

Часть 1. Установка.

1.1 Конечно же, для нормальной работы установки следует заряжать ближний к внешнему заряду шарик коромысла **3**, поскольку обратное противоречит условию и здравому смыслу.

1.2 Не нарушится, т.к. масса электронов ничтожно мала по сравнению с массами реальных объектов. Даже при «огромном» заряде $q = 1 \text{ Кл}$ суммарная масса электронов составит $m = 5,7 \cdot 10^{-12} \text{ кг}$, что значительно меньше массы любой пылинки, летающей в воздухе.

Часть 2. Модуль кручения.

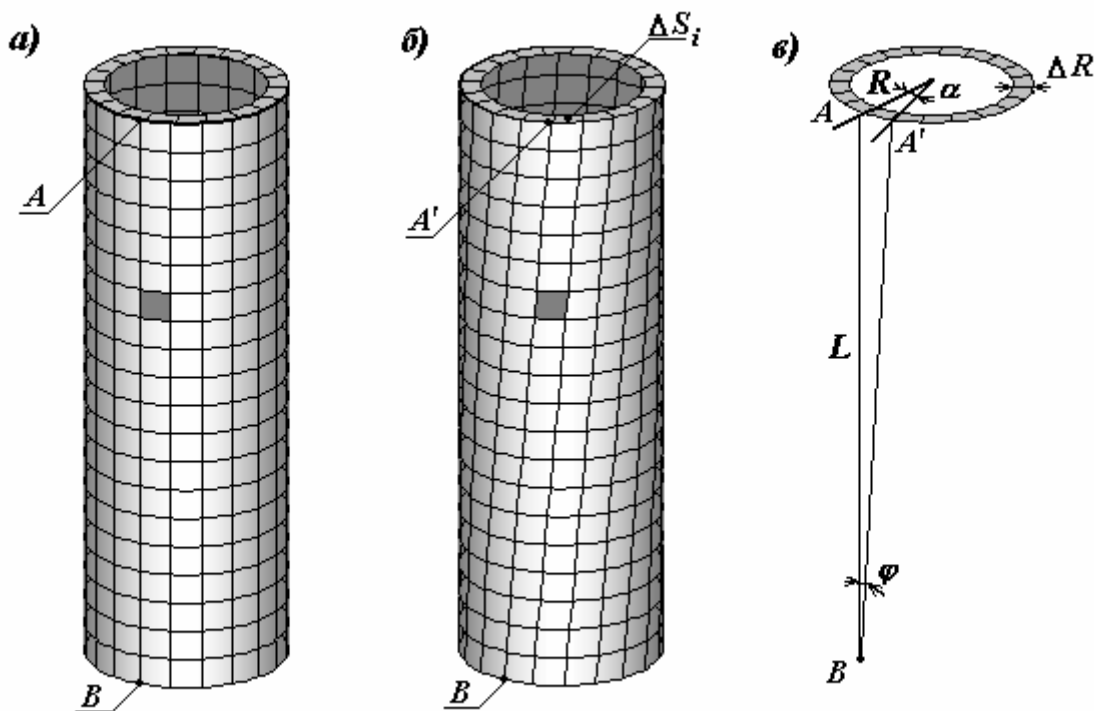


Рис. 3

2.1 Покажем, что деформация кручения сводится к деформации сдвига. Для этого мысленно разобьем тонкостенный цилиндр (т.е. проволоку) на тонкие слои перпендикулярные оси цилиндра, а каждый из этих слоев на малые слегка изогнутые параллелепипеды (Рис. 3а). При закручивании проволоки каждый из этих выделенных элементов разбиения наклонится на малый угол φ , то есть испытает деформацию сдвига. Для закручивания проволоки к ней необходимо приложить некоторый момент силы M , который в состоянии равновесия будет уравниваться равным по модулю моментом силы упругости. Тангенциальная сила упругости, возникающая при деформации выделенного элемента по закону Гука равна

$$\Delta F_i = G\varphi\Delta S_i, \quad (1)$$

где ΔS_i - площадь «верхней» грани выделенного элемента. Момент этой силы, относительно оси цилиндра равен

$$\Delta M_i = \Delta F_i R = G\varphi\Delta S_i R. \quad (2)$$

Так как для всех элементов выбранного кольца углы сдвига одинаковы, то вычисление суммарного момента сил упругости сводится к суммированию площадей «верхних граней»:

$$M = \sum_i \Delta M_i = \sum_i G \varphi \Delta S_i R = G \varphi R \sum_i \Delta S_i = G \varphi R \cdot 2\pi R \Delta R = 2\pi R^2 \Delta R G \cdot \varphi .$$

Здесь $\sum_i \Delta S_i = 2\pi R \Delta R$ - площадь верхней грани выделенного колечка.

Теперь необходимо выразить угол сдвига φ через угол закручивания проволоки α . Пусть в результате кручения (см. Рис. 3в) некоторая точка A на торце проволоки сместилась в положение A' , тогда, считая все углы малыми, длину дуги AA' можно выразить в двух формах $\alpha R = L \varphi$, откуда следует, что

$$\varphi = \frac{R}{L} \alpha ,$$

поэтому суммарный момент сил упругости (который, очевидно, постоянен для любого поперечного сечения проволоки) равен.

$$M = F \cdot R = \frac{2\pi R^3 \Delta R}{L} G \cdot \alpha .$$

Сравнивая с формулой закона Гука, находим, что модуль кручения равен

$$k = \frac{2\pi R^3 \Delta R}{L} G . \quad (3)$$

2.2 Расчет по формуле (3) для данных из условия дает

$$k = 0,13 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}} .$$

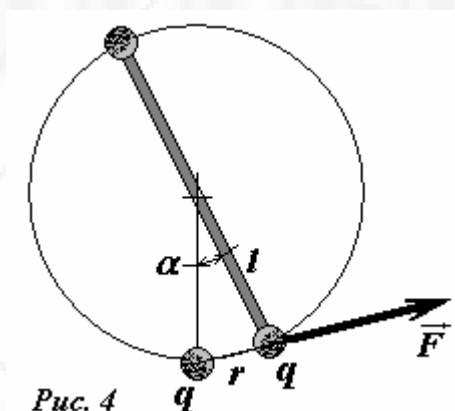
Часть 3. «Малые углы»

3.1 Пусть коромысло крутильных весов повернулось на малый угол α (рис.4). Тогда расстояние между шариками r можно выразить как длину соответствующей дуги $r = l \alpha$. Вследствие малости угла можно считать, что плечо силы Кулона практически равно расстоянию l . При равновесии момент силы отталкивания зарядов (силы Кулона) будет уравновешен возвращающим моментом, возникшим вследствие закручивания серебряной проволоочки, поэтому

$$\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q^2}{r^2} \cdot l = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q^2}{(l\alpha)^2} \cdot l = k \cdot \alpha . \quad (3)$$

Из (3) найдем зависимость угла закручивания нити при небольшом отклонении

$$\alpha(q) = \sqrt[3]{\frac{q^2}{4\pi \varepsilon_0 l k}} . \quad (4)$$

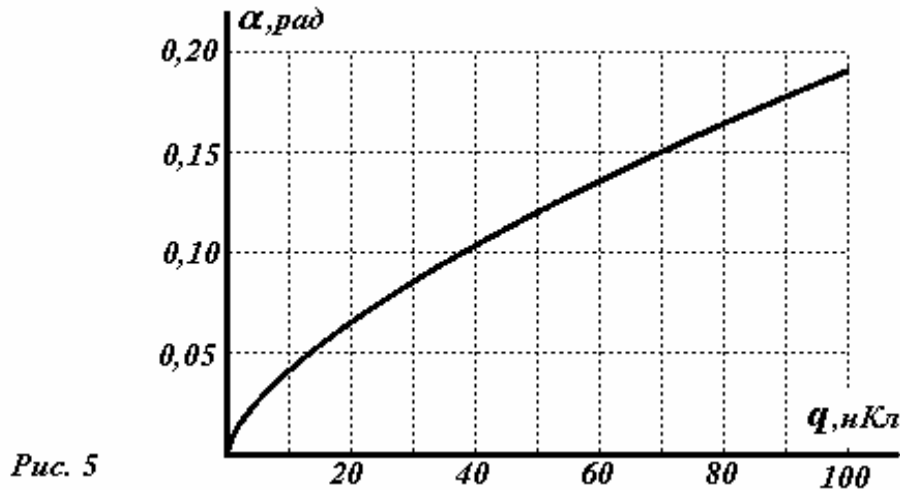


3.2 Для построения графика подставим численные значения постоянных величин

$$\alpha(q) = \sqrt[3]{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l k}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{(10^{-9})^2 q^2}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,10 \cdot 0,13}} \approx 8,84 \cdot 10^{-3} q^{\frac{2}{3}},$$

здесь заряд измеряется в нанокулонах. График этой зависимости показан на рис.5.



3.3 Выражая из формулы (4) заряд, получим

$$q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 l k \alpha^3} \quad (5)$$

Подставляя в (5) значение (предварительно не забыв перевести его в радианы!) $\alpha = 10^\circ = 0,175 \text{ рад}$ найдем величину заряда q_1

$$q_1 = 8,8 \cdot 10^{-8} \text{ Кл} = 88 \text{ нКл}$$

3.4 Для нахождения максимального заряда при малых отклонениях подставим в формулу (5) значение предельного угла $\alpha = 20^\circ$ и выразим отсюда величину заряда q_2

$$q_2 = \sqrt{4\pi\epsilon_0 l k \alpha^3} = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ Кл} = 0,25 \text{ мкКл} \quad (6)$$

Таким образом, при зарядах на шариках $q \leq q_2 = 0,25 \text{ мкКл}$ крутильные весы работают в режиме «малых углов».

Часть 4. «Большие углы».

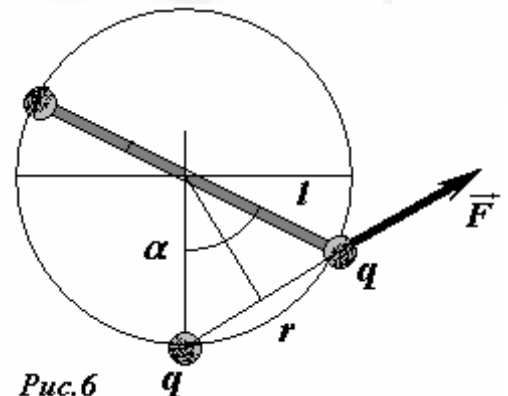
4.1 При больших углах отклонения следует учесть, что расстояние между взаимодействующими шариками есть длина хорды, а не дуги (рис.6), т.е.

$$r = 2l \sin(\alpha/2).$$

Соответственно плечо силы Кулона в этом случае следует рассчитать как

$$d = l \cos(\alpha/2).$$

Таким образом, правило моментов для этого случая запишется в виде



$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{(2l\sin(\alpha/2))^2} \cdot l\cos(\alpha/2) = k \cdot \alpha. \quad (7)$$

Выражение (7) удобно преобразовать к следующему виду

$$\alpha = \frac{1}{16\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{kl} \cdot \frac{\cos(\alpha/2)}{\sin^2(\alpha/2)}. \quad (8)$$

Это уравнение может быть представлено и в других эквивалентных формах.

4.2 Выражая из (8) величину заряда q , получим

$$q_2 = 4\sin(\alpha/2) \sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 kl \alpha}{\cos(\alpha/2)}} = \quad (9)$$

Если точное значение заряда \bar{q}_2 определяется формулой (9), а приближенное \tilde{q}_2 - формулой (6), то относительная погрешность последней равна

$$\varepsilon = \frac{\tilde{q}_2 - \bar{q}_2}{\bar{q}_2} = \frac{\tilde{q}_2}{\bar{q}_2} - 1 = \frac{\alpha\sqrt{\cos(\alpha/2)}}{2\sin(\alpha/2)} - 1.$$

При угле $\alpha = 20^\circ = \frac{\pi}{9} \text{ рад}$ расчет по этой формуле приводит к значению $\varepsilon \approx 2,6 \cdot 10^{-3}$

Данный факт позволяет сделать вывод, что границы приближения «малых углов» смело можно увеличить.

4.3 Уравнение (8) относительно угла закручивания нити α является трансцендентным, т.е. невозможно представить зависимость $\alpha(q)$ в явном аналитическом виде. Однако не составляет особого труда рассчитать на калькуляторе несколько значений обратной функции $q(\alpha)$, что позволяет построить примерно требуемый график, который показан на рис. 7, где значения $q(\alpha)$ подсчитаны по формуле (9) с шагом 10° .

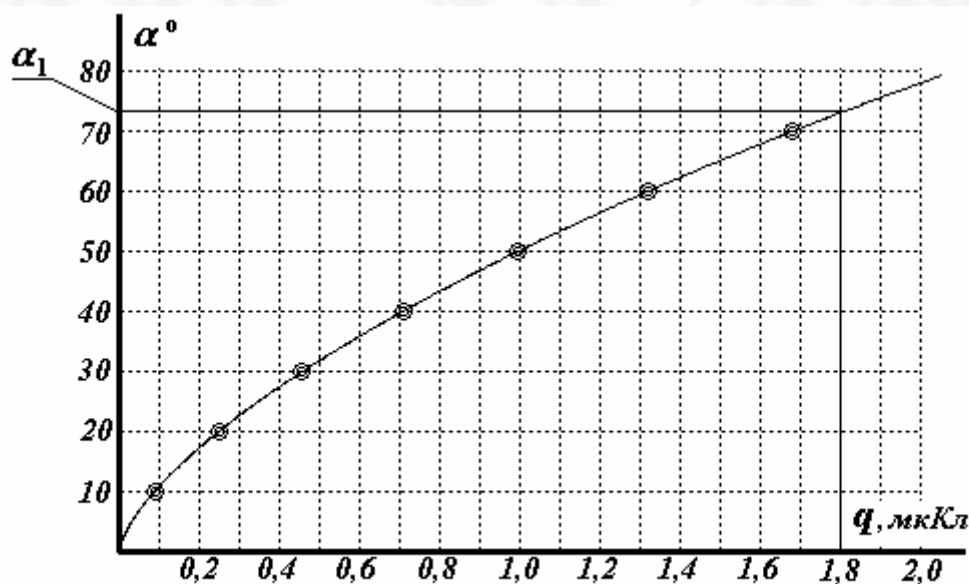


Рис. 7

По данному графику находим, что при заряде $q = 1,8 \text{ мкКл}$ угол отклонения коромысла приблизительно равен $\alpha \approx 73^\circ$.

На рис.8 представлены графики двух функций $q(\alpha)$, рассчитанные по приближенной формуле (6) и по точной формуле (9), как видно различия между ними начинают проявляться только при углах отклонения $\alpha \geq 60^\circ$.

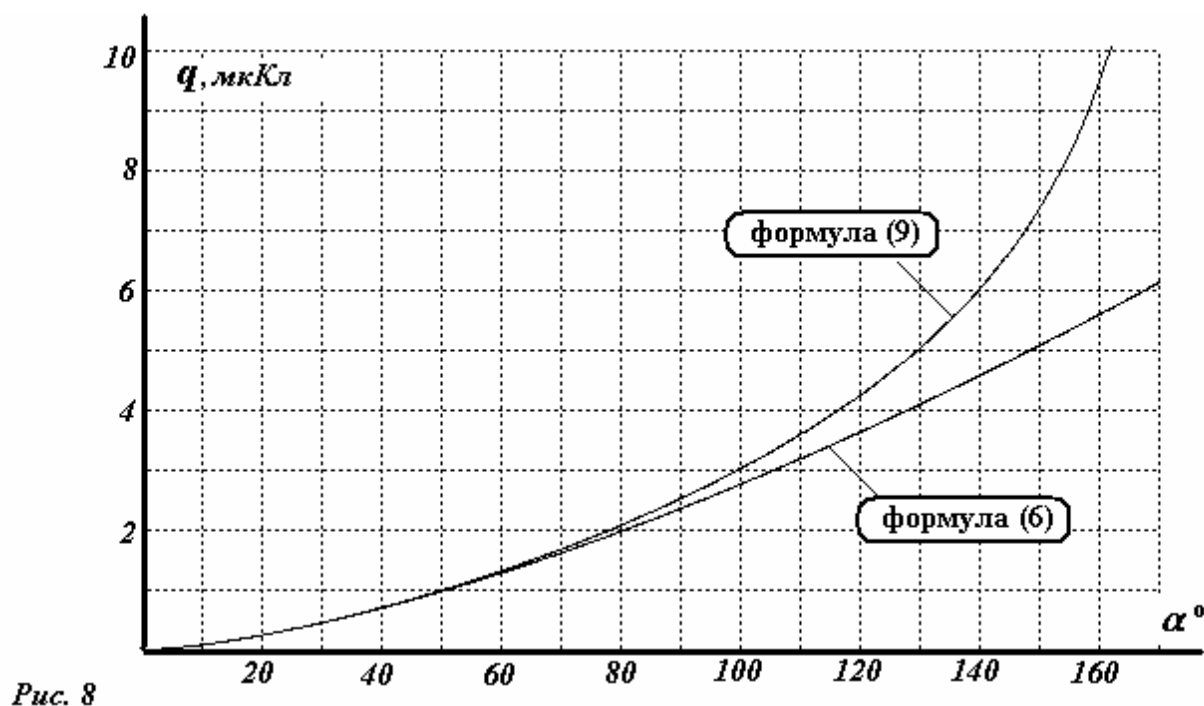


Рис. 8

Часть 5. Измерение зарядов.

5.1 Момент сил электрического взаимодействия пропорционален произведению зарядов шариков и сложным образом зависит от углового расстояния между ними

$$M_{эл.} = q_0 q_X f(\alpha_0). \quad (10)$$

Так как в данном эксперименте путем доворота коромысла возвращается в исходное положение, то явный вид зависимости этого момента от угла $f(\alpha_0)$ не существует.

Момент сил упругости нити пропорционален углу закручивания нити,

$$M = -k(\alpha_0 \pm \Delta\alpha), \quad (11)$$

в этой формуле следует брать знак «минус», при довороте в направлении первоначального коромысла; знак «плюс» при довороте в противоположном направлении. С помощью этих выражений получаем, что отношение зарядов легко определяется с помощью пропорции

$$\frac{q_X}{q_0} = \frac{\alpha_0 \pm \Delta\alpha}{\alpha_0}. \quad (12)$$

Так при довороте в сторону направления поворота коромысла

$$\frac{q_X}{q_0} = \frac{\alpha_0 - \Delta\alpha}{\alpha_0} \approx 0,5,$$

следовательно, в этом случае заряд уменьшился в два раза.

При довороте в противоположном направлении

$$\frac{q_X}{q_0} = \frac{\alpha_0 + \Delta\alpha}{\alpha_0} \approx 1,5,$$

следовательно, в этом случае заряд увеличился в полтора раза.

Часть 6. Вязкость.

6.1 Поворот верхнего рычага-стрелки смещает положение равновесия коромысла, теперь положению равновесия (когда проволока не закручена) соответствует угол поворота коромысла, равный углу поворота стрелки, то есть 90° . Для точного описания вращения коромысла следует пользоваться уравнением динамики вращательного движения. Однако, так как масло вязкое, то можно пользоваться «квазистатическим» приближением, то есть считать, что в любой момент времени сумма моментов сил, действующих на коромысло (в данном случае это моменты сил упругости и вязкого трения) равна нулю, что приводит к уравнению

$$k(\Delta\alpha_0 - \alpha) = \beta\omega = \beta \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}. \quad (13)$$

Из уравнения (13) следует, что угловая скорость вращения пропорциональна углу отклонения коромысла от положения равновесия

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{k}{\beta}(\Delta\alpha_0 - \alpha). \quad (14)$$

Таким образом, для проверки применимости сделанных предположений (момент сил вязкого трения пропорционален угловой скорости, квазистационарный характер движения коромысла) следует убедиться, что мгновенная угловая скорость вращения коромысла пропорциональна углу его отклонения от положения равновесия.

По приведенным в Таблице 1 данным можно приближенно вычислить значения средней угловой скорости вращения коромысла на каждом интервале изменения угла поворота

$$\omega_{i+0,5} \approx \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{t_{i+1} - t_i}, \quad (15)$$

которую следует приписать середине углового интервала $\alpha_{i+0,5} = \frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2}$.

Расчеты этой экспериментальной зависимости угловой скорости от угла поворота приведены в Таблице 2. На Рис. 9 построен график зависимости угловой скорости от отклонения коромысла от положения равновесия $(\Delta\alpha_0 - \alpha)$.

Таблица 2.

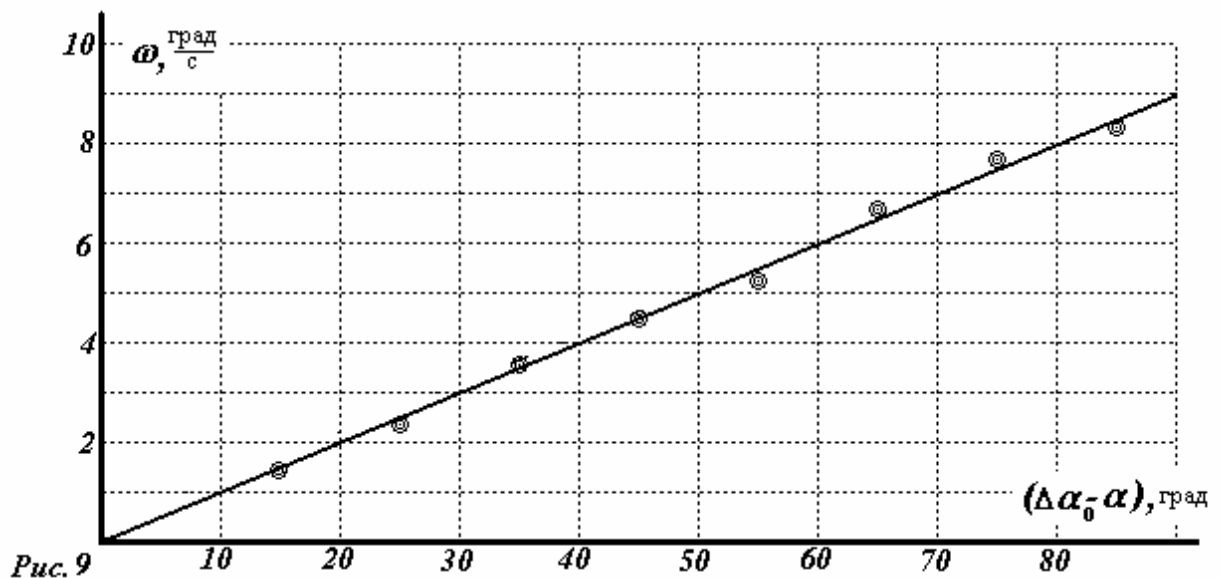
α°	5	15	25	35	45	55	65	75
$\omega, \text{град} \cdot \text{с}^{-1}$	8,33	7,69	6,67	5,26	4,55	3,57	2,38	1,45

Полученная пропорциональная зависимость подтверждает применимость сделанных предположений. Из уравнения (14) следует, что коэффициент пропорциональности между угловой скоростью и углом отклонения равен $\frac{k}{\beta}$, численное значение этого же коэффициента, найденное из графика, приблизительно равно

$$\frac{k}{\beta} \approx 0,10 \text{ с}^{-1}. \text{ Следовательно, требуемое значение параметра } \beta \approx \frac{k}{0,10 \text{ с}^{-1}} = 1,3 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}.$$

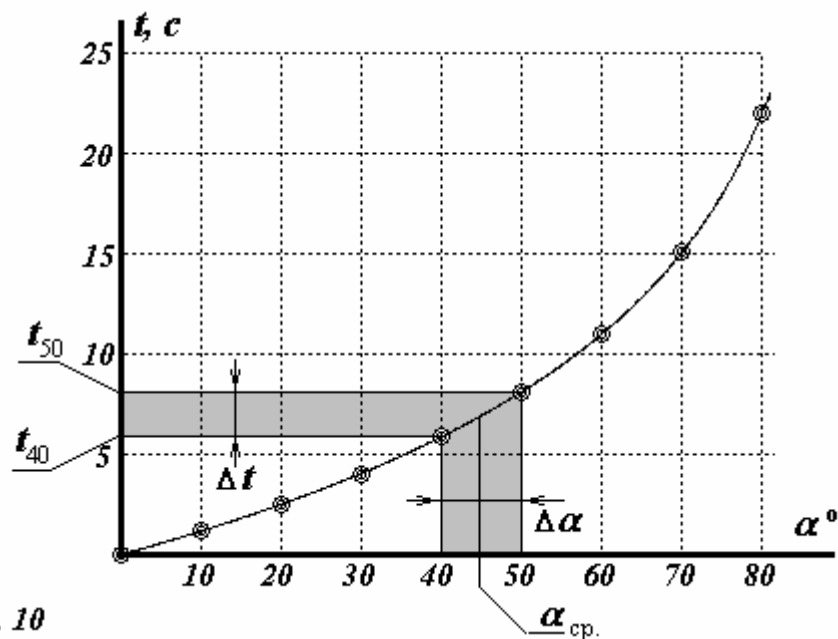
6.2 Из уравнения (13) следует, что характерное время установления равновесия, определенное с помощью Подсказки 2, равно

$$T_0 = \frac{\beta}{k} \approx 10 \text{ с}. \quad (18)$$



Проиллюстрируем более подробно методику экспериментальной проверки применимости уравнения (13).

На Рис. 10 показан график «прохождения дистанции» коромыслом, то есть времена поворота от начального положения до указанного значения угла поворота, построенный по данным Таблицы 1.



Так, например, участок от 40° до 50° коромысло прошло за время $\Delta t = t_{50} - t_{40} = 8,1 - 5,9 \approx 2,2 \text{ с}$. Следовательно, на этом участке средняя угловая скорость

примерно равна $\omega_{\text{ср.}} = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{10^\circ}{2,2} \approx 4,55 \frac{\text{град}}{\text{с}}$. С наименьшей погрешностью можно

считать, что с этой скоростью коромысло прошло среднюю точку интервала $\alpha_{\text{ср.}} = 45^\circ$.

Аналогичные расчеты проделаны для всех интервалов углов поворота, а их результаты приведены в Таблице 2: в первой строке середины интервалов, в нижней – соответствующие угловые скорости. При построении графика по оси абсцисс отложен угол, до положения равновесия, то есть $(\Delta \alpha_0 - \alpha) = (90^\circ - \alpha)$, который определяет момент сил упругости. При таком построении углы, приведенные в таблице и на графике, идут в обратном порядке.

Часть 7. Движение в масле.

7.1 При помещении заряженных шариков в масло сила взаимодействия между ними уменьшается в ε раз, во столько же раз уменьшается и момент силы, действующей на коромысло. Поэтому условие равновесия, описываемое уравнением (3), приобретет вид

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{q_0^2}{(l\alpha)^2} \cdot l = k \cdot \alpha. \quad (19)$$

Поэтому угол равновесия в масле станет равным

$$\bar{\alpha} = \sqrt[3]{\frac{q_0^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon l k}} = \frac{\alpha_0}{\sqrt[3]{\varepsilon}} \approx 12^\circ. \quad (20)$$

Таким образом, угол поворота уменьшится в $\sqrt[3]{\varepsilon} \approx 1,7$ раз.

7.2 Запишем уравнение движения коромысла в квазистационарном приближении

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon l} \frac{q^2}{\alpha^2} - k\alpha - \beta\omega = 0. \quad (21)$$

Для упрощения (т.е. экономии места) разделим уравнение на модуль кручения проволоки и используем введенные ранее обозначения:

$$\frac{\beta}{k} = T_0 \quad - \text{характерное время установления равновесия в масле;}$$

$$\frac{q_0^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon l k} = \bar{\alpha}^3, \text{ где } \bar{\alpha} \text{ - угол равновесия коромысла при заряде шариков равных } q_0,$$

определяемый по формуле (12);

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \quad - \text{угловая скорость вращения коромысла.}$$

С учетом этих обозначений уравнение (21) записывается в виде

$$T_0 \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\bar{\alpha}^3}{q_0^2} \frac{q^2}{\alpha^2} - \alpha. \quad (22)$$

Для описания начального этапа движения коромысла, когда можно пренебречь моментом сил упругости и при неизменных зарядах шариков $q = q_0$ уравнение (22) упрощается

$$T_0\omega = \frac{\bar{\alpha}^3}{\alpha^2}. \quad (23)$$

Для его решения воспользуемся Подсказкой 3, то есть попытаемся найти зависимость угла поворота от времени в виде

$$\alpha(t) = Ct^\gamma, \quad (24)$$

тогда $\omega(t) = C\gamma t^{\gamma-1}$. Подставляя эти выражения в уравнение (23) получим

$$T_0 C \gamma t^{\gamma-1} = \frac{\bar{\alpha}^3}{C^2} t^{-2\gamma}. \quad (25)$$

Чтобы это выражение было справедливо в любой момент времени, необходимо, чтобы показатели степеней переменной t совпадали. Это условие позволяет определить показатель степени в функции (24):

$$\gamma - 1 = -2\gamma \Rightarrow \gamma = \frac{1}{3}. \quad (26)$$

Теперь из равенства (25) легко определить постоянную $C = \sqrt[3]{3 \frac{\bar{\alpha}^3}{T_0}}$.

Окончательно, закон движения коромысла (24) в рамках оговоренных приближений имеет «очаровательный» вид

$$\alpha(t) = \bar{\alpha} \cdot \sqrt[3]{3 \frac{t}{T_0}}. \quad (27)$$

7.3 Окружим один из шариков замкнутой поверхностью Ω (Рис. 11). Сила электрического тока пересекающего через эту поверхность, равна скорости уменьшения заряда внутри поверхности. Эта сила тока равна потоку вектора плотности тока через поверхность $I = \Phi_{\vec{j}}$. Так как по закону Ома плотность тока пропорциональна напряженности электрического поля $\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$, то потоки этих векторов связаны аналогичным

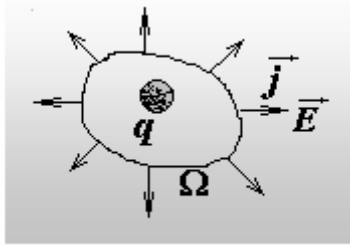


Рис.11

соотношением $\Phi_{\vec{j}} = \frac{1}{\rho} \Phi_{\vec{E}}$. Поток вектора напряженности

электрического поля определяется теоремой Гаусса $\Phi_{\vec{E}} = \frac{q}{\epsilon \epsilon_0}$. Таким образом, величина заряда внутри рассматриваемой области подчиняется уравнению

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = -I = -\Phi_{\vec{j}} = -\frac{1}{\rho} \Phi_{\vec{E}} = -\frac{q}{\rho \epsilon \epsilon_0}. \quad (28)$$

Из которого непосредственно следует, что характерное время стекания зарядов с шарика равно

$$T_1 = \rho \epsilon \epsilon_0 \approx 2,2 \text{ с}. \quad (29)$$

Заметим, что данная оценка может быть получена и иными способами, например, рассматривая явные выражения для напряженности поля вокруг уединенного шарика.

7.4 В данном случае в процессе движения коромысла происходит утечка зарядов с обоих шариков, поэтому момент сил, действующих на коромысло, изменяется, не только из-за изменения его угла поворота, но и из-за изменения зарядов взаимодействующих шариков. Поэтому угловая скорость вращения коромысла, определяемая уравнением (22) явно зависит как от времени, так и от угла поворота. Решать точно такие уравнения достаточно сложно. Однако, в данном случае нам не требуется находить закон движения коромысла – нам требуется найти только максимальный угол отклонения! Очевидно, что в момент максимального отклонения коромысла t_m его угловая скорость вращения равна нулю, следовательно, в этот момент справедливо соотношение

$$\frac{\bar{\alpha}^3}{q_0^2} \frac{q(t_m)^2}{\alpha_{\max}^2} - \alpha_{\max} = 0, \text{ или } \left(\frac{q(t_m)}{q_0} \right)^2 = \left(\frac{\alpha_{\max}(t_m)}{\bar{\alpha}} \right)^3. \quad (30)$$

Чтобы точно решить это уравнение (то есть найти момент остановки коромысла t_m) необходимо знать явный вид зависимостей угла поворота и зарядов шариков от времени (то есть опять же решить уравнение (22)). Для оценки времени движения до остановки можно воспользоваться традиционной методикой, описанной в Подсказке 2.

Для этого в уравнение (30) следует подставить временные зависимости, соответствующие начальному этапу движения! Такая зависимость для угла поворота получена и задается

функцией (27). Из уравнения (28) следует, что начальный этап разрядки описывается линейным уравнением

$$q(t) = q_0 \left(1 - \frac{t}{\rho \varepsilon \varepsilon_0} \right) = q_0 \left(1 - \frac{t}{T_1} \right). \quad (31)$$

В том же линейном приближении квадрат заряда описывается выражением

$$q^2 = q_0^2 \left(1 - \frac{t}{\rho \varepsilon \varepsilon_0} \right)^2 \approx q_0^2 \left(1 - 2 \frac{t}{T_1} \right). \quad (32)$$

Подстановка этих функций в уравнение (30) приводит к простому линейному уравнению

$$1 - 2 \frac{t_m}{T_1} = 3 \frac{t_m}{T_0}, \quad (33)$$

из которого следует, что остановка произойдет в момент времени

$$t_m = \frac{T_0 T_1}{2T_0 + 3T_1}. \quad (35)$$

Максимальный угол поворота будет достигнут в этот момент времени, его находим с помощью функции (7)

$$\alpha_{\max} = \bar{\alpha} \cdot \sqrt[3]{3 \frac{t_m}{T_0}} = \bar{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\frac{3T_1}{2T_0 + 3T_1}} = \bar{\alpha} \left(1 + \frac{2T_0}{3T_1} \right)^{-1/3} \approx 0,63 \bar{\alpha} \approx 7,5^\circ. \quad (36)$$

Дополнение, «не вошедшее в основное собрание сочинений»

Для обоснования предложенной методики оценки максимального угла приведем точное решение данной задачи.

Начнем со строго решения уравнения (22)

$$T_0 \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{\bar{\alpha}^3}{q_0^2} \frac{q^2}{\alpha^2} - \alpha. \quad (д1)$$

Введем безразмерные параметры $x = \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}$, $\tau = \frac{t}{T_0}$, а также подставим явное выражение

для заряда шариков $q = q_0 \exp(-\frac{t}{T_1})$. В этих переменных уравнение имеет вид

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\exp(-b\tau)}{x^2} - x, \quad (д2)$$

где обозначено $b = \frac{2T_0}{T_1}$.

Замена $x(\tau) = z(\tau) \cdot \exp(-\tau)$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{dz}{d\tau} \exp(-\tau) - z \exp(-\tau) = \frac{\exp(-b\tau)}{z^2 \exp(-2\tau)} - z \exp(-\tau) \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{\exp(-(b-3)\tau)}{z^2}$$

которое легко интегрируется (с учетом начальных условий при $\tau = 0$ $z = 0$):

$$\int_0^z z^2 dz = \int_0^\tau \exp(-(b-3)\tau) d\tau$$

$$\frac{z^3}{3} = \frac{1 - \exp(-(b-3)\tau)}{(b-3)}$$

$$z(\tau) = \sqrt[3]{3 \frac{1 - \exp(-(b-3)\tau)}{(b-3)}}$$

Теперь находим

$$x(\tau) = z(\tau) \cdot \exp(-\tau) = \sqrt[3]{3 \frac{\exp(-3\tau) - \exp(-b\tau)}{(b-3)}}. \quad (д3)$$

Возвращаясь к прежним переменным, получим

$$\alpha(t) = \bar{\alpha} \sqrt[3]{\frac{3T_1}{2T_0 - 3T_1} \left(\exp\left(-3\frac{t}{T_0}\right) - \exp\left(-2\frac{t}{T_1}\right) \right)}. \quad (д3а)$$

При малых τ закон изменения угла имеет вид

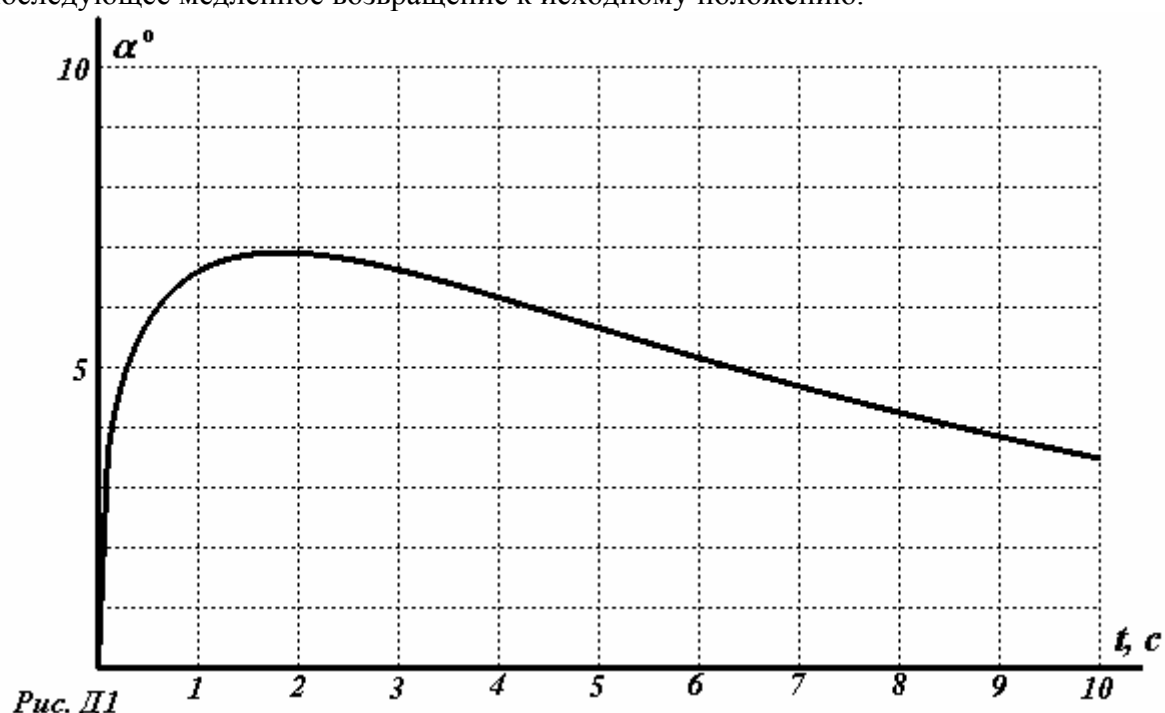
$$x(\tau) = \sqrt[3]{3 \frac{\exp(-3\tau) - \exp(-b\tau)}{(b-3)}} \approx \sqrt[3]{3\tau}, \quad (д4)$$

или

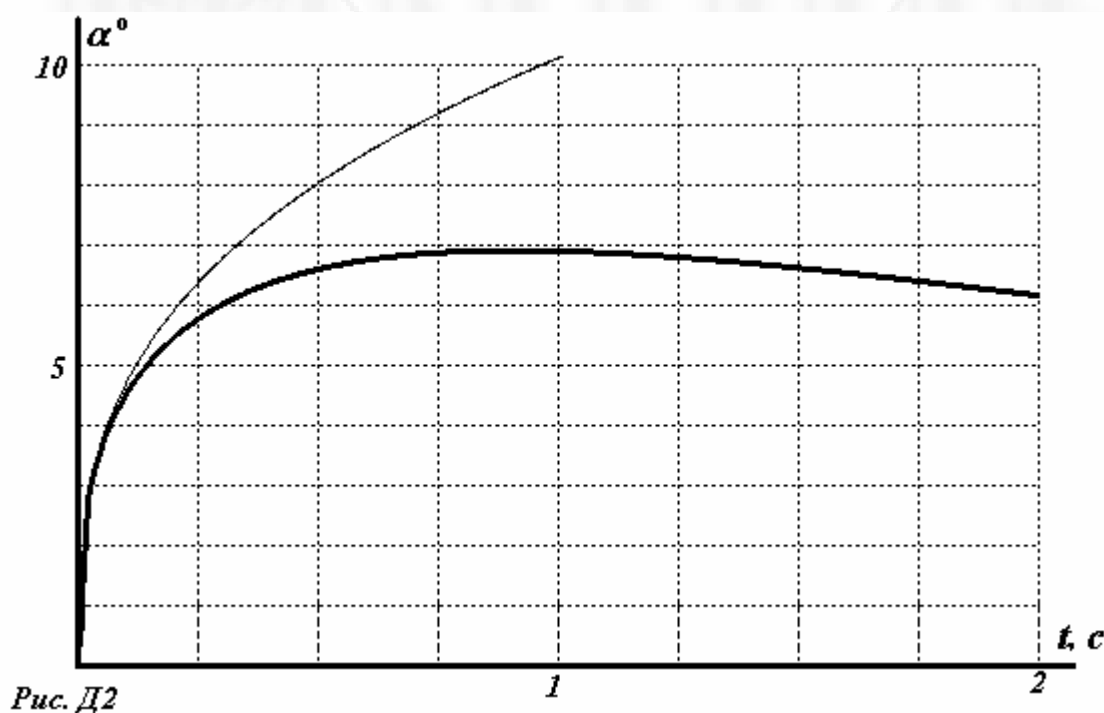
$$\alpha = \bar{\alpha} \sqrt[3]{3 \frac{t}{T_0}}, \quad (д4а)$$

что совпадает с (27).

На Рис.Д1 показан график зависимости Угла поворота коромысла от времени, рассчитанный по формуле (д3а): быстрое отклонение к максимальному значению и последующее медленное возвращение к исходному положению.



На рис. Д2 показан участок этой же функции на меньшем временном интервале, здесь же для сравнения приведен для сравнения (тонкая линия) график приближенного решения, рассчитанный по формуле (27).



Проиллюстрируем графически решение уравнения (30) – условия равенства моментов сил упругости и электрического взаимодействия в момент остановки коромысла. На Рис. Д3 построены графики функций, фигурирующих в этом уравнении: толстые линии соответствуют точному решению, тонкие – использованному в «официальном» решении приближению.

Видно, что значение момента времени t_m определяется со значительной погрешностью, однако требуемое значение максимального угла отклонения рассчитывается достаточно корректно: имеет место своеобразная компенсация погрешностей аппроксимации функций. Кроме того, вблизи экстремума любая функция изменяется медленно, поэтому погрешность аргумента слабо влияет на погрешность определения максимума функции.

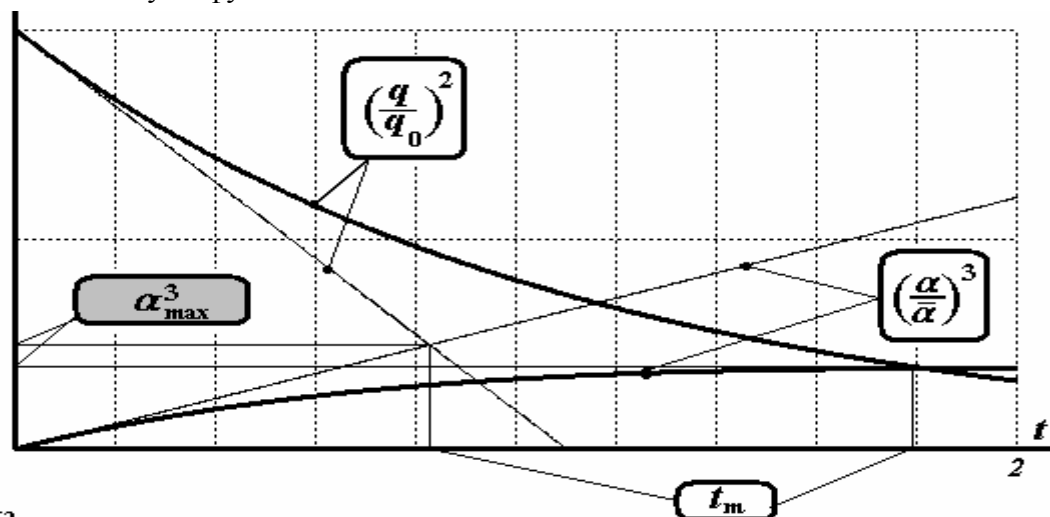


Рис. Д3

В заключение укажем точное значение максимального отклонения коромысла, найденный традиционным методом максимум функции (д3а):

$$\alpha_{\max} = \bar{\alpha} \left(\frac{2}{3} \eta \right)^{-\frac{2\eta}{3(2\eta-3)}}, \quad (\text{д5})$$

где обозначено $\eta = \frac{T_0}{T_1}$ - отношение времени установления равновесия ко времени разрядки. Ранее было получено приближенное значение этой же функции (36), которая выражается через отношение времен в виде

$$\alpha_{\max} = \bar{\alpha} \left(1 + \frac{2}{3} \eta \right)^{-\frac{1}{3}}. \quad (\text{д5a})$$

Графики этих функций показаны на Рис. Д4 (толстая линия – точное решение, тонкая – приближенное): погрешность решения невелика и вполне допустима для данной олимпиадной задачи.

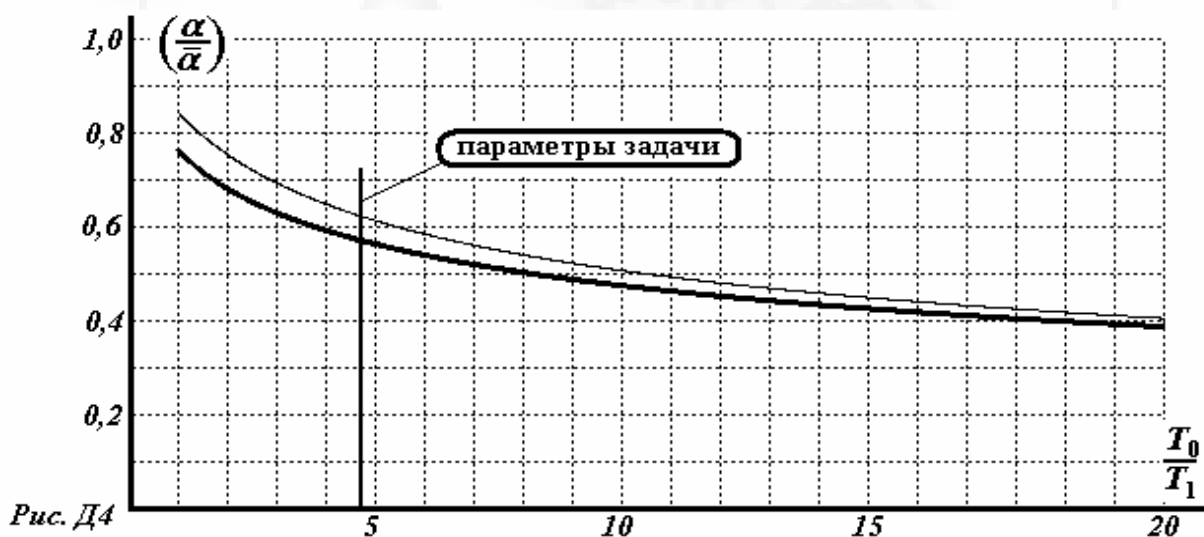


Рис. Д4