

Задача 3. «Сейсморазведка»

1. Поскольку по условию толщины слоев намного больше, чем расстояние от места взрыва до приемника, то углы падения звуковых волн на границу раздела слоев можно считать малыми.

Рассмотрим возможные пути распространения звука от места взрыва до приемника (см. рисунок):

0) Без отражений (вблизи земной поверхности). Время, за которое звук дойдет до приемника, равно

$$t_0 = \frac{2l}{v_1}. \quad (1)$$

1) Отражение от первой границы. Угол падения на границу φ_1 равен углу отражения.

Путь, пройденный звуком, равен

$$s_1 = 2 \frac{h_1}{\cos \varphi_1} \approx 2 \frac{h_1}{1 - \frac{\varphi_1^2}{2}} \approx 2h_1(1 + \frac{\varphi_1^2}{2}), \quad (2)$$

при этом сам угол падения

$$\varphi_1 \approx \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{l}{h_1}, \quad (3)$$

откуда время распространения звукового сигнала от места взрыва до приемника равно

$$t_1 = \frac{2h_1}{v_1} (1 + \frac{\varphi_1^2}{2}) \approx \frac{2h_1}{v_1} (1 + \frac{l^2}{h_1^2}) = \frac{2h_1}{v_1} + \frac{1}{h_1 v_1} l^2. \quad (4)$$

2) Отражение от второй границы. Угол падения φ_1^* связан с углом преломления φ_2^* законом преломления

$$\frac{\sin \varphi_1^*}{v_1} = \frac{\sin \varphi_2^*}{v_2}, \quad (5)$$

который ввиду малости углов можно записать, как

$$\frac{\varphi_1^*}{v_1} = \frac{\varphi_2^*}{v_2}, \quad (6)$$

откуда

$$\varphi_2^* = \frac{v_2}{v_1} \varphi_1^*. \quad (7)$$

Кроме того, горизонтальное смещение звукового луча до точки отражения равно l

$$l = h_1 \operatorname{tg} \varphi_1^* + h_2 \operatorname{tg} \varphi_2^* \approx h_1 \varphi_1^* + h_2 \varphi_2^*. \quad (8)$$

Из (7) и (8) находим значения углов

$$l = h_1 \varphi_1^* + h_2 \varphi_2^* = h_1 \varphi_1^* + h_2 \frac{v_2}{v_1} \varphi_1^* = \frac{h_1 v_1 + h_2 v_2}{v_1} \varphi_1^*, \quad (9)$$

$$\varphi_1^* = \frac{v_1}{h_1 v_1 + h_2 v_2} l, \quad (10)$$

$$\varphi_2^* = \frac{v_2}{h_1 v_1 + h_2 v_2} l. \quad (11)$$

Пусть луч прошел расстояние s_1^* в первой среде и s_2^* во второй. Эти расстояния можно выразить через толщины слоев h_1 и h_2 и углы φ_1^* и φ_2^* :

$$s_1^* = \frac{h_1}{\cos \varphi_1^*} \approx h_1 (1 + \frac{\varphi_1^{*2}}{2}), \quad (12)$$

$$s_2^* = \frac{h_2}{\cos \varphi_2^*} \approx h_2 \left(1 - \frac{\varphi_2^{*2}}{2}\right). \quad (13)$$

Время распространения звукового сигнала от места взрыва до приемника равно

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{s_1^*}{v_1} + \frac{s_2^*}{v_2} = 2 \frac{h_1}{v_1} \left(1 + \frac{\varphi_1^{*2}}{2}\right) + 2 \frac{h_2}{v_2} \left(1 + \frac{\varphi_2^{*2}}{2}\right) = 2 \left(\frac{h_1}{v_1} + \frac{h_2}{v_2}\right) + \frac{h_1}{v_1} \varphi_1^{*2} + \frac{h_2}{v_2} \varphi_2^{*2} = \\ &= 2 \left(\frac{h_1}{v_1} + \frac{h_2}{v_2}\right) + \frac{h_1}{v_1} \left(\frac{v_1}{h_1 v_1 + h_2 v_2}\right)^2 l^2 + \frac{h_2}{v_2} \left(\frac{v_2}{h_1 v_1 + h_2 v_2}\right)^2 l^2 = 2 \left(\frac{h_1}{v_1} + \frac{h_2}{v_2}\right) + \frac{1}{(h_1 v_1 + h_2 v_2)} l^2 \end{aligned} \quad (14)$$

3) Отражение от третьей границы. Угол падения φ_1^\dagger связан с углом преломления φ_2^\dagger и углом преломления φ_3^\dagger законом преломления

$$\frac{\sin \varphi_1^\dagger}{v_1} = \frac{\sin \varphi_2^\dagger}{v_2} = \frac{\sin \varphi_3^\dagger}{v_3}, \quad (15)$$

который ввиду малости углов можно записать, как

$$\frac{\varphi_1^\dagger}{v_1} = \frac{\varphi_2^\dagger}{v_2} = \frac{\varphi_3^\dagger}{v_3}, \quad (16)$$

откуда

$$\varphi_2^\dagger = \frac{v_2}{v_1} \varphi_1^\dagger, \quad (17)$$

$$\varphi_3^\dagger = \frac{v_3}{v_1} \varphi_1^\dagger. \quad (18)$$

Кроме того, горизонтальное смещение звукового луча до точки отражения равно l

$$l = h_1 \tan \varphi_1^\dagger + h_2 \tan \varphi_2^\dagger + h_3 \tan \varphi_3^\dagger \approx h_1 \varphi_1^\dagger + h_2 \varphi_2^\dagger + h_3 \varphi_3^\dagger. \quad (19)$$

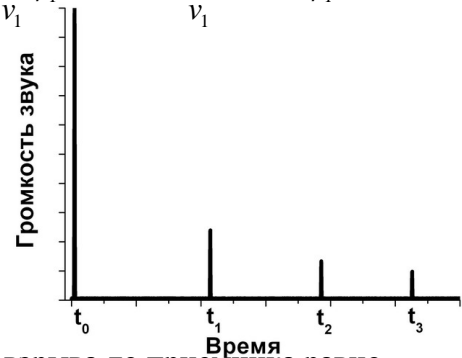
Из (16), (17) и (18) находим значения углов

$$l = h_1 \varphi_1^\dagger + h_2 \varphi_2^\dagger + h_3 \varphi_3^\dagger = h_1 \varphi_1^\dagger + h_2 \frac{v_2}{v_1} \varphi_1^\dagger + h_3 \frac{v_3}{v_1} \varphi_1^\dagger = \frac{h_1 v_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3}{v_1} \varphi_1^\dagger, \quad (20)$$

$$\varphi_1^\dagger = \frac{v_1}{h_1 v_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3} l, \quad (21)$$

$$\varphi_2^\dagger = \frac{v_2}{h_1 v_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3} l, \quad (22)$$

$$\varphi_3^\dagger = \frac{v_3}{h_1 v_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3} l. \quad (23)$$



Время распространения звукового сигнала от места взрыва до приемника равно

$$\begin{aligned} t_3 &= \frac{s_1^\dagger}{v_1} + \frac{s_2^\dagger}{v_2} + \frac{s_3^\dagger}{v_3} = 2 \frac{h_1}{v_1} \left(1 + \frac{\varphi_1^{\dagger 2}}{2}\right) + 2 \frac{h_2}{v_2} \left(1 + \frac{\varphi_2^{\dagger 2}}{2}\right) + 2 \frac{h_3}{v_3} \left(1 + \frac{\varphi_3^{\dagger 2}}{2}\right) = \\ &= 2 \left(\frac{h_1}{v_1} + \frac{h_2}{v_2} + \frac{h_3}{v_3}\right) + \frac{1}{(h_1 v_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3)} l^2. \end{aligned} \quad (24)$$

В моменты времени t_0, t_1, t_2, t_3 к приемнику придут звуковые волны от взрыва и на графике зависимости регистрируемой приемником громкости звука от времени появятся максимумы. Поскольку, звуковая мощность при каждом отражении от границ слоев теряется, то амплитуда второго максимума будет меньше, чем первого и т.д. Примерный график зависимости громкости звука от времени представлен на рисунке.

2. Согласно формуле (4) время прихода сигналов к приемникам линейно зависят от l^2 .

$$t_1 = \frac{2h_1}{v_1} - \frac{1}{h_1 v_1} l^2.$$

Таким образом, график зависимости времени прихода звуковых волн от l^2 будет представлять собой прямую, точка пересечения с вертикальной осью которой даст значение

$$\tau_1 = 2 \frac{h_1}{v_1}, \quad (25)$$

а тангенс угла наклона

$$k_1 = \frac{1}{h_1 v_1}, \quad (26)$$

(те, кто знает метод наименьших квадратов, могут им воспользоваться).

Аналогично для зависимостей моментов времени t_2 и t_3 от l^2 :

$$\tau_2 = 2 \left(\frac{h_1}{v_1} + \frac{h_2}{v_2} \right), \quad (27)$$

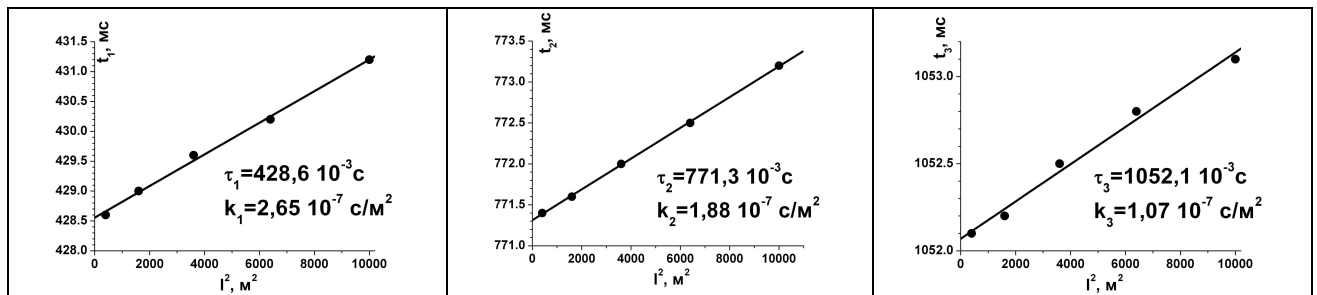
$$k_2 = \frac{1}{h_1 v_1 + h_2 v_2}, \quad (28)$$

$$\tau_3 = 2 \left(\frac{h_1}{v_1} + \frac{h_2}{v_2} + \frac{h_3}{v_3} \right), \quad (29)$$

$$k_3 = \frac{1}{h_1 v_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3}. \quad (30)$$

Значения времен прихода сигналов в зависимости от l^2 приведены в таблице и на графиках. Момент времени прихода сигнала находится по максимуму громкости.

$l, \text{ м}$	$l^2, \text{ м}^2$	$t_1, \text{ мс}$	$t_2, \text{ мс}$	$t_3, \text{ мс}$
20	400	428,6	771,4	1052,1
40	1600	429,0	771,6	1052,2
60	3600	429,6	772,0	1052,5
80	6400	430,2	772,5	1052,8
100	10000	431,2	773,2	1053,1



Значения параметров (31)

$$\tau_1 = 428,6 \cdot 10^{-3} \text{ с}, \quad \tau_2 = 771,3 \cdot 10^{-3} \text{ с}, \quad \tau_3 = 1052,1 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

$$k_1 = 2,65 \cdot 10^{-7} \text{ с/м}^2, \quad k_2 = 1,88 \cdot 10^{-7} \text{ с/м}^2, \quad k_3 = 1,07 \cdot 10^{-7} \text{ с/м}^2.$$

Значения толщин слоев и скоростей звука находятся из системы уравнений (25)-(30):

$$\frac{h_1}{v_1} = \frac{\tau_1}{2}, \quad (32)$$

$$\frac{h_2}{v_2} = \frac{\tau_2 - \tau_1}{2}, \quad (33)$$

$$\frac{h_3}{v_3} = \frac{\tau_3 - \tau_2}{2}, \quad (34)$$

$$h_1 v_1 = \frac{1}{k_1}, \quad (35)$$

$$h_2 v_2 = \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}, \quad (36)$$

$$h_3 v_3 = \frac{1}{k_3} - \frac{1}{k_2}. \quad (37)$$

Из (32)-(37) получаем

$$h_1 = \sqrt{\frac{\tau_1}{2k_1}} \approx 0,90 \text{ км}, \quad (38)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2}{\tau_1 k_1}} \approx 4,2 \text{ км/с}, \quad (39)$$

$$h_2 = \sqrt{\frac{\tau_2 - \tau_1}{2} \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)} \approx 0,51 \text{ км}, \quad (40)$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{\tau_2 - \tau_1} \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)} \approx 3,0 \text{ км/с}, \quad (41)$$

$$h_3 = \sqrt{\frac{\tau_3 - \tau_2}{2} \left(\frac{1}{k_3} - \frac{1}{k_2} \right)} \approx 0,75 \text{ км}, \quad (42)$$

$$v_3 = \sqrt{\frac{2}{\tau_3 - \tau_2} \left(\frac{1}{k_3} - \frac{1}{k_2} \right)} \approx 5,4 \text{ км/с}. \quad (43)$$

Толщины слоев и скорости звука в них определены неточно – случайные факторы вносят погрешность и на графиках громкости, регистрируемой приемником, присутствует шум. Вероятнее всего, земные породы расположены так: 1 – песок, 2 – глина, 3 – железная руда.