Master Sciences-Technologies-Santé / Mention Informatique
Info0809 : Informatique théorique / Pascal Mignot
Année universitaire 2013-2014
Seconde session de juin 2014 / Examen terminal

Notes :
– Seul l'aide-mémoire est autorisé. Tout autre document est interdit.
– Toute propriété de l'aide mémoire utilisée devra être citée (même brièvement). Si une propriété utilisée n'est pas dans l'aide-mémoire, alors cette propriété devra être démontrée.

Questions indépendantes

1. Soit le langage $L \subset \{0, 1\}^*$, qui accepte les chaines de longueur exactement égale à 4. Donner un ADF et une ER qui reconnaissent ce langage.
2. Est-il possible de donner un autre ADF reconnaissant exactement le même langage qu'à la question précédente ? Si oui, on le donnera. Si non expliquera pourquoi.
3. Donner un langage régulier L qui a p L-classes d'équivalence. La description devra clairement faire intervenir l'entier p, et devra être autre chose qu'une tautologie, et il devra être démontré pourquoi ce langage a p classes d'équivalence.
4. Donner un exemple d'une grammaire qui n'est pas libre du contexte, et lui appliquer le lemme de l'étoile pour démontrer son irrégularité.
5. Y-a-t-il un rapport entre le fait qu'un langage soit en espace linéaire et la classe de complexité dans laquelle il se trouve ?
6. Donner l'arbre d'exécution de la machine de Turing non déterministe à temps polynomial qui décide si $(x \vee y \vee z) \wedge (\overline{y} \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee y)$ appartient à $\mathtt{SAT}$.
7. Quelles classes A de complexité avons-nous vu en cours pour lesquelles $A = co\,A$?
8. Soit $A \in \mathbf{NP}$. Soit M la machine de Turing qui décide A. La connaissance de M aide-t-elle à déterminer si $\overline{A} \in \mathbf{NP}$? Si oui, indiquer comment ; si non, indiquer pourquoi.
9. Donner un exemple d'un $w \in \mathtt{HAMPATH}$. Puis donner son certificat et le code de son vérificateur.
10. On considère un langage constitué d'un nombre infini de chaines incluses dans $\{0, 1\}^*$. Existe-t-il toujours une machine de Turing qui reconnait ce langage ? On justifiera.
11. Montrer que **NL** est fermé par intersection.
12. Donner un exemple de langage non trivial dans **L**.
13. On veut construire un modèle représentant un protocole P, afin d'en étudier les propriétés (le langage reconnu étant l'ensemble des mots conformes ou engendrables par le protocole). On aimerait être en mesure de vérifier si deux protocoles sont équivalents (à savoir si deux protocoles différents reconnaissent le même langage). Parmi quelle classe de langages faut-il choisir ce protocole si l'on veut que ce problème soit décidable ?
14. Que peut se dire un étudiant s'il écrit un programme capable de résoudre le problème $\mathtt{PATH}$ en temps polynomial ? On rappelle que $\mathtt{PATH}$ est le langage contenant $\langle G, s, t\rangle$ qui contient les graphes G qui ont un chemin de s vers t.

Exercice 1 : différence symétrique

La différence symétrique de deux langages A et B (notée $DS(A, B)$) est l'ensemble des chaines qui sont uniquement dans l'un des deux ensembles. Par exemple, si $A = \{00, 101\}$ et $B = \{11, 00\}$, alors $DS(A, B) = \{11, 101\}$.

1. Supposons que $A = 0^*1^*$ et $B = 1^*0^*$. Quelles sont les chaines de longueur inférieure ou égale à 3 dans $DS(A, B)$?
2. Écrire l'expression régulière pour $DS(A, B)$.
3. Écrire l'expression de $DS(A, B)$ à partir d'opération sur les ensembles ($\cap$, $\cup$, ...).
4. Est-ce-que l'ensemble des langages réguliers est fermé par différence symétrique ?
5. Même question pour les langages libres de contexte.
6. Même question pour les langages décidables.
7. Même question pour les langages récursivement énumérables.

Exercice 2 : indécidabilité de $\mathtt{A}_{\epsilon\mathtt{MT}}$

Soit $\mathtt{A}_{\epsilon\mathtt{MT}} = \{< M > \mid M$ est une MT qui accepte $\epsilon\}$.

1. Montrer que $\mathtt{A}_{\epsilon\mathtt{MT}}$ est indécidable de $\mathtt{A}_{\mathtt{MT}}$ à $\mathtt{A}_{\epsilon\mathtt{MT}}$.
2. Démontrer ce résultat en utilisant une autre méthode.

Exercice 3 : DECIDABLE est-il décidable ?

On s'intéresse dans cet exercice à établir si le problème de déterminer si un problème est décidable est lui-même décidable. Autrement dit, soit DECIDABLE le langage contenant l'ensemble des descriptions des machines de Turing M qui reconnaissent des langages décidables, DECIDABLE est-il décidable ?

1. Soit L un langage décidable, et M la machine de Turing qui reconnait L. Que signifie pour M le fait que L soit décidable ?
2. En déduire l'expression de DECIDABLE sous la forme DECIDABLE $= \{\langle M\rangle \mid \forall w \ldots\}$.
3. Montrer, par diagonalisation, que DECIDABLE est indécidable.
4. Montrer, par réduction, que DECIDABLE est indécidable.
5. Quel théorème du cours permettrait d'arriver aussi à cette conclusion ? On appliquera ce théorème **rigoureusement**.
6. Quelle aurait été la conséquence pour l'informatique si DECIDABLE avait été décidable ?

Exercice 4 : complexité temporelle

On rappelle qu'un chemin simple dans un graphe non orienté est un chemin sans répétition de sommet.

1. Soit SPATH $= \{\langle G, a, b, k\rangle \mid G$ contient un chemin simple de a à b de longueur **au plus** k $\}$.
   Montrer que SPATH $\in$ **P**.
2. Soit HAMPATH $= \{\langle G, a, b\rangle \mid$ il existe un chemin Hamiltonien dans le graphe **orienté** G entre a et b $\}$
   et UHAMPATH $= \{\langle G, a, b\rangle \mid$ il existe un chemin Hamiltonien dans le graphe **non orienté** G entre a et b $\}$.
   On veut montrer que UHAMPATH est **NP**-complet, en utilisant le fait que HAMPATH est **NP**-complet.
   (a) Montrer que UHAMPATH $\in$ **NP**.
   (b) Proposer une fonction de transformation f qui transforme un graphe orienté $< G, a, b > \in$ HAMPATH en un graphe non orienté $< G', a, b > \in$ UHAMPATH (indice : ajouter des sommets supplémentaires de façon à forcer le parcours des sommets à avoir lieu dans un sens particulier), et vérifiant en plus les questions (c) à (e) suivante.
   (c) Montrer qu'avec cette transformation f, $w \in$ HAMPATH $\Rightarrow f(w) \in$ UHAMPATH.
   (d) Montrer qu'avec cette transformation f, $f(w) \in$ UHAMPATH $\Rightarrow w \in$ HAMPATH.
   (e) Montrer que f s'exécute en temps polynomial.
   (f) Que peut-on en conclure ? On justifiera précisément la conclusion.
3. Soit LPATH $= \{\langle G, a, b, k\rangle \mid G$ contient un chemin simple de a à b de longueur **au moins** k $\}$.
   On veut montrer que LPATH est **NP**-complet en se basant sur le fait que UHAMPATH est **NP**-complet.
   (a) montrer que LPATH $\in$ **NP**.
   (b) Proposer une fonction de transformation f qui transforme un graphe orienté $< G, a, b > \in$ UHAMPATH en un graphe non orienté $< G', a, b, k > \in$ LPATH, et vérifiant en plus les questions (c) à (e) suivante.
   (c) Montrer qu'avec cette transformation f, $w \in$ UHAMPATH $\Rightarrow f(w) \in$ LPATH.
   (d) Montrer qu'avec cette transformation f, $f(w) \in$ LPATH $\Rightarrow w \in$ UHAMPATH.
   (e) Montrer que f s'exécute en temps polynomial.
   (f) Que peut-on en conclure ? On justifiera précisément la conclusion.

Exercice 5 : P-space complétude

Montrer que le langage INPLACE= $\{\langle M, w\rangle \mid M$ accepter w en restant dabs les $|w|$ premières cellules de la bande$\}$ est **P**-space complet. On pourra effectuer la démonstration en suivant les étapes suivantes :

1. Montrer que INPLACE est décidable (nécessaire car ceci n'est pas évident *a priori*).
2. Montrer que INPLACE $\in$ **PSPACE**.
3. Montrer que INPLACE est **PSPACE**-difficile.
4. Conclure.