативными**^{*}. При изучении энергетических характеристик различных взаимодействий вопрос о зависимости (или независимости) работы от формы траектории является важнейшим, поэтому при изучении взаимодействий мы всегда будем его анализировать. Если взаимодействие удовлетворяет условию потенциальности, то можно ввести специальную функ-

^{*} Термин «консервативные» используется в том смысле, что для систем, в которых действуют подобные силы, справедлив закон сохранения механической энергии, о котором мы будем говорить позднее.

цию от координат всех взаимодействующих тел, описывающую взаимодействие — потенциальную энергию U . Строго говоря, это от взаимного расположения всех взаимодействующих тел. Однако во многих случаях можно рассматривать движение одного тела при условии, что остальные тела неподвижны, тогда можно говорить о потенциальной энергии отдельного тела и рассматривать потенциальную энергию как функцию координат только этого движущегося тела: $U(x, y, z)$. Эта функция имеет следующий физический смысл: **работа потенциальной силы при перемещении тела из одной точки с координатами (x_1, y_1, z_1) в другую с координатами (x_2, y_2, z_2) равна изменению потенциальной энергии, взятому с противоположным знаком:**

$$A = -\Delta U = -(U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1)). \quad (1)$$

Изменение знака в данном определении достаточно логично: если сила совершила положительную работу ($A > 0$), то ее энергия уменьшается ($\Delta U < 0$).

Условие потенциальности взаимодействия может быть сформулировано в эквивалентном виде: **работа потенциальной силы по любой замкнутой траектории равна нулю.** Доказательство этого утверждения непосредственно следует из определения потенциальной энергии.

Действительно, пусть некоторое тело переместилось по некоторой замкнутой траектории (рис. 171). Тогда при движении от точки 1 до

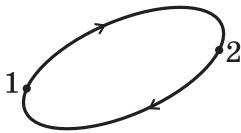


Рис. 171

точки 2 работы силы определяется формулой (1): $A_{12} = -(U_2 - U_1)$, а при движении в обратном направлении по любой другой траектории работа будет равна: $A_{21} = -(U_1 - U_2)$. Суммарная же работа будет равна нулю.

Заметьте, что в том случае, когда работа силы зависит от траектории движения, нельзя определить функцию потенциальной энергии, так как работа зависит не только от начального и конечного положения тела.

Мы можем установить связь между силой и потенциальной энергией взаимодействия. Пусть под действием силы \vec{F} тело сместилось на малое расстояние Δx вдоль оси X , при этом совершена работа $A = F_x \Delta x$ (где F_x — проекция силы на ось X). Уменьшение потенциальной энергии равно совершенной работе, поэтому

$$\Delta U = -A = -F_x \Delta x. \quad (2)$$

Из этой формулы также следует выражение, позволяющее определить силу по известной потенциальной энергии взаимодействия:

$$F_x = -\frac{\Delta U}{\Delta x}. \quad (3)$$

Аналогичным образом определяются проекции силы на другие оси координат.

Обратим внимание на еще одно общее обстоятельство, общее для различных видов потенциальной энергии. Как следует из определения, фи-

зический смысл имеет изменение потенциальной энергии, так как только изменение энергии определяет экспериментально измеряемые величины — работу и силу. Следовательно, если к функции потенциальной энергии $U(x, y, z)$ во всех точках добавить постоянное слагаемое, то эта добавка никак не скажется на поведении системы. Поэтому часто говорят, что **потенциальная энергия определяется с точностью до произвольного слагаемого, или нулевой уровень потенциальной энергии выбирается произвольно**.

Теперь мы можем дать еще одно толкование потенциальной энергии.

Потенциальная энергия тела $U(x, y, z)$, находящегося в точке с координатами (x, y, z) , равна работе, которую совершают силы взаимодействия при перемещении тела из данной точки в точку с координатами (x_0, y_0, z_0) , где потенциальная энергия принимается равной нулю: $U(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Таким образом, потенциальная энергия в некоторой точке определяется силами взаимодействия не только в данной точке, но и на всем пути до точки с нулевой потенциальной энергией.

С другой стороны, если над системой внешние силы совершают работу, то энергия системы увеличивается, причем изменение энергии системы равно совершенной работе. Однако работа внешних сил может пойти на увеличение любого вида энергии системы — кинетической, потенциальной и других.

Итак, для расчета потенциальной энергии необходимо доказать, что работа силы не зависит от траектории движения, а затем подсчитать эту работу, которая и будет равна изменению потенциальной энергии.

27.4. Потенциальная энергия тел, находящихся в поле тяжести



Рис. 172

Пусть тело массой m падает с некоторой высоты, проходя при этом путь h . Так как сила тяжести $m\vec{g}$, действующая на это тело, постоянна, то работа этой силы вычисляется элементарно: $A = mgh$ (рис. 172).

Покажем, что эта работа не зависит от траектории, по которой движется тело. Разобьем произвольную траекторию движения тела на малые участки, перемещения на которых обозначим $\Delta\vec{r}$ (рис. 173). Тогда работа силы тяжести на этом малом участке определяется по формуле $\delta A = m\vec{g} \cdot \Delta\vec{r} = m g \Delta r \cos \alpha$, где α — угол между вертикалью и вектором перемещения. Как следует из рисунка: $\Delta r \cos \alpha = \Delta h$, где Δh — изменение высоты тела. Таким образом, работа полностью определяется только

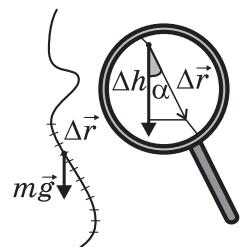


Рис. 173

изменением высоты тела, его вертикальной координаты, а не траектории движения. Для вычисления работы силы тяжести на произвольном участке необходимо просуммировать выражения для работ на малых участках, что сводится к суммированию изменения высот. Следовательно, эта работа не зависит от формы траектории, поэтому сила тяжести является потенциальной. Используя определение потенциальной энергии, можно записать

$$\Delta U = mg(h_1 - h_2), \quad (1)$$

где h_1, h_2 — начальная и конечная высоты, на которых находилось тело. Так как потенциальная энергия определяется с точностью до постоянного слагаемого, то уровень, от которого отсчитываются высоты, может быть выбран произвольно, поэтому выражение для потенциальной энергии традиционно записывают в виде $U = mgh$. Важно отметить, что положительным направлением вертикальной оси (в наших обозначениях это h) считается направление вертикально вверх, в сторону, противоположную силе тяжести. Если тело движется вниз, то сила тяжести совершает положительную работу, поэтому потенциальная энергия тела уменьшается.

Для увеличения потенциальной энергии к телу необходимо приложить внешнюю силу, которая совершил работу. Так, чтобы поднять тело на некоторую высоту h , к нему необходимо приложить внешнюю силу \vec{F} , превышающую силу тяже-

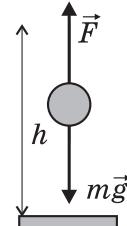


Рис. 174

сти $m\vec{g}$ (рис. 174). Если поднимать тело равномерно, то внешняя сила по модулю будет равна mg . В этом случае работа внешней силы минимальна и вычисляется элементарно: $A = mgh$. Эта работа внешней силы пошла на увеличение энергии тела, а точнее — потенциальной энергии его взаимодействия с Землей.

Если приложенная сила превышает силу тяжести, то в ходе подъема тела будет возрастать его скорость, а следовательно, и кинетическая энергия. В этом случае работа внешней силы пойдет на увеличение как потенциальной, так и кинетической энергии тела. В обоих рассмотренных случаях совершенная работа выступает в роли меры изменения энергии, а еще точнее — меры перехода энергии из одной формы в другую.

27.5. Потенциальная энергия деформированной пружины

Деформированная (например, растянутая) пружина способна совершить работу (рис. 175). Действительно, если к растянутой пружине прикрепить некоторое тело, то пружина будет действовать на него с некоторой силой, под действием которой тело начнет смещаться. Следовательно, будет совершена работа (рис. 176).



Рис. 175

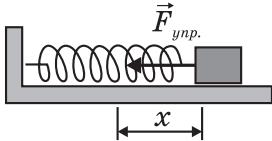


Рис. 176

Сила, с которой пружина действует на тело, не является постоянной, поэтому для вычисления работы воспользуемся графическим методом. Построим график зависимости силы упругости $F = kx$ от координаты, которая является прямой линией (рис. 177).

Площадь выделенного треугольника под графиком равна максимальной работе, которую может совершить пружина. Понятно, что она равна:

$$A = \frac{1}{2} kx \cdot x = \frac{kx^2}{2}. \quad (1)$$

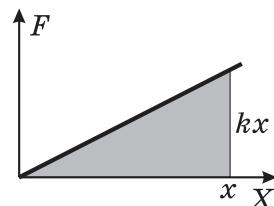


Рис. 177

Для того чтобы пружине приписать потенциальную энергию, равную максимальной работе (1), необходимо показать, что эта работа не зависит от траектории движения тела. Чтобы доказать это утверждение, достаточно рассмотреть работу на малом участке перемещения $\Delta\vec{r}$ при движении по произвольной траектории (рис. 178). В данном случае эта работа $\delta A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = kx \cdot \Delta r \cos \alpha = kx \cdot \Delta x$ полностью определяется изменением деформации пружины x , поэтому она не зависит от траектории движения тела.

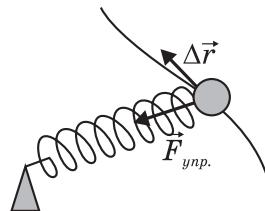


Рис. 178

Таким образом, силы упругости, подчиняющиеся закону Гука, являются потенциальными, и по-

тенциальная энергия деформированной пружины определяется формулой

$$U = \frac{kx^2}{2}. \quad (2)$$

Нулевой уровень потенциальной энергии, рассчитываемой по формуле (2), соответствует недеформированной пружине.

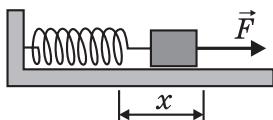


Рис. 179

Подсчитаем, какую минимальную работу следует совершить, чтобы пружину жесткостью k растянуть на величину x (рис. 179). Чтобы деформировать пружину, к ней необходимо приложить внешнюю силу. Очевидно, что эта работа будет минимальна в том случае, если внешняя приложенная сила в любой точке равна силе упругости, действующей со стороны пружины. Поэтому работа этой силы будет равна: $A = \frac{kx^2}{2}$, то есть увеличению потенциальной энергии пружины.

27.6. Потенциальная энергия гравитационного притяжения

Все тела, обладающие массой, притягиваются друг к другу с силой, подчиняющейся закону всемирного тяготения И. Ньютона. Следовательно, притягивающиеся тела обладают энергией взаимодействия (рис. 180).

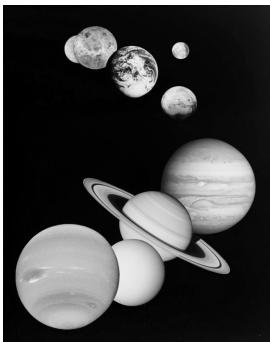


Рис. 180

Покажем, что работа гравитационных сил не зависит от формы траектории, то есть гравитационные силы также являются потенциальными. Для этого рассмотрим движение небольшого тела массой m , взаимодействующего с другим массивным телом массой M , которое будем полагать неподвижным* (рис. 181). Как следует

из закона Ньютона, сила \vec{F} , действующая между телами, направлена вдоль линии, соединяющей эти тела. Поэтому при движении тела m по дуге окружности с центром в точке, где находится тело M , работа гравитационной силы равна нулю, так как векторы сил и перемещения все время остаются взаимно перпендикулярными.

При движении вдоль отрезка, направленного к центру тела M , векторы перемещения и силы параллельны, поэтому в этом случае при сближении тел работа гравитационной силы положительна, а при удалении тел — отрицательна. Далее заметим, что при радиальном движении работа силы притяжения зави-

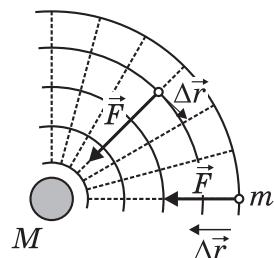


Рис. 181

* Вспомните, что сила гравитационного взаимодействия между сферически симметричными телами эквивалентна силе взаимодействия между точечными телами таких же масс.

сит только от начального и конечного расстояний между телами. Так, при движении по отрезкам (рис. 182) DE и D_1E_1 совершенные работы равны, так как законы изменения сил от расстояния на обоих отрезках одинаковы. Наконец, произвольную траекторию тела m можно разбить на набор дуговых и радиальных участков (например, ломаная $ABCDE$). При движении по дугам работа равна нулю, при движении по радиальным отрезкам работа не зависит от положения этого отрезка, следовательно, работа гравитационной силы зависит только от начального и конечного расстояний между телами, что и требовалось доказать.

Заметьте, что при доказательстве потенциальности мы воспользовались только тем фактом, что гравитационные силы являются центральными, то есть направленными вдоль прямой, соединяющей тела, и не упоминали о конкретном виде зависимости силы от расстояния. Следовательно, **все центральные силы являются потенциальными**.

Мы доказали потенциальность силы гравитационного взаимодействия между двумя точечными телами. Но для гравитационных взаимодействий справедлив принцип суперпозиции: сила, действующая на тело со стороны системы точечных тел, равна сумме сил парных взаимодействий, каждая из которых является потенциальной, следовательно, и их сумма также потенциальна. Действитель-

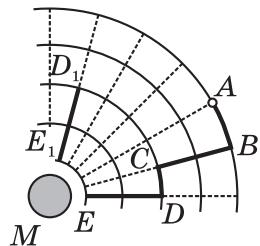


Рис. 182

но, если работа каждой силы парного взаимодействия не зависит от траектории, то и их сумма также не зависит от формы траектории. Таким образом, все гравитационные силы потенциальны.

Нам осталось получить конкретное выражение для потенциальной энергии гравитационного взаимодействия.

Для вычисления работы силы притяжения между двумя точечными телами достаточно подсчитать эту работу при движении вдоль радиального отрезка при изменении расстояния от r_1 до r_2 (рис. 183).

Очередной раз воспользуемся графическим методом, для чего построим зависимость силы притяжения $F = G \frac{Mm}{r^2}$ от расстояния r между телами.

Тогда площадь под графиком этой зависимости в указанных пределах и будет равна искомой работе (рис. 184).

Вычисление этой площади представляет собой не слишком сложную задачу, требующее, однако, определенных математических знаний и навыков. Не вдаваясь в детали этого расчета, приведем конечный результат: для данной

зависимости силы от расстояния площадь под графиком, или работа силы притяжения, определяется формулой

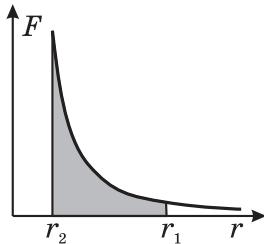


Рис. 183

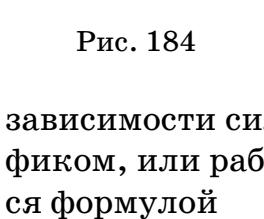


Рис. 184

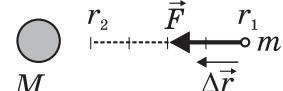


Рис. 183

$$A_{12} = GMm \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Так как мы доказали, что гравитационные силы являются потенциальными, эта работа равна уменьшению потенциальной энергии взаимодействия, то есть

$$A_{12} = GMm \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = -\Delta U = -(U_2 - U_1).$$

Из этого выражения можно определить выражение для потенциальной энергии гравитационного взаимодействия:

$$U(r) = -G \frac{Mm}{r}. \quad (1)$$

При таком определении потенциальная энергия отрицательна и стремится к нулю при бесконечном расстоянии между телами: $U(\infty) = 0$. Формула (1) определяет работу, которую совершил сила гравитационного притяжения при увеличении расстояния от r до бесконечности, а так как при таком движении векторы силы и перемещения направлены в противоположные стороны, то эта работа отрицательна. При противоположном движении, при сближении тел от бесконечного расстояния до расстояния r , работа силы притяжения будет положительна. Эту работу можно подсчитать по определению потенциальной энергии:

$$A_{\infty \rightarrow r} = -(U(\infty) - U(r)) = G \frac{Mm}{r}.$$

Подчеркнем, что потенциальная энергия является характеристикой взаимодействия, по

меньшей мере, двух тел. Нельзя говорить о том, что энергия взаимодействия «принадлежит» одному из тел, или каким образом «разделить эту энергию между телами». Поэтому когда мы говорим об изменении потенциальной энергии, мы подразумеваем изменение энергии системы взаимодействующих тел. Однако в некоторых случаях допустимо все же говорить об изменении потенциальной энергии одного тела. Так, при описании движения небольшого, по сравнению с Землей, тела в поле тяжести Земли говорим о силе, действующей на тело со стороны Земли, как правило, не упоминая и не учитывая равную силу, действующую со стороны тела на Землю. Дело в том, что при громадной массе Земли изменение ее скорости исчезающее мало. Поэтому изменение потенциальной энергии взаимодействия приводит к заметному изменению кинетической энергии тела и бесконечно малому изменению кинетической энергии Земли. В такой ситуации допустимо говорить о потенциальной энергии тела вблизи поверхности Земли, то есть всю энергию гравитационного взаимодействия «приписать» небольшому телу. В общем случае, можно говорить о потенциальной энергии отдельного тела, если остальные взаимодействующие тела неподвижны.

Мы неоднократно подчеркивали, что точка, в которой потенциальная энергия принимается равной нулю, выбирается произвольно. В данном случае такой точкой оказалась бесконечно удаленная точка. В некотором смысле этот не-

привычный вывод может быть признан разумным: действительно, на бесконечном расстоянии исчезает взаимодействие — исчезает и потенциальная энергия. С этой точки зрения логичным выглядит и знак потенциальной энергии. Действительно, чтобы разнести два притягивающиеся тела, внешние силы должны совершить положительную работу, поэтому в таком процессе потенциальная энергия системы должна возрастать: вот она возрастает, возрастает и ... становится равной нулю!

Если притягивающиеся тела соприкасаются, то сила притяжения не может совершать положительную работу, если же тела разнесены, то такая работа может быть совершена при сближении тел. Поэтому часто говорят о том, что **притягивающиеся тела обладают отрицательной энергией, а энергия отталкивающихся тел положительна**. Это утверждение справедливо только в том случае, если нулевой уровень потенциальной энергии выбирается на бесконечности. Так, если два тела связаны пружиной, то при увеличении расстояния между телами между ними будет действовать сила притяжения, тем не менее, энергия их взаимодействия является положительной. Не забывайте, что нулевому уровню потенциальной энергии соответствует состояние недеформированной пружины (а не бесконечность).

27.7. Работа сил трения

При относительном движении одного тела по поверхности другого возникают силы трения, то есть тела взаимодействуют друг с другом. Однако этот вид взаимодействия принципиально отличается от рассмотренных ранее. Наиболее существенным отличием является тот факт, что сила взаимодействия определяется не взаимным рас-

положением тел, а их относительной скоростью. Следовательно, работа этих сил зависит не только от начального и конечного положения тел, но и от формы траектории, от скорости перемещения. Иными словами, **силы трения не являются потенциальными**.

Рассмотрим подробнее работу различных видов трения.

Самой простой случай — трение покоя. Достаточно сказать, что при отсутствии перемещения работа равна нулю, поэтому трение покоя работы не совершает.

При движении одного тела по поверхности другого возникает сила сухого трения. По закону Кулона-Амонтонса, величина силы трения постоянна и направлена в сторону, противоположную скорости движения. Следовательно, в любой момент времени, в любой точке траектории векторы скорости и силы трения направлены в противоположные стороны, угол между ними равен 180° (вспомните $\cos 180^\circ = -1$). Таким образом, работа силы трения равна произведению силы трения на длину траектории S :

$$A_{mp} = -F_{mp}S. \quad (1)$$

Между двумя точками можно проложить сколько угодно траекторий, длины которых могут изменяться в широких пределах, при движении по каждой из этих траекторий сила трения будет совершать различную работу.

Использование понятия работы оказывается полезным и при наличии сил трения. Рассмо-

трем простой пример. Пусть на горизонтальной поверхности находится брускок, которому толчком сообщили скорость v_0 . Найдем, какой путь пройдет брускок до остановки при наличии сухого трения, коэффициент которого равен μ . Так как при остановке кинетическая энергия обращается в нуль, то изменение кинетической энергии тела равно: $\Delta E_{\text{кин.}} = 0 - \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{mv_0^2}{2}$. По теореме о кинетической энергии, изменение последней равно работе внешних сил. Единственной силой, совершающей работу, является сила трения, которая равна в данном случае: $A_{\text{тр.}} = -\mu mgS$. Приравнивая эти выражения, легко находим путь до остановки: $S = \frac{v_0^2}{2\mu g}$.

Для того чтобы рассматриваемый брускок двигался по горизонтальной поверхности с постоянной скоростью, к нему необходимо прикладывать постоянную, горизонтально направленную силу F , равную по модулю силе трения. Эта внешняя сила будет совершать положительную работу A , равную по модулю работе силы трения. Кинетическая энергия бруска при таком движении возрастать не будет. Заметим, что противоречия с теоремой о кинетической энергии в этом утверждении нет — так, суммарная внешняя сила, действующая на брускок, равна нулю. Тем не менее необходимо твердо уяснить, что работа всякой силы есть мера перехода энергии из одной формы в другую, поэтому

следует определить, какие изменения с системой (брюском и поверхностью) произошли в результате совершенной работы. Ответ известен: произошло нагревание как поверхности, так и бруска. Иными словами, работа внешней силы пошла на увеличение внутренней, тепловой энергии. Аналогично, при торможении начальная кинетическая энергия бруска перешла во внутреннюю энергию. В любом случае работа силы трения приводит к увеличению тепловой энергии.

При движении в вязкой среде на тело действует сила сопротивления, зависящая от скорости и направленная в сторону, противоположную вектору скорости, поэтому работа этих сил всегда отрицательна, причем зависит от траектории движения тела. Следовательно, **силы вязкого трения не являются потенциальными**. Преобразования энергии, происходящие при наличии вязкого трения, аналогичны рассмотренным ранее, правда, их расчет усложняется зависимостью сил от скорости. **Не потенциальные силы, приводящие к увеличению внутренней энергии, называются диссипативными***. Примерами таких сил являются силы трения.

27.8. Закон сохранения энергии

Пусть некоторое материальное тело взаимодействует с другими *неподвижными* телами, при-

* Термин «диссипативные» означает «рассеивающие» — эти силы «рассеивают механическую энергию».

чем все силы взаимодействия являются потенциальными. Обозначим кинетическую энергию тела в некоторый начальный момент времени K_0 , а потенциальную энергию его взаимодействия с другими телами в тот же момент времени — U_0 , через K , U обозначим кинетическую и потенциальную энергии в произвольный момент времени. В этом случае изменение кинетической энергии тела $\Delta K = K - K_0 = A$, согласно доказанной нами теореме, равно работе внешних сил. С другой стороны, по определению потенциальной энергии, работа потенциальных сил равна изменению потенциальной энергии, взятой с противоположным знаком: $A = -\Delta U = -(U - U_0)$. Приравнивая эти выражения, получим уравнение

$$K - K_0 = -(U - U_0),$$

которое перепишем в виде

$$K + U = K_0 + U_0. \quad (1)$$

Сумма кинетической и потенциальной энергий тела называется **механической энергией**.

Полученное уравнение (1) указывает, что при сформулированных условиях сумма кинетической и потенциальной энергий тела (его механическая энергия) остается постоянной в процессе движения.

Рассмотрим теперь движение двух взаимодействующих тел. Будем считать для упрощения, что два небольших тела движутся навстречу друг другу вдоль одной прямой, соединяющей эти тела (рис. 185).

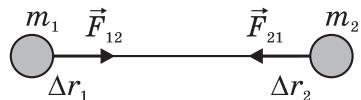


Рис. 185

Применим теорему о кинетической энергии для каждого тела для их малых смещений Δr_1 , Δr_2 за малый промежуток времени:

$$\begin{aligned}\Delta K_1 &= F_{12} \Delta r_1; \\ \Delta K_2 &= F_{21} \Delta r_2.\end{aligned}\quad (1)$$

Просуммируем эти уравнения с учетом равенства модулей сил, действующих на каждое тело ($F_{12} = F_{21} = F$):

$$\Delta(K_1 + K_2) = F(\Delta r_1 + \Delta r_2).$$

Теперь обратим внимание, что сумма смещений тел есть изменение расстояния между телами. Так как сила взаимодействия зависит только от расстояния между телами, то выражение $F(\Delta r_1 + \Delta r_2) = -(U - U_0)$ совпадает с выражением для работы силы взаимодействия при условии, что одно из тел покоятся, следовательно, оно равно изменению потенциальной энергии взаимодействия, взятой с противоположным знаком:

$$\Delta K = -\Delta U, \text{ или } K + U = \text{const.}$$

Таким образом, мы видим, что увеличение суммарной кинетической энергии равно уменьшению потенциальной энергии взаимодействия, поэтому суммарная механическая энергия системы из двух тел сохраняется. Этот вывод достаточно легко можно обобщить на произвольную замкнутую систему тел, все силы взаимодействия между которыми потенциальны. Отметим, что **системы, в которых отсутствуют диссипативные силы, называются консервативными**.

Итак, механическая энергия замкнутой консервативной системы сохраняется.

Это чрезвычайно важное утверждение составляет содержание закона сохранения механической энергии. Подчеркнем: для сохранения механической энергии необходимо выполнение двух условий: первое — система должна быть замкнута, то есть не должна взаимодействовать с другими телами; второе — система должна быть консервативна, то есть все силы взаимодействия должны быть потенциальными.

Рассмотрим теперь систему, в которой присутствуют неконсервативные (диссипативные) силы. Опять для упрощения алгебраических выкладок будем считать, что система состоит из двух описанных ранее тел, на каждое из которых помимо сил взаимодействия действуют диссипативные силы $\vec{F}_{\partial 1}$, $\vec{F}_{\partial 2}$, которые не обязаны быть одинаковыми, являясь абсолютно независимыми (рис. 186). В этом случае в каждом уравнении системы (2) появится дополнительное слагаемое, описывающее работу диссипативных сил:

$$\begin{aligned}\Delta K_1 &= F_{12}\Delta r_1 + \vec{F}_{\partial 1}\Delta \vec{r}_1; \\ \Delta K_2 &= F_{21}\Delta r_2 + \vec{F}_{\partial 2}\Delta \vec{r}_2.\end{aligned}\quad (3)$$

Проводя над этой системой аналогичные преобразования, получим уравнение

$$\Delta(K + U) = A_\partial, \quad (4)$$

где $A_\partial = \vec{F}_{\partial 1}\Delta \vec{r}_1 + \vec{F}_{\partial 2}\Delta \vec{r}_2$ — суммарная работа диссипативных сил в системе (заметим, что, как пра-

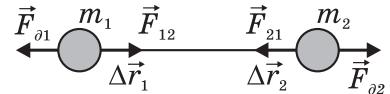


Рис. 186

вило, эта работа отрицательна). Эти рассуждения легко обобщаются на систему произвольного числа тел.

Таким образом, в замкнутой неконсервативной системе изменение механической энергии равно работе диссипативных сил.

Наконец, можно рассмотреть незамкнутую систему, то есть ситуацию, когда на тела системы действуют внешние силы любой природы. В этом случае в уравнения типа (2) следует включить работу внешних сил. После аналогичных преобразований можно прийти к выводу: **в незамкнутой неконсервативной системе изменение полной механической энергии равно сумме работы внешних сил и работы диссипативных сил.**

Второй способ описания таких систем заключается в их расширении: достаточно в нее включить все взаимодействующие тела и рассматривать расширенную систему как замкнутую.

Мы уже отмечали, что всякая работа есть мера перехода энергии из одной формы в другую. Так, в рассмотренных случаях работа потенциальных сил приводит к изменению кинетической энергии. Эта работа показывает, сколько энергии перешло из кинетической в потенциальную (или обратно). Наличие сил трения приводит к выделению теплоты — работа этих сил показывает, сколько механической энергии перешло во внутреннюю, тепловую. Если в энергию системы включить и ее внутреннюю энергию, то сделанный вывод можно переформулировать в виде **закона сохранения**

энергии: в замкнутой системе полная энергия сохраняется.

Этот закон является предельно общим — он справедлив для любых физических явлений. В ходе дальнейшего изучения физики мы постоянно будем обобщать этот закон, включая в него иные формы энергии — электрическую, магнитную, атомную, ядерную и т. д. Смело можно утверждать, что закон сохранения энергии является основой современной физики. В любых явлениях мы будем искать и находить формулы для различных форм энергии. Что общего в этих различных формах энергии: энергия может переходить, превращаться из одной формы в другую, поэтому справедливо уважительно расширить название закона — **ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ И ПРЕВРАЩЕНИЯ ЭНЕРГИИ**.

Невозможно назвать одного автора этого закона: многие физики внесли свой вклад в его формулировку, обоснование и развитие — от неизвестных авторов, сформулировавших «золотое правило механики», до современных исследователей. С некоторыми из них мы познакомимся в дальнейшем.

Что касается его проявления в механических явлениях, то полученные нами уравнения следуют из уравнений законов Ньютона и свойств конкретных взаимодействий. Но закон сохранения энергии имеет более широкие и общие рамки, да и его обоснование имеет более прочный фундамент, так как этот закон тесно связан с однородностью времени. Если вы уверены, что результаты физического эксперимента, проведенного сегодня, приведут завтра (при

сохранении всех условий) к тем же результатам, вы должны быть уверены в законе сохранения энергии.

§ 28. Заметки о симметрии

Хотя в физике очень много сложного, в ней также много простоты и изящества, что в значительной мере обусловлено симметрией физических законов и систем. В соответствии с этим симметрия не только занимает важное место в физике, но и играет всё возрастающую роль в современных физических исследованиях.

Симметрия в широком смысле — это свойство геометрической фигуры, характеризующее некоторую правильность формы, неизменность ее при движениях и зеркальных отображениях.

Рассмотрим некоторые виды и элементы симметрии.

1. Симметрия относительно плоскости (зеркальная симметрия)

Две точки — A и A' — симметричны относительно плоскости P , если они расположены на одном перпендикуляре к плоскости и на равном расстоянии от нее (рис. 187). Фигуры и тела симметричны относительно плоскости, если для каждой точки тела существует симметричная относительно плоскости другая точка тела. Плоскостью симметрии могут обладать как плоские, так и объемные фигуры. Тела могут обладать и несколькими плоскостями симметрии. Так, фигура, пока-

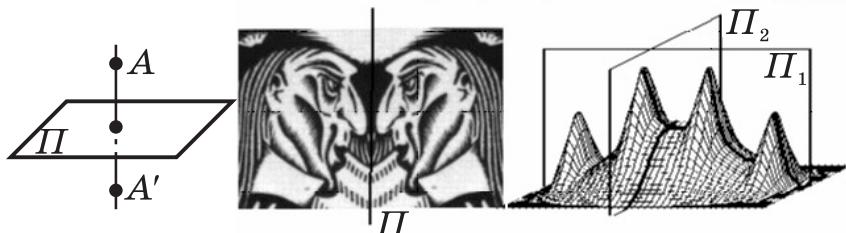


Рис. 187

занная на рисунке, обладает двумя плоскостями симметрии. Если ввести декартовую ось координат Z , перпендикулярную плоскости симметрии, то любая характеристика системы будет сохраняться при изменении знака этой координаты: $F(x, y, z) = F(x, y, -z)$.

2. Оси симметрии

Тело обладает осью симметрии n -го порядка O_n , если при вращении вокруг этой оси тело n раз совмещается с самим собой (рис. 188).

Если фигура совмещается сама с собой при повороте на любой угол, то такое тело называется осесимметричным, а прямая, вокруг которой можно проводить поворот на любой угол без изменения формы фигуры, называется осью симметрии. Формально ось симметрии можно рассматривать как ось симметрии бесконечного порядка O_∞ .

Простейшей пространственной фигурой, обладающей осью симметрии, является цилиндр, поэтому такой тип симметрии также называют цилиндрической симметрией.

Заметим, что любая плоскость, содержащая ось симметрии, является плоскостью симметрии.

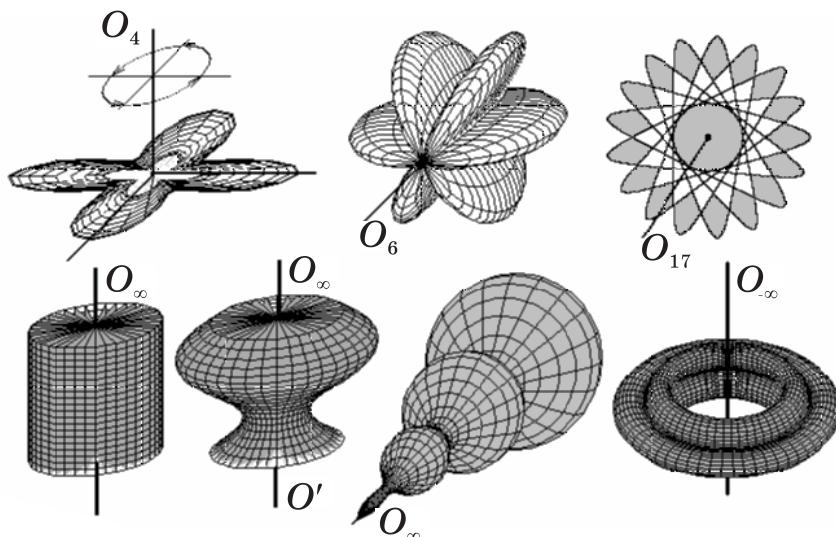


Рис. 188

Сферическая (центральная) симметрия. Тело обладает центром симметрии, если любая прямая, проходящая через центр, является осью симметрии. Иными словами, тело можно повернуть на любой угол относительно любой прямой, проходящей через центр симметрии. Такой симметрией обладает сфера (чем и обусловлено ее название).

Любая характеристика системы, обладающей сферической симметрией, зависит только от расстояния до центра. Так, сила гравитационного притяжения между точечными телами зависит только от расстояния между телами, поэтому говорят, что эта сила сферически симметрична.

Трансляционные симметрии. Этот вид симметрии связан с восстановлением тел при их смещении. Понятно, что такими видами симметрии

обладают только бесконечно большие тела. В некоторых случаях системы повторяют себя в строго о пределенных смещениях. Так, для бесконечной плоскости, покрытой рисунками (рис. 189), при ее смещении на векторы $\vec{A} = k_x \vec{a}_x + k_y \vec{a}_y$ (где k_x, k_y — любые целые числа) происходит ее совмещение с начальным положением. Такой вид симметрии присущ кристаллам, поэтому его изучение играет важную роль в кристаллографии.

Некоторые системы повторяют себя при смещении на произвольное расстояние в определенном направлении. Таким свойством обладает, например, бесконечно длинный прямой цилиндр произвольного сечения (рис. 190).

Для однородной плоскости восстановление происходит при смещении на любое расстояние вдоль любого вектора, параллельного плоскости. Наконец, в однородном веществе можно провести сдвиг в любом направлении на любое расстояние.

Симметрии реальных физических систем обладают свойством «самосохранения». Так, если источники (света, электрические заряды и т. д.) обладают какой либо симметрией, то такой же симметрией обладают и результаты действия этих источников.

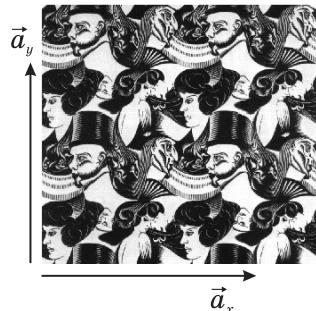


Рис. 189

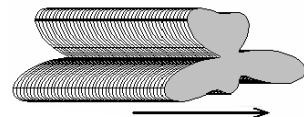


Рис. 190

ЧАСТЬ V. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Рассмотренные нами методы описания механического движения, законы, управляющие этим



Рис. 191

движением, в принципе, позволяют изучать движение любой механической системы (рис. 191). Основные проблемы, возникающие при этом, носят скорее математический характер — может понадобиться слишком много переменных, слишком

много уравнений, слишком много расчетов. Поэтому до настоящего времени продолжаются научные исследования в области механики: строятся новые модели; разрабатываются новые (в том числе компьютерные) методы решения уравнений; анализируются возможности применения различных упрощений и приближений.

В данном параграфе мы рассмотрим основы описания движения жидкостей и газов. Данный раздел физики называется *гидродинамика и аэrodинамика*. Даже основные уравнения этого раздела чрезвычайно сложны, их формулировка и обоснование требуют привлечения не только законов механики, но и законов, описывающих процессы теплопередачи, упругих свойств жидких и газообразных сред и т. д. Поэтому мы только наметим

некоторые основные идеи, тем более что математический аппарат, привлекаемый для описания вполне наглядного движения жидкости, понадобится нам при изучении более абстрактных электрических и магнитных полей.

§ 29. Модель сплошной среды, «точечные» характеристики вещества

Хорошо известно, что все тела, в том числе жидкые, газообразные, состоят из молекул. Поэтому если задать положение каждой молекулы в произвольный момент времени, то движение жидкости или газа будет описано очень подробно. Однако очевидно, что выполнение этой программы невозможно* — достаточно вспомнить, что в 1 см³ содержится более чем 10^{19} молекул. Чтобы только выписать нужное число уравнений движения, не хватит ни бумаги, ни чернил, ни времени. Более того, такое сверхподробное описание являет-

* Справедливости ради отметим, что в настоящее время разрабатывается и используется так называемый динамический подход к исследованию молекулярных систем, в рамках которого жидкость, газ моделируются как набор небольших тел (материальных точек, жестких шариков, дисков), движущихся и взаимодействующих по законам механики. В рамках этих исследований получены достаточно интересные результаты. Однако число частиц, входящих в моделируемую систему, мало — не превышает миллиона (10^6). Реализация таких моделей возможна только с помощью мощных современных компьютеров.

ся явно излишним, извлечь полезные сведения из такого массива информации просто невозможно. Итак, нам необходим принципиально иной способ описания движения жидкости.

Прежде всего отметим, что в подавляющем большинстве случаев описания движения жидкостей и газов нет необходимости рассматривать молекулярную структуру, так как размеры движущихся объемов жидкости, размеры движущихся в жидкости твердых тел значительно превышают размеры молекул. Поэтому в этих случаях используется модель **сплошной среды**. В рамках этой модели газ или жидкость рассматриваются как среда, все характеристики которой плавно и непрерывно изменяются от одной геометрической точки к другой. В рамках такой модели можно вводить «точечные» характеристики среды (например, плотность, удельная теплоемкость, вязкость, показатель преломления, удельное электрическое сопротивление) и рассматривать их как функции координат точек среды. Если свойства среды одинаковы во всех точках пространства, то такая среда называется **однородной**. С точки зрения математики, использование модели сплошной среды означает переход от **дискретного к непрерывному** описанию. Рассмотрим для примера понятие плотности неоднородной среды.

Для однородного вещества плотность ρ равна отношению массы тела m к его объему V , или массе единицы объема тела: $\rho = \frac{m}{V}$. Для однород-

ного вещества отношение массы к объему является величиной постоянной.

В качестве примеров неоднородных веществ можно привести смеси различных веществ; земную атмосферу, плотность которой уменьшается с высотой; плохо перемешанные растворы и т. д. Для тела, изготовленного из неоднородного вещества, введенное понятие плотности $\rho = \frac{m}{V}$ дает только **среднее** значение плотности тела.

Для более подробного описания распределения масс в таких телах можно мысленно разбить тело на малые части (рис. 192), указать номер i «кусочка», определить его объем V_i и массу m_i , рассчитать среднюю плотность — $\bar{\rho}_i = \frac{m_i}{V_i}$. Для увеличения точности описания число частей должно увеличиваться, соответственно, будет возрастать и число средних плотностей. Фактически набор величин ρ_i представляет собой среднюю плотность как функцию номера выделенной части. Понятно, что такое описание не очень удобно. Поэтому принят другой метод описания распределения масс внутри неоднородного тела.

Выберем внутри тела точку с координатами (x, y, z) и вокруг нее очертиим некоторый объем ΔV (его форма — кубик, шарик ... несущественна),

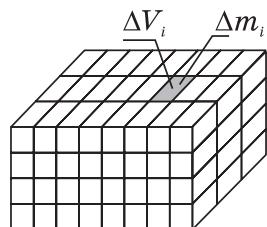


Рис. 192

определим массу вещества, содержащегося внутри выделенного объема Δt и среднюю плотность этого выделенного объема: $\bar{\rho}(x, y, z) = \frac{\Delta m}{\Delta V}$. Далее мысленно будем уменьшать объем выделенной части, соответственно будет уменьшаться и масса этой части. Предел, к которому стремится средняя плотность при уменьшении объема, и называется плотностью вещества в данной точке:

$$\rho(x, y, z) = \frac{\Delta m}{\Delta V}, \text{ при } \Delta V \rightarrow 0.$$

При таком определении плотность становится непрерывной функцией координат.

Аналогично определяются и другие «точечные» характеристики вещества.

С математической точки зрения, для описания характеристик сплошной среды мы используем функции нескольких переменных — координат и времени (в принципе, характеристики среды могут изменяться с течением времени). Такое соответствие, когда каждой точке пространства (трем координатам) ставится в соответствие число, в математике называется скалярным полем. В этом математическом смысле говорят о поле температур, поле давлений, поле плотностей и т. д.

Реальный смысл имеет произведение $\rho(x, y, z)\Delta V$, равное массе вещества в малом объеме ΔV , окружающем точку с координатами (x, y, z) . Тем не менее упрощение математического описания исключает логическую противоречивость. В некоторых

случаях, говоря о бесконечно малом объеме, подразумевают физически бесконечно малый объем — с точки зрения математического описания малый, а с физической — велик по сравнению со средним расстоянием между молекулами, содержащий достаточно много молекул. В таком объеме свойства отдельных частиц (например, их массу) мы равномерно «размазываем» по всему объему, сохраняя ее суммарное значение (рис. 193).

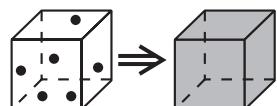


Рис. 193

§ 30. Кинематическое описание движения жидкости и газа — гидрокинематика. Поле скоростей

При кинематическом описании движения любой механической системы нет необходимости подробно рассматривать внутренние физические



Рис. 194

свойства тел, включенных в систему (рис. 194). При описании движения жидкости достаточно принять во внимание ее **текучесть** — способность изменять свою форму при малейшем внешнем воздействии. Свойства жидкостей и газов существенно различаются, однако описание движения жидкостей и газов сходно,

поэтому в данном разделе, говоря об описании движения жидкости, будем иметь в виду, что описание движения газов проводится аналогично.

Если нас интересует движение жидкости целиком, а не конкретно какой-либо молекулы, мы можем говорить о скорости жидкости в данной точке, в данный момент времени. Иными словами, будем следить не за отдельной частицей жидкости (ее скоростью, траекторией и другими характеристиками), а за скоростью жидкости в данной пространственной точке, не обращая внимания, что в другой момент времени в рассматриваемой точке будет находиться другая частица жидкости. Таким образом, основной характеристикой движения будем считать пространственное распределение скоростей жидкости, которое задается векторной функцией $\vec{V}(t, x, y, z)$ — функцией, задающей вектор скорости жидкости в любой точке, в любой момент времени. Конечно, математически такая конструкция очень сложна: вспомните, обычная функция $f(x)$ каждому числу (аргументу x) ставит в соответствие другое число (значение функции). В нашем же случае четырем числам (трем координатам и времени) ставится в соответствие три числа (компоненты вектора). В математике такое соответствие является обобщением понятия функции и называется^{*} **векторным полем**. Поэтому введенная

^{*} Подчеркнем — это тоже чисто математический термин. В дальнейшем мы будем рассматривать физические, то есть реальные поля.

функция $\vec{V}(t, x, y, z)$ часто называется **полем скоростей**. Часто распределение скоростей может сохраняться в течение некоторого промежутка времени — тогда функция $\vec{V}(t, x, y, z) = \vec{V}(x, y, z)$ не зависит от времени. Такое поле скоростей называется **стационарным**. Если же скорости движения жидкости одинаковы во всех точках, то поле скоростей называется **однородным**. Подчеркнем, стационарное — значит, в рассматриваемом временном промежутке скорости остаются постоянными (но могут быть различными в разных точках); однородное — значит, в рассматриваемом объеме скорости одинаковы во всех пространственных точках (но могут изменяться с течением времени).

На первый взгляд, мы изменили сформулированную ранее основную задачу механики — определить закон движения. Однако в задачах движения жидкости, как правило, бывают важны другие характеристики — расход жидкости, распределение давлений, силы сопротивления, подъемная сила крыла и т. д. Все эти и многие другие характеристики могут быть рассчитаны, если известно распределение скоростей жидкости.

Фактически мы признаем, что сплошная среда обладает бесконечно большим числом степеней свободы. Так, одна материальная точка обладает тремя степенями свободы, при непрерывном описании каждая геометрическая точка рассматривается в некотором смысле как материальная. В частности, мы определяем вектор скорости (его

три компоненты) в каждой точке, число которых очевидно бесконечно. При дискретном описании мы должны задать скорости \vec{V}_i ($i = 1, 2, 3\dots$) для каждой частицы (условно говоря, вектор скорости как функцию номера частицы), вместо этого мы определяем скорость как функцию трех непрерывных координат — $\vec{V}(x, y, z)$.

Наглядно представить себе векторное поле достаточно затруднительно — в каждой точке необходимо изобразить вектор, что, конечно, невозможно. Поэтому используются несколько упрощенных способов графического представления векторных полей. Наиболее часто встречается изображение векторных с помощью линий поля — **линий, касательные к которым совпадают с вектором поля** (рис. 195).

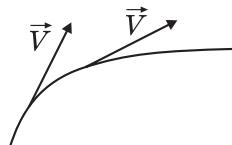


Рис. 195

В рассматриваемом случае *поля скоростей — линии поля* называются линиями тока. Линия тока — такая линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора скорости в данной точке. На линиях тока принято указывать направление движения жидкости. Заметим, что линию тока можно провести через любую точку, поэтому число линий, их густота определяются исключительно эстетическими соображениями.

Семейство линий тока достаточно наглядно представляет движение жидкости в некоторой об-

ласти (рис. 196). Исходя из определения, можно установить их общие свойства:

1. Линии тока не пересекаются (в противном случае в точке пересечения можно построить две касательные, то есть в одной точке скорость жидкости имеет два значения, что абсурдно).

2. Линии тока не имеют изломов (в точке излома опять можно построить две касательные).

3. Линии тока начинаются на источниках и заканчиваются на точках стока жидкости.

Если движение жидкости является стационарным, то линии тока совпадают с траекториями движения частиц жидкости. В нестационарном потоке линии тока изменяются с течением времени, поэтому траектория отдельно взятой частицы отличается от линии тока. В этом случае линии тока следует рассматривать как вспомогательные математические иллюстрации, не имеющие явного физического смысла.

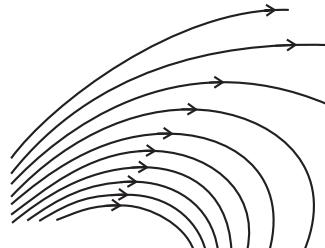


Рис. 196

Задания для самостоятельной работы:

1. Постройте семейство линий тока однородного поля скоростей.

2. Нарисуйте семейство линий тока, исходящих во все стороны от небольшого источника.

§ 31. Поток жидкости



Рис. 197

Пусть нам известно поле скоростей движущейся жидкости (рис. 197). Рассчитаем объем жидкости, протекающей в единицу времени через некоторую воображаемую площадку — часто эту характеристику называют **расход**, или **поток жидкости**. Проще всего решить данную задачу для однородного потока жидкости.

Пусть воображаемая площадка площадью ΔS расположена перпендикулярно однородному потоку жидкости, движущейся со скоростью \vec{V} (рис. 198). За промежуток времени Δt через площадку пройдет жидкость, находящаяся на расстоянии меньшем, чем $V\Delta t$, объем этой жидкости будет равен $V\Delta t \cdot \Delta S$. Итак, в единицу времени через площадку пройдет объем жидкости, равный

$$\Delta\Phi = V\Delta S. \quad (1)$$

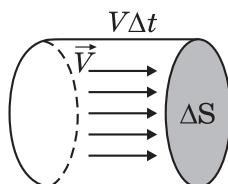


Рис. 198

Пусть площадка расположена под некоторым углом к набегающему потоку жидкости, который по-прежнему считаем однородным (рис. 199). Ориентацию площадки удобно задавать, указывая вектор нормали к этой площадке \vec{n} , модуль, которого равен единице, а направлен перпендикулярно пло-

щадке. Пусть вектор скорости жидкости \vec{V} образует угол α с вектором нормали \vec{n} к площадке площадью ΔS . Объем жидкости, протекающей через площадку за время Δt , может быть найден по формуле $V\Delta t \cos\alpha \cdot \Delta S$. Следовательно, расход (поток) жидкости через площадку определяется выражениями

$$\Delta\Phi = V \cos\alpha \Delta S = (\vec{V} \cdot \vec{n}) \Delta S = V_n \Delta S, \quad (2)$$

где $(\vec{V} \cdot \vec{n}) = V \cos\alpha$ — скалярное произведение векторов \vec{V} и \vec{n} ; V_n — нормальная к площадке компонента вектора скорости. Отметим, что, согласно определению, поток может быть как положительным, так и отрицательным. Знак потока определяется выбором направления нормали к поверхности: в конце концов, этот произвол обусловлен выбором положительного направления движения жидкости.

Наконец, в произвольном поле скоростей объем жидкости, протекающей в единицу времени через произвольную поверхность, подсчитаем следующим образом (рис. 200): разобьем поверхность на малые площадки ΔS (которые будем считать плоскими), определим вектор скорости жидкости \vec{V} на этой

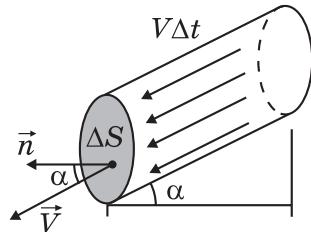


Рис. 199

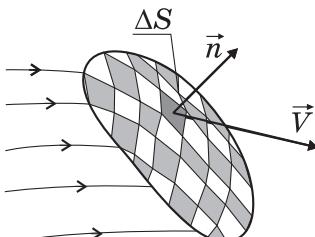


Рис. 200

площадке (который в пределах площадки будем считать постоянным), запишем выражение (2) для расхода жидкости через площадку, просуммируем по всем площадкам рассматриваемой поверхности:

$$\begin{aligned}\Phi &= \Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2 + \Delta\Phi_3 + \dots = \\ &= \sum_i \Delta\Phi_i = \sum_i V_i \cos\alpha_i \cdot \Delta S_i.\end{aligned}\quad (3)$$

Эта сумма называется **потоком вектора скорости через заданную поверхность**.

Подобную сумму в некоторых случаях можно вычислить достаточно просто, иногда ее вычисление может быть громоздким. Заметьте, что скорость жидкости мы определяем в каждой точке (говорят, что это точечная характеристика); поток через поверхность определяется движением жидкости в некоторой части пространства, поэтому эта характеристика является интегральной, описывающей свойства движения обобщенно, усредненно для этой части пространства.

Оказывается, что некоторые законы движения жидкости могут быть сформулированы как теоремы для потока жидкости. С использованием таких теорем можно решать многочисленные и сложные задачи.

Приведем примеры таких «очевидных» теорем.

Первая теорема о потоке несжимаемой жидкости. Если в некоторой области движущейся несжимаемой жидкости отсутствуют источники и стоки, то поток жидкости через любую замкнутую поверхность равен нулю: $\Phi = 0$.

Конечно, все реальные жидкости могут изменять свой объем под действием внешних сил. Однако изменение объема жидкостей обычно настолько мало, что им можно пренебречь, — именно такое приближение используется в **модели несжимаемой жидкости**. Для замкнутой поверхности положительной принимается внешняя нормаль, направленная наружу от объема, ограниченного рассматриваемой поверхностью (рис. 201). В этом случае на одних частях поверхности поток будет положительным (там, где жидкость вытекает из ограниченного объема), на других отрицательным (там, где жидкость втекает внутрь объема). Так как объем жидкости внутри поверхности остается постоянным, то количество жидкости, втекающей внутрь, равно количеству жидкости, вытекающей наружу, — вот смысл сформулированной теоремы.

Применим эту теорему к жидкости, протекающей по трубе переменного сечения, соединенной из двух труб. Площадь поперечного сечения первой — S_1 , второй — S_2 (рис. 202). В качестве поверхности, к которой применим теорему о потоке жидкости, выберем часть боковой поверхности в месте соединения и две плоские площадки,

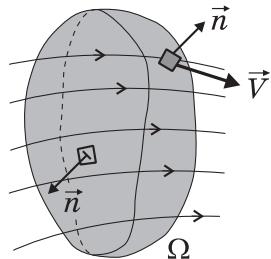


Рис. 201

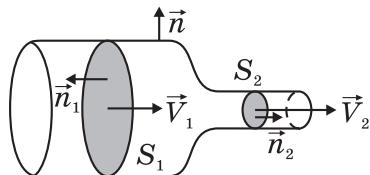


Рис. 202

перпендикулярные оси трубы, находящиеся в широкой и узкой части. Скорость жидкости в широкой части обозначим V_1 , а в узкой части — V_2 . Поток через боковую поверхность равен нулю: $\Phi_{бок} = 0$. Так как здесь векторы скорости и нормали взаимно перпендикулярны, поток через площадку в широкой части трубы равен: $\Phi_1 = -V_1 S_1$ (знак минус появился, так как векторы направлены в противоположные стороны), поток через площадку в узкой части трубы — $\Phi_2 = V_2 S_2$. Таким образом, поток через оговоренную поверхность равен:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_{бок} + \Phi_2 = -V_1 S_1 + V_2 S_2 = 0.$$

Из этого соотношения получим уравнение, связывающее скорости в разных частях трубы: $V_1 S_1 = V_2 S_2$. Это уравнение является частным случаем уравнения **неразрывности**, смысл которого очевиден: «сколько влилось, столько вылилось». Можно сказать, что теорема о потоке несжимаемой жидкости выражает общий случай уравнения неразрывности.

Обобщим данную теорему. Пусть в некоторой области движущейся жидкости имеются источники (и стоки) жидкости. В качестве характеристики источника будем использовать его расход q — количество (объем) жидкости, вытекающей из источника в единицу времени. Будем считать, что «сток» тоже источник, расход которого отрицателен. Из источника жидкость вытекает, в сток стекает — математическая же характеристика для них едина, но отличается знаком.

Вторая теорема о потоке несжимаемой жидкости. Поток несжимаемой жидкости через любую замкнутую поверхность равен сумме расходов источников, находящихся внутри поверхности: $\Phi = q$. Смысл и доказательство этой теоремы аналогичны предыдущей: «сколько вливается, столько же выливается». Заметим, что если внутри рассматриваемой поверхности находятся источники, то поток жидкости через поверхность не зависит от расположения источников. Подчеркнем: распределение скоростей (то есть скорости в разных точках), конечно, зависит от положения источников, но суммарный поток через поверхность полностью определяется суммарным расходом источников. Если же источник находится вне рассматриваемой поверхности, то он изменяет распределение скоростей, но не изменяет суммарный поток через рассматриваемую поверхность.

Применим эту теорему к следующей задаче. Пусть внутри очень большого объема жидкости находится точечный изотропный источник, расход которого равен q . Найдем распределение скоростей жидкости возле источника. Изотропным называется источник, посылающий жидкость во все стороны одинаково. Реально такой источник можно представить в виде сферы с большим числом маленьких отверстий, через которые вытекает жидкость (рис. 203). Понятно, что жидкость будет растекаться от источника во все стороны одинаково, то

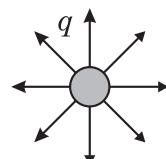


Рис. 203

есть изотропно. Иными словами, скорость течения жидкости по модулю одинакова во всех точках, находящихся на одинаковом расстоянии r от источника, вектор скорости направлен во всех точках радиально от источника. Эти соображения позволяют нам найти зависимость скорости жидкости от расстояния до источника.

В качестве поверхности, к которой применим теорему о потоке, используем сферу радиуса r , в центре которой находится источник (рис. 204). Выделим на поверхности сферы небольшую площадку площадью ΔS . На поверхности сферы направление вектора скорости совпадает с направлением внешней нормали, поэтому поток жидкости через эту площадку равен: $\Delta\Phi = V \cdot \Delta S$. Далее заметим, что на всех участках сферы модуль скорости одинаков. Поэтому суммирование потоков через все участки сферы сводится к суммированию площадей этих площадок. Таким образом, суммарный поток через поверхность сферы равен произведению модуля скорости на площадь сферы: $\Phi = 4\pi r^2 V$. С другой стороны, по теореме о потоке, эта величина равна расходу источника: $\Phi = q$. Приравнивая эти выражения $4\pi r^2 V = q$, получим искомое выражение для скорости жидкости:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi r^2}. \quad (4)$$

Отметим важное обстоятельство: сформулированная теорема о потоке жидкости справедли-

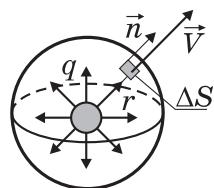


Рис. 204

ва для любой поверхности. Успех в решении этой задачи обусловлен правильным выбором^{*} поверхности: во всех точках сферы модуль скорости постоянен, а угол между скоростью и нормалью равен нулю — именно эти обстоятельства позволили выразить суммарный поток простой формулой. Для другой поверхности теорема о потоке также будет выполняться, но в разных точках этой поверхности могут быть разные скорости, разные углы, поэтому получить выражение для скорости в разных точках невозможно.

Заметим, что сформулированные теоремы не являются математическими, так как они явным образом используют физические свойства жидкости, а именно, ее слабую сжимаемость (т. е. возможность использовать модель несжимаемой жидкости). Для газов приведенные теоремы использовать нельзя, так как объемы газов могут изменяться в широких пределах. Поэтому для формулировки подобных теорем необходимо привлекать физические свойства газов, например, зависимость плотности газа от температуры и давления.

Таким образом, мы показали, что понятие потока оказывается полезным для описания векторного поля. В дальнейшем мы будем широко использовать эту математическую конструкцию над векторным полем для описания физических свойств других реальных полей. В общем случае, если задано векторное поле, то есть в любой точке

^{*} Произволом в выборе надо пользоваться с умом.

пространства с координатами (x , y , z) определен некоторый вектор \vec{A} , то потоком вектора через малую площадку ΔS с нормалью \vec{n} называется величина $\Delta\Phi_{\vec{A}} = (\vec{A} \cdot \vec{n}) \Delta S = A \Delta S \cos\alpha$, где α — угол между вектором поля и нормалью к площадке.

В случае поля скоростей движения несжимаемой жидкости поток этого поля имеет наглядный смысл — объем жидкости, протекающий через поверхность в единицу времени. Для других полей найти смысл потока может быть затруднительно. В таких случаях к потоку следует относиться как к полезной математической величине.

§ 32. Вихревое движение жидкости. Циркуляция скорости

Каждому знакомо движение воды в реке: помимо плавного, почти однородного, движения часто встречаются вихри, водовороты (рис. 205). С помощью теорем о потоке нельзя описать вихревое движение — в вихре поток через любую замкнутую поверхность равен нулю. Поэтому появление вихрей



Рис. 205

не изменяет потока жидкости через замкнутую поверхность. Таким образом, необходимо «придумать» еще одну характеристику движения жидкости, зависящую от наличия или отсутствия вихрей.

Если в движущейся жидкости присутствуют вихри, то можно найти замкнутую линию, двигаясь вдоль которой все время будешь «плыть по течению» (рис. 206). Если же вихри отсутствуют, то при движении по замкнутой линии на некоторых участках обязательно придется «плыть против течения». Именно это отличие позволяет построить требуемую величину, определяющую наличие участков вихревого движения.

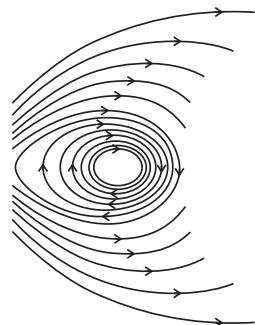


Рис. 206

Рассмотрим произвольную линию (совсем не обязательно, чтобы это была линия тока). Выделим на этом участке малый участок, определяемый вектором $\Delta \vec{l}$ (рис. 207). Пусть скорость жидкости на этом участке равна \vec{V} . Вычислим скалярное произведение этих векторов: $\Delta\Gamma = \vec{V} \cdot \Delta \vec{l} = V \Delta l \cos\alpha$, где α — угол между вектором скорости и касательным вектором к выбранной линии (он совпадает с выделенным малым участком $\Delta \vec{l}$). Далее возьмем произвольную замкнутую линию, разобьем ее на малые участки $\Delta \vec{l}_i$, на каждом из которых вычислим скалярное произведение $\Delta\Gamma = \vec{V} \cdot \Delta \vec{l} = V \Delta l \cos\alpha$ и просуммируем их по всем участкам замкнутой линии (контура):

$$\begin{aligned} \Gamma &= V_1 \Delta l_1 \cos\alpha_1 + V_2 \Delta l_2 \cos\alpha_2 + \\ &+ V_3 \Delta l_3 \cos\alpha_3 + \dots = \sum_i V_i \Delta l_i \cos\alpha_i. \end{aligned} \quad (1)$$

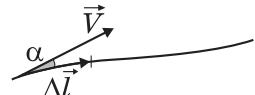


Рис. 207

Построенная таким образом математическая конструкция называется **циркуляцией вектора скорости по заданному контуру** L . Построенная величина может быть как положительной, так и отрицательной, ее знак определяется произвольным выбором положительного направления обхода контура. Но так уж исторически сложилось, что в физике положительным принимается направление обхода против часовой стрелки.

Если в движущейся жидкости вихри отсутствуют, то циркуляция скорости по любому контуру равна нулю (рис. 208). Если же выбранный контур лежит в области вихря, то циркуляция вектора скорости будет отлична от нуля. Таким образом, циркуляция определяет присутствие вихревого движения.

Физические свойства движущейся жидкости таковы, что ее движение может быть как безвихревым (ламинарным), так и вихревым (турбулентным). Поэтому сформулировать какую-либо простую теорему о циркуляции для движущейся жидкости трудно. Однако математическое понятие циркуляции широко используется для описания других полей. Для примера можно указать знаменитую теорему Жуковского, утверждающую, что подъемная сила крыла самолета пропорциональна циркуляции скорости воздуха по контуру, охватывающему крыло.

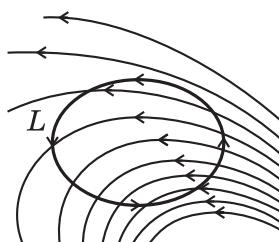


Рис. 208

Обратимся еще раз к определению циркуляции по формуле (1). Если в этой математической конструкции заменить вектор скорости вектором силы, действующей на некоторое тело, то мы увидим, что циркуляция вектора силы является работой силы при перемещении тела по данному контуру. То есть циркуляция вектора силы имеет явный физический смысл. Ранее мы определили понятие потенциальности силы (сила, работа которой не зависит от формы траектории), теперь это же определение можно сформулировать математически иным образом: **сила потенциальна, если ее работа по любому контуру равна нулю.**

И в дальнейшем мы будем встречаться с подобной ситуацией: в некоторых случаях та или иная конструкция имеет наглядный физический смысл, в других является просто удобной вспомогательной математической величиной.

Доказано, что законы, определяющие поток векторного поля через любую замкнутую поверхность и циркуляцию по любому контуру, однозначно позволяют рассчитывать само векторное поле. Поэтому и физические законы для реальных полей формулируются именно в такой форме.

§ 33. Основные законы гидростатики. Давление. Закон Паскаля. Закон Архимеда

Наметив в самых общих чертах принципы кинематического описания движения жидкостей и

газов, приступим к рассмотрению основных идей динамики движения, то есть выяснения причин того или иного вида движения. Основным понятием динамики является взаимодействие тел и его характеристика — сила. Следовательно, для динамического описания движения жидкостей и газов необходимо рассмотреть взаимодействие различных частей жидкой среды между собой. Как мы уже отмечали, эти силы обусловлены межмолекулярными взаимодействиями, их полное описание чрезвычайно сложно. Но сейчас нам нет необходимости досконально знать законы этих взаимодействий — достаточно принять во внимание, что при деформации жидкости (то есть изменении расстояния между молекулами) возникают силы упругости.

Помимо межмолекулярных сил (сил давления, обусловленных деформацией жидкости), на жидкость могут действовать и внешние силы, например, гравитационные (в частности, сила тяжести), инерционные, электрические, магнитные и т. д. Имеет смысл разделить эти внешние силы на две группы — **объемные**, действующие на все части жидкости, и **поверхностные**, действующие только на поверхность жидкости со стороны окружающих тел (например, стенок сосуда).

Пусть жидкость находится в состоянии покоя. В качестве исходных «аксиом» примем законы динамики Ньютона и очевидный экспериментальный факт: жидкость обладает свойством текучести. Полученные в данном разделе результаты в равной мере применимы и к газам.

Рассмотрим, какие следствия можно извлечь из этих «аксиом».

1. Сила, с которой покоящаяся жидкость действует на стенки сосуда, направлена перпендикулярно к этой стенке (рис. 209).

Докажем это утверждение методом от противного. Пусть в некоторой части сосуда сила давления \vec{F}_d , действующая на стенку, направлена под некоторым (не прямым) углом к последней. По третьему закону Ньютона, стенка действует на жидкость с силой \vec{F} , равной по величине и противоположной по направлению: $\vec{F} = -\vec{F}_d$. Разложим эту силу на нормальную (направленную перпендикулярно стенке) \vec{F}_n и тангенциальную (направленную по касательной к стенке) \vec{F}_t составляющие (рис. 210). При наличии тангенциальной силы, действующей на жидкость, жидкость, вследствие текучести, придет в движение. В состоянии равновесия таких сил быть не может. Следовательно, силы взаимодействия стенки и жидкости нормальны к стенке.

2. Силы, действующие на границу мысленно выделенного объема неподвижной жидкости, перпендикулярны этой границе (рис. 211).

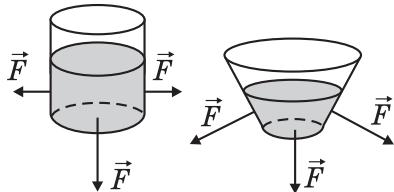


Рис. 209

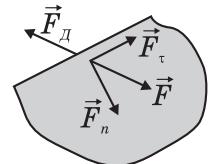


Рис. 210

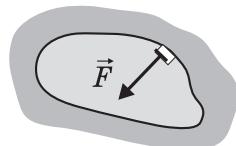


Рис. 211

Это утверждение доказывается аналогично предыдущему — методом от противного.

Итак, вопрос о направлении сил взаимодействия жидкости с сосудом и различных частей жидкости решается однозначно: эти силы направлены по нормали к границе раздела. Если внутри жидкости выделить некоторую малую площадку, то модуль силы, действующей на одну сторону этой площадки, не зависит от ее ориентации. Это свойство внутренних сил позволяет ввести скалярную силовую характеристику взаимодействий внутри жидкости — **давление**.

Строго говоря, силы взаимодействия между различными частями жидкости изменяются от точки к точке, поэтому изменение ориентации не малой площадки приведет к изменению силы, действующей на нее. Для малой^{*} же площадки можно пренебречь изменением сил взаимодействия в ее пределах. Поэтому модуль рассматриваемой силы в этом случае оказывается пропорциональным площади. Следовательно, отношение модуля силы к площади площадки является характеристикой сил упругости внутри жидкости.

Давление — отношение модуля силы, действующей на выделенную малую площадку, к площади этой площадки:

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S} \text{ при } \Delta S \rightarrow 0. \quad (1)$$

Как мы уже отмечали, жидкость может быть как сжата, так и растянута, поэтому силы давле-

^{*} Точнее, следует говорить о бесконечно малой площадке.

ния (силы упругости), оставаясь нормальными, могут быть направлены в разные стороны от границы жидкости. Для указания направления можно указывать знак давления. Принято считать давление положительным, если сила давления жидкости направлена наружу от рассматриваемого объема, что соответствует сжатой жидкости, в случае же растянутой жидкости силы упругости направлены внутрь жидкости, поэтому давление такой жидкости считается отрицательным.

Понятно, что сила, действующая на площадку, может зависеть от ее положения внутри жидкости, поэтому и давление может изменяться при переходе от одной точки объема жидкости к другой. В этом смысле давление следует рассматривать как точечную характеристику, то есть как функцию координат $p(x, y, z)$.

Конечно, измерить давление «в данной точке» невозможно — измерению поддается только сила, действующая на площадку конечной площади. Кроме того, бессмыленно говорить о давлении на площадях, сравнимых с размерами отдельной молекулы. Однако, с точки зрения простоты математического описания, удобней рассматривать давление именно как функцию координат, понимая физическую ограниченность этого понятия.

Учитывая, что сила, действующая на малую площадку, направлена по нормали к площадке, а ее модуль выражается из формулы (1), вектор силы можно записать в виде $\Delta\vec{F} = p\Delta S\vec{n}$, где \vec{n} — единичный вектор нормали к площадке. Для вычисления

суммарной силы давления на некоторую поверхность внутри жидкости необходимо разбить эту поверхность на малые участки (рис. 212), вычислить силу, действующую на каждую площадку, и просуммировать все эти силы:

$$\vec{F} = \sum_i p_i \Delta S_i \vec{n}_i.$$

Продолжим рассмотрение следствий из условий равновесия жидкости.

3. Векторная сумма внешних сил, действующих на любую мысленно выделенную часть неподвижной жидкости, равна нулю.

Это утверждение просто повторяет общее условие равновесия любого тела, в том числе и жидкого.

4. При отсутствии объемных сил, действующих на жидкость, давление во всех точках объема одинаково.

Для доказательства этого положения мысленно выделим внутри жидкости произвольно ориентированный узкий цилиндр (рис. 213). Так как жидкость в выделенном объеме находится в покое, то силы, действующие на основания цилиндра, равны по модулю и противоположны по направлению: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Из этого соотношения и определения давления следует, что давления в точках оснований цилиндров равны. Аналогичные рассуждения

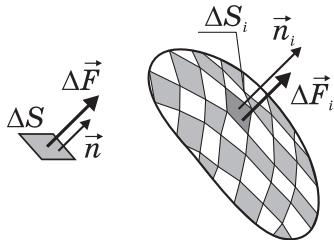


Рис. 212

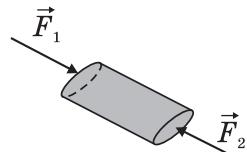


Рис. 213

справедливы для любого цилиндра, следовательно, давление во всех точках жидкости одинаково.

Справедливо и обратное утверждение.

5. Если давление жидкости во всех точках одинаково, то суммарная сила, действующая на произвольную замкнутую поверхность, полностью находящуюся внутри жидкости, равна нулю.

Выделим внутри объема жидкости произвольную замкнутую поверхность. На каждый малый участок поверхности действует сила давления жидкости, направленная перпендикулярно данному участку. Докажем, что сумма проекций сил давления на произвольное направление (например, ось X) равна нулю. Для этого разобъем выделенную часть объема на узкие цилиндры, боковые поверхности которых параллельны выделенной оси (рис. 214). На основания этих цилиндров действуют силы давления, равные: $F_1 = pS_1$, $F_2 = pS_2$, где S_1 , S_2 — площади оснований цилиндров. Проекции сил на выбранное направление оси равны: $F_{1x} = pS_1 \cos\alpha_1$, $F_{2x} = -pS_2 \cos\alpha_2$, где α_1 , α_2 — углы между нормальми к основаниям и осью X . Теперь заметим, что $S_1 \cos\alpha_1 = S_2 \cos\alpha_2 = S_0$, где S_0 — площадь поперечного сечения выбранного цилиндра, поэтому $F_{1x} + F_{2x} = 0$. Аналогичное соотношение справедливо для всех цилиндров, на которые разбито тело,

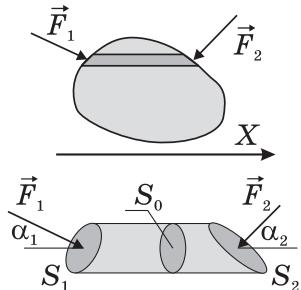


Рис. 214

поэтому сумма проекций сил на ось X равна нулю. Так как ось X выбрана произвольно, то сумма проекций сил давления на любую ось равна нулю, следовательно, и векторная сумма рассматриваемых сил также равна нулю.

6. Закон Паскаля. Давление на поверхность жидкости, произведенное внешними силами, передается жидкостью во все стороны одинаково.

Данный закон справедлив и в том случае, когда на жидкость действуют объемные силы.

Пусть жидкость находится в судне под поршнем (рис. 215). Приложим к поршню дополнительную нормальную силу \vec{F} . Под действием этой силы жидкость дополнительно сожмется, что приведет к увеличению давления. В состоянии равновесия эта дополнительная сила будет скомпенсирована равным увеличением силы давления на поршень со стороны жидкости. Следовательно, увеличение давления жидкости непосредственно под поршнем будет равно: $\Delta p_0 = \frac{\vec{F}}{S_0}$, где S_0 — площадь поршня. Выделим внутри жидкости произвольную замкнутую поверхность, часть которой совпадает с поверхностью поршня. В состоянии равновесия сумма объемных сил $\vec{F}_{об.}$, действующих на выделенную часть жидкости, и поверхностных сил давления $\vec{F}_{нов} = \sum_i p_i \Delta S_i \vec{n}$ равна нулю:

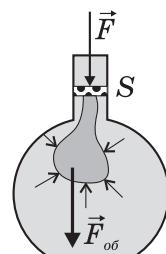


Рис. 215

$$\vec{F}_{\text{об.}} + \sum_i p_i \Delta S_i \vec{n} = \vec{0}. \quad (2)$$

Дополнительная сила давления на часть выбранной поверхности под поршнем должна быть скомпенсирована увеличением поверхностных сил давления на остальную поверхность. Обозначим увеличение давления вблизи части ΔS_i поверхности — Δp_i . В состоянии равновесия должно выполняться соотношение, аналогичное (2):

$$\vec{F}_{\text{об.}} + \sum_i (p_i + \Delta p_i) \Delta S_i \vec{n} = \vec{0}. \quad (3)$$

Учитывая, что суммарная объемная сила не изменилась, из (2), (3) следует, что соотношение

$$\sum_i \Delta p_i \Delta S_i \vec{n} = \vec{0}$$

должно выполняться для любой поверхности внутри объема жидкости, что возможно только в том случае, если величины Δp_i одинаковы во всех точках жидкости, то есть $\Delta p_i = \Delta p_0 = \frac{F}{S_0}$. Отметим, что закон Паскаля можно интерпретировать следующим образом: **в состоянии равновесия изменение давления в одной точке жидкости приводит к равному изменению давления во всех остальных точках жидкости.**

Существенным в данной формулировке является упоминание о состоянии равновесия, потому что при увеличении давления в некоторой точке жидкости требуется некоторый промежуток времени, чтобы произошло установление равновесия в остальных частях объема жидкости, иными словами, возмущение жидкости распространяется внутри

объема с конечной скоростью. Позднее мы покажем, что эта скорость есть скорость распространения упругих волн (т. е. звука) в данной жидкости.

Важными следствием закона Паскаля является так называемый «гидростатический парадокс»: давление жидкости на дно сосуда не зависит от формы сосуда. Он проявляется в свойствах сообщающихся сосудов. Закон Паскаля также является теоретическим обоснованием таких устройств, как гидравлический пресс, сифон и т. д.

7. В поле тяжести земли давление жидкости на глубине определяется по формуле

$$p = \rho gh, \quad (4)$$

где ρ — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения. Давление, определяемое формулой (4), называется **гидростатическим**.

Для вывода этой формулы достаточно выделить внутри объема жидкости вертикальный цилиндр высотой h , верхнее основание которого площадью S находится на свободной поверхности жидкости, и рассмотреть условия его равновесия. Объемные силы, действующие на жидкость внутри выделенного цилиндра (в данном случае это сила тяжести $mg = \rho gV = \rho ghS$), уравновешиваются силой давления на нижнее основание цилиндра pS . Из условия равенства этих сил следует формула (4).

Заметим, что формула (4) описывает только ту часть давления, которая обусловлена силой тяжести, действующей на жидкость. В общем случае, полное давление на глубине h

будет равно сумме гидростатического давления и внешнего давления на поверхность жидкости (например, атмосферного давления).

8. Закон Архимеда. На погруженное в жидкость тело действует выталкивающая сила, равная суммарной объемной силе, действующей на жидкость в объеме тела.

Доказательство этого закона достаточно просто. По своей природе выталкивающая сила есть векторная сумма сил давления жидкости на поверхность тела (рис. 216). Следовательно, эта сила определяется распределением давления жидкости вблизи поверхности тела. Мысленно уберем тело из жидкости, оставив только его «оболочку», которую заполним той же жидкостью. От такой замены суммарная сила давления на поверхность не изменится. С другой стороны, очевидно, что жидкость в объеме тела, находящаяся в такой же жидкости, будет находиться в равновесии. Поэтому суммарная сила давления будет равна по величине и противоположна по направлению объемной силе, действующей на жидкость в объеме тела.

В частном случае, если единственной объемной силой является сила тяжести и при постоянной плотности жидкости ρ выталкивающая сила (сила Архимеда F_{Ap}) по модулю равна силе тяжести, действующей на жидкость в объеме тела V и противоположна ей по направлению, то

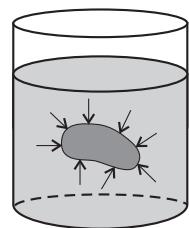


Рис. 216

$$F_{Ap} = \rho g V, \text{ или, в векторной форме, } \vec{F}_{Ap} = -\rho \vec{g} V.$$

Заметим, что выталкивающая сила появляется только в том случае, когда давление внутри жидкости различно в различных точках. В случае постоянного давления (каким бы большим оно не было) суммарная сила давления равна нулю. Различие давлений обусловлено только объемными силами, действующими на жидкость. Поверхностные силы, как было нами показано, не могут привести к возникновению разности давлений в различных точках жидкости. Допустим, что жидкость находится под поршнем — увеличение силы давления на поршень не приведет к увеличению выталкивающей силы, действующей на погруженное в жидкость тело.

В общем случае, выталкивающая сила может описываться более сложными формулами, которые могут учитывать изменение плотности жидкости, изменение ускорения свободного падения как по величине, так и по направлению, присутствие других объемных сил — инерционных, электрических, магнитных и т. д.



Рис. 217

Исторические дополнения

Блез Паскаль (фр. *Blaise Pascal*) родился 19 июня 1623 года в городе Клермон-Ферран (Франция) в семье председателя налогового управления (рис. 217). В 1631 году, после смерти матери, семья переехала в Париж.

Ранние работы Блеза относились к естественным и прикладным наукам.

Отец Блеза был сборщиком налогов, и, наблюдая за его бесконечными утомительными расчетами, Паскаль задумал создать вычислительное устройство, которое могло бы помочь этой работе. В 1634 году (в 11 лет) где-то за обеденным столом кто-то зацепил ножом фаянсовое блюдо. Оно зазвучало. Но стоило прикоснуться к блюду пальцем, как звук исчез. Чтобы найти этому объяснение, Паскаль проводит опыты, результаты которых ложатся в основу его «**Трактата о звуках**».

В 1639 году, в 16 лет, он написал замечательный трактат о предмете проективной геометрии. В это же время он доказал **теорему Паскаля**: если вершины шестиугольника лежат на некотором коническом сечении, то три точки пересечения прямых, содержащих противоположные стороны, лежат на одной прямой. Этот результат и 400 следствий из него Паскаль изложил в виде трактата (не сохранился).

В 1642 году (в 19 лет) Паскаль начал создание своей **суммирующей машины** — «паскалины» — и до 1652 года построил около 50 ее вариантов. Изобретённый Паскалем принцип связанных колёс почти на три столетия стал основой создания большинства вычислительных устройств.

В 1648 году, несмотря на болезнь ног, Паскаль завершил «опыты, касающиеся пустоты», и доказал, что в природе нет так называемого «страха пустоты». Он изучал равновесие жидкости под действием атмосферного давления. В историю физики Паскаль вошел, установив **основной закон гидростатики** и подтвердив предположение Торричелли о существовании атмосферного давления. Исходя из своих открытий, Паскаль изобрел **гидравлический пресс**, на века опередивший технологию того времени.

В 1654 году, в переписке с Пьером де Ферма, закладываются основы **теории вероятностей**. В комбинаторике исследованы свойства «**треугольника Паскаля**» и его применение к подсчёту числа сочетаний.

19 августа 1662 после мучительной, продолжительной болезни Блез Паскаль умер.

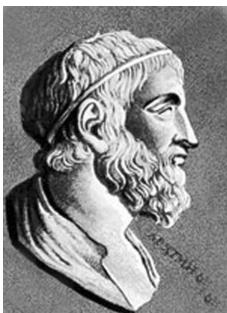


Рис. 218

АРХИМЕД (ок. 287–212 до н. э.), величайший древнегреческий математик и механик (рис. 218).

Уроженец греческого города Сиракузы на острове Сицилия, Архимед был приближенным управлявшего городом царя Гиерона (и, вероятно, его родственником). Возможно, какое-то время Архимед жил в Александрии — знаменитом научном центре того времени. То, что сообщения о своих открытиях он адресовал математикам, связанным с Александрией, например, Эратосфену, подтверждает мнение о том, что Архимед являлся одним из деятельных преемников Евклида, развивавших математические традицииalexandrijskoy schoolы. Вернувшись в Сиракузы, Архимед находился там вплоть до своей гибели при захвате Сиракуз римлянами в 212 до н. э.

В разгар боя 75-летний Архимед сидел на пороге своего дома, углублённо размышляя над чертежами, сделанными им прямо на дорожном песке. В это время пробегавший мимо римский воин наступил на чертёж, и возмущённый учёный бросился на римлянина с криком: «Не тронь моих чертежей!». Солдат остановился и хладнокровно зарубил старика мечом (рис. 219). Кроме того, Плутарх сообщает, что Архимед, «как утверждают, завещал родным и друзьям установить на его могиле описанный вокруг шара цилиндр с указанием отношения объема описанного тела к вписанному», что было одним из наиболее славных его открытий.

Легенды об Архимеде. Помимо замечательных математических работ, Архимед прославился как изобретатель различного рода механических устройств и инструментов.



Рис. 219

Правда, авторство Архимеда во многих случаях вызывает сомнения. Так, считается, что Архимед был изобретателем так называемого архимедова винта, который служил для подъема воды на поля и явился прообразом корабельных и воздушных винтов, хотя, судя по всему, такого рода устройство использовалось и раньше.

Плутарх рассказывает, что в ответ на просьбу царя Гиерона продемонстрировать, как тяжелый груз может быть сдвинут малой силой, Архимед взял трехмачтовое грузовое судно, которое перед этим с превеликим трудом вытянули на берег много людей, усадил на него множество народа и загрузил обычным грузом. После этого Архимед сел поодаль и стал без особых усилий тянуть на себя канат, перекинутый через полиспаст, отчего судно легко и плавно, словно по воде, «поплыло» к нему». Именно в связи с этой историей связываются слова Архимеда: «Дайте мне, где стать, и я сдвину Землю». Известна также история, что царь Гиерон поручил Архимеду проверить, из чистого ли золота сделана его корона или же ювелир присвоил часть золота, сплавив его с серебром. «Размышляя над этой задачей, Архимед как-то зашел в баню и там, погрузившись в ванну, заметил, что количество воды, переливающейся через край, равно количеству воды, вытесненной его телом. Это наблюдение подсказало Архимеду решение задачи о короне, и он, не медля ни секунды, выскочил из ванны и, как был нагой, бросился домой, крича во весь голос о своем открытии: «Эврика! Эврика!» (греч. «Нашел! Нашел!»)».

Инженерный гений Архимеда с особой силой проявился во время осады Сиракуз римлянами в 212 году до н. э. в ходе Второй Пунической войны. А ведь в это время ему было уже 75 лет! Построенные Архимедом мощные метательные машины забрасывали римские войска тяжёлыми камнями. Думая, что они будут в безопасности у самых стен города, римляне кинулись туда, но в это время лёгкие метательные машины близкого действия забросали их градом ядер. Мощные краны захватывали железными крюками корабли, при-

поднимали их кверху, а затем бросали вниз, так что корабли переворачивались и тонули.

Римляне вынуждены были отказаться от мысли взять город штурмом и перешли к осаде. Знаменитый историк древности Полибий писал: «Такова чудесная сила одного человека, одного дарования, умело направленного на какое-либо дело... римляне могли бы быстро овладеть городом, если бы кто-либо изъял из среды сиракузян одного старца».

Архимед известен как один из основоположников успешного применения геометрии к статике и гидростатике. В книге «О равновесии плоских фигур» он приводит чисто геометрический вывод закона рычага. По сути, его доказательство основано на сведении общего случая рычага с плечами, обратно пропорциональными приложенным к ним силам, к частному случаю равноплечего рычага и равных сил. Все доказательство от начала и до конца пронизано идеей геометрической симметрии.

В своем сочинении «О плавающих телах» Архимед применяет аналогичный метод к решению задач гидростатики. Архимед доказывает теоремы относительно величины погруженной части тела и веса тела в жидкости как с большей, так и с меньшей плотностью, чем само тело. Далее он формулирует закон, согласно которому «всякое тело, погруженное в жидкость, теряет по сравнению со своим весом в воздухе столько, сколько весит вытесненная им жидкость».

§ 34. Движение жидкости — гидродинамика. Движение жидкости по трубам

Движение жидкости или газа подчиняется всем общим законом механики — законам Ньютона, законам сохранения энергии, импульса, мо-

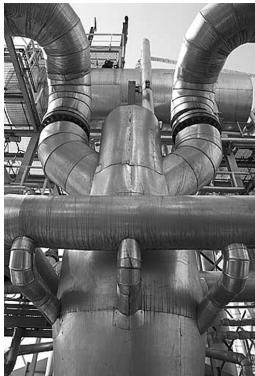


Рис. 220

мента импульса (рис. 220). Однако применение этих общих законов встречает значительные трудности, обусловленные рядом причин. Во-первых, жидкость обладает бесконечным числом степеней свободы, что приводит к необходимости перехода от дискретного к непрерывному описанию. Во-вторых, свойства жидкостей (и особенно газов) изменяются при изменении внешних воздействий. Так могут изменяться плотности, вязкости, сжимаемости жидких и газообразных сред при изменении давления, температуры и т. д. В-третьих, изменение параметров среды в одной точке приводит к изменению параметров в других точках не мгновенно, а через некоторые промежутки времени, обусловленные конечностью скоростей распространения упругих волн, теплоты и т. д. Эти обстоятельства приводят к тому, что наука о движении жидкостей и газов (гидродинамика и аэродинамика) является одной из самых сложных в математическом плане.

Мы рассмотрим существенно упрощенную проблему — описание стационарного течения жидкости, то есть такого течения, когда скорости (поле скоростей) в различных точках могут быть различными, но не изменяться с течением времени. Такое течение жидкости также называется стационарным. Подчеркнем, что при стационарном течении

в некоторых областях жидкость может двигаться с ускорением — ведь при переходе от точки к точке скорость движения конкретной частицы жидкости может изменяться. Кроме того, ограничим наше рассмотрение моделью **несжимаемой** жидкости. При взаимодействии движущейся жидкости с твердыми телами, а также при относительном движении слоев жидкости появляются силы вязкого трения. Если роль этих сил невелика, если ими можно пренебречь, то используется модель **идеальной жидкости** — жидкости, не обладающей вязкостью. Будьте внимательны, так как в данном разделе используются модели как идеальной, так и вязкой жидкости.

По-прежнему не рассматривая конкретные физические свойства жидкости, посмотрим, какие следствия можно извлечь из общих законов динамики.

34.1. Давление в движущейся жидкости

Уточним понятие давления на случай движущейся жидкости. В случае неподвижной жидкости давление обусловлено ее сжатием или растяжением. Возникающие при этом силы упругости, действующие на произвольную площадку внутри жидкости, не зависят от ориентации последней. Для иллюстрации высказанного утверждения проведем такой эксперимент (хотя бы мысленный).

В качестве измерителя давления будем использовать манометр, представляющий собой маленькую жесткую цилиндрическую коробку, одно из оснований которой способно деформироваться (рис. 221). Это основание назовем мембраной. Прогиб мембранны служит мерой давления жидкости на мембрану. Можно присоединить к коробке измерительную трубку. Заполнив коробку и частично трубку некоторой жидкостью, получим измеритель давления — манометр, в котором высота уровня жидкости в трубке пропорциональна силе давления на мембрану. Если площадь мембранны мала, то описанный прибор позволяет измерять давление «в точке». При погружении такого манометра в неподвижную жидкость показания будут одинаковы при любой ориентации мембранны.

Иное дело — показания манометра при его погружении в движущуюся жидкость. Понятно, что высота поднятия жидкости в трубке будет максимальна, если плоскость мембранны перпендикулярна скорости движения жидкости (рис. 222). В этом случае сила, действующая на мембрану со стороны жидкости, будет зависеть не только от степени сжатия жидкости, но и от ее скорости. Та часть силы давления, которая зависит от скo-

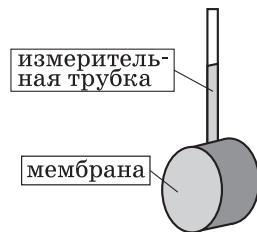


Рис. 221

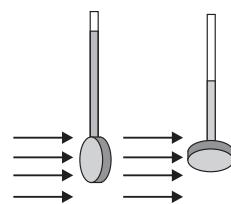


Рис. 222

рости потока, называется **динамическим напором**. Его появление связано с тем, что наш измерительный прибор будет возмущать поток жидкости, заставляя часть жидкости изменять направление скорости, что неизбежно приводит к появлению дополнительной силы давления. Если же расположить мембрану так, чтобы вектор скорости жидкости был направлен параллельно (по касательной, тангенциально) измерительной мембране, то возмущение движения жидкости может быть пренебрежимо малым, поэтому при таком положении манометра его показания будут соответствовать давлению, обусловленному исключительно сжатием (или растяжением) жидкости. Измеренное таким способом давление мы и будем подразумевать в дальнейшем изложении.

34.2. Распределение давления в идеальной жидкости, движущейся по горизонтальной трубе

Рассмотрим распределение давления в горизонтальной цилиндрической трубе, полностью заполненной жидкостью (рис. 223). Для этого расположим на трубе ряд измерительных манометров, высота уровня жидкости в которых будет показывать величину давления в данном месте трубы.



Рис. 223

Если жидкость неподвижна, то давление жидкости и, соответственно, высота жидкости в измерительных трубках будут одинаковы во всех точках трубы (рис. 224).

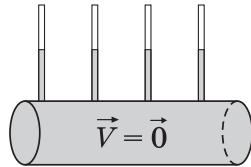


Рис. 224

Для идеальной жидкости (то есть при пренебрежении силами вязкого трения) давление внутри горизонтальной трубы остается постоянным и при равномерном движении жидкости — в этом случае нет необходимости преодолевать силы сопротивления.

Исследуем теперь распределение давлений внутри трубы переменного сечения при движении идеальной жидкости. Пусть труба состоит из двух сочлененных частей, площади поперечных сечений которых равны S_1 и S_2 (рис. 225). В такой трубе при движении даже идеальной жидкости в области сочленения должна существовать область изменения давления.

Действительно, согласно уравнению неразрывности, скорости движения жидкости в разных частях трубы связаны соотношением $v_1 S_1 = v_2 S_2$. Поэтому при переходе жидкости из более широкой в более узкую части трубы скорость жидкости должна возрастать, что может произойти только благодаря действию силы, обусловленной разностью давлений в узкой и широ-

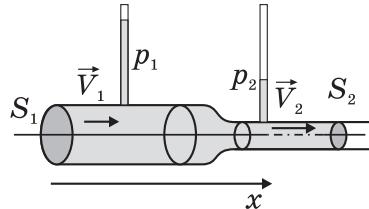


Рис. 225

кой частях. Причем давление в более широкой части должно быть выше.

Для упрощения расчета разности давлений представим себе, что в обеих частях трубы расположены легкие подвижные поршни. Кроме того, пренебрежем силами вязкого трения, то есть будем считать жидкость идеальной. Пусть поршень в левой части трубы сместился на расстояние h_1 , тогда поршень в правой части сместится на расстояние h_2 . Из условия несжимаемости жидкости смещения поршней связаны соотношением $h_1S_1 = h_2S_2 = V$, где V — объем жидкости, прошедшей через поперечное сечение трубы. На левый поршень действует внешняя сила $F_1 = p_1S_1$, работа, совершенная этой силой при смещении поршня, будет равна: $A_1 = p_1S_1h_1$. Правый поршень совершил работу (по перемещению жидкости за поршнем) $A_2 = p_2S_2h_2$. Кроме того, при перемещении жидкости возрастает кинетическая энергия жидкости, прошедшей через место сочленения. Увеличение кинетической энергии равно: $\Delta E_k = \frac{\rho S_2 h_2}{2} v_2^2 - \frac{\rho S_1 h_1}{2} v_1^2$. По закону сохранения энергии, работа, совершенная над левым поршнем внешней силой, равна сумме работы, совершенной правым поршнем над «внешней» жидкостью, и изменению кинетической энергии системы: $A_1 = A_2 + \Delta E_k$. С учетом условия постоянства объема жидкости, это уравнение приобретает вид

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2}. \quad (1)$$

Таким образом, мы получили величину скачка давления в месте сочленения трубы, которая квадратично возрастает с ростом скорости течения.

На рис. 226 схематически показано распределение давления вдоль оси трубы — скачок давления происходит в области сочленения. При скорости движения, равной нулю, давление постоянно во всех точках жидкости.

Из уравнения (1) можно вычислить скорости движения и расход жидкости в зависимости от приложенной разности давлений:

$$Q = S_1 v_1 = S_2 v_2 = \sqrt{\frac{2S_1^2 S_2^2}{S_1^2 - S_2^2} \cdot \frac{\Delta p}{\rho}}. \quad (2)$$

Как следует из полученной формулы, расход жидкости не пропорционален приложенной разности давлений: так, для увеличения расхода жидкости в два раза разность давлений должна быть увеличена в четыре раза.

Задания для самостоятельной работы:

1. Из формулы (1) следует, что скачок давления не зависит от направления движения жидкости. Объясните полученный результат. В какую же сторону будет двигаться жидкость, если к концам трубы приложить некоторую разность давлений?

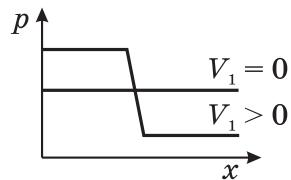


Рис. 226

2. Нарисуйте силы, действующие на движущуюся жидкость в трубе переменного сечения со стороны стенок трубы.

3. Из формулы (2) следует, что при выравнивании площадей поперечного сечения труб ($S_2 \rightarrow S_1$) расход жидкости стремится к бесконечности. Объясните этот результат. Можно ли применять эту формулу при $S_2 > S_1$?

34.3. Уравнение Бернулли

Уравнение (1) предыдущего раздела можно записать в форме уравнения сохранения: $p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} = \text{const}$. Можно показать, что такое уравнение справедливо для идеальной несжимаемой жидкости при ее движении по горизонтальной трубе переменного сечения. Иными словами, величина

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const} \quad (1)$$

остается постоянной в любом сечении трубы.

Задание для самостоятельной работы.

Покажите, что при движении идеальной несжимаемой жидкости по не горизонтальной трубе в любом поперечном сечении остается постоянной величина

$$p + \rho gh + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const}, \quad (2)$$

где h — высота, на которой находится центр рассматриваемого сечения, g — ускорение свободного падения (рис. 227).

Уравнение (1), или, в более общей форме, (2), впервые получено Даниилом Бернулли и носит его имя. Это одно из основных уравнений динамики идеальной жидкости, справедливое для любого не турбулентного движения идеальной жидкости. По своей же физической сути оно выражает закон сохранения механической энергии для движущейся жидкости.

Из уравнения Бернулли следует, что давление жидкости меньше в тех местах, где скорость движения больше. Однако нельзя утверждать, что увеличение скорости является причиной уменьшения давления. Наоборот: уменьшение давления приводит к увеличению скорости. Как и прежде, в установившемся режиме устанавливается такое распределение давления, которое обеспечивает стационарное течение. При учете вязкого трения уравнение Бернулли оказывается несправедливым, так как часть механической энергии «теряет-ся», переходит в тепловую. Однако и в этом случае связь между давлением и скоростью качественно

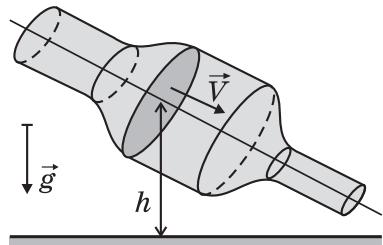


Рис. 227

остается прежней: в местах большей скорости движения давление должно быть меньше.

Задания для самостоятельной работы:

1. Какой физический смысл имеют величины ρgh и $\frac{\rho v^2}{2}$?

2. Открытый вертикальный цилиндрический сосуд заполнен жидкостью до высоты h . В дне суда проделывают небольшое отверстие. Используя уравнение Бернулли, покажите, что скорость истечения жидкости из отверстия определяется формулой Э. Торричелли $v = \sqrt{2gh}$.

34.4. Плотность энергии движущейся жидкости

Как и всякое движущееся тело, движущаяся жидкость обладает кинетической энергией. Выделим внутри движущейся жидкости малый объем* ΔV (рис. 228), в котором заключена масса жидкости $\Delta m = \rho \Delta V$. Если в пределах этого выделенного объема жидкость движется со скоростью v , то она обладает кинетической

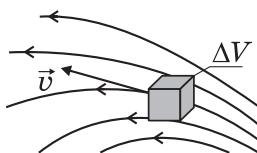


Рис. 228

* Следите внимательно за обозначениями физических величин — их так много, что не хватает различных букв. В этом разделе символ V означает объем, а v — скорость.

энергией $\Delta W = \frac{\rho \Delta V \cdot v^2}{2}$. Введем «точечную» энергетическую характеристику — для этого разделим кинетическую энергию на объем, в котором эта энергия заключена:

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{\rho v^2}{2}. \quad (1)$$

Полученная физическая величина называется **объемной плотностью кинетической энергии** — энергии, заключенной в единице объема движущейся жидкости.

В неоднородных полях скоростей для строгого определения плотности энергии «в данной точке» необходимо совершить обычный предельный переход $\Delta V \rightarrow 0$, не забывая, что физический смысл имеет только произведение $w \Delta V$.

Таким образом, мы получаем еще одну характеристику поля скоростей движущейся жидкости. В движущейся жидкости энергия переносится от одной точки к другой. Характеристикой переноса энергии служит **вектор плотности потока энергии**, который определяется как произведение плотности энергии на скорость движения жидкости:

$$\vec{J} = w \vec{v}. \quad (2)$$

Эта векторная физическая величина определена в каждой пространственной точке, поэтому с математической точки зрения также описывается векторным полем, для которого определены все математические операции над векторным полем.

Поток (как математическая операция) этого вектора через площадку ΔS , положение которой определяется вектором нормали \vec{n}

$$\Delta\Phi_j = \vec{J} \cdot \vec{n} \Delta S,$$

имеет смысл энергии, которая перетекает через площадку в единицу времени (рис. 229).

В принципе, на основании физических законов можно сформулировать ряд теорем, определяющих как плотность энергии, так и плотность потока энергии. При описании движения твердых тел пользуются как динамическим (основанном на законах Ньютона), так и энергетическим подходом. Аналогичная ситуация и при описании движения жидкостей, правда, в последнем случае уравнения гораздо сложнее и решаются значительно реже.

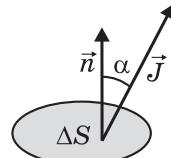


Рис. 229

34.5. Движение вязкой жидкости по горизонтальной трубе

Если по горизонтальной трубе постоянного сечения будет протекать реальная жидкость, для которой нельзя пренебречь силами вязкого трения, то давление в трубе не будет постоянным, произойдет его перераспределение, которое будет существенно зависеть от свойств жидкости. Рассматривая проблемы возникновения сил вязкого трения, мы упоминали о такой характеристике жидкости, как **вязкость**. Сейчас мы уточним это понятие.

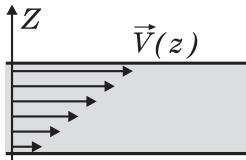


Рис. 230

Рассмотрим плоский поток жидкости, в пределах которого скорость $\vec{v}(z)$ различных слоев изменяется, оставаясь параллельной основанию потока (рис. 230).

В реальной жидкости различные слои жидкости, имеющие разные скорости, будут взаимодействовать между собой, то есть между слоями жидкости благодаря межмолекулярным взаимодействиям будут возникать силы вязкого трения — более медленный слой будет тормозить более быстрый.

Важно отметить, что эти силы направлены параллельно слоям жидкости, то есть тангенциально к границе раздела (рис. 231). Величина этих сил также зависит от распределения скорости $\vec{v}(z)$, где z — координата, ось которой направлена перпендикулярно скорости течения.

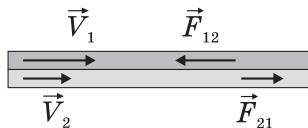


Рис. 231

Сила вязкости определяется законом Ньютона*: тангенциальная сила вязкого трения между движущимися слоями жидкости, приходящаяся на единицу площади соприкосновения, равна:

$$F = \eta \frac{\Delta v}{\Delta z}.$$

В этой формуле коэффициент пропорциональности η полностью определяется свойствами жидкости и называ-

* И. Ньютон является автором многих законов — и не только в механике!

ется ее вязкостью. Вязкость может изменяться в широких пределах: она мала для легко подвижных жидкостей, таких, как вода, бензин, эфир, и велика для малоподвижных жидкостей, таких, как масло, мед, смола и т. д. В целом, строгое понятие вязкости вполне соответствует обычным представлениям о вязких и маловязких жидкостях. Модель движущейся жидкости, в рамках которой пренебрегают вязкостью, называется **идеальной жидкостью**.

Обратите внимание: в случае неподвижной жидкости силы взаимодействия между слоями всегда нормальны, в движущейся жидкости появляются тангенциальные составляющие!

Важно отметить, что силы вязкости не являются консервативными: наличие этих сил, их работа приводит к переходу механической энергии в тепловую, к потерям механической энергии.

При стационарном движении жидкости вдоль трубы на нее со стороны стенок будут действовать тормозящие силы вязкого трения. Поэтому скорость движения жидкости в поперечном сечении будет различной, установится некоторое стационарное распределение скоростей — скорость максимальна в центре трубы и приближается к нулю вблизи стенок (рис. 232).

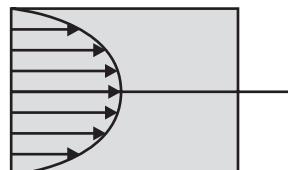


Рис. 232

Для расчета сил вязкого трения, действующих на жидкость, необходимо, прежде всего, найти распределение скоростей жидкости внутри трубы (используя закон вязкого трения), после чего можно

вычислить силу сопротивления движению, расход жидкости и так далее.

Для круговой цилиндрической трубы эта задача была решена французским физиком Ж. Пуазейлем, который установил, что расход^{*} жидкости пропорционален разности давлений на концах трубы Δp , четвертой степени радиуса трубы, обратно пропорционален ее длине:

$$Q = K \frac{r^4}{l} \Delta p, \quad (1)$$

а коэффициент пропорциональности зависит от вязкости жидкости. Если поперечный профиль отличен от кругового, то формула Пуазеляя несколько видоизменяется, но расход жидкости остается пропорциональным разности давлений на концах трубы:

$$Q = \frac{\Delta p}{R}. \quad (2)$$

В этой формуле коэффициент пропорциональности обозначен $\frac{1}{R}$, тогда величина R называется **гидродинамическим сопротивлением**. Гидростатическое сопротивление участка трубы длиной Δl можно представить в виде $R = r\Delta l$, где r — сопротивление единицы длины трубы, зависящее от вязкости жидкости, размеров и формы поперечного сечения трубы. С увеличением площади попереч-

* Напомним, расходом называется объем жидкости, который протекает через поперечное сечение трубы в единицу времени.

ного сечения гидродинамическое сопротивление уменьшается.

Внимательно посмотрим на формулу (2) — она достойна того. Если площадь поперечного сечения трубы постоянна, то скорости движения жидкости не изменяются вдоль трубы, то есть любая частица жидкости движется с постоянной скоростью, без ускорения. Тем не менее для того чтобы жидкость двигалась с постоянной скоростью, к ней необходимо прикладывать постоянную внешнюю силу, то есть создавать разность давлений на концах трубы. Кажущееся противоречие легко снимается, если принять во внимание силы вязкого трения, действующие между различными слоями жидкости. Фактически, внешнюю силу необходимо прикладывать, чтобы преодолеть силы вязкого трения. Конечно, суммарная сила, действующая на любую часть равномерно движущейся жидкости, равна нулю.

Ситуация аналогична движению тела в вязкой среде, когда на него действует сила сопротивления (рис. 233), пропорциональная скорости движения: $F_{\text{comp.}} = \beta v$. Если к телу приложить постоянную внешнюю силу F , то оно будет двигаться со скоростью, пропорциональной внешней приложенной силе: $v = \frac{F}{\beta}$.



Рис. 233

Итак, при движении вязкой жидкости по трубе внутри устанавливается распределение давлений: давление линейно падает при смещении вдоль на-

правления движения жидкости (рис. 234). Подчеркнем, что в данном случае, приложенная разность давлений является причиной движения жидкости — при стационарном движении происходит установление нужного распределения давлений вдоль трубы.

Можно сказать, что для преодоления гидростатического сопротивления R необходимо приложить разность давлений (или на сопротивлении происходит падение давления):

$$\Delta p = RQ. \quad (3)$$

Направим координатную ось X вдоль трубы. Пусть в точке с координатой $x = 0$ давление равно p_0 . Применим формулу Пуазейля для слоя жидкости от $x = 0$ до произвольного значения координаты x . Из формулы (3) следует, что

$$p_0 - p(x) = QR = Qrx,$$

где $p(x)$ — давление жидкости в сечении с координатой x .

Таким образом, распределение давления вдоль трубы при движении вязкой жидкости представляет собой линейную зависимость: $p(x) = p_1 - Qrx$. Коэффициент наклона графика данной зависимости $\left| \frac{\Delta p}{\Delta x} \right|$ возрастает с ростом скорости тече-

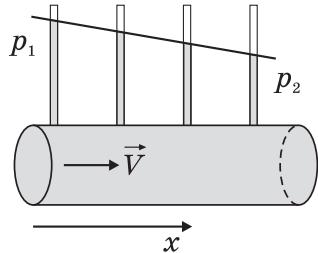


Рис. 234

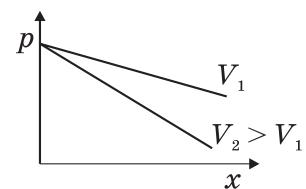


Рис. 235

чения жидкости и гидродинамического сопротивления (рис. 235).

В установившемся режиме скорость* изменения давления вдоль трубы $\frac{\Delta p}{\Delta x}$ остается постоянной. Заметим, что отношение $\frac{\Delta p}{\Delta x}$ имеет явный физический смысл. Величина $F = S\Delta p$ есть суммарная сила давления, действующая на слой жидкости толщиной Δx ; следовательно, величина $f = \frac{F}{S\Delta x} = \frac{\Delta p}{\Delta x}$ есть суммарная сила давления, действующая на единицу объема жидкости, то есть объемная плотность силы давления.

Выделим в движущейся жидкости небольшой параллелепипед, одно из ребер которого длиной l параллельно скорости жидкости, площадь грани перпендикулярной скорости равна S (рис. 236). Пусть разность давлений между противоположными гранями этого объема равна Δp , тогда произведение $\Delta F = \Delta pS$ равно суммарной силе давления на жидкость внутри выделенного объема, а величина $\Delta A = \Delta pSl$ равна работе, которую совершают силы давления внутри данного объема. Наконец, отношение $\frac{\Delta A}{Sl} = \Delta p$, с одной стороны, — разность давлений, с другой — работа

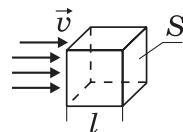


Рис. 236

* В данном случае имеется в виду изменение давления по ходу, а не скорость изменения со временем.

сил давления, которая совершается при перетекании жидкости через данный объем.

Полученное распределение давления соответствует стационарному течению жидкости. Качественно рассмотрим процесс установления движения. Пусть длинная горизонтальная труба полностью заполнена жидкостью, с одной стороны внутри трубы расположен поршень (рис. 237). В некоторый момент времени к поршню начинают прикладывать постоянную силу. Вся жидкость в трубе сразу прийти в движение не сможет.



Рис. 237

Непосредственно перед поршнем возникнет область сжатия, которая начнет распространяться по трубе, приводя в движение все более удаленные области жидкости внутри трубы. Скорость распространения области сжатия совпадает со скоростью звука в жидкости. Наконец, по прошествии некоторого небольшого промежутка времени в трубе установится такое распределение давления, которое обеспечит постоянство скорости вдоль трубы. Именно этот установленный режим мы и рассматриваем.

Задания для самостоятельной работы:

1. Представьте расход жидкости в виде $Q = \bar{v} S$, где S — площадь поперечного сечения трубы, \bar{v} — усредненная по поперечному сечению скорость течения. Используя формулу Пуазейля для круглой трубы (1), выразите среднюю скорость течения жидкости через разность давлений, а также через объемную плотность силы давления. Что вам напоминают полученные формулы?

2. Постройте примерный график распределения давления в трубе переменного сечения (состо-

ящей из двух сочлененных труб разного радиуса) при движении в ней вязкой жидкости.

34.6. Движение вязкой жидкости по горизонтальному замкнутому контуру

Безусловно, для обеспечения постоянного движения вязкой жидкости необходим источник энергии, необходимо устройство для поддержания постоянной разности давления на концах трубы (рис. 238).



Рис. 238

Для перекачки жидкости таким устройством является насос. Рассмотрим контур, состоящий из замкнутой трубы с постоянным сечением, подключенной к насосу (рис. 239).

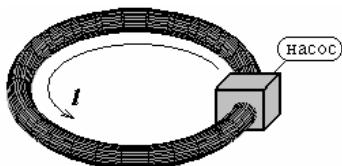


Рис. 239

Включенный насос создает между своим входом и выходом некоторую разность давлений. Назовем напором насоса разность давлений между входом и выходом

при неподвижной жидкости и обозначим его P . При движении жидкости по трубе из-за сил вязкого трения происходит падение давления, величина которого может быть рассчитана по формуле Пуазейля $\Delta p = QR$, где Q — расход жидкости, R — гидродинамическое сопротивление трубы.

При прохождении через насос на жидкость также действуют силы вязкого трения, поэтому разность давлений между входом и выходом в этом случае окажется меньше напора и будет уменьшаться с ростом скорости движения жидкости. По аналогии с падением давления в трубе можно говорить о падении давления в насосе — Δp_0 , величины, равной разности давлений, необходимой для преодоления сил вязкого трения при прохождении через насос. Это падение давления также можно считать пропорциональным скорости движения жидкости или ее расходу. Таким образом, можно ввести гидродинамическое сопротивление насоса R_0 из условия $\Delta p_0 = QR_0$. Тогда разность давлений между концами трубы равно: $\Delta p = P - \Delta p_0$.

Схематически распределение давления в контуре изображено на рис. 240. В насосе давление повышается в направлении движения жидкости и убывает по ходу жидкости в трубе.

Понятно, что разность давлений (напор), создаваемая насосом, равна сумме падений давления в трубе и насосе:

$$P = \Delta p + \Delta p_0. \quad (1)$$

Из этих соотношений можно выразить расход жидкости в данной системе:

$$Q = \frac{P}{R + R_0}. \quad (2)$$

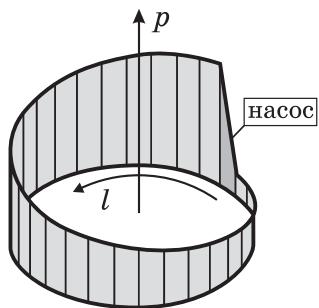


Рис. 240

Расход жидкости в замкнутом контуре равен отношению напора насоса к полному гидродинамическому сопротивлению контура.

Полученному соотношению можно придать и энергетическое истолкование. Как известно, мощность (работа в единицу времени), развивающая силой, равна произведению силы на скорость движения тела: $N = Fv$. При движении жидкости по трубе сила, действующая на жидкость, равна: $F = \Delta pS$ (S — площадь поперечного сечения трубы). Поэтому мощность сил давления вычисляется по формуле $N = Fv = \Delta pSv = \Delta pQ$ и равна произведению разности давлений на расход жидкости: $Q = Sv$. Используя формулу Пуазейля, связывающую расход жидкости с разностью давлений выражение для мощности течения можно записать в нескольких формах:

$$N = \Delta pQ = Q^2R = \frac{(\Delta p)^2}{R}. \quad (3)$$

Подчеркнем еще одно существенное обстоятельство: при стационарном течении суммарная сила давления по модулю равна суммарной силе вязкого трения. Поэтому формулы (3) также выражают мощность сил сопротивления. Действие этих сил сопротивления приводит к переходу механической энергии в тепловую, поэтому эти же формулы определяют мощность теплоты, выделяющейся при прохождении жидкости.

Аналогично: произведение напора на расход равно мощности, развиваемой насосом. Умножим

равенство (1) на расход жидкости:

$$PQ = \Delta p Q + \Delta p_0 Q. \quad (4)$$

Смысль полученного соотношения: мощность, развиваемая насосом, равна суммарной мощности сил вязкости. Работа, совершенная насосом, равна тепловой энергии, выделяющейся при протекании жидкости. Иными словами — очередное проявление закона сохранения энергии.

Задания для самостоятельной работы:

1. Рассмотрите движение идеальной жидкости по системе, изображенной на рис. 241.

2. Найдите расход жидкости, если напор насоса равен P , площадь поперечного сечения трубы постоянна и равна S , плотность жидкости ρ .

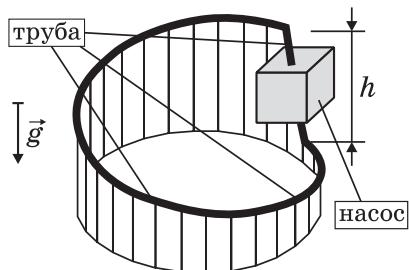


Рис. 241

СОДЕРЖАНИЕ

Слово к читателю 3

Часть I. Кинематика

§ 1. Математическое описание положения тела	5
§ 2. Материальная точка и абсолютно твёрдое тело — модели реальных тел	33
§ 3. Механическое движение. Закон движения	44
§ 4. Равномерное движение материальной точки вдоль прямой.....	52
§ 5. Средняя и мгновенная скорость при движении точки по прямой	64
§ 6. Ускорение при движении точки по прямой	73
§ 7. Равноускоренное движение точки по прямой....	77
§ 8. Расчет закона движения	85
§ 9. Кинематические характеристики движения материальной точки в трехмерном пространстве	95
§ 10. Математическое отступление: векторы и действия над ними	98
§ 11. Векторные характеристики движения материальной точки	105
§ 12. Описание равноускоренного движения в пространстве	107
§ 13. Относительность движения	113
§ 14. Криволинейное движение	120
§ 15. Описание движения твердого тела.....	138

Часть II. Основные законы динамики

§ 16. Закон инерции. Принцип относительности Галилея	153
§ 17. Взаимодействие тел. Масса тела. Плотность. Сила	166
§ 18. Законы динамики Ньютона	174

§ 19. Следствия из законов динамики Ньютона.....	183
§ 20. Статика – законы равновесия тел	195

Часть III. Виды взаимодействий

§ 21. Гравитационные взаимодействия.....	199
§ 22. Силы упругости	211
§ 23. Силы сухого трения	221
§ 24. Силы вязкого трения	227

Часть IV. Законы сохранения в механике

§ 25. Импульс тела. Закон сохранения импульса....	231
§ 26. Закон сохранения момента импульса.....	236
§ 27. Закон сохранения энергии	240
§ 28. Заметки о симметрии	271

Часть V. Механика жидкости и газа

§ 29. Модель сплошной среды, «точечные» характеристики вещества	276
§ 30. Кинематическое описание движения жидкости и газа – гидрокинематика. Поле скоростей	280
§ 31. Поток жидкости.....	285
§ 32. Вихревое движение жидкости. Циркуляция скорости	293
§ 33. Основные законы гидростатики. Давление. Закон Паскаля. Закон Архимеда	296
§ 34. Движение жидкости — гидродинамика. Движение жидкости по трубам	311

Учебное издание

Слободянюк Анатолий Иванович

**ФИЗИКА ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ
Механика**

*Пособие для учащихся учреждений
общего среднего образования с русским языком обучения*

Ответственный за выпуск Г. В. Нехай
Редактор М. Л. Рудковская
Литературный редактор Л. Г. Радкевич

Технический редактор В. Н. Кравцова
Компьютерная верстка М. Л. Рудковская
Дизайн обложки В. И. Рынкевич

Подписано в печать 01.03.2014. Формат 60x84/16. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 19,53. Уч.-изд. л. 10,2.

Тираж 10100 экз. Заказ 978.

Общественное объединение «Белорусская ассоциация «Конкурс».
ЛИ № 02330/0552570 от 01.10.2009. Ул. Беды, 24–100А, 220040, г. Минск.

Республиканское унитарное предприятие
«Издательство «Белорусский Дом печати»
ЛП № 02330/0494179 от 03.04.2009. Пр. Независимости, 79, 220013, г. Минск.