MASTER I D'INFORMATIQUE
INFO0809 : INFO. THÉORIQUE
PASCAL MIGNOT

UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE

Examen terminal

deuxième session de juin 2012

Notes :
– Seul l'aide-mémoire est autorisé. Tout autre document est interdit.
– L'utilisation de propriétés autres que celles de l'aide-mémoire devront être démontrées.
– Lorsque cela n'est pas précisé, l'alphabet Σ est $\{0, 1\}$.

Questions élémentaires

1. Soit le langage qui contient la totalité des livres en langue française existants et futurs [1]. Ce langage est-il régulier ? On justifiera.
2. Que peut se dire un étudiant s'il écrit un programme capable de résoudre le problème `PATH` en temps polynomial ? On rappelle que `PATH` est le langage contenant $\langle G, s, t\rangle$ qui contient les graphes G qui ont un chemin de s vers t.
3. Y-a-t-il un rapport entre le fait qu'un langage soit libre de contexte, et la classe de complexité dans laquelle il se trouve ?
4. Y-a-t-il un rapport entre le fait qu'un langage soit indécidable, et la classe de complexité dans laquelle il se trouve.
5. Donner un exemple d'un $w \in \texttt{SUBSET-SUM}$. Puis donner son certificat et le code de son vérificateur.
6. Donner un exemple d'un $w \in \texttt{SAT}_3$. Puis donner l'arbre d'exécution de la machine de Turing non déterministe à temps polynomial qui le décide.

Exercice 1 : régularité d'un langage

Soit le langage Σ^* qui contient 101 comme sous chaine.

1. Donner l'automate déterministe fini qui reconnait ce langage.
2. Donner l'automate non-déterministe fini qui reconnait ce langage.
3. Donner l'expression régulière qui reconnait ce langage.
4. Donner les classes d'équivalence de ce langage (au sens de Myhill-Nerode).
5. Peut-on dire combien d'autres langages partagent ces mêmes classes d'équivalence ? On justifiera.
6. Peut-on utiliser le lemme de l'étoile pour démontrer la régularité de ce langage ? Si oui, effectuer la démonstration, sinon expliquer pourquoi.
7. A partir des questions ci-dessus, quelles sont celles qui permettent de conclure que le langage est régulier ?

Exercice 2 : $\texttt{E}_{\texttt{ADF}}$

Soit $\texttt{E}_{\texttt{ADF}} = \{< G > \ | G \text{ est une ADF et } \mathcal{L}(G) = \emptyset\}$.

1. Montrer que $\texttt{E}_{\texttt{ADF}} \in \mathcal{R}$.
2. Montrer que $\texttt{E}_{\texttt{ADF}} \in \mathbf{P}$.

Exercice 3 : $\mathcal{RE}$, $co\mathcal{RE}$ et $\mathcal{R}$

Soit le langage $L_w = \{M \text{ tel que } w \text{ appartient au langage reconnu par } M\}$.

1. Est-ce que $L_w \in \mathcal{RE}$?
2. Est-ce que $L_w \in co\mathcal{RE}$?
3. Peut-on déduire des deux questions précédentes si $L_w \in \mathcal{R}$?
4. Aurait-on pu arriver au même résultat qu'à la question précédente plus rapidement ?
5. Est-ce que $\bigcup_w L_w \in \mathcal{R}$?

1. On pourra faire l'hypothèse optimiste que des livres seront écrits jusqu'à ce que le soleil se transformera en supernova, et détruise la terre.

Exercice 4 : indécidabilité de $\mathtt{A}_{\epsilon\mathtt{MT}}$

Soit $\mathtt{A}_{\epsilon\mathtt{MT}} = \{< M > \mid M$ est une MT qui accepte $\epsilon\}$.

1. Montrer que $\mathtt{A}_{\epsilon\mathtt{MT}}$ est indécidable de $\mathtt{A}_{\mathtt{MT}}$ à $\mathtt{A}_{\epsilon\mathtt{MT}}$.
2. Démontrer ce résultat en utilisant une autre méthode.

Exercice 5 : fermeture par concaténation

1. $\mathcal{RE}$ est-il fermé par concaténation ?
2. $co\mathcal{RE}$ est-il fermé par concaténation ?
3. $\mathcal{R}$ est-il fermé par concaténation ?
4. **P** est-il fermé par concaténation ?
5. **NP** est-il fermé par concaténation ?

Exercice 6 : classes de complexité

On suppose que l'on dispose de quatre langages A, B, C et D dont on ne connait que les faits suivants sur ces langages :

– Il existe une réduction en temps polynomial de A en B.
– Il existe une réduction en temps polynomial de B en C.
– Il existe une réduction en temps polynomial de D en C.

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elles sont toujours vraies, toujours fausses (dans ces deux cas, on justifiera pourquoi) ou possibles (on donnera alors une condition que la rend vraie).

1. si A est **NP**-complet, alors C est **NP**-complet.
2. A est **NP**-complet et $C \in$ **P**.
3. B est **NP**-complet et $D \in$ **P**.
4. si A est **NP**-complet et $B \in$ **NP**, alors B est **NP**-complet.
5. si C est **NP**-complet, alors $D \in$ **NP**.
6. $C \in$ **P** et le complément de $D \notin$ **P**.
7. $B \notin$ **P** et $A \in$ **NP**.

Exercice 7 : Tautologie

Une formule booléenne ϕ est une tautologie si elle est vraie quelque soit la valeur de vérité de ses littéraux.
Soit le langage TAUTOLOGY :

$$\mathtt{TAUTOLOGY} = \{\langle\phi\rangle \text{ tel que } \phi \text{ est une tautologie }\}$$

1. Donner un exemple d'une formule booléenne $\phi \in \mathtt{TAUTOLOGY}$.
2. Est-ce-que $\mathtt{TAUTOLOGY} \in$ **NP** ?
3. Soit FALSIFIABLE, l'ensemble complémentaire de TAUTOLOGY. Décrire le langage FALSIFIABLE, et donner un exemple d'une formule booléenne $\phi \in \mathtt{FALSIFIABLE}$.
4. Est-ce-que $\mathtt{FALSIFIABLE} \in$ **NP** ?
5. Est-ce-que $\mathtt{SAT} \leq_p \mathtt{FALSIFIABLE}$ en temps polynomial ?
6. Que peut-on en déduire sur FALSIFIABLE ?
7. Que peut-on en déduire sur TAUTOLOGY ?