Master Informatique
INFO0705 : Informatique Théorique
Pascal Mignot

Université de Reims Champagne-Ardenne

Devoir surveillé

du mercredi 12 octobre 2016

Notes : Seul l'aide-mémoire est autorisé (à savoir, tout autre document est interdit).

Exercice 1: Langage régulier

Soit le langage $L_1 = \{w \mid w \text{ contient la sous-chaine } 000\}$.

1. Donner un automate déterministe fini qui accepte L_1.
2. Donner un automate déterministe fini qui accepte $\overline{L}_1$. S'il peut facilement être déduit de la question précédente, on indiquera comment.
3. Combien de L_1-classe ce langage possède-t-il ? On les explicitera.
4. Donner une grammaire du langage libre de contexte qui accepte L_1.
5. Indiquer pourquoi, dans ce cas, l'automate à pile est trivial.
6. Donner le langage libre de contexte qui accepte $\overline{L}_1$. S'il peut facilement être déduit de la question précédente, on indiquera comment.

Exercice 2: Langage libre de contexte

Soit le langage $L_2 = \{0^p 1^n 0^q \mid n < p + q\}$.

1. Montrer en utilisant le lemme de l'étoile que le langage L_2 n'est pas régulier.
2. Montrer en utilisant le théorème de Myhill-Nérode que le langage L_2 n'est pas régulier.
3. Donner une grammaire du langage libre de contexte qui accepte L_2.
4. Donner un automate à pile qui accepte L_2.
5. Donner le programme d'une machine de Turing qui accepte L_2.

Exercice 3: Détermination de la classe d'un langage

Soit le langage $L_3 = \{0^n 1^n 0^n \mid n > 0 \text{ et } n \text{ est pair}\}$.

1. Ce langage est-il régulier ? S'il l'est on donnera l'automate fini ou l'expression régulière associé, sinon on démontrera qu'il n'est pas régulier avec le théorème de Myhill-Nérode ou le lemme de l'étoile ?
2. Soit $A = \left\{0^{2p} 1^p \mid p > 0\right\}$ et $B = \left\{1^p 0^{2p} \mid p > 0\right\}$. Est-ce-que $L_3 = A \cup B$?
3. Ce langage est-il libre de contexte ? S'il l'est on donnera la grammaire libre de contexte ou l'automate à pile qui reconnaît ce langage, sinon on démontrera qu'il n'est pas libre de contexte avec le lemme de l'étoile ?
4. Ce langage est-il récursivement énumérable ? Si oui, on donnera la machine de Turing qui le reconnait, si non, on démontrera pourquoi.

Exercice 4: Machine de Turing universelle

On note M_u la machine de Turing universelle.

1. Que fait-on lorsque l'on exécute $M_u(w)$? Peut-on prévoir le résultat de l'exécution ?
2. Que fait-on lorsque l'on exécute $M_u(< M, w >)$? Peut-on prévoir le résultat de l'exécution ?
3. Que fait-on lorsque l'on exécute $M_u(< M_u, < M, w >>)$? Peut-on prévoir le résultat de l'exécution ?

Exercice 5: Fermeture par l'opérateur $*$

1. Indiquer ce que signifie qu'une classe E de langages est fermée par l'opérateur $*$.
2. Les langages décidables sont-ils fermés par l'opérateur $*$?
3. Les langages récursivement énumérables sont-ils fermés par l'opérateur $*$?
4. Reprendre l'une des deux démonstrations ci-dessus, et l'effectuer en utilisant une machine de Turing non déterministe (si les deux démonstrations utilisent une machine de Turing non déterministe, la reprendre avec une machine de Turing déterministe).

Exercice 6: Infini

Soit l'alphabet $\Sigma = \{1\}$.

1. Décrire le contenu de l'ensemble Σ^*.
2. L'ensemble des mots de Σ^* est-il dénombrable ? On justifiera.
3. L'ensemble des langages pouvant être générés à partir des mots de Σ^* est-il dénombrable ? On justifiera.
4. Donner un exemple de langage de Σ^* régulier, un exemple de langage libre de contexte (mais pas régulier), et un exemple de langage récursivement énumérable (mais pas libre de contexte).
5. Tous les langages de Σ^* sont-ils récursivement énumérables ?

Exercice 7: Complémentation

1. Soit L un langage décidable quelconque. Son complémentaire $\overline{L}$ est-il toujours décidable ? La réponse devra être démontrée.
2. Soit L un langage récursivement énumérable quelconque. Son complémentaire $\overline{L}$ est-il toujours récursivement énumérable ? La réponse devra être démontrée.
3. Soit L un langage non récursivement énumérable quelconque. Son complémentaire $\overline{L}$ est-il toujours non récursivement énumérable ? La réponse devra être démontrée.

Exercice 8: `LIPOGRAM`

1. $\texttt{LIPOGRAM}_a = \{\langle M, w\rangle \mid M \in \mathcal{RE}$ et la lettre a n'est pas dans $w\}$ est-il récursivement énumérable ?
2. $\texttt{LIPOGRAM}_a$ est-il décidable ? S'il est indécidable, on effectuera la démonstration par réduction d'un problème connu comme étant indécidable à ce problème.
3. $\texttt{LIPOGRAM} = \{\langle M, w\rangle \mid \langle M, w\rangle \in \texttt{LIPOGRAM}_a$ et $M(w)$ accepte$\}$ est-il récursivement énumérable ?
4. `LIPOGRAM` est-il décidable ? S'il est indécidable, on effectuera la démonstration par réduction d'un problème connu comme étant indécidable à ce problème.

Exercice 9: `DECIDABLE` est-il décidable ?

On s'intéresse dans cet exercice à établir si le problème de déterminer si un problème est décidable est lui-même décidable. Autrement dit, soit `DECIDABLE` le langage contenant l'ensemble des descriptions des machines de Turing M qui reconnaissent des langages décidables, `DECIDABLE` est-il décidable ?

1. Soit L un langage décidable, et M la machine de Turing qui reconnait L. Que signifie pour M le fait que L soit décidable ?
2. En déduire l'expression de `DECIDABLE` sous la forme $\texttt{DECIDABLE} = \{...\}$.
3. Montrer que `DECIDABLE` est indécidable.
4. Quel théorème du cours permettrait d'arriver aussi à cette conclusion ? On appliquera ce théorème **rigoureusement**.
5. Quelle aurait été la conséquence pour l'informatique si `DECIDABLE` avait été décidable ?