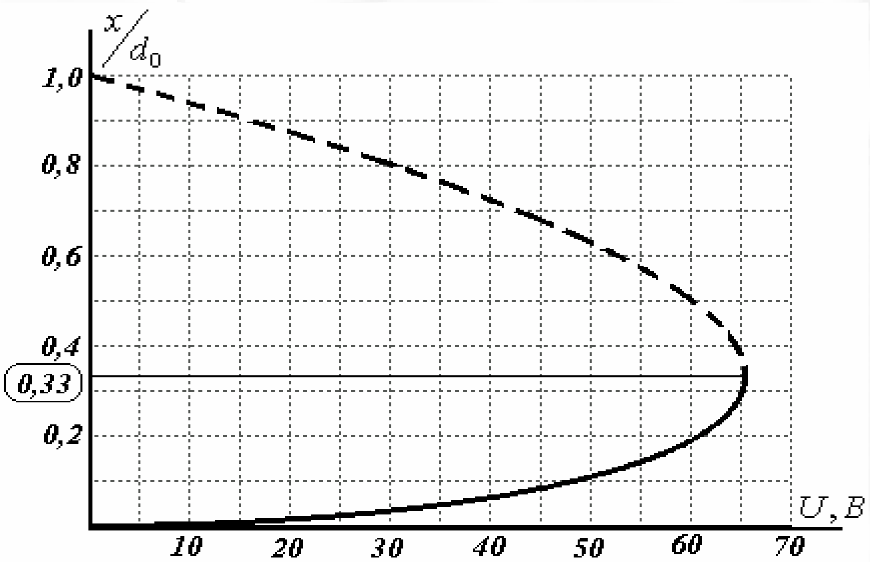
Легко заметить, что в интересующем нас диапазоне $x \in [0, d_0]$ уравнение (9) может иметь либо два корня (а), либо один (в), либо ни одного корня (б).
Традиционный анализ устойчивости (электрическая сила стремится увеличить смещение, а сила упругости – уменьшить), показывает, что в случае (а) устойчивым является меньший корень, в случае (в) – корень неустойчив. Отсутствие корней свидетельствует об отсутствии положения равновесия подвижной пластинки, то есть в этом случае никакие измерения невозможны.

Если сложно построить график зависимости $x(U)$, то можно построить зависимость $U(x)$! Выразим из уравнения (9)

$$U = \sqrt{\frac{2kd_0^3}{\varepsilon_0 S}} \cdot \left(1 - \frac{x}{d_0}\right)\sqrt{\frac{x}{d_0}}. \qquad (10)$$

Обозначим $A = \sqrt{\frac{2kd_0^3}{\varepsilon_0 S}} \approx 170B$, $\xi = \frac{x}{d_0}$ и получим «совсем простую зависимость $U = A(1-\xi)\sqrt{\xi}$. Построить график этой функции можно с помощью традиционных методов анализа функций. Результат такого построения показан на рисунке.



Как было отмечено выше, верхняя ветвь этой зависимости неустойчива, поэтому изображена пунктиром. Из анализа функции (10) следует, что максимальное напряжение, поддающееся измерению достигается при $\xi = 0{,}33$ и равно $U_{\max} \approx 65B$. Минимальное измеримое напряжение рассчитывается при подстановке в функцию (10) минимально измеримого $x = \delta x$. В этом случае $U_{\min} \approx 12B$.

Задание 11.3

а) При достаточно большом трении движение цилиндра по наклонной плоскости будет происходить без проскальзывания. При этом на него будут действовать три силы — тяжести $m\vec{g}$, реакции опоры $\vec{N}$ и трения покоя $\vec{F}_{mp}$. Сила трения покоя при этом будет раскручивать цилиндр так, чтобы в любой момент времени скорость υ его поступательного движения совпадала с линейной скоростью вращения

$$\upsilon = \omega R. \qquad (1)$$

Соответственно полная кинетическая энергия катящегося без проскальзывания со скоростью υ цилиндра будет складываться из энергий поступательного и вращательного движений (теорема Кёнига)

$$E_K = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{m(\omega R)^2}{2} = m\upsilon^2 . \qquad (2)$$

Согласно закону равноускоренного движения

$$S = \frac{at^2}{2} = \frac{\upsilon^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad \upsilon^2 = 2aS \ , \qquad (3)$$

где a — искомое ускорение цилиндра.

С другой стороны, поскольку в системе нет тепловыделения, можем воспользоваться законом сохранения механической энергии

$$E_П = E_K \quad \Rightarrow \quad mgh = mgS\sin\alpha = m\upsilon^2 = \{(3)\} = 2aSm . \qquad (4)$$

Из (4) находим ускорение цилиндра в случае отсутствия проскальзывания

$$a = \frac{g\sin\alpha}{2} . \qquad (5)$$

Как следует из (5), ускорение цилиндра в этом случае в два раза меньше ускорения «свободного» скольжения по наклонной плоскости в отсутствие сил трения. Это обстоятельство (в совокупности с основным законом динамики) позволяет вычислить абсолютное значение силы трения покоя в данном случае

$$F_{тр} = \frac{mg\sin\alpha}{2} \ . \qquad (6)$$

С помощью (6) количественно определим условие «достаточно большого трения», при котором может происходить движение без проскальзывания. Поскольку максимальное значение силы трения покоя совпадает с силой трения скольжения (явлением «застоя» пренебрежем), то

$$\frac{mg\sin\alpha}{2} \le \mu N = \mu mg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \mu \ge \frac{tg\alpha}{2} . \qquad (7)$$

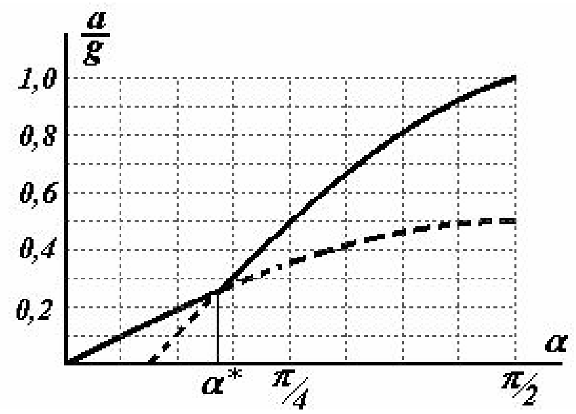
В случае недостаточного, «слабого» трения (при невыполнении условия (7)) сила трения уже «не будет успевать» раскручивать цилиндр до «нужной» угловой скорости (1). Соответственно, в системе начнется проскальзывание и, как следствие, тепловыделение. При этом, в соответствии с II законом Ньютона в проекции на наклонную плоскость, имеем

$$ma = mg\sin\alpha - \mu N = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \quad \Rightarrow \quad a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) . \qquad (8)$$

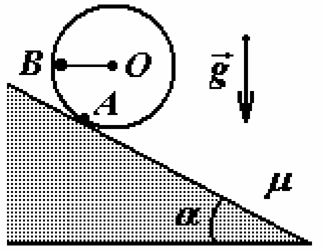
Искомая зависимость $a(\alpha)$ имеет вид

$$a = \begin{cases} \dfrac{g\sin\alpha}{2}, \ при \ \alpha \le \alpha^*, \ \alpha^* = arctg(2\mu); \\ g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha), \qquad при \ \alpha \ge \alpha^* . \end{cases} \qquad (9)$$

График зависимости (9) изображен на рисунке.



б) После прикрепления эксцентрика цилиндр сможет оставаться в равновесии на достаточно шероховатой наклонной плоскости, благодаря уравновешивающему моменту силы тяжести эксцентрика относительно точки касания цилиндра и плоскости (точка А на рис.). При минимально возможной массе эксцентрика m_0 отрезок ОВ должен быть горизонтален. Тогда, записывая условия равенства моментов соответствующих сил тяжести относительно точки А, получим

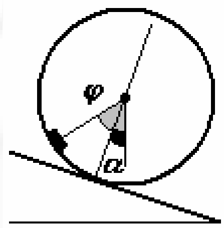


$$m_0 g(R - R\sin\alpha) = mgR\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad m_0 = \frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha} m. \qquad (10)$$

Первое условие равновесия (равенство нулю равнодействующей всех сил), приводит к очевидному требованию отсутствия скольжения по наклонной плоскости

$$\mu \ge tg\alpha. \qquad (11)$$

в) Положение равновесия будем определять углом отклонения отрезка между грузиком и центром от вертикали φ. Условие равновесия в этом случае будет иметь вид



$$mgR\sin\alpha = m_0 gR(\sin\varphi - \sin\alpha).$$

Выразим отсюда равновесный угол

$$\sin\varphi = \frac{m+m_0}{m_0}\sin\alpha.$$

Это уравнение на интервале $[0,2\pi]$ имеет два корня, один из которых неустойчивый, поэтому единственным реализуемым положением равновесия является угол

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{m+m_0}{m_0}\sin\alpha\right).$$