TP 07 – Inducción Matemática

Para trabajar en la clase te proponemos los siguientes ejercicios de la Sección 4.1 de "Matemática Discreta" de Ralph Grimaldi: 1a,c,e) 2a) 6) 7) 9) 10) 11) 14) 17) 22a)

A continuación te planteamos algunos ejercicios a resolver:

1) Probar por Inducción Matemática que:

   a. $4^{2n}-1$ es un múltiplo de 15 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

   b. $1.5^1+2.5^2+3.5^3+\ldots+n.5^n=\dfrac{5+(4n-1).5^{n+1}}{16}$ para todo natural n.

   c. $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ para todo número natural $n \geq 2$.

   d. $1+2.(2!)+3.(3!)+\ldots+n.(n!)=(n+1)!-1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

   e. 57 divide a $7^{n+2}+8^{2n+1}$, para todo n natural

   f. $\displaystyle\sum_{i=2}^{n}(i-1).i=\frac{n.(n^2-1)}{3}$

   g. n^2-1 es múltiplo de 8 siempre que n sea un entero positivo impar.

   h. $n^2-7n+12$ es no negativo siempre que n sea un entero mayor que 3.

   i. $4^n \geq 16n^2$ si n es entero positivo mayor o igual que 4.

   j. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$ para todo natural n.

   k. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1).3^i=(n-1).3^{n+1}+3$ para todo natural n.

   l. $H_1+H_2+H_3+\ldots+H_n=(n+1).H_n-n, \quad n \in \mathbb{Z}^+$

2) Demostrar que si n es un entero positivo mayor o igual a 2, un conjunto de n elementos tiene exactamente $n.(n-1)/2$ subconjuntos de 2 elementos cada uno.

Por último, como ejercicios complementarios te sugerimos:

1b) 1d) 1f) 2b) 4) 12) 13b) Sección 4.1 de "Matemática Discreta" de Ralph Grimaldi

1) 3) 4) 6) 7) 9) 12) Ejercicios Complementarios Capítulo 4 de "Matemática Discreta" de Ralph Grimaldi

1.33) al 1.48) Capítulo 1 de "Elementos de Matemáticas Discretas" de C. L. Liu

TP 08 – Recursión

Para trabajar en la clase te proponemos los siguientes ejercicios de la Sección 4.2 de "Matemática Discreta" de Ralph Grimaldi: 1) 13) 14) 15) 17) 18) 19)

A continuación te planteamos algunos ejercicios a resolver:

1) Sea la función f definida recursivamente para todos los enteros positivos n por las expresiones

$$f(1)=1;\ f(n)=f(n-1)+2n-1$$

Hallar la fórmula de f(n) y probar su validéz.

2) Resolver las siguientes relaciones de recurrencia:
   a) $a_{n+2}+4.a_{n+1}+4a_n=n^2;\ a_0=0;\ a_1=2,\ n\geq 0$
   b) $a_{n+2}+a_{n+1}-2a_n=3^n,\ n\geq 0,\ a_0=0,\ a_1=1$
   c) $a_n=5.a_{n-1}-6.a_{n-2}+3,\ n\geq 2,\ a_0=0,\ a_1=2$
   d) $a_n-6.a_{n-1}+9a_{n-2}=3,\ a_0=1,\ a_1=3,\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$
   e) $a_{n+1}-4.a_n=4^n,\ n\geq 0,\ a_0=1$

3) Se forman cadenas de longitud n con los símbolos 0, 1, 2 (cadenas ternarias), de modo que no se presenten dos 2 consecutivos. Por ejemplo, con n=6, se admite 011210, pero no 012201. Supongamos que se representan con a_n el número de tales cadenas.
   a) Calcular $a_1,\ a_2,\ a_3$
   b) Hallar una relación de recurrencia para a_n

4) Disponemos de n cerillas (fósforos) para formar palabras con las letras I (una cerilla) y V (dos cerillas) Sea P_n el número de palabras diferentes que podemos formar de esta forma utilizando las n cerillas.
   a) Hallar una fórmula de recurrencia para P_n
   b) ¿Qué relación tienen los P_n con los números de Fibonacci, F_n? Justifica tu respuesta.
   c) Resolver la relación de recurrencia planteada para P_n

5) Hallar una relación de recurrencia que permita calcular el número total de números binarios de longitud n que no posean dos "unos consecutivos".
   a) Encontrar la condición inicial que debe cumplirse.
   b) Resolver el problema planteado.

6) Determine las constantes w y z si $a_n=z+w.(8^n)$, debe ser solución de la relación de recurrencia $a_{n+2}+2.a_{n+1}-3wa_n=0,\ n\geq 0$

7) Juan deposita \$5100 al comienzo de cada año, durante n años, en una institución bancaria que paga el 8% anual, capitalizando los intereses cada año.
   a) Hallar una relación de recurrencia que permita calcular el capital de Juan al finalizar el año n.
   b) Establecer la condición inicial.
   c) Resolver el problema planteado (Relación de recurrencia y condición inicial)

8) Se sabe que los números de Lucas están definidos por la relación de recurrencia $L_n=L_{n-1}+L_{n-2},\ n\geq 2,\ L_0=2,\ L_1=1$. Hallar la fórmula que permita calcular directamente L_n

9) Calcular $f(1),\ f(2),\ f(3)$ y $f(4)$ si $f(n)$ se define recursivamente por: $f(0)=1$, y para $n=0,1,2,\ldots.\ f(n+1)=2^{f(n)}$

Por último, como ejercicios complementarios te sugerimos:

12) 16) Sección 4.2 de "Matemática Discreta" de Ralph Grimaldi

TP 09 – Divisibilidad

Para trabajar en la clase te proponemos los siguientes ejercicios de la Sección 4.3 de "Matemática Discreta" de Ralph Grimaldi: 2) a)b)c) 4)5)7)8)9)10)12)13)18)

A continuación te planteamos algunos ejercicios a resolver:

1) Hallar el cociente y el resto que resulta al dividir -789 por 37
2) Determinar cuántos enteros positivos menores o iguales a 187
   a) Son divisibles por 17
   b) No son divisibles por 17
   c) ¿Cuál es la respuesta si sacamos la palabra "positivos" del enunciado?
3) Demostrar las siguientes afirmaciones:
   a) Si **x** divide a **m, n** y **p**, entonces **x** divide a: **a.m+b.n+c.p**; con **a, b, c** $\in \mathbb{Z}$
   b) Si $a|b+a^2$ entonces $a|b$
4) Se sabe que un entero positivo k es el cuadrado de un cuadrado, y que 18|k. Hallar el menor valor para k
5) Escriba el número hexadecimal AF1 en base 10 y luego expresarlo en base 2, 4 y 8.
6) La representación decimal de tres números naturales es: 51966, 60318 y 64202. Cuando estos números se expresan en el sistema hexadecimal, algunos se representan por palabras con significado en castellano. ¿Cuáles son, y cuáles son esas palabras?

Como ejercicios complementarios se sugieren:

1) 3) 11) 14) 15) 16) 17) Sección 4.3 de "Matemática Discreta" de Ralph Grimaldi

TP 09 – Máximo común divisor

Para trabajar en la clase te proponemos los siguientes ejercicios de la Sección 4.4 de "Matemática Discreta" de Ralph Grimaldi: 1)a)c)d) 2)3)5)6)11)13)14)

A continuación te planteamos algunos ejercicios a resolver:

1) Probar que si mcd(a,b)=1 y a|bc, entonces a|c
2) ¿Es posible determinar las soluciones enteras de la ecuación diofántica: 6x + 50y = 17? Justifica la respuesta
3) Determinar si la ecuación diofántica 25x + 2y = 7 tiene solución. En caso afirmativo, hallar todas las soluciones.
4) Probar que si mcd(a, n)=1 y mcd(b, n)=1, entonces mcd(ab, n)=1
5) Sea d = mcd(a, b), donde a y b son enteros cualesquiera. Se sabe que existen enteros x, y tales que $ax + by = d$
   a. Calcular d, x, y si $a = 59677$ y $b = 57353$
   b. Calcular, para los valores de x, y, que resultan, mcd(x, y)
6) Hallar mcd(1001, 1331) y expresarlo como combinación lineal de estos números. Hallar un múltiplo de 1001 y un múltiplo de 1331 cuya diferencia sea 55.
7) Probar que si $d = mcd(a,b)$ entonces $mcd(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$
8) Hallar mcd(1820, 1369) y expresarlo como combinación lineal de estos números.
9) Sea $a = 84,\ b = 990$
   a. Hallar el mcd(a, b)
   b. Expresarlo como combinación lineal de ambos
   c. Sea $c \in \mathbb{Z}$ con la condición $10 \le c \le 1000$; determinar el mínimo valor de c, para que la ecuación $84.x + 990.y = c$, admita soluciones enteras
   d. Resolver dicho caso.
10) Hemos comprado libros de una oferta por 14 pesos el volumen y en otra oferta libros a 23 pesos el volumen, pagando en total 210 pesos. Calcular cuántos libros se han comprado de cada oferta, si es posible.
11) Un hombre compró doce piezas de computadora (clavitos y pequeños cables) por 99 pesos. Si un clavito cuesta 30 centavos más que un pequeño cable, ¿tiene solución el problema?, si es así: ¿cuántos de cada uno compró?
12) Un distribuidor de equipos informáticos efectuó un pedido de entre 1100 y 1800 equipos a un fabricante que se los envió en contenedores completos con capacidad para 54 equipos cada uno. El distribuidor los repartió a los diferentes puntos de venta usando furgonetas con capacidad para 15 equipos y quedando 33 equipos sin repartir en el almacén. ¿Cuántos equipos pidió el distribuidor a la fábrica?

Como ejercicios complementarios se sugieren:

4) 7) 8) 9) 10) 15)16) Sección 4.4 de "Matemática Discreta" de Ralph Grimaldi

TP 10 – Teorema Fundamental de la Aritmética

Para trabajar en la clase te proponemos los siguientes ejercicios de la Sección 4.5 de "Matemática Discreta" de Ralph Grimaldi: 1)2)4)a)b)5)12)13)15)19)

A continuación te planteamos algunos ejercicios a resolver:

1) Se sabe que $a,b \in \mathbb{Z}^{+}$, que $a.b = 2^{8}.3^{9}.5^{4}.7^{11}$, y también se sabe que $mcd(a,b) = 2^{3}.5.7^{3}$
   a. ¿Cuánto vale $mcd(a,b)$?
   b. ¿Quedan unívocamente determinados los números a y b?
2) Calcular el valor de d, para el cual el $mcd(3^{7}.5^{4}.7.11^{6};\ 3^{4}.d.11^{3}.13^{2}) = 2835$
3) ¿Cuántos divisores positivos tiene el número 15435?
4) Si $a = 2.3^{3}.7^{2}.13^{2}$, y $b = 3^{2}.5.7.11$. Calcular cuántos divisores enteros positivos tienen los números: $c = mcd(a,b)$ y $d = mcd(a,b)$
5) Sea $n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}$. Si p es un número primo positivo, entonces $\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$

Como ejercicios complementarios se sugieren:
4b) 4c) 10) 11) 17) 26) Sección 4.5 de "Matemática Discreta" de Ralph Grimaldi