Задача о максимизации разности корреляций векторов

Требуется построить вектор f_3 по заданным f_1 и f_2 так, чтобы разность корреляций f_2 с f_3 и f_1 с f_3 была максимальной:

$$(f_2 f_3) - (f_1 f_3) = \max\,. \tag{1}$$

Здесь $(f_1 f_2)$ — просто скалярное произведение, в случае сигналов это соответствует коэффициенту корреляции сигналов (ненормированному).

Берём вектор f_3 в плоскости векторов f_1 и f_2, т. е. $f_3 = \alpha f_1 + \beta f_2$, где α, β — неопределённые вещественные коэффициенты.

Условие максимизации разности корреляций

$$(f_2 f_3) - (f_1 f_3) = \alpha[(f_1 f_2) - (f_1 f_1)] + \beta[(f_2 f_2) - (f_1 f_2)] = \max\,. \tag{2}$$

Эта величина неограниченно растёт при $\alpha, \beta \to \infty$, поэтому введём дополнительное условие нормировки f_3 на единицу: $(f_3 f_3) = 1$, или

$$\alpha^2 (f_1 f_1) + 2\alpha\beta(f_1 f_2) + \beta^2 (f_2 f_2) = 1. \tag{3}$$

Из данного уравнения выразим α:

$$\alpha_{1,2} = \frac{-\beta(f_1 f_2) \pm \sqrt{\beta^2[((f_1 f_2))^2 - (f_1 f_1)(f_2 f_2)] + (f_1 f_1)}}{(f_1 f_1)}. \tag{4}$$

Подставим в условие на max, получим выражение для β:

$$\beta_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{(f_1 f_1) - 2(f_1 f_2) + (f_2 f_2)}}. \tag{5}$$

Тогда $\alpha_{1,2}$ находится по формуле (4). В итоге $f_3 = \alpha f_1 + \beta f_2$. Разные знаки «$\pm$» дадут или максимум, или минимум. Выберем максимум и получим нужный вектор f_3.