

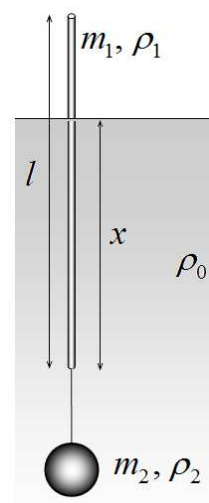
Задача 11-1. Поплавок

Молодой, но талантливый физик Федя (он же Дядя Федор) летом гостил в деревне Простоквашино. Однажды он решил отправиться на рыбалку, наловить рыбки коту Матроскину. Но оказалось, что на его удочке потерялся поплавок. «Не беда! - Не сложно изготовить поплавок самостоятельно» - решил Федя. Нашел легкую деревянную прямую палочку, которая и должна служить поплавком. Как настоящий физик, Федя подумал, что было бы не плохо провести экспериментальные исследования. Бросил палочку в воду и... она не утонула, а расположилась на воде горизонтально, все попытки Феде заставить ее плавать вертикально окончились неудачей.

1. Докажите, что тонкий однородный стержень не может плавать вертикально.

Пришлось приступить к более серьезным исследованиям. Федя измерил характеристики своего будущего поплавка: имеет форму цилиндра, масса m_1 , длина l , радиус R (значительно меньше длины, глубокомысленно отметил Федя), ρ_1 , плотность ρ_1 (заметно меньше плотности воды ρ_0 , что тоже не плохо). Затем Федор вспомнил, что к поплавку положено грузило, в качестве которого решил использовать кусочки свинца (плотность ρ_2 , которая больше плотности воды), массу грузила m_2 нужно подбирать. Грузило привязывается к нижнему концу поплавка.

Далее Федор решил упростить простейшие алгебраические выкладки и ввел «эффективную» массу грузила μ , такую, чтобы модуль суммы сил тяжести и Архимеда, действующих на него можно было записывать в виде μg .



2. Выразите величину «эффективной» массы μ , через заданные параметры.
3. Определите максимальную массу m_{\max} грузила, при которой поплавок не тонет.
4. Определите глубину погружения поплавка x , если масса грузила $m_2 < m_{\max}$

Опустив поплавок с привязанным грузилом в воду, Федя обнаружил, что в зависимости от массы грузила поплавок плавает либо почти горизонтально (при малых массах грузила), либо вертикально, при больших массах. Для теоретического описания обнаруженного эффекта Федор решил считать поплавок очень тонким, то есть пренебречь его толщиной.

5. Докажите, что тонкий поплавок с грузилом может плавать либо почти горизонтально, либо вертикально, при всех значениях масс грузила, кроме единственного значения m_2^* , при котором поплавок может находиться в равновесии при любом угле его наклона α . Найдите это значение массы m_2^* . Укажите при каких массах поплавок, он будет плавать вертикально.

Такой малый выбор вариантов положения поплавок Феде не понравился, поэтому он решил сделать поплавок чуть потолще, быстро выстругал новый цилиндрический стерженек, определил его параметры (и Вы тоже считайте их известными) и притупил к дальнейшим теоретическим расчетам.

Прежде всего, он понял, что наклонное положение описывается сложно – необходимо уметь считать объем и положение центра масс срезанного наискось цилиндра.

Обратившись к справочникам, он нашел, что срезанный наискось цилиндр, радиуса R и высоты H , которую можно выразить через угол среза (он же и угол наклона поплавка) $H = 2R \cdot \operatorname{tg} \alpha$, имеет объем равный

$$V = \frac{1}{2} \pi R^2 H = \pi R^3 H \operatorname{tg} \alpha$$

Центр тяжести такого «срезанного» цилиндра C находится на высоте

$$b = \frac{5}{16} H = \frac{5}{8} R \operatorname{tg} \alpha$$

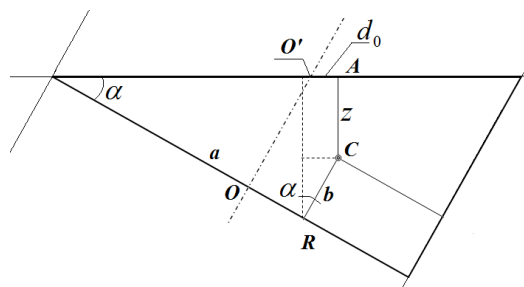
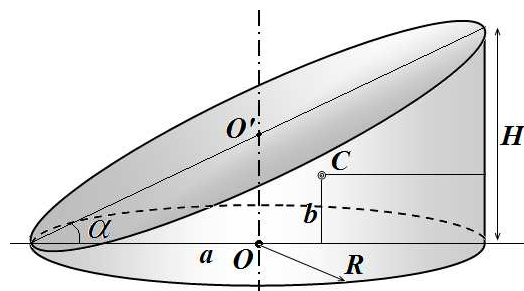
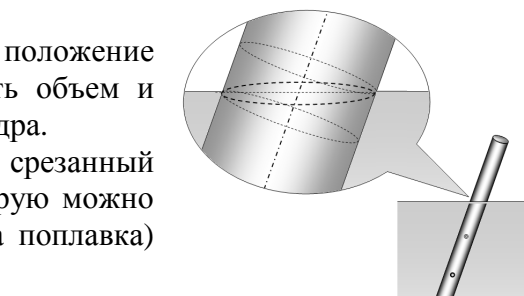
и на расстоянии $a = \frac{5}{4} R$ от острого края цилиндра

(или $\frac{1}{4} R$ от его оси).

Затем Федор вычислил координаты центра масс относительно центра срезанной грани O'

$$d_0 = (a \cos \alpha + b \sin \alpha) - \frac{R}{\cos \alpha} = \frac{R}{8} \left(5 \cos \alpha - \frac{3}{\cos \alpha} \right)$$

$$z = a \sin \alpha - b \cos \alpha = \frac{5}{8} R \sin \alpha$$



Вам не следует выводить эти формулы (жюри не оценит ваши напрасные труды) – пользуйтесь готовыми.

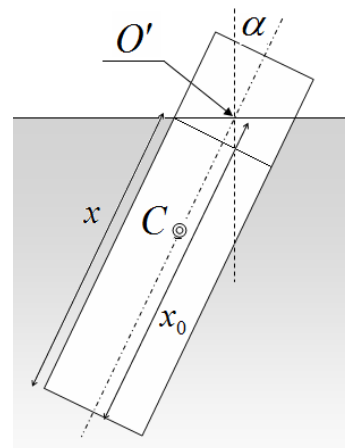
Далее вам следует повторить расчеты дяди Федора!

6. Найдите длину x_0 погруженной части поплавка, если он плавает вертикально. Для характеристики массы груза используйте его «эффективную» массу μ .

Для облегчения проверки используйте следующие обозначения.

α - угол наклона оси поплавка к вертикали, O' - точка пересечения оси поплавка с горизонтальной поверхностью, x_0 - глубина погруженной части поплавка (расстояние от точки O' до нижнего края – подсказываем, она не зависит от угла наклона); x - длина меньшей «стороны» погруженной части поплавка.

7. Изобразите на рисунке силы, действующие на поплавок, укажите точки их приложения. Запишите выражения для этих сил и их моментов, относительно точки O' .



8. Запишите условия равновесия поплавка.

Уравнения получились не простыми, поэтому дядя Федор решил их решать, считая величину x_0 заданной и независимой от остальных параметров задачи.

9. При некоторых значениях x_0 уравнения равновесия имеют несколько решений. Найдите условия, при которых могут появиться положения равновесия, отличные от вертикального. Найдите значения углов α^* , при которых поплавок может находиться в равновесии. Рассмотрите устойчивость этих положений равновесия.

Наконец, Федя вспомнил, что x_0 определяется параметрами поплавка.

10. Укажите, при каких значениях характеристик однородного цилиндрического поплавка и грузила, он может плавать устойчиво в наклонном положении?