

Задача 10.1 ЦУП

Часть 1

1.1 Пусть ω_3 – угловая скорость вращения Земли вокруг оси, а ω – угловая скорость вращения спутника. И пусть в начальный момент времени спутник пересекает экватор. За время одного оборота спутника ($T = \frac{2\pi}{\omega} \omega_3$) Земля повернется на угол $\frac{2\pi}{\omega} \omega_3$.

Если движение спутника и Земли происходит в одном направлении, то следующее пересечение экватора произойдет на:

$$\Delta\varphi = 2\pi - 2\pi \frac{\omega_3}{\omega} = 2\pi \left(1 - \frac{\omega_3}{\omega}\right) \quad (1)$$

восточнее (на рисунке — правее) предыдущего.

Если же спутник и Земля вращаются в разных направлениях, то за один оборот спутник сместится относительно Земли на:

$$\Delta\varphi = 2\pi + 2\pi \frac{\omega_3}{\omega} = 2\pi \left(1 + \frac{\omega_3}{\omega}\right) \quad (2)$$

в западном (левом) направлении. Т.е. в любом случае больше, чем на 360° .

Согласно рисунку 1 условия задачи, спутник смещается на 14 клеток (280°), т. е. движется по направлению вращения Земли.

1.2 Уравнение (1) позволяет найти угловую скорость вращения спутника:

$$280^\circ = \frac{14}{9} \pi = 2\pi \left(1 - \frac{\omega_3}{\omega}\right) \quad (3).$$

Таким образом:

$$\omega = \frac{9}{2} \omega_3 = 3,3 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1} \quad (4),$$

$$T_c = \frac{2}{9} T_3 = 5,3 \text{ ч} \quad (5).$$

Радиус орбиты определим, записав Второй закон Ньютона:

$$m\omega^2 r = G \frac{Mm}{r^2} \quad (6),$$

где M - масса Земли,

m - масса спутника.

Подставив $\omega = \frac{2\pi}{T}$ и $GM = gR_3^2$, получим:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} r = g \frac{R_3^2}{r^2} \quad (7).$$

Тогда радиус орбиты:

$$r = \left(\frac{gR_3^2 T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 1,6 \cdot 10^7 \text{ м} \quad (8).$$

Линейная скорость движения спутника:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 5,1 \cdot 10^3 \text{ м/с} \quad (9).$$

1.3 За половину периода, как следует из (1), спутник смещается относительно Земли на:

$$\Delta\varphi = \pi \left(1 - \frac{\omega_3}{\omega} \right) \quad (10).$$

Это и есть расстояние между двумя последовательными точками пересечения экватора. При уменьшении радиуса орбиты угловая скорость увеличивается. Следовательно, увеличивается и искомое расстояние.

Максимальное значение угловой скорости спутника достигается на орбите, проходящей в непосредственной близости к поверхности Земли. Записав Второй закон Ньютона:

$$m\omega_{\max}^2 R_3 = mg \quad (11),$$

получим:

$$\omega_{\max} = \sqrt{g / R_3} = 1,2 \cdot 10^{-3} \quad (12).$$

Тогда максимальное расстояние между двумя точками последовательного пересечения экватора:

$$\Delta\varphi = \pi \left(1 - \frac{\omega_3}{\omega_{\max}} \right) = 3,0 \text{ рад} = 169^\circ \quad (13).$$

Часть 2

2.1 Т.к. спутники одновременно пересекают линию экватора, то периоды их обращения по орбитам одинаковы, а значит, равны и радиусы орбит. Изображенные на рисунке 2 условия задачи траектории соответствуют спутникам, двигающимся по одной орбите в разных направлениях.

Если спутник движется по направлению вращения Земли («сжатая» траектория), то расстояние, которое проходит спутник относительно Земли за один оборот, равно 180° (9 клеток). Согласно (1), угловая скорость вращения равна:

$$\omega = 2\omega_3 \quad (14).$$

Аналогично можно рассуждать, рассматривая движение второго спутника. Для него выражение (1) будет иметь вид:

$$\Delta\varphi = \pi \left(1 + \frac{\omega_3}{\omega} \right) \quad (15).$$

За один оборот этот спутник смещается относительно Земли на 27 клеток, т. е. на 540° . Подставляя это значение в (15), получим тот же ответ (14).

Таким образом, период обращения по орбите равен:

$$T = T_3 / 2 = 12 \text{ ч} \quad (16).$$

Радиус орбит спутников равен:

$$r = \left(\frac{gR_3^2}{\omega^2} \right)^{1/3} = 2,7 \cdot 10^7 \text{ м} \quad (17).$$

2.2 Пусть спутники встретились в точке A (рис. 1). Между ними будет возможна прямая связь, пока они не достигнут точек B и B' соответственно. В течение времени, необходимом для перемещения в точки C и C' , связь будет отсутствовать.

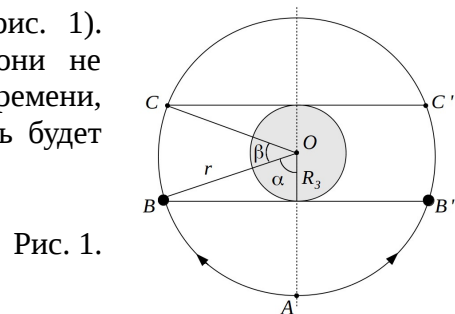


Рис. 1.

Таким образом, связь исчезает на время:

$$\Delta t_1 = \beta / \omega \quad (18)$$

с периодичностью

$$\Delta t_2 = T / 2 = 6ч \quad (19).$$

Угол β найдем из равнобедренного треугольника OBC .

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{R_3}{r} \quad (20),$$

$$\beta = 0.48 \text{ рад} \quad (21).$$

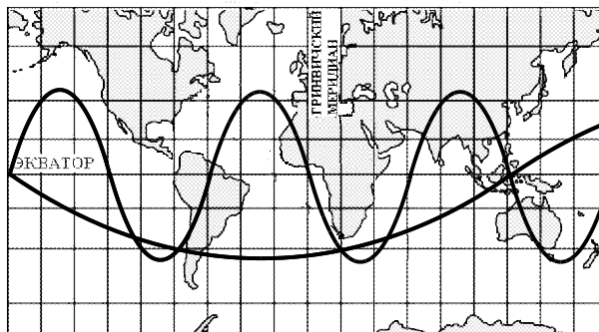
Тогда время молчания:

$$\Delta t_1 = \frac{T \cdot 0.48}{2\pi} = 0.92ч = 55 \text{ мин} \quad (22).$$

Часть 3

Один из возможных траекторий изображены на рис. 2. Спутник двигающийся по направлению вращения Земли пересекает экватор через каждые а двигающийся против — через 300° . «Размах» траекторий в вертикальном направлении составляет 45° .

Рис. 2



60° ,