

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего  
образования  
«Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова»  
**Физический факультет**

## **Отчёт по практическому заданию №4**

Стационарная ветровая рефракция оптического пучка

Студен группы №437: Белашов Егор Юрьевич

## Оглавление

Глава 1 .....	Ошибка! Закладка не определена.
---------------	---------------------------------

# Теоретическое введение

## Постановка задачи

Численно рассчитать стационарную ветровую рефракцию оптического пучка.

$$\begin{cases} 2i \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + R_V T E \\ \frac{\partial T}{\partial x} = E E^* \\ T(-\infty, y, z) = 0 \\ E(x, y, 0) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} e^{i \frac{x^2+y^2}{2f}} \end{cases}$$
$$f = 0.4 \quad z = 0.4 \quad R_V = -1$$

Размер расчётной сетки:  $1024 \times 1024$ .

Результаты включают:

- Профили интенсивности в начальной плоскости и плоскости наблюдения, сравнить с линейным случаем
- График зависимости эффективной ширины пучка по оси  $x$  и по оси  $y$  от  $z$ , сравнить с линейным случаем
- Листинг программы

## Выбор размера поля и граничных условий

Удобнее всего будет выбрать размер поля такой, чтобы на границах расчётной области можно было использовать граничные условия Дирихле, т.е. поле равнялось нулю. Учитывая, что пучок характерный размер исходного пучка около 6, возьмём область в два раза больше – 12 по каждой оси.

## Метод переменных направлений

Вводится промежуточный слой между двумя слоями по оси  $z$ . Обозначим получившиеся три слоя:  $E, E^*, E^{**}$ .

Введём разностную схему:

$$\begin{cases} 4i \frac{E^*_{m,n} - E_{m,n}}{\Delta z} = \frac{E^*_{m+1,n} - 2E^*_{m,n} + E^*_{m-1,n}}{\Delta x^2} + \frac{E_{m,n+1} - 2E_{m,n} + E_{m,n-1}}{\Delta y^2} + R_V T E^*_{mn} \\ 4i \frac{E^{**}_{m,n} - E^*_{m,n}}{\Delta z} = \frac{E^*_{m+1,n} - 2E^*_{m,n} + E^*_{m-1,n}}{\Delta x^2} + \frac{E^{**}_{m,n+1} - 2E^{**}_{m,n} + E^{**}_{m,n-1}}{\Delta y^2} + R_V T E^{**}_{mn} \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение этой системы. Видно, что решение этого уравнения может быть получено методом прогонки. Для этого выразим справа параметры известного слоя:

$$-4i \frac{E_{m,n}}{\Delta z} + \frac{2E_{m,n}}{\Delta y^2} - \frac{E_{m,n+1} + E_{m,n-1}}{\Delta y^2} = -4i \frac{E^*_{m,n}}{\Delta z} + \frac{E^*_{m+1,n} - 2E^*_{m,n} + E^*_{m-1,n}}{\Delta x^2} + R_V T E^*_{mn}$$

И приведём к красивому виду:

$$2E_{m,n} \left( \frac{1}{\Delta y^2} - \frac{2i}{\Delta z} \right) - \frac{E_{m,n+1} + E_{m,n-1}}{\Delta y^2} = E^*_{m,n} \left( R_V T - \frac{4i}{\Delta z} - \frac{2}{\Delta x^2} \right) + \frac{E^*_{m+1,n} + E^*_{m-1,n}}{\Delta x^2}$$

Тогда, с точки зрения метода прогонки:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\Delta x^2} \\
b_n &= R_V T - \frac{2i}{\Delta z} - \frac{2}{\Delta x^2} \\
c_n &= \frac{1}{\Delta x^2} \\
d_n &= 2E_{m,n} \left( \frac{1}{\Delta y^2} - \frac{i}{\Delta z} \right) - \frac{E_{m,n+1} + E_{m,n-1}}{\Delta y^2}
\end{aligned}$$

Аналогичные выражения получаются для второго уравнения.

Чтобы подобные расчёты работали, необходимо учесть уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial x} = EE^* \rightarrow T_{m+1,n} = T_{m,n} + \Delta x E_{mn} E_{mn}^*$$

Т.е. будем пересчитывать значение в каждом слое, включая промежуточный, из вычисленного из полученного значения слоя, пока норма между вычислениями не устремится к нулю.

## Метод прогонки

Для решения по неявной схеме, необходимо на каждом шаге составлять СЛАУ и решать его, матрица этой системы выглядит так:

$$\begin{pmatrix} b_0 & c_0 & & & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{I-1} & b_{I-1} & c_{I-1} \\ 0 & & & a_I & b_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{0,n} \\ T_{1,n} \\ \vdots \\ T_{I-1,n} \\ T_{I,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{0,n+1} \\ T_{1,n+1} \\ \vdots \\ T_{I-1,n+1} \\ T_{I,n+1} \end{pmatrix}$$

Сделав некоторые вычисления, можно получить две рекурсивные зависимости:

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= -\frac{c_i}{a_i \alpha_{i-1} + b_i} & \beta_i &= \frac{d_i - a_i \beta_{i-1}}{a_i \alpha_{i-1} + b_i} \\
\alpha_0 &= -\frac{c_0}{b_0} & \beta_0 &= \frac{d_0}{b_0}
\end{aligned}$$

Через которые выражаются значения на новом слое:

$$T_{I,n+1} = \beta_I = \frac{d_I - a_I \beta_{I-1}}{a_I \alpha_{I-1} + b_I} \quad T_{i,n+1} = \alpha_i T_{i+1,n+1} + \beta_i$$

## Результаты

## Листинг программы