Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

КУРС ЛЕКЦИЙ

Резонансные состояния в нанооптике

С.Г. Тиходеев

Общий случай наклонного падения света

Рассмотрим общей случай падении на слоистую систему электромагнитной волны вида

$$\mathbf{E}(x,y,z,t) = \mathbf{E}e^{ik_x x + ik_y y + ik_z z - i\omega t} = (E_x, E_y, E_z)\, e^{ik_x x + ik_y y + ik_z z - i\omega t},$$

$$\mathbf{H}(x,y,z,t) = \mathbf{H}e^{ik_x x + ik_y y + ik_z z - i\omega t} = (H_x, H_y, H_z)\, e^{ik_x x + ik_y y + ik_z z - i\omega t}.$$

Будем по-прежнему считать, что слои параллельны xy плоскости.
Для простоты рассматриваем однородные слои с различными диэлектрическими проницаемостями.
Уравнения Максвелла в каждом слое (считаем, что свободных зарядов нет, и все среды изотропны), имеют вид

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E},$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H},$$

$$\nabla \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \mathbf{H} = 0.$$

Если из первой пары уравнений Максвелла исключить магнитное поле, и учесть равенство нулю дивиргенции электрического поля, для каждого слоя, как известно, получится волновое уравнение

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E},$$

$$\boxed{\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = 0.}$$

Отсюда в слое j с диэлектрической проницаемостью ε_j получим

$$k_x^2 + k_y^2 + k_{z,j}^2 = \varepsilon_j k_0^2, \; k_0 = \frac{\omega}{c},$$

или

$$\boxed{k_{z,j} = \pm\sqrt{\varepsilon_j k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}.}$$

Поэтому решение в каждом слое будет по-прежнему суммой волн

$$\mathbf{E}_{(j)}(x,y,z,t) = \mathbf{E}^{+}_{(j)} e^{ik_x x + ik_y y + ik_{z,j} z - i\omega t} + \mathbf{E}^{-}_{(j)} e^{ik_x x + ik_y y - ik_{z,j} z - i\omega t},$$

$$\mathbf{H}_{(j)}(x,y,z,t) = \mathbf{H}^{+}_{(j)} e^{ik_x x + ik_y y + ik_{z,j} z - i\omega t} + \mathbf{H}^{-}_{(j)} e^{ik_x x + ik_y y - ik_{z,j} z - i\omega t},$$

распространяющихся вдоль направления оси z и в обратную сторону.
В дальнейшем мы не будем выписывать идекс слоя j, но запомним, что длина волнового вектора фотона в квадрате в соответствующем слое есть, конечно, $\varepsilon_j k_0^2$.
Для сшивки решений в соседних слоях используем граничные условия Максвелла непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей.

Из условий поперечности очевидно, что компоненты полей вдоль z не являются независимыми, и для формулировки метода матриц переноса достаточно ограничиться только амплитудами тангенциальных компонент электрического и магнитного полей.
А поскольку через уравнение Максвелла с ротором **E** получается линейная связь между компонентами магнитного и электрического полей, достаточно в амплитудном представлении ограничиться амплитудами тангенциальных компонент только электрического поля.
В итоге получим, что для полного решения задачи методом матриц переноса достаточно рассмотреть матрицы переноса для столбцов аплитуд вида

$$\vec{\mathcal{A}}(z) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{+}(z) \\ \mathcal{A}^{-}(z) \end{pmatrix}, \; \mathcal{A}^{\pm}(z) = \begin{pmatrix} E_x^{\pm} \\ E_y^{\pm} \end{pmatrix}.$$

Как и раньше, легко понять, что перенос на расстояние d через однородный слой по-прежнему делается диагональной матрицей $\mathbb{T}_d$, которая теперь стала матрицей 4×4,

$$\vec{\mathcal{A}}(z+d) = \mathbb{T}_d \vec{\mathcal{A}}(z),$$

$$\mathbb{T}_d = \begin{pmatrix} e^{ik_z d} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{ik_z d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ik_z d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-ik_z d} \end{pmatrix}.$$

Для получения интерфейсной матрицы $\mathbb{T}_{jj'}$ введем сначала, как и в случае нормального падения, материальную матрицу, связывающую амплитуды тангенциальных компонент электрического поля с полным набором непрерывных на интерфейсе тангенциальных компонент электрического и магнитного полей. Пусть

$$\vec{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ H_x \\ H_y \end{pmatrix}.$$

$$\vec{\mathcal{F}} = \mathbb{F}\vec{\mathcal{A}},$$

Используя связь между компонентами электрического и манитного полей из уравнений Максвелла, легко показать, что

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\frac{k_x k_y}{k_z k_0} & -\frac{k_z^2+k_y^2}{k_z k_0} & \frac{k_x k_y}{k_z k_0} & \frac{k_z^2+k_y^2}{k_z k_0} \\ \frac{k_z^2+k_x^2}{k_z k_0} & \frac{k_x k_y}{k_z k_0} & -\frac{k_z^2+k_x^2}{k_z k_0} & -\frac{k_x k_y}{k_z k_0} \end{pmatrix}$$

Давайте теперь предположим, без ограничения общности, что плоскость падения света совпадает с плоскостью zx, и $k_y = 0$.

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_z}{k_0} & 0 & \frac{k_z}{k_0} \\ \frac{k_z^2+k_x^2}{k_z k_0} & 0 & -\frac{k_z^2+k_x^2}{k_z k_0} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_z}{k_0} & 0 & \frac{k_z}{k_0} \\ \varepsilon\frac{k_0}{k_z} & 0 & -\varepsilon\frac{k_0}{k_z} & 0 \end{pmatrix}$$

Напомню, что я здесь не выписывал индекс слоя j, который имеется только у самой материальной матрицы, диэлектрической проницаемости и не сохраняющейся от слоя к слою z-компоненты волнового вектора фотона.

Итак,

$$\mathbb{F}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_{z,j}}{k_0} & 0 & \frac{k_{z,j}}{k_0} \\ \frac{\varepsilon_j k_0}{k_{z,j}} & 0 & -\frac{\varepsilon_j k_0}{k_{z,j}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что для падения света по нормали к слоям ($k_x = 0$, $k_{z,j} = n_j k_0$, где $n_j = \sqrt{\varepsilon_j}$)

$$\mathbb{F}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -n_j & 0 & n_j \\ n_j & 0 & -n_j & 0 \end{pmatrix}.$$

Напоминает то, что мы писали в представлении матриц 2x2.

Тангенциальные слоям компоненты волнового вектора фотона сохраняются, благодаря трансляционной инвариантности системы вдоль слоев.
Как и раньше, получаем на интерфейсе между слоями

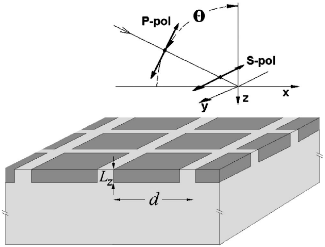
$$\vec{\mathcal{F}}_{j'} = \vec{\mathcal{F}}_{j},$$

$$\mathbb{F}_{j'}\vec{\mathcal{A}}_{j'} = \mathbb{F}_{j}\vec{\mathcal{A}}_{j},$$

$$\vec{\mathcal{A}}_{j'} = \mathbb{F}_{j'}^{-1}\mathbb{F}_{j}\vec{\mathcal{A}}_{j},$$

$$\mathbb{T}_{j',j} = \mathbb{F}_{j'}^{-1}\mathbb{F}_{j}.$$

Можно заметить, что для волн S и P поляризаций (см. на рисунке) оказываются ненулевыми компоненты E_y, H_x и E_x, H_y, соответственно.



Из-за полученной структуры матриц переноса для однородных изотропных слоев можно в результате еще дальше упростить наше описание.

Именно, пары компонент полей E_y, H_x для S-поляризации и E_x, H_y для P-поляризации развязываются, и можно сохранить уже привычную нам структуру матриц переноса 2×2:

$$\mathbb{F}_{j,P(S)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_{j,P(S)} & -\alpha_{j,P(S)} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{F}^{-1}_{j,P(S)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha_{j,P(S)}} \\ 1 & -\frac{1}{\alpha_{j,P(S)}} \end{pmatrix},$$

$$\alpha_{j,S} = -\frac{k_{z,j}}{k_0}, \quad \alpha_{j,P} = \frac{\varepsilon_j k_0}{k_{z,j}}.$$

Поэтому по-прежнему интерфейсные матрицы для обеих поляризаций имеют вид

$$\mathbb{T}_{j'j} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+M & 1-M \\ 1-M & 1+M \end{pmatrix}, \quad M = \frac{\alpha_j}{\alpha_{j'}},$$

и только M различны для разных поляризаций,

$$M_S = \frac{k_{z,j}}{k_{z,j'}}, \quad M_P = \frac{\varepsilon_j k_{z,j'}}{\varepsilon_{j'} k_{z,j}}$$

(2×2 матрицы T_d остаются старыми и здесь не выписаны).

Для того, чтобы определить оптические спектры пропускания $T_{S(P)}$ и отражения $R_{S(P)}$ в случае наклонного падения, например, под углом падения ϑ вдоль направления оси z (как показано на рисунке выше) нужно вычислить

$$R_S = -\frac{P^-_{z,U,S}}{P^+_{z,U,S}}, \quad T_S = \frac{P^+_{z,D,S}}{P^+_{z,U,S}},$$

где

$$P^{\pm}_{z,U,S} = -\frac{1}{16\pi}\left[(E^{\pm}_{y,U})^* H^{\pm}_{x,U} + E^{\pm}_{y,U}(H^{\pm}_{x,U})^*\right]$$

— z-компонента вектора Пойнтинга падающей сверху и отраженной наверх S-волны, то есть вычисляемая с помощью значений соответствующих компонент электрического и магнитного поля на верхней части структуры, что отмечено индексом U, а

$$P^{+}_{z,D,S} = -\frac{1}{16\pi}\left[(E^{+}_{y,D})^* H^{\pm}_{x,D} + E^{\pm}_{y,D}(H^{\pm}_{x,D})^*\right]$$

— то же для прошедшей вниз волны, то есть вычисляемая с помощью полей на нижней части структуры, что отмечено индексом D.

Аналогично, для P-поляризации

$$R_P = -\frac{P^-_{z,U,P}}{P^+_{z,U,P}}, \quad T_P = \frac{P^+_{z,D,P}}{P^+_{z,U,P}},$$

где

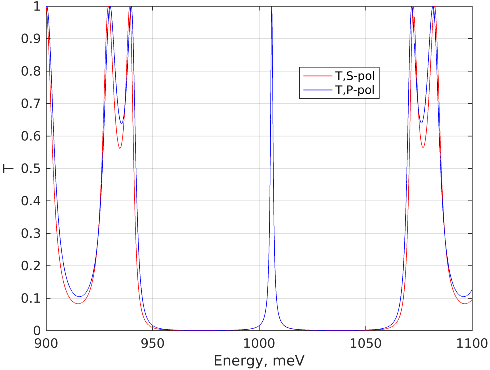
$$P^{\pm}_{z,U,P} = \frac{1}{16\pi}\left[(E^{\pm}_{x,U})^* H^{\pm}_{y,U} + E^{\pm}_{x,U}(H^{\pm}_{y,U})^*\right]$$

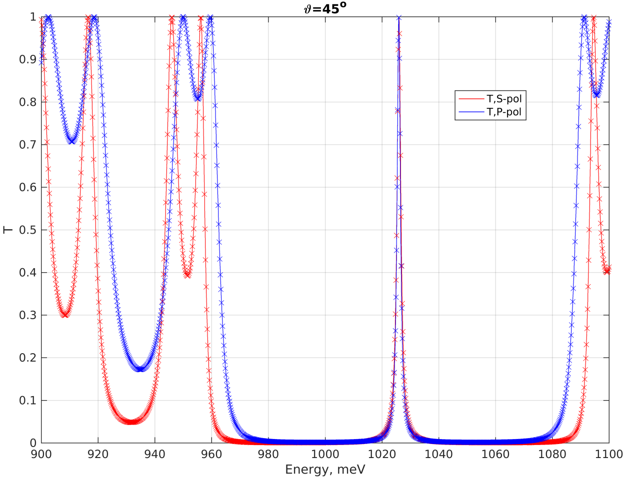
— z-компонента вектора Пойнтинга падающей сверху и отраженной наверх P-волны, то есть вычисляемая с помощью значений соответствующих компонент электрического и магнитного поля на верхней части структуры,что отмечено индексом U, а

$$P^{+}_{z,D,P} = \frac{1}{16\pi}\left[(E^{+}_{x,D})^* H^{\pm}_{y,D} + E^{\pm}_{x,D}(H^{\pm}_{y,D})^*\right]$$

— то же для прошедшей вниз волны, то есть вычисляемая с помощью полей на нижней части структуры, что отмечено индексом D.

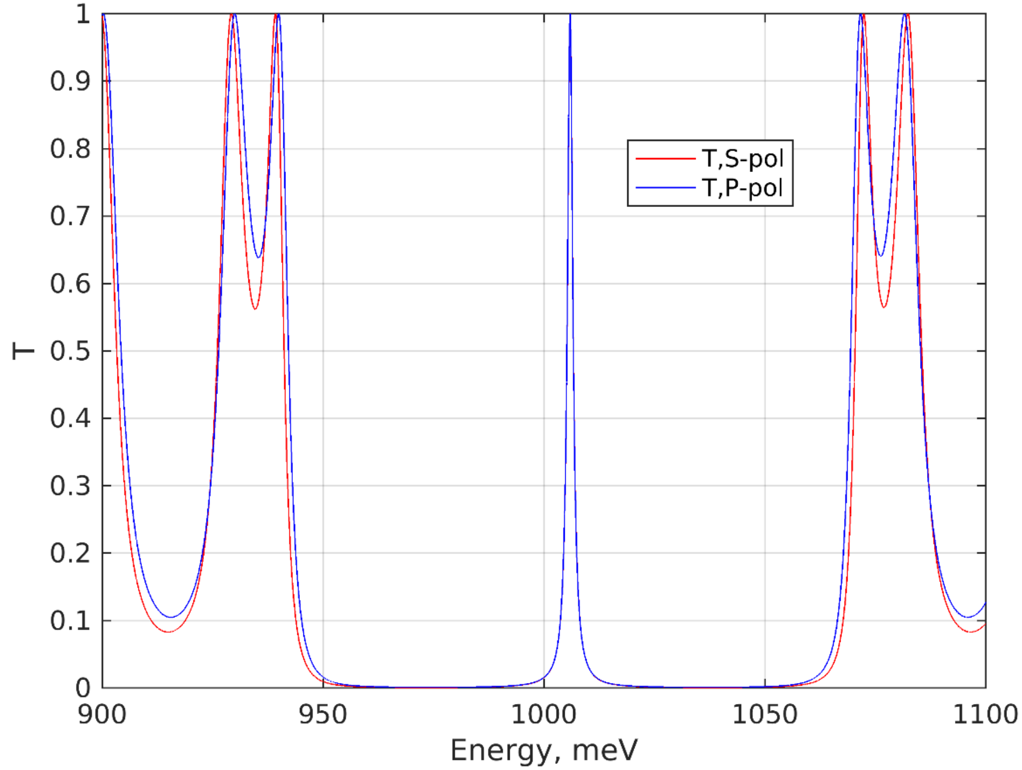
В результате, как несложно убедиться, остаются в силе старые формулы, связывающие коэффициенты пропускания и отражения с компонентами матрицы переноса. Пример расчета для пустого брэгговского микрорезонатора (с теми же параметрами, что были рассмотрены ранее), для угла падения $\vartheta = 20^o$, показан на рисунке. Видно, что возникает, как мы и обсуждали в начале лекции, синий сдвиг резонанса. Который при нормальном падении был точно на 1эВ. А разница между поляризациями в данном случае невелика.





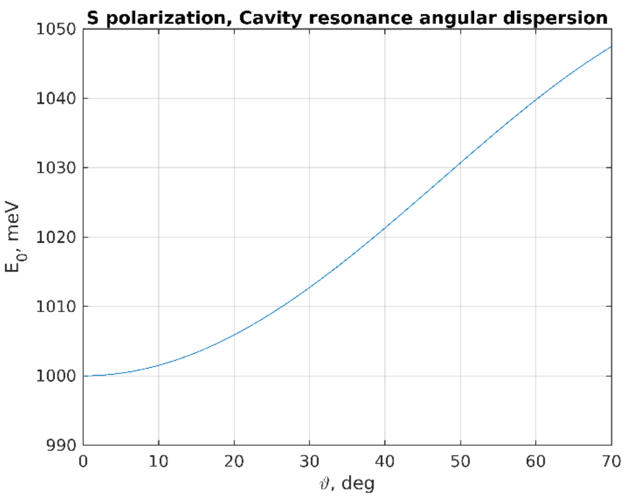
Сравнение кода, написанного по формулам из этой лекции и “боевого” кода нашей группы (Thomas Weiss, Nikolay Gippius et al., крестики), для $\vartheta = 45^o$.

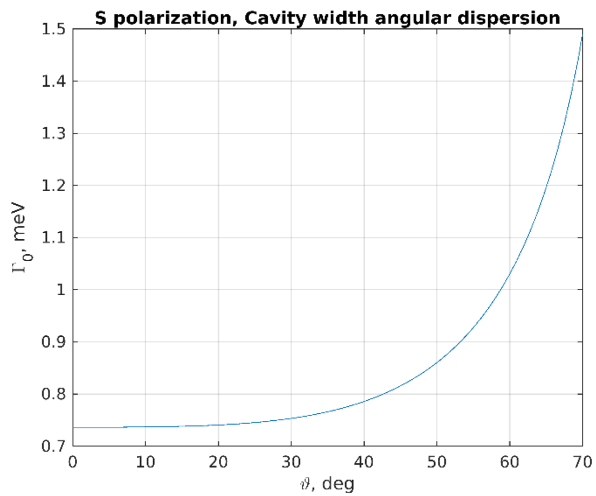
Итак, мы научились рассчитывать оптические спектры брэгговского микрорезонатора при наклонном падении света

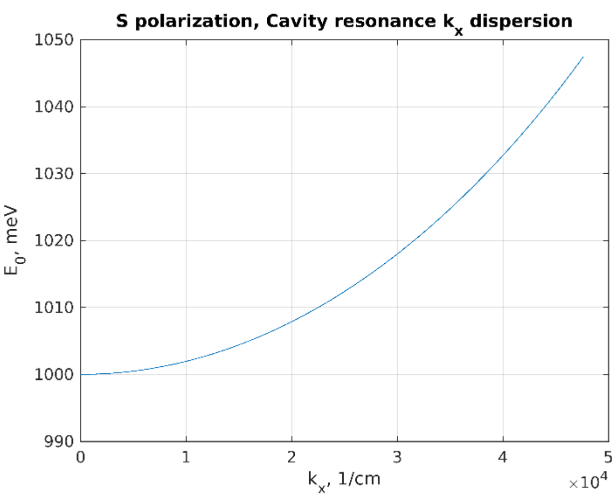


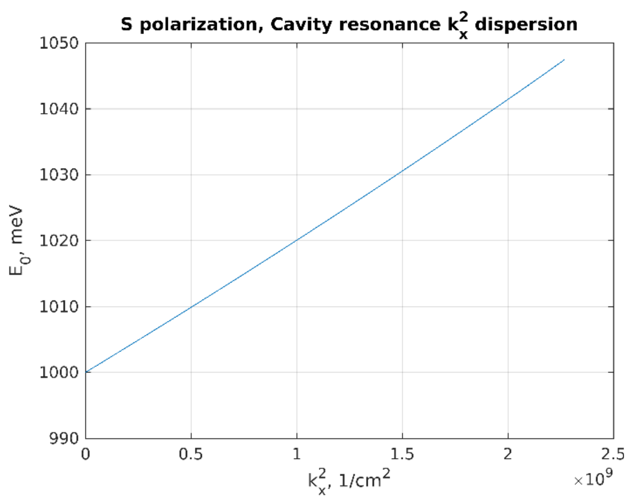
На рисунке показаны спектры пропускания «пустого» микрорезонатора в ортогональных линейных S-и P-поляризациях при угле падения 20^0

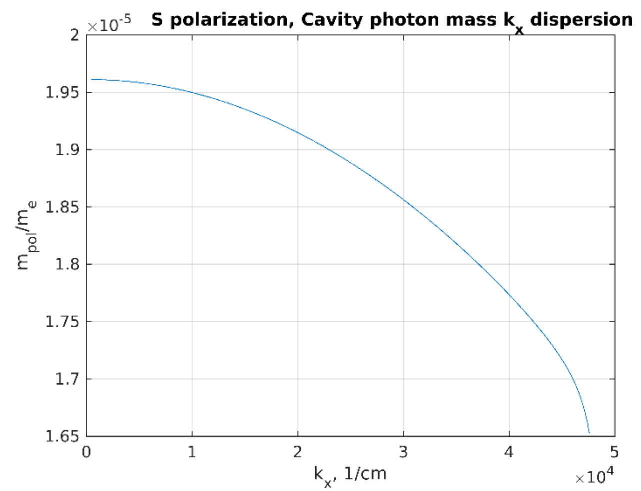
Следующий шаг – научиться рассчитывать угловую дисперсию резонансных мод микрорезонатора





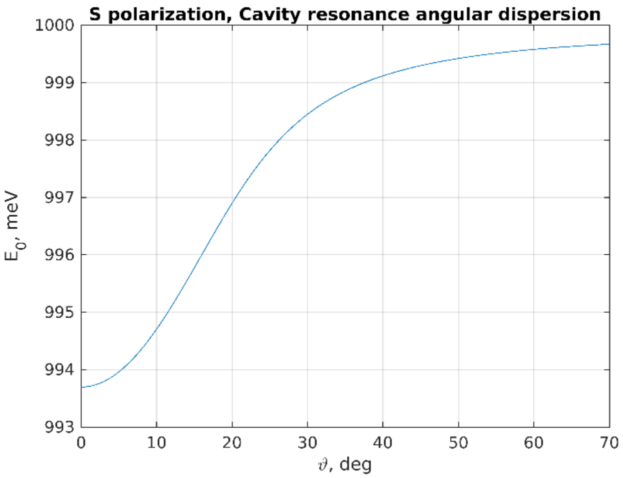


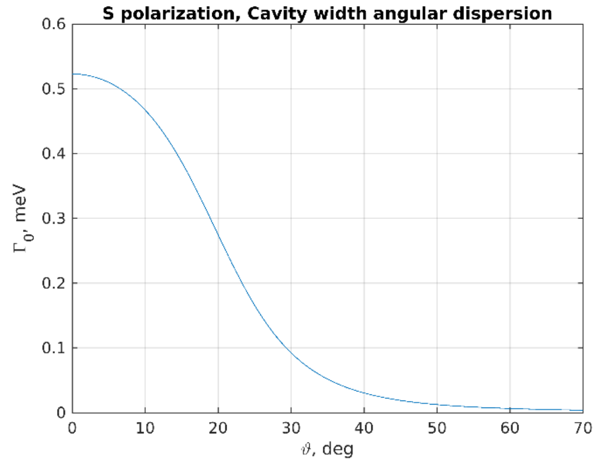


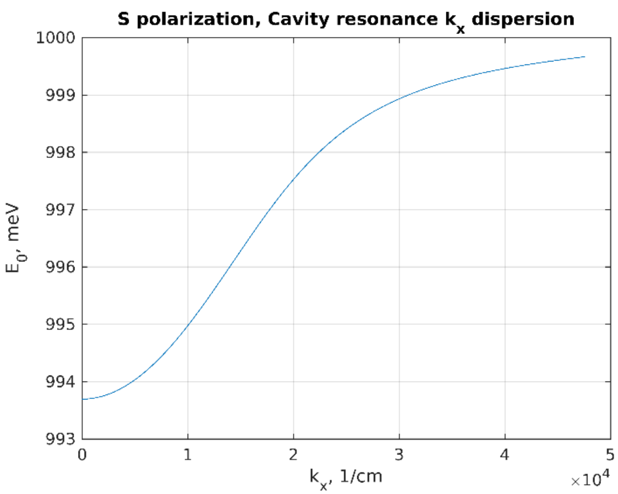


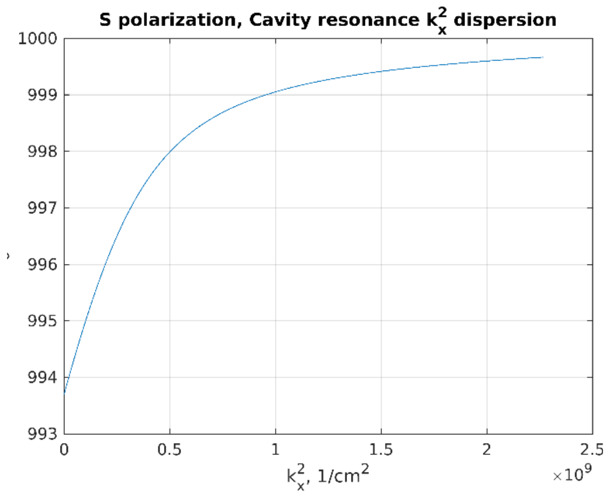
Пустой микрорезонатор

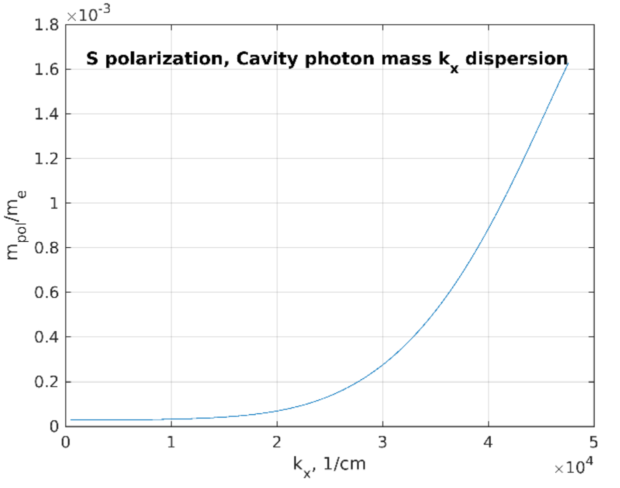
Не сложнее рассчитать угловую дисперсию поляритонных резонансных мод



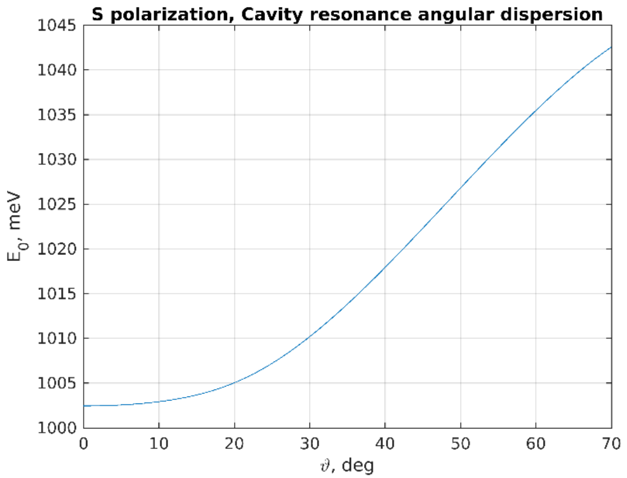


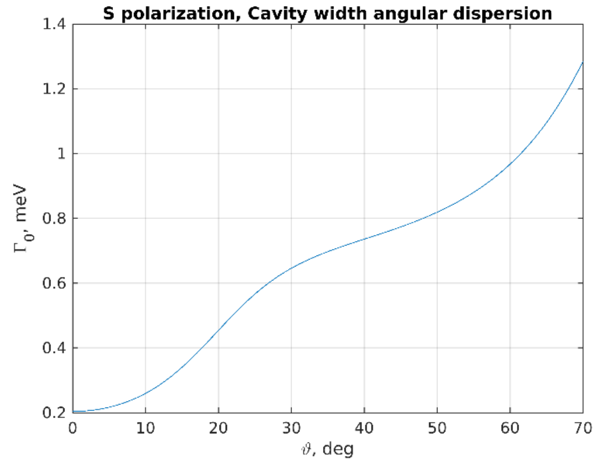


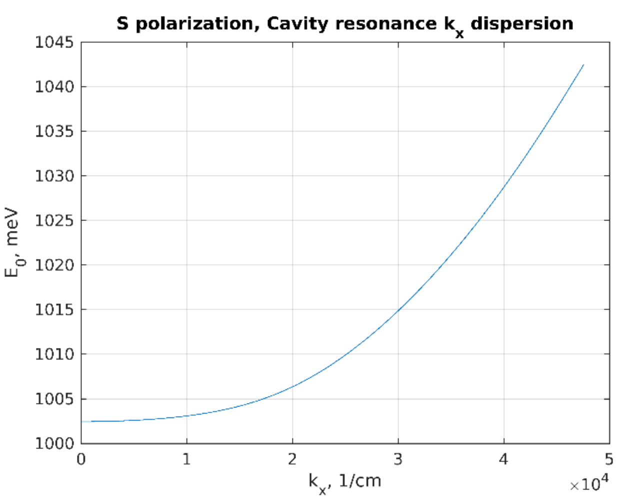


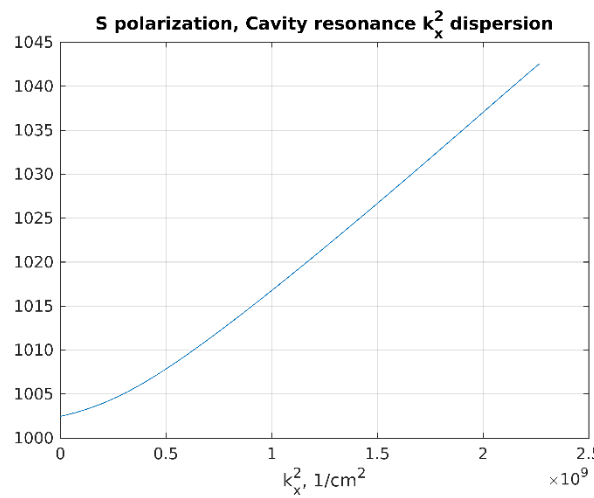


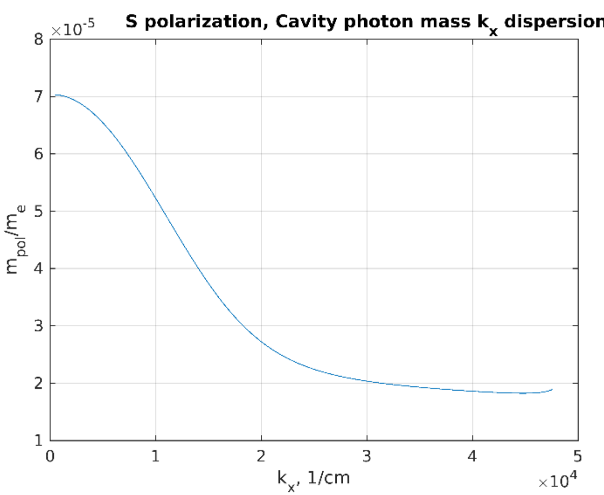
Микрорезонатор с одной КЯ, нижний экситон-поляритон











Микрорезонатор с одной КЯ, верхний экситон-поляритон

Задачи, лекция 3

3.20.1. Рассчитать законы дисперсии резонансной моды «пустого» резонатора и верхнего и нижнего поляритонов с параметрами из задач 2.22.1-4. Должны получиться зависимости типа показанных на предыдущих слайдах.

3.20.2. Рассчитать эффективную массу резонансов вблизи Г-точки в предыдущей задаче.