14.2 – Propiedades y subestructuras de Anillos

TEOREMA 14.1 En cualquier anillo $(R, +, \cdot)$,

a) el elemento neutro z es único, y
b) el inverso aditivo de cada elemento del anillo es único.

TEOREMA 14.2 (*Las leyes de cancelación para la suma*) Para cualesquiera $a, b, c \in R$,

a) $a + b = a + c \Rightarrow b = c$, y
b) $b + a = c + a \Rightarrow b = c$.

TEOREMA 14.3 Para cualquier anillo $(R, +, \cdot)$ y cualquier $a \in R$, tenemos $az = za = z$.

TEOREMA 14.4 Dado un anillo $(R, +, \cdot)$ y $a, b \in R$,

a) $-(-a) = a$,
b) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$, y
c) $(-a)(-b) = ab$.

TEOREMA 14.5 Para un anillo $(R, +, \cdot)$,

a) Si R tiene un elemento unidad, entonces es único, y

b) si R tiene un elemento unidad y x es una unidad de R, entonces el inverso multiplicativo de x es único.

TEOREMA 14.7 Si $(F, +, \cdot)$ es un cuerpo, entonces es un dominio de integridad.

TEOREMA 14.8 Un dominio de integridad *finito* $(D, +, \cdot)$ es un cuerpo.

Definición 14.5 Para un anillo $(R, +, \cdot)$, un subconjunto no vacío S de R es un *subanillo* de R si $(S, +, \cdot)$ (es decir, S con la suma y producto de R restringidos a S) es un anillo.

Ejemplo 14.7 Para cualquier anillo R, los subconjuntos $\{z\}$ y R son siempre subanillos de R.

Ejemplo 14.8

a) El conjunto de todos los de integridades pares es un subanillo de $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$. De hecho, para cualquier $n \in \mathbf{Z}^{+}$, $n\mathbf{Z} = \{nx \mid x \in \mathbf{Z}\}$ es un subanillo de $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$.

b) $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ es un subanillo de $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$, el cual es un subanillo de $(\mathbf{R}, +, \cdot)$, que es un subanillo de $(\mathbf{C}, +, \cdot)$.

Ejemplo 14.9 En el ejemplo 14.6, los subconjuntos $S = \{s, w\}$ y $T = \{s, v, x\}$ son subanillos de R.

Tabla 14.3

+	s	t	v	w	x	y
s	s	t	v	w	x	y
t	t	v	w	x	y	s
v	v	w	x	y	s	t
w	w	x	y	s	t	v
x	x	y	s	t	v	w
y	y	s	t	v	w	x

(a)

·	s	t	v	w	x	y
s	s	s	s	s	s	s
t	s	t	v	w	x	y
v	s	v	x	s	v	x
w	s	w	s	w	s	w
x	s	x	v	s	x	v
y	s	y	x	w	v	t

(b)

TEOREMA 14.9 Dado un anillo $(R, +, \cdot)$, un subconjunto no vacío S de R es un subanillo de R si y sólo si

1) para todos $a, b \in S$, tenemos que $a + b$, $ab \in S$ (es decir, S es cerrado con las operaciones binarias de suma y producto definidas en R), y

2) para todo $a \in S$, $-a \in S$.

TEOREMA 14.10 Para cualquier anillo $(R, +, \cdot)$, si $\emptyset \neq S \subseteq R$,

a) entonces $(S, +, \cdot)$ es un subanillo de R si y sólo si para todos $a, b \in S$, tenemos que $a - b \in S$ y $ab \in S$;

b) y si S es finito, entonces $(S, +, \cdot)$ es un subanillo de R si y sólo si para todos $a, b \in S$, tenemos que $a + b$, $ab \in S$. (De nuevo, la ayuda adicional proviene de una condición de ser finito.)

Consideremos el anillo $R = M_2(\mathbf{Z})$ y el subconjunto

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x & x+y \\ x+y & x \end{bmatrix} \middle| x, y \in \mathbf{Z} \right\}$$

Definición 14.6 Un subconjunto no vacío I de un anillo R es un *ideal* de R si para todos $a, b \in I$ y todo $r \in R$, tenemos que (a) $a - b \in I$ y (b) $ar, ra \in I$.

Un ideal es un subanillo, pero el recíproco no siempre se cumple: $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ es un subanillo de $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ pero no es un ideal, ya que, por ejemplo, $(1/2)9 \notin \mathbf{Z}$ aunque $(1/2) \in \mathbf{Q}$, $9 \in \mathbf{Z}$.