مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد

یک الگوریتمِ PTAS برای حالت اقلیدسی

علیرضا محمودیان

دانشکده‌ی ریاضی، آمار و علومِ کامپیوتر
دانشگاهِ تهران

دی ۱۳۹۷

مسئله

پیداکردنِ دورِ همیلتونی با هزینه‌ی کمینه

- در حالتِ کلی تقریب‌پذیر نیست.
- تابعِ هزینه‌ی متریک ← تقریب با فاکتورِ ۳/۲
- تابعِ هزینه‌ی اقلیدسی ← PTAS

الگوریتمِ PTAS: ایده‌ی اصلی

- ساختِ نمونه‌ی تقریب‌پذیر از روی نمونه‌ی اصلی
  - هزینه‌ی دورِ بهینه‌ی نمونه‌ی تقریب‌پذیر با هر تقریبِ دلخواه به جوابِ اصلی نزدیک می‌شود (PTAS)
- بدست‌آوردنِ جوابِ خوش‌رفتار در زمانِ چندجمله‌ای (DP)
  - جوابِ خوش‌رفتار PTAS نیست
- وجود جوابِ PTAS با تحلیلِ تصادفی

الگوریتمِ PTAS: ایده‌ی اصلی

- ساختِ نمونه‌ی تقریب‌پذیر از روی نمونه‌ی اصلی
  - هزینه‌ی دورِ بهینه‌ی نمونه‌ی تقریب‌پذیر با هر تقریبِ دلخواه به جوابِ اصلی نزدیک می‌شود (PTAS)
- بدست‌آوردنِ جوابِ خوش‌رفتار در زمانِ چندجمله‌ای (DP)
  - جوابِ خوش‌رفتار PTAS نیست
- وجود جوابِ PTAS با تحلیلِ تصادفی

الگوریتمِ PTAS: ایده‌ی اصلی

- ساختِ نمونه‌ی تقریب‌پذیر از روی نمونه‌ی اصلی
  - هزینه‌ی دورِ بهینه‌ی نمونه‌ی تقریب‌پذیر با هر تقریبِ دلخواه به جوابِ اصلی نزدیک می‌شود (PTAS)
- بدست‌آوردنِ جوابِ خوش‌رفتار در زمانِ چندجمله‌ای (DP)
  - جوابِ خوش‌رفتار PTAS نیست
- وجود جوابِ PTAS با تحلیلِ تصادفی

الگوریتمِ PTAS: ایده‌ی اصلی

- ساختِ نمونه‌ی تقریب‌پذیر از روی نمونه‌ی اصلی
  - هزینه‌ی دورِ بهینه‌ی نمونه‌ی تقریب‌پذیر با هر تقریبِ دلخواه به جوابِ اصلی نزدیک می‌شود (PTAS)
- بدست‌آوردنِ جوابِ خوش‌رفتار در زمانِ چندجمله‌ای (DP)
  - جوابِ خوش‌رفتار PTAS نیست
- وجود جوابِ PTAS با تحلیلِ تصادفی

الگوریتمِ PTAS: ایده‌ی اصلی

- ساختِ نمونه‌ی تقریب‌پذیر از روی نمونه‌ی اصلی
  - هزینه‌ی دورِ بهینه‌ی نمونه‌ی تقریب‌پذیر با هر تقریبِ دلخواه به جوابِ اصلی نزدیک می‌شود (PTAS)
- بدست‌آوردنِ جوابِ خوش‌رفتار در زمانِ چندجمله‌ای (DP)
  - جوابِ خوش‌رفتار PTAS نیست
- وجود جوابِ PTAS با تحلیلِ تصادفی

نمونه‌ی تقریب‌پذیر

نمونه‌ی تقریب‌پذیر

تعریف

۱. اندازه‌ی نمونه، n، توانی از ۲ باشد
۲. مختصاتِ هر گره اعدادی صحیح در بازه‌ی $[0, O(n)]^d$ باشند
۳. یال با هزینه‌ی کم‌تر از ۴ نداشته باشد

نمونه‌ی تقریب‌پذیر

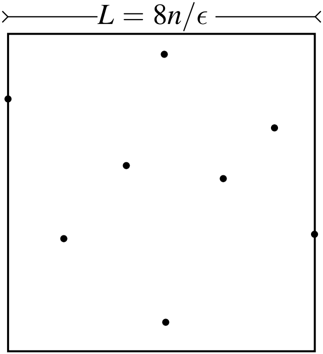
تعریف

۱. اندازه‌ی نمونه، n، توانی از ۲ باشد
۲. مختصاتِ هر گره اعدادی صحیح در بازه‌ی $[0, O(n)]^d$ باشند
۳. یال با هزینه‌ی کم‌تر از ۴ نداشته باشد

نمونه‌ی تقریب‌پذیر

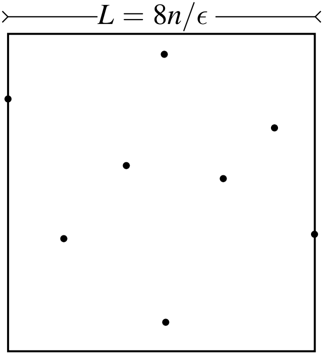
تعریف

۱. اندازه‌ی نمونه، n، توانی از ۲ باشد
۲. مختصاتِ هر گره اعدادی صحیح در بازه‌ی $[0, O(n)]^d$ باشند
۳. یال با هزینه‌ی کم‌تر از ۴ نداشته باشد



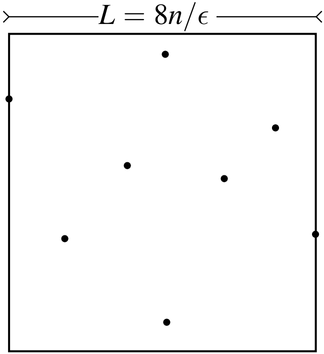
- به نمونه‌ی اولیه به تعدادِ کافی گره‌ی تکراری می‌افزاییم تا اندازه‌ی آن توانی از دو شود.
- آن را با کوچک‌ترین مربعِ ممکن محصور می‌کنیم.
- برای ϵ زوج، نمونه را تاجایی بزرگ می‌کنیم که طولِ ضلعِ مربع برابر با $8n/\epsilon$ شود.

■ واضح است که این کار دورِ بهینه را تغییر نمی‌دهد.



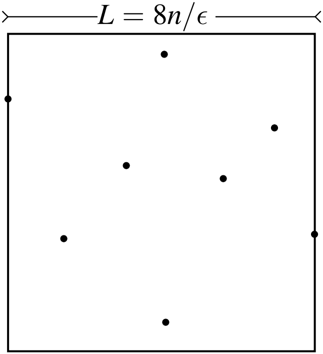
- به نمونه‌ی اولیه به تعدادِ کافی گره‌ی تکراری می‌افزاییم تا اندازه‌ی آن توانی از دو شود.
- آن را با کوچک‌ترین مربعِ ممکن محصور می‌کنیم.
- برای ϵ زوج، نمونه را تاجایی بزرگ می‌کنیم که طولِ ضلع مربع برابر با $8n/\epsilon$ شود.

■ واضح است که این کار دورِ بهینه را تغییر نمی‌دهد.



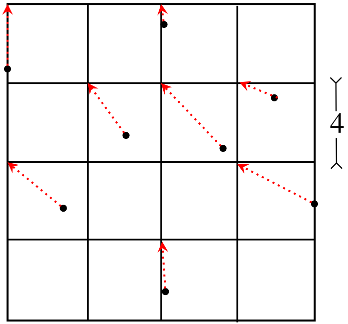
- به نمونه‌ی اولیه به تعدادِ کافی گره‌ی تکراری می‌افزاییم تا اندازه‌ی آن توانی از دو شود.
- آن را با کوچک‌ترین مربعِ ممکن محصور می‌کنیم.
- برای ϵِ زوج، نمونه را تاجایی بزرگ می‌کنیم که طولِ ضلعِ مربع برابر با $8n/\epsilon$ شود.
  - واضح است که این کار دورِ بهینه را تغییر نمی‌دهد.

نمونه‌ی تقریب‌پذیر: ساخت

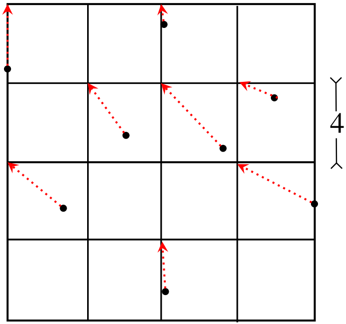


- به نمونه‌ی اولیه به تعدادِ کافی گره‌ی تکراری می‌افزاییم تا اندازه‌ی آن توانی از دو شود.
- آن را با کوچک‌ترین مربعِ ممکن محصور می‌کنیم.
- برای ϵ زوج، نمونه را تاجایی بزرگ می‌کنیم که طولِ ضلعِ مربع برابر با $8n/\epsilon$ شود.

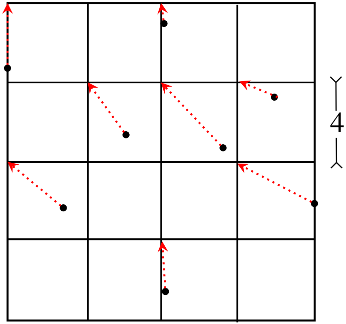
■ واضح است که این کار دورِ بهینه را تغییر نمی‌دهد.



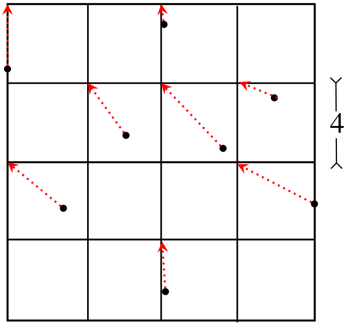
- هر گره را به مختصاتِ مضربِ ۴ قبلی می‌بریم.
  - هر گره حداکثر ۴ واحد جابه‌جا می‌شود.
  - هزینه‌ی هر یال حداکثر ۸ واحد تغییر می‌کند.
  - هزینه‌ی یک دورِ همیلتونی حداکثر $8n = \epsilon L$ تغییر می‌کند.



- هر گره را به مختصاتِ مضربِ ۴ قبلی می‌بریم.
  - هر گره حداکثر ۴ واحد جابه‌جا می‌شود.
  - هزینه‌ی هر یال حداکثر ۸ واحد تغییر می‌کند.
  - هزینه‌ی یک دورِ همیلتونی حداکثر $8n = \epsilon L$ تغییر می‌کند.



- هر گره را به مختصاتِ مضربِ ۴ قبلی می‌بریم.
  - هر گره حداکثر ۴ واحد جابه‌جا می‌شود.
  - هزینه‌ی هر یال حداکثر ۸ واحد تغییر می‌کند.
  - هزینه‌ی یک دورِ همیلتونی حداکثر $8n = \epsilon L$ تغییر می‌کند.



- هر گره را به مختصاتِ مضربِ ۴ قبلی می‌بریم.
  - هر گره حداکثر ۴ واحد جابه‌جا می‌شود.
  - هزینه‌ی هر یال حداکثر ۸ واحد تغییر می‌کند.
  - هزینه‌ی یک دورِ همیلتونی حداکثر $8n = \epsilon L$ تغییر می‌کند.

تمرین ۱

برای هر نمونه‌ی دل‌خواهِ ETSP، جوابِ نمونه‌ی تقریب‌پذیر، $(1+\epsilon)$-تقریبِ جوابِ اصلی برای هر ϵ دل‌خواه است.

برهان:

$$L \leq OPT_{Orig}$$

$$OPT_{Apx} - OPT_{Orig} \leq \epsilon L$$

$$\Rightarrow OPT_{Apx} \leq (1+\epsilon) OPT_{Orig} \quad \square$$

- پس از این بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم نمونه تقریب‌پذیر است.

تمرین ۱

برای هر نمونه‌ی دل‌خواهِ ETSP، جوابِ نمونه‌ی تقریب‌پذیر، $(1+\epsilon)$-تقریبِ جوابِ اصلی برای هر ϵِ دل‌خواه است.

برهان:

$$L \leq OPT_{Orig}$$

$$OPT_{Apx} - OPT_{Orig} \leq \epsilon L$$

$$\Rightarrow OPT_{Apx} \leq (1+\epsilon) OPT_{Orig} \quad \square$$

- پس از این بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم نمونه تقریب‌پذیر است.

تمرین ۱

برای هر نمونه‌ی دل‌خواهِ ETSP، جوابِ نمونه‌ی تقریب‌پذیر، $(1+\epsilon)$-تقریبِ جوابِ اصلی برای هر ϵِ دل‌خواه است.

برهان:

$$L \leq OPT_{Orig}$$

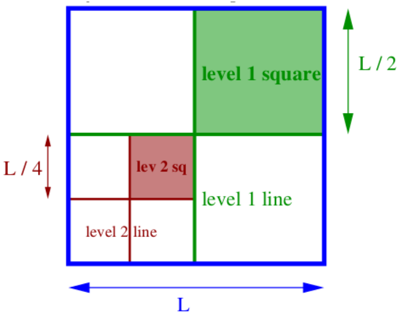
$$OPT_{Apx} - OPT_{Orig} \leq \epsilon L$$

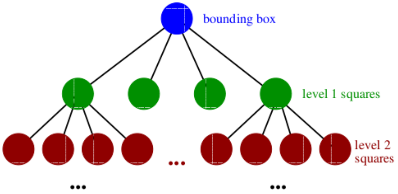
$$\Rightarrow OPT_{Apx} \leq (1+\epsilon) OPT_{Orig} \quad \square$$

- پس از این بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم نمونه تقریب‌پذیر است.

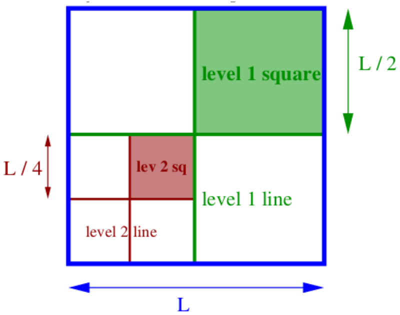
جوابِ خوش‌رفتار

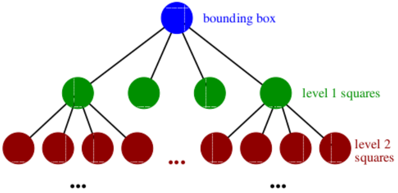
تقسیم‌بندیِ پایه





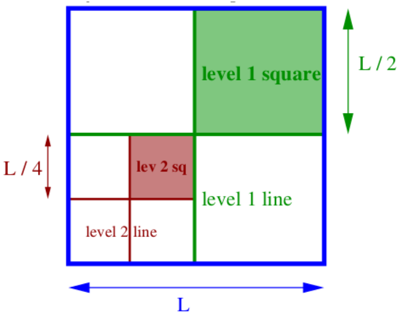
- مربعِ نمونه را به صورتِ بازگشتی به چهار مربعِ اصلی تقسیم می‌کنیم.
- چون L توانی از ۲ است، پس از $lg(L) = O(lg(n))$ سطح به مربع‌های اصلیِ یکه می‌رسیم.
- به این ساختار، تقسیم‌بندیِ پایه می‌گوییم.

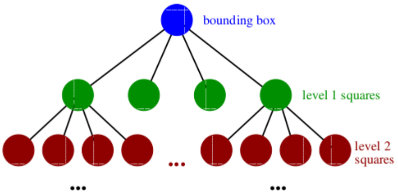




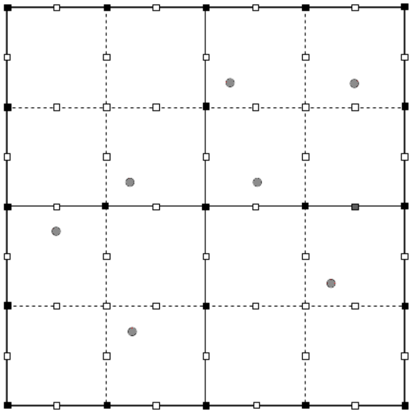
- مربعِ نمونه را به صورتِ بازگشتی به چهار مربعِ اصلی تقسیم می‌کنیم.
- چون L توانی از ۲ است، پس از $lg(L) = O(lg(n))$ سطح به مربع‌های اصلیِ یکه می‌رسیم.
- به این ساختار، تقسیم‌بندیِ پایه می‌گوییم.

تقسیم‌بندیِ پایه

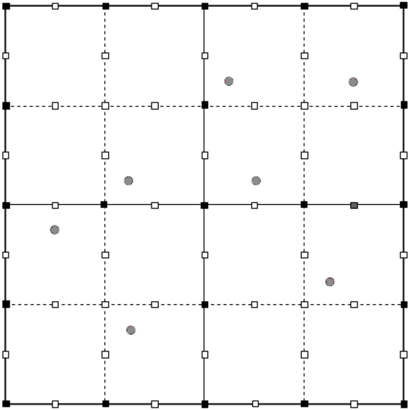




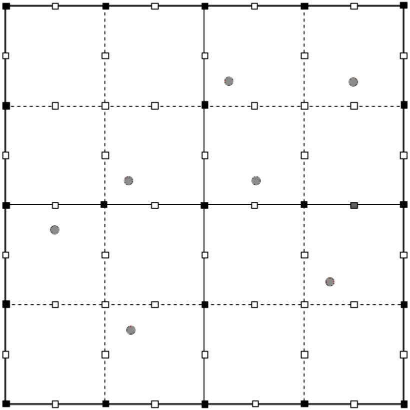
- مربعِ نمونه را به صورتِ بازگشتی به چهار مربعِ اصلی تقسیم می‌کنیم.
- چون L توانی از ۲ است، پس از $lg(L) = O(lg(n))$ سطح به مربع‌های اصلیِ یکه می‌رسیم.
- به این ساختار، تقسیم‌بندیِ پایه می‌گوییم.



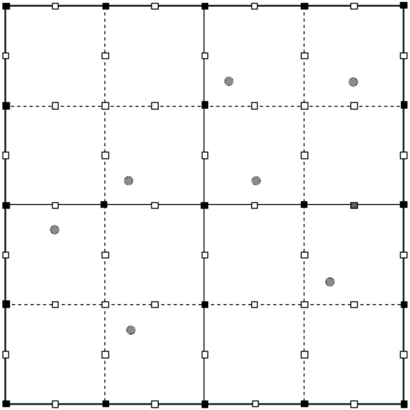
- توانی از ۲ از بازه‌ی $[lg(L)/\epsilon, 2lg(L)/\epsilon]$ انتخاب کرده و آن را m می‌نامیم.
- روی خطوطِ سطحِ i-ام، $2m^i$ درگاه با فاصله‌ی برابر اضافه می‌کنیم.
- هر مربعِ اصلیِ سطحِ i-ام ۴ درگاه در گوشه‌ها و $m-1$ درگاه روی هر ضلع خواهد داشت.
- مربعِ بزرگ‌تر آن‌ها را بامربع‌های درونش به اشتراک می‌گذارد.



- توانی از ۲ از بازه‌ی $[lg(L)/\epsilon, 2lg(L)/\epsilon]$ انتخاب کرده و آن را m می‌نامیم.
- روی خطوطِ سطحِ i-ام، $2m^i$ درگاه با فاصله‌ی برابر اضافه می‌کنیم.
- هر مربعِ اصلیِ سطحِ i-ام ۴ درگاه در گوشه‌ها و $m-1$ درگاه روی هر ضلع خواهد داشت.
- مربعِ بزرگ‌تر آن‌ها را بامربع‌های درونش به اشتراک می‌گذارد.



- توانی از ۲ از بازه‌ی $[lg(L)/\epsilon, 2lg(L)/\epsilon]$ انتخاب کرده و آن را m می‌نامیم.
- روی خطوطِ سطحِ i-ام، $2m^i$ درگاه با فاصله‌ی برابر اضافه می‌کنیم.
- هر مربعِ اصلیِ سطحِ i-ام ۴ درگاه در گوشه‌ها و $m-1$ درگاه روی هر ضلع خواهد داشت.
- مربعِ بزرگ‌تر آن‌ها را بامربع‌های درونش به اشتراک می‌گذارد.



- توانی از ۲ از بازه‌ی $[lg(L)/\epsilon, 2lg(L)/\epsilon]$ انتخاب کرده و آن را m می‌نامیم.
- روی خطوطِ سطحِ i-ام، $2m^i$ درگاه با فاصله‌ی برابر اضافه می‌کنیم.
- هر مربعِ اصلیِ سطحِ i-ام ۴ درگاه در گوشه‌ها و $m-1$ درگاه روی هر ضلع خواهد داشت.
- مربعِ بزرگ‌تر آن‌ها را بامربع‌های درونش به اشتراک می‌گذارد.

تعریف

۱. دقیقاً یک بار از هر گره‌ی اصلی عبور کند.
۲. حداکثر دو بار از هر درگاه عبور کند.
۳. تنها در درگاه‌ها خطوطِ تقسیم را قطع کند.
۴. تنها در درگاه‌ها خودش را قطع کند.

لم ۲● به دلیلِ خاصیتِ مثلثی، ویژگیِ ۲ را می‌توان به کمکِ میانبرزدن تضمین کرد.

تعریف

۱. دقیقاً یک بار از هر گره‌ی اصلی عبور کند.
۲. حداکثر دو بار از هر درگاه عبور کند.
۳. تنها در درگاه‌ها خطوطِ تقسیم را قطع کند.
۴. تنها در درگاه‌ها خودش را قطع کند.

لم ۲• به دلیلِ خاصیتِ مثلثی، ویژگیِ ۲ را می‌توان به کمکِ میانبرزدن تضمین کرد.

تعریف

۱. دقیقاً یک بار از هر گره‌ی اصلی عبور کند.
۲. حداکثر دو بار از هر درگاه عبور کند.
۳. تنها در درگاه‌ها خطوطِ تقسیم را قطع کند.
۴. تنها در درگاه‌ها خودش را قطع کند.

لم ۲• به دلیلِ خاصیتِ مثلثی، ویژگیِ ۲ را می‌توان به کمکِ میانبرزدن تضمین کرد.

تعریف

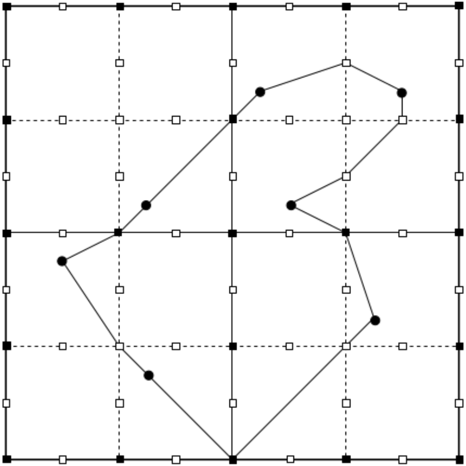
۱. دقیقاً یک بار از هر گره‌ی اصلی عبور کند.
۲. حداکثر دو بار از هر درگاه عبور کند.
۳. تنها در درگاه‌ها خطوطِ تقسیم را قطع کند.
۴. تنها در درگاه‌ها خودش را قطع کند.

لم ۲● به دلیلِ خاصیتِ مثلثی، ویژگیِ ۲ را می‌توان به کمکِ میانبرزدن تضمین کرد.

تعریف

۱. دقیقاً یک بار از هر گره‌ی اصلی عبور کند.
۲. حداکثر دو بار از هر درگاه عبور کند.
۳. تنها در درگاه‌ها خطوطِ تقسیم را قطع کند.
۴. تنها در درگاه‌ها خودش را قطع کند.

لم ۲• به دلیلِ خاصیتِ مثلثی، ویژگیِ ۲ را می‌توان به کمکِ میانبرزدن تضمین کرد.



مثال ($m = 2$)

لم ۳

دورِ خوش‌رفتارِ بهینه در زمانِ چندجمله‌ای نسبت به اندازه‌ی ورودی قابلِ محاسبه است.

برهان:

فرض کنید τ چنین دوری باشد.

اولاً دقت کنید تعدادِ مربع‌های اصلی $O(n)$ است. ابتدا حالاتِ مختلفِ قطعاتِ τ که می‌تواند داخلِ یک مربعِ اصلی باشد را می‌شماریم.

لم ۳

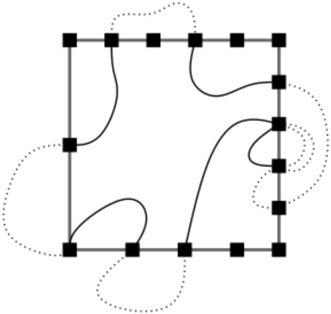
دورِ خوش‌رفتارِ بهینه در زمانِ چندجمله‌ای نسبت به اندازه‌ی ورودی قابلِ محاسبه است.

برهان:

فرض کنید τ چنین دوری باشد.

اولاً دقت کنید تعدادِ مربع‌های اصلی $O(n)$ است. ابتدا حالاتِ مختلفِ قطعاتِ τ که می‌تواند داخلِ یک مربعِ اصلی باشد را می‌شماریم.

- درگاه‌های ورودی/خروجی $\times$ جفت‌های ممکن $=$ حالاتِ مختلفِ



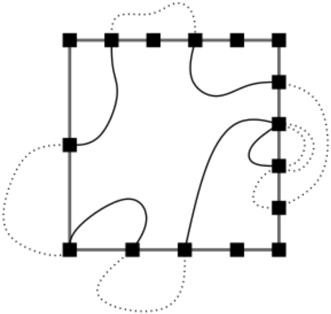
- هر مربعِ اصلی حداکثر $4m$ درگاه دارد.
- هر درگاه ۰، ۱ یا ۲ بار استفاده می‌شود.

$\Leftarrow$ تعداد حالاتِ مختلفِ استفاده درگاه‌ها
برای ورود/خروجِ τ $\leq$

$$3^{4m} = n^{O(1/\epsilon)}$$

دورِ خوش‌رفتار: اثباتِ لمِ ۳

- درگاه‌های ورودی/خروجی × جفت‌های ممکن = حالاتِ مختلفِ



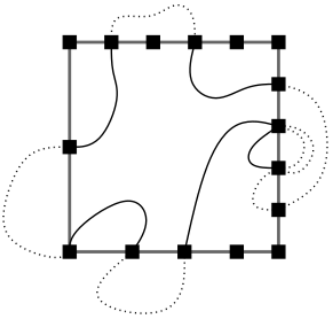
- هر مربعِ اصلی حداکثر $4m$ درگاه دارد.
- هر درگاه ۰، ۱ یا ۲ بار استفاده می‌شود.

⇐ تعداد حالاتِ مختلفِ استفاده درگاه‌ها

برای ورود/خروجِ $\geq \tau$

$$3^{4m} = n^{O(1/\epsilon)}$$

- درگاه‌های ورودی/خروجی $\times$ جفت‌های ممکن $=$ حالاتِ مختلفِ



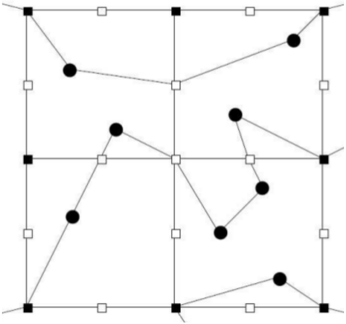
- هر مربعِ اصلی حداکثر $4m$ درگاه دارد.
- هر درگاه ۰، ۱ یا ۲ بار استفاده می‌شود.

$\Leftarrow$ تعداد حالاتِ مختلفِ استفاده درگاه‌ها

برای ورود/خروجِ $\tau \geq$

$$3^{4m} = n^{O(1/\epsilon)}$$

- درگاه‌های ورودی/خروجی $\times$ جفت‌های ممکن $=$ حالاتِ مختلفِ



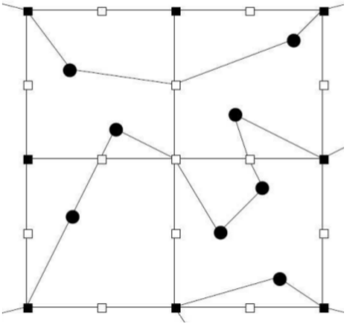
- مسیر اصلی نمی‌تواند خود را قطع کند.
- ورود و خروجِ τ از طریقِ درگاه‌ها تابعِ قاعده‌ی دایک خواهد بود.

$\Leftarrow$ تعداد حالاتِ مختلفِ جفت‌شدنِ درگاه‌ها $\geq$

$$C_{4m} = 2^{O(m)} = n^{O(1/\epsilon)}$$

دورِ خوش‌رفتار: اثباتِ لمِ ۳

- درگاه‌های ورودی/خروجی $\times$ جفت‌های ممکن $=$ حالاتِ مختلفِ

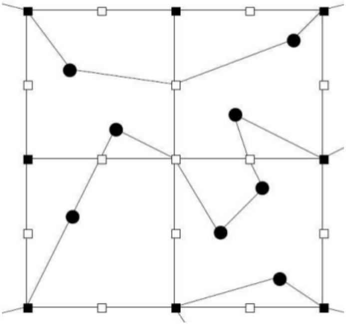


- مسیر اصلی نمی‌تواند خود را قطع کند.
- ورود و خروجِ τ از طریقِ درگاه‌ها تابعِ قاعده‌ی دایک خواهد بود.

$\Leftarrow$ تعداد حالاتِ مختلفِ جفت‌شدنِ درگاه‌ها $\geq$

$$C_{4m} = 2^{O(m)} = n^{O(1/\epsilon)}$$

• درگاه‌های ورودی/خروجی × جفت‌های ممکن = حالاتِ مختلفِ



• مسیر اصلی نمی‌تواند خود را قطع کند.

• ورود و خروجِ τ از طریقِ درگاه‌ها تابعِ قاعده‌ی دایک خواهد بود.

⇐ تعداد حالاتِ مختلفِ جفت‌شدنِ درگاه‌ها

$\geq$

$$C_{4m} = 2^{O(m)} = n^{O(1/\epsilon)}$$

دورِ خوش‌رفتار: یافتن بهینه

الگوریتمِ dynamic programming

۱. برای هر مربعِ اصلی در درختِ تقسیم‌بندیِ پایه
۲. مختصاتِ هر گره اعدادی صحیح در بازه‌ی $[0, O(n)]^d$ باشند
۳. یال با هزینه‌ی کم‌تر از ۴ نداشته باشد

دورِ خوش‌رفتار: یافتن بهینه

الگوریتمِ dynamic programming

۱. برای هر مربعِ اصلی در درختِ تقسیم‌بندیِ پایه
۲. مختصاتِ هر گره اعدادی صحیح در بازه‌ی $[0, O(n)]^d$ باشند
۳. یال با هزینه‌ی کم‌تر از ۴ نداشته باشد

دورِ خوش‌رفتار: یافتن بهینه

الگوریتمِ dynamic programming

۱. برای هر مربعِ اصلی در درختِ تقسیم‌بندیِ پایه
۲. مختصاتِ هر گره اعدادی صحیح در بازه‌ی $[0, O(n)]^d$ باشند
۳. یال با هزینه‌ی کم‌تر از ۴ نداشته باشد