MASTER I D'INFORMATIQUE
INFO0809 : INFO. THÉORIQUE
PASCAL MIGNOT

UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE

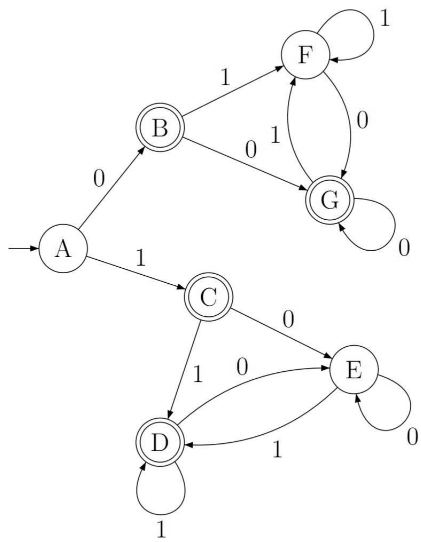
Devoir sur table

vendredi 15 février 2013

Notes : Seul l'aide-mémoire est autorisé. L'utilisation de toute propriété autre que celles présentes dans l'aide-mémoire devra être démontrée.

Exercice 1

Soit l'automate fini suivant :



1. Décrire (en français) le langage reconnu par cet automate.
2. Donner un automate non déterministe à 4 états qui reconnait ce langage.
3. Donner une expression régulière équivalente.
4. Donner la grammaire libre du contexte qui reconnait ce langage.
5. Donner l'automate à pile qui reconnait ce langage.
6. Donner le graphe de la machine de Turing qui reconnait ce langage.

Exercice 2

Soit la grammaire libre du contexte suivante :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow TT|U \\ T &\rightarrow 0T|T0|\# \\ U &\rightarrow 0U00|\# \end{aligned}$$

1. Est-ce-que les mots 00#00, 0#0 et 000#000000 sont reconnus par cette grammaire libre du contexte ? On justifiera en donnant leurs dérivations.
2. Quel est le langage reconnu par cette grammaire libre du contexte ?
3. Ce langage est régulier ? On justifiera.

Exercice 3

Soit $\Sigma = \{0, 1\}$. Soit E_n l'ensemble qui contient tous les langages de Σ^* dont les chaines sont de longueur au plus n.

1. Montrer que E_n est régulier (à savoir, L est régulier pour $\forall L \in E_n$).
2. Quelle sont les caractéristiques qu'un automate fini déterministe doit obligatoirement avoir pour générer un langage L de E_n ?
3. Quelle sont les caractéristiques qu'une grammaire libre du contexte doit obligatoirement avoir pour générer un langage L de E_n ?
4. Le nombre de langage dans E_n est-il infini ? Si oui, on justifiera ; si non, on donnera son cardinal.

Exercice 4

Soit le langage suivant :

$$L = \{w \ / \ w \text{ contient plus de 0 que de 1}\}$$

1. Combien y-a-t-il de L-classes d'équivalence ? Si leur nombre est fini, on les énumèrera, sinon on en produira un sous-ensemble infini.
2. Donner la grammaire libre du contexte qui génère ce langage.
3. Donner l'automate à pile qui reconnait ce langage.
4. Donner la machine de Turing qui reconnait ce langage.

Exercice 5

1. Soit $\Sigma = \{0, 1\}$ et L_n le langage dont l'ensemble des mots (de taille quelconque) qui commencent par n zéros et finissent par n uns. Par exemple, $001011 \in L_2$ mais pas 00111.
   (a) Donner un automate fini (déterministe ou non-déterministe) qui reconnait L_2.
   (b) Donner une grammaire libre du contexte qui reconnait L_2.
2. $L = \cup_{n>0} L_n$ où L_n est le langage défini à la question précédente. Dans toutes les questions suivantes, soit on exhibera la machine qui le reconnait, soit on démontrera qu'une telle machine ne peut pas exister (en utilisant par exemple le lemme de l'étoile).
   (a) L est-il régulier ?
   (b) L est-il libre du contexte ? Dans l'affirmative, on donnera l'automate à pile qui le reconnait.
   (c) L est-il récursivement énumérable ?

Problèmes

Le but de ce problème est de déterminer la classe à laquelle appartient différents langages. Si le langage est :

- **régulier :** dans ce cas on donnera au choix, soit l'automate (non-)déterministe fini qui le reconnait, soit son expression régulière associée.
- **libre de contexte :** dans ce cas, on démontrera qu'il n'est pas régulier (avec le lemme de l'étoile ou avec celui de Myhill-Nérode) **et** on donnera la grammaire libre de contexte (ou l'automate à pile) qui le reconnait.
- **récursivement énumérable :** dans ce cas, on démontrera qu'il n'est pas régulier avec le lemme de l'étoile pour les grammaires libres de contexte, **et** on donnera la machine de Turing qui l'énumère.

Donner à quelle classe appartiennent les langages suivants :

1) $A = \{w \ / \ w$ contient un nombre égal de 00 et de 11$\}$. Par exemple, $01100011 \in A$.
2) $B = \{ww' \ / \ |w| = |w'| \text{ et } w \neq w'\}$
3) $\overline{C}$ = le complémentaire de $C = \{a^n b^n \ / \ n > 0\}$.
4) $D = \{w \ / \ w$ représente un nombre binaire divisible par 3$\}$.
5) $E = \{xy \ / \ $ le nombre de a dans x = le nombre de b dans $y\}$.
6) $F = \{w \ / \ w$ contient la chaîne 101$\}$

MASTER I D'INFORMATIQUE
INFO0809 : INFO. THÉORIQUE
PASCAL MIGNOT

UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE

Aide-mémoire (DS du 15 février 2013)

Langages réguliers

- Un **alphabet** Σ est un ensemble **fini** de lettres. Σ^* est l'ensemble de toutes les chaines possibles pouvant être générées par l'alphabet Σ.
- Un **langage** L sur l'alphabet Σ est un sous-ensemble de Σ^* (i.e. $L \subseteq \Sigma^*$).
- Un automate déterministe fini (ADF) est un 5-uple $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, où Q est un ensemble fini d'états(ensemble des états), Σ est un ensemble fini de symboles (alphabet), $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ est la fonction de transition, $q_0 \in Q$ est l'état de départ, $F \subset Q$ est l'ensemble des états acceptants.
- **Langage accepté par un ADF** M est l'ensemble des chaines L acceptées par M.
- **Langage régulier** est un langage accepté par un ADF M.
- **Opérations régulières** : les opérations régulières sont l'**Union** $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$, la **Concaténation** $A \circ B = \{xy \mid x \in A \text{ et } y \in B\}$, et l'**Etoile** $A^* = \{x_1 x_2 ... x_k \mid k \geq 0 \text{ et } x_i \in A \text{ pour tout } i\}$ où A et B sont deux langages.
- **Théorème** : L'ensemble des langages réguliers est fermé par toute opération régulière.
- **L'union de deux ADFs** $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ et $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ donne un ADF $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ avec pour états $Q = Q_1 \times Q_2$, comme fonction de transition $\forall (r_1, r_2) \in Q$, $a \in \Sigma$, $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$, comme état initial $q_0 = (q_1, q_2)$ et comme états finaux $F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$.
- **Théorème** : l'ensemble des langages libres de contexte est fermé par les opérateurs d'intersection et de complémentarité (intersection : union avec $F = F_1 \times F_2$, complément : $\overline{F} = Q \backslash F$).
- Un automate non-déterministe fini (ANF) est similaire à un ADF, excepté que sa fonction de transition est définie comme $\delta : Q \times \Sigma_\epsilon \to \mathcal{P}(Q)$.
- **Théorème** : un langage est régulier si et seulement si il est reconnu par un ANF.
- Une **expression régulière** R (notée ER) sur un alphabet σ si R est un symbole $a \in \Sigma$, la chaîne vide ϵ, l'ensemble vide ϵ, une union d'expression régulière, une concaténation d'expression régulière, ou une opération étoile sur une expression régulières.
- **Théorème** : un langage est régulier si et seulement si il est reconnu par un ER.
- Transformation d'un ANF en ER :
  AGNF = ANF dont les transtions sont des ERs.
  1. partir d'un ANF modifié (AGNF) tel que ① l'état de départ a des transitions sortantes vers tous les autres états, ② l'état acceptant est unique.
  2. pour réduire l'état q_{rip}, réduire tous les cycles q_i, q_j, $q_t extrip$ (voir ci-contre), en transition $R_{ij} = R_1 R_2{}^* R_4 \cup R_4$ entre q_i et q_j.
  3. répéter l'étape 2 jusqu'à ce qu'il n'y ait plus que 2 états. L'expression régulière est la transition entre les 2 états restants.

- **Théorème** : si un langage est fini ($\#L$ est fini), alors il est régulier.
- Deux mots u et v sont L-**équivalents** si $\forall z \in \Sigma^*, uz \in L \Leftrightarrow vz \in L$.
- **Théorème** (Myhill-Nerode) : un langage L est régulier **si et seulement si** il existe un nombre fini de L-classes distinctes.
- **Lemme de l'étoile** : soit un AFD $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tel que $\mathcal{L}(M)$ soit infini. Pour tout mot w dans $\mathcal{L}(M)$ tel que $|w| \geq |Q|$, il existe une décomposition $w = xyz$ telle que $xy^i z \in \mathcal{L}(M)$ pour tout $i \geq 0$, $|y| > 0$ et $|xy| < |Q|$.

Grammaire libre de contexte

- Une **grammaire libre de contexte** (GLC) est un triplet (V, Σ, R, S) constitué d'un ensemble de variables V, d'un ensemble de symboles (terminaux) Σ, d'un ensemble de règle de réécriture sous la forme $u \to U$ où U est une combinaison de variables de V ou de symboles de Σ, S est la variable de départ.

– **Dérivations** : on écrit $u \Rightarrow v$ s'il existe une règle de réécriture $r \in R$ qui transforme u en v.
  on écrit $u \overset{*}{\Rightarrow} v$ s'il existe une suite de règles de réécriture $r_1 r_2 \dots r_k \in R^k$ qui transforme u en v.
– Un mot w est généré par une GLC si $S \overset{*}{\Rightarrow} w$.
– Un **langage libre de contexte** (LLC) est l'ensemble des mots de Σ^* générés par une GLC.
– L'**union de 2 GLCs** $G_1 = (V_1, \Sigma, R_1, S_1)$ et $G_2 = (V_2, \Sigma, R_2, S_2)$ (où V_1 et V_2 sont disjoints) est une GLC $G = (V, \Sigma, R, S)$ telle que $V = V_1 \cup V_2$ et $R = R_1 \cup R_2 \cup S \to S_1 | S_2$.
– Un grammaire linéaire (V, Σ, R, S) est une grammaire construite à partir d'un ADF $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, où l'on associe ① à chaque symbole $q_i \in Q$, une variable $v_i \in V$ ② à chaque transition $\delta(q_i, a) = q_j$, une règle $V_i \Rightarrow aV_j \in R$ ③ à chaque état final $q_i \in F$, une règle $V_i \to \epsilon$, ④ $S = V_0$ à l'état de départ q_0.
– L'ensemble des langages libres de contexte est l'ensemble des langages acceptés par les GLCs.
– **Théorème** : L'ensemble des langages libres de contexte est fermé par toute opération régulière.
– **Théorème** : Si un langage est régulier, alors il est accepté par une GLC.
– La **dérivation la plus à gauche** d'une chaîne consiste à chaque étape à remplacer la variable la plus à gauche.
– Une chaîne générée par une GLC est **ambigüe** si cette GLC permet de dériver cette chaine de plus d'une façon en n'utilisant que des dérivations les plus à gauche.
– Une grammaire est ambigüe si elle génère au moins une chaine ambigüe. Sinon, elle est non ambigüe.
– Une GLC est sous **forme normale de Chomsky** si chaque règle est sous la forme $A \to BC$ ou $A \to a$ ou $S \to \epsilon$ où ① a est n'importe quelle terminal, ② A, B, C, S sont des variables telles que S est la variable de départ, A est n'importe quelle variable (y compris S) et B,C sont des variables différentes de S.
– **Théorème** : tout LLC peut être généré par une GLC sous FNC en appliquant les étapes suivantes : ① ajouter une nouvelle règle $S_0 \to S$ ② supprimer les règles de la forme $A \to \epsilon$ (partout où A apparaît dans la RHS, ajouter une nouvelle règle sans A) ③ supprimer les règles unitaires $A \to B$ (pour toute règle $B \to U$, ajouter une règle $A \to U$) ④ supprimer les chaines $A \to u_1 u_2 \dots u_k$ (remplacer par les règles $A \to u_1 A_1$, $A_1 \to u_2 A_2$, $\dots A_{k-2} \to u_{k-1} u_k$ ⑤ supprimer les règles $A \to u_1 u_2$ où u_1 est un terminal (remplacer par $A \to U_1 u_2$ et $U_1 \to u_1$). Idem si u_2 est un terminal.
– Un **automate à pile** (AP) est un 6-uple $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ où Q un ensemble fini d'états, Σ un alphabet, Γ les symboles de la pile, δ une fonction de transition $Q \times \Sigma' \times \Gamma' \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma')$ avec $\Sigma' = \Sigma \cup \{\epsilon\}$ et $\Gamma' = \Gamma \cup \{\epsilon\}$, q_0 est l'état de départ, F est l'ensemble des états acceptants.
– **Théorème** : un langage est libre de contexte si et seulement si il est généré par un AP.
– **Lemme de l'étoile** (pour une GLC) : soit un langage L généré par une GLC. Pour tous les mots w de L de longueur au moins p (dépendante du langage L), alors on peut trouver u, v, x, y, z tel que $w = uvxyz$, $|vy| > 0$, $|vxy| \leq p$, et tel que $\forall i \geq 0, uv^i xy^i z \in L$.
– **Théorème** : l'ensemble des langages libres de contexte n'est pas fermé par les opérateurs d'intersection et de complémentarité.

Machine de Turing

– Une **machine de Turing** (MT) est un 7-uple $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$ où Q est l'ensemble fini des états, Σ est l'alphabet d'entrée, Γ est l'alphabet de la bande, $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ est la fonction de transition, $q_0 \in Q$ est l'état de départ, $q_a \in Q$ est l'état acceptant, $q_r \in Q$ est l'état rejetant.
– L'**exécution d'une MT** commence avec un mot w écrit sur sa bande et dans l'état q_0. La MT accepte (resp. rejette) w si elle atteint l'état q_a (resp. q_s), sinon elle ne s'arrête jamais.
– Une MT est dans l'état uq_iv si la bande contient la chaîne uv et le pointeur de lecture placé sur le premier caractères de la chaîne u.
– Un langage L est accepté par une MT M si pour tout $w \in L$, M s'arrête sur un état acceptant.
– Un langage est (récursivement) **énumérable** s'il existe une MT qui l'accepte.
– Une MT décide un langage L si MT accepte w pour tout $w \in L$ et rejette w pour tout $w \notin L$.