



RAPPORT DE STAGE

Simulation numérique d'écoulements autour d'obstacle

Auteur :
Belkacem Anis OUKIL

Encadrant :
Eric SULTAN

3 septembre 2018

Résumé

En mécanique des fluides la résolution exacte des équations est impossible à l'exception de géométries particulièrement simples ce qui explique le recours à l'outil numérique. Lors de ce stage nous procédons à l'étude d'un écoulement 2D autour d'obstacles solides. Plus précisément nous allons développer un code numérique basé sur la méthode des éléments de frontière et le tester à l'aide de solutions analytiques.

Table des matières

1	Écoulement potentiel : traitement par une équation intégrale	2
1.1	Introduction	2
1.1.1	Géométrie et équations générales	2
1.1.2	Limite purement inertielle	3
1.1.3	Solution classique en l'absence de paroi ($H \rightarrow \infty$)	3
1.2	Construction d'une solution particulière de l'équation de Laplace	4
1.2.1	Solution en potentiel simple couche	5
1.2.2	Condition de non-pénétration : méthode des images	5
1.3	Condition sur le cylindre et reformulation du problème en une équation intégrale 1D	7
1.3.1	Discrétisation de l'équation intégrale : méthode Nyström	8
1.4	Organisation du code	9
2	Simulations numériques et résultats	10
2.1	Validation du code pour le problème sans parois	10
2.1.1	Solution par la méthode des éléments de frontière	10
2.1.1.1	Écoulement autour du cercle	10
2.1.1.2	Écoulement autour de l'image	11
2.2	Obstacle proche de la paroi	12
2.2.1	Estimation des sources par décomposition LU	13
2.2.2	Test de convergence en maillage	15
2.2.3	Vitesse de glissement le long de la paroi	18
3	Potentiel de vitesse et fonction de courant	20
3.1	Potentiel de vitesse	20
3.2	Fonction de courant	22
	Annexes	25

Chapitre 1

Écoulement potentiel : traitement par une équation intégrale

Notre objectif sera d'étudier numériquement un écoulement potentiel, en présence d'un obstacle et d'une paroi indéformable. Après un rappel de la solution classique pour le problème en l'absence de parois nous reformuleront le problème aux valeurs limites 2D en une équation intégrale 1D. A cette fin nous construirons une solution particulière satisfaisant toutes les conditions aux limites sauf celle sur l'obstacle. C'est cette dernière condition qui permet d'obtenir l'équation intégrale.

1.1 Introduction

1.1.1 Géométrie et équations générales

Les equations de *Navier-Stokes* ainsi que l'équation de continuité régissant un écoulement de fluide incompressible sont, sous forme adimensionnée :

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \underline{v} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (1.2)$$

Avec \underline{v} le champ de vitesse, P le champ de pression, ρ la masse volumique et μ la viscosité.

Plaçons nous dans une configuration 2D décrite dans le schéma général si dessous :

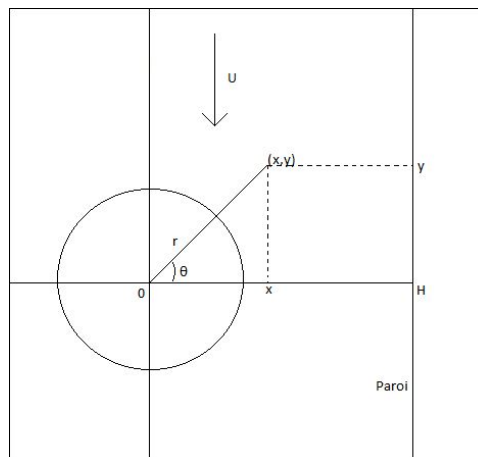


FIGURE 1.1 – Géométrie du problème : U est la vitesse lorsque $y \rightarrow \infty$, et H la distance entre le centre du cylindre et la paroi

Dans toute la suite nous utiliserons de manière interchangeable les coordonnées polaires et cartésiennes.

1.1.2 Limite purement inertielle

L'étude d'un écoulement stationnaire engendré par un cercle indéformable au sein d'un fluide parfait (non visqueux) dont le champ de vitesse est irrotationnel implique un régime d'écoulement purement inertiel $Re \rightarrow \infty$. Nous ne tiendrons pas compte des effets de la viscosité même dans les régions où on sait qu'elle domine (près des surfaces solides). Dans ce cas il existe un potentiel de vitesse ϕ tel que :

$$\underline{v} = \underline{\nabla}\phi$$

D'après ces hypothèses et (1.1), (1.2) :

$$\begin{aligned} \nabla \left[P + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 \right] &= 0 \\ \Delta \phi &= 0 \end{aligned}$$

où la première équation n'est autre que la relation de Bernoulli et la seconde l'équation de Laplace.

1.1.3 Solution classique en l'absence de paroi ($H \rightarrow \infty$)

Pour un problème sans paroi, le fluide doit satisfaire deux conditions limites, un écoulement uniforme loin de l'obstacle soit $\phi = -Uy$, ainsi que la condition non pénétration à la surface de l'obstacle soit $\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$. Ce qui nous amène à la solution exacte classique d'un problème sans paroi de l'écoulement potentiel, que nous pouvons trouver dans n'importe quel cours de mécanique des fluides :

$$\phi(r, \theta) = U_{\infty} r \sin(\theta) \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right)$$

Avec U_{∞} la vitesse à l'infini loin du cylindre et R son rayon. [3]

Ci-dessous l'affichage des iso-courbes du potentiel de vitesse :

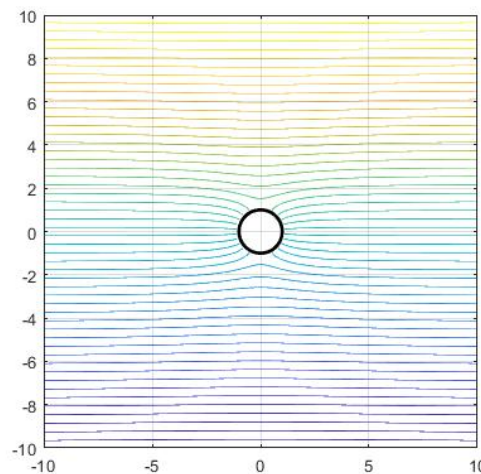


FIGURE 1.2 – Lignes de niveau du potentiel de vitesse

Ainsi que les iso-courbes de la fonction de courant :

$$\psi(r, \theta) = U_{\infty} r \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right)$$

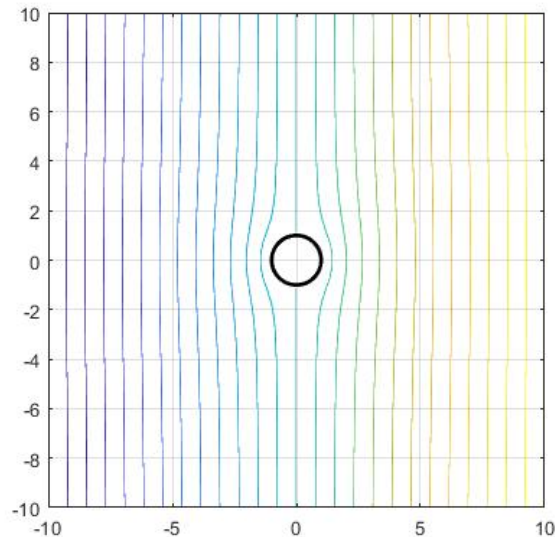


FIGURE 1.3 – Lignes de niveau de la fonction de courant par la solution exacte

Dans le chapitre 2 nous pourrons comparer ces résultats à ceux de la solution du problème sans paroi obtenus avec la méthode des éléments de frontière que nous verrons dans les paragraphes suivants, ce qui permettra de valider celle ci pour la suite du problème.

1.2 Construction d'une solution particulière de l'équation de Laplace

La méthode des éléments de frontière [4] est une méthode numérique de réduction de dimension. Cette méthode s'applique à tout type de problèmes mais est plus avantageuse pour des problèmes à frontière infinis ou demi infinis. Elle permet de ne discrétiser que la frontière de l'obstacle qui nous intéresse, en l'occurrence ici, le contour de notre cylindre.

Nous utiliserons l'approche indirecte de cette méthode, qui consiste à disposer des sources ponctuelles inconnues autour du corps étudié, telles que les conditions aux limites imposées sur la frontière soient vérifiées. Ces sources n'ont pas d'interprétations physiques, et ne servent qu'au calcul du potentiel de vitesse autour du cylindre et près de la paroi dans ce domaine qui lui-même peut mener au champ de vitesse de l'écoulement.

Le problème complet avec conditions limites de Neumann est tel que :

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = f \end{cases}$$

où f est la donnée de frontière (supposée connue).

Notons que, selon l'incompressibilité du fluide :

$$\int_{\partial D} \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}} dl = \int_{\partial D} f dl = 0 \quad (1.3)$$

avec ∂D la frontière du cylindre, et dl un élément de longueur. Ce résultat constitue la condition de solvabilité du problème de Neumann.

1.2.1 Solution en potentiel simple couche

Dans la suite nous allons rechercher la solution du problème de Neumann sous la forme :

$$\varphi(x, y) = Uy + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sigma(\theta) K(x, y, \theta) d\theta}_{\text{potentiel simple couche}} \quad (1.4)$$

Avec $\sigma(\theta)$ les sources inconnues le long du cercle, et $K(x, y, \theta)$ le noyau solution de $\Delta \varphi$ tel que :

$$K(x, y, \theta) = \log(\sqrt{(x - R\cos(\theta))^2 + (y - R\sin(\theta))^2}) \quad (1.5)$$

x et y étant les coordonnées de ce que l'on appelle un point de champ, et θ l'angle de la position du point de source, $\sigma(\theta)$, sur le cercle de rayon $r = R$. Cette solution est continue en R mais sa dérivée ne l'est pas, ce qui rend certaines évaluations délicates numériquement (calcul de la pression sur le cylindre).

1.2.2 Condition de non-pénétration : méthode des images

L'équation (1.13) ne concerne que le problème sans paroi. Afin d'introduire une paroi ainsi que la condition de non pénétration du fluide à travers celle ci, il faut procéder à la méthode des images. Cette méthode consiste à rajouter la contribution d'un cercle image identique et symétrique au cercle réel par rapport à la paroi et soumis au même écoulement.

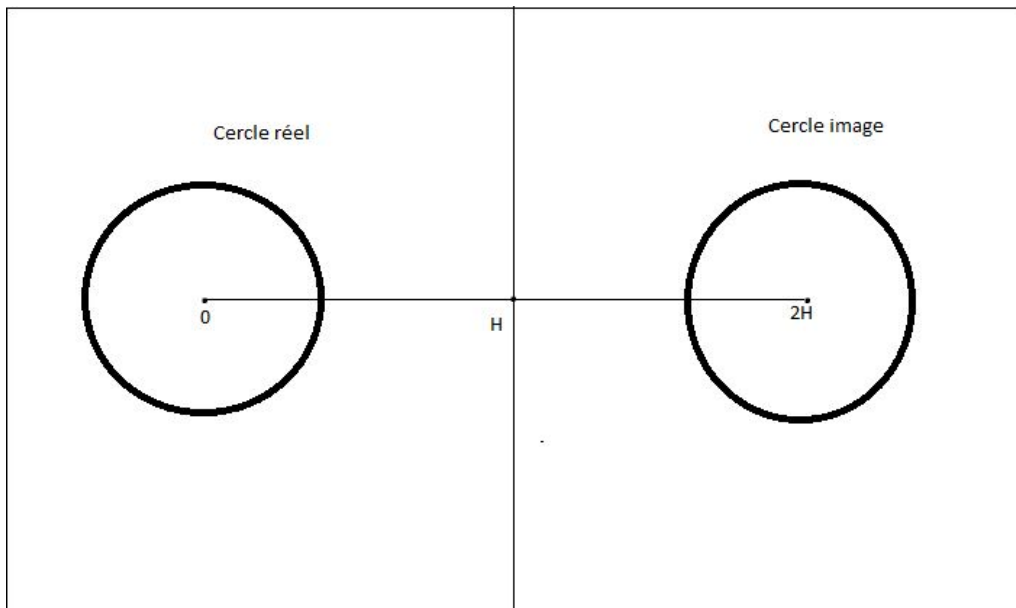


FIGURE 1.4 – Méthode des images pour un problème semi-infini

Pour imposer la condition de non-pénétration il suffit que le noyau soit tel que :

$$\left. \frac{\partial K(x, y, \theta)}{\partial x} \right|_{x=H} = 0$$

Une seule image suffit pour satisfaire cette condition. A titre d'information, pour un problème au "quart" infini, soit pour une paroi verticale orthogonale à une paroi horizontale, il est nécessaire de créer 3 images [1] :

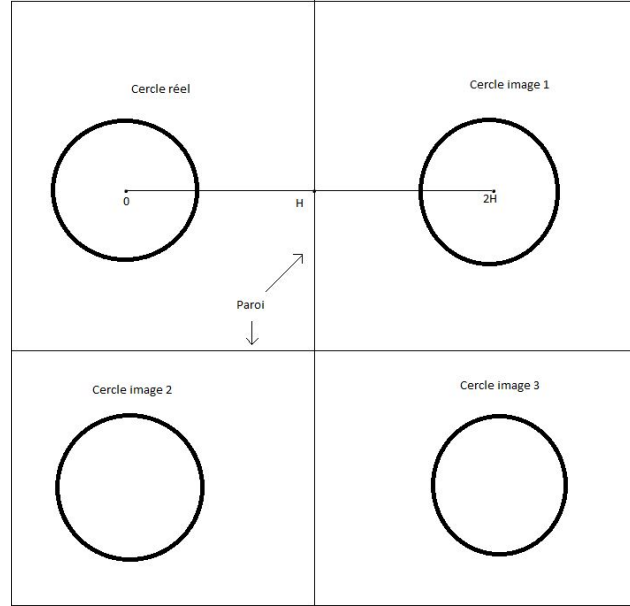


FIGURE 1.5 – Méthode des images pour un problème à deux parois orthogonales

Aussi pour un problème à parois parallèles, une infinité d'image est nécessaire pour satisfaire les conditions limites de non pénétration des parois.

Ainsi grâce à la méthode des images nous pouvons imposer la condition de non-pénétration en ajoutant au noyau :

$$K'(x, y, \theta) = \log(\sqrt{(x + R\cos(\theta) - 2H)^2 + (y - R\sin(\theta))^2}) \quad (1.6)$$

Finalement nous recherchons la solution sous la forme :

$$\varphi(x, y) = Uy + \int_{-\pi}^{\pi} \sigma(\theta) [K(x, y, \theta) + K'(x, y, \theta)] d\theta \quad (1.7)$$

On note que le noyau est impair $x - H \rightarrow -(x - H)$ et donc pour des raisons de symétrie, nous devons avoir

$$\varphi(x, -y) = -\varphi(x, y) \quad (1.8)$$

Ce qui impose

$$\sigma(-\theta) = -\sigma(\theta) \quad (1.9)$$

Dans la suite nous utiliserons la condition limite de non pénétration du fluide à travers l'obstacle pour estimer les sources grâce à une reformulation du problème qui nous permettra de procéder à des calculs en une dimension. Une fois les sources obtenues toutes les autres propriétés sont facilement déterminables.

1.3 Condition sur le cylindre et reformulation du problème en une équation intégrale 1D

Considérons à présent θ l'angle du point de champ et θ' l'angle du point source.

La condition de non pénétration à travers le cercle est :

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (1.10)$$

Appliquons cette condition limite à l'équation (1.16)

La dérivée normale du noyau sur le cylindre est :

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} K(rcos\theta, rsin\theta, Rcos\theta', Rsin\theta') \right|_{r=R} = \frac{1}{2R} \quad (1.11)$$

Pour la contribution de l'image,

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \log \sqrt{(x + Rcos\theta' - 2H)^2 + (y - Rsin\theta')^2} \right|_{r=R} = \frac{1}{r} \frac{x(x + Rcos\theta' - 2H) + y(y - Rsin\theta')}{(x + Rcos\theta' - 2H)^2 + (y - Rsin\theta')^2} \quad (1.12)$$

Du fait de la discontinuité de la dérivée du potentiel simple couche nous avons la formule de saut suivante :

$$\lim_{r \rightarrow R} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{2\pi} \sigma(\theta') K(rcos\theta, rsin\theta, Rcos\theta', Rsin\theta') d\theta' = \frac{\pi}{R} \sigma(\theta) + \frac{1}{2R} \int_0^{2\pi} \sigma(\theta') d\theta' + \frac{1}{2R} \quad (1.13)$$

On retiendra donc :

$$U sin\theta = \frac{\pi}{R} \sigma(\theta) + \int_{-\pi}^{\pi} \sigma(\theta') \left[\frac{cos\theta(Rcos\theta + Rcos\theta' - 2H) + Rsin\theta(sin\theta - sin\theta')}{(Rcos\theta + Rcos\theta' - 2H)^2 + R^2(sin\theta - sin\theta')^2} + \frac{1}{2R} \right] d\theta' \quad (1.14)$$

Si $H \rightarrow \infty$, l'intégrale dans l'équation ci-dessus disparaît, et nous obtenons explicitement la source en tant que fonction de θ :

$$\sigma(\theta) = \frac{UR}{\pi} sin\theta \quad (1.15)$$

en reportant cette expression dans (1.7) nous retrouvons la solution classique en l'absence de paroi.

Ce type d'équation est connu sous le nom d'équations de Fredholm du second type. Le traitement numérique de telles équations est connu pour être aisé, au contraire des équations du premier type.

Ainsi l'inconnue de cette équation est bien la source σ

En intégrant l'équation intégrale (1.14) entre $\theta = -\pi$ et $\theta = \pi$, la condition de solvabilité permet d'écrire :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sigma(\theta) d\theta = 0$$

par conséquent nous pouvons ignorer le $\frac{1}{2R}$ qui est dans l'équation (1.14)

1.3.1 Discrétisation de l'équation intégrale : méthode Nyström

Afin de procéder aux calculs numériques il faut bien sûr discrétiser l'équation (1.23). Il existe plusieurs méthodes de discrétisation, nous optons pour une méthode de discrétisation à pas constant, les trapèzes composites. Voici donc la formule de quadrature utilisée :

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta \sim \frac{2\pi}{P} \sum_{j=1}^P f\left(\frac{2\pi}{P} j\right) \quad (1.16)$$

Dans une formule de quadrature comme celle ci il existe une erreur de quadrature, qui tend vers 0 avec l'augmentation de N , nous négligeons donc cette erreur dans nos calculs. Nous choisissons $P = 2N$, P étant le nombre de points sur toute la frontière, et N le nombre de points sur le demi cercle. Ce choix est fait de la sorte car nous ne travaillerons que sur $[0, \pi]$ (plus de détails dans les paragraphes suivants), ainsi nous discrétisons la frontière du cercle par $\theta_j = \frac{\pi}{N} j$ ($\sigma_j = \sigma(\theta_j)$) ce qui implique $\begin{cases} x_j = R \cos \theta_j \\ y_j = R \sin \theta_j \end{cases}$, l'équation (1.14) devient donc :

$$-UR \sin \theta_i \sim \pi \sigma_i + \frac{\pi}{N} \sum_{j=1}^{2N} \sigma_j \frac{x_i(x_i + x_j - 2H) + y_i(y_i - y_j)}{(x_i + x_j - 2H)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (1.17)$$

Cette expression prend en compte la somme de $j = 1 \rightarrow j = 2N$. Nous choisissons de travailler sur $[0, \pi]$ car les calculs sur la seconde partie du cercle sont identiques, ceci implique une somme ne dépassant pas le N ème terme. Ainsi il faut tronquer les termes de $j = N + 1 \rightarrow j = 2N$.

$$\sum_{j=N+1}^{2N} \sigma_j \frac{x_i(x_i + x_j - 2H) + y_i(y_i - y_j)}{(x_i + x_j - 2H)^2 + (y_i - y_j)^2} = \sum_{j=0}^{N-1} \sigma_{2N-j} \frac{x_i(x_i + x_{2N-j} - 2H) + y_i(y_i - y_{2N-j})}{(x_i + x_{2N-j} - 2H)^2 + (y_i - y_{2N-j})^2} \quad (1.18)$$

Or $\sigma_{2N-j} = -\sigma_j$, $x_{2N-j} = x_j$ et $y_{2N-j} = -y_j$, ce qui donne :

$$\sum_{j=N+1}^{2N} \sigma_j \frac{x_i(x_i + x_j - 2H) + y_i(y_i - y_j)}{(x_i + x_j - 2H)^2 + (y_i - y_j)^2} = - \sum_{j=1}^N \sigma_j \frac{x_i(x_i + x_j - 2H) + y_i(y_i + y_j)}{(x_i + x_j - 2H)^2 + (y_i + y_j)^2} \quad (1.19)$$

Notre expression finale qui nous permettra de calculer les sources σ_j est :

$$-UR \sin \theta_i \sim \pi \sigma_i + \frac{\pi}{N} \sum_{j=1}^N \left[\frac{x_i(x_i + x_j - 2H) + y_i(y_i - y_j)}{(x_i + x_j - 2H)^2 + (y_i - y_j)^2} - \frac{x_i(x_i + x_j - 2H) + y_i(y_i + y_j)}{(x_i + x_j - 2H)^2 + (y_i + y_j)^2} \right] \sigma_j \quad (1.20)$$

Cette équation est linéaire, la résolution donne les valeurs des σ_j . En discrétisant (1.7) à l'aide la formule des trapèzes, nous pourrons calculer une approximation du potentiel.

1.4 Organisation du code

Afin de mettre en place le problème numériquement et de pouvoir le résoudre, c'est-à-dire estimer la source pour pouvoir calculer les propriétés de ce type d'écoulements, nous optons, sous MATLAB, de procéder à une programmation orientée objet. Il faut donc créer une classe qui possède certaines propriétés qu'on pourra modifier à notre guise, et qui fera appel à certaines fonctions (méthodes) de calcul. Ce type de programmation facilite la maintenance et l'évolution du code, celui ci devient plus structuré et malléable qu'en programmation impérative.

Voici donc l'organisation du "squelette" de notre classe :

- Les propriétés telles que la vitesse de l'écoulement U , la distance du cercle à la paroi H , le nombre de nœuds N sur la frontière du cylindre, le nombre de nœuds hors du cylindre, le nombre de points horizontaux et verticaux, le rayon du cercle r ... etc.
- Un constructeur, démarche essentielle et propre à la programmation orientée objet qui nous permet justement de construire l'objet avec des propriétés données.
- Des fonctions telles que le calcul du noyau, du gradient du noyau nécessaire au calcul des sources, ainsi le calcul et l'affichage du potentiel de vitesse (ou de la fonction de courant) ou encore de la vitesse de glissement et d'autres fonctions dont nous expliciteront les détails dans les chapitres suivants.

Le code en entier est présent en Annexe pour plus de détail.

Ainsi, après une présentation du problème et de la méthode générale utilisée nous pouvons passer au vif du sujet qui est la simulation numérique de cet écoulement. Comme mentionné au début, le but est de mettre en place un code permettant d'analyser l'écoulement de fluide parfait autour d'un obstacle près d'une paroi, d'optimiser ce modèle, soit en temps de calcul, en facilité d'utilisation, ou en pertinence des fonctions de calcul utilisées. Il faut néanmoins ne pas oublier que ce modèle néglige les effets de la viscosité.

Dans les chapitres suivants, nous analyserons les résultats de nos fonctions de calcul par des approches différentes pour certains et nous conclurons quant à leur efficacité, leurs avantages ou leur défauts, et des comparaisons seront faites pour valider telle ou telle portion de code et passer à la suite.

Chapitre 2

Simulations numériques et résultats

2.1 Validation du code pour le problème sans parois

Commençons par mettre de côté la contribution de l'image qui nous permet d'avoir la condition de non pénétration de la paroi, et comparons le résultat de cette partie du code écrite grâce la méthode des éléments de frontière avec un code rédigé au préalable qui simule le même écoulement avec une solution exacte que nous pouvons trouvé dans la littérature.

2.1.1 Solution par la méthode des éléments de frontière

2.1.1.1 Écoulement autour du cercle

Afin de pouvoir valider cette méthode, nous comparerons le calcul du potentiel (les graphes des iso-courbes) au potentiel de la solution exacte.

Pour cela, utilisons l'équation (1.7) en supprimant les deux termes faisant intervenir la contribution de l'image, soit les termes possédant le paramètre H . Concernant la source $\sigma(\theta)$, loin de la paroi, soit pour un problème infini $\sigma(\theta) = \sin(\theta)$. Voici donc le résultat de ce calcul :

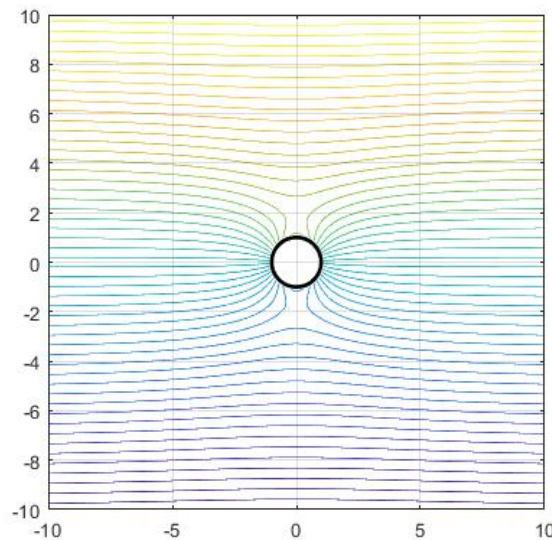


FIGURE 2.1 – Potentiel de vitesse pour le problème sans paroi par la méthode des éléments de frontière

Cette figure est très proche de la Figure 1.2, le code menant à l'estimation du potentiel de vitesse par cette méthode pour le cylindre peut donc être validé et utilisé pour la suite.

2.1.1.2 Écoulement autour de l'image

Le cylindre image, utilisé pour mettre en place la paroi, peut être considéré exactement comme le cylindre réel, c'est à dire que l'écoulement doit être le même autour des deux cylindres. Pour vérifier cela il suffit de supprimer cette fois ci, dans l'équation (1.7), les termes du cylindre réel ainsi que tous les H . Ce qui nous donne donc :

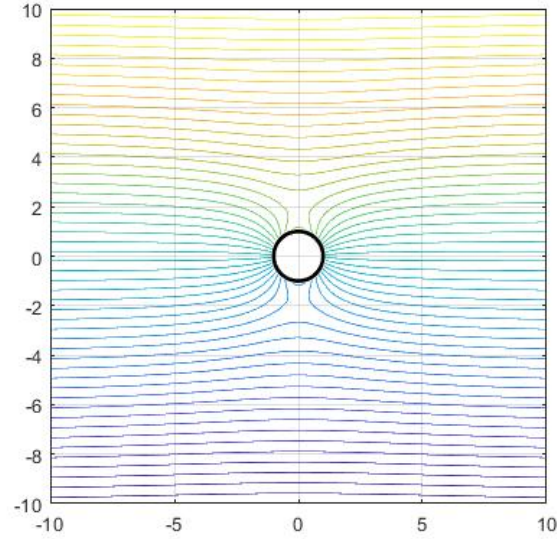


FIGURE 2.2 – Potentiel de vitesse pour le problème sans parois par la méthode des éléments de frontière du cylindre image

Les deux figures précédentes sont identiques, et se rapprochent énormément du tracé de la solution exacte. Le code est donc bien validé.

Loin de la paroi, le problème est considéré comme infini, voici donc un tracé de l'écoulement autour de l'obstacle loin de la paroi visible, l'équation (1.32) est cette fois ci complète :

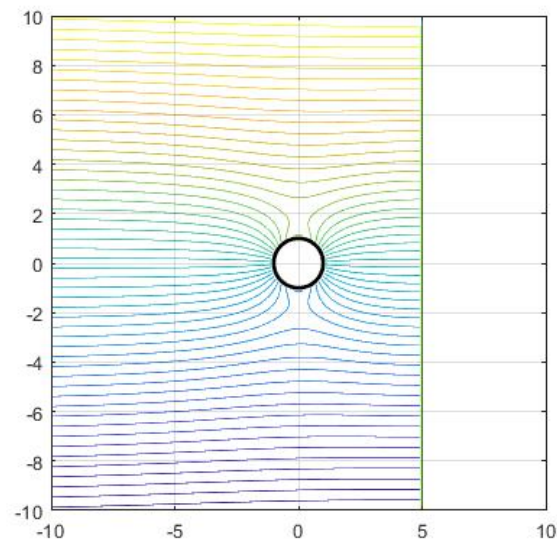


FIGURE 2.3 – Potentiel de vitesse de l'écoulement autour de l'obstacle à $H=5$ avec paroi

Aussi à titre de vérification, nous affichons la fonction de courant de l'écoulement :

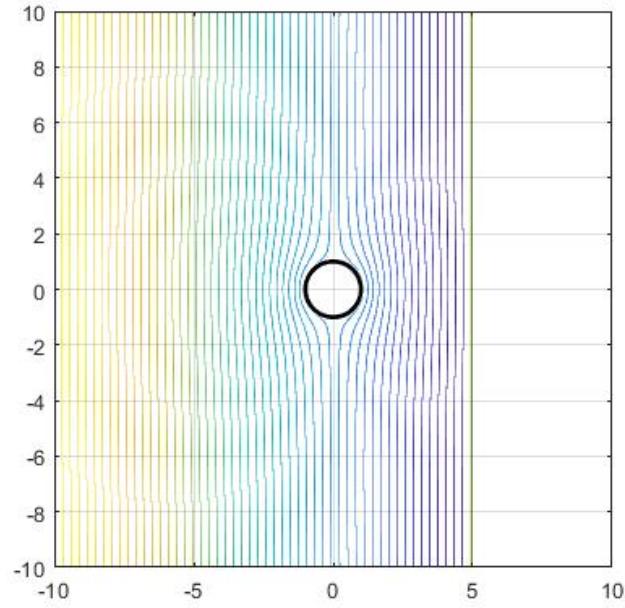


FIGURE 2.4 – Fonction de courant de l'écoulement autour de l'obstacle à $H=5$ avec paroi

2.2 Obstacle proche de la paroi

Comme dit dans les paragraphes précédents, sans parois, ou loin de la paroi la source se comporte tel que $\sigma(\theta) = \sin(\theta)$:

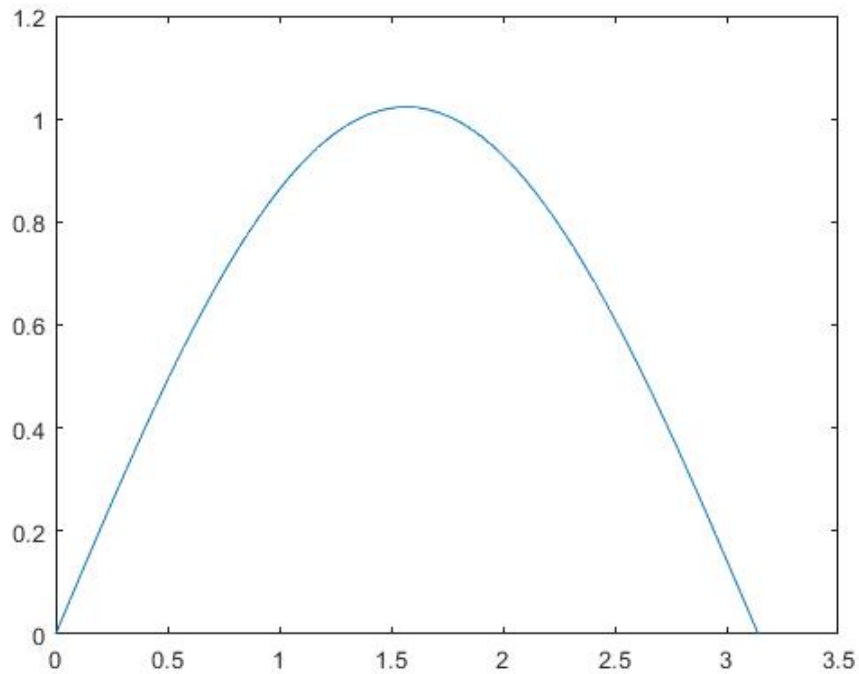


FIGURE 2.5 – $\sigma(\theta)$ à $H=5$, soit loin de la paroi

Nous verrons plus tard l'influence de la paroi sur les sources.

Pour l'instant rapprochons l'obstacle de la paroi. De ce fait il faut procéder au calcul des sources. En utilisant

l'expression (1.31), il suffit de résoudre le système linéaire du type $Ax = b$ avec :

- $A = \left[\frac{\pi}{N} \sum_{j=1}^N \left[\frac{x_i(x_i+x_j-2H)+y_i(y_i-y_j)}{(x_i+x_j-2H)^2+(y_i-y_j)^2} - \frac{x_i(x_i+x_j-2H)+y_i(y_i+y_j)}{(x_i+x_j-2H)^2+(y_i+y_j)^2} \right] + \pi I \right]$ où I est la matrice identité. Notons que deux boucles nous permettent d'estimer la matrice A , la boucle sur i ainsi que sur j
- $b = -UR \sin(\theta_i)$
- $x = \sigma(\theta)$

En éléments de frontière, la matrice A est pleine contrairement à la méthode des éléments finis dont la matrice de calcul est creuse avec des termes non nuls se trouvant aux alentours de la diagonale. Numériquement, il existe plusieurs méthodes de résolutions de systèmes linéaires. Nous choisissons une méthode directe, dite de décomposition LU .

2.2.1 Estimation des sources par décomposition LU

La décomposition LU est une méthode de décomposition de la matrice A comme produit d'une matrice triangulaire L inférieure, et d'une matrice triangulaire supérieure U . Sur MATLAB, une fonction déjà intégrée nous permet de procéder à ce genre de calcul : "linsolve"

A $H=5$ $\sigma(\theta)$ se comporte bien comme un $\sin(\theta)$.

Il est important de noter que pour l'instant nous fixons le nombre de nœuds sur le cylindre à $N = 100$, et nous verrons par la suite l'importance de ce paramètre.

Commençons donc par faire varier le paramètre H soit la distance du cylindre à la paroi. Un calcul au préalable a montré que les sources ne varient pas avant $H = 2$. Nous pouvons donc considérer le problème sans parois, pour $H \geq 2$. Le temps de calcul observé des sources ne dépasse pas la seconde, donc n'est pas assez pertinent quant à une quelconque optimisation avec cette méthode pour l'instant.

Ci-dessous l'évolution des sources de $H = 2$ jusqu'à $H = 1.05$:

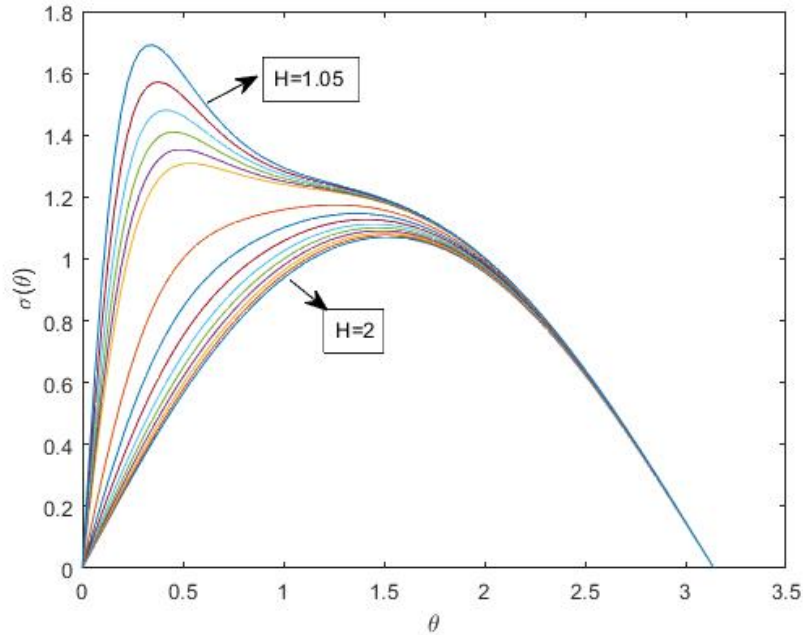


FIGURE 2.6 – $\sigma(\theta)$ pour $H = 2 \rightarrow 1.05$ et $N = 100$

Nous pouvons observer l'influence de la paroi sur le cercle grâce à ces répartitions de sources. En effet, une partie des courbes est pratiquement inchangée, soit pour $\theta = [\frac{\pi}{2}, \pi]$ c'est à dire la partie du cylindre la plus

éloignée de la paroi, tandis que la partie le plus proche, $\theta = [0, \frac{\pi}{2}]$, nous observons une variation de la répartition des sources, signe d'une influence de la paroi.

Aussi c'est à $H = 1.1$ que nous distinguons une modification considérable du $\sin(\theta)$ de départ.

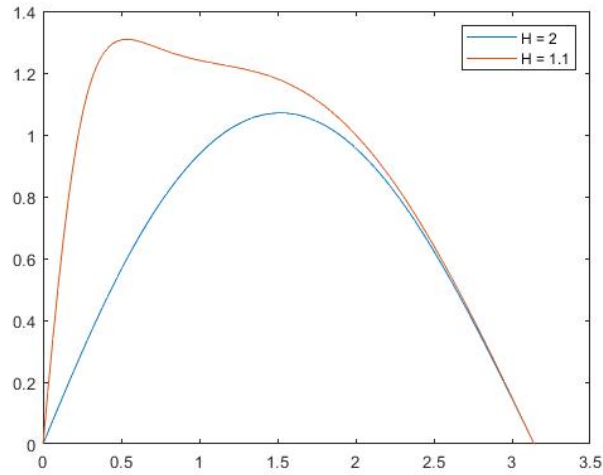


FIGURE 2.7 – $\sigma(\theta)$ pour $H = 2$ et $H = 1.1$ avec $N = 100$

En observant cette figure, nous pouvons tirer l'information de la zone d'influence de la paroi sur la répartition des sources, soit sur l'écoulement autour du cylindre.

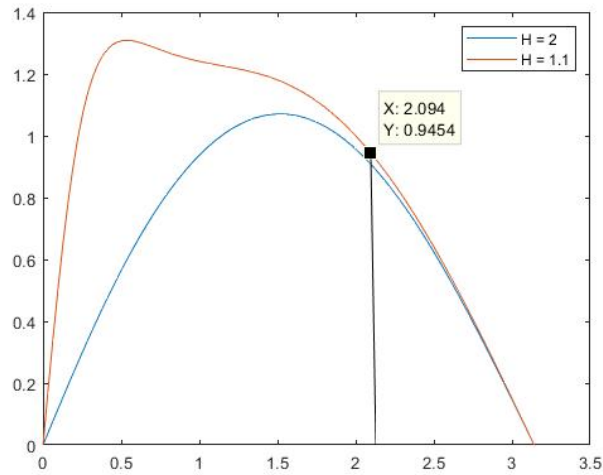


FIGURE 2.8 – $\sigma(\theta)$ avec point de début de la contribution de la paroi sur l'écoulement, soit éloignement de la courbe $H = 1.1$ de $H = 2$

Ce point est à $\theta \sim 2\frac{\pi}{3}$ sur le cylindre.

2.2.2 Test de convergence en maillage

Il est nécessaire de fixer un nombre de nœuds pour tous les calculs, de façon à ce que le temps de calcul soit optimal, bien qu'il soit très faible pour les calculs de source, mais nous verrons par la suite que ce n'est pas le cas pour l'affichage des iso-courbes du potentiel de vitesse pour un obstacle proche de la paroi.

Ainsi, procédons à des variations du nombres de nœuds pour différentes positions de l'obstacle. Un critère de calcul pourrait être la norme L_2 calculée avec la formule des trapèzes composites :

$$\| \sigma \|_2 = \int_0^\pi (\sigma(\theta))^2 d\theta = \frac{\pi}{N} \sum_{j=1}^N | \sigma_j |^2 \quad (2.1)$$

L'objectif est d'observer les variations du critère en fonction du nombre de nœuds afin d'en tirer un N optimal.

Voici l'évolution de $\| \sigma \|_2$ en fonction de N , pour différentes distances à la paroi :

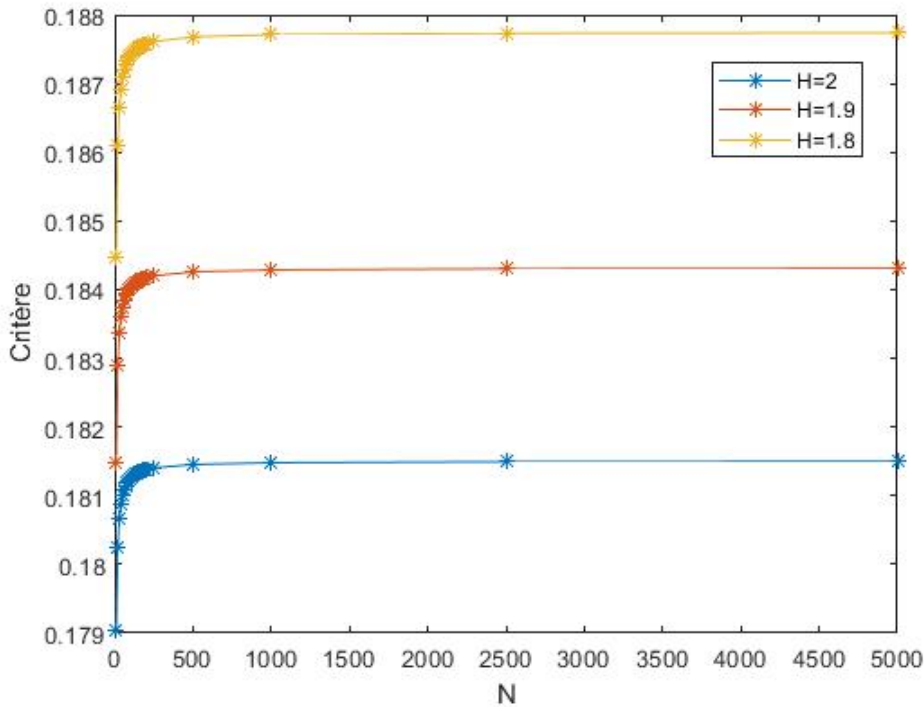


FIGURE 2.9 – Evolution du critère par rapport au nombre de nœuds pour $H = 2, 1.9$ et 1.8

En se limitant qu'à trois courbes soit pour trois distances différentes, nous pouvons observer la norme L_2 se stabiliser pour $N \geq 250$.

En effet, une zone de convergence asymptotique apparait :

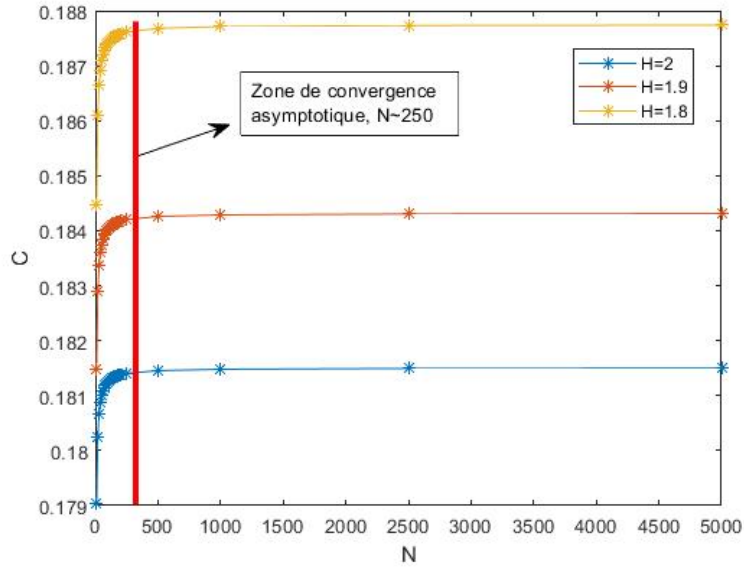


FIGURE 2.10 – Zone de convergence asymptotique pour $N = 250$

Néanmoins, cette étude est assez qualitative et nous ne pouvons pas vraiment conclure quant au nombre de nœuds optimal à choisir.

Pour plus de précision nous pouvons calculer l'erreur relative de la norme L_2 pour chaque H :

$$\epsilon = \frac{\| \sigma \|_2^N - \| \sigma \|_2^{5000}}{\| \sigma \|_2^{5000}} \quad (2.2)$$

Avec $\| \sigma \|_2^{5000} \sim \lim_{N \rightarrow \infty} \| \sigma \|_2^N$, ceci étant obtenu en visualisant les données du critère pour $H = 2$ par exemple. En effet, aucun erreur d'arrondis n'est visible en faisant varier le nombre de nœuds. En numérique il est quasi impossible de calculer une limite, donc considérer le critère à $N = 5000$ comme limite est un choix astucieux pour la suite des calculs. Voici un aperçu d'un tel calcul pour $H = 2$:

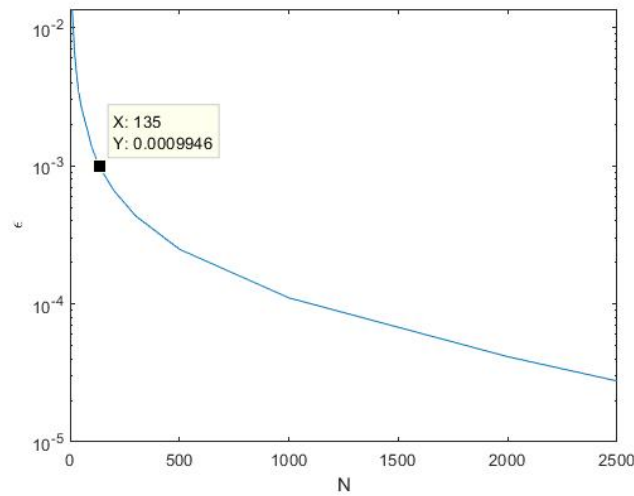


FIGURE 2.11 – Erreur relative de la norme L_2 pour $H = 2$

La zone de convergence pourrait se caractériser par toutes les valeurs de N pour lesquelles $\epsilon < \frac{1}{1000}$.

Donc pour $H = 2$, cette zone de convergence asymptotique débute à $N = 135$ environ. Ce critère ainsi fixé, le tableau ci dessous regroupe tous les N en entrée de zone de convergence pour $H = 2 \rightarrow 1.01$.

H	2	1.9	1.8	1.7	1.6	1.5	1.4	1.3	1.2	1.1	1.09	1.08	1.07	1.06	1.05	1.04	1.03
N	135	160	175	195	225	270	325	410	555	880	940	1005	1080	1185	1300	1460	1670

H	1.02	1.01
N	1980	2535

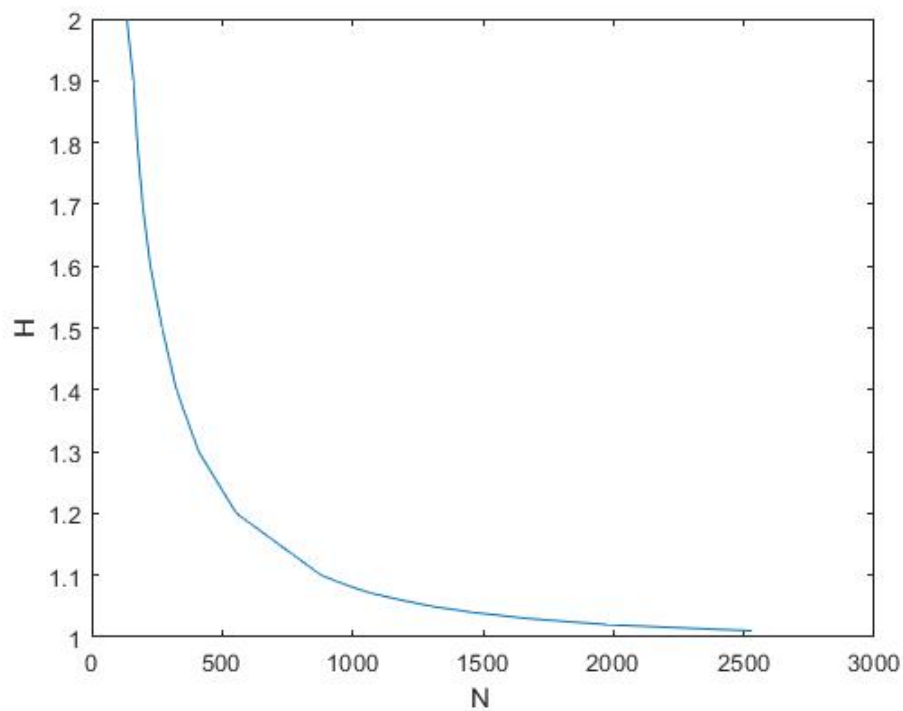


FIGURE 2.12 – N de début de convergence asymptotique pour chaque H

N augmente naturellement avec le rapprochement du cylindre de la parois. Ce qui est logique puisque plus le cylindre est proche plus la contribution de la paroi augmente, ce qui implique plus de calcul sur le coté proche parois du cylindre et donc plus de nœuds.

2.2.3 Vitesse de glissement le long de la paroi

Afin d'obtenir un critère supplémentaire de validation de nos calculs par la méthode des éléments de frontière, nous pouvons comparer la vitesse de glissement de la solution exacte à la notre.

Le gradient du potentiel de vitesse sur la paroi permet d'évaluer la vitesse de glissement d'un tel écoulement.

$$V = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{x=H} \quad (2.3)$$

Cela traduit une accélération du fluide confiné entre le cylindre et la paroi.

Ci-dessous la vitesse verticale en $x = H$ pour la solution classique sans paroi :

$$V = U \left(1 + R \frac{H^2 - y^2}{(H^2 + y^2)^2} \right) \quad (2.4)$$

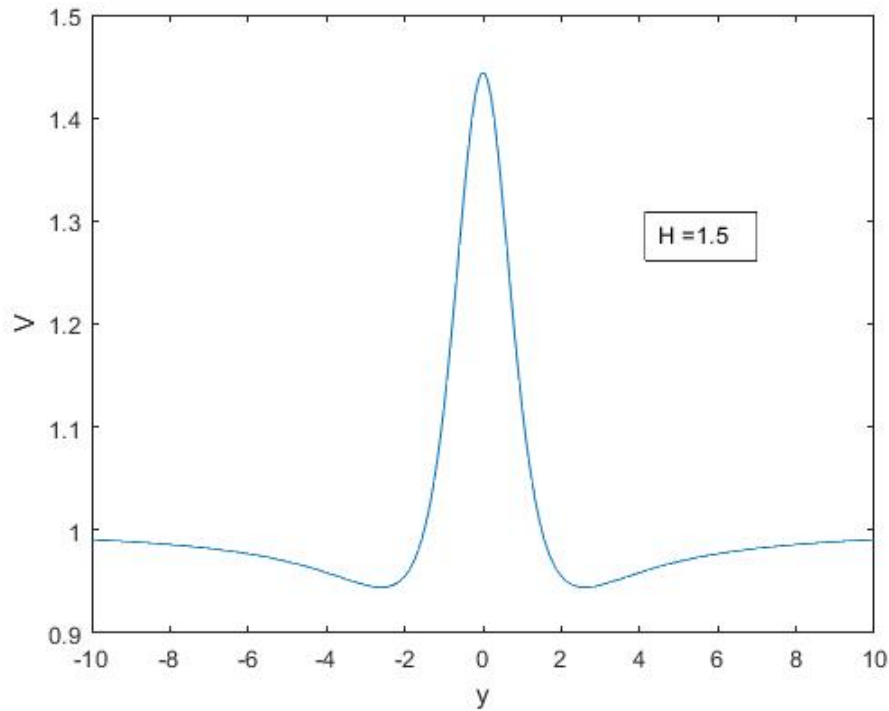


FIGURE 2.13 – Vitesse de glissement par la solution exacte pour $H = 1.5$

Et voici la formule de la vitesse de glissement par la méthode des éléments de frontière :

$$V = U + \int_0^\pi \sigma(\theta) \left[(y - R \sin \theta) \left(\frac{1}{(H - R \cos \theta)^2 + (y - R \sin \theta)^2} + \frac{1}{(H + R \cos \theta)^2 + (y - R \sin \theta)^2} \right) \right. \quad (2.5)$$

$$\left. - (y + R \sin \theta) \left(\frac{1}{(H - R \cos \theta)^2 + (y + R \sin \theta)^2} + \frac{1}{(H + R \cos \theta)^2 + (y + R \sin \theta)^2} \right) \right] d\theta \quad (2.6)$$

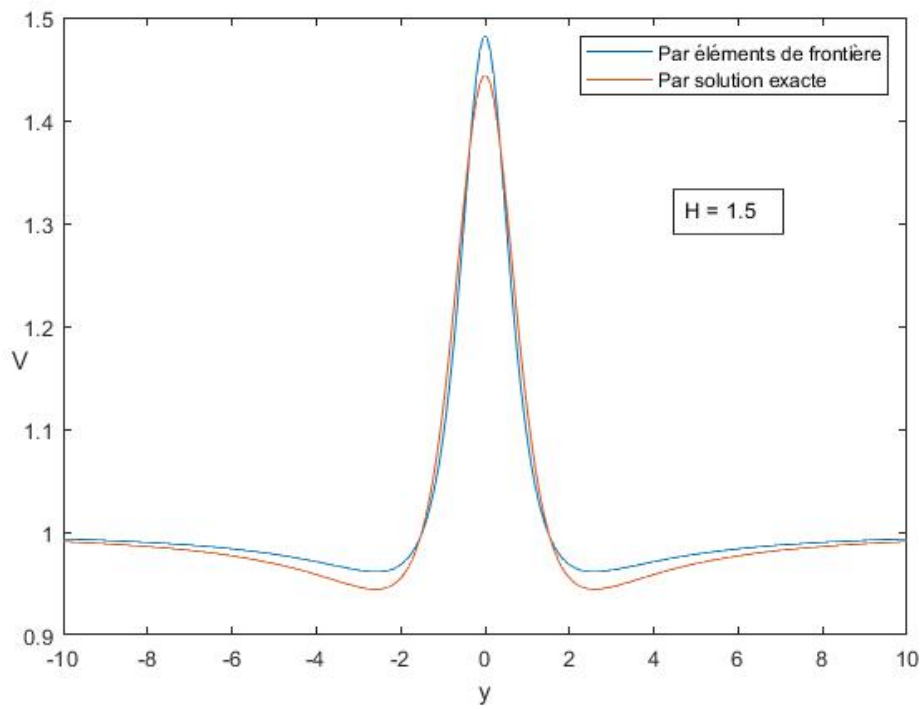


FIGURE 2.14 – Vitesse de glissement par la solution exacte et par la méthode des éléments de frontière pour $H = 1.5$

Les courbes sont symétriques puisque le problème est symétrique. Nous remarquons que la vitesse augmente en $y = 0$, cela est dû à l'influence du cylindre qui se trouve à cette position.

Les courbes sont très proches, cela valide définitivement notre code.

Chapitre 3

Potentiel de vitesse et fonction de courant

Les sources ainsi estimées, nous pouvons passer au calcul des quantités physiques telle que le potentiel de vitesse et la fonction de courant.

3.1 Potentiel de vitesse

Le calcul du potentiel se fait comme énoncé en (1.32) discrétisée grâce la formule de quadrature des trapèzes composites.

Nous fixons le nombre de nœuds des points de champs à 250 ainsi que le nombre des iso-courbes à 50 pour bien les visualiser et ne pas encombrer l'affichage. Voici ci-dessous l'affichage du potentiel de vitesse pour différents H (chaque H sera calculé avec le nombre de nœuds optimal sur la frontière du cylindre correspondant, comme vu pendant le test de convergence en maillage)

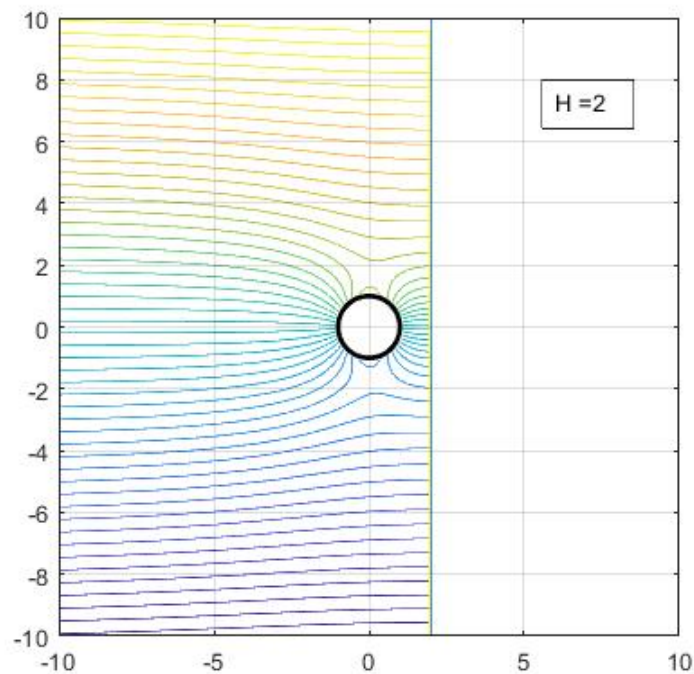


FIGURE 3.1 – Potentiel de vitesse pour $H = 2$

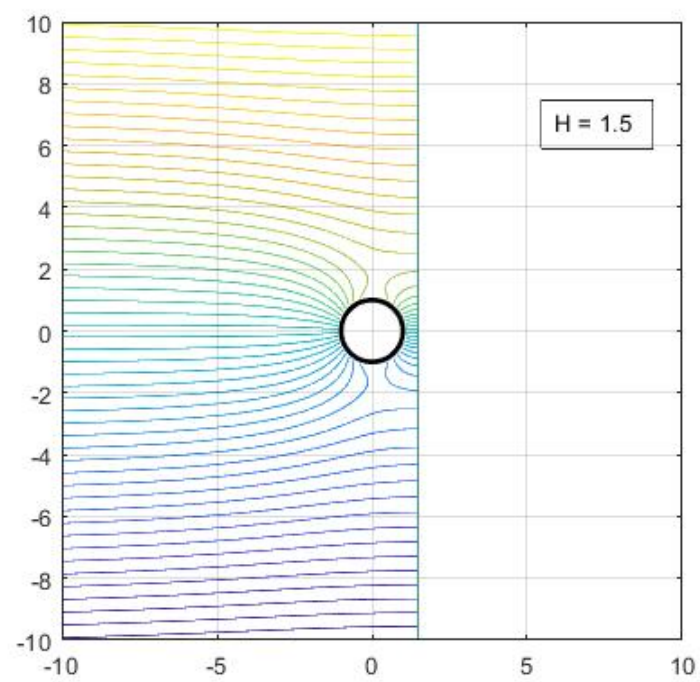


FIGURE 3.2 – Potentiel de vitesse pour $H = 1.5$

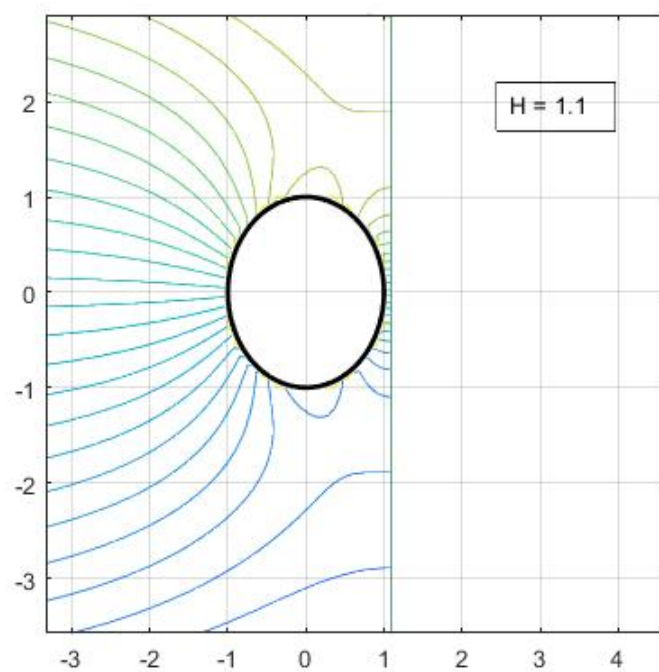


FIGURE 3.3 – Potentiel de vitesse pour $H = 1.1$

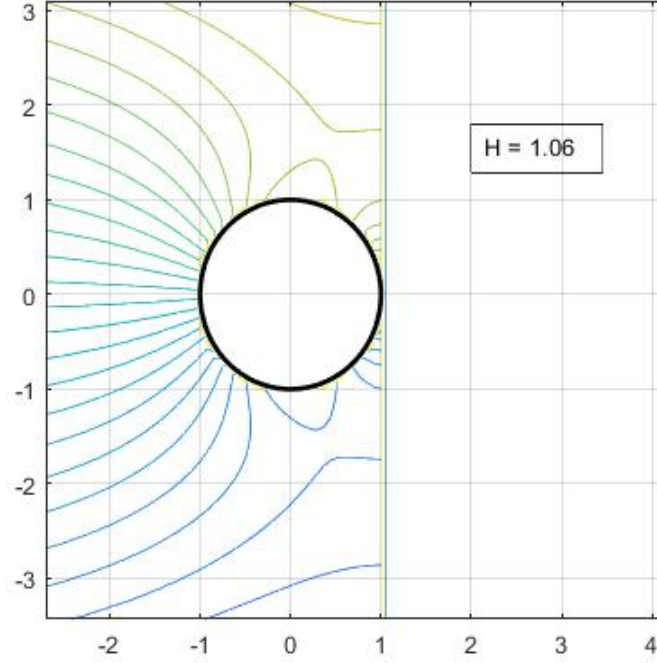


FIGURE 3.4 – Potentiel de vitesse pour $H = 1.06$

A ce stade, il est inutile d'afficher le potentiel pour des valeurs de H inférieures, car le cylindre est trop proche de la paroi.

En ce qui concerne le temps de calcul, il est certes plus long que le calcul des sources, mais reste raisonnable :

H	2	1.5	1.1	1.06
t(s)	41.533539	77.817613	233.743980	381.203631

Un test pour $H = 1.01$ à $N = 5000$ donne un temps de calcul de 1785.459212 s soit environ 30 minutes, ce qui est assez élevé.

Nous pouvons donc rencontrer ce genre de limites pour des calculs très proches de la paroi. Ajoutons aussi la limite de mémoire de la machine, car, comme évoqué au chapitre 2, plus le cylindre est proche et plus le nombre de nœuds doit augmenter, ainsi nous pouvons faire face à une limite de mémoire aux alentours de $N = 20000$, à ce niveau les matrices de calculs sont déjà monumentales.

3.2 Fonction de courant

Nous n'avons pas vraiment détaillé les calculs de la fonctions de courant pour cet écoulement par la méthode des éléments de frontière.

La fonction utilisée est :

$$\psi(x, y, \theta) = -Ux + \int_0^\pi \sigma(\theta)K(x, y, \theta)d\theta \quad (3.1)$$

Avec cette fois ci :

$$K(x, y, \theta) = \arctan\left(\frac{y - R\sin\theta}{x - 2H - R\cos\theta}\right) - \arctan\left(\frac{y + R\sin\theta}{x - 2H - R\cos\theta}\right) \quad (3.2)$$

$$+ \arctan\left(\frac{y - R\sin\theta}{x - R\cos\theta}\right) - \arctan\left(\frac{y + R\sin\theta}{x - R\cos\theta}\right) \quad (3.3)$$

Une fonction intégrée à MATLAB permet de calculer les "arctan" de cette fonction. Cependant des singularités apparaissent au niveau des points se trouvant en $y < 0$ et $x < 0$. Sachant que le problème est symétrique nous pouvons supprimer ces singularités en assignant à ces points les valeurs de leur points symétriques. Les détails de cette fonction sont en Annexe.

En discrétisant de la même manière que pour le potentiel de vitesse, nous pouvons donc afficher la fonction de courant de notre écoulement pour quelques valeurs de H .

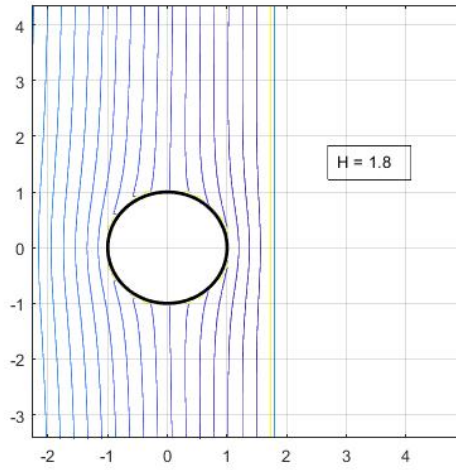


FIGURE 3.5 – Fonction de courant pour $H = 1.8$

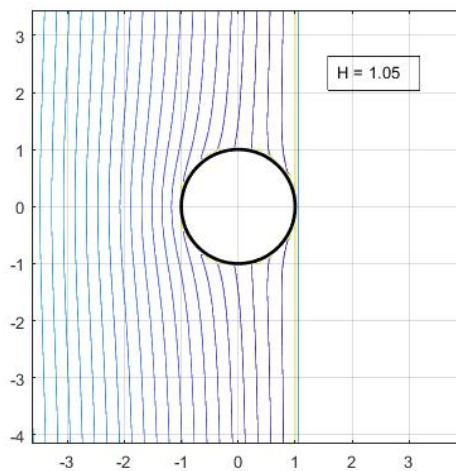


FIGURE 3.6 – Fonction de courant pour $H = 1.05$

Bilan

Le type d'écoulement étudié est l'un des plus classiques, de plus le fluide est parfait, l'obstacle et la paroi sont indéformables et uniformes, j'ai pu comparer ses solutions exactes à un code que j'ai développé et testé. Cette première brique d'un code orienté objet réalise le traitement numérique d'écoulements 2D par la méthode des éléments de frontière que je n'ai jamais utilisé auparavant. Ce fut donc un défi intéressant pour mes connaissances en mécanique des fluides et en numérique.

Le domaine d'étude étant semi-infini (l'obstacle étant proche d'une paroi d'un côté et libre de frontière des trois côtés restants), notre but était donc de mettre en place un modèle qui simulerait cet écoulement, en utilisant la méthode des éléments de frontière. Cette méthode est plus avantageuse compte tenu des limites de notre domaine, et comparée à une méthode numérique plus classique, telle que la méthode des éléments finis. J'ai donc suivis les démarches de cette méthode qui consiste à reformuler le problème, en réduisant d'une dimension le domaine d'étude pour pouvoir procéder à des calculs sur la frontière de l'obstacle, par le biais d'une répartition de sources le long de la frontière du cylindre. Le problème 2D devient donc un problème 1D. L'essentiel de cette étude, qui doit mener au calcul du potentiel qui lui même mène au champ de vitesse de l'écoulement, était d'estimer la répartition des sources dont l'interprétation n'est pas physique.

En optant pour une programmation orientée objet, méthode totalement nouvelle pour moi, j'ai pu écrire le code qui fut plus malléable et plus organisé comparé à une programmation impérative. En effet de nombreuses étapes de calcul ont été prévues (calcul du noyau du potentiel simple couche, son gradient, validation du code étape par étape, estimation des sources, calcul et affichage du potentiel et de la fonction de courant).

Après avoir formulé une équation de Fredholm du type 2, qui est une équation intégrale 1D permettant d'estimer les sources, celles ci ont été calculées par une décomposition LU. J'ai donc procédé à une étude de convergence en maillage en rapprochant le cylindre de la paroi, et pu étudier l'influence de ce rapprochement sur le nombre de nœuds nécessaire à un calcul optimal, sur le temps de calcul, et sur la répartition de ces sources le long de la frontière du cylindre. Ce qui m'a amené comme prévu au calcul du potentiel de vitesse et de la fonction de courant de l'écoulement étudié.

Notre objectif, au début du stage, était d'arriver au calcul de la répartition des pressions sur la frontière en utilisant le théorème de Bernoulli avec le potentiel de vitesse. Cependant cela demandait beaucoup plus de travail compte tenu des singularités du noyau du potentiel qui apparaissent exactement sur le bord du cylindre. Avec plus de temps j'aurai pu par exemple étudier en plus un problème à parois non uniforme. Cela impliquerait une modification de la condition de non pénétration imposée sur la paroi, plus précisément de considérer la paroi uniforme en y ajoutant une contribution liée à la variation, ainsi qu'une contribution temporelle, le problème devient in-stationnaire.

D'autres études aussi intéressantes seraient de considérer cette fois ci les équations de Stokes, pour lesquelles un traitement par éléments de frontière est possible, ou encore de passer en 3D. Un objectif à plus long terme serait de mettre en place un modèle complet de simulation d'écoulement autour de n'importe quel type d'obstacle au voisinage de parois uniforme ou non, déformable ou indéformables, par éléments de frontière.

Annexe

La documentation MATLAB fut d'une très grande aide. [5]

Ci-dessous le code source MATLAB utilisé pour étudier l'écoulement.

```
classdef pot_flow_class

    properties
        U;
        H;
        N;
        Ng;
        r;
        th;
        sigma;
        %         thp;
        X;
        Y;
        nb_iso;
        interp;
    end

    methods

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Constructeur
        function obj = pot_flow_class(valH, valN, valNg, valR, valU, val_nb_iso)
            obj.H = valH;
            obj.U = valU;
            obj.N = valN;
            obj.Ng = valNg;
            obj.r = valR;
            obj.nb_iso = val_nb_iso;
            obj.th=0:pi/(valN-1):pi;
            obj.sigma=sin(obj.th)/pi;
            obj.X=linspace(-10,10,valNg);
            obj.Y=linspace(-10,10,valNg);
        end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Noyeau
        function K = Kernel(obj,x,y)
```

```

K = log(sqrt((x+obj.r*cos(obj.th)).^2+(y-obj.r*sin(obj.th)).^2))...
+...
log(sqrt((x-2*obj.H+obj.r*cos(obj.th)).^2+(y-obj.r*sin(obj.th)).^2));
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Gradient du noyau
function K_d = Kernel_d(obj,x,y)
C=cos(obj.th);
S=sin(obj.th);
R = (sqrt(x^2+y^2));
K_d = ...
(x.*C + y.*S) - obj.r*(C.*x/R + S.*y/R)...
./...
((x - obj.r*x/R).^2 + (y - obj.r*y/R).^2)...
+...
(x*C + y*S - obj.r*(C.*x/R + S.*y/R) - 2*C*obj.H)...
./...
((x - 2*obj.H - obj.r*x/R).^2 + (y - obj.r*y/R).^2);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Calcul des sources
function obj = calcul_source(obj)
RC = obj.r*cos(obj.th);
RS = obj.r*sin(obj.th);
RC = RC(2:obj.N-1);
RS = RS(2:obj.N-1);
Mat_A = pi*eye(obj.N-2);
for i=1:obj.N-2
for j=1:obj.N-2
Mat_A(i,j)= Mat_A(i,j)+...
pi/obj.N*...
(RC(i)*(RC(i)+RC(j)-2*obj.H)+RS(i)*(RS(i)-RS(j)))/((RC(i)+RC(j)-2*obj.H)^2+...
(RS(i)-RS(j))^2)...
-pi/obj.N*...
(RC(i)*(RC(i)+RC(j)-2*obj.H)+RS(i)*(RS(i)+RS(j)))/((RC(i)+RC(j)-2*obj.H)^2+...
(RS(i)+RS(j))^2);
end
end
obj.sigma(2:obj.N-1)=linsolve(Mat_A,(1/pi)*RS');
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Intégrale de SIGMA
function integ_sigma(obj)
format long
S = trapz(obj.th,obj.sigma.*obj.sigma);

```

```

        disp(S)
    end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Calcul du POTENTIEL
function P = calcul_potentiel(obj,x,y)
    RC = obj.r*cos(obj.th);
    RS = obj.r*sin(obj.th);
    K=zeros(1,obj.N);
    for j=1:obj.N
        K(1,j) = 0.5*log((x-2*obj.H+RC(j)).^2+(y-RS(j)).^2)-0.5*log((x-2*obj.H+RC(j)).^2+...
            (y+RS(j)).^2)...
            +...
            0.5*log((x-RC(j)).^2+(y-RS(j)).^2)-0.5*log((x-RC(j)).^2+(y+RS(j)).^2);
    end
    P = -trapz(obj.th,K.*sin(obj.th));
    obj.sigma
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% affichage POTENTIEL
function affiche_phi(obj)
    phi = zeros(obj.Ng,obj.Ng);
    for i=1:obj.Ng
        for j=1:obj.Ng

            if sqrt(obj.X(i).^2+obj.Y(j).^2)<obj.r*1.001
                phi(j,i)=1/0;
            elseif obj.X(i)>obj.H
                phi(j,i)=1/0;
            else
                phi(j,i) = obj.U*obj.Y(j) + obj.calcul_potentiel(obj.X(i),obj.Y(j));
            end
        end
    end
    figure()
    contour(obj.X,obj.Y,phi,obj.nb_iso);
    pbaspect([1 1 1])
    hold on
    line([obj.H obj.H],[-10 10])
    grid on
    viscircles([0 0],obj.r,'color','k');
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Caclul de la fnct de courant
function C = calcul_courant(obj,x,y)
    RC = obj.r*cos(obj.th);
    RS = obj.r*sin(obj.th);

```

```

K_courant=zeros(1,obj.N);
for j=1:obj.N
    K_courant(1,j) = new_atan2((y-RS(j)),(x-2*obj.H-RC(j)))-new_atan2((y+RS(j)),...
        (x-2*obj.H-RC(j)))...
        +...
        new_atan2((y-RS(j)),(x-RC(j)))-new_atan2((y+RS(j)),(x-RC(j)));
end
C = -trapz(obj.th,K_courant.*obj.sigma);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Affichage de la fnct de courant
function affiche_psy(obj)
    psy = zeros(obj.Ng,obj.Ng);
    for i=1:obj.Ng
        for j=1:obj.Ng
            if sqrt(obj.X(i).^2+obj.Y(j).^2)<obj.r*1.001
                psy(j,i)=1/0;
            elseif obj.X(i)>obj.H
                psy(j,i)=1/0;
            else
                psy(j,i) = -obj.U*obj.X(i) + obj.calcul_courant(obj.X(i),obj.Y(j)) ;
            end
        end
    end
    figure()
    contour(obj.X,obj.Y,psy,obj.nb_iso);
    pbaspect([1 1 1])
    hold on
    line([obj.H obj.H],[-10 10])
    grid on
    viscircles([0 0],obj.r,'color','k')
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Vitesse de glissement
function V = vel_gliss(obj)
    RC = obj.r*cos(obj.th);
    RS = obj.r*sin(obj.th);
    K_glissement = zeros(obj.Ng,obj.N);
    for i=1:obj.Ng
        for j=1:obj.N
            K_glissement(i,j) = (obj.Y(i)-RS(j))*((1/((obj.H-RC(j))^2+(obj.Y(i)-RS(j))^2))+...
                (1/((-obj.H-RC(j))^2+(obj.Y(i)-RS(j))^2)))...
                -(obj.Y(i)+RS(j))*((1/((obj.H-RC(j))^2+(obj.Y(i)+RS(j))^2))+...
                (1/((-obj.H-RC(j))^2+(obj.Y(i)+RS(j))^2)));
        end
    end
    V = obj.U + trapz(obj.th,obj.sigma.*K_glissement,2);
end

```



```

        plot(obj.Y,1./V)
    end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Affichage de la vitesse de glissement EXACTE sans paroi
function gliss_exact(obj)
    for i=1:obj.Ng
        v_gliss_exact(i) = obj.U*(1+obj.r*((obj.H*obj.H-obj.Y(i)*obj.Y(i))/...
            (obj.H*obj.H+obj.Y(i)*obj.Y(i))^2));
    end
    plot(obj.Y,v_gliss_exact)
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

end

end

```

Quelques commandes MATLAB, à titre d'exemple, permettant de créer l'objet de la classe, caractérisé par ses propriétés, et d'appeler certaines fonctions (méthodes).

```

% pot_flow_class(valH,valN,valNg,valR,valU,val_nb_iso)
c_2 = pot_flow_class(1.8,1005,250,1,1,50); %création de l'objet c_2
c_2 = c_2.calcul_source; % Appel de la fonction qui calcul les sources
c_2.affiche_phi; % Affichage du potentiel de vitesse

```

On rajoute aussi en annexe, les modifications, comme expliqué en 3.2, de la fonction "atan2" intégrée à MATLAB.

```

function res = new_atan2(y,x)
res = atan2(y,x);
if x<0 && y<0
    res = res + 2*pi;
end

```

Bibliographie

- [1] L.H.CARPENTER. On the motion of two cylinders in an ideal fluid. *Journal of Reasearch of the National Bureau of Standards*, 1958.
- [2] H.JEONG H.PARK. Near-wall rising behaviour of a deformable bubble at high reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 2015.
- [3] E.GUYON J.P.HULIN L.PETIT. *Hydrodynamique physique*. EDP Sciences, 2001.
- [4] M.BLYTH. *Boundary Element and Finite Element Methods*, 2012.
- [5] MathWorks. <<https://fr.mathworks.com/help/matlab/>>.