

Задание 2 «Кастрюля»

1. В каждом случае вода нагревается на $\Delta T = 5^\circ C$. Температурный интервал достаточно маленький. Поэтому можно считать, что мощность тепловых потерь в окружающую среду остается практически неизменной в этом интервале. Для большей точности в формулу теплопотерь

$$P_{\uparrow} = \alpha(T - T_0) \quad (1)$$

будем подставлять среднее значение температуры. В нашем случае:

$$\langle T_1 \rangle = 2,5^\circ C \quad \langle T_2 \rangle = 42,5^\circ C \quad \langle T_3 \rangle = 82,5^\circ C \quad (2).$$

За некоторый промежуток времени Δt вода получает от плиты количество теплоты равное $P\Delta t$ Дж и отдает в окружающую среду количество теплоты равное $P_{\uparrow}\Delta t$ Дж.

Уравнение теплового баланса выглядит следующим образом:

$$cm\Delta T = (P - P_{\uparrow})\Delta t \quad (3).$$

Подставив выражение для мощности тепловых потерь, запишем уравнение (3) в виде:

$$cm \frac{\Delta T}{\Delta t} = P - \alpha(\langle T \rangle - T_0) \quad (4).$$

Преобразуем уравнение (4) к виду:

$$cm \frac{\Delta T}{\Delta t} = (P + \alpha T_0) - \alpha \langle T \rangle = \beta - \alpha \langle T \rangle \quad (5),$$

$$\text{где } \beta = P + \alpha T_0 \quad (6),$$

1.1 Используя данные задачи, можно вычислить значение правой части выражения (5) для каждого случая, т.е. для каждой средней

температуры (2) найти значение $cm \frac{\Delta T}{\Delta t}$.

Получим:

$$\begin{aligned} 1. \quad \langle T_1 \rangle = 2,5^\circ C \quad cm \frac{\Delta T}{\Delta t_1} &= 1235 \\ 2. \quad \langle T_2 \rangle = 42,5^\circ C \quad cm \frac{\Delta T}{\Delta t_2} &= 708 \\ 3. \quad \langle T_3 \rangle = 82,5^\circ C \quad cm \frac{\Delta T}{\Delta t_3} &= 188 \end{aligned} \quad (7)$$

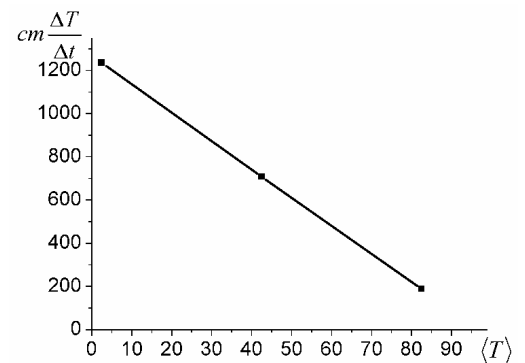


Рис.1

Если мощность теплопотерь действительно

пропорциональна разности температур, то все три точки на графике зависимости $cm \frac{\Delta T}{\Delta t}$ от $\langle T \rangle$ будут находиться на одной прямой. Нетрудно убедиться, что это действительно так (рис. 1).

1.2 Определим постоянные α и β аналитически:

$$\alpha = \frac{cm \frac{\Delta T}{\Delta t_1} - cm \frac{\Delta T}{\Delta t_3}}{\langle T_3 \rangle - \langle T_1 \rangle} = 13 \frac{Bm}{^\circ C} \quad (8);$$

$$\beta = 1270 Bm \quad (9);$$

1.3 При нагревании от $20^\circ C$ до $25^\circ C$ $\langle T \rangle = 22,5^\circ C$. Подставим это значение, а также значения постоянных α и β в уравнение (5). Получим:

$$cm \frac{\Delta T}{\Delta t_x} = \beta - \alpha \langle T \rangle = 978 \quad (10).$$

Откуда:

$$\Delta t_x = \frac{cm \Delta T}{978} = 64c \quad (11).$$

1.4 Температура воды перестает изменяться, когда мощность теплопотерь становится равной мощности плиты. При этом правая часть выражения (5) обращается в ноль. Таким образом, максимальная температура равна:

$$T_{\max} = \frac{\beta}{\alpha} = 98^\circ C \quad (12)$$

2.1 При выключенной плите уравнение теплового баланса будет выглядеть следующим образом:

$$cm \frac{\Delta T}{\Delta t} = -\alpha (\langle T \rangle - T_0) = -\alpha \langle T \rangle + \alpha T_0 \quad (13)$$

Таким образом, зависимость $cm \frac{\Delta T}{\Delta t}$ от $\langle T \rangle$ и в случае остывания должна быть линейной. Убедимся в этом:

$$\begin{aligned} 1. \quad \langle T_1 \rangle = 92,5^\circ C \quad cm \frac{\Delta T}{\Delta t_1} &= -940 \\ 2. \quad \langle T_2 \rangle = 62,5^\circ C \quad cm \frac{\Delta T}{\Delta t_2} &= -553 \\ 3. \quad \langle T_3 \rangle = 32,5^\circ C \quad cm \frac{\Delta T}{\Delta t_3} &= -160 \end{aligned} \quad (14).$$

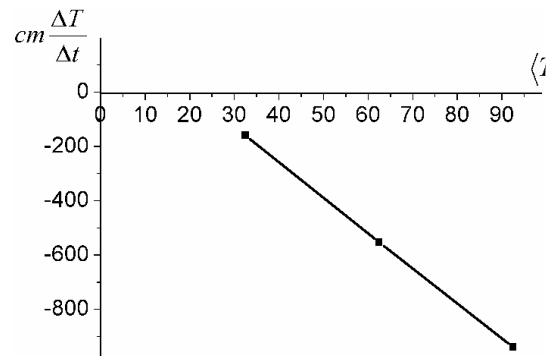


Рис.2

2.2 Можно убедиться, что постоянная α и в этом случае равна:

$$\alpha = - \frac{cm \frac{\Delta T}{\Delta t_1} - cm \frac{\Delta T}{\Delta t_3}}{\langle T_3 \rangle - \langle T_1 \rangle} = 13 \quad (15).$$

А постоянная αT_0 :

$$\alpha T_0 = 263 Wm \quad (16).$$

Отсюда определяем значение комнатной температуры:

$$T_0 = 20^\circ C \quad (17).$$

2.3 При остывании от $50^\circ C$ до $45^\circ C$, средняя температура $\langle T \rangle = 47,5^\circ C$ Подставим известные величины в уравнение (13) и получим время остывания:

$$\Delta t_x = \frac{cm \Delta T}{-\alpha \langle T \rangle + \alpha T_0} = 176c \quad (18).$$

2.4 Мощность входила в выражение для коэффициента β в первой части задачи (выражение (6)). Зная комнатную температуру, можно вычислить мощность электроплиты:

$$P = \beta - \alpha T_0 = 1,0 \cdot 10^3 Wm \quad (19).$$