

## Задание 2. Магнитное динамо (Решение).

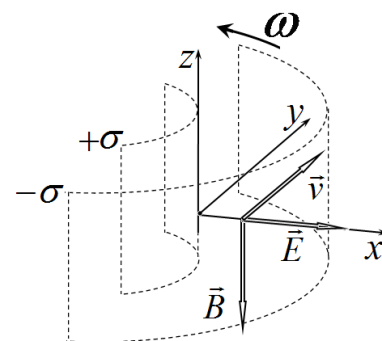
### Часть 1. Поле в слое

1.1 Направления требуемых векторов указаны на рисунке.

Вектор  $\vec{E}$  - вдоль оси  $x$ ;

Вектор  $\vec{B}$  - в сторону, противоположную оси  $z$ ;

Вектор  $\vec{v}$  - вдоль оси  $y$ .



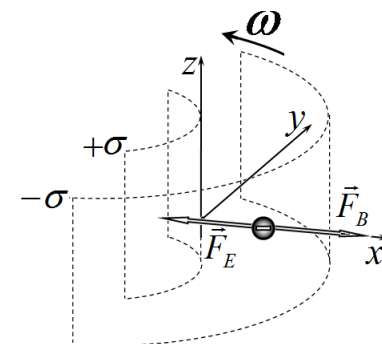
1.2 Формулу для индукции магнитного поля можно получить на основании формулы (2) из условия задачи. Заметим, что величина  $nI$  имеет смысл силы тока, приходящейся на единицу длины поверхности цилиндра. При вращении равномерно заряженного цилиндра эта величина может быть представлена в виде

$$nI \Rightarrow \sigma v = \sigma \omega R. \quad (1)$$

Поэтому индукция магнитного поля внутри слоя описывается формулой

$$B = \mu_0 \sigma \omega R. \quad (2)$$

1.3 Направления векторов сил, действующих на электрон, показаны на рисунке.



1.4 Модуль электрической силы равен (по определению вектора напряженности поля)

$$F_E = eE = e \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (3)$$

Со стороны магнитного поля на электрон действует сила Лоренца. Так как векторы скорости и индукции поля перпендикулярны, то модуль этой силы равен

$$F_B = evB = e(\omega R) \cdot (\mu_0 \sigma \omega R) = e\mu_0 (\omega R)^2 \sigma. \quad (4)$$

## Часть 2. Заряды и токи.

**2.1** Очевидно, что изменение зарядов на поверхностях слоя происходит благодаря электрическому току, который протекает поперек выделенного слоя. Выделим между боковыми поверхностями проводящего слоя тонкий цилиндр, ось которого перпендикулярна этим поверхностям. Обозначим площадь поперечного сечения этого цилиндра  $S$ , его длина равна толщине слоя  $h$ . Изменение заряда на торце цилиндра равно силе тока  $I'$ , протекающего по цилиндру, т.е.

$$\frac{\Delta(\sigma S)}{\Delta t} = I' \quad (5)$$

Для расчета силы тока можно воспользоваться законом Ома, в котором в качестве напряжения надо взять работу всех сил, действующих на единичный заряд (назовем, эффективное напряжение). В данном случае это «эффективное» напряжение равно

$$U_{эф} = \frac{(F_M - F_E)}{e} h. \quad (6)$$

Электрическое сопротивление цилиндра рассчитывается по известной формуле

$$r = \rho \frac{h}{S} \quad (7)$$

Используя выражения для сил (3)-(4), получим

$$\frac{\Delta(\sigma S)}{\Delta t} = \frac{U_{эф}}{r} = \frac{(F_M - F_E)}{e} h \cdot \frac{S}{\rho h} = \frac{\sigma}{\rho \epsilon_0} (\epsilon_0 \mu_0 (\omega R)^2 - 1) S. \quad (8)$$

Окончательно, уравнение для изменения плотности зарядов имеет вид:

$$\frac{\Delta \sigma}{\Delta t} = \frac{\sigma}{\rho \epsilon_0} (\epsilon_0 \mu_0 (\omega R)^2 - 1). \quad (9)$$

**2.2** Плотность зарядов, следовательно, и индукция поля будут возрастать, если скорость изменения, определяемая уравнением (9), будет положительна, т.е. при

$$\epsilon_0 \mu_0 (\omega R)^2 - 1 > 0 \Rightarrow V^* = \omega^* R = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (10)$$

Известно, что эта формула определяет скорость света в вакууме, что также можно получить, подставляя численные значения электрической и магнитной постоянных:

$$V^* = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3,0 \cdot 10^8 \frac{м}{с}. \quad (11)$$

Заметим, что этот же результат можно получить из формул (3)-(4), если понять, что для возрастания магнитного поля магнитная сила должна стать больше силы электрической.

**2.3** Из формулы (10) следует, что угловая скорость вращения Земли должна стать равной

$$\omega^* R = c \Rightarrow \omega^* = \frac{c}{R}. \quad (12)$$

Заметим, что при этом скорость точек на поверхности Земли должна превысить скорость света почти в два раза! Период вращения (т.е. сутки) при этом равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega^*} = \frac{2\pi R}{c} \approx 0,073 \text{ с}. \quad (13)$$

**2.4** Оценим численное значение скорости движения выделенного слоя

$$V = \omega R = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \cdot 3,5 \cdot 10^6 \text{ м}}{24 \cdot 3600 \text{ с}} \approx 2,5 \cdot 10^2 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (14)$$

Эта величина значительно меньше скорости света. Отношение силы магнитной к силе электрической, действующей на электрон (первое слагаемое в скобках в уравнении (9))

численно равно  $\varepsilon_0 \mu_0 (\omega R)^2 = \left(\frac{V}{c}\right)^2 \approx 7,2 \cdot 10^{-13}$ . Поэтому этой величиной можно пренебречь.

Тогда уравнение (9) приобретает совсем простой вид

$$\frac{\Delta \sigma}{\Delta t} = - \frac{\sigma}{\rho \varepsilon_0} \quad (15)$$

Характерное время исчезновения зарядов можно получить, если разделить начальную плотность заряда на скорость его убывания в начальный момент времени, т.е.

$$\tau = \frac{\sigma_0}{\left|\frac{\Delta \sigma}{\Delta t}\right|_0} = \frac{\sigma_0}{\left(\frac{\sigma_0}{\rho \varepsilon_0}\right)} = \rho \varepsilon_0 \approx 1,4 \cdot 10^{-6} \cdot 8,8 \cdot 10^{-12} \approx 1,2 \cdot 10^{-17} \text{ с}. \quad (16)$$

### Часть 3. Спасает ли модель масса электрона?

**3.1** Учет массы электрона приводит к тому, что необходимо принять во внимание его центростремительное ускорение (или центробежную силу в неинерциальной системе отсчета). Как было показано выше, силой Лоренца в данной задаче можно пренебречь, поэтому условие стационарности зарядов может быть сформулировано в виде: электрическая сила обеспечивает электрону необходимое центростремительное ускорение:

$$m_e \omega^2 R = e \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (17)$$

Отсюда следует, что стационарное значение плотности заряда равно

$$\bar{\sigma} = \frac{m_e}{e} \varepsilon_0 \omega^2 R. \quad (18)$$

**3.2** Индукция поля, создаваемого этими зарядами в соответствии с формулой (2), равна

$$B = \mu_0 \bar{\sigma} \omega R = \frac{m_e}{e} \varepsilon_0 \mu_0 \frac{(\omega R)^3}{R} \approx \frac{9,1 \cdot 10^{-31}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \cdot \frac{(2,5 \cdot 10^2)^3}{(3 \cdot 10^8)^2 \cdot 3,5 \cdot 10^6} \approx 2,8 \cdot 10^{-28} \text{ Тл}, \quad (19)$$

что на 23 порядка меньше магнитного поля Земли.

**3.3** Полученные результаты однозначно свидетельствуют, что рассмотренная модель принципиально не может описать возникновение магнитного поля Земли