

## Segunda Entrega

Maria Paula Gaviria e Isabella Martínez

Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, Universidad del Rosario

29 de octubre de 2019

### 1 Introducción: Problema

El conflicto comercial entre Estados Unidos y la República Popular China es una delicada situación que afecta no sólo a dichos países sino también a gran cantidad de naciones que dependen económicamente de estas potencias. Este desacuerdo empezó en marzo de 2018, cuando el presidente estadounidense Donald Trump impuso aranceles argumentando "prácticas desleales de comercio" y el robo de propiedad intelectual.

Así pues, la situación económica de Estados Unidos y China ha cambiado drásticamente desde entonces. Recientemente decidieron cortar tratos comerciales entre ellos, al menos directamente. Por lo tanto, se pretende analizar el mercado de cada uno de ellos antes y después de dicha decisión mediante la teoría de grafos y el uso de conceptos de redes de flujo.

### 2 Marco Teórico

Para el proyecto se utilizarán los siguientes conceptos de la teoría de grafos:

#### 2.1 Distancias en Grafos

**Circunferencia:** longitud del ciclo más largo.

**Cintura:** longitud del ciclo más pequeño.

**Distancia:** Si  $G$  tiene un  $u, v$ -camino, la distancia de  $u$  a  $v$ , denotada  $d(u, v)$  es la longitud mínima de un  $u, v$ -camino. Si  $G$  no tiene dicho camino,  $d(u, v) = \infty$ .

**Diámetro:** denotado por  $diam(G)$ , es la  $\max(d(u, v))$  para todo  $u, v \in V(G)$ .

**Radio:** denotado por  $rad(G)$ , es la  $\min(d(u, v))$  para todo  $u, v \in V(G)$ .

#### 2.2 Redes de Flujo

Una red es un grafo dirigido  $G$  con capacidad  $c(e)$  no negativa en cada arista  $e \in E(G)$  y dos vértices específicos  $s$  y  $t$  denominados vértice fuente ( $s$ ) y vértice sumidero ( $t$ ). Una red de flujo simple siempre tiene una fuente y un sumidero.

El **flujo** es una función que asigna a cada arista  $e$  un valor  $f(e)$ . Se escribe  $f^+(v)$  al flujo total de las aristas que salen de  $v$  y  $f^-(v)$  al flujo total de las aristas que entran a  $v$ .

Un flujo  $f$  es **factible** si satisface:

**Restricción de capacidad:**  $0 \leq f(e) \leq c(e)$ ,  $\forall e \in E(G)$ .

**Restricción de conservación:**  $f^+(v) = f^-(v)$ ,  $\forall v \in V(G)$ .

El **valor** de un flujo  $f$ , denotado  $val(f)$  es el flujo neto  $f^-(t) - f^+(t)$  del sumidero. A su vez, el **flujo máximo** es un flujo factible de valor máximo.

Si además de capacidad las aristas poseen también costo  $a(e)$  no negativo en cada arista  $e \in E(G)$ , se define el costo de mandar el flujo  $f$  por una arista  $(u, v)$  como  $f(u, v) \cdot a(u, v)$ . El problema de **flujo a costo mínimo** es entonces minimizar el costo total del flujo sobre todas las aristas, es decir:

$$\sum_{(u,v) \in E(G)} f(u, v) \cdot a(u, v)$$

con las siguientes restricciones:

**Restricción de capacidad:**  $f(u, v) \leq c(u, v)$ .

**Antisimetría:**  $f(u, v) = -f(v, u)$ .

**Conservación de flujo:**  $\sum_{w \in V(G)} f(u, w) = 0$  para todo  $u \neq s, t$ .

**Flujo requerido:**  $\sum_{w \in V(G)} f(s, w) = d$  y  $\sum_{w \in V(G)} f(w, t) = d$ . Siendo  $d$  el flujo que se necesita mandar de la fuente al sumidero.

### 3 Solución Teórica

Para el análisis se necesita implementar dos redes de flujo: una con Estados Unidos como fuente y China como sumidero, y viceversa, de la manera propuesta en la Fig. 1. Esto con el fin de considerar el flujo máximo y el flujo a costo mínimo que podría enviar Estados Unidos a China sin su conexión directa por un lado, y el que podría enviar China a Estados Unidos por el otro.

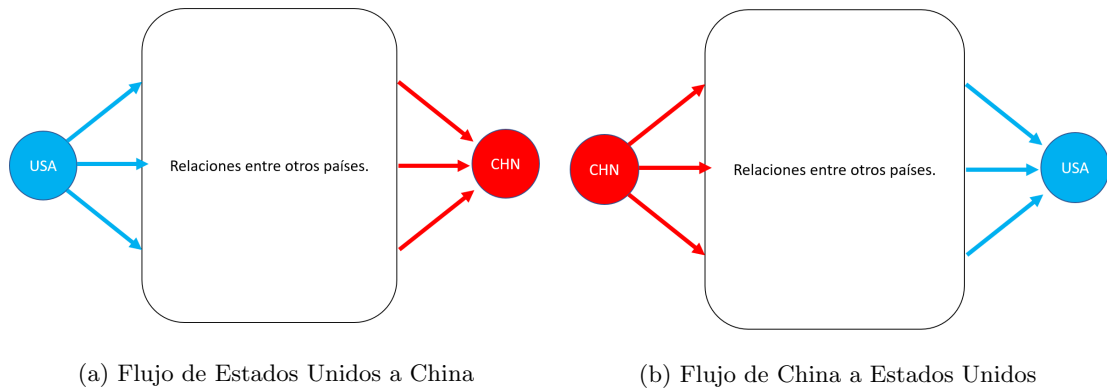


Figure 1: Ejemplificación de las redes de flujo propuestas.

Con dichos grafos se estudiarán conceptos de distancias en las redes de mercado propuestas.

Los datos utilizados para el modelo fueron obtenidos del *Observatorio de Complejidad Económica* [2], conocido por sus siglas *OEC*, relacionados con importaciones y exportaciones de los países que forman parte de la red para el año 2017.

Para seleccionar los países que forman parte de la red se escogieron aquellos que representan el 80% de la actividad económica de Estados Unidos y China para importaciones y exportaciones, y de ellos se eligieron los que presentaban en común. Estos fueron:

Código	País	USA IMP.	USA EXP.	CHN IMP.	CHN EXP.
AUS	Australia	0.4%	1.64%	5.52%	1.95%
BRA	Brasil	1.16%	1.63%	3.12%	1.12%
CAN	Canadá	12.71%	11.95%	1.2%	2.07%
DEU	Alemania	5.18%	4.92%	6.18%	4.53%
ESP	España	0.65%	1.19%	0.48%	1.18%
FRA	Francia	1.67%	2.98%	1.44%	2.19%
GBR	Reino Unido	2.09%	3.72%	1.43%	2.44%
HKG	Hong Kong	0.19%	2.44%	1.06%	10.61%
ITA	Italia	2.08%	1.33%	1.06%	1.32%
JPN	Japón	5.79%	5.35%	8.85%	6.51%
KOR	Corea del Sur	3.21%	3.89%	9.74%	4.07%
MEX	México	14.21%	14.5%	0.58%	2.16%
MYS	Malasia	1.53%	1.17%	2.76%	1.58%
NLD	Países Bajos	0.76%	2.81%	0.77%	1.82%
SGP	Singapur	0.77%	1.94%	3.27%	1.77%

Además, China representa el 22.05% y el 10.65% de las importaciones y exportaciones de Estados Unidos respectivamente, y Estados Unidos representa el 8.66% y el 19.77% de las importaciones y exportaciones de China respectivamente. Note que los porcentajes en la tabla anterior son respecto al total de todos los países, no solo de los 15 escogidos (17 contando a Estados Unidos y a China).

## 4 Implementación Computacional

Para implementar las correspondientes redes de flujo se utilizó el lenguaje de programación `python` y las librerías `NetworkX` y `Matplotlib`. Como los datos de *OECD* están en dólares, los mismos se convirtieron a millones de dólares para una comprensión mejor.

Los valores de exportaciones e importaciones entre países que se poseen se redondearon y se utilizaron como las correspondientes capacidades para las redes de flujo. La red de flujo que tiene a Estados Unidos como fuente y a China como sumidero utiliza los valores de exportaciones estadounidenses e importaciones chinas, y la red que usa a China como fuente y a Estados Unidos como sumidero usa los valores de exportaciones chinas e importaciones estadounidenses.

Como la conexión directa entre Estados Unidos y China se rompió en el modelo, se utilizó ese valor de exportación de Estados Unidos para aumentar la capacidad de las conexiones entre la fuente Estados Unidos y los otros países equitativamente. De manera análoga se realizó con el valor de las exportaciones de China a Estados Unidos. En el caso de importaciones de Estados Unidos a China y de China a Estados Unidos se llevó a cabo un procedimiento similar con el sumidero China y el sumidero Estados Unidos respectivamente.

Para las redes de flujo que se implementarán en el problema de flujo a costo mínimo se manejará una escala de costos en el intervalo  $[1, 10]$ . Para distribuir estos valores tomamos la distancia directa entre países (como un transporte aéreo), y dividimos el intervalo en 10 subintervalos, de manera que si una distancia cae en el primer intervalo su costo será de 1, y así sucesivamente.

Se utilizaron los algoritmos y la representación visual proporcionada por `NetworkX` y `Matplotlib`

para el análisis.

## References

- [1] Douglas B. West. *Introduction to Graph Theory, 2nd Edition*. Pearson, 2000.
- [2] Observatorio de Complejidad Económica. Available at: <https://oec.world/en/>