Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова»
Физический факультет

Отчёт по практическому заданию №2

Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений

Студен группы №437: Белашов Егор Юрьевич (u0=3.13)

Москва - 2024

Оглавление

Постановка задачи

Необходимо численно решить следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} + u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \\ \dot{u}|_{t=0} = v_0 \end{cases} \quad t \in [0; t_0]$$

Где верхний предел времени: $t_0 = 20$, начальная скорость изменения $\dot{u}$ определяется через $v_0 = 0$, а начальное условие u_0 вычисляется в соответствие с правилом:

(*) Правило вычисления значения u_0. Записываете первую букву вашей фамилии и инициалы – ФИО. Значение u_0 = [код(Ф)+код(И)+код(О)]/30. Код буквы выберите из таблицы.

Пример: **И**ванов **С**ергей **П**етрович. **u_0 = [код(И)+код(С)+код(П)]/30** = (10+19+17)/30 = **1.53**

А	1	Ж	80	Н	150	Ф	220	Ы	29
Б	2	З	90	О	160	Х	23	Ь	30
В	3	И	10	П	17	Ц	240	Э	31
Г	40	Й	11	Р	18	Ч	25	Ю	32
Д	50	К	12	С	19	Ш	260	Я	33
Е	60	Л	13	Т	200	Щ	27		
Ё	70	М	140	У	21	Ъ	28		

Таблица кодов букв.

В моём случае, вычисленное значение равняется:

$$u_0 = \frac{2 + 60 + 32}{30} \approx 3.13$$

Необходимо получить аналитическое решение данной задачи, а также множество численных решений с различными параметрами и сравнить их.

Аналитическое решение

Задача с подстановкой начальных условий имеет решение вида:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} + u = 0 \\ u|_{t=0} = 3.13 \\ \dot{u}|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad t \in [0; 20] \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} u(t) = +A \cdot \cos(t) + B \cdot sin(t) \\ \dot{u}(t) = -A \cdot sin(t) + B \cdot \cos(t) \end{array}$$

Подстановка граничных и начальных условий в данное уравнение даёт следующий результат:

$$\begin{array}{c} u(t = 0) = A = 3.13 \\ \dot{u}(t = 0) = B = 0 \end{array} \rightarrow u(t) = 3.13 \cdot \cos(t)$$

Численное решение

Схема Эйлера

Система уравнений схемы Эйлера выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = f_1(u_1, \dots, u_n, t) & u_1|_{t=0} = u_{1,0} \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{du_n}{dt} = f_1(u_1, \dots, u_n, t) & u_n|_{t=0} = u_{n,0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{dt} = \hat{f}(\vec{u}, t) \\ \vec{u}|_{t=0} = \vec{u}_0 \end{cases}, \text{где} \left(\begin{array}{c} \vec{u} = \{u_1 \quad \cdots \quad u_n\} \\ \hat{f}(\vec{u}, t) = \{f_1(\vec{u}, t) \quad \dots \quad f_n(\vec{u}, t)\} \\ \vec{u}_0 = \{u_{1,0} \quad \cdots \quad u_{n,0}\} \end{array} \right)$$

Система уравнений решается по схеме Эйлера следующим образом:

$$\begin{cases} u_1^{(i+1)} = u_1^{(i)} + f_1\left(u_1^{(i)}, \dots, u_n^{(i)}, t_{(i)}\right) \cdot \Delta t \\ \vdots \\ u_n^{(i+1)} = u_n^{(i)} + f_n\left(u_1^{(i)}, \dots, u_n^{(i)}, t_{(i)}\right) \cdot \Delta t \end{cases} \rightarrow \vec{u}_{i+1} = \vec{u}_i + \hat{f}(\vec{u}_i, t_i) \cdot \Delta t$$

Дифференциальное уравнение n-го порядка

Дифференциальное уравнение n-го порядка может быть сведено к схеме Эйлера и числено решено. Покажу как произвести данное сведение:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^k u}{\partial t^k} = f\left(u, \dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \dots, \dfrac{\partial^k u}{\partial t^k}, t\right) \\
u|_{t=t_0} = v_0 \\
\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=t_0} = v_1 \\
\vdots \\
\left.\dfrac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}\right|_{t=t_0} = v_{k-1}
\end{cases}
\rightarrow
\begin{pmatrix}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = u_1 \\
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u_2 \quad \rightarrow \dfrac{\partial u_j}{\partial t} = u_{j+1} \\
\vdots \\
\dfrac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}} = u_{k-1}
\end{pmatrix}
\rightarrow
\begin{cases}
\dfrac{d\vec{u}}{dt} = \hat{f}(\vec{u}, t) \\
\vec{u}|_{t=0} = \vec{u}_0
\end{cases}
$$

Считаю нужным в явном виде написать вектора, приведённые в этой системе (запишем столбцами для компактности):

$$
\vec{u}_i = \begin{pmatrix}
u_0^{(i)} = u^{(i)} \\
u_1^{(i)} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)^{(i)} \\
\vdots \\
u_{k-1}^{(i)} = \left(\dfrac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}\right)^{(i)}
\end{pmatrix}
\quad
\vec{u}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_{k-1} \end{pmatrix}
\quad
\hat{f} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{k-1} \\ f(\vec{u}, t) \end{pmatrix}
$$

Численная схема решения данного уравнения была получена раннее:

$$
\vec{u}_{i+1} = \vec{u}_i + \hat{f}(\vec{u}_i, t_i) \cdot \Delta t
$$

Двухслойный метод с перешагиванием

Векторное определение двухслойного метода выглядит так:

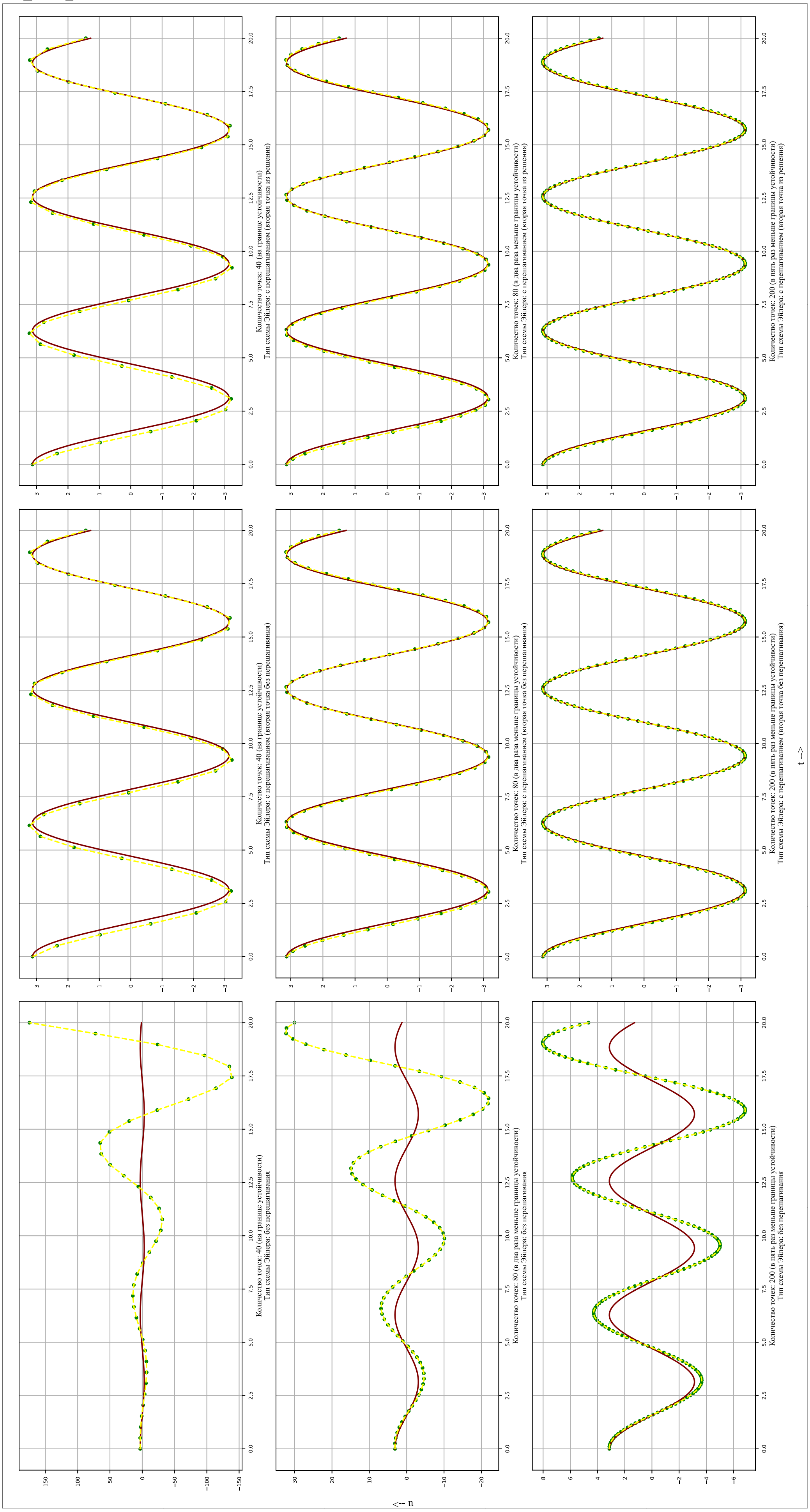
$$
\vec{u}_{i+1} = \vec{u}_{i-1} + \hat{f}(\vec{u}_i, t_i) \cdot 2\Delta t
$$

При этом шаг берётся в два раза меньше необходимого для соответствия исходно необходимой сетке. Раскроем это выражение для понятности:

$$
\begin{gathered}
u_0^{(i+1)} = u_0^{(i-1)} + 2\Delta t \cdot u_1^{(i)} \\
\vdots \\
u_{k-2}^{(i+1)} = u_{k-2}^{(i-1)} + 2\Delta t \cdot u_{k-1}^{(i)} \\
u_{k-1}^{(i+1)} = u_{k-1}^{(i-1)} + 2\Delta t \cdot f(\vec{u}_i, t)
\end{gathered}
$$

Видно, что в таком случае, каждый шаг учитывает не только предыдущее значение, но и пред предыдущее.

Графики


Количество точек: 40 (на границе устойчивости)
Тип схемы Эйлера: без перешагивания
Количество точек: 80 (в два раза меньше границы устойчивости)
Тип схемы Эйлера: без перешагивания
Количество точек: 200 (в пять раз меньше границы устойчивости)
Тип схемы Эйлера: без перешагивания
Количество точек: 40 (на границе устойчивости)
Тип схемы Эйлера: с перешагиванием (вторая точка без перешагивания)
Количество точек: 80 (в два раза меньше границы устойчивости)
Тип схемы Эйлера: с перешагиванием (вторая точка без перешагивания)
Количество точек: 200 (в пять раз меньше границы устойчивости)
Тип схемы Эйлера: с перешагиванием (вторая точка без перешагивания)
Количество точек: 40 (на границе устойчивости)
Тип схемы Эйлера: с перешагиванием (вторая точка из решения)
Количество точек: 80 (в два раза меньше границы устойчивости)
Тип схемы Эйлера: с перешагиванием (вторая точка из решения)
Количество точек: 200 (в пять раз меньше границы устойчивости)
Тип схемы Эйлера: с перешагиванием (вторая точка из решения)
u -->
t -->