

ЭЛЕКТРОСТАТИКА. МАГНИТОСТАТИКА.
ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

Методические указания к выполнению домашнего задания по курсу общей физики

Под редакцией д-ра техн. наук, проф. А.М. Макарова

Москва, 2011

1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

1.1. Основные теоретические сведения

Теорема Гаусса для вектора напряженности электростатического поля \vec{E} в диэлектрике. Поле вектора \vec{E} в диэлектрике обладает замечательным и важным свойством: поток вектора \vec{E} сквозь любую замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме зарядов (как сторонних q , так и связанных q'), охватываемых этой поверхностью, деленной на ϵ_0 , т. е.

$$\oint_S (\vec{E}, d\vec{s}) = \frac{1}{\epsilon_0} (q + q'), \quad (1.1)$$

где вектор $d\vec{s} = \vec{n}ds$, \vec{n} — нормаль к элементу поверхности ds , внешняя по отношению к объему, охватываемому поверхностью S ; кружок у знака интеграла означает, что интегрирование проводится по замкнутой поверхности S . Уравнение (1.1) является математическим выражением теоремы Гаусса для вектора напряженности \vec{E} электростатического поля в диэлектрике в интегральной форме.

Дифференциальная форма теоремы Гаусса для вектора напряженности электростатического поля \vec{E} в диэлектрике:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho'), \quad (1.2)$$

где ρ и ρ' — объемные плотности сторонних и связанных зарядов в той точке, где вычисляется $\text{div } \vec{E}$. При использовании теорем (1.1) и (1.2) для вакуума следует учесть, что в этом случае $q' = \int_V \rho' dV = 0$ и $\rho' = 0$.

Теорема Гаусса для вектора поляризованности среды \vec{P} : поток вектора \vec{P} сквозь любую замкнутую поверхность S равен взятому с обратным знаком суммарному связанному заряду

диэлектрика в объеме, охватываемом поверхностью интегрирования S , т. е.

$$\oint_S (\vec{P}, d\vec{s}) = -q'. \quad (1.3)$$

Дифференциальная форма теоремы Гаусса для вектора поляризованности среды \vec{P} :

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho'. \quad (1.4)$$

Общее выражение для оператора div в ортогональных криволинейных системах координат приведено в приложении к методическим указаниям.

Если выразить заряд q' через поток вектора \vec{P} по формуле (1.3) и подставить его в уравнение (1.1), то выражение (1.1) можно преобразовать к следующему виду:

$$\oint_S ((\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}), d\vec{s}) = q.$$

Величину, стоящую под знаком интеграла во внутренних скобках, обозначают буквой \vec{D} и называют вектором электрического смещения, или просто вектором \vec{D} :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (1.5)$$

Поток этого вектора через любую замкнутую поверхность S зависит только от стороннего заряда q , находящегося в ограниченном поверхностью интегрирования S объеме.

Теорема Гаусса для вектора электрического смещения \vec{D} : поток вектора \vec{D} сквозь произвольную замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме сторонних зарядов, охватываемых этой поверхностью, т. е.

$$\oint_S (\vec{D}, d\vec{s}) = q. \quad (1.6)$$

Заметим, что свойство (1.6) поля вектора \vec{D} оправдывает введение этого вектора: во многих случаях он значительно упрощает изучение электрического поля в диэлектриках [1].

Дифференциальная форма теоремы Гаусса для вектора электрического смещения \vec{D} :

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (1.7)$$

т. е. дивергенция поля вектора \vec{D} равна объемной плотности стороннего заряда в той же точке.

Если диэлектрик линейный и изотропный, то вектор поляризованности диэлектрика

$$\vec{P} = \epsilon_0 \kappa \vec{E}, \quad (1.8)$$

где κ — диэлектрическая восприимчивость вещества — скалярная величина, не зависящая от модуля вектора напряженности электрического поля. Подставив зависимость (1.8) в соотношение (1.5), получим

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \kappa) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}. \quad (1.9)$$

Безразмерную величину $\epsilon = 1 + \kappa$ называют диэлектрической проницаемостью диэлектрика.

1.2. Методические рекомендации к решению задач по теме «Электростатика»

В условиях предлагаемых задач, как правило, задан (явно в виде q или неявно в виде разности потенциалов) сторонний заряд на обкладках конденсатора. Выбирая поверхность интегрирования в соответствии с видом симметрии каждой задачи, по теореме Гаусса (1.6) находим распределение зависимости вектора \vec{D} от пространственных координат, которые для каждого рассматриваемого случая могут быть различны: либо декартовы (x, y, z) , либо сферические (r, θ, φ) , либо цилиндрические (r, φ, z) . Ниже мы будем рассматривать сферически симметричный случай, поэтому определяемые величины будут зависеть только от одной пространственной координаты — радиальной координаты r .

Далее из соотношения (1.9) определяем зависимость вектора напряженности электростатического поля \vec{E} от радиальной координаты в диэлектрике:

$$E(r) = \frac{D(r)}{\epsilon_0 \epsilon(r)}. \quad (1.10)$$

Вектор поляризованности \vec{P} связан с вектором напряженности электростатического поля \vec{E} соотношением (1.8), поэтому

$$P(r) = \epsilon_0 [\epsilon(r) - 1] E(r). \quad (1.11)$$

В результате поляризации среды в диэлектрике возникают связанные заряды с объемной плотностью ρ' , которая определяется из соотношения (1.4). Объемная плотность избыточных связанных зарядов внутри однородного диэлектрика будет равна нулю, если внутри него отсутствует объемная плотность сторонних электрических зарядов ($\rho = 0$). Для неоднородного диэлектрика ($\text{grad } \epsilon \neq 0$) к указанному условию необходимо добавить условие $\vec{E} = 0$ [1].

В нашем случае $\rho = 0$, поэтому появление связанных зарядов с объемной плотностью ρ' обусловлено неоднородностью диэлектрика и наличием напряженности электрического поля между обкладками конденсатора.

В результате поляризации среды на границе раздела диэлектриков или на границе раздела «диэлектрик — вакуум» могут появляться также поверхностные связанные заряды. Зависимость между поляризованностью среды \vec{P} и поверхностной плотностью σ' связанных зарядов на границе раздела диэлектриков имеет вид

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma', \quad (1.12)$$

где P_{2n} и P_{1n} — проекции вектора поляризованности \vec{P} в диэлектриках 2 и 1 на общую нормаль \vec{n} к границе раздела в данном месте (вектор \vec{n} проводят от диэлектрика 1 к диэлектрику 2).

Из соотношения (1.12) следует, что на границе раздела диэлектриков нормальная составляющая вектора \vec{P} испытывает разрыв, величина которого равна зависящей от свойств диэлек-

триков поверхностной плотности σ' связанных зарядов. Если среда 2 является вакуумом, то условие (1.12) приобретает более простой вид:

$$\sigma'(M) = P_n(M), \quad (1.13)$$

где M — точка, находящаяся на поверхности диэлектрика; P_n — проекция вектора \vec{P} на нормаль \vec{n} , внешнюю по отношению к занятой диэлектриком области. Знак проекции P_n определяет и знак поверхностной плотности σ' связанного заряда в данной точке.

Далее необходимо найти суммарный связанный заряд диэлектрика:

$$q' = \int_V \rho'(V) dV + \int_S \sigma'(M) ds. \quad (1.14)$$

В соотношении (1.14) первое слагаемое учитывает суммарный связанный заряд, распределенный по объему диэлектрика, а второе — суммарный связанный заряд, распределенный по всей поверхности рассматриваемого диэлектрика. Заметим, что алгебраическое значение q' в (1.14) должно быть равно нулю. Этот факт используется для проверки полученных результатов.

Для нахождения емкости C конденсатора необходимо определить разность потенциалов между обкладками:

$$U = \varphi(R) - \varphi(R_0) = \int_R^{R_0} (\vec{E}, d\vec{r}).$$

Тогда по определению

$$C = \frac{q}{U}, \quad (1.15)$$

где заряд q соответствует поверхности конденсатора, потенциал которой равен $\varphi(R)$. Под зарядом конденсатора q имеют в виду заряд, расположенный на положительно заряженной обкладке.

Замечание. Полученное значение емкости C конденсатора определено верно, если оно удовлетворяет соотношению

$$\frac{CU^2}{2} = \int_V w dV, \quad (1.16)$$

где $w = \frac{(\vec{E}, \vec{D})}{2}$ — объемная плотность энергии электростатического поля; V — объем, в котором локализовано электростатическое поле в конденсаторе.

1.3. Пример выполнения домашнего задания по теме «Электростатика»

Задача. Радиусы внешней и внутренней обкладок сферического конденсатора равны R_0 и R соответственно. Заряд конденсатора равен q . Диэлектрическая проницаемость среды между обкладками изменяется по закону $\epsilon = f(r)$, где r — расстояние от центра сфер (рис. 1.1).

Найти распределение модулей векторов электростатического поля: электрического смещения \vec{D} , напряженности \vec{E} и поляризованности \vec{P} в зависимости от радиальной координаты $r \in (R; R_0)$.

Определить поверхностную плотность связанных зарядов на внутренней σ'_1 и внешней σ'_2 поверхностях диэлектрика, распределение объемной плотности связанных зарядов $\rho'(r)$ и емкость C конденсатора.

Выполнить проверку полученных результатов.

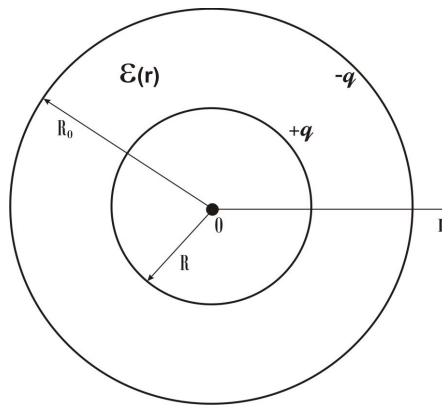


Рис. 1.1

Решение. Пусть заданы следующие зависимости:

$$\frac{R_0}{R} = \frac{3}{1}, \quad \epsilon(r) = \frac{R_0^n}{R_0^n + R^n - r^n}, \quad n = 4. \quad (1.17)$$

Преобразуем зависимость для диэлектрической проницаемости $\epsilon(r)$ с учетом заданного соотношения $R_0 = 3R$:

$$\epsilon(r) = \frac{(3R)^4}{(3R)^4 + R^4 - r^4} = \frac{81R^4}{82R^4 - r^4}. \quad (1.18)$$

Расчет характеристик электростатического поля начнем с определения вектора электрического смещения $\vec{D}(r)$ между обкладками конденсатора.

Пусть сторонний заряд $q > 0$ равномерно распределен по внутренней обкладке. Воспользуемся теоремой Гаусса (1.6):

$$\oint_S (\vec{D}, d\vec{s}) = q.$$

Рассматриваемая задача обладает сферической симметрией, поэтому в качестве поверхности интегрирования S выбираем сферическую поверхность с произвольным радиусом $R < r < R_0$ и центром в начале координат, которая на рис. 1.2 изображена пунктиром.

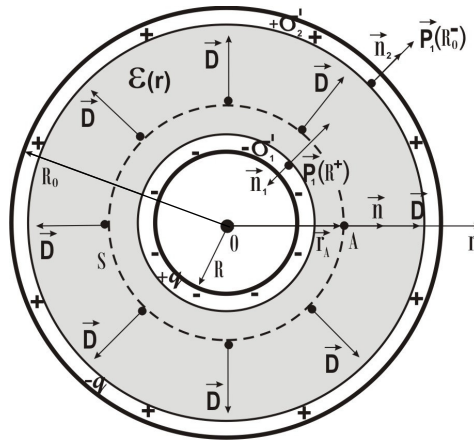


Рис. 1.2

Так как поле вектора \vec{D} сферически симметрично, в каждой точке поверхности S направление вектора \vec{D} совпадает с направлением радиус-вектора \vec{r} точки наблюдения (точка A на рис. 1.2) и направлением внешней нормали \vec{n} к элементу ds поверхности S ; заметим также, что модуль вектора \vec{D} в каждой точке выбранной произвольной поверхности S является постоянной величиной. Поэтому из интегральной формулировки теоремы Гаусса (1.6) для вектора \vec{D}

$$\oint_S (\vec{D}, d\vec{s}) = \oint_S D_n ds = q,$$

где $ds = r^2 \sin \theta d\theta d\phi = r^2 d\Omega$ ($d\Omega$ — элемент телесного угла, под которым из начала координат виден элемент поверхности ds),

с учетом $D_n = D(r)$ и $S = r^2 \Omega = r^2 4\pi$. Вынося $D(r)$ из под знака интеграла и выполняя интегрирование, получаем

$$D(r) 4\pi r^2 = q.$$

Зависимость $D(r)$ определена:

$$D(r) = \frac{q}{4\pi r^2}, \quad R < r < R_0. \quad (1.19)$$

Найдем зависимость напряженности $\vec{E}(r)$ электростатического поля между обкладками конденсатора. Связь напряженности и электрического смещения для изотропных и линейных диэлектриков имеет вид (1.9)

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E},$$

откуда

$$E(r) = \frac{D(r)}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon_0 \epsilon}.$$

С учетом соотношения (1.18) для диэлектрической проницаемости среды $\epsilon(r)$ зависимость $E(r)$ можно записать так:

$$E(r) = \frac{q(82R^4 - r^4)}{324\pi\epsilon_0 R^4 r^2}, \quad R < r < R_0. \quad (1.20)$$

Найдем зависимость поляризованности среды $\vec{P}(r)$ между обкладками конденсатора. Для линейных и изотропных диэлектриков связь между векторами \vec{P} и \vec{E} имеет вид (1.8):

$$\vec{P} = \epsilon_0 \kappa \vec{E},$$

откуда с учетом зависимости напряженности электростатического поля от радиальной координаты (1.20) получаем распределение поляризованности среды $P(r)$ между обкладками конденсатора:

$$P(r) = \frac{q(r^4 - R^4)}{324\pi R^4 r^2}, \quad R < r < R_0. \quad (1.21)$$

Заметим, что направление вектора поляризованности среды \vec{P} совпадает с направлением радиус-вектора \vec{r} , откуда следует, что тангенциальные проекции вектора \vec{P} обращаются в нуль ($P_\theta = 0, P_\phi = 0$), а радиальная проекция $P_r(r)$ определена зависимостью (1.21).

Рассмотрим вопрос об определении поверхностной плотности связанных зарядов на внутренней и внешней поверхностях сферического слоя диэлектрика, расположенного между обкладками конденсатора. Под действием электрического поля, созданного сторонними зарядами q и $-q$, находящимися на обкладках конденсатора, диэлектрик поляризуется, и в результате поляризации на его внутренней и внешней поверхностях появляются связанные заряды. Вопрос о возникновении объемных связанных зарядов рассмотрим ниже.

Для определения поверхностной плотности связанных зарядов на внутренней и внешней поверхностях сферического слоя диэлектрика, расположенного между обкладками конденсатора, воспользуемся соотношением (1.13). В рассматриваемой задаче на внутренней поверхности диэлектрика (обозначим ее индексом 1) векторы $\vec{P}_1(R^+)$ и \vec{n}_1 в любой точке поверхности направлены противоположно (см. рис. 1.2), и знак поляризационного заряда отрицательный, что естественно согласуется с механизмом поляризации диэлектрика. В этом примере для заданной зависимости $\epsilon(r)$ имеем $(P_1(R^+))_{n_1} = 0$, откуда следует, что поверхностная плотность связанных зарядов равна нулю: $\sigma'_1 = 0$. На внешней поверхности 2 диэлектрика векторы $\vec{P}_1(R_0^-)$ и \vec{n}_2 в любой точке поверхности сонаправлены, поэтому знак проекции $(P_1(R_0^-))_{n_2}$ положительный и поверхностная плотность связанных зарядов отлична от нуля:

$$\sigma'_2 = (P_1(R_0^-))_{n_2} = \frac{20q}{729\pi R^2}. \quad (1.22)$$

Для нахождения объемной плотности ρ' связанных зарядов внутри сферического слоя диэлектрика между пластинами конденсатора воспользуемся теоремой Гаусса (1.4) для поля вектора \vec{P} в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho',$$

т. е. дивергенция поля вектора \vec{P} равна взятой с обратным знаком объемной плотности ρ' избыточного связанного заряда в той же точке.

В рассматриваемой задаче между обкладками конденсатора находится изотропный, но неоднородный диэлектрик, диэлектрическая проницаемость которого изменяется только в радиальном направлении по закону (1.18):

$$\varepsilon(r) = \frac{81R^4}{82R^4 - r^4},$$

где r — расстояние от центра сфер. Заметим, что вектор поляризованности среды \vec{P} имеет единственную отличную от нуля компоненту P_r , которая зависит только от радиальной координаты r . В этих условиях естественно ожидать, что и объемная плотность связанного заряда внутри слоя диэлектрика также будет функцией только радиальной координаты r .

Для расчета объемной плотности связанных зарядов ρ' с помощью теоремы (1.4) воспользуемся выражением (П.2) из приложения для оператора div применительно к сферическим координатам:

$$\operatorname{div} \vec{P} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (P_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P_\phi}{\partial \phi}. \quad (1.23)$$

Из соображений симметрии ясно, что поляризованность диэлектрика в данном случае имеет только одну радиальную компоненту и зависит только от радиальной координаты и не зависит от угловых координат, и это подтверждено результатами расчетов (1.21), поэтому в правой части выражения (1.23) остается только первое слагаемое:

$$\operatorname{div} \vec{P} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_r). \quad (1.24)$$

При вычислении производной в правой части соотношения (1.24) учтем, что $P_r(r) = P(r)$, а зависимость $P(r)$ определена соотношением (1.21). Тогда для дивергенции вектора поляризованности среды имеем

$$\operatorname{div} \vec{P} = \frac{qr}{81\pi R^4},$$

откуда в соответствии с (1.4) для объемной плотности связанных зарядов ρ' получаем

$$\rho'(r) = -\frac{qr}{81\pi R^4}. \quad (1.25)$$

Выполним проверку полученных результатов. Для этого найдем суммарный связанный заряд диэлектрика по зависимости (1.14), используя при расчетах найденные соотношения (1.22) и (1.25) для поверхностной $\sigma'(r)$ и объемной $\rho'(r)$ плотностей связанного заряда:

$$q' = \int_R^{R_0} \left(-\frac{qr}{81\pi R^4} \right) 4\pi r^2 dr + \int_s \left(\frac{20q}{729\pi R^2} \right) ds. \quad (1.26)$$

В (1.26) первое слагаемое в правой части учитывает суммарный связанный заряд, распределенный по объему диэлектрика, а второе — суммарный связанный заряд, распределенный с постоянной поверхностной плотностью σ'_2 по внешней сферической поверхности диэлектрика с радиусом $R_0 = 3R$. Здесь также учтено, что на внутренней поверхности диэлектрика в данной задаче связанный заряд отсутствует.

Проведем расчет по формуле (1.26):

$$q' = \left(-\frac{q}{81\pi R^4} \right) 4\pi \left(\frac{(3R)^4}{4} - \frac{R^4}{4} \right) + \frac{20q}{729\pi R^2} 4\pi (3R)^2 = 0.$$

Отсюда следует, что зависимости $E(r)$, $D(r)$, $P(r)$, $\sigma'_1(r)$, $\sigma'_2(r)$, $\rho'(r)$ найдены верно.

Найдем емкость C сферического конденсатора с радиусами обкладок R и R_0 . Согласно определению емкости конденсатора ($C = q/U$), задача сводится к определению разности потенциалов U при заданном заряде q :

$$U = \varphi(R) - \varphi(R_0) = \int_R^{R_0} E_r(r) dr. \quad (1.27)$$

Здесь предполагается, что внутренняя обкладка имеет заряд $q > 0$, а путь интегрирования может быть любым, поэтому мы выбираем самый простой и удобный путь — по радиальной координате. Легко заметить, что радиальная проекция вектора напряженности электрического поля $E_r(r) = E(r)$ является единственной проекцией вектора напряженности электростатического поля, а зависимость $E(r)$ определена соотношением (1.20). После подстановки зависимости (1.20) для $E(r)$ в соотношение (1.27) и соответствующего интегрирования находим напряжение между обкладками конденсатора и его емкость:

$$U = \frac{23q}{162\pi\epsilon_0 R}; \quad C = \frac{162}{23}\pi\epsilon_0 R. \quad (1.28)$$

Полученное значение емкости C сферического конденсатора определено верно, если оно удовлетворяет соотношению (1.16):

$$\frac{CU^2}{2} = \int_V w dV,$$

где $CU^2/2$ — энергия заряженного конденсатора, а в правой части — эта же величина, записанная через полевые характеристики: $w = (\vec{E}, \vec{D})/2$ — объемная плотность энергии электроста-

тического поля; V — объем, в котором локализовано электростатическое поле в конденсаторе. Итак, проверим, удовлетворяет ли полученное значение C соотношению (1.16). Используя зависимости (1.19) и (1.20) для $D(r)$ и $E(r)$ и выполняя соответствующее интегрирование в правой части (1.16), получаем:

$$\int_V w dV = \int_R^{3R} \frac{1}{2} \frac{q}{4\pi r^2} \frac{q(82R^4 - r^4)}{324\pi\epsilon_0 R^4 r^2} 4\pi r^2 dr = \frac{23q^2}{324\pi\epsilon_0 R}.$$

Располагая зависимостями (1.28) для разности потенциалов U и емкости C , вычисляем значение $CU^2/2$ и убеждаемся в равенстве правой и левой частей соотношения (1.16). Отсюда следует, что зависимость для емкости C сферического конденсатора найдена правильно.

2. МАГНИТОСТАТИКА

2.1. Основные теоретические сведения

Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции \vec{B} в магнетике: циркуляция вектора \vec{B} по любому замкнутому контуру L равна произведению алгебраической суммы всех токов (как токов проводимости I , так и токов намагничивания I'), пронизывающих произвольную поверхность, натянутую на контур L , на магнитную постоянную μ_0 :

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 (I + I'). \quad (2.1)$$

Ток считается положительным, если его направление связано с направлением $d\vec{l}$ обхода по контуру правилом правого винта; противоположно направленный ток считается отрицательным.

Теорема о циркуляции вектора намагниченности \vec{J} : циркуляция вектора \vec{J} по любому замкнутому контуру L равна алгебраической сумме токов намагничивания I' , пронизывающих произвольную поверхность, натянутую на контур L , т. е.

$$\oint_L (\vec{J}, d\vec{l}) = I'. \quad (2.2)$$

Дифференциальная форма теоремы о циркуляции вектора намагниченности \vec{J} :

$$\text{rot } \vec{J} = \vec{j}', \quad (2.3)$$

т. е. ротор вектора намагниченности \vec{J} равен объемной плотности тока намагничивания \vec{j}' в той же точке пространства. Общее выражение для оператора rot в ортогональных криволинейных системах координат приведено в приложении (формула (П.3)).

Исключив в (2.1) ток I' с помощью (2.2), сформируем вектор напряженности магнитного поля:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J},$$

циркуляция которого по любому замкнутому контуру L зависит только от алгебраической суммы токов проводимости I , пронизывающих произвольную поверхность, натянутую на контур L :

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = I. \quad (2.4)$$

Заметим, что воспользоваться соотношениями (2.1) и (2.4) на практике можно только в том случае, если рассматриваемая физическая ситуация обладает достаточно высокой степенью симметрии.

Если магнетик линейный и изотропный (не обязательно однородный), то имеют место зависимости для вектора намагниченности среды

$$\vec{J} = \chi \vec{H},$$

где χ — магнитная восприимчивость вещества (не зависящая от вектора напряженности магнитного поля \vec{H}), и вектора магнитной индукции:

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (2.5)$$

где $\mu = \chi + 1$ — безразмерная величина, называемая магнитной проницаемостью магнетика.

Последнее соотношение имеет место только для таких магнетиков, у которых однородная зависимость между вектором намагниченности \vec{J} и вектором \vec{H} имеет линейный характер. Магнитная восприимчивость χ — безразмерная величина, характерная для каждого данного магнетика. В отличие от диэлектрической восприимчивости κ , которая всегда положительна, магнитная восприимчивость бывает как положительной, так и отрицательной. Соответственно, магнетики, подчиняющиеся зависимости $\vec{J} = \chi \vec{H}$, подразделяют на парамагнетики ($\chi > 0$) и диамагнетики ($\chi < 0$).

У парамагнетиков вектор намагниченности сонаправлен вектору напряженности магнитного поля ($\vec{J} \uparrow \vec{H}$), у диамагнетиков эти векторы направлены в противоположные стороны ($\vec{J} \downarrow \vec{H}$). Кроме пара- и диамагнетиков существуют ферромагнетики, у которых зависимость $\vec{J}(\vec{H})$ имеет весьма сложный характер: она нелинейная и, помимо этого, может описывать явление гистерезиса [1].

2.2. Методические рекомендации к решению задач по теме «Магнитостатика»

В условиях предлагаемых задач задан ток проводимости I или распределение объемной плотности \vec{j} тока проводимости по поперечному сечению устройства, магнитное поле в котором подлежит исследованию. Выбирая в соответствии с видом симметрии конкретной задачи контур, по которому вычисляется циркуляция, из соотношения (2.4) находим распределение

вектора напряженности магнитного поля \vec{H} , а по соотношению (2.5) определяем распределение вектора магнитной индукции \vec{B} по пространственным координатам. Вектор намагниченности \vec{J} имеет вид

$$\vec{J} = (\mu - 1)\vec{H}. \quad (2.6)$$

В силу зависимостей (2.5) и (2.6) векторы магнитной индукции \vec{B} и намагниченности среды \vec{J} сонаправлены вектору напряженности магнитного поля \vec{H} . Таким образом, полевые характеристики магнитного поля определены.

Плотность тока намагничивания \vec{j}' , распределенного по объему магнетика, находим из дифференциальной формы теоремы (2.3) о циркуляции вектора намагниченности \vec{J} . Плотность поверхностных токов намагничивания, текущих по поверхности раздела магнетиков, находим с помощью теоремы (2.2) о циркуляции вектора намагниченности \vec{J} . Особенности применения этой теоремы к решению подобных задач будут подробно рассмотрены ниже на конкретном примере, так как выбор контура интегрирования L зависит от типа симметрии и от условий задачи.

2.3. Пример выполнения домашнего задания по теме «Магнитостатика»

Задача. Проводник с током, равномерно распределенным по его поперечному сечению с плотностью \vec{j} , имеет форму трубки круглого поперечного сечения, внешний и внутренний радиусы которого равны R_0 и R соответственно (рис. 2.1). Магнитная проницаемость магнетика задана зависимостью $\mu = f(r)$, где r — расстояние от оси трубки.

Найти зависимости индукции \vec{B} и напряженности \vec{H} магнитного поля, а также намагниченности \vec{J} среды в зависимости от радиальной координаты $r \in (R; R_0)$.

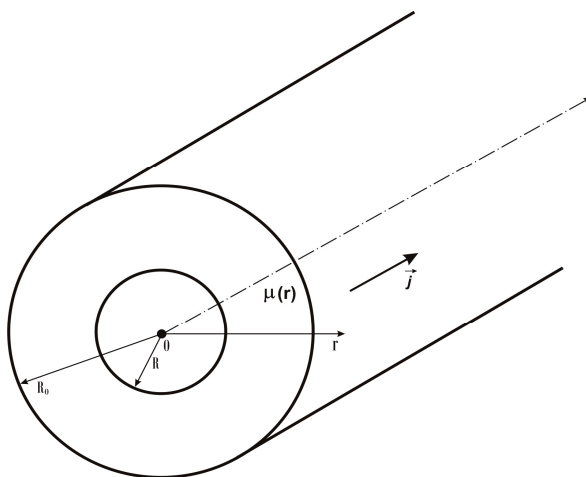


Рис. 2.1

Определить плотность поверхностных токов намагничивания $\vec{i}_{\text{пов}}$ на внутренней и внешней поверхностях трубки и распределение объемной плотности токов намагничивания $\vec{j}_{\text{об}}(r)$.

Решение. Пусть для определенности заданы следующие зависимости:

$$\mu = \mu(r) = \frac{R^n + r^n}{2R^n}, \quad n = 2, \quad (2.7)$$

$$\frac{R_0}{R} = \frac{3}{2}. \quad (2.8)$$

Преобразуем зависимость для магнитной проницаемости $\mu(r)$ с учетом заданного соотношения (2.8):

$$\mu = \frac{1}{2} + \frac{r^2}{2R^2}. \quad (2.9)$$

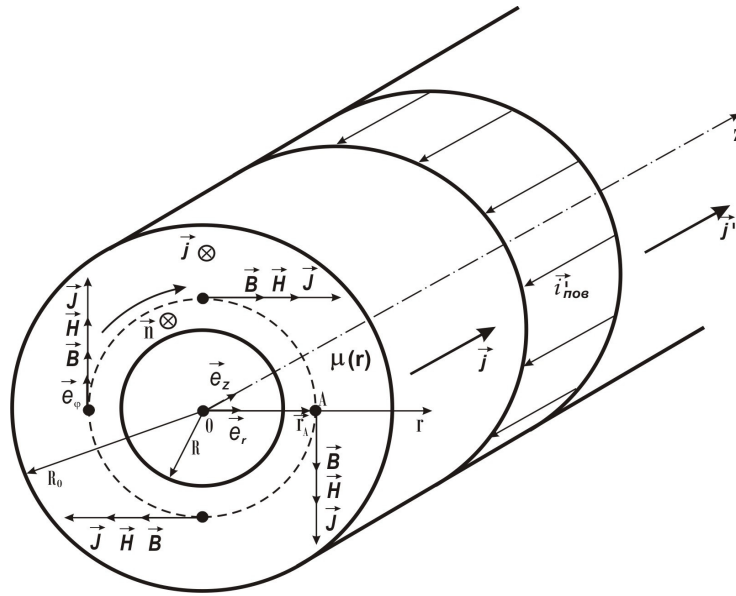


Рис. 2.2

Найдем вектор напряженности \vec{H} магнитного поля внутри трубки. По условию задачи вектор объемной плотности тока проводимости \vec{j} параллелен оси трубки (рис. 2.2). Из симметрии задачи следует, что силовые линии вектора \vec{H} в рассматриваемом случае должны иметь вид окружностей с центром на оси трубки, лежащих в плоскости поперечного сечения трубки [1]. Модуль вектора \vec{H} должен быть одинаков во всех точках на одинаковом расстоянии r от оси трубки. Для определения напряженности поля \vec{H} внутри трубки воспользуемся теоремой о циркуляции вектора \vec{H} (2.4):

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \int_S (\vec{j}, d\vec{s}).$$

В качестве контура интегрирования L выбираем одну из описанных выше окружностей радиусом $r_a \in (R; R_0)$, в каждой точке которой вектор \vec{H} касателен к ней. Направления вектора \vec{j} и вектора единичной нормали \vec{n} к плоскости, ограниченной контуром L , совпадают, причем на-

правление \vec{n} связано с направлением обхода по контуру (на рис. 2.2 показано дугой со стрелкой) правилом правого винта. По теореме о циркуляции вектора \vec{H} для контура L получаем:

$$H 2\pi r_a = j(\pi r_a^2 - \pi R^2),$$

откуда, опуская индекс a (так как радиус r_a выбран произвольно, последнее соотношение справедливо для любого значения радиуса $R < r < R_0$), для напряженности магнитного поля H получаем

$$H = \frac{j(r^2 - R^2)}{2r}, \quad R < r < R_0. \quad (2.10)$$

Заметим, что магнитное поле внутри трубки при $r < R$ отсутствует, а снаружи при $r > R_0$ напряженность магнитного поля H определяется зависимостью

$$H = \frac{5jR^2}{8r}, \quad r > R_0, \quad (2.11)$$

что также легко показать с помощью теоремы о циркуляции вектора \vec{H} . Отметим, что при переходе через границу $r = R_0$ напряженность магнитного поля H не испытывает скачка: по условию задачи на боковых поверхностях трубки поверхностные токи проводимости отсутствуют.

Определим модуль вектора магнитной индукции \vec{B} по соотношению (2.5) с учетом зависимостей (2.10) для H и (2.7) для магнитной проницаемости $\mu(r)$ магнетика:

$$B = \mu\mu_0 H = \frac{\mu_0 j(r^4 - R^4)}{4R^2 r}, \quad R < r < R_0. \quad (2.12)$$

В рассматриваемой задаче магнетик неоднородный, но линейный и изотропный, поэтому соотношение $\vec{J} = \chi\vec{H}$, где χ — магнитная восприимчивость вещества, остается справедливым. Итак, значение магнитной индукции \vec{B} внутри трубки при $R < r < R_0$ определяется соотношением (2.12), а снаружи при $r > R_0$ зависимость магнитной индукции от радиальной координаты $B(r)$ принимает вид

$$B = \mu_0 H = \frac{5\mu_0 j R^2}{8r}.$$

Найдем модуль вектора намагниченности \vec{J} при $R < r < R_0$ по соотношению (2.6):

$$J = \chi H = (\mu - 1)H = \frac{j(r^2 - R^2)^2}{4R^2 r}. \quad (2.13)$$

Намагниченность \vec{J} снаружи трубки при $r > R_0$ равна нулю, так как в этой области магнетик отсутствует и $\chi = 0$. Внутри трубки при $r < R$ намагниченность \vec{J} равна нулю по той же причине.

Ориентация векторов \vec{H} , \vec{B} и \vec{J} в пространстве показана на рис. 2.2.

Таким образом, полевые характеристики магнитного поля внутри трубки при $R < r < R_0$ и снаружи при $r > R_0$ определены, а при $r < R$ магнитное поле отсутствует.

Плотность тока намагничивания \vec{j}' , распределенного по объему магнетика, найдем, используя дифференциальную форму теоремы о циркуляции вектора намагниченности \vec{J} (2.3):

$$\text{rot } \vec{J} = \vec{j}',$$

а выражение для оператора **rot** применительно к цилиндрическим координатам выпишем из приложения:

$$\text{rot } \vec{J} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial J_z}{\partial \phi} - \frac{\partial(rJ_\phi)}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial J_r}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\phi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rJ_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial J_r}{\partial \phi} \right) \vec{e}_z. \quad (2.14)$$

Несложно заметить, что в рассматриваемом примере $J_r = J_z = 0$ и $\frac{\partial J_\phi}{\partial z} = 0$, поэтому в правой части формулы (2.14) только в составляющей по оси Oz остается первое слагаемое

$$(\text{rot } \vec{J})_z = (\vec{j}')_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rJ_\phi)}{\partial r}.$$

Подставляя в последнее соотношение зависимость проекции вектора намагниченности среды J_ϕ от радиальной координаты по формуле (2.13) и выполняя соответствующие операции, для проекции вектора плотности тока намагничивания $(\vec{j}')_z$ получим:

$$(\vec{j}')_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{j(r^2 - R^2)^2}{4R^2 r} \right) = \left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right) j. \quad (2.15)$$

Следует заметить, что правая часть (2.15) в области $R < r < R_0$ является величиной положительной и для рассматриваемого случая, если $\vec{J} \uparrow \uparrow \vec{H}$ (для парамагнетика), векторы плотности тока проводимости \vec{j} и объемной плотности тока намагничивания \vec{j}' совпадают по направлению.

Для определения линейной плотности поверхностных токов намагничивания воспользуемся теоремой о циркуляции вектора намагниченности \vec{J} (2.2):

$$\oint_L (\vec{J}, d\vec{l}) = I'.$$

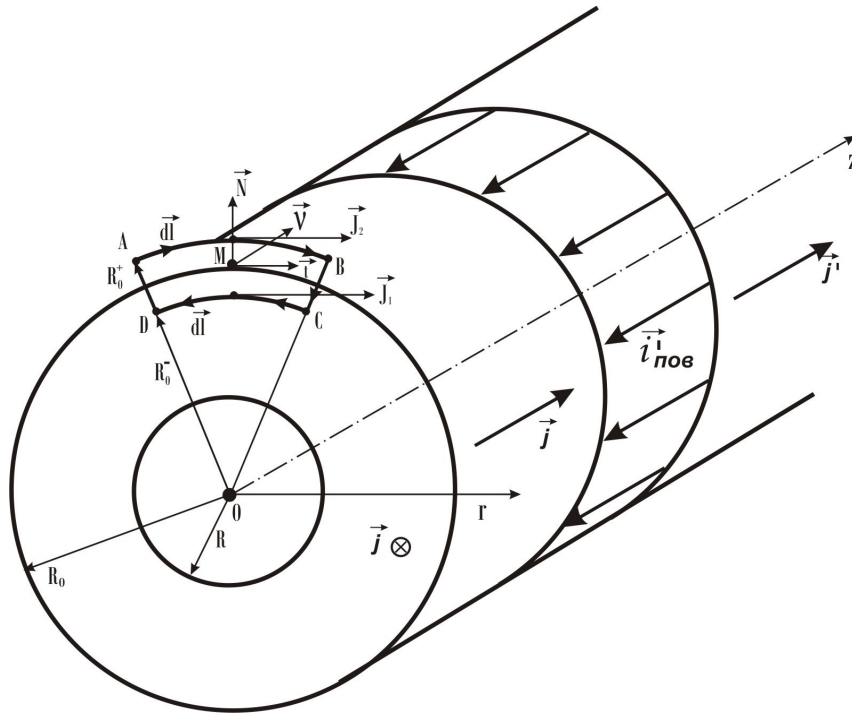


Рис. 2.3

Применим теорему о циркуляции вектора \vec{J} к бесконечно малому контуру $ABCD$ (рис. 2.3), плоскость которого перпендикулярна оси Oz , т. е. контур лежит в плоскости поперечного сечения цилиндрической поверхности. Криволинейные отрезки контура AB и CD представляют собой дуги окружностей с радиусами R_0^+ и R_0^- , а прямолинейные отрезки BC и DA контура пренебрежимо малы по сравнению с отрезками AB и CD . Тогда в правой части соотношения (2.2) при вычислении тока намагничивания I' , который пронизывает элементарную площадку, ограниченную этим контуром, можно не учитывать ток, распределенный по объему магнетика, поскольку его вклад в I' пренебрежимо мал, а рассматривать только поверхностный ток намагничивания, вектор линейной плотности которого обозначим $\vec{i}_{\text{пов}}$. По этой же причине

(в общем случае) можно пренебречь вкладом в циркуляцию вектора \vec{J} по боковым сторонам BC и DA (а в условиях нашей конкретной задачи $\int_{BC} (\vec{J}, d\vec{l}) = \int_{DA} (\vec{J}, d\vec{l}) = 0$ — еще и по причине ортогональности векторов \vec{J} и $d\vec{l}$ в каждой точке отрезков BC и DA контура).

Учитывая значимость данного вопроса, целесообразно подробно проанализировать ориентацию единичных векторов нормали и касательных направлений на поверхности раздела магнетиков для описываемой задачи (см. рис. 2.3). На рисунке введены следующие обозначения: \vec{N} — единичный вектор нормали к элементу поверхности раздела двух магнетиков (в рассматриваемой задаче это поверхность раздела «магнетик — вакуум») в окрестности точки наблюдения M , \vec{i} — единичный вектор, лежащий в касательной плоскости к поверхности раздела в точке

наблюдения; единичный вектор \vec{v} также лежит в этой касательной плоскости и является ортогональным к вектору нормали \vec{N} и выбранному касательному направлению — вектору \vec{t} . Легко заметить, что в условиях рассматриваемой задачи вектор \vec{v} перпендикулярен плоскости элементарного контура $ABCD$ и обуславливает положительное

направление обхода этого контура, циркуляция вектора намагниченности \vec{J} по которому лежит в основе вывода локального соотношения для касательных компонент вектора \vec{J} на границе раздела двух магнетиков. Это соотношение выполняется в каждой точке поверхности раздела S .

Итак, в рассматриваемом приближении циркуляция вектора намагниченности \vec{J} по бесконечно малому контуру $ABCD$

$$\oint_{ABCD} (\vec{J}, d\vec{l}) = (J_{2t} - J_{1t})l. \quad (2.16)$$

Как было показано выше, правая часть теоремы о циркуляции вектора \vec{J} представляет собой только поверхностный ток намагниченности $I'_{\text{пов}}$, где линейная плотность поверхностного тока намагничивания $\vec{i}'_{\text{пов}}$ в условиях рассматриваемой задачи определена соотношением

$$dI'_{\text{пов}} = (\vec{i}'_{\text{пов}}, \vec{v})dl = (\vec{i}'_{\text{пов}})_v dl.$$

Отсюда следует, что под линейной плотностью $i'_{\text{пов}}$ поверхностных токов намагничивания понимается количество электричества, протекающего в единицу времени через единицу длины отрезка, расположенного на поверхности, по которой течет ток намагничивания, и перпендикулярного направлению тока [3]. Тогда для поверхностного тока намагничивания $I'_{\text{пов}}$ получаем следующее соотношение:

$$I'_{\text{пов}} = \int_0^l (\vec{i}'_{\text{пов}})_v dl. \quad (2.17)$$

Предельным переходом из соотношения (2.17) с учетом равенства (2.16) получаем граничное условие, которому в данной задаче должен удовлетворять вектор намагниченности \vec{J} на границе раздела двух магнетиков:

$$J_{2t} - J_{1t} = (\vec{i}'_{\text{пов}})_v, \quad (2.18)$$

где J_{1t} и J_{2t} — касательные компоненты вектора \vec{J} в первой и второй средах.

Итак, локальное условие (2.18) является прямым следствием теоремы о циркуляции вектора намагниченности \vec{J} . Заметим, что в правой части соотношения (2.18) индекс v может быть заменен индексом z , так как в условиях рассматриваемой задачи направление, задаваемое ортом \vec{v} , и направление оси Oz совпадают.

Применительно к нашей задаче рассмотрим внешнюю цилиндрическую поверхность S раздела радиусом $R_0 = \frac{3}{2}R$. Здесь среда

1 — это область пространства, заполненного магнетиком, а среда

2 — вакуум. В первой среде в каждой точке поверхности раздела касательная компонента J_{1t} вектора намагниченности \vec{J} определяется зависимостью (2.13), во второй среде $J_{2t} = 0$, так как $\vec{J}_2 = \chi \vec{H}$, а магнитная восприимчивость χ для вакуума равна нулю. Тогда из локального соотношения (2.18) с учетом зависимости (2.13) имеем:

$$(\vec{i}_{\text{пов}})_z = -\frac{25}{96}Rj. \quad (2.19)$$

Можно показать, что на внутренней поверхности трубки, также являющейся поверхностью раздела «магнетик — вакуум», поверхностный ток намагничивания отсутствует. В данном случае из зависимости (2.13) при $r = R$ следует, что $J_{1t} = 0$, а $J_{2t} = 0$, так как вторая среда — вакуум. Поэтому из локального соотношения (2.18) на поверхности раздела двух сред следует, что поверхностный ток намагничивания на внутренней поверхности трубки отсутствует.

Полученные результаты позволяют записать для вектора $\vec{i}_{\text{пов}}$ линейной плотности поверхностных токов намагничивания в условиях рассматриваемой задачи равенство

$$\vec{i}_{\text{пов}} = (\vec{i}_{\text{пов}})_z \vec{v},$$

т. е. ток намагничивания на внешней поверхности трубки направлен противоположно току намагничивания, распределенного по объему магнетика. Заметим, что векторы $\vec{i}_{\text{пов}}$ и \vec{J} взаимно перпендикулярны.

Выполним проверку полученных результатов. Найдем суммарный ток намагничивания, используя при этом найденные зависимости (2.15) и (2.19). Итак,

$$I' = \int_0^{2\pi R_0} i'_{\text{пов}} dl + \int_S \left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right) j 2\pi r dr = -\frac{25}{32}\pi R^2 j + 2\pi j \left[\frac{r^4}{4R^2} - \frac{r^2}{2} \right]_R^{R_0} = 0 \quad (2.20)$$

где первое слагаемое в правой части соотношения (2.20) представляет собой поверхностный ток намагничивания, текущий в отрицательном направлении оси Oz , а второе — ток намагничивания, распределенный по объему магнетика и текущий в противоположном направлении.

Отметим, что вектор $\vec{i}_{\text{пов}}$ линейной плотности поверхностных токов намагничивания в рассматриваемой задаче имеет только одну составляющую — по оси Oz . Это подтверждается результатами расчетов, которые находятся в согласии с положением, что вне магнетика магнитные поля обоих токов намагничивания компенсируют друг друга.

3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

3.1. Основные теоретические сведения

Явление электромагнитной индукции, открытое английским физиком М. Фарадеем в 1831 г., описывается следующим законом (**закон Фарадея**): в замкнутом проводящем контуре C при изменении во времени магнитного потока Φ , охватываемого этим контуром, возникает электрический (индукционный) ток. Поток вектора магнитной индукции \vec{B} через произвольную поверхность S , ограниченную контуром C , равен по определению $\Phi = \int_S (\vec{B}, d\vec{s})$, где под знаком интеграла записано скалярное произведение вектора магнитной индукции $\vec{B} = \vec{B}(x, y, z, t)$ и вектора элементарной площадки рассматриваемой поверхности $d\vec{s} = \vec{n}ds$, \vec{n} — единичный вектор нормали к площадке ds . Появление индукционного тока I обусловлено возникновением ЭДС индукции — скалярной величины, которая пропорциональна скорости изменения магнитного потока Φ сквозь поверхность S , натянутую на контур C :

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (3.1)$$

ЭДС электромагнитной индукции не зависит от того, чем именно вызвано изменение магнитного потока — деформацией контура, его перемещением в магнитном поле, изменением самого поля с течением времени или совокупностью перечисленных факторов. Обратим внимание на то, что полная производная в законе (3.1) автоматически учитывает все перечисленные выше независимые друг от друга причины, которые приводят к появлению ЭДС индукции [4, 5]. Выявление физического смысла знака алгебраической величины ЭДС индукции в законе (3.1) требует особого обсуждения.

Профессор Петербургского университета Э.Х. Ленц исследовал связь между направлением индукционного тока и характером вызвавшего его изменения магнитного потока. В 1833 г. он установил следующий закон: при всяком изменении магнитного потока Φ сквозь поверхность, натянутую на замкнутый проводящий контур, в последнем возникает индукционный ток такого направления, что его магнитное поле противодействует изменению магнитного потока (**правило Ленца**). Поэтому знак «минус» в правой части уравнения (3.1) соответствует правилу Ленца. Таким образом, соотношение (3.1), объединяющее в себе закон Фарадея и правило Ленца, является математическим выражением **основного закона электромагнитной индукции**.

В физике принята правая система координат. Поэтому при практическом использовании закона электромагнитной индукции направление обхода контура при вычислении \mathcal{E}_i и направление нормали \vec{n} при вычислении магнитного потока Φ , сцепленного с контуром, должны быть согласованы по правилу правого винта: из конца вектора \vec{n} обход контура должен быть виден происходящим против хода часовой стрелки. Поэтому, выбирая (произвольно) определенное

положительное направление нормали, мы определяем и положительное направление обхода контура, что дает возможность определить как знак потока вектора магнитной индукции (скалярное произведение векторов), так и ЭДС индукции в контуре, что позволяет выразить ЭДС индукции и по модулю, и по знаку соотношением (3.1).

Представляет интерес максвелловская трактовка явления электромагнитной индукции. Дж.К. Максвелл исследовал вопрос возникновения ЭДС индукции и, как следствие, появление индукционного тока I в неподвижном проводящем контуре, находящемся в переменном магнитном поле. Вопрос состоял в том, какая же сила возбуждает индукционный ток в этом случае? Ответ был найден Максвеллом. Согласно Максвеллу, всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле. Последнее и является причиной возникновения индукционного тока в проводящем контуре. Максвеллу принадлежит следующая **углубленная формулировка закона электромагнитной индукции**: всякое изменение магнитного поля во времени возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле; циркуляция вектора напряженности \vec{E} этого поля по любому неподвижному замкнутому контуру C определяется выражением

$$\oint_C (\vec{E}, d\vec{l}) = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (3.2)$$

где Φ — магнитный поток через поверхность, натянутую на контур C . Для обозначения скорости изменения магнитного потока в соотношении (3.2) использован знак частной, а не полной производной, и этим подчеркивается тот факт, что контур должен быть неподвижным.

Между максвелловским и фарадеевским пониманием явления электромагнитной индукции имеется существенное различие. Согласно Фарадею, электромагнитная индукция состоит в возбуждении электрического тока. Для ее наблюдения необходимо наличие замкнутого проводника. По Максвеллу сущность электромагнитной индукции состоит прежде всего в возбуждении электрического поля, а не тока. Электромагнитная индукция может наблюдаться и тогда, когда в пространстве вообще нет никаких проводников. Появление индукционного тока в замкнутом проводнике при внесении последнего в переменное магнитное поле — лишь одно из проявлений электрического поля \vec{E} , возникшего в результате изменения поля магнитного. Но поле \vec{E} может производить и другие действия, например, вызывать поляризацию диэлектрика и пробой конденсатора, ускорять и тормозить заряженные частицы и т. п. Оно может вызывать электрический ток и в незамкнутом проводнике [4].

Формулировка закона электромагнитной индукции, данная Максвеллом, более общая, чем формулировка Фарадея. Она принадлежит к числу наиболее важных обобщений электродинамики. Математически закон индукции в понимании Максвелла выражается формулой (3.2), где

C — произвольный замкнутый контур, который может быть проведен и в диэлектрике (а не обязательно в проводнике, как было у Фарадея). Магнитный поток Φ определяется интегралом

$$\Phi = \oint_S (\vec{B}, d\vec{s}), \quad (3.3)$$

взятым по произвольной поверхности S , натянутой на контур C . Поэтому соотношение (3.2) можно представить в виде

$$\oint_C (\vec{E}, d\vec{l}) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{B}, d\vec{s}) = -\int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{s} \right). \quad (3.4)$$

Математическая структура уравнения (3.4) такова, что оно может быть преобразовано в дифференциальную форму. В результате такого преобразования получим

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.5)$$

Это дифференциальная форма закона электромагнитной индукции. Уравнение (3.4) или эквивалентное ему уравнение (3.5) — одно из основных соотношений теории электромагнитного поля. Оно входит в систему уравнений Максвелла.

В электростатике источниками электрического поля являются неподвижные электрические заряды. Для такого поля интеграл $\oint_C (\vec{E}, d\vec{l})$ обращается в нуль по любому замкнутому контуру.

По этой причине одно только электростатическое поле не может обеспечить непрерывное течение электричества вдоль замкнутых проводов. Напротив, электрическое поле, возбуждаемое магнитным полем, меняющимся во времени, — не потенциальное, а вихревое. Ротор напряженности электрического поля \vec{E} и его циркуляция, вообще говоря, отличны от нуля. Благодаря этому вихревое электрическое поле без каких бы то ни было добавочных сил может вызвать непрерывное течение электрического заряда по замкнутым проводам. Это течение и наблюдается в виде индукционных токов [2].

Явление электромагнитной индукции наблюдается во всех случаях, когда изменяется магнитный поток, пронизывающий натянутую на контур поверхность. В частности, этот поток может создаваться током, протекающим по рассматриваемому контуру. Поэтому при любом изменении силы тока в каком-либо контуре в нем возникает ЭДС индукции, которая вызывает дополнительный ток в контуре. Это явление называется самоиндукцией, а возникающая ЭДС \mathcal{E}_{si} — электродвижущей силой самоиндукции.

Выясним, от чего зависит ЭДС самоиндукции. Пусть жесткий контур находится в вакууме или в среде, магнитные свойства которой не зависят от магнитного поля. Магнитная индукция (по закону Био — Савара — Лапласа, который сохраняет силу в квазистационарных процессах, когда частота колебаний электромагнитного поля достаточно мала), а значит, и полный магнит-

ный поток Φ поля \vec{B} через поверхность, ограниченную контуром C , будут пропорциональны силе тока I :

$$\Phi = LI. \quad (3.6)$$

Коэффициент пропорциональности в соотношении (3.6) между током I контура и магнитным потоком Φ , создаваемым собственным магнитным полем, называется индуктивностью L контура. Индуктивность L какого-либо контура зависит от его формы и размеров, а также от свойств окружающей среды.

Применяя к явлению самоиндукции основной закон электромагнитной индукции, получаем для ЭДС самоиндукции выражение

$$\mathcal{E}_{si} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI). \quad (3.7)$$

Если контур жесткий и находится в вакууме или в среде, магнитные свойства которой не зависят от магнитного поля, то при изменении силы тока I в контуре индуктивность L остается постоянной, и тогда выражение для ЭДС самоиндукции принимает вид

$$\mathcal{E}_{si} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (3.8)$$

В противном случае, когда последнее условие не имеет места (например, пространство, в котором расположен контур, содержит ферромагнетики), индуктивность контура зависит от силы тока, генерирующего магнитное поле, и при меняющемся токе изменяется со временем. В этом случае ЭДС самоиндукции равна

$$\mathcal{E}_{si} = -\left(L \frac{dI}{dt} + I \frac{dL}{dt} \right). \quad (3.9)$$

Знак минус в уравнении (3.9) показывает, что ЭДС \mathcal{E}_{si} всегда направлена так, чтобы препятствовать изменению силы тока — в соответствии с правилом Ленца. Эта ЭДС стремится сохранить ток неизменным: когда ток уменьшается, она его поддерживает, а когда увеличивается — она ему противодействует.

3.2. Методические рекомендации к решению задач по теме «Электромагнитная индукция»

Решения предлагаемых задач сводятся к расчету разветвленных цепей, содержащих элементы сопротивления, емкости и индуктивности. Если в задаче содержится всего один контур, то принципиально это не влияет на методику ее решения. Сам расчет цепей состоит из нахождения токов в отдельных ее ветвях, зарядов конденсаторов и их полярности, скорости движения подвижной перемычки, входящей в состав рассматриваемой цепи. Для этого необходимо, в частности, воспользоваться двумя законами Кирхгофа и вторым законом динамики

Ньютона. При составлении уравнения движения переключки с током в магнитном поле необходимо учесть действующую на нее помимо других сил силу Ампера.

Согласно первому закону Кирхгофа, алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле цепи, равна нулю:

$$\sum_k I_k = 0. \quad (3.10)$$

Физический смысл первого закона Кирхгофа заключается в следующем: узел электрической цепи по определению не обладает электрической емкостью, т. е. способностью накапливать электрический заряд, поэтому весь поступающий в узел электрический заряд должен его покинуть.

При составлении уравнений согласно первому закону Кирхгофа сначала произвольно выбирают направления токов во всех узлах цепи, при этом следует считать, что токи, идущие к узлу, и токи, исходящие из узла, имеют разные знаки, например: первые — положительны, вторые — отрицательны или наоборот. Затем, непосредственно следуя соотношению (3.10), записывают само уравнение.

Второй закон Кирхгофа справедлив для любого выделяемого в цепи замкнутого контура: алгебраическая сумма произведений сил токов на отдельных участках произвольного замкнутого контура и их сопротивлений соответственно плюс алгебраическая сумма падений напряжений на конденсаторах, находящихся на отдельных участках цепи рассматриваемого замкнутого контура, равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре:

$$\sum_i \mathcal{E}_i = \sum_j I_j R_j + \sum_m \frac{q_m}{C_m}. \quad (3.11)$$

Здесь под \mathcal{E}_i понимаются все возможные ЭДС, обусловленные различными источниками сторонних сил (химическими реакциями, силами Лоренца, вихревым электрическим полем и т. д.). Следует заметить, что при практическом использовании соотношения (3.10) нужно сначала выбрать положительное направление обхода по контуру, что определяет знаки слагаемых в обеих частях этого уравнения. Кроме того, если возникает необходимость использовать величину $d\Phi/dt$, то в этом случае надо согласовывать направление обхода по контуру с выбранным ранее направлением нормали \vec{n} к плоскости, ограниченной контуром. Когда направление обхода контура и направление нормали \vec{n} связаны правилом правого винта, то \mathcal{E}_i в левую часть соотношения (3.11) входит со знаком плюс и в свою очередь определяется законом $\mathcal{E}_{si} = -d\Phi/dt$.

Отдельно подробнее рассмотрим влияние на электрическую цепь ЭДС самоиндукции катушки индуктивности $\mathcal{E}_{si} = -L di/dt$, где L — индуктивность катушки как элемента цепи. Если электрическая цепь в задаче домашнего задания содержит катушку индуктивности L , то для схемы, как правило, неизвестно направление намотки витков катушки относительно выбран-

ного ранее положительного направления обхода контура (правое или левое), тем более что для одной и той же катушки, рассматриваемой как элемент одного или другого контура, это направление может быть различным. Последнее представляет определенные трудности при использовании закона $\mathcal{E}_{si} = -L dI / dt$ в левой части соотношения (3.11).

Рассмотрим правило использования данного закона в двух возможных случаях сочетания выбранного ранее направления тока на участке цепи с индуктивностью L и положительного направления обхода по рассматриваемому контуру. Первый случай (рис. 3.1): направление тока I и положительное направление обхода по контуру совпадают. Тогда ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_{si} входит в левую часть соотношения (3.11) со знаком плюс: $(+\mathcal{E}_{si})$, а последняя определяется законом $\mathcal{E}_{si} = -L dI / dt$, следовательно, $+\mathcal{E}_{si} = -L dI / dt$.

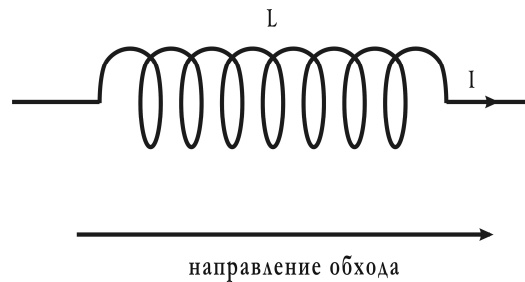


Рис. 3.1

Второй случай (рис. 3.2): направление тока I и положительное направление обхода по контуру противоположны. Здесь ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_{si} входит в левую часть соотношения (3.11) со знаком минус $(-\mathcal{E}_{si})$, следовательно, $-\mathcal{E}_{si} = -(-L dI / dt)$.

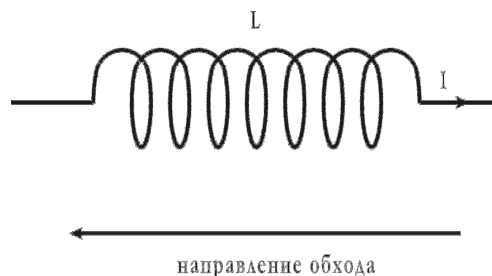


Рис. 3.2

Формально в идее этого правила можно увидеть некоторую аналогию с правилом знаков для первого слагаемого $\sum_j I_j R_j$ в соотношении (3.11): если направление тока на участке цепи с R_j и положительное направление обхода совпадают, то произведение $I_j R_j$ считается положительным, а если нет, то отрицательным. Итак, сумма ЭДС по замкнутому контуру включает в себя и ЭДС

самоиндукции, определенную законом $\mathcal{E}_{si} = -L dI / dt$, а учет последнего в левой части соотношения (3.11) должен быть выполнен в соответствии с описанным выше правилом. После окончательного решения задачи выясняется истинное направление тока на рассматриваемом участке и истинное направление ЭДС самоиндукции.

Уравнения (3.10), (3.11) составляют при выполнении следующих условий, являющихся следствием законов Кирхгофа и позволяющих получить систему линейно независимых уравнений для определения токов на всех участках цепи:

- если в разветвленной цепи имеется N узлов, то независимые уравнения типа (3.10) можно составить лишь для $N - 1$ узлов;
- если в разветвленной цепи можно выделить несколько замкнутых контуров, то независимые уравнения типа (3.11) можно составить только для тех контуров, в которых присутствует хотя бы один новый элемент (сопротивление, емкость, ЭДС любого типа), не встречающийся в уже рассмотренных контурах;
- если предположительное направление тока в цепи совпадает с выбранным направлением обхода, то соответствующее слагаемое $I_j R_j$ в уравнении (3.11) нужно брать со знаком плюс, если эти направления противоположные, то со знаком минус;
- в свою очередь, слагаемое вида q_m / C_m в (3.11) формируется следующим образом. Пусть выбрано направление обхода. Тогда, если конфигурация, состоящая из заряда пластин конденсатора q_m и направления обхода, совпадает с конфигурацией, указанной на рис. 3.3, то соответствующее слагаемое имеет вид q_m / C_m , а если с конфигурацией, указанной на рис. 3.4, то $(-q_m / C_m)$.

В нестационарных процессах на обкладках конденсаторов, входящих в тот или иной контур электрической цепи, с течением времени изменяются значения электрических зарядов. Ток, протекающий по участку контура, в котором находится конденсатор, либо заряжает, либо разряжает его (рис. 3.5 и 3.6).

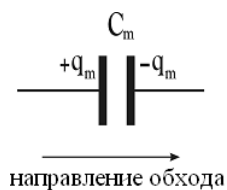


Рис. 3.3

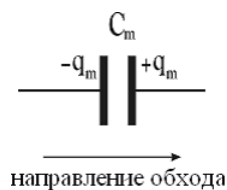


Рис. 3.4



Рис. 3.5

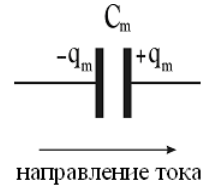


Рис. 3.6

В первом случае уравнение «сохранения» электрического заряда имеет вид

$$dq_m = Idt,$$

поскольку такой ток увеличивает положительный заряд на соответствующей обкладке конденсатора, а во втором случае

$$dq_m = -Idt,$$

поскольку при этом положительный заряд «уходит» с соответствующей обкладки конденсатора.

Динамическое уравнение, описывающее движение подвижной перемычки, и представленные выше уравнения, основанные на законах Кирхгофа, образуют замкнутую систему с заданными начальными условиями. При составлении динамического уравнения практически во всех задачах необходимо знать силу Ампера, действующую на подвижную часть контура (например, в декартовой системе координат):

$$\vec{F}_a = I[\vec{l} \times \vec{B}] = I \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l_x & l_y & l_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \quad (3.12)$$

Здесь I — ток, протекающий по перемычке; \vec{l} — вектор, длина которого совпадает с длиной подвижной перемычки, а направление — с выбранным направлением протекания тока. Следует отметить, что зависимость (3.12) справедлива, если выполнены следующие условия: $I = \text{const}$, B_x, B_y, B_z постоянны и угол между векторами \vec{l} и \vec{B} одинаков вдоль всего подвижного участка цепи.

3.2. Примеры выполнения домашнего задания по теме «Электромагнитная индукция»

Задача 3.1. По двум гладким медным шинам, установленным вертикально, в однородном магнитном поле \vec{B} , которое не изменяется с течением времени, под действием силы тяжести вдоль оси Oy скользит без трения прямолинейная металлическая перемычка массой m . Во время движения перемычка остается параллельной самой себе и перпендикулярной направляющим шинам. В цепи содержится источник тока с ЭДС \mathcal{E} и ключ K , который при его включении замыкает электрическую цепь. Вектор индукции \vec{B} магнитного поля перпендикулярен плоскости

рисунка. Параметры электрической цепи приведены на рис. 3.7. Расстояние между шинами равно постоянной величине l . Сопротивление шин, перемычки и скользящих контактов, а также самоиндукция контура пренебрежимо малы. Внутренним сопротивлением источника тока и сопротивлением катушки пренебречь.

Найти закон изменения скорости движения перемычки при условии, что скорость движения перемычки и ток через перемычку в начальный момент времени равны нулю. Перемычка приходит в движение с одновременным замыканием ключа К.

Решение. Для определения потока Φ вектора магнитной индукции \vec{B} через плоскую поверхность, ограниченную рассматриваемой цепью, выберем из соображений удобства расчетов направление вектора нормали \vec{n} к плоскости рисунка так, чтобы оно совпадало с направлением вектора индукции магнитного поля $\vec{n} \uparrow \vec{B}$ (тогда поток вектора \vec{B} будет положительным).

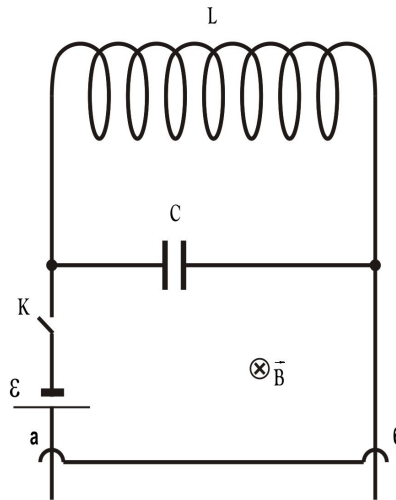


Рис. 3.7

Рассмотрим два независимых контура $aCба$ и $aLба$ (рис. 3.8). Поток вектора \vec{B} через плоские поверхности, ограниченные этими контурами, будут соответственно равны

$$\Phi_1 = (\vec{B}, \vec{n})l(y - y_0), \quad \Phi_2 = (\vec{B}, \vec{n})l y.$$

Единственной величиной в этих выражениях, изменяющейся с течением времени, является вертикальная координата $y = y(t)$. ЭДС индукции, обусловленные изменениями этих потоков, в соответствии с законом Фарадея равны

$$\mathcal{E}_{i1} = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -Bl \frac{dy}{dt} = -Blv_y, \quad (3.13)$$

$$\mathcal{E}_{i2} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -Bl \frac{dy}{dt} = -Blv_y, \quad (3.14)$$

где v_y — проекция скорости перемычки на ось Oy .

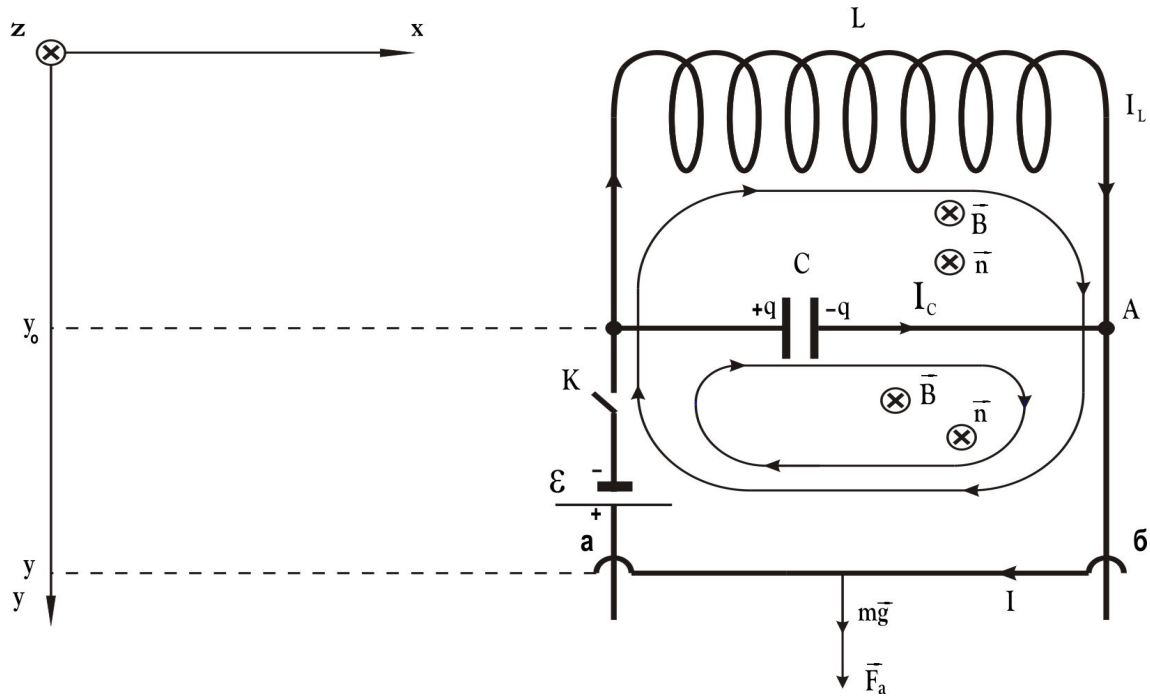


Рис. 3.8

Направления обхода указанных контуров $aCба$ и $aLба$ согласуем с выбранным направлением вектора нормали \vec{n} правилом правого винта. Тогда уравнения Кирхгофа (3.11) принимают вид:

для контура $aCба$

$$\mathcal{E}_{i1} - \mathcal{E} = +q/C; \quad (3.15)$$

для контура $aLба$

$$\mathcal{E}_{i2} - \mathcal{E} - L dI_L / dt = 0. \quad (3.16)$$

Для токов в контурах, например, для узла A на рис. 3.8, справедливо следующее уравнение баланса (3.10):

$$I = I_C + I_L. \quad (3.17)$$

Таким образом, электродинамические уравнения (3.15) – (3.17) с учетом соотношений (3.13) и (3.14), правила записи которых подробно рассмотрены в методических указаниях и теоретической части настоящего пособия, принимают вид:

$$-Blv_y - \mathcal{E} = +q/C; \quad -Blv_y - \mathcal{E} - L dI_L / dt = 0; \quad I = I_C + I_L. \quad (3.18)$$

Система уравнений (3.18) замыкается уравнением, связывающим ток I_C с зарядом пластины конденсатора q (см. рис. 3.8):

$$I_C = dq / dt \quad (3.19)$$

и динамическим уравнением, описывающим движение перемычки, которое в рассматриваемой задаче имеет вид

$$m \frac{dv_y}{dt} = mg + F_{ay}. \quad (3.20)$$

Здесь F_{ay} — проекция на ось Oy силы Ампера (3.12), действующей на перемычку,

$$F_{ay} = IlB. \quad (3.21)$$

Уравнения (3.18) – (3.20) сведем в систему:

$$-Blv_y - \mathcal{E} = +q/C; \quad (3.22)$$

$$-Blv_y - \mathcal{E} - L dI_L / dt = 0; \quad (3.23)$$

$$I = I_C + I_L; \quad (3.24)$$

$$I_C = dq / dt; \quad (3.25)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = mg + F_{ay}. \quad (3.26)$$

Исключив заряд q из уравнений (3.22) и (3.25), получим фактически зависимость ускорения перемычки от мгновенного значения силы тока через конденсатор:

$$-Bl \frac{dv_y}{dt} = + \frac{I_C}{C}.$$

Далее, дифференцируя по времени t последнее соотношение, находим выражение для производной по времени от силы тока через конденсатор:

$$\frac{dI_C}{dt} = -BlC \frac{d^2v_y}{dt^2}. \quad (3.27)$$

Из уравнения (3.23) определяем dI_L / dt :

$$\frac{dI_L}{dt} = - \frac{Blv_y + \mathcal{E}}{L}. \quad (3.28)$$

Дифференцируя по t уравнение (3.24) и учитывая уравнения (3.27) и (3.28), получаем:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI_C}{dt} + \frac{dI_L}{dt} = -blC \frac{d^2v_y}{dt^2} - \frac{Blv_y + \mathcal{E}}{L}. \quad (3.29)$$

Дифференцируя по t уравнение (3.26), с учетом уравнения (3.21) для проекции скорости перемычки v_y получаем дифференциальное уравнение второго порядка:

$$m \frac{d^2v_y}{dt^2} = lB \frac{dI}{dt}. \quad (3.30)$$

Объединив уравнения (3.29) и (3.30), получим уравнение для нахождения скорости v_y :

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} + \frac{B^2l^2}{L(m + B^2l^2C)} v_y = - \frac{\mathcal{E}lB}{L(m + B^2l^2C)}. \quad (3.31)$$

Заметим, что уравнение (3.31) представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, описывающее некоторый колебательный процесс.

Решение уравнения (3.31) имеет вид

$$v_y(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{-\mathcal{E}}{lB}, \quad (3.32)$$

где $\omega_0^2 = \frac{B^2 l^2}{L(m + B^2 l^2 C)}$ — квадрат частоты колебательного процесса переключки.

Для определения констант интегрирования C_1 и C_2 необходимо выписать общее решение системы уравнений (3.22) – (3.26), поскольку скорость движения переключки функционально связана с остальными искомыми переменными физическими параметрами системы. Соотношение (3.32) является частью общего решения системы уравнений (3.22) – (3.26). Для зависимости (3.32) очевидным условием является $v_y(0)=0$, поскольку движение переключки начинается из состояния покоя. Это условие определяет значение константы интегрирования C_1 :

$$C_1 = \frac{\mathcal{E}}{Bl},$$

после чего зависимость скорости переключки от времени приобретает вид

$$v_y(t) = \frac{\mathcal{E}}{Bl}(-1 + \cos \omega_0 t) + C_2 \sin \omega_0 t.$$

Из уравнения (3.22) находим зависимость заряда конденсатора от времени:

$$q = -\mathcal{E}C \cos \omega_0 t - BlCC_2 \sin \omega_0 t.$$

В начальный момент времени заряд конденсатора должен быть равен величине $(-\mathcal{E}C)$. Этот результат не должен вызывать удивления: «включение» ЭДС в отсутствие активного сопротивления в цепи конденсатора приводит к «мгновенному» установлению значения заряда последнего. Дифференцированием установленной зависимости по уравнению (3.25) находим выражение для тока I_C через конденсатор:

$$I_C = \omega_0 (\mathcal{E}C \sin \omega_0 t - BlCC_2 \cos \omega_0 t).$$

В начальный момент времени значение тока через конденсатор составляет

$$I_C(0) = -\omega_0 BlCC_2.$$

Обратим внимание на то, что постоянная интегрирования C_2 оказывает влияние не только на скорость переключки, но и на заряд конденсатора и на ток через конденсатор. Рассматривая совместно уравнения (3.22) и (3.23), получаем уравнение

$$\frac{dI_L}{dt} = \frac{q}{LC},$$

в котором зависимость $q(t)$ для любого значения t определена выше, что позволяет проинтегрировать это уравнение:

$$I_L = \frac{BlC_2 \cos \omega_0 t - \mathcal{E} \sin \omega_0 t}{\omega_0 L} + C_3.$$

Обратим внимание читателя на появление еще одной постоянной интегрирования C_3 . Это легко понять, если заметить, что исходная система уравнений (3.22) – (3.26) содержит три дифференциальных уравнения первого порядка. В начальный момент времени ток I_L через катушку индуктивности равен $\frac{BlC_2}{\omega_0 L} + C_3$, т. е. определяется значениями двух постоянных интегрирования.

Располагая зависимостями от времени для тока через конденсатор и тока через катушку индуктивности, по уравнению (3.24) после необходимых преобразований получаем зависимость тока через переключку:

$$I = \frac{m\omega_0}{B^2 l^2} (BlC_2 \cos \omega_0 t - \mathcal{E} \sin \omega_0 t) + C_3.$$

Начальное значение тока через переключку составляет

$$I(0) = \frac{m\omega_0}{Bl} C_2 + C_3.$$

Таким образом, все искомые переменные задачи определены в общем виде (с точностью до определения констант интегрирования). При выводе зависимости скорости переключки от времени пришлось дифференцировать исходное уравнение (3.26), при этом в окончательном результате исчезла постоянная величина ускорения свободного падения g . Необходимо убедиться, что полученное решение действительно удовлетворяет дифференциальному уравнению для скорости переключки. Проверка этого условия (оно должно выполняться для произвольного момента времени) приводит к соотношению

$$C_3 = -\frac{gm}{Bl}.$$

Итак, постоянную интегрирования C_1 мы определили единственным образом, постоянную интегрирования C_3 также определили единственным образом. Постоянная интегрирования C_2 пропорциональна электрическому току через конденсатор в начальный момент времени, она же участвует в формировании начального тока через катушку индуктивности и, таким образом, в формировании начального тока через переключку. Формально ее значение может быть произвольным. Физически допустимыми являются начальные условия, позволяющие однозначно определить значение постоянной интегрирования C_2 .

По условию задачи известно, что ток через переключку в начальный момент времени равен нулю. Приравнивая выражение для $I(0)$ нулю, получаем

$$C_2 = \frac{g}{\omega_0}.$$

После этого решение задачи приобретает окончательный вид:

$$\begin{aligned}
v(t) &= \frac{g}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \frac{\varepsilon}{Bl} (1 - \cos \omega_0 t); \\
q(t) &= -C \left(\frac{Blg}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \varepsilon \cos \omega_0 t \right); \\
I_C(t) &= C(-Blg \cos \omega_0 t + \varepsilon \omega_0 \sin \omega_0 t); \\
I_L(t) &= \frac{Blg}{L\omega_0^2} \cos \omega_0 t - \frac{\varepsilon}{L\omega_0} \sin \omega_0 t - \frac{mg}{Bl}; \\
I(t) &= \frac{(1 - LC\omega_0^2)}{L\omega_0} \left(\frac{Blg}{\omega_0} \cos \omega_0 t - \varepsilon \sin \omega_0 t \right) - \frac{mg}{Bl}.
\end{aligned}$$

Особенностью рассматриваемой задачи является то, что при ее решении потребовалось установить законы изменения во времени заряда конденсатора, тока через конденсатор и тока через катушку индуктивности. Заметим, что в практически интересных случаях задание начальных условий для параметров сложной электрической цепи может представлять определенные трудности.

Задача 3.2. По двум гладким медным шинам скользит перемычка массой M , закон движения которой задан функцией $y(t) = a \exp(-nt)$, где a и n — постоянные величины. Сопротивление перемычки равно R , поперечное сечение S , концентрация носителей заряда (электронов) в проводнике перемычки равна n_0 .

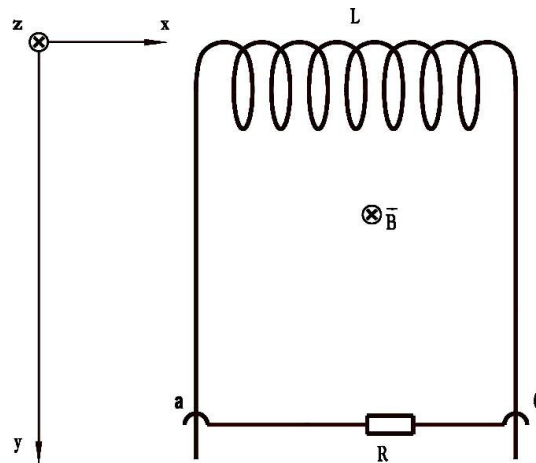


Рис. 3.9

Сверху шины замкнуты электрической цепью, содержащей индуктивность L в соответствии с рис. 3.9. Расстояние l между шинами является постоянной величиной. Система находится в однородном переменном магнитном поле с индукцией $B_z(t) = c \exp(-mt)$, перпендикулярном плоскости, в которой перемещается перемычка, а параметры c и m в законе изменения индукции магнитного поля являются постоянными положительными величинами. Сопротивление

шин, скользящих контактов, а также самоиндукция контура пренебрежимо малы. Ток I через перемычку в начальный момент времени равен нулю.

Найти:

- закон изменения электрического тока во времени $I(t)$;
- закон изменения напряженности электрического поля $E(t)$ в перемычке;
- силу $F_y(t)$, действующую на перемычку, необходимую для обеспечения заданного закона движения;
- связь между силой Ампера, действующей на перемычку, и силой Лоренца, действующей на электроны в перемычке.

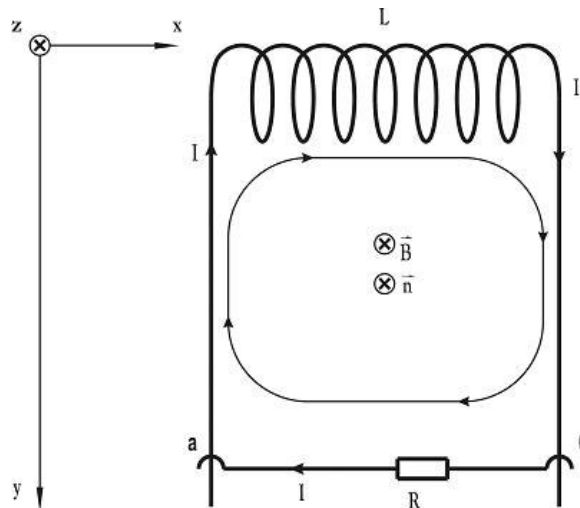


Рис. 3.10

Решение. Выберем направление единичной нормали \vec{n} так, чтобы $\vec{n} \uparrow \vec{B}$, тогда поток вектора \vec{B} будет положительным (рис. 3.10). Поток вектора \vec{B} сквозь поверхность, натянутую на контур $aLба$, равен $\Phi = (\vec{B}, \vec{n})ly$. ЭДС индукции, обусловленная изменением этого потока, в соответствии с законом Фарадея

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}[B_z(t)y(t)l]. \quad (3.34)$$

Направление обхода рассматриваемого контура $aLба$ согласуем с выбранным направлением вектора нормали \vec{n} правилом правого винта. Тогда уравнение Кирхгофа (3.11) применительно к данной задаче примет вид

$$\mathcal{E}_i - \frac{LdI}{dt} = IR. \quad (3.35)$$

Следует отметить, что в соотношении (3.35) ток I положительный, поскольку выбран так, что его направление совпадает с направлением обхода контура $aLба$ (см. рис. 3.10). Так как в

условии задачи заданы закон движения переключки $y(t) = a \exp(-nt)$ и закон изменения магнитного поля $B_z(t) = c \exp(-mt)$, значение ЭДС индукции в соответствии с законом (3.1) равно

$$\mathcal{E}_i = a l c (m + n) \exp[-(m + n)t]. \quad (3.36)$$

Тогда для тока $I(t)$, протекающего в контуре $aL\delta a$, с учетом выражения (3.36) для \mathcal{E}_i получаем неоднородное дифференциальное уравнение с начальным условием $I(0) = 0$:

$$L \frac{dI}{dt} + IR = a l c (m + n) \exp[-(m + n)t]. \quad (3.37)$$

При решении однородного уравнения (3.37) воспользуемся методом Лагранжа. Запишем это решение в форме

$$I(t) = A(t) \exp\left(-\frac{R}{L}t\right). \quad (3.38)$$

Подставим (3.38) в исходное уравнение (3.37) и найдем значение $A(t)$:

$$A(t) = \frac{a l c (m + n)}{R - (m + n)L} \exp\left\{\left[\frac{R}{L} - (m + n)\right]t\right\} + D.$$

Тогда общее решение уравнения (3.37) примет вид

$$I(t) = D \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) + \frac{a l c (m + n)}{R - (m + n)L} \exp\{[-(m + n)t]\}. \quad (3.39)$$

В этом выражении значение константы D определим из начального условия $I(0) = 0$:

$$D = -\frac{a l c (m + n)}{R - (m + n)L}.$$

Частное решение уравнения (3.37) с нулевым начальным условием имеет вид

$$I(t) = \frac{a l c (m + n)}{(R - (m + n)L)} \left\{ \exp[-(m + n)t] - \exp\left[-\frac{R}{L}t\right] \right\} \quad (3.40)$$

Динамическое уравнение движения переключки в проекции на ось Oy (аналог уравнения (3.20)) в рассматриваемом случае выглядит следующим образом:

$$M \frac{dv_y}{dt} = Mg + I l B_z + F_y(t), \quad (3.41)$$

где $I(t)$ определяется зависимостью (3.40), а $F_y(t)$ — проекция на ось Oy управляющей силы, действующей на переключку. Из заданного в условиях задачи закона движения переключки найдем производную по времени от проекции на ось Oy скорости переключки:

$$\frac{dv_y}{dt} = a n^2 \exp(-nt).$$

Тогда проекция управляющей силы $F_y(t)$ из уравнения (3.41) с учетом последнего соотношения будет равна

$$F_y(t) = M a n^2 \exp(-nt) - M g - I l B_z = M a n^2 \exp(-nt) - M g - \frac{c^2 a l^2 (m+n)}{R - (m+n)L} \left\{ \exp[-(2m+n)t] - \exp\left[\left(-\frac{R}{L} - m\right)t\right] \right\}$$

Плотность тока в перемычке определяется зависимостью

$$j = \frac{I(t)}{S}, \quad (3.42)$$

где S — площадь поперечного сечения проводника.

Напряженность электрического поля в перемычке определяем из закона Ома в дифференциальной форме

$$E = \frac{j}{\sigma} = j \rho_{уд}, \quad (3.43)$$

где $\rho_{уд}$ — удельное сопротивление медной перемычки (справочное значение, см. [6]).

Среднюю скорость $\langle \vec{u} \rangle$ направленного движения электрических зарядов, образующих электрический ток, находим из уравнения

$$\vec{j} = |e| n_0 \langle \vec{u} \rangle,$$

где $|e|$ — модуль заряда электрона; n_0 — объемная концентрация носителей заряда. В этом случае справедливо соотношение

$$\langle \vec{u} \rangle = \frac{j}{|e| n_0}, \quad (3.44)$$

где плотность тока j в перемычке определена зависимостью (3.42), модуль заряда электрона $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Тогда полная скорость носителей зарядов (электронов)

$$\vec{v} = \langle \vec{u} \rangle + \vec{v}_n,$$

где \vec{v}_n — скорость движения перемычки, при этом

$$v_{ny} = dy / dt = -a n \exp(-nt)$$

— проекция скорости движения перемычки на ось Oy .

Сила Лоренца, которая действует на заряд, определяющий электрический ток, имеет вид

$$\vec{F}_n = |e| [\vec{v} \times \vec{B}] = |e| [(\langle \vec{u} \rangle + \vec{v}_n) \times \vec{B}] = |e| [\langle \vec{u} \rangle \times \vec{B}] + |e| [\vec{v}_n \times \vec{B}] \quad (3.45)$$

Отметим, что векторы первого и второго слагаемых в соотношении (3.45) взаимно перпендикулярны. Тогда

$$F_n = |e| \sqrt{([\langle \vec{u} \rangle \times \vec{B}])^2 + ([\vec{v}_n \times \vec{B}])^2}.$$

Сила Лоренца, действующая на все носители зарядов,

$$F^* = F_n S l n_0 = S l n_0 |e| \sqrt{([\langle \vec{u} \rangle \times \vec{B}]^2 + [\vec{v}_n \times \vec{B}]^2)}. \quad (3.46)$$

Сила Ампера, действующая на перемычку,

$$F_a = I l B_z.$$

Отношение этих сил с учетом соотношений $I = jS$, $j = n_0 |e| \langle u \rangle$ после соответствующих преобразований равно

$$\frac{F_a}{F^*} = \frac{I l B_z}{S l n_0 |e| \sqrt{[\langle \vec{u} \rangle \times \vec{B}]^2 + [\vec{v}_n \times \vec{B}]^2}} = \frac{n_0 |e| \langle u \rangle S l B_z}{S l n_0 |e| \sqrt{[\langle \vec{u} \rangle \times \vec{B}]^2 + [\vec{v}_n \times \vec{B}]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_n}{u}\right)^2}} \leq 1$$

В рассмотренных задачах закон электромагнитной индукции играет существенную роль. Электродинамическое уравнение (второй закон Кирхгофа), полученное с помощью этого закона, входит в общую замкнутую систему дифференциальных уравнений. Учет начальных условий позволяет найти единственное решение поставленной задачи, обладающее физическим смыслом.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОБЩИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ grad , div , rot , ∇^2

Ортогональная криволинейная система координат (x_1, x_2, x_3) :

$$\text{grad} U = \frac{1}{h_1} \frac{\partial U}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \vec{e}_3, \quad (\text{П.1})$$

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 A_{x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 h_3 A_{x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 A_{x_3}) \right], \quad (\text{П.2})$$

$$\text{rot} \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{e}_1 & h_2 \vec{e}_2 & h_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 A_{x_1} & h_2 A_{x_2} & h_3 A_{x_3} \end{vmatrix}, \quad (\text{П.3})$$

$$\nabla^2 U = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial U}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \right) \right]. \quad (\text{П.4})$$

Здесь U — скалярная функция; $\vec{A}\{A_{x_1}, A_{x_2}, A_{x_3}\}$ — вектор-функция; $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ — единичные базисные векторы; (h_1, h_2, h_3) — метрические элементы (коэффициенты Ламе).

Прямоугольные координаты:

$$\begin{aligned} x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z; \quad h_1 = 1, \quad h_2 = 1, \quad h_3 = 1; \\ \vec{e}_1 = \vec{i}; \quad \vec{e}_2 = \vec{j}; \quad \vec{e}_3 = \vec{k}. \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Цилиндрические координаты:

$$\begin{aligned} x_1 = r, \quad x_2 = \varphi, \quad x_3 = z; \quad h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1; \\ \vec{e}_1 = \vec{e}_r; \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_\varphi; \quad \vec{e}_3 = \vec{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

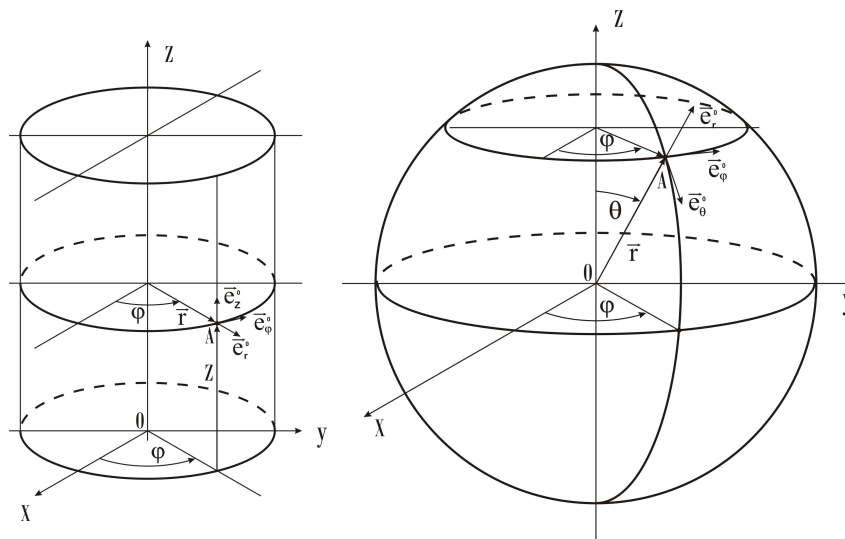
Связь с прямоугольными координатами:

$$x = R \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad z = z.$$

Координатные поверхности:

цилиндры $r = \text{const}$, плоскости $\varphi = \text{const}$,

плоскости $z = \text{const}$.



Сферические координаты:

$$x_1 = r, \quad x_2 = \theta, \quad x_3 = \varphi; \quad h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \sin \theta;$$
$$\vec{e}_1 = \vec{e}_r; \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_\theta; \quad \vec{e}_3 = \vec{e}_\varphi.$$

(П.7)

Связь с прямоугольными координатами:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

Координатные поверхности:

концентрические сферы $r = \text{const}$, плоскости $\varphi = \text{const}$,

конусы $\theta = \text{const}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иродов И.Е. Электromagnetизм. М.: Физматлит, 2000.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики: В 5 т. Т. 3: Электричество. М.: Физматлит, 1996.
3. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. М.: Высш. шк., 2000.
4. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1989.
5. Савельев И.В. Курс общей физики: В 5 т. Т. 4: Электричество. М.: Физматлит, 1998.
6. Физические величины: Справ. / Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мелихова. М.: Энергоатомиздат, 1991.