МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО”

Факультет прикладної математики
Кафедра програмного забезпечення комп’ютерних систем

Лабораторна робота № 1

з дисципліни “Чисельні методи обчислення”
тема “Нелінійні рівняння з одним невідомим”

Виконав
студент 3 курсу
групи КП-01
Беліцький Олександр Сергійович
(*прізвище, ім’я, по батькові*)

Перевірив
“____” “____________” 20___ р.
викладач
Онай Микола Володимирович
(*прізвище, ім’я, по батькові*)

варіант № 2

Київ 2022

Постановка задачі

За списком другий варіант:

№ за списком викладача	Варіант №
1	4
2	19

19	24	1
	16	3, 8

Рівняння:

24	$x^3 - \cos^2 x - 5x = 3$	$(-\infty; \infty)$

№	Коефіцієнти алгебраїчного рівняння $a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0x = 0$							
	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
16	31	–210	–449	850	916	–809	–139	25

Методи:

№	Метод
0	Метод поділу навпіл
1	Метод хорд
2	Метод Ньютона
3	Спрощений метод Ньютона
4	Дискретний метод Ньютона
5	Метод Стефенсена
6	Метод січних
7	Комбінований метод (метод хорд-дотичних)
8	Метод простих ітерацій

1. Розробити програму на мові програмування C# у середовищі розробки Visual Studio, яка буде реалізовувати метод Лобачевськогорозв'язання алгебраїчних рівнянь і дозволяти уточнювати (проміжок локалізації задаються користувачем з клавіатури) корені будь-яких нелінійних рівнянь методами, що задані за варіантом. Розроблена програма повинна виводити на екран всі проміжні результати.

2. За допомогою розробленої програми з п.1 розв'язати задані за варіантом рівняння на заданому проміжку з точністю $\varepsilon \le 10^{-7}$.

3. Знайти верхню та нижню границю додатних і від'ємних коренів заданого за варіантом алгебраїчного рівняння.

4. За допомогою розробленої програми з п.1, знайти корені, заданого за варіантом алгебраїчного рівняння, методом Лобачевського та уточнити отримані корені будь-яким методом розв'язання нелінійних рівнянь.

5. Задані за варіантом, рівняння розв'язати у Wolfram Alpha.

Математичне підгрунття

Метод хорд

Можливо досягти кращих результатів збіжності, якщо відрізок $[a;b]$ поділити точкою c на частини не навпіл, а пропорційно величинам ординат $f(b)$ та $f(a)$ графіка даної функції $f(x)$:

$$c = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}. \tag{1.4}$$

Метод Ньютона (метод дотичних)

Ітераційний процес метода Ньютона визначається наступною формулою

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \tag{1.5}$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots$ та вважається, що на елементах послідовності (x_k) перша похідна даної функції не дорівнює нулю.

Теорема 1.4. *Нехай на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ має першу (не дорівнює нулю) та другу похідні сталого знаку та нехай*

$$f(a)f(b) < 0.$$

Тоді якщо точка x_0 обрана на $[a;b]$ таким чином, що

$$f(x_0)f''(x_0) > 0, \tag{1.6}$$

то послідовність (x_k), що починається з x_0 та визначається методом Ньютона (1.5), монотонно збігається до кореня $\xi \in (a;b)$ рівняння (1.1).

Модифікації метода Ньютона

Найпростішим способом спрощення метода Ньютона є використання одного й того ж крокового множника $\frac{1}{f'(x_0)}$, тобто виконання обчислення за формулою

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}, \tag{1.7}$$

Метод простих ітерацій

Розглянемо рівняння

$$x = \varphi(x). \tag{1.12}$$

Функцію $\varphi(x)$ будемо вважати неперервною в області осі *Ox*, що досліджується.

Знаходження коренів рівнянь виду (1.12) називається *задачею про нерухому точку*.

Визначення 1.1. *Неперервна функція* $\varphi(x)$ *називається стискальною (функцією стиснення) на відрізку* $[a, b]$*, якщо*

1) $\varphi(x) \in [a, b] \quad \forall x \in [a, b]$;

2) $\exists\, q \in (0, 1): \quad |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \le q|x_2 - x_1| \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b]$.

В тому випадку коли на деякому проміжку $[a, b]$ функція $\varphi(x)$ задовольняє умовам стиснення, що зафіксовані визначенням 1.1 рівняння $x = \varphi(x)$ має й при тому єдиний корінь $\xi \in [a, b]$.

Теорема 1.5. *Нехай функція* $\varphi(x)$ *визначена та диференційовна на відрізку* $[a,b]$. *Тоді якщо виконуються умови:*

1) $\varphi(x)\in[a,b] \quad \forall x\in[a,b]$,

2) $\exists q : |\varphi'(x)| \le q < 1 \quad \forall x\in(a,b)$,

то рівняння $x=\varphi(x)$ *має й притому єдиний на* $[a,b]$ *корінь* ξ*; до кореня* ξ *збігається визначена методом простих ітерацій* $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ *послідовність, починаючи з будь-якого* $x_0\in[a,b]$*; при цьому є справедливими оцінки похибки* $\forall k\in\mathbb{N}$*:*

$$|\xi - x_k| \le \frac{q}{1-q}|x_k - x_{k-1}|, \tag{1.13}$$

$$|\xi - x_k| \le \frac{q^k}{1-q}|x_1 - x_0|. \tag{1.14}$$

Отриману апостеріорну оцінку (1.13) можна використовувати на практиці для отримання критерія завершення ітераційного процесу.

Апріорну оцінку (1.14) можна використовувати для обчислення необхідної кількості ітерацій, що є достатньою для отримання кореня з заданою точністю ξ.

В загальному випадку перехід від (1.1) до (1.12) здійснюється таким чином: множать ліву та праву частину рівняння (1.1) на відмінний від нуля параметр $-\lambda$ та до обох частин додають x; в результаті отримують рівнозначне (1.1) рівняння

$$x = x - \lambda f(x), \tag{1.15}$$

яке має вигляд (1.12), де $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$. Далі параметр λ підбирається таким, щоб похідна $\varphi'(x) = 1 - \lambda f'(x)$ в потрібній області була малою за модулем, а якщо потрібно, то й мала певний сталий знак.

Конкретні рекомендації по фіксуванню λ в (1.15) можуть бути дані у випадку, коли, наприклад, відомі оцінки зверху та знизу для похідної початкової функції $f(x)$.

Одним з найбільш ефективних методів знаходження *всіх або майже всіх* коренів алгебраїчного рівняння, як дійсних так і комплексних, є *метод Лобачевського*, запропонований в 1834 р. Цей метод називають також *методом Лобачевського-Греффе* або *методом Данддена* на честь швейцарського математика Греффе та французького математика Данддена, що були також причетні до однієї з перших версій цього методу.

Розглянемо випадок коли алгебраїчне рівняння має *різні за абсолютною величиною дійсні корені*.

Нехай дано рівняння

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0, \tag{1.22}$$

про корені якого відомо, що всі вони дійсні та задовольняють умову

$$|x_1| \gg |x_2| \gg \ldots \gg |x_n|. \tag{1.23}$$

Розглянемо процес кадрування коренів. Запишемо рівняння (1.22) у такому вигляді:

$$a_n \cdot \sum_{i=1}^{n} (x - x_i) = 0 \tag{1.24}$$

Рівняння, корені якого протилежні за знаком кореням рівняння (1.24) буде мати вигляд:

$$a_n \cdot \sum_{i=1}^{n} (x + x_i) = 0 \tag{1.25}$$

Перемножуючи ці два рівняння, отримаємо:

$$a_n^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x^2 - x_i^2\right) = 0. \tag{1.26}$$

Позначимо коефіцієнти останнього рівняння, як b_k $\left(k=\overline{0..n}\right)$, тобто коефіцієнт b_k буде при x^{2k} та отримується з коефіцієнтів початкового рівняння наступним чином:

$$b_k = a_k^2 + 2\cdot\sum_{j=1}^{n-k}(-1)^j a_{k-j}a_{k+j}\,,\quad k=\overline{0..n}\,. \tag{1.27}$$

Нехай ми виконали p раз процес квадрування коренів та отримали рівняння

$$\sum_{i=0}^{n} b_i y^i = 0 \tag{1.28}$$

Коренями цього рівняння є числа $y_k = -x_k^{2^p}$ $\left(k=\overline{1..n}\right)$, звідки отримуємо:

$$x_k = \pm\sqrt[2^p]{-y_k} = \sqrt[2^p]{\frac{b_{n+k-2}}{b_{n+k-1}}}\quad\left(k=\overline{1..n}\right). \tag{1.29}$$

Виконаємо квадрування коренів рівняння (1.28), нехай після цього отримано рівняння:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i z^i = 0\,, \tag{1.30}$$

для якого виконуються співвідношення

$$c_k = b_k^2\,,\quad k=\overline{0..n}\,, \tag{1.31}$$

та є очевидним що:

$$|\,x_k\,| = \sqrt[2^{p+1}]{\frac{c_{n+k-2}}{c_{n+k-1}}} = \sqrt[2^p]{\frac{b_{n+k-2}}{b_{n+k-1}}}\,. \tag{1.32}$$

Таким чином, при виконанні умови (1.31) ми не можемо збільшити точність обчислення коренів.

Тому *процес квадрування продовжується поки подвійні добутки не перестануть впливати на перші головні члени коефіцієнтів перетвореного рівняння.*

Якщо корені потрібно знайти з більшою точністю, то після обчислення їх наближених значень за методом Лобачевського доцільно провести їх уточнення, використовуючи загальні методи розв'язання нелінійних рівнянь. Застосування цих методів для уточнення вимагає меншого об'єму обчислень та дозволяє уникнути труднощів роботи з дуже великими числами, з якими приходиться зустрічатися в методі Лобачевського.

Таблиці

Рівняння № 24

Метод	C#	Wolfram
Хорд	x ≈ -1.84880 x ≈ -0.77039 x ≈ 2.29642	x ≈ -1.84880 x ≈ -0.77037 x ≈ 2.29644

Рівняння № 16

Метод	C#	Wolfram
Ньютона	x ≈ -2.05775 x ≈ -1.24284 x ≈ -0.25527 x ≈ 0.11482 x ≈ 0.79315	x ≈ -2.05773 x ≈ -1.43201 x ≈ -0.25528 x ≈ 0.11481 x ≈ 0.79315
МПІ	x ≈ -2.008997 x ≈ -1.43200 x ≈ -0.25422 x ≈ 0.11336 x ≈ 0.77356	x ≈ -2.05773 x ≈ -1.43201 x ≈ -0.25528 x ≈ 0.11481 x ≈ 0.79315

У алгебраїчному рівнянні процес знаходження верхньої та нижньої границі відбувається за допомогою підстановки відповідних значень a і b та вибору максимального значення для верхньої границі та мінімального значення для нижньої границі.

Висновки

В даній лабораторній роботі було розглянено методи наближеного розв'язання нелінійних рівнянь. Було вивчено та використано на практиці метод хорд, метод Ньютона та метод простих ітерацій. Досліджено точність кожного з методів та складність програмної реалізації.

Лабораторну роботу було виконано в середовищі розробки Visual Studio Code на мові програмування C#.