Facultad de Ciencia y Tecnología – UADER – Sede Oro Verde.

Licenciatura en Sistemas de Información

Matemática Discreta 2014

TP 01 – Las reglas de la suma y del producto. Permutaciones

Para trabajar en la clase le proponemos los siguientes ejercicios de las Secciones 1.1 y 1.2 de "Matemática Discreta" de Ralph Grimaldi: 3) 4) 6) 10) 13) 15) 20) 26) 27) 35a) y 37a).

Ejercicios a resolver:

1) Con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8:
    a. ¿Cuántos números pares de cuatro cifras se pueden hacer con todos los dígitos distintos?
    b. ¿Cuántos números mayores de 450 de tres cifras se pueden hacer con todos los dígitos distintos?
2) Considerar todas las cadenas de ocho bits. ¿Cuántas
    a. tiene peso 4? ¿Cuántas tienen peso 5?
    b. comienzan en 1100.
    c. tienen el segundo, o el cuarto, o ambos bits, igual a 1.
    d. se leen igual de derecha a izquierda (ej: 01111110)
3) ¿Cuántos números enteros cumplen con las propiedades siguientes?
    a. Tienen exactamente cuatro cifras
    b. Las cuatro cifras son impares
    c. El número es un múltiplo de 5
4) Determinar el número de enteros positivos con exactamente tres dígitos (es decir, comprendidos entre 100 y 999 ambos inclusive), tienen las siguientes propiedades:
    a. Son divisibles por 7
    b. Tienen sus dígitos iguales
    c. No son divisibles por 4
    d. Son divisibles por 3 y por 4
5) ¿Cuántas chapas patente (3 letras del alfabeto ingles seguidas por 3 dígitos) no tendrán letras o dígitos repetidos?
6) En un juego de dominó, cada pieza puede representarse en la forma [x|y], donde x e y representan alguno de los números {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}. Puede haber números repetidos.
   Se sabe que en estas condiciones el juego tiene exactamente 28 fichas distintas. Calcular cuántas fichas tendría un juego de dominó donde los números utilizados fuesen {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

VARIOS:

7) Se venden cien billetes numerados 1, 2, 3, …, 100 a cien personas diferentes, para un sorteo que otorga cuatro premios distintos, entre ellos un gran premio que es un viaje al Caribe con todos los gastos incluidos.

a. De cuántas formas pueden distribuirse dichos premios?
b. De cuántas formas pueden distribuirse si se sabe que el gran premio favoreció al número 47?
c. De cuántas formas pueden distribuirse si se sabe que la persona que posee el número 47 ganó uno de los premios?

8) Cinco jueces de un deporte determinado disponen de una cartulina en la que por un lado hay un 1 y por el otro un 0, ¿cuántas combinaciones pueden darse?

9) a) ¿De cuántas formas pueden repartirse siete libros entre siete niños si:
a.1) Los libros son distintos.
a.2) Hay cuatro libros iguales y el resto distintos.
a.3) Los libros son todos distintos y queremos que a Juan le toque el de Historia Deportiva y a Pedro el libro de Historia Medieval.

10) En una carrera de maratón intervienen 4 españoles, 4 italianos, 4 ingleses y 4 franceses. Supuesto que terminan la carrera todos los corredores, cuántos podios (Medalla Oro, Medalla Plata y Medalla Bronce) distintos pueden darse al acabar la carrera en los cuales no hay españoles.

11) En las aulas 1, 2, 3 y 4 de la Facultad de Ciencia y Tecnología, se van a examinar 192 alumnos que rinden Matemática del ingreso a la carrera Licenciatura en Sistemas. Suponiendo que no hay limitación en la capacidad de las aulas, ¿de cuántas formas se puede efectuar la distribución de los alumnos en las aulas? (pueden quedar aulas sin ser ocupadas)

Como ejercicios complementarios le sugerimos:

1) 5) 9) 12) 14) 18) 23) 28) 32) 33) 36) Secciones 1.1 y 1.2 de “Matemática Discreta” de Ralph Grimaldi

14) 18) 20) 21) 22) Sección 6.2 de “Matemáticas Discretas” de Richard Johnsonbaugh

TP 02 – Combinaciones sin repetición

Para trabajar en la clase le proponemos los siguientes ejercicios de la Sección 1.3 de "Matemática Discreta" de Ralph Grimaldi: 2) 4) 5) 6) 7) 9) 13) 16) 18a,b,d,f) 19b,c,d,g) 21) 25) 27) 29)

Ejercicios a resolver:

1) Utilizando el teorema binomial justificar $\sum_{k=0}^{n} 3^k . C(n,k) = 2^{2n}$. Verificar para n=3.

2) Calcular el valor de la suma: $\sum_{k=1}^{n} k.\binom{n}{k}.8^k$

3) Un conjunto tiene 15 elementos. ¿Cuántos subconjuntos de tres o más elementos pueden formarse con ellos?

4) Hallar el coeficiente de x^9 en el desarrollo de $(2-x)^{19}$

5) Sabiendo que $\binom{n}{3}+\binom{n+2}{3}=P(n,\ 3)$, calcula n.

6) En una circunferencia se marcan 8 puntos distintos. ¿Cuántos cuadriláteros se pueden construir de manera que tengan por vértices 4 de esos puntos?

7) Un estudiante tiene que responder siete preguntas de un cuestionario de diez ¿de cuántas formas puede hacer su elección si no hay restricciones?

VARIOS:

8) a) Determinar cuántas sucesiones finitas (o "cadenas") de n dígitos pueden construirse utilizando los dígitos 0, 1, 2, ..., 8, 9 si no deben presentarse los dígitos 1, 2 y 3.

b) Cinco jueces de un deporte determinado disponen de una cartulina en la que por un lado hay un 1 y por el otro un 0, ¿cuántas combinaciones pueden darse?

Como ejercicios complementarios le sugerimos:

1) 3) 8) 10) 11) 12) 15) 31) Sección 1.3 de "Matemática Discreta" de Ralph Grimaldi

TP 03 – Combinaciones con repetición

Para trabajar en la clase te proponemos los siguientes ejercicios de la Sección 1.4 de "Matemática Discreta" de Ralph Grimaldi: 1) 4) 7) 8) 9) 11) 14) 15) 18) 19)

Ejercicios a resolver:

1) Determine el número de soluciones enteras de $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=36$, $x_1 \geq 4$; $x_2 \geq 0$; $x_3=11$; $x_4 \geq 7$; $x_5 \geq 0$.

2) ¿De cuántas maneras pueden entrar 5 alumnos en tres aulas, si
   a. no se hace distinción de alumnos?
   b. no se hace distinción de alumnos y además no pueden quedar aulas vacías?
   c. no se hace distinción de alumnos y además hay uno de ellos que debe ocupar un aula obligatoriamente?

3) Determinar el número de soluciones enteras de la ecuación $u+v+w+x+y+z=40$ si todas las incógnitas deben tomar valores positivos impares.

4) Un estudiante tiene tres manzanas, dos peras y dos kiwis. Si desea comer una fruta por día de una semana, ¿de cuántas formas puede hacerlo?

5) ¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras de INUSUAL, de manera que tengan todas las vocales juntas?

6) Se tienen 12 discos diferentes. ¿De cuántas formas se pueden pintar 4 de rojo, 3 de negro, 3 de azul y 2 de verde?

7) En el desarrollo de $\left(\frac{a}{3}+b^{-2}-2c\right)^5$
   a. determinar el coeficiente de $ab^{-4}c^2$
   b. ¿cuántos términos distintos tiene dicho desarrollo?
   c. ¿cuál es la suma de todos los coeficientes del desarrollo completo?

8) Si tienen 20 pelotas iguales, seis rojas, seis azules y ocho verdes.
   a. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar cinco pelotas?
   b. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar cinco pelotas con al menos una roja?
   c. Se sacan cinco pelotas con al menos una roja y se las repone. Se vuelve a sacar otras cinco con al menos dos verdes. ¿De cuántas maneras es posible hacer lo anterior?

VARIOS:

9) a) Calcular el valor de la suma: $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}5^k$. Sugerencia: trabajar con el Teorema Binomial.

b) Determinar el número de soluciones enteras de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 36$, con $x_1 \geq 4$; $x_2 \geq 0$; $x_3 = 11$; $x_4 \geq 7$; $x_5 \geq 0$.

10) a) Demostrar que: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i = 0$, para n natural.

b) Determinar el coeficiente de x^2y^{14} en el desarrollo de $(2x - y + 3z)^{16}$.

11) Treinta y seis alumnos de informática buscan director de proyecto de fin de carrera. Hay doce profesores dispuestos para la tarea, y se llega a la conclusión de que cada profesor debe dirigir a tres alumnos. ¿Cuántas soluciones hay al problema?

Ejercicios complementarios le sugerimos:

2) 3) 10) 12) 17) 19) Sección 1.4 de "Matemática Discreta" de Ralph Grimaldi

27) al 49) y 58) al 62) Sección 6.2 de "Matemáticas Discretas" de Richard Johnsonbaugh

TP 04 – Lenguajes

Para trabajar en la clase le proponemos los siguientes ejercicios de la Sección 6.1 de "Matemática Discreta" de Ralph Grimaldi: 1) 2) 3) 4) 5) 7) 9) 10) 12) 13) 23) 24)

Ejercicios a resolver:

1) Sea $\sum = \{x, y\}$.
   a. Obtener $\sum^2$, $\sum^3$, $\sum^+$ y $\sum^*$.
   b. ¿Cuántas cadenas de $\sum^*$ de longitud menor o igual a 12 comienzan con xy?
2) Sean $A = \{10,11\}$, $B = \{00,1\}$ dos lenguajes sobre el alfabeto $\sum = \{0,1\}$. Determinar cada uno de los siguientes lenguajes: a) AB b) BA c) A^3 d) B^2
3) Sea $\sum = \{a,b,c\}$. ¿Cuántas cadenas de $\sum^*$ son tales que tienen longitud menos o iguala cinco y:
   a. prefijo propio bb?
   b. terminan con c o con bc?
   c. ¿la cadena $accccbccccabc \in \{a,b,c\}^* \{b\}$? Justifique la respuesta. Describa las cadenas de $\{a,b,c\}\{b\}^*$
4) Sean A y B lenguajes de un alfabeto $\sum$. Especificar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas. En el caso de que sean falsas mostrar un contraejemplo y las verdaderas justificar la respuesta (puede ser enunciando alguna propiedad).
   a) $A \cup B \subseteq A$ b) $\sum^* = \sum^+ \cup \{\lambda\}$ c) $A \subseteq A^+$
5) Sea $\sum = \{a,b,c\}$, use los lenguajes finitos de $\sum^*$, junto con las operaciones de conjuntos, para describir el conjunto de cadenas de $\sum^*$ tales que
   a. Contienen exactamente una ocurrencia de b
   b. Comienzan con la secuencia ab
   c. Terminan con la secuencia cc
6) Si $x \in \sum^*$, y $\|x^3\| = 27$, indicar qué es y cuánto vale $\|x\|$?

Como ejercicios complementarios le sugerimos:

6) 8) 11) 14) Sección 6.1 de "Matemática Discreta" de Ralph Grimaldi

TP 05 – Máquinas: Introducción

Para trabajar en la clase le proponemos los siguientes ejercicios de la Sección 6.2 de "Matemática Discreta" de Ralph Grimaldi: 1) 2) 3) 5) 6) 7)

Ejercicios a resolver:

1) Construir una máquina de estados finitos que tenga como alfabeto de entrada y salida {0,1}, y que ante una cadena de entrada de longitud n, produzca una salida cuyos dos primeros bits sean 10, y luego produzca los bits de la entrada (con más precisión, los n-2 primeros).
2) Sea $\sum = \{0,1\}$. Encuentre un lenguaje A para describir el conjunto de cadenas de $\sum^*$ que tengan a 011 como subcadena.
3) La tabla siguiente corresponde a una máquina de estado finito cuyo conjunto de entrada y salida es {0,1,2}
   a. Para cada cadena de entrada x dé la cadena de salida correspondiente

      x = 0110 x = 21000 x = 111
   b. Dibuje el diagrama de estados
   c. Describa brevemente lo que realiza esta máquina

Como ejercicios complementarios le sugerimos:

4) 8) 9) Sección 6.2 de "Matemática Discreta" de Ralph Grimaldi

TP 06 – Máquinas: Desarrollo

Para trabajar en la clase le proponemos los siguientes ejercicios de la Sección 6.3 de "Matemática Discreta" de Ralph Grimaldi: 1) 2) 3) 5) 7)

Ejercicios a resolver:

1) Construya una máquina de estados para una máquina de estados finitos con $\mathrm{O} = \vartheta = \{0,1\}$ que reconozca todas las cadenas del lenguaje:
   a. $\{0,1\}^* \{01\}$
   b. $\{0,1\}^* \{00\} \cup \{0,1\}^* \{11\}$
2) Para $E = S = \{0,1\}$, una cadena $x \in E^*$ tiene paridad par si contiene un número par de unos. Construya un diagrama de estados para una máquina de estados finitos que reconozca todas las cadenas no vacías de paridad par.
3) Sea $I = O = \{0,1\}$. Construya una máquina de estados finitos que reconozca:
   a. Cada ocurrencia de 101 en una cadena $x \in I^*$ (con solapamiento)
   b. 101 en una cadena $x \in I^*$, con la condición de reconocer únicamente aquellas ocurrencias que terminen en una posición múltiplo de tres.
4) Construir el diagrama de estados de una máquina de estados finitos que, trabajando con un alfabeto de entrada igual al de salida $\sum = \{0,1\}$, reconozca produciendo un 1 en la salida toda vez que en la cadena de entrada se encuentre la subcadena 0001, de tal forma que el 1 esté en las posiciones 4, 8, 12, …

Como ejercicios complementarios le sugerimos:

4) Sección 6.3 de "Matemática Discreta" de Ralph Grimaldi

5) al 10) de los Ejercicios Complementarios del Capítulo 6 de "Matemática Discreta" de Ralph Grimaldi

7.1) 7.2) 7.3) 7.12) Capítulo 7 de "Elementos de Matemáticas Discretas" de C. L. Liu

1) al 25) Sección 12.1 de "Matemáticas Discretas" de Richard Johnsonbaugh