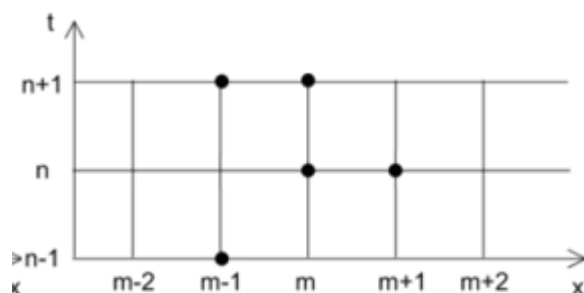


Белоклоков

Шаблон № 8, начальное условие «ступенька», $\sigma = 0.25$



8

$$u_t + \lambda u_x = 0$$

$$u_m^{n+1} = \alpha_{-1}^{-1} u_{m-1}^{n-1} + \alpha_0^0 u_m^n + \alpha_1^0 u_{m+1}^n + \alpha_{-1}^1 u_{m-1}^{n+1}$$

$$\sigma = \frac{\lambda \tau}{h}$$

Система:

$$\begin{cases} \alpha_{-1}^{-1}(1 - \sigma) - \alpha_1^0 + \alpha_{-1}^1(1 + \sigma) = \sigma \\ \alpha_{-1}^{-1} + \alpha_0^0 + \alpha_1^0 + \alpha_{-1}^1 = 1 \\ \alpha_{-1}^{-1}(\sigma - 1)^2 + \alpha_1^0 + \alpha_{-1}^1(\sigma + 1)^2 = \sigma^2 \\ \alpha_{-1}^{-1}(\sigma - 1)^3 + \alpha_1^0 - \alpha_{-1}^1(\sigma + 1)^3 = -\sigma^3 \end{cases}$$

$$Ox: \alpha_{-1}^{-1}, \quad Oy: \alpha_1^0$$

(1т) Множество положительных по Фридрихсону:

$$\begin{cases} \alpha_0^0 = \frac{1 - \alpha_1^0(2 + \sigma) - 2\sigma\alpha_{-1}^{-1}}{1 + \sigma} \geq 0 \\ \alpha_{-1}^1 = 1 - \alpha_{-1}^{-1} - \alpha_1^0 - \alpha_0^0 \geq 0 \end{cases}$$

(2т) Однопараметрическое множество схем 2-го порядка:

$$\alpha_1^0 = \frac{\sigma}{2 + \sigma} (2(1 - \sigma)\alpha_{-1}^{-1} - 1)$$

(3т) Схема 3-го порядка:

$$C: \alpha_{-1}^{-1} = \frac{1 + \sigma}{2(1 - \sigma)(2 - \sigma)}, \quad \alpha_1^0 = \frac{\sigma(2\sigma - 1)}{4 - \sigma^2}$$

(4т) Вершины двухпараметрического множества:

$$A0: \alpha_{-1}^{-1} = 0, \quad \alpha_1^0 = 0$$

$$A1: \alpha_{-1}^{-1} = \frac{\sigma}{1-\sigma}, \quad \alpha_1^0 = 0$$

$$A2: \alpha_{-1}^{-1} = \frac{1+\sigma}{2-\sigma}, \quad \alpha_1^0 = \frac{1-2\sigma}{2-\sigma}$$

$$A3: \alpha_{-1}^{-1} = 0, \quad \alpha_1^0 = \frac{1}{2+\sigma}$$

A1 – схема с минимальной аппроксимационной вязкостью

(5т) Схема 2-го наиболее близкая к области монотонности:

$$a = \left(\frac{2+\sigma}{\sigma(1-\sigma)} \right)^2 / 2$$

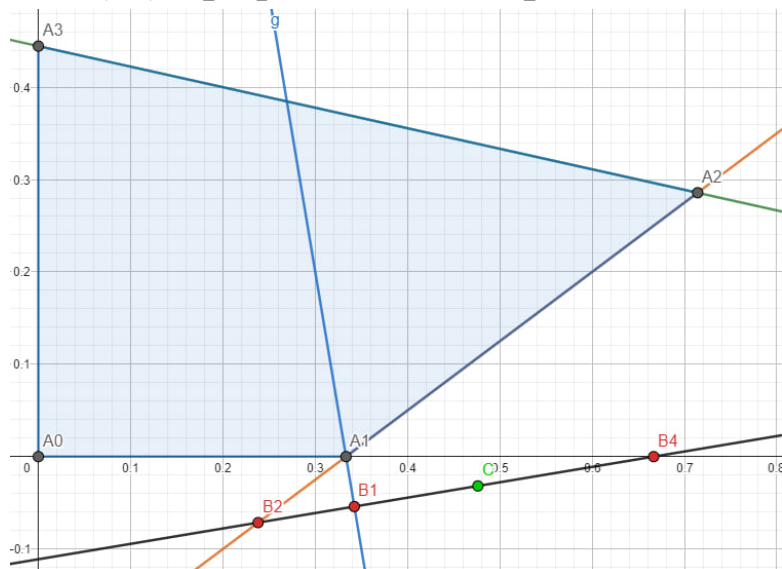
$$B1: \alpha_{-1}^{-1} = \frac{1+a\sigma}{(1-\sigma)(a+2)}, \quad \alpha_1^0 - \text{из (2т)}$$

Две схемы по разные стороны B1:

$$B2: \alpha_{-1}^{-1} = \frac{\sigma(1+\sigma)}{(2-\sigma)(1-\sigma)}, \quad \alpha_1^0 = \frac{\sigma(2\sigma-1)}{2-\sigma}$$

$$B4: \alpha_{-1}^{-1} = \frac{1}{2(1-\sigma)}, \quad \alpha_1^0 = 0$$

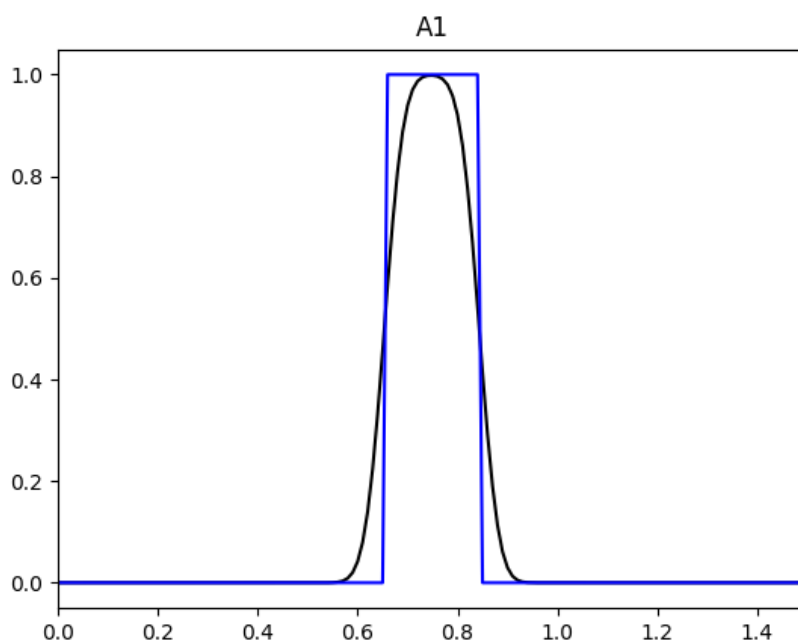
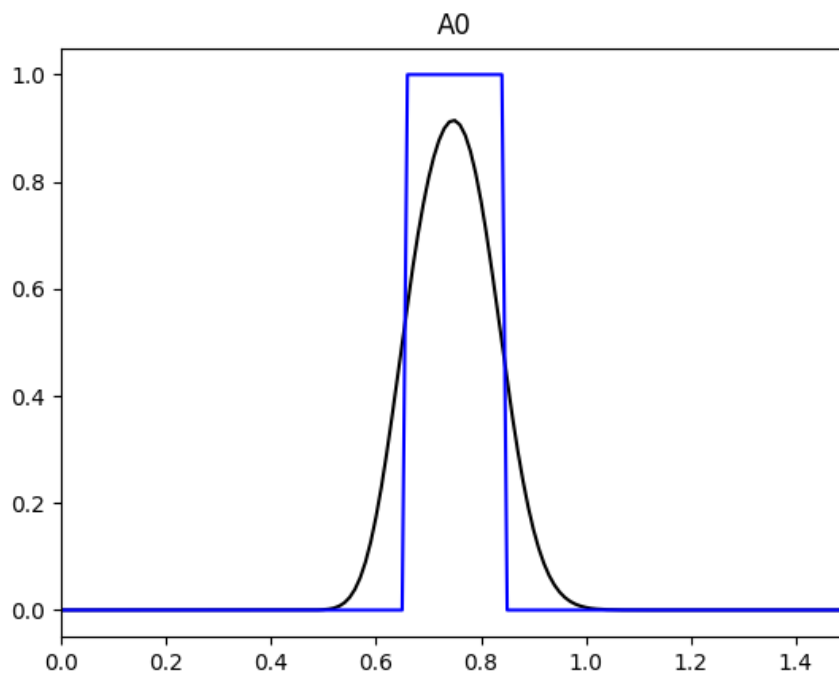
(6т) Графическое отображение:

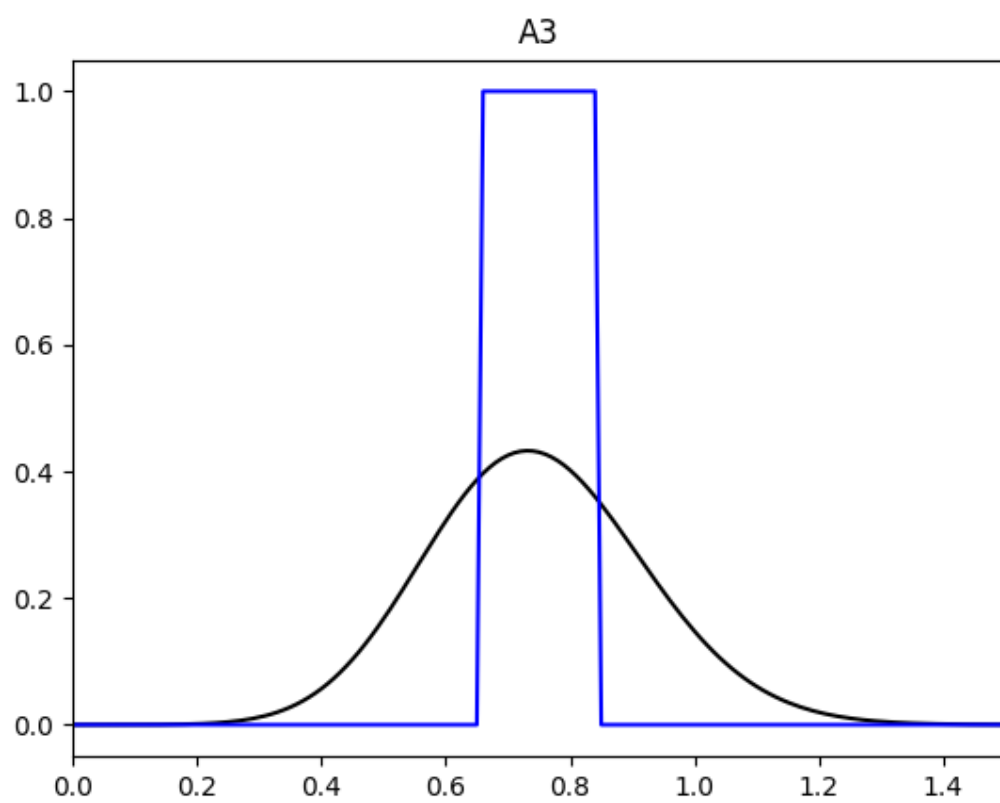
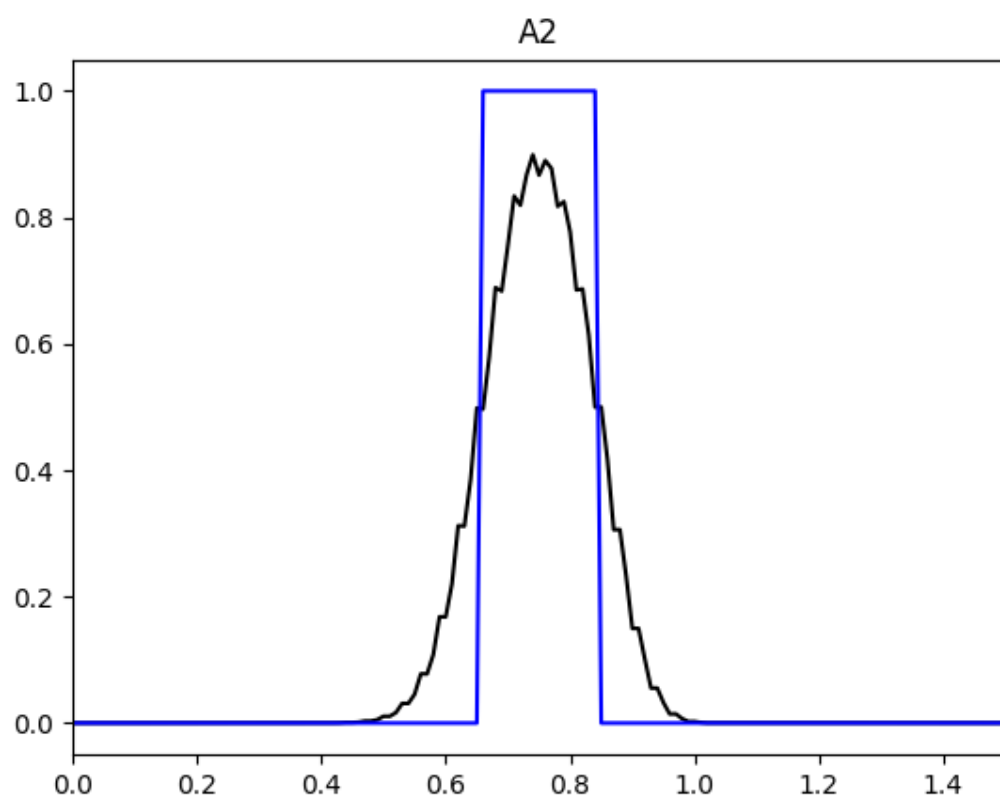


Численные расчеты.

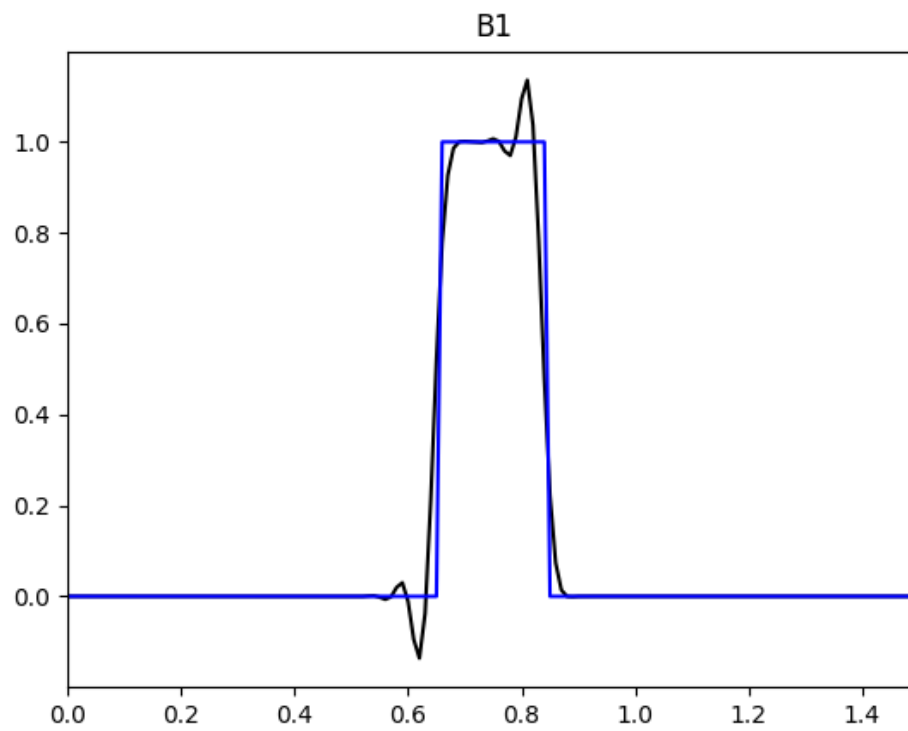
100 шагов по времени, $h = 0.01$, $\sigma = 0.25$

(1п) Все A.. точки:

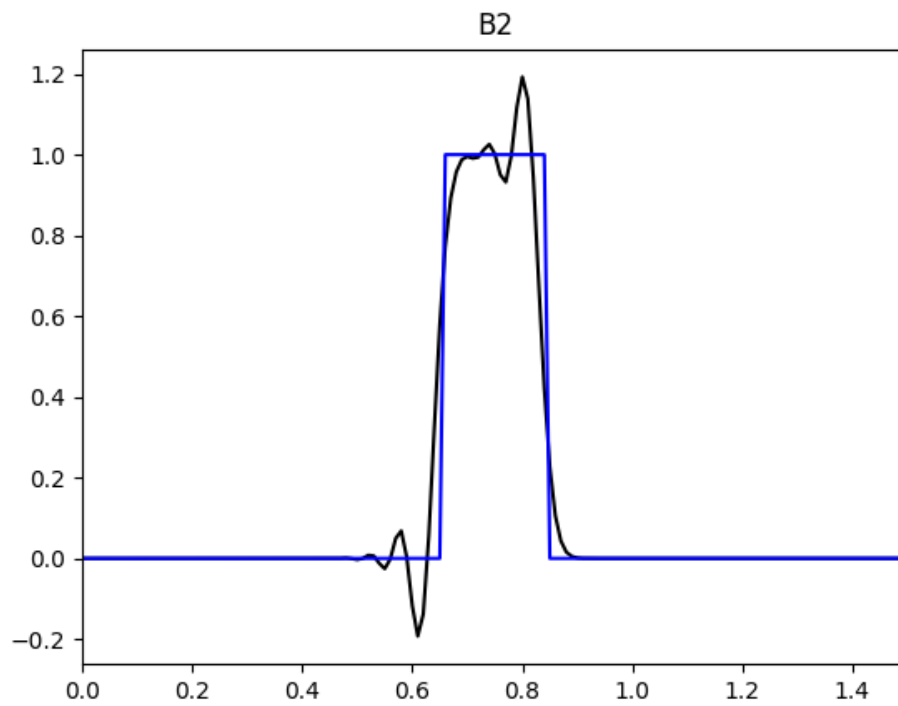


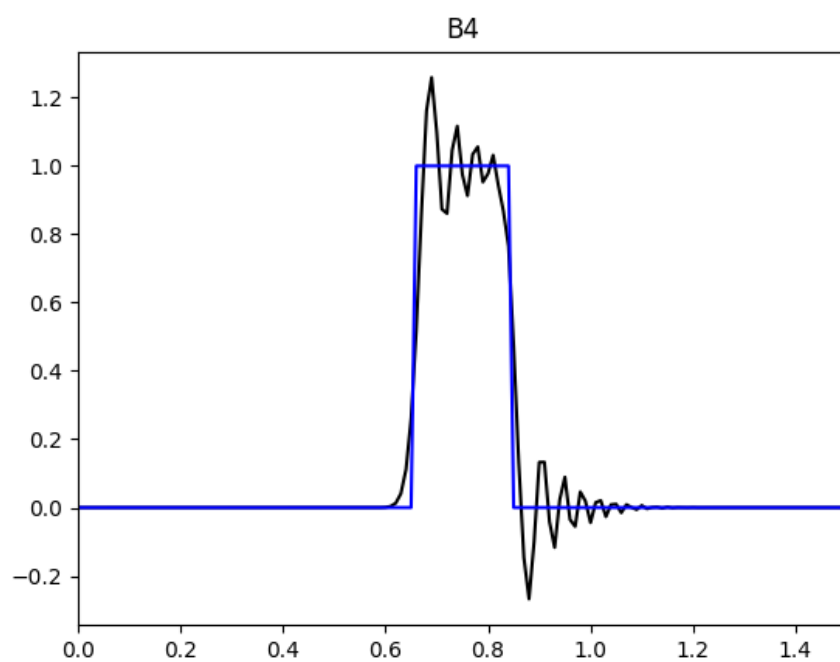


(2π) B1:

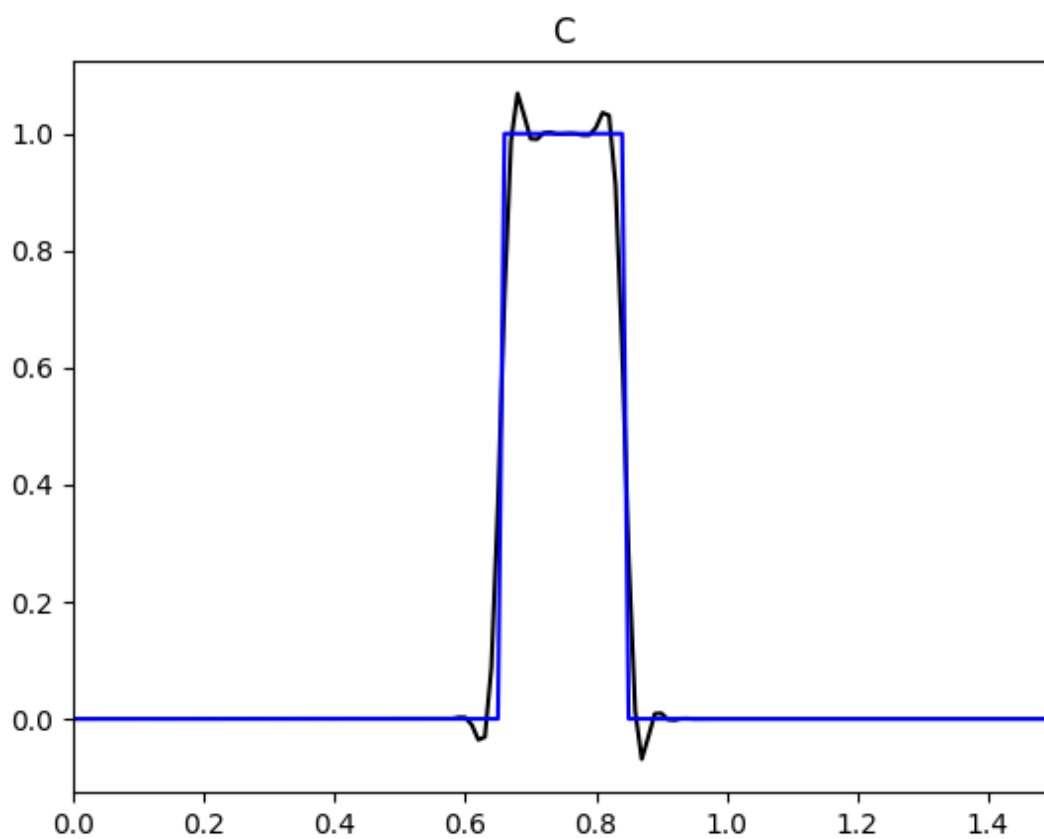


(3π) B2, B4:

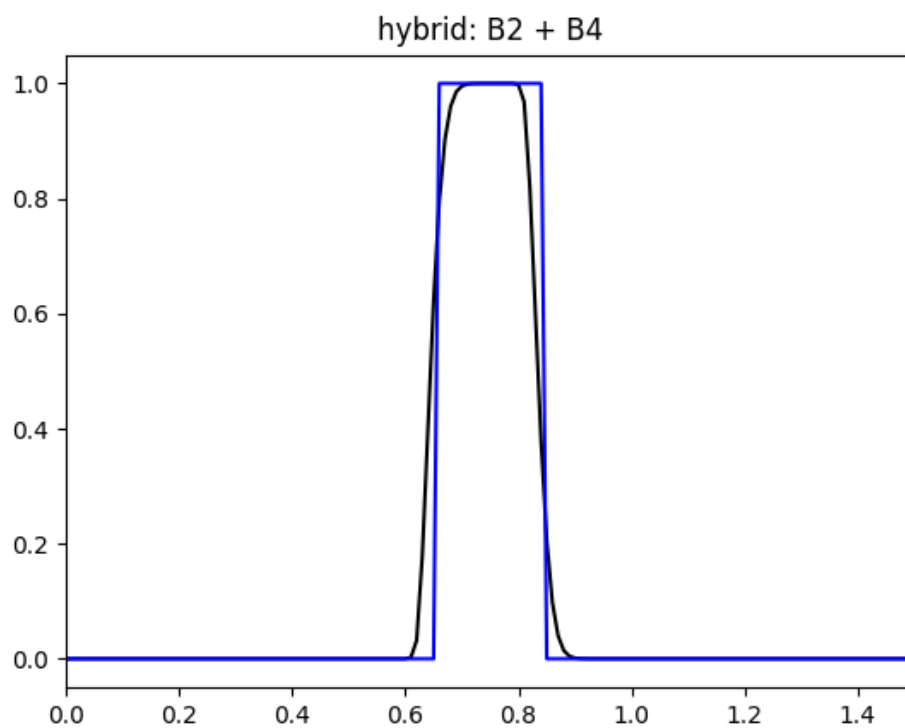




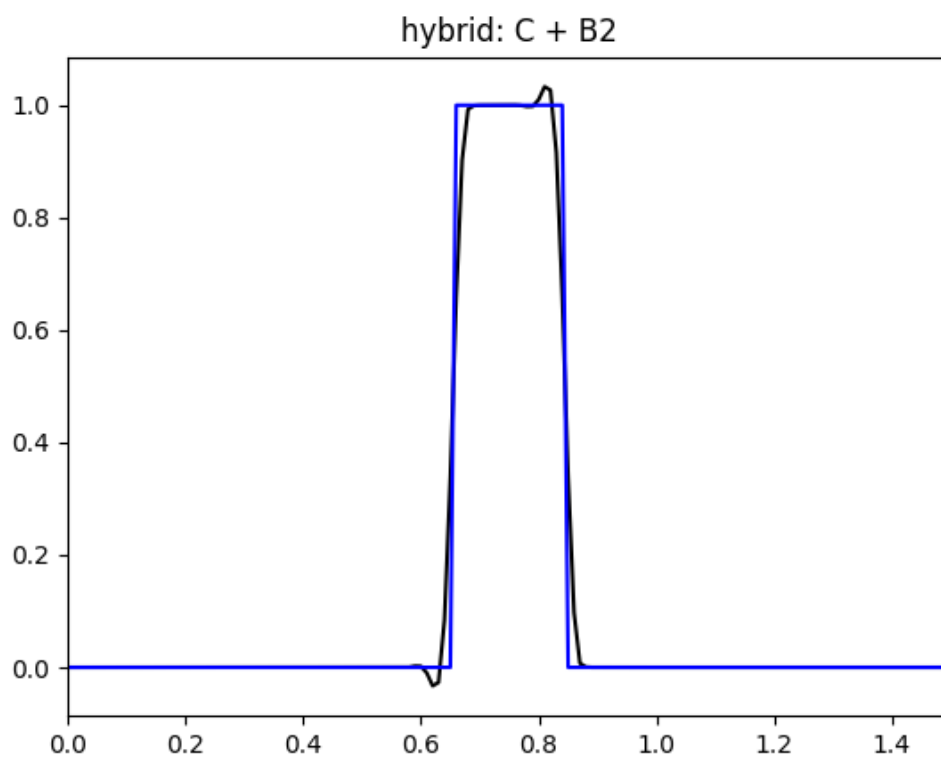
(4π) C:



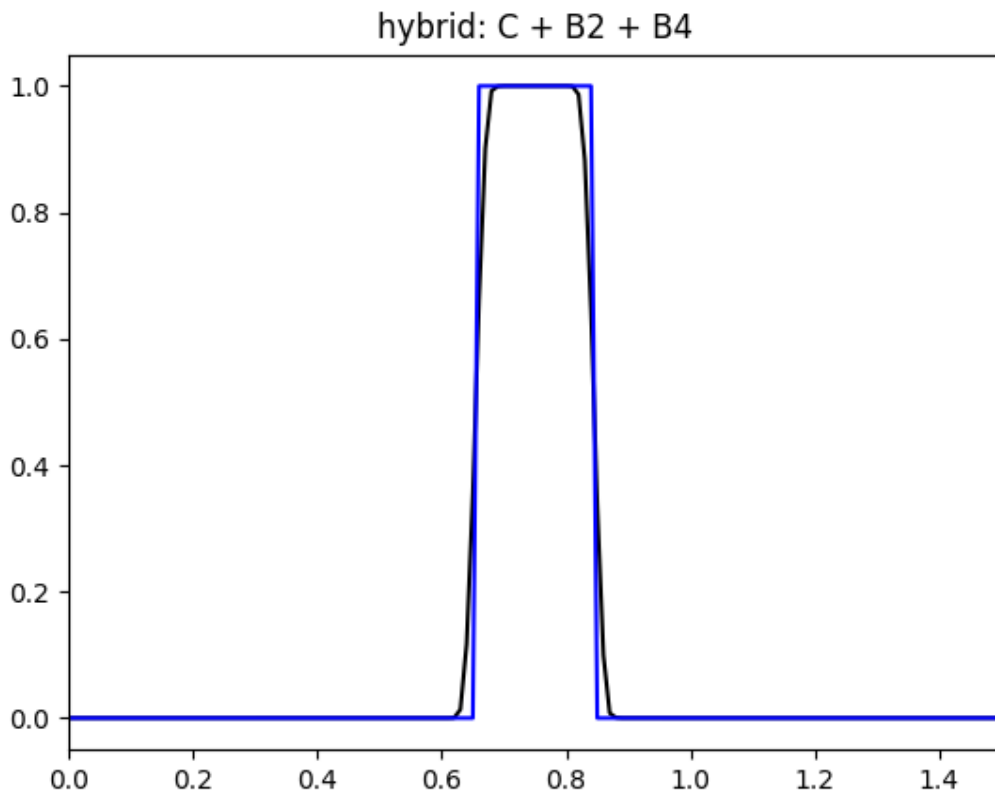
(5п) Гибридная, B2 + B4:



(6п) Гибридная, C + B2:



(7п) Гибридная, C + B2 + B4:



Сеточно-характеристический критерий монотонности:

$$\min_{1,2}(u_{m-1}^{n-1}, u_m^n) \leq u_m^{n+1} \leq \max_{1,2}(u_{m-1}^{n-1}, u_m^n)$$