درختِ اشتاینر و فروشنده‌ی دوره‌گرد

الگوریتم‌های تقریبی

علیرضا محمودیان

دانشکده‌ی ریاضی، آمار و علومِ کامپیوتر
دانشگاهِ تهران

آبان ۱۳۹۷

عناوین

- درختِ اشتاینر
  - تعریفِ مسئله
  - ناورداییِ جواب تحتِ بستارِ متریک
  - الگوریتمِ فاکتورِ ۲
- فروشنده‌ی دوره‌گرد
  - تعریفِ مسئله
  - چرا تقریب‌پذیر نیست؟
  - الگوریتمِ فاکتورِ ۲ برای حالتِ متریک
  - بهبود به فاکتورِ ۳/۲

مسئله‌ی درختِ اشتاینر

مسئله‌ی ۱.۳

برای گرافِ $G =< V, E >$ و زیر مجموعه‌ای از گره‌ها مانندِ $R \subseteq V$، درختی با وزنِ یالِ کمینه پیدا کنید که تمامِ R را بپوشاند.
R را مجموعه‌ی گره‌های الزامی و $V - R$ را مجموعه‌ی گره‌های اشتاینر می‌نامیم.

- می‌توان هر نمونه‌ی غیرِ متریک را با حفظِ تقریب به متریک تبدیل کرد.
- ← کافی است برای حالتِ متریک الگوریتمِ تقریبی ارائه دهیم.

مسئله‌ی ۱.۳

برای گرافِ $G =< V, E >$ و زیر مجموعه‌ای از گره‌ها مانندِ $R \subseteq V$، درختی با وزنِ یالِ کمینه پیدا کنید که تمامِ R را بپوشاند.
R را مجموعه‌ی گره‌های الزامی و $V - R$ را مجموعه‌ی گره‌های اشتاینر می‌نامیم.

- می‌توان هر نمونه‌ی غیرِ متریک را با حفظِ تقریب به متریک تبدیل کرد.

← کافی است برای حالتِ متریک الگوریتمِ تقریبی ارائه دهیم.

مسئله‌ی ۱.۳

برای گرافِ $G =< V, E >$ و زیر مجموعه‌ای از گره‌ها مانندِ $R \subseteq V$، درختی با وزنِ یالِ کمینه پیدا کنید که تمامِ R را بپوشاند.
R را مجموعه‌ی گره‌های الزامی و $V - R$ را مجموعه‌ی گره‌های اشتاینر می‌نامیم.

- می‌توان هر نمونه‌ی غیرِ متریک را با حفظِ تقریب به متریک تبدیل کرد.
  $\leftarrow$ کافی است برای حالتِ متریک الگوریتمِ تقریبی ارائه دهیم.

مسئله‌ی درختِ اشتاینر: بستارِ متریک

- برای گرافِ $G =< V, E >$، بستارِ متریکِ آن گرافی کامل مانندِ $G' =< V, E' >$ است که وزن هر یالِ (u, v) در آن برابر با وزنِ مسیرِ با وزنِ کمینه بینِ u و v است.
- G' به وضوح متریک است.
- هیچ یالی از G دارای وزنِ بیشتری در G' نیست.
  $\leftarrow$ جواب بهینه‌ی G' کرانِ پایینی برای جوابِ بهینه‌ی G است.

- برای گرافِ $G =< V, E >$، بستارِ متریکِ آن گرافی کامل مانندِ $G' =< V, E' >$ است که وزن هر یالِ (u, v) در آن برابر با وزنِ مسیرِ با وزنِ کمینه بینِ u و v است.
- G' به وضوح متریک است.
- هیچ یالی از G دارای وزنِ بیشتری در G' نیست.
  - $\leftarrow$ جواب بهینه‌ی G' کرانِ پایینی برای جوابِ بهینه‌ی G است.

مسئله‌ی درختِ اشتاینر: بستارِ متریک

- برای گرافِ $G =< V, E >$، بستارِ متریکِ آن گرافی کامل مانندِ $G' =< V, E' >$ است که وزن هر یالِ (u, v) در آن برابر با وزنِ مسیرِ با وزنِ کمینه بینِ u و v است.
- G' به وضوح متریک است.
- هیچ یالی از G دارای وزنِ بیشتری در G' نیست.
  - $\leftarrow$ جواب بهینه‌ی G' کرانِ پایینی برای جوابِ بهینه‌ی G است.

مسئله‌ی درختِ اشتاینر: بستارِ متریک

- برای گرافِ $G =< V, E >$، بستارِ متریکِ آن گرافی کامل مانندِ $G' =< V, E' >$ است که وزن هر یالِ (u, v) در آن برابر با وزنِ مسیرِ با وزنِ کمینه بینِ u و v است.
- G' به وضوح متریک است.
- هیچ یالی از G دارای وزنِ بیشتری در G' نیست.
  $\leftarrow$ جواب بهینه‌ی G' کرانِ پایینی برای جوابِ بهینه‌ی G است.

- برای هر درختِ اشتاینر مانندِ T' در G'، می‌توان درختِ اشتاینرِ T را در G را طوری یافت که $|T| \leq |T'|$.
- کافی است هر یال را با مسیرِ متناظرِ آن جایگزین کرده و دورهای احتمالی را حذف کنیم.

در نتیجه:

قضیه‌ی ۲.۳

هر جوابِ تقریبیِ G' را می‌توانیم به جوابی با همان فاکتورِ تقریب برای G تبدیل کنیم.

- برای هر درختِ اشتاینر مانندِ T' در G'، می‌توان درختِ اشتاینرِ T را در G را طوری یافت که $|T| \leq |T'|$.
- کافی است هر یال را با مسیرِ متناظرِ آن جایگزین کرده و دورهای احتمالی را حذف کنیم.

در نتیجه:

قضیه‌ی ۲.۳

هر جوابِ تقریبیِ G' را می‌توانیم به جوابی با همان فاکتورِ تقریب برای G تبدیل کنیم.

- برای هر درختِ اشتاینر مانندِ T' در G'، می‌توان درختِ اشتاینرِ T را در G را طوری یافت که $|T| \leq |T'|$.
- کافی است هر یال را با مسیرِ متناظرِ آن جایگزین کرده و دورهای احتمالی را حذف کنیم.

در نتیجه:

قضیه‌ی ۲.۳

هر جوابِ تقریبیِ G' را می‌توانیم به جوابی با همان فاکتورِ تقریب برای G تبدیل کنیم.

الگوریتمِ ۱.۱.۳

برای گرافِ متریکِ G:

درختِ کمینه‌ی پوشا روی مجموعه‌ی گره‌های الزامی را پیدا کنید.

قضیه‌ی ۳.۳

جوابِ الگوریتمِ ۱.۱.۳ حداکثر ۲ برابرِ جوابِ بهینه است.

الگوریتمِ ۱.۱.۳

برای گرافِ متریکِ G:

درختِ کمینه‌ی پوشا روی مجموعه‌ی گره‌های الزامی را پیدا کنید.

قضیه‌ی ۳.۳

جوابِ الگوریتمِ ۱.۱.۳ حداکثر ۲ برابرِ جوابِ بهینه است.

لمِ میان‌بر

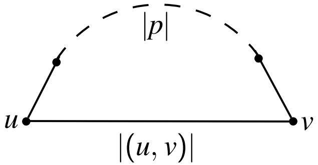
برای هر دو گره‌ی u و v در یک گرافِ متریک، یالِ (u, v) کوتاه‌ترین مسیر بینِ u و v است.

برای هر مسیر بینِ u و v مانندِ p،

$$|p| \leq |(u, v)|$$

لمِ میان‌بر

برای هر دو گره‌ی u و v در یک گرافِ متریک، یالِ (u, v) کوتاه‌ترین مسیر بینِ u و v است.



برای هر مسیر بینِ u و v مانندِ p،

$$|p| \leq |(u, v)|$$

قضیه‌ی ۳.۳

جوابِ الگوریتمِ ۱.۱.۳ جوابی قابلِ قبول و حداکثر ۲ برابرِ جوابِ بهینه است.

■ فرض کنید T جوابِ الگوریتم و OPT جوابِ بهینه باشد.

- T درختی پوشا روی R و در نتیجه قابلِ قبول است.
- یال‌های OPT را دوبل کنید و پیمایشِ اویلریِ آن را C بنامید.

← $|C| = 2.|OPT|$

- C را با میان‌بر زدن و حذف گره‌های اشتاینر و گره‌های الزامیِ تکراری به یک دورِ همیلتونی مانندِ H تبدیل کنید.
- لمِ میان‌بر ← $|H| \le |C|$

قضیه‌ی ۳.۳

جوابِ الگوریتمِ ۱.۱.۳ جوابی قابلِ قبول و حداکثر ۲ برابرِ جوابِ بهینه است.

- فرض کنید T جوابِ الگوریتم و OPT جوابِ بهینه باشد.
  - T درختی پوشا روی R و در نتیجه قابلِ قبول است.
  - یال‌های OPT را دوبل کنید و پیمایشِ اویلریِ آن را C بنامید.

  $\leftarrow |C| = 2.|OPT|$
  - C را با میان‌بر زدن و حذف گره‌های اشتاینر و گره‌های الزامیِ تکراری به یک دورِ همیلتونی مانندِ H تبدیل کنید.
  - لمِ میان‌بر $\leftarrow |H| \leq |C|$

قضیه‌ی ۳.۳

جوابِ الگوریتمِ ۱.۱.۳ جوابی قابلِ قبول و حداکثر ۲ برابرِ جوابِ بهینه است.

- فرض کنید T جوابِ الگوریتم و OPT جوابِ بهینه باشد.
  - T درختی پوشا روی R و در نتیجه قابلِ قبول است.
  - یال‌های OPT را دوبل کنید و پیمایشِ اویلریِ آن را C بنامید.

$\leftarrow |C| = 2.|OPT|$

  - C را با میان‌بر زدن و حذف گره‌های اشتاینر و گره‌های الزامیِ تکراری به یک دورِ همیلتونی مانندِ H تبدیل کنید.
  - لمِ میان‌بر $\leftarrow |H| \leq |C|$

قضیه‌ی ۳.۳

جوابِ الگوریتمِ ۱.۱.۳ جوابی قابلِ قبول و حداکثر ۲ برابرِ جوابِ بهینه است.

- فرض کنید T جوابِ الگوریتم و OPT جوابِ بهینه باشد.
  - T درختی پوشا روی R و در نتیجه قابلِ قبول است.
  - یال‌های OPT را دوبل کنید و پیمایشِ اویلریِ آن را C بنامید.

$\leftarrow |C| = 2.|OPT|$

  - C را با میان‌بر زدن و حذف گره‌های اشتاینر و گره‌های الزامیِ تکراری به یک دورِ همیلتونی مانندِ H تبدیل کنید.
  - لمِ میان‌بر $\leftarrow |H| \leq |C|$

قضیه‌ی ۳.۳

جوابِ الگوریتمِ ۱.۱.۳ جوابی قابلِ قبول و حداکثر ۲ برابرِ جوابِ بهینه است.

- فرض کنید T جوابِ الگوریتم و OPT جوابِ بهینه باشد.
  - T درختی پوشا روی R و در نتیجه قابلِ قبول است.
  - یال‌های OPT را دوبل کنید و پیمایشِ اویلریِ آن را C بنامید.

$\leftarrow |C| = 2.|OPT|$

  - C را با میان‌بر زدن و حذف گره‌های اشتاینر و گره‌های الزامیِ تکراری به یک دورِ همیلتونی مانندِ H تبدیل کنید.
  - لمِ میان‌بر $\leftarrow |H| \leq |C|$

قضیه‌ی ۳.۳

جوابِ الگوریتمِ ۱.۱.۳ جوابی قابلِ قبول و حداکثر ۲ برابرِ جوابِ بهینه است.

- فرض کنید T جوابِ الگوریتم و OPT جوابِ بهینه باشد.
  - T درختی پوشا روی R و در نتیجه قابلِ قبول است.
  - یال‌های OPT را دوبل کنید و پیمایشِ اویلریِ آن را C بنامید.

  $\leftarrow |C| = 2.|OPT|$
  - C را با میان‌بر زدن و حذف گره‌های اشتاینر و گره‌های الزامیِ تکراری به یک دورِ همیلتونی مانندِ H تبدیل کنید.
  - لمِ میان‌بر $\leftarrow |H| \leq |C|$

قضیه‌ی ۳.۳

جوابِ الگوریتمِ ۱.۱.۳ جوابی قابلِ قبول و حداکثر ۲ برابرِ جوابِ بهینه است.

- با حذفِ یک یال از دورِ H، یک درختِ پوشا روی R خواهیم داشت، که آن را T' می‌نامیم. $\leftarrow |T'| \leq |H|$
- اما T کم‌وزن‌ترین درختِ پوشای R است $\leftarrow |T| \leq |T'|$

$$|T| \leq |T'| \leq |H| \leq |C| = 2.|OPT|$$

$$|T| \leq 2.|OPT|$$

قضیه‌ی ۳.۳

جوابِ الگوریتمِ ۱.۱.۳ جوابی قابلِ قبول و حداکثر ۲ برابرِ جوابِ بهینه است.

- با حذفِ یک یال از دورِ H، یک درختِ پوشا روی R خواهیم داشت، که آن را T' می‌نامیم. $|T'| \leq |H| \leftarrow$
- اما T کم‌وزن‌ترین درختِ پوشای R است $|T| \leq |T'| \leftarrow$

$$|T| \leq |T'| \leq |H| \leq |C| = 2.|OPT|$$

$$|T| \leq 2.|OPT|$$

مسئله‌ی درختِ اشتاینر: الگوریتمِ تقریبی

قضیه‌ی ۳.۳

جوابِ الگوریتمِ ۱.۱.۳ جوابی قابلِ قبول و حداکثر ۲ برابرِ جوابِ بهینه است.

- با حذفِ یک یال از دورِ H، یک درختِ پوشا روی R خواهیم داشت، که آن را T' می‌نامیم. $\leftarrow$ $|T'| \leq |H|$
- اما T کم‌وزن‌ترین درختِ پوشای R است $\leftarrow$ $|T| \leq |T'|$

$$|T| \leq |T'| \leq |H| \leq |C| = 2.|OPT|$$

$$|T| \leq 2.|OPT|$$

قضیه‌ی ۳.۳

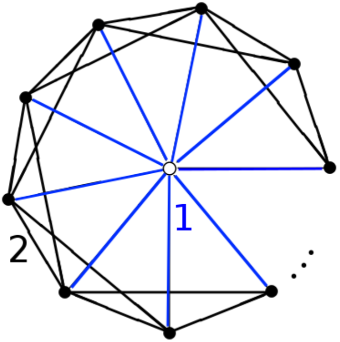
جوابِ الگوریتمِ ۱.۱.۳ جوابی قابلِ قبول و حداکثر ۲ برابرِ جوابِ بهینه است.

- با حذفِ یک یال از دورِ H، یک درختِ پوشا روی R خواهیم داشت، که آن را T' می‌نامیم. $|T'| \leq |H| \leftarrow$
- اما T کم‌وزن‌ترین درختِ پوشای R است $|T| \leq |T'| \leftarrow$

$$|T| \leq |T'| \leq |H| \leq |C| = 2.|OPT|$$

$$|T| \leq 2.|OPT|$$

مثالِ ۴.۳



$$|T| = 2(n-1)$$

$$|OPT| = n$$

مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد

مسئله‌ی ۵.۳

پیداکردنِ دورِ همیلتونی با وزنِ کمینه

- در حالتِ کلی تقریب‌پذیر نیست.
- تابعِ وزنِ متریک ←
  - الگوریتم ۱: فاکتورِ ۲
  - الگوریتم ۲: بهبود به فاکتورِ ۳/۲

مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد

مسئله‌ی ۵.۳

پیداکردنِ دورِ همیلتونی با وزنِ کمینه

- در حالتِ کلی تقریب‌پذیر نیست.
- تابعِ وزنِ متریک ←
  - الگوریتم ۱: فاکتورِ ۲
  - الگوریتم ۲: بهبود به فاکتورِ ۳/۲

مسئله‌ی ۵.۳

پیداکردنِ دورِ همیلتونی با وزنِ کمینه

- در حالتِ کلی تقریب‌پذیر نیست.
- تابعِ وزنِ متریک $\leftarrow$
  - الگوریتم ۱: فاکتورِ ۲
  - الگوریتم ۲: بهبود به فاکتورِ ۳/۲

مسئله‌ی ۵.۳

پیداکردنِ دورِ همیلتونی با وزنِ کمینه

- در حالتِ کلی تقریب‌پذیر نیست.
- تابعِ وزنِ متریک $\leftarrow$
  - الگوریتم ۱: فاکتورِ ۲
  - الگوریتم ۲: بهبود به فاکتورِ ۳/۲

قضیه‌ی ۶.۳

برای هر $\alpha(n)$-تقریب از TSP مانندِ $\alpha(n)TSP$، داریم:

$$HAMPATH \leq_{PTIME} \alpha(n)TSP$$

- فرض کنیم الگوریتمِ تقریبی با فاکتورِ $\alpha(n)$ برای TSP وجود دارد.
  - برای یک نمونه‌ی مسئله‌ی دورِ همیلتونی مانندِ G:
    - به تمامِ یال‌های G وزنِ ۱ بدهید.
    - بینِ هر دو گره‌ی بدونِ یال، یالی با وزنِ $n.\alpha(n)$ اضافه کنید.
  - $\alpha(n)TSP$ را روی گرافِ حاصل اجرا کنید.

قضیه‌ی ۶.۳

برای هر $\alpha(n)$-تقریب از TSP مانندِ $\alpha(n)TSP$، داریم:

$$HAMPATH \leq_{PTIME} \alpha(n)TSP$$

- فرض کنیم الگوریتمِ تقریبی با فاکتورِ $\alpha(n)$ برای TSP وجود دارد.
  - برای یک نمونه‌ی مسئله‌ی دورِ همیلتونی مانندِ G:
    - به تمامِ یال‌های G وزنِ ۱ بدهید.
    - بینِ هر دو گره‌ی بدونِ یال، یالی با وزنِ $n.\alpha(n)$ اضافه کنید.
  - $\alpha(n)TSP$ را روی گرافِ حاصل اجرا کنید.

قضیه‌ی ۶.۳

برای هر $\alpha(n)$-تقریب از TSP مانندِ $\alpha(n)TSP$، داریم:

$$HAMPATH \leq_{PTIME} \alpha(n)TSP$$

- فرض کنیم الگوریتمِ تقریبی با فاکتورِ $\alpha(n)$ برای TSP وجود دارد.
  - برای یک نمونه‌ی مسئله‌ی دورِ همیلتونی مانندِ G:
  - به تمامِ یال‌های G وزنِ ۱ بدهید.
  - بینِ هر دو گره‌ی بدونِ یال، یالی با وزنِ $n.\alpha(n)$ اضافه کنید.
  - $\alpha(n)TSP$ را روی گرافِ حاصل اجرا کنید.

قضیه‌ی ۶.۳

برای هر $\alpha(n)$-تقریب از TSP مانندِ $\alpha(n)TSP$، داریم:

$$HAMPATH \leq_{PTIME} \alpha(n)TSP$$

- فرض کنیم الگوریتمِ تقریبی با فاکتورِ $\alpha(n)$ برای TSP وجود دارد.
  - برای یک نمونه‌ی مسئله‌ی دورِ همیلتونی مانندِ G:
  - به تمامِ یال‌های G وزنِ ۱ بدهید.
  - بینِ هر دو گره‌ی بدونِ یال، یالی با وزنِ $n.\alpha(n)$ اضافه کنید.
  - $\alpha(n)TSP$ را روی گرافِ حاصل اجرا کنید.

قضیه‌ی ۶.۳

برای هر $\alpha(n)$-تقریب از TSP مانندِ $\alpha(n)TSP$، داریم:

$$HAMPATH \leq_{PTIME} \alpha(n)TSP$$

- فرض کنیم الگوریتمِ تقریبی با فاکتورِ $\alpha(n)$ برای TSP وجود دارد.
  - برای یک نمونه‌ی مسئله‌ی دورِ همیلتونی مانندِ G:
    - به تمامِ یال‌های G وزنِ ۱ بدهید.
    - بینِ هر دو گره‌ی بدونِ یال، یالی با وزنِ $n.\alpha(n)$ اضافه کنید.
  - $\alpha(n)TSP$ را روی گرافِ حاصل اجرا کنید.

قضیه‌ی ۶.۳

برای هر $\alpha(n)$-تقریب از TSP مانندِ $\alpha(n)TSP$، داریم:

$$HAMPATH \leq_{PTIME} \alpha(n)TSP$$

- اگر $n = |\alpha(n)TSP| \leftarrow G$ دورِ همیلتونی دارد.
- اگر $|\alpha(n)TSP| > n.\alpha(n) \leftarrow G$ دورِ همیلتونی ندارد.

$$HAMPATH \leq_{PTIME} \alpha(n)TSP$$

$\Leftarrow$ با فرضِ $P \neq NP$، TSP در حالتِ کلی تقریب‌پذیر نیست.

قضیه‌ی ۶.۳

برای هر $\alpha(n)$-تقریب از TSP مانندِ $\alpha(n)TSP$، داریم:

$$HAMPATH \leq_{PTIME} \alpha(n)TSP$$

- اگر $|\alpha(n)TSP| = n \leftarrow G$ دورِ همیلتونی دارد.
- اگر $|\alpha(n)TSP| > n.\alpha(n) \leftarrow G$ دورِ همیلتونی ندارد.

$$HAMPATH \leq_{PTIME} \alpha(n)TSP$$

$\Leftarrow$ با فرضِ $P \neq NP$، TSP در حالتِ کلی تقریب‌پذیر نیست.

قضیه‌ی ۶.۳

برای هر $\alpha(n)$-تقریب از TSP مانندِ $\alpha(n)TSP$، داریم:

$$HAMPATH \leq_{PTIME} \alpha(n)TSP$$

- اگر $|\alpha(n)TSP| = n \leftarrow G$ دورِ همیلتونی دارد.
- اگر $|\alpha(n)TSP| > n.\alpha(n) \leftarrow G$ دورِ همیلتونی ندارد.

$$HAMPATH \leq_{PTIME} \alpha(n)TSP$$

$\Leftarrow$ با فرضِ $P \neq NP$، TSP در حالتِ کلی تقریب‌پذیر نیست.

قضیه‌ی ۶.۳

برای هر $\alpha(n)$-تقریب از TSP مانندِ $\alpha(n)TSP$، داریم:

$$HAMPATH \leq_{PTIME} \alpha(n)TSP$$

- اگر $|\alpha(n)TSP| = n \leftarrow G$ دورِ همیلتونی دارد.
- اگر $|\alpha(n)TSP| > n.\alpha(n) \leftarrow G$ دورِ همیلتونی ندارد.

$$HAMPATH \leq_{PTIME} \alpha(n)TSP$$

$\Leftarrow$ با فرضِ $P \neq NP$، TSP در حالتِ کلی تقریب‌پذیر نیست.

الگوریتمِ ۷.۳

برای گرافِ متریکِ G:

۱. درختِ پوشای کمینه‌ی G را پیدا کنید ← T

۲. یال‌های T را دوبل کنید ← G'

۳. یک پیمایشِ اویلری از G' پیدا کنید ← $\mathcal{T}$

۴. دنباله‌ای از گره‌ها به ترتیبِ اولین حضور در $\mathcal{T}$ تشکیل داده و اولین گره را در انتها تکرار کنید ← H

قضیه‌ی ۸.۳

الگوریتمِ ۷.۳ یک الگوریتمِ تقریبی با فاکتورِ ۲ برای TSP متریک است.

- با حذفِ یک یال از هر دورِ همیلتونی یک درختِ پوشا خواهیم داشت ← درختِ پوشای کمینه کرانِ پایینی برای جوابِ TSP است. ← $|T| \leq |OPT|$
- هر یالِ T دو بار در $\mathcal{T}$ تکرار می‌شود ← $|\mathcal{T}| = 2.|T|$
- گامِ ۴ گره‌های تکراری را حذف می‌کند، از لمِ میان‌بر ← $|H| \leq |\mathcal{T}|$
- همچنین H یک دورِ همیلتونی از G است.

مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد: الگوریتمِ با فاکتورِ ۲

قضیه‌ی ۸.۳

الگوریتمِ ۷.۳ یک الگوریتمِ تقریبی با فاکتورِ ۲ برای TSP متریک است.

- با حذفِ یک یال از هر دورِ همیلتونی یک درختِ پوشا خواهیم داشت ← درختِ پوشای کمینه کرانِ پایینی برای جوابِ TSP است. ← $|T| \leq |OPT|$
- هر یالِ T دو بار در $\mathcal{T}$ تکرار می‌شود ← $|\mathcal{T}| = 2.|T|$
- گامِ ۴ گره‌های تکراری را حذف می‌کند، از لمِ میان‌بر ← $|H| \leq |\mathcal{T}|$
- همچنین H یک دورِ همیلتونی از G است.

قضیه‌ی ۸.۳

الگوریتمِ ۷.۳ یک الگوریتمِ تقریبی با فاکتورِ ۲ برای TSP متریک است.

- با حذفِ یک یال از هر دورِ همیلتونی یک درختِ پوشا خواهیم داشت ← درختِ پوشای کمینه کرانِ پایینی برای جوابِ TSP است. ← $|T| \leq |OPT|$
- هر یالِ T دو بار در $\mathcal{T}$ تکرار می‌شود ← $|\mathcal{T}| = 2.|T|$
- گامِ ۴ گره‌های تکراری را حذف می‌کند، از لمِ میان‌بر ← $|H| \leq |\mathcal{T}|$
- همچنین H یک دورِ همیلتونی از G است.

قضیه‌ی ۸.۳

الگوریتمِ ۷.۳ یک الگوریتمِ تقریبی با فاکتورِ ۲ برای TSP متریک است.

- با حذفِ یک یال از هر دورِ همیلتونی یک درختِ پوشا خواهیم داشت ← درختِ پوشای کمینه کرانِ پایینی برای جوابِ TSP است. ← $|T| \leq |OPT|$
- هر یالِ T دو بار در $\mathcal{T}$ تکرار می‌شود ← $|\mathcal{T}| = 2.|T|$
- گامِ ۴ گره‌های تکراری را حذف می‌کند، از لمِ میان‌بر ← $|H| \leq |\mathcal{T}|$
- همچنین H یک دورِ همیلتونی از G است.

قضیه‌ی ۸.۳

الگوریتمِ ۷.۳ یک الگوریتمِ تقریبی با فاکتورِ ۲ برای TSP متریک است.

- با حذفِ یک یال از هر دورِ همیلتونی یک درختِ پوشا خواهیم داشت ← درختِ پوشای کمینه کرانِ پایینی برای جوابِ TSP است. ← $|T| \leq |OPT|$
- هر یالِ T دو بار در $\mathcal{T}$ تکرار می‌شود ← $|\mathcal{T}| = 2.|T|$
- گامِ ۴ گره‌های تکراری را حذف می‌کند، از لمِ میان‌بر ← $|H| \leq |\mathcal{T}|$
- همچنین H یک دورِ همیلتونی از G است.

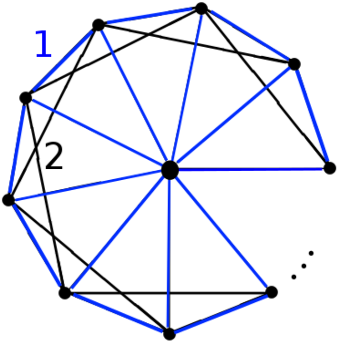
قضیه‌ی ۸.۳

الگوریتمِ ۷.۳ یک الگوریتمِ تقریبی با فاکتورِ ۲ برای *TSP* متریک است.

$$|H| \leq |\mathcal{T}| = 2.|T| \leq 2.|OPT|$$

$$|H| \leq 2.|OPT|$$

مثالِ ۹.۳



$$|H| = 2(n-2)$$

$$|OPT| = n$$

دقت کنید برای پیمایش اویلری یک گراف لازم نیست یال‌ها را دوبل کنیم، کافی است درجه‌ی همه‌ی رئوس را زوج کنیم.

اضافه‌کردنِ انطباقِ کامل همین کار را می‌کند.

الگوریتمِ ۱۰.۳

برای گرافِ متریکِ G:

۱. درختِ پوشای کمینه‌ی G را پیدا کنید $\leftarrow T$

۲. روی گره‌های درجه فردِ T یک انطباقِ کامل پیدا کرده و آن را به گراف اضافه کنید $\leftarrow G'$

۳. یک پیمایشِ اویلری از G' پیدا کنید $\leftarrow \mathcal{T}$

۴. دنباله‌ای از گره‌ها به ترتیبِ اولین حضور در $\mathcal{T}$ تشکیل دهید $\leftarrow H$

دقت کنید برای پیمایش اویلری یک گراف لازم نیست یال‌ها را دوبل کنیم،
کافی است درجه‌ی همه‌ی رئوس را زوج کنیم.
اضافه‌کردنِ انطباقِ کامل همین کار را می‌کند.

الگوریتمِ ۱۰.۳

برای گرافِ متریکِ G:

۱. درختِ پوشای کمینه‌ی G را پیدا کنید $\leftarrow T$
۲. روی گره‌های درجه فردِ T یک انطباقِ کامل پیدا کرده و آن را به گراف اضافه کنید $\leftarrow G'$
۳. یک پیمایشِ اویلری از G' پیدا کنید $\leftarrow \mathcal{T}$
۴. دنباله‌ای از گره‌ها به ترتیبِ اولین حضور در $\mathcal{T}$ تشکیل دهید $\leftarrow H$

مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد: الگوریتمِ با فاکتورِ ۳/۲

دقت کنید برای پیمایش اویلری یک گراف لازم نیست یال‌ها را دوبل کنیم،
کافی است درجه‌ی همه‌ی رئوس را زوج کنیم.
اضافه‌کردنِ انطباقِ کامل همین کار را می‌کند.

الگوریتمِ ۱۰.۳

برای گرافِ متریکِ G:

۱. درختِ پوشای کمینه‌ی G را پیدا کنید $\leftarrow T$
۲. روی گره‌های درجه فردِ T یک انطباقِ کامل پیدا کرده و آن را به گراف اضافه کنید $\leftarrow G'$
۳. یک پیمایشِ اویلری از G' پیدا کنید $\leftarrow \mathcal{T}$
۴. دنباله‌ای از گره‌ها به ترتیبِ اولین حضور در $\mathcal{T}$ تشکیل دهید $\leftarrow H$

لمِ ۱۱.۳

فرض کنید برای یک گرافِ دل‌خواه، τ جوابِ بهینه‌ی مسئله‌ی TSP، V' زیرمجموعه‌ای با اندازه‌ی زوج از گره‌ها و M انطباقِ کاملِ کمینه روی V' باشد. آن‌گاه $|M| \leq |\tau|/2$.

- با حذف گره‌های خارج از V'، τ را میان‌بر زده و آن را τ' بنامید $\leftarrow$ $|\tau'| \leq |\tau|$
- چون τ' دورِ ساده‌ای با طولِ زوج است، می‌توان آن را به ۲ انطباقِ کامل با $|V'|/2$ یال افراز کرد.
- از بینِ ۲ انطباقِ کاملِ τ' آن‌که وزنِ کم‌تر دارد را M' بنامید $\leftarrow$ $|M'| \leq 2.|\tau'|$

لمِ ۱۱.۳

فرض کنید برای یک گرافِ دل‌خواه، τ جوابِ بهینه‌ی مسئله‌ی TSP، V' زیرمجموعه‌ای با اندازه‌ی زوج از گره‌ها و M انطباقِ کاملِ کمینه روی V' باشد. آن‌گاه $|M| \leq |\tau|/2$.

- با حذف گره‌های خارج از V'، τ را میان‌بر زده و آن را τ' بنامید $\leftarrow$ $|\tau'| \leq |\tau|$
- چون τ' دورِ ساده‌ای با طولِ زوج است، می‌توان آن را به ۲ انطباقِ کامل با $|V'|/2$ یال افراز کرد.
- از بینِ ۲ انطباقِ کاملِ τ' آن‌که وزنِ کم‌تر دارد را M' بنامید $\leftarrow$ $|M'| \leq 2.|\tau'|$

لمِ ۱۱.۳

فرض کنید برای یک گرافِ دل‌خواه، τ جوابِ بهینه‌ی مسئله‌ی TSP، V' زیرمجموعه‌ای با اندازه‌ی زوج از گره‌ها و M انطباقِ کاملِ کمینه روی V' باشد. آن‌گاه $|M| \leq |\tau|/2$.

- با حذف گره‌های خارج از V'، τ را میان‌بر زده و آن را τ' بنامید $\leftarrow$ $|\tau'| \leq |\tau|$
- چون τ' دورِ ساده‌ای با طولِ زوج است، می‌توان آن را به ۲ انطباقِ کامل با $|V'|/2$ یال افراز کرد.
- از بینِ ۲ انطباقِ کاملِ τ' آن‌که وزنِ کم‌تر دارد را M' بنامید $\leftarrow$ $|M'| \leq 2.|\tau'|$

لمِ ۱۱.۳

فرض کنید برای یک گرافِ دل‌خواه، τ جوابِ بهینه‌ی مسئله‌ی TSP، V' زیرمجموعه‌ای با اندازه‌ی زوج از گره‌ها و M انطباقِ کاملِ کمینه روی V' باشد. آن‌گاه $|M| \leq |\tau|/2$.

- با حذف گره‌های خارج از V'، τ را میان‌بر زده و آن را τ' بنامید $\leftarrow |\tau'| \leq |\tau|$
- چون τ' دورِ ساده‌ای با طولِ زوج است، می‌توان آن را به ۲ انطباقِ کامل با $|V'|/2$ یال افراز کرد.
- از بینِ ۲ انطباقِ کاملِ τ' آن‌که وزنِ کم‌تر دارد را M' بنامید $\leftarrow |M'| \leq 2.|\tau'|$

لمِ ۱۱.۳

فرض کنید برای یک گرافِ دل‌خواه، τ جوابِ بهینه‌ی مسئله‌ی TSP، V' زیرمجموعه‌ای با اندازه‌ی زوج از گره‌ها و M انطباقِ کاملِ کمینه روی V' باشد. آن‌گاه $|M| \leq |\tau|/2$.

- از طرفی M انطباقِ کامل با وزنِ کمینه است $\leftarrow$ $|M| \leq |M'|$

$$|M| \leq |M'| \leq 2.|\tau'| \leq 2.|\tau|$$

$$|M| \leq 2.|\tau|$$

لمِ ۱۱.۳

فرض کنید برای یک گرافِ دل‌خواه، τ جوابِ بهینه‌ی مسئله‌ی TSP، V' زیرمجموعه‌ای با اندازه‌ی زوج از گره‌ها و M انطباقِ کاملِ کمینه روی V' باشد. آن‌گاه $|M| \leq |\tau|/2$.

- از طرفی M انطباقِ کامل با وزنِ کمینه است $\leftarrow$ $|M| \leq |M'|$

$$|M| \leq |M'| \leq 2.|\tau'| \leq 2.|\tau|$$

$$|M| \leq 2.|\tau|$$

مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد: الگوریتمِ با فاکتورِ ۳/۲

قضیه‌ی ۱۲.۳

الگوریتمِ ۱۰.۳ یک الگوریتمِ تقریبی با فاکتورِ ۳/۲ برای TSP متریک است.

- بر خلافِ الگوریتمِ قبل، یال‌های درختِ پوشای کمینه را دوبل نمی‌کنیم. ← $|\mathcal{T}| \le |T| + |M|$.
- چون تعدادِ گره‌های دارای درجه‌ی فرد، زوج است، می‌توانیم لمِ ۱۱.۳ را اعمال کنیم ← $\mathcal{T} \le |T| + |OPT|/2$

$$|H| \le |\mathcal{T}| = |T| + |M| \le |OPT| + |OPT|/2$$

$$|H| \le 3/2.|OPT|$$

مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد: الگوریتمِ با فاکتورِ ۳/۲

قضیه‌ی ۱۲.۳

الگوریتمِ ۱۰.۳ یک الگوریتمِ تقریبی با فاکتورِ ۳/۲ برای *TSP* متریک است.

- بر خلافِ الگوریتمِ قبل، یال‌های درختِ پوشای کمینه را دوبل نمی‌کنیم. ← $|\mathcal{T}| \le |T| + |M|$.
- چون تعدادِ گره‌های دارای درجه‌ی فرد، زوج است، می‌توانیم لمِ ۱۱.۳ را اعمال کنیم ← $\mathcal{T} \le |T| + |OPT|/2$

$$|H| \le |\mathcal{T}| = |T| + |M| \le |OPT| + |OPT|/2$$

$$|H| \le 3/2.|OPT|$$

مسئله‌ی فروشنده‌ی دوره‌گرد: الگوریتمِ با فاکتورِ ۳/۲

قضیه‌ی ۱۲.۳

الگوریتمِ ۱۰.۳ یک الگوریتمِ تقریبی با فاکتورِ ۳/۲ برای TSP متریک است.

- بر خلافِ الگوریتمِ قبل، یال‌های درختِ پوشای کمینه را دوبل نمی‌کنیم. ← $|\mathcal{T}| \leq |T| + |M|$.
- چون تعدادِ گره‌های دارای درجه‌ی فرد، زوج است، می‌توانیم لمِ ۱۱.۳ را اعمال کنیم ← $\mathcal{T} \leq |T| + |OPT|/2$

$$|H| \leq |\mathcal{T}| = |T| + |M| \leq |OPT| + |OPT|/2$$

$$|H| \leq 3/2.|OPT|$$

قضیه‌ی ۱۲.۳

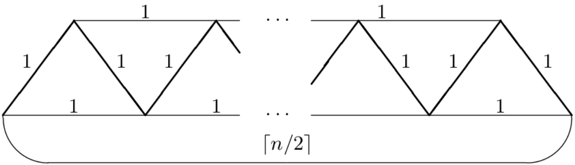
الگوریتمِ ۱۰.۳ یک الگوریتمِ تقریبی با فاکتورِ ۳/۲ برای TSP متریک است.

- بر خلافِ الگوریتمِ قبل، یال‌های درختِ پوشای کمینه را دوبل نمی‌کنیم.← $|\mathcal{T}| \leq |T| + |M|$.
- چون تعدادِ گره‌های دارای درجه‌ی فرد، زوج است، می‌توانیم لمِ ۱۱.۳ را اعمال کنیم ← $\mathcal{T} \leq |T| + |OPT|/2$

$$|H| \leq |\mathcal{T}| = |T| + |M| \leq |OPT| + |OPT|/2$$

$$|H| \leq 3/2.|OPT|$$

مثالِ ۱۳.۳



$$|H| = n - 1 + \lceil n/2 \rceil$$

$$|OPT| = n$$

نوآوری‌های اخیر