Задание 10(11)-2. «Гравитационный диполь»

Принципиальное различие между поведением электрического и гравитационного диполя заключается в том, что силы, действующие на шарики гравитационного диполя направлены в одну сторону, а для электрического - в противоположные. Во всех частях задачи «просматривается» малый безразмерный параметр $\frac{l}{R}$, поэтому следует внимательно следить за правильным использованием приближенных формул.

3.1Э Модуль силы притяжения равен разности модулей сил, действующих на каждый из шариков. В свою очередь, эти силы определяются законом Кулона

$$F = F_1 - F_2 = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\left(R-\frac{l}{2}\right)^2} - \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\left(R+\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{l}{2R}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+\frac{l}{2R}\right)^2}\right) = .$$

$$= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{l}{R}\frac{2}{\left(1-\frac{l^2}{4R^2}\right)^2}$$

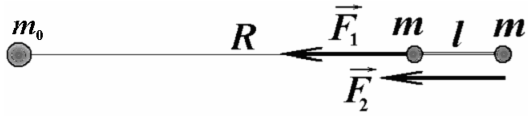
В данном выражении следует пренебречь слагаемыми второго порядка малости. Поэтому окончательная формула для силы притяжения диполя имеет вид

$$F = \frac{Qql}{2\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cdot\frac{2l}{R}. \qquad (1)$$

Примечание. Этот результат может быть получен из известной формулы для силы, действующей на диполь,

$$F_x = p\frac{dE_x}{dx},$$

где $p = ql$ -дипольный момент диполя.



3.1Г Для гравитационного диполя модули сил необходимо просуммировать

$$F = F_1 + F_2 = G\frac{mm_0}{\left(R-\frac{l}{2}\right)^2} + G\frac{mm_0}{\left(R+\frac{l}{2}\right)^2} = G\frac{mm_0}{R^2}\frac{2\left(1+\frac{l^2}{4R^2}\right)}{\left(1-\frac{l^2}{4R^2}\right)^2}.$$

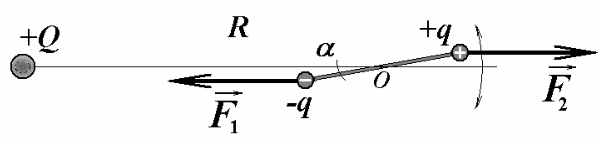
В этом выражении также следует пренебречь малыми величинами, поэтому суммарная сила, действующая на «гравитационный диполь» равна

$$F = G\frac{2mm_0}{R^2}. \qquad (2)$$

Этот результат очевиден, так как при выполнении условия $R >> l$, «диполь» может рассматриваться как материальная точка.

3.2Э При повороте диполя на малый угол α возникает момент сил, равный

$$M = (F_1 + F_2)\frac{l}{2}\sin\alpha .$$



и возвращающий его в исходное состояние. Заметим, что в данном выражении фигурирует сумма модулей сил, поэтому их можно считать одинаковыми и равными

$$F = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R^2} .$$

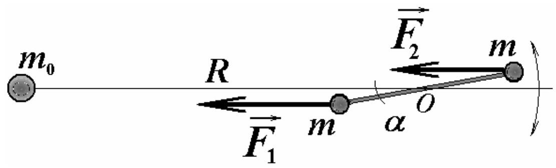
Так как колебания являются малыми, то можно считать, что $\sin\alpha \approx \alpha$. Для описания движения диполя можно использовать уравнение динамики вращательного движения (а можно использовать и другие подходы). Из этого уравнения следует уравнение гармонических колебаний

$$2m\left(\frac{l}{2}\right)^2 \beta = -\frac{Qql}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\alpha \quad \Rightarrow \quad \beta = -\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 R^2 ml}\alpha \ , \qquad (1)$$

из которого находим период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 R^2 ml}{Qq}} . \qquad (2)$$

3.2Г В этом случае силы направлены в одну сторону, поэтому их моменты противоположны. Суммарный момент сил, возвращающий его в исходное состояние, определяется разностью модулей сил, поэтому является малой величиной



$$M = -(F_1 - F_2)\frac{l}{2}\sin\alpha = -\frac{Gmm_0}{R^2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{l}{2R}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+\frac{l}{2R}\right)^2}\right)\frac{l}{2}\sin\alpha \approx -\frac{Gmm_0}{R^2}\cdot\frac{l}{R}\cdot l\alpha .$$

Соответствующее уравнение динамики вращательного движения, также является уравнением гармонических колебаний

$$2m\left(\frac{l}{2}\right)^2 \beta = -\frac{Gmm_0 l^2}{R^3}\alpha \quad \Rightarrow \quad \beta = -\frac{2Gm_0}{R^3}\alpha .$$

Период малых колебаний в этом случае равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{2Gm_0}} . \qquad (3)$$

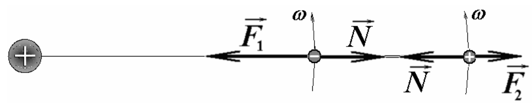
Интересно и неожиданно – этот период не зависит от физических характеристик диполя! У поверхности Земли ускорение свободного падения равно

$$g = G\frac{m_0}{R^2} .$$

Следовательно, период рассматриваемых колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{2Gm_0}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{2g}} \approx 2\pi\sqrt{\frac{6{,}35\cdot 10^6}{2\cdot 9{,}8}} = 3{,}6\cdot 10^3 c \approx 1 час .$$

3.3Э Чтобы ось диполя была направлена все время на центр заряженного шара необходимо, чтобы оба шарика диполя вращались с одинаковыми угловыми скоростями. Почти очевидно, что стержень растянут, поэтому уравнения второго закона Ньютона в проекции на радиальное направление, записываются в виде



$$\begin{aligned} m\omega^2 R\left(1-\frac{l}{2R}\right) &= \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{l}{2R}\right)^2} - N \\ m\omega^2 R\left(1+\frac{l}{2R}\right) &= -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{1}{\left(1+\frac{l}{2R}\right)^2} + N \end{aligned}. \qquad (4)$$

Складывая эти уравнения, видим, что центростремительное ускорение является малой величиной первого порядка

$$2m\omega^2 R = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{l}{2R}\right)^2} - \frac{1}{\left(1-\frac{l}{2R}\right)^2}\right) = \frac{2Qq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{l}{R}.$$

Период вращения легко выразить через угловую скорость

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 R^4}{mQql}}. \qquad (5)$$

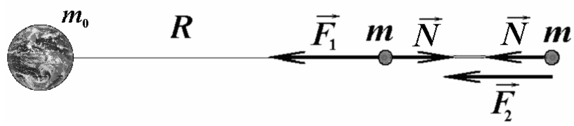
Сложим теперь уравнения системы (4) для расчета силы реакции стержня

$$2N = m\omega^2 l + \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0\left(R+\frac{l}{2}\right)^2} + \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0\left(R-\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(\frac{l}{R}\right)^2 + \frac{2Qq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Видим, что сила натяжения стержня определяется кулоновскими силами (центробежные силы – малы)

$$N = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}. \qquad (6)$$

3.3Г В этом случае уравнения второго закона Ньютона должны быть записаны следующим образом



$$\begin{aligned} m\omega^2 R\left(1-\frac{l}{2R}\right) &= G\frac{mm_0}{R^2}\frac{1}{\left(1-\frac{l}{2R}\right)^2} - N \\ m\omega^2 R\left(1+\frac{l}{2R}\right) &= G\frac{mm_0}{R^2}\frac{1}{\left(1-\frac{l}{2R}\right)^2} + N \end{aligned} \qquad (7).$$

Для определения центростремительного ускорения и периода обращения сложим эти уравнения

$$2m\omega^2 R = G\frac{mm_0}{R^2}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{l}{2R}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{l}{2R}\right)^2}\right) = G\frac{mm_0}{R^2}\frac{2\left(1+\frac{l^2}{4R^2}\right)}{\left(1-\frac{l^2}{4R^2}\right)^2}. \quad (8)$$

Пренебрегая малыми величинами, находим период обращения

$$m\omega^2 R = G\frac{mm_0}{R^2} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{Gm_0}}, \quad (10)$$

который совпадает с периодом обращения материальной точки.
Для расчета силы натяжения стержня запишем разность уравнений (8):

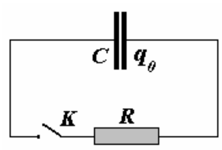
$$2N = m\omega^2 l + G\frac{mm_0}{R^2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{l}{2R}\right)^2}-\frac{1}{\left(1+\frac{l}{2R}\right)^2}\right).$$

Из этого выражения следует, что и центробежные силы (с учетом (10)) и разность гравитационных сил имеют одинаковый первый порядок малости, поэтому должны быть учтены

$$N = \frac{1}{2}m\omega^2 R\frac{l}{R}+\frac{1}{2}G\frac{mm_0}{R^2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{l}{2R}\right)^2}-\frac{1}{\left(1+\frac{l}{2R}\right)^2}\right) =$$

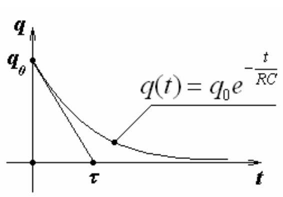
$$= \frac{1}{2}G\frac{mm_0}{R^2}\frac{l}{R}+\frac{1}{2}G\frac{mm_0}{R^2}\frac{2l}{R} = \frac{3}{2}G\frac{mm_0}{R^2}\frac{l}{R}$$

Задание 10(11)-3. «Разрядка конденсатора»



1. Поскольку начальное напряжение на конденсаторе $U_0 = \frac{q_0}{C}$, то согласно закону Ома сразу после замыкания ключа K в цепи возникнет ток силой $I_0 = \frac{U_0}{R} = \frac{q_0}{RC}$.

По мере разрядки конденсатора напряжение на нем, а следовательно и сила тока в цепи, будут монотонно убывать с течением времени.
Строгое математическое решение данной задачи приводит к неожиданному результату — полная разрядка конденсатора происходит «бесконечно долго», поскольку график временной зависимости заряда конденсатора $q(t)$ асимптотически стремится к нулю (см. рис).



Для оценки времени разрядки конденсатора используем традиционный прием: будем считать, что сила тока в цепи «сохраняет» свое максимальное значение $I_0 = \frac{q_0}{RC}$ в течение всего времени разрядки конденсатора. В таком случае для полной разрядки конденсатора потребуется время

$$\tau = \frac{q_0}{I_0} = RC. \quad (1)$$

Графически данная оценка соответствует точке пересечения касательной к графику $q(t)$, проведенной в начальной точке, с осью абсцисс.