درختِ اشتاینر و فروشندهی دورهگرد

الگوریتمهای تقریبی

عليرضا محموديان



دانشکدهی ریاضی، آمار و علومِ کامپیوتر دانشگاهِ تهران

آبان ۱۳۹۷

عناوين

- درختِ اشتاینر
- تعریفِ مسئله
- ناورداییِ جواب تحتِ بستارِ متریک
 - الگوريتمِ فاكتور ٢
 - فروشندهی دورهگرد
 - تعریفِ مسئله
 - چرا تقریبپذیر نیست؟
- الگوريتمِ فاكتور ٢ براي حالتِ متريك
 - بهبود به فاکتور ۳/۲

مسئله<u>ی ۱.</u>۳

برای گرافِG=<V,E> و زیر مجموعهای از گرهها مانندِ $R\subseteq V$ ، درختی با وزنِ یالِ کمینه پیدا کنید که تمامِ R را بپوشاند. R را مجموعهی گرههای الزامی و R-V را مجموعهی گرههای اشتاینر مینامیم.

• مىتوان هر نمونهى غيرِ متريك را با حفظِ تقريب به متريك تبديل كرد. -> كافى است براى حالتِ متريك الگوريتمِ تقريبى ارائه دهيم.

مسئلهی ۱.۳

برای گرافِ G=<V,E> و زیر مجموعهای از گرهها مانندِ $R\subseteq V$ ، درختی با وزنِ یالِ کمینه پیدا کنید که تمامِ R را بپوشاند. R را مجموعهی گرههای الزامی و R-V را مجموعهی گرههای اشتاینر مینامیم.

• مىتوان هر نمونهى غير متريك را با حفظِ تقريب به متريك تبديل كرد.

مسئلهی ۱.۳

برای گرافِG=<V,E> و زیر مجموعهای از گرهها مانندِ $R\subseteq V$ ، درختی با وزنِ یالِ کمینه پیدا کنید که تمامِ R را بپوشاند. R را مجموعهی گرههای الزامی و R-V را مجموعهی گرههای اشتاینر مینامیم.

مىتوان هر نمونهى غيرِ متريك را با حفظِ تقريب به متريك تبديل كرد.
 → كافى است براى حالتِ متريك الگوريتمِ تقريبى ارائه دهيم.

רו

- برای گرافِ V,E>0، بستارِ متریکِ آن گرافی کامل مانندِ G=< V,E>0 است که وزن هر یالِ (u,v) در آن برابر با وزنِ مسیرِ با وزنِ کمینه بین U و U است.
 - به وضوح متریک است. $G' \bullet$
 - . نیست G' دارای وزن بیشتری در G' نیست \bullet
 - ست. G کران پایینی برای جواب بهینهی G کران G

- برای گرافِ V,E>0، بستارِ متریکِ آن گرافی کامل مانندِ G=< V,E>0 است که وزن هر یالِ (u,v) در آن برابر با وزنِ مسیرِ با وزنِ کمینه بینِ U و V است.
 - . به وضوح متریک استG'
 - . هیچ یالی از G دارای وزنِ بیشتری در G' نیست
 - جواب بهینهی G' کران پایینی برای جواب بهینهی G است. \leftrightarrow

- برای گرافِV,E>0، بستارِ متریکِ آن گرافی کامل مانندِ G=< V,E>0 است که وزن هر یالِ (u,v) در آن برابر با وزنِ مسیرِ با وزنِ کمینه بین U و U است.
 - .به وضوح متریک استG' •
 - . هیچ یالی از G دارای وزنِ بیشتری در G' نیست
 - ست. G کران پایینی برای جواب بهینهی G کران G

- برای گرافِ V,E>0، بستارِ متریکِ آن گرافی کامل مانندِ G=< V,E>0 است که وزن هر یالِ (u,v) در آن برابر با وزنِ مسیرِ با وزنِ کمینه بین U و U است.
 - .ست. متریک استG' •
 - . هیچ یالی از G دارای وزنِ بیشتری در G' نیست
 - .است. G کران پایینی برای جواب بهینهی G است \leftarrow

- G را در T' میتوان درختِ اشتاینر مانندِ T' در G' میتوان درختِ اشتاینرِ را در الحوری یافت که $|T| \leq |T'|$
- کافی است هر یال را با مسیرِ متناظرِ آن جایگزین کرده و دورهای احتمالی
 را حذف کنیم.

در نتیجه:

قضیهی ۲.۳

هر جوابِ تقریبیِ G' را میتوانیم به جوابی با همان فاکتورِ تقریب برای G تبدیل کنیم.

- G برای هر درختِ اشتاینر مانندِ T' در G'، میتوان درختِ اشتاینرِ T را در و برای یافت که $|T| \leq |T'|$.
- کافی است هر یال را با مسیرِ متناظرِ آن جایگزین کرده و دورهای احتمالی
 را حذف کنیم.

ار نتیجه:

قضیهی ۲.۳

هر جوابِ تقریبیِ G' را میتوانیم به جوابی با همان فاکتورِ تقریب برای G تبدیل کنیم.

- G برای هر درختِ اشتاینر مانندِ T در G'، میتوان درختِ اشتاینرِ T را در و اطوری یافت که $|T| \leq |T'|$.
- کافی است هر یال را با مسیرِ متناظرِ آن جایگزین کرده و دورهای احتمالی
 را حذف کنیم.

در نتیجه:

قضیهی ۲.۳

هر جوابِ تقریبیِ G' را میتوانیم به جوابی با همان فاکتورِ تقریب برای G تبدیل کنیم.

الگوريتم ١.١.٣

:G برای گرافِ متریکِ

درختِ کمینهی پوشا روی مجموعهی گرههای الزامی را پیدا کنید.

قضیهی ۳.۳

جوابِ الگوريتمِ ١.١.٣ حداكثر ٢ برابرِ جوابِ بهينه است.

الگوريتمِ ١.١.٣

:G برای گرافِ متریکِ

درختِ کمینهی پوشا روی مجموعهی گرههای الزامی را پیدا کنید.

قضیهی ۳.۳

جوابِ الگوريتمِ ١٠١٠٣ حداكثر ٢ برابرِ جوابِ بهينه است.

لمِ میانبر

برای هر دو گرهی u و v در یک گرافِ متریک، یالِ (u,v) کوتاهترین مسیر بین u و v است.

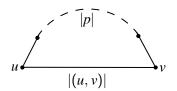


p برای هر مسیر بینِ u و v مانندِ u

וץ

لمِ میانبر

برای هر دو گرهی u و v در یک گرافِ متریک، یالِ (u,v) کوتاهترین مسیر بین u و v است.



p برای هر مسیر بینِ u و v مانندِ

قضیهی ۳.۳

جوابِ الگوريتمِ ۱.۱.۳ جوابی قابلِ قبول و حداکثر ۲ برابرِ جوابِ بهینه است.

- ا فرض کنید T جواب الگوریتم و OPT جواب بهینه باشد. lacktriangle
 - . درختی پوشا روی R و در نتیجه قابل قبول است T
- یالهای OPT را دوبل کنید و پیمایش اویلری آن را C بنامید.
 - $|C| = 2.|OPT| \leftarrow$
- را با میانبر زدن و حذف گرههای اشتاینر و گرههای الزامیِ تکراری به C و میلتونی مانندِ H تبدیل کنید.
 - $|H| \leq |C| \leftarrow$ لمِ ميانبر ullet

قضیهی ۳.۳

جوابِ الگوريتمِ ۱.۱.۳ جوابی قابلِ قبول و حداکثر ۲ برابرِ جوابِ بهینه است.

- الگوریتم و OPT جواب بهینه باشد. T خواب بهینه باشد.
 - . درختی پوشا روی R و در نتیجه قابل قبول است T
- . یالهای OPT را دوبل کنید و پیمایش اویلری آن را OPT
 - $|C| = 2.|OPT| \leftarrow$
- را با میانبر زدن و حذف گرههای اشتاینر و گرههای الزامیِ تکراری به یک دورِ همیلتونی مانندِ H تبدیل کنید.
 - $|H| \leq |C| \leftarrow$ لمِ ميانبر •

قضیهی ۳.۳

جوابِ الگوريتمِ ١.١.٣ جوابی قابلِ قبول و حداکثر ۲ برابرِ جوابِ بهينه است.

- الگوریتم و OPT جوابِ بهینه باشد. T فرض کنید T
 - . درختی پوشا روی R و در نتیجه قابل قبول است T
- یالهای OPT را دوبل کنید و پیمایش اویلری آن را C بنامید.
 - $|C| = 2.|OPT| \leftarrow$
- را با میانبر زدن و حذف گرههای اشتاینر و گرههای الزامیِ تکراری به C و میلتونی مانندِ H تبدیل کنید.
 - $|H| \leq |C| \leftarrow$ لم ميانبر •

قضیهی ۳.۳

جوابِ الگوريتمِ ۱.۱.۳ جوابی قابلِ قبول و حداکثر ۲ برابرِ جوابِ بهینه است.

- . فرض کنید T جواب الگوریتم و OPT جواب بهینه باشد.
 - . درختی پوشا روی R و در نتیجه قابل قبول است T •
- . بنامید و پیمایش اویلری آن را C بنامید و پیمایش اویلری آن را OPT
 - $|C| = 2.|OPT| \leftarrow$
- را با میانبر زدن و حذف گرههای اشتاینر و گرههای الزامیِ تکراری به یک دور همیلتونی مانندِ H تبدیل کنید.
 - $|H| \leq |C| \leftarrow$ لم ميانبرullet

قضیهی ۳.۳

جوابِ الگوريتمِ ۱.۱.۳ جوابی قابلِ قبول و حداکثر ۲ برابرِ جوابِ بهینه است.

- الگوریتم و OPT جواب بهینه باشد. T فرض کنید T جواب باشد.
 - . درختی پوشا روی R و در نتیجه قابل قبول است T
- . يالهای C را دوبل کنيد و پيمايش اويلري آن را OPT بناميد.
 - $|C| = 2.|OPT| \leftarrow$
- را با میانبر زدن و حذف گرههای اشتاینر و گرههای الزامیِ تکراری به C ullet یک دور همیلتونی مانندِ H تبدیل کنید.

 $|H| \leq |C| \leftarrow$ لمِ ميانبر • lacktriangleright

قضیهی ۳.۳

جوابِ الگوريتمِ ۱.۱.۳ جوابی قابلِ قبول و حداکثر ۲ برابرِ جوابِ بهینه است.

- . فرض کنید T جواب الگوریتم و OPT جواب بهینه باشد.
 - . درختی پوشا روی R و در نتیجه قابل قبول است T
- . يالهای C را دوبل کنيد و پيمايشِ اويلريِ آن را OPT بناميد.
 - $|C| = 2.|OPT| \leftarrow$
- را با میانبر زدن و حذف گرههای اشتاینر و گرههای الزامیِ تکراری به یک دورِ همیلتونی مانندِ H تبدیل کنید.
 - $|H| \leq |C| \leftarrow$ لمِ ميانبر \bullet

قضیهی ۳.۳

جوابِ الگوريتمِ ١.١.٣ جوابی قابلِ قبول و حداکثر ۲ برابرِ جوابِ بهينه است.

- و با حذفِ یک یال از دورِ H، یک درختِ پوشا روی R خواهیم داشت، که آن ا $|T'| \leq |H| \leftarrow T$ مینامیم.
 - $|T| \leq |T'| \leftarrow$ اما T کموزنترین درختِ پوشای R است

$$|T| \le |T'| \le |H| \le |C| = 2.|OPT|$$
$$|T| \le 2.|OPT|$$

Λ | ΥΙ

قضیهی ۳.۳

جوابِ الگوريتمِ ۱.۱.۳ جوابی قابلِ قبول و حداکثر ۲ برابرِ جوابِ بهینه است.

- و با حذفِ یک یال از دورِ H، یک درختِ پوشا روی R خواهیم داشت، که آن ارا $|T'| \leq |H| \leftarrow T$ مینامیم.
 - $|T| \leq |T'| \leftarrow$ اما T کموزنترین درختِ پوشای R است

$$|T| \le |T'| \le |H| \le |C| = 2.|OPT|$$
$$|T| \le 2.|OPT|$$

Λ h

قضیهی ۳<u>.</u>۳

جوابِ الگوريتمِ ۱.۱.۳ جوابی قابلِ قبول و حداکثر ۲ برابرِ جوابِ بهینه است.

- و با حذفِ یک یال از دورِ H، یک درختِ پوشا روی R خواهیم داشت، که آن ارا $|T'| \leq |H| \leftarrow T$ مینامیم.
 - $|T| \leq |T'| \leftarrow$ است R است درختِ پوشای T اما T

$$|T| \le |T'| \le |H| \le |C| = 2.|OPT|$$
$$|T| \le 2.|OPT|$$

Λ | Υ

قضیهی ۳.۳

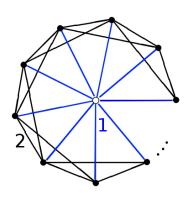
جواب الگوریتم ۱.۱.۳ جوابی قابل قبول و حداکثر ۲ برابر جواب بهینه

- با حذفِ یک یال از دور H، یک درختِ پوشا روی R خواهیم داشت، که آن $|T'| \leq |H| \leftarrow .$ را T' مینامیم
 - $|T| \leq |T'| \leftarrow$ است R است درختِ یوشای T

$$|T| \le |T'| \le |H| \le |C| = 2.|OPT|$$
$$|T| \le 2.|OPT|$$

مسئلهی درختِ اشتاینر: مثال از بدترین حالت

مثالِ ۴.۳



$$|T| = 2(n-1)$$
$$|OPT| = n$$

וץ

مسئلهي ۵.۳

پیداکردن دور همیلتونی با وزن کمینه

- در حالتِ کلی تقریبیذیر نیست.
 - \leftarrow تابع وزن متریک \rightarrow
- الگوريتم ١: فاكتور ٢
- الگوريتم ۲: بهبود به فاکتورِ ۳/۲

• | 1

مسئلهي ۵.۳

پیداکردن دور همیلتونی با وزن کمینه

- در حالتِ کلی تقریبپذیر نیست.
 - ullet تابع وزن متریک ullet
- الگوريتم ١: فاكتور ٢
- الگوریتم ۲: بهبود به فاکتور ۳/۲

مسئلهی ۵.۳

پیداکردن دور همیلتونی با وزن کمینه

- در حالتِ کلی تقریبپذیر نیست.
 - \leftarrow تابع وزنِ متریک \rightarrow
- الگوريتم ١: فاكتور ٢
- الگوريتم ۲: بهبود به فاکتورِ ۳/۲

• | 1

مسئلهی ۵.۳

پیداکردن دور همیلتونی با وزن کمینه

- در حالتِ کلی تقریبپذیر نیست.
 - \leftarrow تابع وزن متریک \rightarrow
- الگوريتم ١: فاكتور ٢
- الگوريتم ۲: بهبود به فاکتورِ ۳/۲

P1

مسئلهی فروشندهی دورهگرد: عدمِ تقریبپذیری

قضیهی ۴.۳

برای هر (n)-تقریب از TSP مانندِ $-\alpha(n)$ داریم: $+AMPATH \leq_{PTIME} \alpha(n)$ داریم:

- . فرض کنیم الگوریتم تقریبی با فاکتور $\alpha(n)$ برای TSP وجود دارد.
 - G برای یک نمونهی مسئلهی دور همیلتونی مانند G
 - به تمام یالهای G وزن ۱ بدهید. ullet
 - بین هر دو گرهی بدون یال، یالی با وزن n.lpha(n) اضافه کنید.
 - را روی گرافِ حاصل اجرا کنید. $\alpha(n)TSP$ •

Y

مسئلهی فروشندهی دورهگرد: عدمِ تقریبپذیری

قضیهی ۶.۳

برای هر (n)-تقریب از TSP مانندِ $\alpha(n)$ -تقریب از HAMPATH $\leq_{PTIME} \alpha(n)$ TSP

- . فرض کنیم الگوریتم تقریبی با فاکتور $\alpha(n)$ برای TSP وجود دارد
 - G برای یک نمونهی مسئلهی دور همیلتونی مانند G
 - به تمام یالهای G وزن ۱ بدهید. ullet
 - بین هر دو گرهی بدونِ یال، یالی با وزنِ n.lpha(n) اضافه کنید.
 - را روی گرافِ حاصل اجرا کنید. $\alpha(n)TSP$ •

Y

مسئلهی فروشندهی دورهگرد: عدمِ تقریبپذیری

قضیهی ۶.۳

برای هر (n)-تقریب از TSP مانندِ $-\alpha(n)$ داریم: $+AMPATH \leq_{PTIME} \alpha(n)TSP$

- . فرض کنیم الگوریتم تقریبی با فاکتور $\alpha(n)$ برای TSP وجود دارد
 - G برای یک نمونهی مسئلهی دورِ همیلتونی مانندِ ullet
 - . به تمامِ یالهای G وزن ۱ بدهید
 - بینِ هر دو گرهی بدونِ یال، یالی با وزنِ n.lpha(n) اضافه کنید.
 - را روی گرافِ حاصل اجرا کنید. $\alpha(n)TSP$ •

Y

قضیهی ۶.۳

برای هر (n)-تقریب از TSP مانندِ $\alpha(n)$ داریم: $HAMPATH \leq_{PTIME} \alpha(n)TSP$

- . فرض کنیم الگوریتمِ تقریبی با فاکتور $\alpha(n)$ برای TSP وجود دارد.
 - G برای یک نمونهی مسئلهی دور همیلتونی مانند ullet
 - . به تمامِ یالهای G وزن ۱ بدهید
 - بینِ هر دو گرهی بدونِ یال، یالی با وزنِ n.lpha(n) اضافه کنید.
 - را روی گرافِ حاصل اجرا کنید. $\alpha(n)TSP$ •

l l

قضیهی ۶.۳

برای هر (n)-تقریب از TSP مانندِ $\alpha(n)$ داریم: $HAMPATH \leq_{PTIME} \alpha(n) TSP$

- . فرض کنیم الگوریتمِ تقریبی با فاکتور $\alpha(n)$ برای TSP وجود دارد
 - G برای یک نمونهی مسئلهی دور همیلتونی مانند ullet
 - . به تمامِ یالهای G وزن ۱ بدهید
 - بینِ هر دو گرهی بدونِ یال، یالی با وزنِ n.lpha(n) اضافه کنید.
 - را روی گرافِ حاصل اجرا کنید. $\alpha(n)TSP$ •

Y

قضیهی ۶.۳

برای هر (n)-تقریب از TSP مانندِ $-\alpha(n)$ داریم: $+AMPATH \leq_{PTIME} \alpha(n)TSP$

اگر $G \leftarrow |\alpha(n)TSP| = n$ دور همیلتونی دارد. •

. اگر $G \leftarrow |\alpha(n)TSP| > n.\alpha(n)$ دور همیلتونی ندارد.

 $HAMPATH \leq_{PTIME} \alpha(n)TSP$

 \Rightarrow با فرض $P \neq NP$ ، $P \neq NP$ در حالتِ کلی تقریبپذیر نیست.

قضیهی ۶.۳

برای هر (n)-تقریب از TSP مانندِ $-\alpha(n)$ داریم: $+AMPATH \leq_{PTIME} \alpha(n)$ داریم:

- اگر $G \leftarrow |\alpha(n)TSP| = n$ دور همیلتونی دارد.
- . اگر $G \leftarrow |\alpha(n)TSP| > n.\alpha(n)$ دور همیلتونی ندارد.

 $HAMPATH \leq_{PTIME} \alpha(n)TSP$

با فرض $P \neq NP$ در حالتِ کلی تقریبیذیر نیست.

قضیهی ۶.۳

برای هر (n)-تقریب از TSP مانندِ $-\alpha(n)$ داریم: $+AMPATH \leq_{PTIME} \alpha(n)TSP$

- اگر $G \leftarrow |\alpha(n)TSP| = n$ دور همیلتونی دارد.
- . اگر $G \leftarrow |\alpha(n)TSP| > n.\alpha(n)$ دور همیلتونی ندارد.

 $HAMPATH \leq_{PTIME} \alpha(n)TSP$

با فرض $P \neq NP$ در حالتِ کلی تقریبیذیر نیست.

قضیهی ۶.۳

برای هر (n)-تقریب از TSP مانندِ $-\alpha(n)$ داریم: $+AMPATH \leq_{PTIME} \alpha(n)TSP$

- اگر $G \leftarrow |\alpha(n)TSP| = n$ دور همیلتونی دارد.
- . اگر $G \leftarrow |\alpha(n)TSP| > n.\alpha(n)$ دور همیلتونی ندارد.

 $HAMPATH \leq_{PTIME} \alpha(n)TSP$

. در حالتِ کلی تقریبپذیر نیست TSP ، $P \neq NP$ نیست خرف \leftarrow

الگوريتم ٧.٣

:G برای گرافِ متریکِ

 $T \leftarrow 1$ درختِ پوشای کمینهی G را پیدا کنید. ۱

 $G' \leftarrow \mathcal{L}$ را دوبل کنیدT را دوبل کنید

 $\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{G}'$ پیدا کنید. ۳. یک پیمایش اویلری از

۴. دنبالهای از گرهها به ترتیبِ اولین حضور در ${\mathcal T}$ تشکیل داده و

 $H \leftarrow$ اولین گرہ را در انتھا تکرار کنید

قضیهی ۸.۳

الگوریتمِ TSP یک الگوریتمِ تقریبی با فاکتورِ TSP متریک است.

- lacktriangle با حذفِ یک یال از هر دورِ همیلتونی یک درختِ پوشا خواهیم داشت $|T| \leq |OPT| \leftarrow TSP$ درختِ پوشای کمینه کرانِ پایینی برای جوابِ $|T| \leq |OPT|$
 - $|\mathcal{T}| = 2.|T| \leftarrow$ هر یال T دو بار در \mathcal{T} تکرار میشود
 - $|H| \leq |\mathcal{T}| \leftarrow$ گامِ ۴ گرههای تکراری را حذف میکند، از لمِ میان
بر \bullet
 - همچنین H یک دور همیلتونی از G است.

قضیهی ۸.۳

الگوریتمِ TSP یک الگوریتمِ تقریبی با فاکتورِ TSP متریک است.

- \leftarrow با حذفِ یک یال از هر دورِ همیلتونی یک درختِ پوشا خواهیم داشت $|T| \leq |OPT| \leftarrow TSP$ است. کمینه کرانِ پایینی برای جوابِ $|T| \leq |OPT|$
 - $|\mathcal{T}| = 2.|T| \leftarrow$ هر یال T دو بار در \mathcal{T} تکرار میشود
 - $|H| \leq |\mathcal{T}| \leftarrow گام ۴$ گرههای تکراری را حذف میکند، از لمِ میانبر $|\mathcal{T}|$
 - همچنین H یک دور همیلتونی از G است.

قضیهی ۸.۳

الگوریتمِ 7SP یک الگوریتمِ تقریبی با فاکتورِ 7SP متریک است.

- \leftarrow با حذفِ یک یال از هر دورِ همیلتونی یک درختِ پوشا خواهیم داشت $|T| \leq |OPT| \leftarrow TSP$ است. $|T| \leq |OPT| \leftarrow TSP$ هر یال |T| = 2.
 - $|H| \leq |\mathcal{T}| \leftarrow$ گام ۴ گرههای تکراری را حذف میکند، از لم میانبر $|\mathcal{T}|$
 - . همچنین H یک دور همیلتونی از G است.

قضیهی ۸.۳

الگوریتمِ 7SP یک الگوریتمِ تقریبی با فاکتورِ TSP متریک است.

- \leftarrow با حذفِ یک یال از هر دورِ همیلتونی یک درختِ پوشا خواهیم داشت با حذفِ یک یال از هر دورِ همیلتونی یک درختِ پوشای کمینه کرانِ پایینی برای جوابِ TSP است.
 - $|\mathcal{T}| = 2.|T| \leftarrow$ هر يالِ T دو بار در T تكرار مىشود
 - $|H| \leq |\mathcal{T}| \leftarrow$ گامِ ۴ گرههای تکراری را حذف میکند، از لمِ میانبر ullet
 - همچنین H یک دور همیلتونی از G است.

قضیهی ۸.۳

الگوریتمِ 7.7 یک الگوریتمِ تقریبی با فاکتورِ 7 برای 7SP متریک است.

- \leftarrow با حذفِ یک یال از هر دورِ همیلتونی یک درختِ پوشا خواهیم داشت با حذفِ یک یال از هر دورِ همیلتونی یک درختِ پوشای کمینه کرانِ پایینی برای جوابِ TSP است.
 - $|\mathcal{T}| = 2.|T| \leftarrow$ هر يال T دو بار در T تكرار مىشود
 - $|H| \leq |\mathcal{T}| \leftarrow$ گامِ ۴ گرههای تکراری را حذف میکند، از لمِ میانبر ullet
 - . همچنین H یک دور همیلتونی از G است

قضیهی ۸.۳

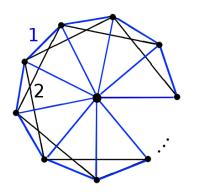
الگوریتمِ V. یک الگوریتمِ تقریبی با فاکتورِ ۲ برای TSP متریک است.

$$|H| \le |T| = 2.|T| \le 2.|OPT|$$

 $|H| \le 2.|OPT|$

مسئلهی فروشندهی دورهگرد: مثال از بدترین حالت

مثالِ ۹.۳



$$|H| = 2(n-2)$$
$$|OPT| = n$$

دقت کنید برای پیمایش اویلری یک گراف لازم نیست یالها را دوبل کنیم، کافی است درجهی همهی رئوس را زوج کنیم.

اضافهکردن انطباق کامل همین کار را میکند.

الگوريتم ١٠.٣

G برای گرافِ متریکِ

 $T \leftarrow G$ ا. درختِ پوشای کمینهی G را پیدا کنید.

۲. روی گرههای درجه فردِ T یک انطباقِ کامل پیدا کرده و آن را به \overline{z}

 $\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{S}$ پیمایش اویلری از G' پیدا کنید.

 $H \leftarrow \mathcal{L}$ دنبالهای از گرهها به ترتیب اولین حضور در \mathcal{T} تشکیل دهید.

دقت کنید برای پیمایش اویلری یک گراف لازم نیست یالها را دوبل کنیم، کافی است درجهی همهی رئوس را زوج کنیم. اضافهکردن انطباق کامل همین کار را میکند.

الگوريتم ١٠.٣

G برای گرافِ متریکِ

 $T \leftarrow C$ درختِ پوشای کمینهی G را پیدا کنید .۱

۲. روی گرههای درجه فردِ T یک انطباقِ کامل پیدا کرده و آن را به \mathbb{Z}

 $G' \leftarrow$ گراف اضافه کنید

 $\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{G}$ پیدا کنید G' بیدا کنید. ۳

 $H \leftarrow \mathcal{T}$ د دنبالهای از گرهها به ترتیب اولین حضور در \mathcal{T} تشکیل دهید.

1V h

دقت کنید برای پیمایش اویلری یک گراف لازم نیست یالها را دوبل کنیم، کافی است درجهی همهی رئوس را زوج کنیم. اضافهکردن انطباق کامل همین کار را میکند.

الگوريتم ١٠.٣

:G برای گرافِ متریکِ

 $T \leftarrow$ ا. درختِ پوشای کمینهی G را پیدا کنید ۱

۲. روی گرههای درجه فردِ T یک انطباقِ کامل پیدا کرده و آن را به گراف اضافه کنید $G' \leftarrow G'$

 $\mathcal{T} \leftarrow$ یک پیمایش اویلری از G' پیدا کنید. ۳

 $H \leftarrow \mathcal{T}$ دنبالهای از گرهها به ترتیب اولین حضور در \mathcal{T} تشکیل دهید.

لم ۱۱.۳

auفرض کنید برای یک گرافِ دلخواه، au جوابِ بهینهی مسئلهی TSP زیرمجموعهای با اندازهی زوج از گرهها و M انطباقِ کاملِ کمینه روی V' باشد. آنگاه | au|/2 ا| au|/2 باشد.

- $| au'| \leq | au| \leftarrow$ با حذف گرههای خارج از V' ، V را میانبر زده و آن را au' بنامید •
- چون au دورِ سادهای با طولِ زوج است، میتوان آن را به ۲ انطباقِ کامل با |V'|/2 یال افراز کرد.
- $|M'| \leq 2.| au'| \leftarrow$ انطباقِ کاملِ au' آنکه وزنِ کمتر دارد را M' بنامید

1.

auفرض کنید برای یک گرافِ دلخواه، au جوابِ بهینهی مسئلهی زیرمجموعهای با اندازهی زوج از گرهها و M انطباقِ کاملِ کمینه V^\prime $|M| \leq | au|/2$ روی V' باشد. آنگاه

- $| au'| \leq | au|$ با حذف گرههای خارج از V' ، au را میانبر زده و آن راau' بنامید با حذف
- چون au' دورِ سادهای با طول زوج است، میتوان آن را به ۲ انطباق کامل با au
- $|M'| \leq 2.| au'| \leftarrow$ انطباق کامل T' آنکه وزن کمتر دارد را T' بنامید

لمِ ۱۱.۳

TSP فرض کنید برای یک گرافِ دلخواه، au جوابِ بهینهی مسئلهی V' زیرمجموعهای با اندازهی زوج از گرهها و M انطباقِ کاملِ کمینه روی V' باشد. آنگاه | au|/2

- $| au'| \leq | au|$ با حذف گرههای خارج از V' ، V' را میانبر زده و آن را au' بنامید •
- چون au دورِ سادهای با طولِ زوج است، میتوان آن را به ۲ انطباقِ کامل با au'/2 یال افراز کرد.

لم ۱۱.۳

TSP فرض کنید برای یک گرافِ دلخواه، au جوابِ بهینهی مسئلهی V' زیرمجموعهای با اندازهی زوج از گرهها و M انطباقِ کاملِ کمینه روی V' باشد. آنگاه | au|/2

- $| au'| \leq | au|$ با حذف گرههای خارج از V' ، T' را میانبر زده و آن را T' بنامید •
- چون au دورِ سادهای با طولِ زوج است، میتوان آن را به ۲ انطباقِ کامل با au'/2 یال افراز کرد.
- $|M'| \leq 2.| au'| \leftarrow$ انطباقِ کاملِ au' آنکه وزنِ کمتر دارد را M' بنامید کاملِ •

Λ

لمِ ۱۱.۳

فرض کنید برای یک گرافِ دلخواه، au جوابِ بهینهی مسئلهی TSP فرض کنید برای یک گرافِ دلخواه، V' زیرمجموعهای با اندازهی زوج از گرهها و M انطباقِ کاملِ کمینه روی V' باشد. آنگاه | au|/2

 $|M| \leq |M'| \leftarrow$ انطباق کامل با وزن کمینه است M انطباق کامل با وزن

$$|M| \le |M'| \le 2.|\tau'| \le 2.|\tau$$
$$|M| \le 2.|\tau|$$

لمِ ۱۱.۳

فرض کنید برای یک گرافِ دلخواه، au جوابِ بهینهی مسئلهی TSP فرض کنید برای یک گرافِ دلخواه، V' زیرمجموعهای با اندازهی زوج از گرهها و M انطباقِ کاملِ کمینه روی V' باشد. آنگاه | au|/2

 $|M| \leq |M'| \leftarrow$ انطباق کامل با وزن کمینه است M انطباق ا

$$|M| \le |M'| \le 2.|\tau'| \le 2.|\tau|$$
$$|M| \le 2.|\tau|$$

قضیهی ۱۲.۳

الگوریتمِ ۱۰.۳ یک الگوریتمِ تقریبی با فاکتورِ ۳/۲ برای TSP متریک است.

- ullet بر خلافِ الگوریتمِ قبل، یالهای درختِ پوشای کمینه را دوبل نمیکنیم. $|\mathcal{T}| \leq |T| + |M|$
 - و چون تعدادِ گرههای دارای درجهی فرد، زوج است، میتوانیم لمِ ۱۱.۳ را عمال کنیم $\mathcal{T} \leq |T| + |OPT|/2 \leftarrow$

$$|H| \le |T| = |T| + |M| \le |OPT| + |OPT|/2$$

 $|H| \le 3/2.|OPT|$

قضیهی ۱۲.۳

الگوریتم ۱۰.۳ یک الگوریتم تقریبی با فاکتور ۳/۲ برای TSP متریک

- بر خلافِ الگوريتمِ قبل، يالهاي درختِ پوشاي كمينه را دوبل نميكنيم.→ $|T| \leq |T| + |M|$
 - چون تعدادِ گرههای دارای درجهی فرد، زوج است، میتوانیم لم ۱۱.۳ را

$$|H| \le |T| = |T| + |M| \le |OPT| + |OPT|/2$$

 $|H| \le 3/2.|OPT|$

قضیهی ۱۲.۳

الگوریتمِ ۱۰.۳ یک الگوریتمِ تقریبی با فاکتورِ ۳/۲ برای TSP متریک است.

- ullet بر خلافِ الگوریتمِ قبل، یالهای درختِ پوشای کمینه را دوبل نمیکنیم. $|\mathcal{T}| \leq |T| + |M|$
 - چون تعدادِ گرههای دارای درجهی فرد، زوج است، میتوانیم لمِ ۱۱.۳ را عمال کنیم $\mathcal{T} \leq |T| + |OPT|/2 \leftarrow$ اعمال کنیم

$$|H| \le |T| = |T| + |M| \le |OPT| + |OPT|/2$$

 $|H| \le 3/2 |OPT|$

قضیهی ۲۲.۳

الگوریتم ۱۰.۳ یک الگوریتم تقریبی با فاکتور ۳/۲ برای TSP متریک

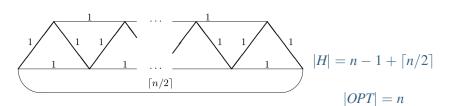
- بر خلافِ الگوريتمِ قبل، يالهاي درختِ پوشاي كمينه را دوبل نميكنيم.→ $|T| \leq |T| + |M|$
 - چون تعدادِ گرههای دارای درجهی فرد، زوج است، میتوانیم لم ۱۱.۳ را $\mathcal{T} \leq |T| + |OPT|/2 \leftarrow$ اعمال کنیم

$$|H| \le |T| = |T| + |M| \le |OPT| + |OPT|/2$$

 $|H| \le 3/2 \cdot |OPT|$

مسئلهی فروشندهی دورهگرد: مثال از بدترین حالت

مثال ۱۳.۳



نوآوریهای اخیر

