

Параболическая физика.

Часть 1. Математическое введение.

На уроках математики вы изучали квадратичную функцию

$$y = ax^2 + bx + c \quad (1)$$

И, возможно, знаете, что ее графиком является парабола.

Такая функция часто встречается и в физике. Иногда бывает полезно представить эту функцию в таком виде, чтобы ее параметры имели наглядный смысл.

1.1 Запишите уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy , пересекающей ось Ox в точках $x = \pm l$, а ось Oy в точке $y = h$ (рис. 1)

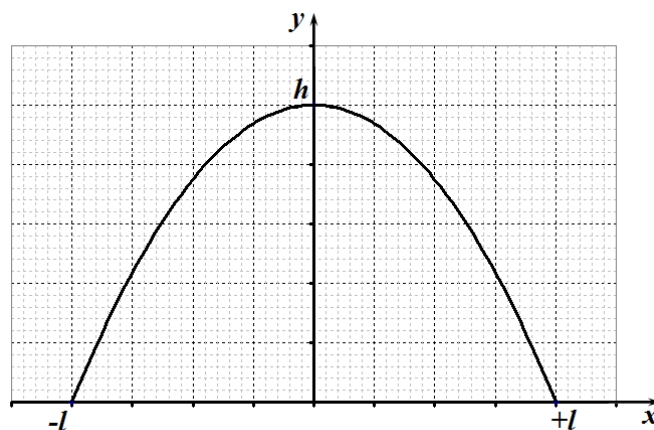


Рис. 1

1.2 Параболу можно также определить, как геометрическое место точек A , таких, что расстояние от этих точек до прямой (называемой *директрисой* параболы) равно расстоянию до некоторой точки F (называемой *фокусом* параболы) $AB = AF$.

Запишите уравнение параболы, для которой директрисой является ось Ox , а фокус лежит на оси Oy в точке $y_F = a$ (рис. 2).

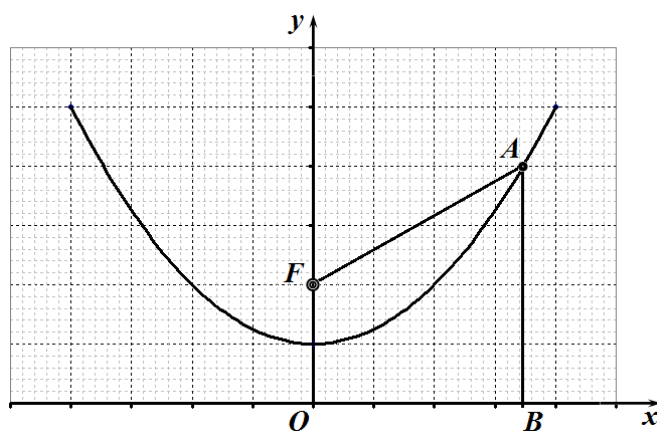


Рис. 2

При решении задачи вам понадобится формула (выводить ее не надо) для объема кругового параболоида радиуса R и высотой h :

$$V = \frac{1}{2} \pi R^2 h$$

Такая фигура получается при вращении параболы вокруг собственной оси (Рис. 3).

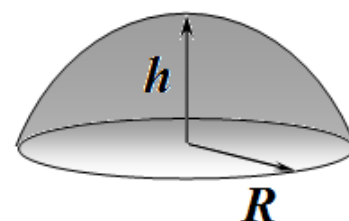


Рис. 3

Часть 2. Тело брошено под углом к горизонту... сопротивление воздуха не учитывать!

2.1 Камень бросили под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 с обрыва высотой h над поверхностью воды. Совместим ось Ox с поверхностью воды, а вертикальную ось Oy проведем через точку бросания (Рис. 4)

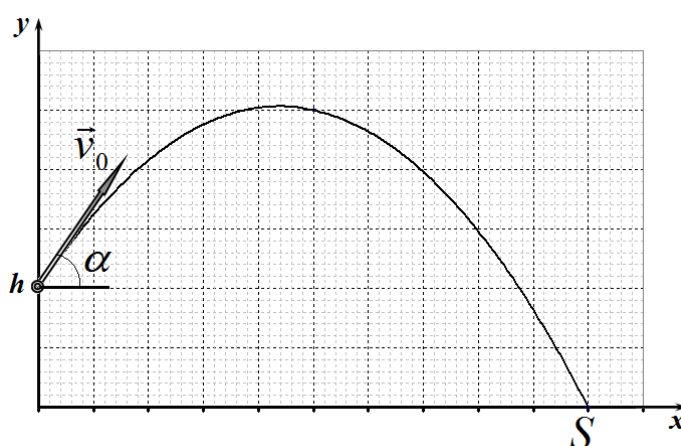


Рис. 4

2.1.1 Запишите уравнение траектории полета камня $y(x)$.

2.1.2 Найдите, на каком расстоянии S от обрыва камень упадет в воду.

2.1.3 Под каким углом к горизонту следует бросать камень (при неизменном модуле начальной скорости v_0), чтобы он упал на максимально возможном расстоянии от обрыва? Чему равно это максимальное расстояние S_{\max} ?

Часть 3 Парабола безопасности

3.1 Некий хулиган любит бросаться камнями. Пусть он бросает камни из начала координат под произвольными углами к горизонту, но с одной и той же начальной скоростью v_0 . Покажите, что огибающая всех траекторий камней (граница области досягаемости) является параболой. Найдите уравнение этой параболы $Y(x)$ (которая также называется *параболой безопасности* - на рис. 5 она изображена пунктиром).

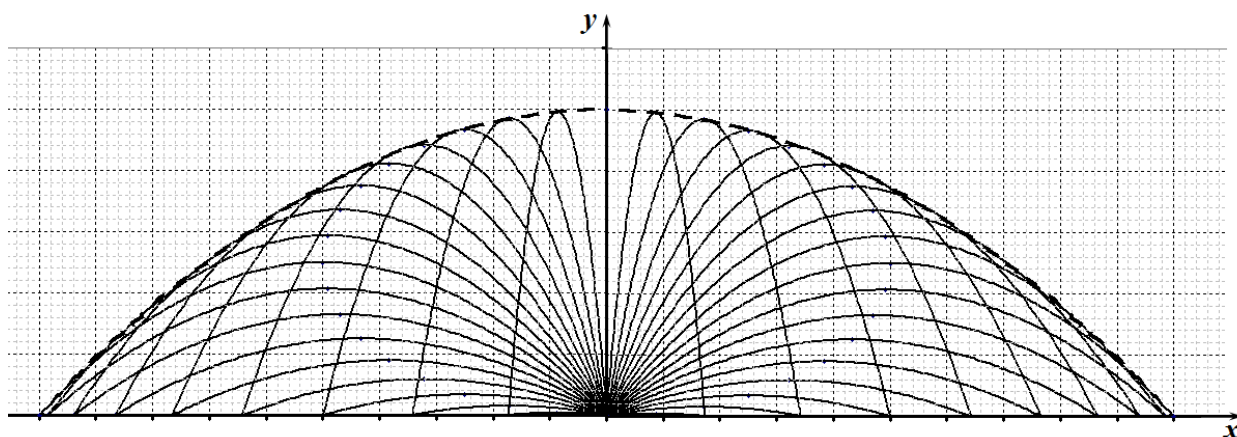
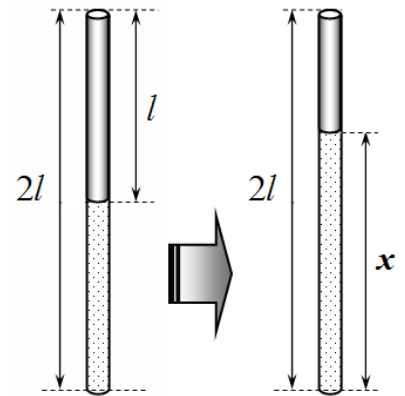


Рис. 5

Часть 4. Газовая парабола

В вертикальной трубке длиной $2l$ с открытым верхним концом столбик ртути высотой l запирает воздух, находящийся в нижней части пробирки при температуре $t_0 = 20^\circ\text{C}$. Атмосферное давление равно $P_0 = 0,80l$ (в мм рт. ст.)

Чтобы вытеснить ртуть из трубки воздух в ней начинают медленно нагревать. Будем считать процесс нагревания квазистационарным, т.е. при любой высоте столбика воздуха x система находится в равновесии.



4.1 Постройте графики зависимостей давления $P(x)$ и температуры воздуха $T(x)$ в пробирке от высоты столбика воздуха x в процессе расширения газа. Выберите такие единицы измерения, чтобы ваши графики были точными, а не схематическими.

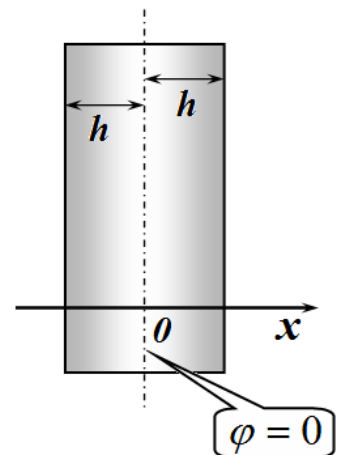
4.2 До какой минимальной температуры следует нагреть газ, чтобы он полностью вытеснил ртуть из трубки?

Часть 5. Электрическая парабола

5.1 Пластина толщиной $2h$ равномерно заряжена с объемной плотностью заряда ρ . поперечные размеры пластины значительно больше ее толщины, так что граничными эффектами можно пренебречь.

Ось Ox направлена перпендикулярна пластине, начало отсчета находится в центре пластины.

5.1.1 Найдите зависимость проекции вектора напряженности электрического поля E_x на ось Ox от координаты x в диапазоне $x \in [-2h, +2h]$. Постройте график полученной зависимости. Считайте заряд пластины отрицательным.



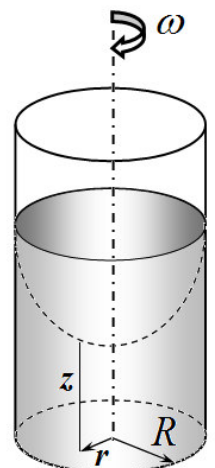
5.1.2 Найдите зависимость потенциала электростатического поля от координаты x в диапазоне $x \in [-2h, +2h]$, если потенциал в центре пластины принят равным нулю $\varphi(0) = 0$. Постройте график полученной зависимости.

Часть 6. Парабола в стакане

Высокий цилиндрический сосуд радиуса R частично заполнен водой, высота уровня воды в покое равна h_0 . Сосуд начинают раскручивать вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью сосуда. При этом на поверхности воды образуется осесимметричная воронка.

6.1 Найдите уравнение профиля этой воронки, т.е. высоту уровня воды z в точке, находящейся на расстоянии r от оси вращения. Угловая скорость вращения равна ω , при этом вода из сосуда не выливается, воронка не достает дна сосуда.

6.2 При какой угловой скорости вращения ω^* воронка достигнет дна сосуда?



Часть 7. Оптическая парабола

Американский физик Д.Вуд предложил оригинальную отражательную оптическую систему (телескоп Вуда): сосуд со ртутью вращают с малой угловой скоростью $\omega = 1,5 \text{ рад/с}$. Поверхность ртути представляет собой зеркало, в котором формируется изображение звезд.

6.1 Докажите, что все (а не только идущие на малых расстояниях от оси) параллельные лучи, падающие на зеркало после отражения в нем пересекутся в одной точке. На каком расстоянии от вершины зеркала находится эта точка?

6.2 Две звезды находятся вблизи зенита так, что угловое расстояние между ними для земного наблюдателя равно $\Delta\alpha = 1,0^\circ$. Найдите расстояние Δl между их изображениями в телескопе Вуда при заданных параметрах системы.

Считайте ускорение свободного падения равным $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.