UNIVERSIDAD DE SAN ANDRÉS – Introducción al Razonamiento Matemático
Otoño 2020

Práctica 8: Continuidad.

1. Para cada una de las siguientes funciones, calcular el dominio y determinar si son continuas o no. En el caso que no sean continuas, hallar todos los puntos donde es discontinua y, de ser posible, redefinir la función para que resulte continua.

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-4} & \text{si} \quad x > 2 \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3x+2}{x+1} & \text{si} \quad x \neq -1 \\ 1 & \text{si} \quad x = -1 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ \dfrac{x^2-x}{x^2+x} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

(f) $f(x) = \dfrac{\cos(x)-1}{x \cdot (x-1)}$.

2. Para cada una de las siguientes funciones, hallar todos los valores de a y b de manera tal que la función resulte continua en todo su dominio.

(a) $f(x) = \begin{cases} 17x - a + 4 & \text{si} \quad x < 0 \\ 6b + 3x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 2ax & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax + 3 - 3cos(x)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ \dfrac{x^2+x}{x-2} & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si} \quad x < -1 \\ 2 - \frac{9}{x-a} & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$

3. Para cada una de las siguientes funciones $f\colon Dom(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:, hallar el dominio y los puntos de discontinuidad de f. Hallar $C_0(f)$ y, utilizando el corolario del Teorema de Bolzano, calcular $C_+(f)$ y $C_-(f)$.

(a) $f(x) = (x^2-5)(x^2+2x+1)$.

(b) $f(x) = e^{x+1}(x+4)$.

(c) $f(x) = \dfrac{50}{1+x^2} + x^2 - 14$.

(d) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2} - \dfrac{2}{(x-3)^3}$.

(e) $f(x) = -5x^{\frac{1}{3}} + 6x^{-\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{3}}$.

(f) $f(x) = \dfrac{\dfrac{x+3}{2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1}}{x+3}$.

(g) $f(x) = -5x(3+5x^2)^{-\frac{3}{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3+5x^2}}$.

(h) $f(x) = \dfrac{\ln(\frac{x+5}{3}) \cdot (x-4)}{1 - e^{x-1}}$.

4. Probar que:

   (a) $f(x) = x^3 + x - 1$ tiene al menos una raz real en el intervalo $(0, 1)$.

   (b) La ecuación $x\cos(\frac{x}{2}) + 15\text{sen}(x) = 15$ tiene, al menos, una solución en $\mathbb{R}$.

   (c) La ecuación $3ln(x) = x$ tiene, al menos, una solución en $\mathbb{R}$.

   (d) $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x - 4$ tiene, al menos, una raíz real.

   (e) Los gráficos de $f(x) = e^x$ y $g(x) = x + 2$ se cortan para algún $x \geq 0$.

   (f) Todo polinomio de grado impar tiene, al menos, una raíz real.

5. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-4}{4} & \text{si} \quad x \leq \frac{1}{2} \\ \\ e^{-x^2} & \text{si} \quad x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

   Probar que $f(0) < 0$, $f(1) > 0$ y que no existe $x \in (0, 1)$ tal que $f(x) = 0$. ¿Contradice esto el Teorema de Bolzano? Explicar.

6. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2x - 1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \\ 2 + x^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

   Probar que $-3 \in Im(f)$.