



Задача 3. В чем причина появления поверхностной энергии?

В некоторых учебниках можно найти следующие рассуждения «молекулы на поверхности жидкости находятся в особых условиях, на них действует сила направленная внутрь жидкости. Благодаря этому приповерхностные слои оказываются сжатыми, а это приводит к увеличению суммарной энергии взаимодействия молекул. Эта избыточная положительная энергия и называется поверхностной энергией»

В данной задаче вам предлагается разобраться в истинных причинах возникновения поверхностной энергии.

Часть 1. Описание взаимодействия двух молекул.

Рассмотрим одномерную модель – цепочку шариков (молекул), взаимодействующих между собой по закону, близкому к закону взаимодействия молекул.

Будем считать, что энергия взаимодействия двух молекул, находящихся на расстоянии r описывается функцией

$$U(r) = \frac{a}{r^{12}} - \frac{b}{r^6}, \quad (1)$$

где a, b - известные постоянные величины. Потенциальная энергия принимается равной нулю при бесконечном расстоянии между молекулами.

1.1 Покажите, что функцию (1) можно представить в виде

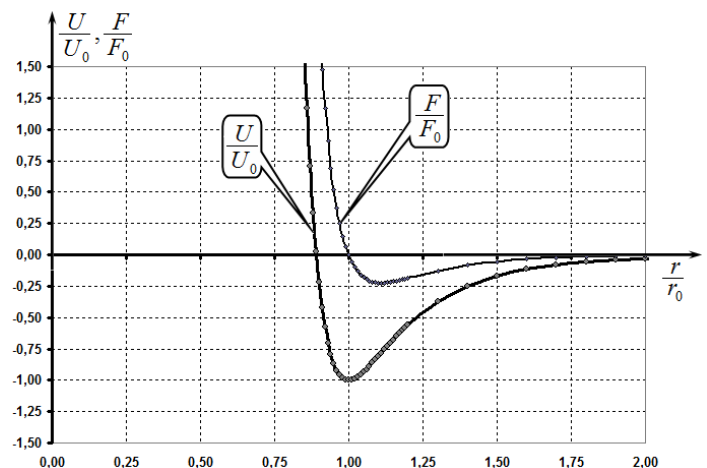
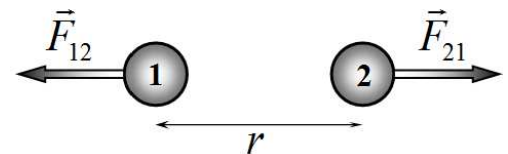
$$U(r) = U_0 \left(\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 \right), \quad (2)$$

где r_0 - равновесное расстояние между молекулами, $-U_0$ - минимальная энергия взаимодействия молекул.

Можно показать (вам этого делать не надо!), что такой энергии взаимодействия соответствует сила, определяемая формулой

$$F(r) = F_0 \left(\left(\frac{r_0}{r} \right)^{13} - \left(\frac{r_0}{r} \right)^7 \right), \quad (3)$$

где $F_0 = 12 \frac{U_0}{r_0}$. Положительным направлением считается направление «наружу», то есть положительная сила соответствует отталкиванию молекул. На рисунке показаны графики функций (2) и (3) (Может, пригодятся!)



Приведенные функции сложны и делают решение задачи слишком громоздким. Однако, в реальных средах относительные изменения расстояний между молекулами по сравнению с равновесными малы, поэтому с высокой точностью эти функции можно приближенно заменить линейными.

Для упрощения математических выкладок рекомендуем воспользоваться следующей приближенной формулой

$$(1+x)^{\gamma} \approx 1 + \gamma x, \quad (4)$$

справедливой при $|x| \ll 1$ и любых (целых, дробных, положительных, отрицательных) степенях γ .

1.2 Пусть расстояние между молекулами r мало отличается от равновесного r_0 . Представим его в виде $r = r_0 + r_0 \varepsilon$, где ε - относительное изменение расстояния между молекулами, которое можно считать малым $|\varepsilon| \ll 1$. В общем случае, для расчета энергии и силы взаимодействия не только между ближайшими соседями удобно записать расстояние между молекулами в виде $r = nr_0 + r_0 \delta$, где $\delta \ll 1$. Тогда энергию и силу взаимодействия можно рассчитывать по приближенным формулам

$$\begin{aligned} U(\delta) &= U_0(u_n + s_n \delta) \\ F(\delta) &= F_0(f_n + c_n \delta) \end{aligned} \quad (6)$$

Найдите численные значения коэффициентов u_n, s_n, f_n, c_n для функций (2) -(3) для n от 1 до 5 с точностью до 3 значащих цифр. Результаты расчетов представьте в таблице (она потом и вам поможет!)

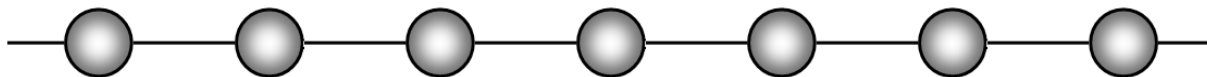
В дальнейшем рассчитывайте энергию в единицах U_0 , а силу в единицах F_0 , или что равносильно, считайте $U_0 = 1$, $F_0 = 1$.

Энергию, измеренную в этих единицах, будем обозначать w .

Также рекомендуем пользоваться приближенными формулами, за исключением расчета энергии взаимодействия ближайших соседей, т.е. при $r = r_0 + r_0 \varepsilon$.

Проводите промежуточные численные расчеты с точностью до трех значащих цифр!

Часть 2. Бесконечная цепочка молекул.



2.1 При каких расстояниях между молекулами цепочка может находиться в равновесии?

2.2 Как можно найти, какое расстояние между молекулами установится по прошествии достаточно большого промежутка времени?

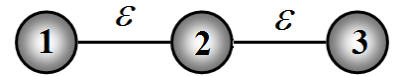
Искать не надо, но скажите, как это можно сделать!

Ответ на этот вопрос - $\varepsilon_0 = +1,40 \cdot 10^{-3}$

2.3 Оцените с точностью до 10^{-3} потенциальную энергию w_0 , приходящуюся на одну молекулу.

Часть 3. Цепочка из трех молекул.

Вырвем из цепочки три молекулы.



3.1. Найдите относительное изменение расстояния между молекулами ε .

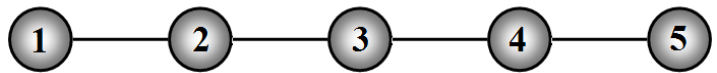
3.2 Найдите изменение энергии взаимодействия между ближайшими молекулами Δw_{12} (по сравнению с этой энергией в бесконечной цепочке).

3.3 Найдите изменение энергии взаимодействия между крайними Δw_{13} (по сравнению с этой энергией в бесконечной цепочке).

3.4 Чему равно изменение полной потенциальной энергии трех «вырванных» молекул по сравнению с их полной энергией в бесконечной цепочке?

Часть 4. Цепочка из пяти молекул.

Вырвем из цепочки пять шариков.



4.1 Рассчитайте изменение энергии взаимодействия этих шариков между собой (по сравнению с этой энергией в бесконечной цепочке).

4.2 Чему равно изменение полной потенциальной энергии пяти «вырванных» молекул по сравнению с их полной энергией в бесконечной цепочке?

Вопрос последний.

Так в чем основная причина появления поверхностной энергии?