

# Республиканская физическая олимпиада (III этап) 2006 год Теоретический тур

**10 класс.**

## Крутильные весы Кулона

Вторая половина XVIII века – первая половина XIX века — время замечательных открытий в классической физике. Именно в это время фундаментальные труды гениев цивилизации закладывают основы новых направлений экспериментальных и теоретических исследований будущего. Сегодня, оглядываясь назад, можно с уверенностью сказать, что пионерские работы Кулона (1785г.), Ампера (1820г.), Фарадея (1831г.), выполненные на простейшем оборудовании, дали старт построению сложнейшей, достаточно завершённой и определенно «красивой» теории электромагнитного поля. Наша задача — воспроизвести (и незначительно дополнить) ход рассуждений одного из великих физиков, установившего основной закон электростатики — закон взаимодействия неподвижных электрических зарядов.

### Часть 1. Установка.

Для исследования явления взаимодействия неподвижных точечных зарядов французский физик Шарль Огюстен Кулон сконструировал крутильные весы (Рис.1), в которых уравновешенное непроводящее коромысло **1** длиной  $2l = 20\text{см}$  с двумя одинаковыми небольшими проводящими шариками **3**, **3'** на концах подвешено на упругой серебряной проволоке **2**. На неподвижной подставке располагался такой же шарик **4**, как и на концах коромысла. Все шарики располагаются на одной высоте. Любому из шариков можно сообщать некоторый электрический заряд. Система помещена в прозрачный защитный цилиндр со шкалой **5**, позволяющей измерять угол поворота  $\alpha$  коромысла.

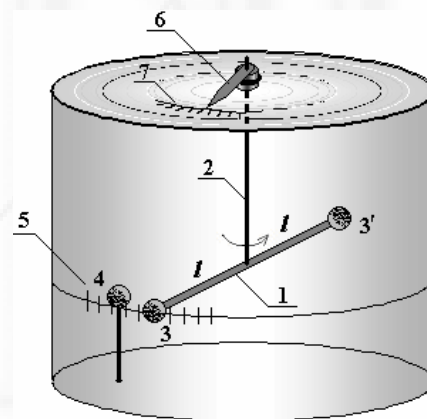


Рис. 1

Верхний конец проволоки закреплен на верхней крышке цилиндра в устройстве, позволяющем с помощью жесткого рычага-стрелки **6** поворачивать проволоку на известный угол, измеряемый с помощью шкалы **7**. Масса коромысла достаточно велика, поэтому можно считать, что при проведении экспериментов нить все время остается вертикальной, а коромысло горизонтальным.

**1.1** Внимательно прочтите описание установки и с помощью Рис.1 самостоятельно уясните: какие шарики следует заряжать для нормальной работы установки?

**1.2** Не нарушится ли равновесие коромысла в поле силы тяжести в следствие зарядки одного из шариков (еще до того как зарядили шарик **4**)?

### Часть 2. Модуль кручения.

Опыт показал, что при закручивании проволоки на угол  $\alpha$  в ней возникает возвращающий момент сил упругости, пропорциональный углу закручивания

$$M = -k\alpha, \quad (1)$$

где  $k$  – некоторый постоянный для данной проволоки *модуль кручения*.

Для изменения чувствительности прибора Кулон использовал различные проволоки, имеющие разные модули кручения. Эксперимент показал, что для проведения опытов удобны «полые» проволоки–цилиндры (трубочки) внешнего радиуса  $R$  с малой толщиной стенок  $\Delta R$ , ( $\Delta R \ll R$ ). Длина проволоки  $L$ .

**2.1** Покажите, что модуль кручения нити  $k$  выражается через указанные параметры следующим образом

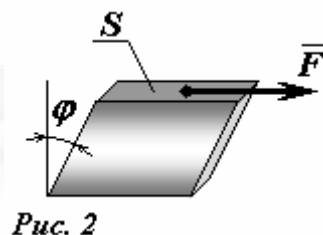
$$k = \frac{2\pi R^3 \Delta R}{L} G, \quad (2)$$

где  $G$  — модуль сдвига данного вещества.

Подсказка 1: для вывода формулы (2) используйте закон Гука для малой деформации сдвига

$$\varphi = \frac{1}{G} \tau,$$

где  $\varphi$  — относительный сдвиг прямоугольного образца (угол сдвига) под действием касательной силы  $F$ , приложенной к горизонтальной грани площадью  $S$  (Рис. 2),  $\tau = \frac{F}{S}$  —



тангенциальное (касательное) упругое напряжение, возникающее при данной деформации,  $G$  — модуль сдвига данного вещества.

**2.2** Вычислите<sup>1</sup> модуль кручения серебряной проволоки в эксперименте Кулона при следующих данных: длина проволоки  $L = 75$  см, внешний радиус —  $R = 1,5$  мм, толщина стенок  $\Delta R = 0,15$  мм. Модуль сдвига серебра  $G = 30$  ГПа.

### Часть 3. Приближение «малых углов».

Пусть верхний конец проволоки закреплен так, что в положении недеформированной (незакрученной) проволоки шарики 3 и 4 едва касаются друг друга. Этим шарикам сообщают одинаковые электрические заряды  $q$ . После сообщения этих зарядов коромысло поворачивается на некоторый угол  $\alpha$ , который можно считать малым (то есть справедлива приближенная формула  $\sin \alpha \approx \alpha$ ).

- 3.1** Определите в этом приближении зависимость малого угла поворота коромысла  $\alpha(q)$  от величины сообщенного шарикам заряда  $q$ .
- 3.2** Постройте примерный график полученной зависимости для зарядов изменяющихся от 0 до 100 нКл.
- 3.3** Вычислите заряд  $q_1$ , вызывающий отклонение системы на угол  $\alpha = 10^\circ$ .
- 3.4** Будем считать угол  $\alpha$  малым при выполнении условия  $\alpha \leq 20^\circ$ . Вычислите максимальное значение заряда  $q_2$  каждого из шариков, при котором угол отклонения коромысла еще можно считать малым.

### Часть 4. «Большие углы».

<sup>1</sup> Выполните этот пункт независимо от того, смогли ли Вы выполнить предыдущий пункт, поскольку полученное значение понадобится Вам в дальнейшем

Конечно же, в азарте исследования Кулон незаметно для себя перешел к измерениям при больших углах закручивания ( $0 \leq \alpha \leq \pi$ ). Считайте, что упругие свойства проволоки остаются прежними и в этом диапазоне.

**4.1** Получите уравнение для нахождения угла закручивания проволоки  $\alpha$  в случае его больших значений.

**4.2** При помощи полученного в п. 4.1 уравнения вычислите величину заряда при угле отклонения  $\alpha = 20^\circ$  и оцените относительную погрешность определения этого заряда, возникающую при использовании приближения «малых углов» (в п. 3.4).

**4.3** Постройте примерный график зависимости угла отклонения от величины заряда  $q$ , изменяющегося от 0 до 2 мкКл. С помощью построенного графика найдите угол закручивания проволоки  $\alpha_1$  при заведомо «большом» заряде шариков  $q = 1,8$  мкКл.

## Часть 5. Измерение зарядов.

Для измерения (сравнения) неизвестных зарядов Кулон придумал оригинальный метод «доворота» крутильных весов. Пусть первоначально шарики не заряжены, в положении равновесия шарики слегка качаются друг друга, затем каждому шарiku сообщают некоторый заряд  $q_0$ , при этом коромысло поворачивается на угол  $\alpha_0$ . Если изменить заряд неподвижного шарика до величины  $q_x$  (при неизменном заряде шарика на коромысле), то угол поворота коромысла также изменится. Поворачивая верхний рычаг-стрелку на некоторый угол  $\Delta\alpha$ , можно добиться, чтобы угол поворота коромысла принял прежнее значение (т.е. шарики вернулись в прежнее положение!). Такая методика позволяет находить отношение зарядов  $\frac{q_x}{q_0}$ .

**5.1** Найдите, во сколь раз изменился заряд неподвижного шарика, если начальный угол поворота коромысла равен  $\alpha = 20^\circ$ , а после изменения заряда потребовалось довернуть стрелку на угол  $\Delta\alpha = 10^\circ$ , чтобы вернуть коромысло в исходное положение. Рассмотрите два случая:

- а) доворот стрелки осуществлен в направлении начального отклонения коромысла;
- б) доворот стрелки осуществлен в противоположном направлении.

## Часть 6. Вязкость.

При проведении опытов оказалось, что коромысло весов в достаточно долго колеблется вблизи положения равновесия. Для устранения этого эффекта подвижную часть прибора погружают в вязкое хорошо очищенное масло.

Для изучения сил вязкого трения, действующих на коромысло, проведен следующий эксперимент, проведенный при незаряженных шариках. Проволоку резко закручивают, повернув верхний рычаг-стрелку на угол  $\Delta\alpha_0 = 90^\circ$ , и затем наблюдают за движением коромысла, которое медленно поворачивается в направлении поворота стрелки. При этом измеряют время, за которое коромысло поворачивается на известный угол  $\alpha$ . В Таблице 1 представлены средние значения времен этого поворота для различных углов  $\alpha$ .

**Таблица 1.**

$\alpha^\circ$	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$t, c$	0	1,2	2,5	4,0	5,9	8,1	10,9	15,1	22,0

Можно предположить, что момент сил вязкого трения  $M_{\text{вязк.}}$ , действующих на коромысло, пропорционален его угловой скорости  $\omega$ :

$$M_{\text{вязк.}} = -\beta\omega. \quad (3)$$

**6.1** Используя приведенные данные докажите применимость формулы (3) в данном эксперименте. Определите значение коэффициента пропорциональности  $\beta$ .

**6.2** Определите характерное время установления равновесия  $T_0$  в данном эксперименте.

Подсказка 2. Пусть скорость изменения некоторой величины  $X$  зависит от самой этой величины  $\frac{\Delta X}{\Delta t} = F(X)$ . Тогда характерное время установления равновесия определяется

как  $T = \frac{\bar{X} - X_0}{F(X_0)}$ , где  $\bar{X}$  - равновесное значение переменной,  $X_0$  - ее начальное значение,  $F(X_0)$  - скорость изменения в начальном положении, которая считается постоянной в течение всего процесса.

### Часть 7. Движение в масле.

Эксперименты в масле проводились по методике, описанной в Части 3 (при касании шариков проволока не деформирована). Во всех экспериментах, рассматриваемых в этой части задачи, шарикам сообщали одинаковые заряды  $q_0$ , такие, что равновесное отклонение коромысла в воздухе при этих зарядах равно  $\alpha_0 = 20^\circ$ . В ходе экспериментов выяснилось, что при зарядке шариков коромысло достаточно быстро отклоняется на некоторый угол, а затем достаточно медленно возвращается в исходное положение. Причем максимальный угол отклонения оказывается заметно меньше<sup>2</sup> равновесного угла отклонения для аналогичных экспериментов в воздухе (при тех же зарядах шариков). Причиной такого значительного уменьшения угла отклонения являются уменьшение напряженности электрического поля в диэлектрике и утечка зарядов с шариков.

**7.1** Чему равен угол равновесного отклонения коромысла  $\bar{\alpha}$  при помещении шариков в масло (при неизменных зарядах  $q_0$ ), если диэлектрическая проницаемость используемого масла равна  $\varepsilon = 5,0$ ?

**7.2** Шарикам сообщают заряды  $q_0$ , коромысло начинает поворачиваться. Найдите зависимость угла поворота коромысла от времени при очень малых углах его поворота (когда можно пренебречь силами упругости проволоки), при условии, что заряды шариков остаются постоянным.

Подсказка 3. Если координата тела изменяется со временем по закону  $X = Ct^\gamma$ , то его скорость описывается функцией  $\frac{\Delta X}{\Delta t} = C\gamma t^{\gamma-1}$ .

При записи уравнений удобно использовать введенные ранее обозначения  $T_0$ ,  $\bar{\alpha}$  и др.

**7.3** Докажите, что характерное время<sup>3</sup> разрядки шариков в масле равно  $T_1 = \rho\varepsilon_0\varepsilon$ , где  $\rho = 5,0 \cdot 10^{10}$  Ом·м - удельное электрическое сопротивление масла;  $\varepsilon = 5,0$  - его диэлектрическая проницаемость,  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$  - электрическая постоянная.

**7.4** Оцените максимальный угол поворота коромысла в рассматриваемом эксперименте.

<sup>2</sup> Поэтому при анализе результатов можно пользоваться приближением «малых углов».

<sup>3</sup> Воспользуйтесь Подсказкой 2.