

Задача 11.2. Резонанс

1. После столкновения шарик получает дополнительную скорость $2u$.
Следующее соударение произойдет через:

$$\Delta t = 2 \frac{v + 2u}{g} = \frac{2v}{g} + \frac{4u}{g} \quad (1)$$

И это время должно быть кратным периоду после любого количества соударений. Это может быть, только если каждое из слагаемых выражения (1) кратно периоду:

$$\frac{4u}{g} = Tm \quad (2),$$

$$\frac{2v}{g} = Tn \quad (3).$$

Из равенства (2) следует:

$$T = \frac{4u/g}{m} = A/m \quad (4).$$

Подставляя значение периода в выражение (3), получим:

$$v = 2u \frac{n}{m} = B \frac{n}{m} \quad (5)$$

2. Численные значения A и B :

$$A = 0.2c \quad (6)$$

$$B = 1m/c \quad (7)$$

3. Подставляя значения периода и скорости (4), (5) в условия $v \geq 10u$ и $uT \leq h/10$, запишем в виде ($h = \frac{v^2}{2g}$):

$$\frac{n}{m} \geq 5 \quad (8)$$

$$\frac{0,1}{m} \leq \frac{1}{10} \frac{1}{2 \cdot 10} \frac{n^2}{m^2} \quad (9)$$

Последнее условие можно записать в виде:

$$n \geq \sqrt{20} \sqrt{m} \quad (10).$$

Т.к. $\sqrt{20} < 5$, то последнее условие автоматически выполняется при условии (8).

Таким образом, числа n и m должны быть связаны условием:

$$n \geq 5m \quad (11)$$

4. При $m=1$ скорость (с учетом условия (11)) может принимать значения:

$$v = 5 \frac{M}{c}; 6 \frac{M}{c}; 7 \frac{M}{c} \dots \quad (12).$$

Для $m=2$ и $m=10$ аналогично:

$$v = 5 \frac{M}{c}; 5,5 \frac{M}{c}; 6 \frac{M}{c} \dots \quad (13),$$

$$v = 5 \frac{M}{c}; 5,1 \frac{M}{c}; 5,2 \frac{M}{c} \dots \quad (14).$$

Таким образом, минимальная резонансная скорость во всех случаях равна:

$$v_0 = 5M/c \quad (15)$$

А интервал между резонансными скоростями уменьшается и становится равным:

$$\Delta v = \frac{1}{m} M / c \quad (16)$$

5. После i столкновений скорость шарика будет равна:

$$v_i = v_0 + 2ui \quad (17)$$

Тогда высота подъема равна:

$$h_i = \frac{(v_0 + 2ui)^2}{2g} = \frac{(5 + i)^2}{20} \quad (18)$$

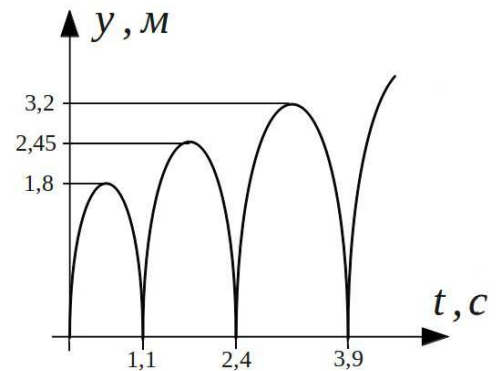
Промежуток времени между последовательными столкновениями:

$$\Delta t_i = 2 \frac{v_0 + 2ui}{g} \quad (19).$$

Тогда время i -го соударения:

$$t_i = \frac{2v_0}{g}i + \frac{2u}{g}i^2 = i + 0,1i^2 \quad (20)$$

6. Схематический график зависимости изображен на рисунке.



7. За время между ударами будет появляться сдвиг по времени, равный $\frac{2\delta v}{g}$. Процесс увеличения высоты подъема сменится уменьшением, когда сдвиг по времени станет равным половине периода, т.е. после

$$k = \frac{Tg}{4\delta v} \quad (21)$$

ударов.

Подставляя значение $T = \frac{0,2}{m} = 0,2\Delta v$, получим:

$$k = \frac{0,5}{\delta v / \Delta v} \quad (22).$$

8. Подставляя (22) в выражение (20), получим:

$$t_i = k + 0,1k^2 = \frac{0,5}{\delta v / \Delta v} + 0,1 \left(\frac{0,5}{\delta v / \Delta v} \right)^2 \quad (23),$$

$$h_i = \frac{(5 + k)^2}{20} = \frac{\left(5 + \frac{0,5}{\delta v / \Delta v} \right)^2}{20} \quad (24).$$

9. Для оценки, можно считать, что при каждом ударе платформа находится на высоте равной амплитуде. Тогда за k ударов ошибка составит:

$$\Delta h = ak = \frac{T}{2} u \frac{0,5}{\delta v / \Delta v} = \frac{0,025}{\delta v / \Delta v}. \quad (25)$$