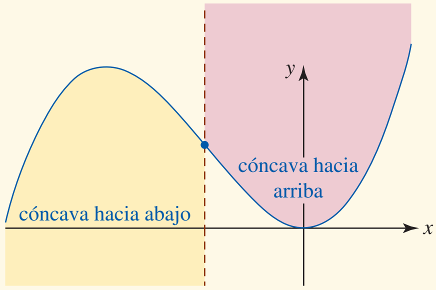
Capítulo 4

Aplicaciones de la derivada



En este capítulo Las derivadas primera y segunda de una función f pueden usarse para determinar la forma de su gráfica. Si imagina la gráfica de una función como una curva que sube y baja, entonces los puntos alto y bajo de la gráfica o, con más precisión, los valores máximo y mínimo de la función, podemos encontrarlos usando la derivada. Como ya vimos, la derivada también proporciona una razón de cambio. En la sección 2.7 vimos brevemente que la razón de cambio con respecto al tiempo t de una función que proporciona la posición de un objeto en movimiento es la velocidad del objeto.

Encontrar los valores máximo y mínimo de una función junto con el problema de determinar razones de cambio son dos de los temas centrales de estudio de este capítulo.

44. Presión En la expansión adiabática del aire, la presión P y el volumen V están relacionados por $PV^{1.4} = k$, donde k es una constante. En cierto instante, la presión es 100 lb/pulg^2 y el volumen es 32 pulg^3. ¿A qué razón cambia la presión en ese instante si el volumen disminuye a razón de 2 pulg^3/s?

45. Cangrejos de río Un estudio acerca de cangrejos de río (*Orconectes virilis*) indica que el caparazón de longitud C está relacionado con la longitud total T según la fórmula $C = 0.493T - 0.913$, donde C y T se miden en milímetros. Vea la FIGURA 4.2.23.

a) A medida que el cangrejo de río crece, la razón R de la longitud del caparazón a la longitud total, ¿aumenta o disminuye?

b) Si el cangrejo de río crece en longitud a razón de 1 mm por día, ¿a qué razón cambia la relación del caparazón a la longitud total cuando el caparazón es un tercio de la longitud total?

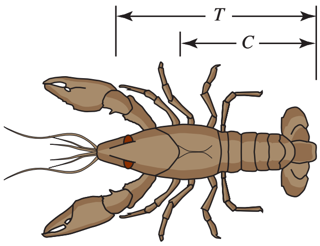


FIGURA 4.2.23 Cangrejo de río en el problema 45

46. Peso del cerebro Según estudios de alometría, el peso del cerebro E en los peces está relacionado con el peso corporal P por $E = 0.007P^{2/3}$, y el peso corporal está relacionado con la longitud del cuerpo por $P = 0.12L^{2.53}$, donde E y P se miden en gramos y L se mide en centímetros. Suponga que la longitud de cierta especie de pez evolucionó a razón constante desde 10 cm hasta 18 cm a lo largo de 20 millones de años. ¿A qué razón, en gramos por millones de años, creció el cerebro de esta especie cuando el pez pesaba la mitad de su peso corporal final?

47. Cantidad de movimiento En física, la cantidad de movimiento p de un cuerpo de masa m que se mueve en línea recta con velocidad v está dada por $p = mv$. Suponga que un avión de masa 10^5 kg vuela en línea recta mientras en los bordes de entrada de sus alas se acumula hielo a razón constante de 30 kg/h. Vea la FIGURA 4.2.24.

a) ¿A qué razón cambia la cantidad de movimiento del avión si vuela a razón constante de 800 km/h?

b) ¿A qué razón cambia la cantidad de movimiento del avión en $t = 1$ h si en ese instante su velocidad es 750 km/h y aumenta a razón de 20 km/h?

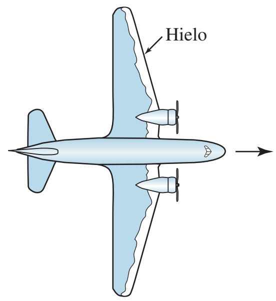


FIGURA 4.2.24 Avión en el problema 47

4.3 Extremos de funciones

Introducción Ahora abordaremos el problema de encontrar los valores máximo y mínimo de una función f sobre un intervalo I. Veremos que al encontrar estos **extremos** de f (en caso de haber alguno) en muchos casos es posible trazar fácilmente su gráfica. Al encontrar los extremos de una función también es posible resolver ciertos tipos de problemas de optimización. En esta sección establecemos algunas definiciones importantes y mostramos cómo puede encontrar los valores máximo y mínimo de una función f que es continua sobre un intervalo cerrado I.

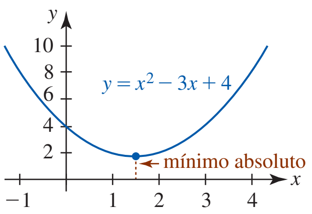


FIGURA 4.3.1 Mínimo absoluto de una función

Extremos absolutos En la FIGURA 4.3.1 se ha ilustrado la gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2 - 3x + 4$. A partir de esta gráfica debe resultar evidente que el valor de la función $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{4}$ es la coordenada y del vértice, y como la parábola se abre hacia arriba, en el rango de f no hay número menor que $\frac{7}{4}$. Decimos que el extremo $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{4}$ es el mínimo absoluto de f. A continuación se definen los conceptos de máximo absoluto y mínimo absoluto de una función.

Definición 4.3.1 Extremos absolutos

i) Un número $f(c_1)$ es un **máximo absoluto** de una función f si $f(x) \leq f(c_1)$ para toda x en el dominio de f.

ii) Un número $f(c_1)$ es un **mínimo absoluto** de una función f si $f(x) \geq f(c_1)$ para toda x en el dominio de f.

Los extremos absolutos también se denominan **extremos globales**.

A partir de su experiencia al graficar funciones debe serle fácil, en algunos casos, ver cuándo una función posee un máximo o un mínimo absoluto. En general, una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un máximo absoluto o un mínimo absoluto. La función $f(x) = 4 - x^2$ tiene el máximo absoluto $f(0) = 4$. Una función lineal $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, no tiene extremos absolutos. Las gráficas de las funciones conocidas $y = 1/x$, $y = x^3$, $y = \tan x$, $y = e^x$ y $y = \ln x$ muestran que éstas no tienen extremos absolutos. Las funciones trigonométricas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ tienen un máximo absoluto y un mínimo absoluto.

EJEMPLO 1 Extremos absolutos

Para $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f(\pi/2) = 1$ es su máximo absoluto y $f(3\pi/2) = -1$ es su mínimo absoluto. Por periodicidad, los valores máximo y mínimo también ocurren en $x = \pi/2 + 2n\pi$ y $x = 3\pi/2 + 2n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, respectivamente. ■

El intervalo sobre el que la función está definida es muy importante en la consideración de extremos.

EJEMPLO 2 Funciones definidas sobre un intervalo cerrado

a) $f(x) = x^2$, definida sólo sobre el intervalo *cerrado* $[1, 2]$, tiene el máximo absoluto $f(2) = 4$ y el mínimo absoluto $f(1) = 1$. Vea la FIGURA 4.3.2*a*).

b) Por otra parte, si $f(x) = x^2$ está definida sobre el intervalo *abierto* $(1, 2)$, entonces f no tiene extremos absolutos. En este caso, $f(1)$ y $f(2)$ no están definidos.

c) $f(x) = x^2$ definida sobre $[-1, 2]$, tiene el máximo absoluto $f(2) = 4$, pero ahora el mínimo absoluto es $f(0) = 0$. Vea la figura 4.3.2*b*).

d) $f(x) = x^2$ definida sobre $(-1, 2)$, tiene un mínimo absoluto $f(0) = 0$, pero no un máximo absoluto. ■

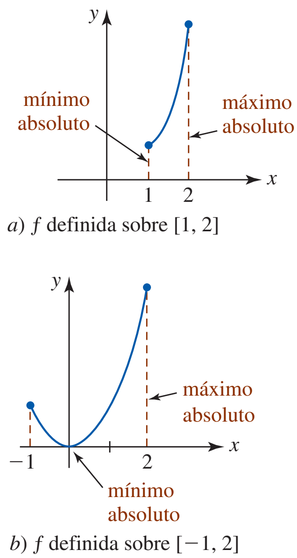


FIGURA 4.3.2 Gráficas de funciones en el ejemplo 2

Los incisos *a*) y *c*) del ejemplo 2 ilustran el siguiente resultado general.

> **Teorema 4.3.1** Teorema del valor extremo
>
> Una función f continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ siempre tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto sobre el intervalo.

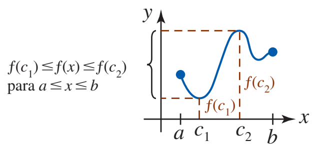


FIGURA 4.3.3 La función f tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto

En otras palabras, cuando f es continua sobre $[a, b]$, hay números $f(c_1)$ y $f(c_2)$ tales que $f(c_1) \le f(x) \le f(c_2)$ para toda x en $[a, b]$. Los valores $f(c_2)$ y $f(c_1)$ son el máximo absoluto y el mínimo absoluto, respectivamente, sobre el intervalo cerrado $[a, b]$. Vea la FIGURA 4.3.3.

Extremos de un punto frontera Cuando un extremo absoluto de una función ocurre en un punto frontera de un intervalo I, como en los incisos *a*) y *c*) del ejemplo 2, decimos que se trata de un **extremo de un punto frontera**. Cuando I no es un intervalo cerrado; es decir, cuando I es un intervalo como $(a, b]$, $(-\infty, b]$ o $[a, \infty)$, entonces aunque f sea continua no hay garantía de que exista un extremo absoluto. Vea la FIGURA 4.3.4.

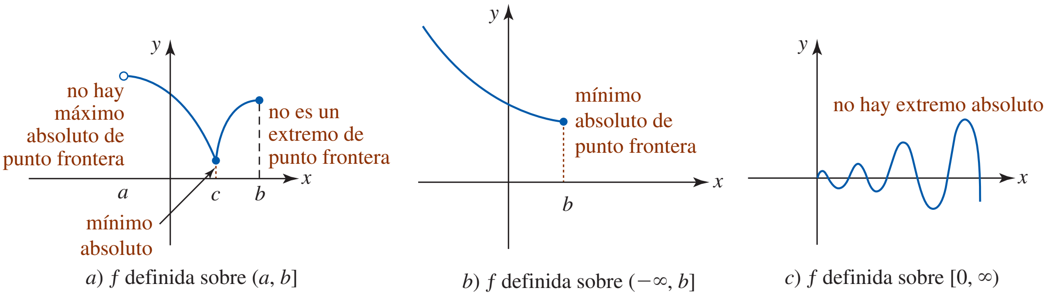


FIGURA 4.3.4 Una función f continua sobre un intervalo que no tiene ningún extremo absoluto

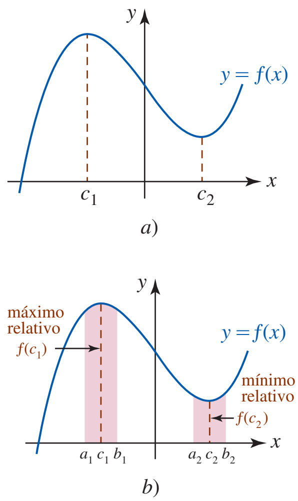


FIGURA 4.3.5 Máximo relativo en c_1 y mínimo relativo en c_2

Extremos relativos En la FIGURA 4.3.5*a*) se ha ilustrado la gráfica de $f(x) = x^3 - 5x + 8$. Debido a que el comportamiento final de f es el de $y = x^3$, $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ y $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$. Con base en esta observación es posible concluir que esta función polinomial no tiene extremos absolutos. No obstante, suponga que centramos la atención en valores de x próximos a, o en una *vecindad* de, los números c_1 y c_2. Como se muestra en la figura 4.3.5*b*), $f(c_1)$ es el valor mayor o máximo de la función f cuando se compara con todos los demás valores de la función en el intervalo abierto (a_1, b_1); en forma semejante, $f(c_2)$ es el valor mínimo de f en el intervalo (a_2, b_2). Estos **extremos relativos**, o **locales**, se definen como sigue.

Definición 4.3.2 Extremos relativos

i) Un número $f(c_1)$ es un **máximo relativo** de una función f si $f(x) \leq f(c_1)$ para toda x en algún intervalo abierto que contiene a c_1.
ii) Un número $f(c_1)$ es un **mínimo relativo** de una función f si $f(x) \geq f(c_1)$ para toda x en algún intervalo abierto que contiene a c_1.

Como consecuencia de la definición 4.3.2 podemos concluir que

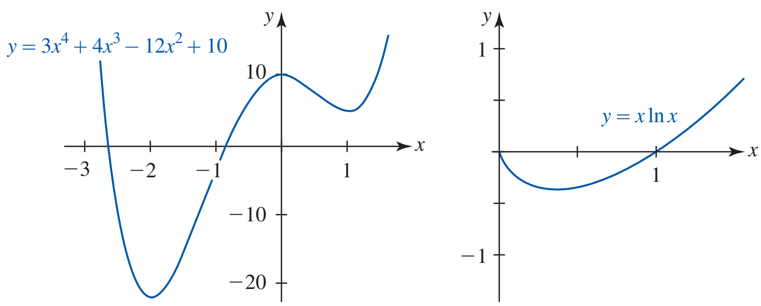
- Todo extremo absoluto, con excepción de un extremo de un punto frontera, también es un extremo relativo.

Un extremo absoluto de un punto frontera se excluye de ser un extremo relativo con base en el tecnicismo de que alrededor de un punto frontera del intervalo no puede encontrarse un intervalo abierto contenido en el dominio de la función.

Hemos llegado al planteamiento de una pregunta evidente:

- ¿Cómo se encuentran los extremos de una función?

Incluso cuando tenemos gráficas, para la mayor parte de las funciones la coordenada x en que ocurre un extremo no es evidente. Con ayuda de la herramienta para acercar o alejar una página de un dispositivo para graficar, es posible buscar y, por supuesto, aproximar tanto la ubicación como el valor de un extremo. Vea la FIGURA 4.3.6. A pesar de lo anterior, resulta aconsejable poder encontrar la ubicación exacta y el valor exacto de un extremo.



a) Mínimo relativo próximo a $x = -2$
Máximo relativo próximo a $x = 0$
Mínimo relativo próximo a $x = 1$

b) Mínimo relativo próximo a $x = 0.4$

FIGURA 4.3.6 Ubicación aproximada de extremos relativos

En la figura 4.3.6*a*) se plantea que un mínimo relativo ocurre *cerca* de $x = -2$. Con las herramientas de una calculadora o un SAC es posible convencernos de que este mínimo relativo es realmente un mínimo absoluto o global, pero con las herramientas del cálculo es posible demostrar en verdad que éste es el caso.

Números críticos El análisis de la FIGURA 4.3.7 junto con las figuras 4.3.5 y 4.3.6 sugiere que si c es un número en el que la función f tiene un extremo relativo, entonces la tangente es horizontal en el punto correspondiente a $x = c$ o no es diferenciable en $x = c$. Es decir, una de las dos: $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe. Este número c recibe un nombre especial.

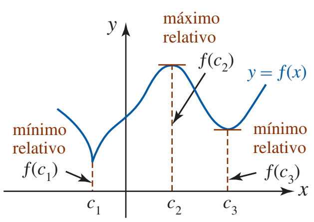


FIGURA 4.3.7 f no es diferenciable en c_1; f' es 0 en c_2 y c_3

Definición 4.3.3 Número crítico

Un **número crítico** de una función f es un número c en su dominio para el cual $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

En algunos textos un número crítico $x = c$ se denomina **punto crítico**.

EJEMPLO 3 Determinación de números críticos

Encuentre los números críticos de $f(x) = x \ln x$.

Solución Por la regla del producto,

$$f'(x) = x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x = 1 + \ln x.$$

La única solución de $f'(x) = 0$ o $\ln x = -1$ es $x = e^{-1}$. Hasta dos cifras decimales, el número crítico de f es $e^{-1} \approx 0.36$. ■

EJEMPLO 4 Determinación de números críticos

Encuentre los números críticos de $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 10$.

Solución Al diferenciar y factorizar se obtiene

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x + 2)(x - 1).$$

Por tanto, observamos que $f'(x) = 0$ para $x = 0$, $x = -2$ y $x = 1$. Los números críticos de f son $0, -2$ y 1. ■

EJEMPLO 5 Determinación de números críticos

Encuentre los números críticos de $f(x) = (x + 4)^{2/3}$.

Solución Por la regla de potencias para funciones,

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x + 4)^{-1/3} = \frac{2}{3(x + 4)^{1/3}}.$$

En este caso observamos que $f'(x)$ no existe cuando $x = -4$. Puesto que -4 está en el dominio de f, concluimos que éste es su número crítico. ■

EJEMPLO 6 Determinación de números críticos

Encuentre los números críticos de $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$.

Solución Por la regla del cociente, después de simplificar encontramos,

$$f'(x) = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}.$$

Ahora, $f'(x) = 0$ cuando el numerador de f es 0. Al resolver la ecuación $x(x - 2) = 0$ obtenemos $x = 0$ y $x = 2$. Además, cuando se inspecciona el denominador de f se encuentra que $f'(x)$ no existe cuando $x = 1$. No obstante, al analizar f se observa que $x = 1$ no está en su dominio, y así los únicos números críticos son 0 y 2. ■

Teorema 4.3.2 Los extremos relativos ocurren en números críticos

Si una función f tiene un extremo relativo en $x = c$, entonces c es un número crítico.

DEMOSTRACIÓN Suponga que $f(c)$ es un extremo relativo.

i) Si $f'(c)$ no existe, entonces, por la definición 4.3.3, c es un número crítico.

ii) Si $f'(c)$ existe, entonces hay tres posibilidades: $f'(c) > 0$, $f'(c) < 0$ o $f'(c) = 0$. Para ahorrar argumentos, también se supondrá que $f(c)$ es un máximo relativo. Así, por la definición 4.3.2 hay algún intervalo abierto que contiene a c donde

$$f(c + h) \leq f(c) \qquad (1)$$

donde el número h es suficientemente pequeño en valor absoluto. Entonces, la desigualdad en (1) implica que

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0 \quad \text{para } h > 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0 \quad \text{para } h < 0. \tag{2}$$

Pero como $\lim_{h\to 0} [f(c+h) - f(c)]/h$ existe y es igual a $f'(c)$, las desigualdades en (2) muestran que $f'(c) \leq 0$ y $f'(c) \geq 0$, respectivamente. La única forma en que esto puede ocurrir es cuando $f'(c) = 0$. El caso en que $f(c)$ es un mínimo relativo se demuestra en forma semejante. ■

Extremos de funciones definidos sobre un intervalo cerrado Se ha visto que una función f que es continua sobre un intervalo *cerrado* tiene tanto un máximo absoluto como un mínimo absoluto. El siguiente teorema indica dónde ocurren estos extremos.

Teorema 4.3.3 Determinación de extremos absolutos

Si f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces un extremo absoluto ocurre ya sea en un punto frontera del intervalo o en un número crítico c en el intervalo abierto (a, b).

El teorema 4.3.3 se resume como sigue:

Directrices para encontrar extremos sobre un intervalo cerrado

i) Evalúe f en los puntos frontera a y b del intervalo $[a, b]$.
ii) Encuentre todos los números críticos $c_1, c_2, \ldots, c_n$ en el intervalo abierto (a, b).
iii) Evalúe f en todos los números críticos.
iv) Los valores mayor y menor en la lista

$$f(a), f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_n), f(b),$$

son el máximo absoluto y el mínimo absoluto, respectivamente, de f sobre el intervalo $[a, b]$.

EJEMPLO 7 Determinación de extremos absolutos

Encuentre los extremos absolutos de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 2$ sobre el intervalo

a) $[-3, 1]$ ***b***) $[-3, 8]$.

Solución Debido a que f es continua, sólo es necesario evaluar f en los puntos frontera de cada intervalo y en los números críticos dentro de cada intervalo. A partir de la derivada

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x+2)(x-4)$$

vemos que los números críticos de la función f son -2 y 4.

a) A partir de los datos que se muestran en la tabla siguiente resulta evidente que el máximo absoluto de f sobre el intervalo $[-3, 1]$ es $f(-2) = 30$, y que el mínimo absoluto es el extremo de un punto frontera $f(1) = -24$.

Sobre $[-3, 1]$			
x	-3	-2	1
$f(x)$	20	30	-24

b) Sobre el intervalo $[-3, 8]$ a partir de la tabla siguiente observamos que $f(4) = -78$ es un mínimo absoluto y que $f(8) = 130$ es un máximo absoluto de un punto frontera.

Sobre $[-3, 8]$				
x	-3	-2	4	8
$f(x)$	20	30	-78	130

■

$f'(x)$ NOTAS DESDE EL AULA

i) Una función puede, por supuesto, asumir sus valores máximo y mínimo más de una vez sobre un intervalo. Usted debe comprobar, con ayuda de un dispositivo para graficar, que la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ alcanza su valor de función máximo 1 cinco veces y su valor de función mínimo -1 cuatro veces en el intervalo $[0, 9\pi]$.

ii) El converso del teorema 4.3.2 no necesariamente es cierto. En otras palabras:

Un número crítico de una función f no necesita corresponder a un extremo relativo.

Considere $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^{1/3}$. Las derivadas $f'(x) = 3x^2$ y $g'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ muestran que 0 es un número crítico de ambas funciones. Pero a partir de las gráficas de f y g en la FIGURA 4.3.8 vemos que ninguna función posee algún extremo sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

iii) Hemos indicado cómo encontrar los extremos absolutos de una función f que es continua sobre un intervalo cerrado. En las secciones 4.6 y 4.7 usamos la primera y segunda derivada para encontrar los extremos relativos de una función.

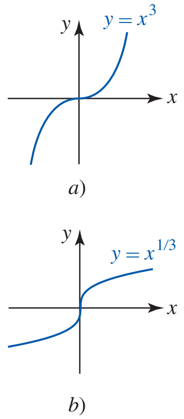


FIGURA 4.3.8 0 es un número crítico para ambas funciones, pero ninguna tiene extremos

Ejercicios 4.3

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-14.

Fundamentos

En los problemas 1-6, use la gráfica de la función dada como ayuda para determinar cualquier extremo absoluto sobre los intervalos indicados.

1. $f(x) = x - 4$
 a) $[-1, 2]$ ***b***) $[3, 7]$ ***c***) $(2, 5)$ ***d***) $[1, 4]$

2. $f(x) = |x - 4|$
 a) $[-1, 2]$ ***b***) $[3, 7]$ ***c***) $(2, 5)$ ***d***) $[1, 4]$

3. $f(x) = x^2 - 4x$
 a) $[1, 4]$ ***b***) $[1, 3]$ ***c***) $(-1, 3)$ ***d***) $(4, 5]$

4. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$
 a) $[-3, 3]$ ***b***) $(-3, 3)$ ***c***) $[0, 3)$ ***d***) $[-1, 1]$

5. $f(x) = \tan x$
 a) $[-\pi/2, \pi/2]$ ***b***) $[-\pi/4, \pi/4]$
 c) $[0, \pi/3]$ ***d***) $[0, \pi]$

6. $f(x) = 2 \cos x$
 a) $[-\pi, \pi]$ ***b***) $[-\pi/2, \pi/2]$
 c) $[\pi/3, 2\pi/3]$ ***d***) $[-\pi/2, 3\pi/2]$

En los problemas 7-22, encuentre los números críticos de las funciones dadas.

7. $f(x) = 2x^2 - 6x + 8$
8. $f(x) = x^3 + x - 2$
9. $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 36x$
10. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7$
11. $f(x) = (x - 2)^2(x - 1)$
12. $f(x) = x^2(x + 1)^3$
13. $f(x) = \dfrac{1 + x}{\sqrt{x}}$
14. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 2}$
15. $f(x) = (4x - 3)^{1/3}$
16. $f(x) = x^{2/3} + x$
17. $f(x) = (x - 1)^2\sqrt[3]{x + 2}$
18. $f(x) = \dfrac{x + 4}{\sqrt[3]{x + 1}}$
19. $f(x) = -x + \operatorname{sen} x$
20. $f(x) = \cos 4x$
21. $f(x) = x^2 - 8 \ln x$
22. $f(x) = e^{-x} + 2x$

En los problemas 23-36, encuentre los extremos absolutos de la función dada sobre el intervalo indicado.

23. $f(x) = -x^2 + 6x;\quad [1, 4]$
24. $f(x) = (x - 1)^2;\quad [2, 5]$
25. $f(x) = x^{2/3};\quad [-1, 8]$
26. $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 1);\quad [-1, 1]$
27. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2;\quad [-3, 2]$
28. $f(x) = -x^3 - x^2 + 5x;\quad [-2, 2]$
29. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1;\quad [-4, 3]$
30. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 10;\quad [0, 4]$
31. $f(x) = x^4(x - 1)^2;\quad [-1, 2]$
32. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + 1};\quad \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$
33. $f(x) = 2 \cos 2x - \cos 4x;\quad [0, 2\pi]$
34. $f(x) = 1 + 5 \operatorname{sen} 3x;\quad [0, \pi/2]$
35. $f(x) = 3 + 2 \operatorname{sen}^2 24x;\quad [0, \pi]$
36. $f(x) = 2x - \tan x;\quad [-1, 1.5]$

En los problemas 37 y 38, encuentre todos los números críticos. Distinga entre extremos absolutos, extremos de un punto frontera y extremos relativos.

37. $f(x) = x^2 - 2|x|;\quad [-2, 3]$

38. $f(x) = \begin{cases} 4x + 12, & -5 \le x \le -2 \\ x^2, & -2 < x \le 1 \end{cases}$

39. Considere la función f continua definida sobre $[a, b]$ que se muestra en la FIGURA 4.3.9. Dado que de c_1 a c_{10} son números críticos:

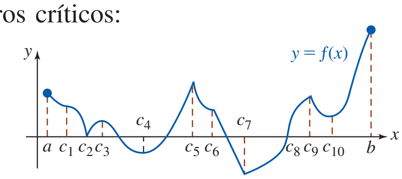


FIGURA 4.3.9 Gráfica para el problema 39

 a) Enumere los números críticos en los cuales $f'(x) = 0$.
 b) Enumere los números críticos en los cuales $f'(x)$ no está definida.
 c) Distinga entre los extremos absolutos y los extremos absolutos de un punto frontera.
 d) Distinga entre los máximos relativos y los mínimos relativos.

40. Considere la función $f(x) = x + 1/x$. Demuestre que el mínimo relativo es mayor que el máximo relativo.

☰ Aplicaciones

41. La altura de un proyectil lanzado desde el nivel del suelo está dada por $s(t) = -16t^2 + 320t$, donde t se mide en segundos y s en pies.

a) $s(t)$ está definida sólo en el intervalo [0, 20]. ¿Por qué?

b) Use los resultados del teorema 4.3.3 para determinar la altura máxima alcanzada por el proyectil.

42. El físico francés **Jean Louis Poiseuille** descubrió que la velocidad $v(r)$ (en cm/s) del flujo sanguíneo que circula por una arteria con sección trasversal de radio R está dada por $v(r) = (P/4\nu l)(R^2 - r^2)$, donde P, ν y l son constantes positivas. Vea la FIGURA 4.3.10.

a) Determine el intervalo cerrado sobre el que está definida v.

b) Determine las velocidades máxima y mínima del flujo sanguíneo.

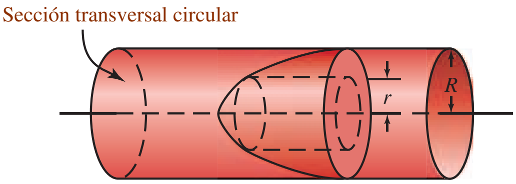


FIGURA 4.3.10 Arteria para el problema 42

☰ Piense en ello

43. Elabore una gráfica de una función continua f que no tenga extremos absolutos pero sí un máximo relativo y un mínimo relativo que tengan el mismo valor.

44. Proporcione un ejemplo de una función continua, definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, para el cual el máximo absoluto es el mismo que el mínimo absoluto.

45. Sea $f(x) = \lfloor x \rfloor$ la función entero mayor. Demuestre que todo valor de x es un número crítico.

46. Demuestre que $f(x) = (ax + b)/(cx + d)$ no tiene números críticos cuando $ad - bc \neq 0$. ¿Qué ocurre cuando $ad - bc = 0$?

47. Sea $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo. Determine los valores de n para los cuales f tiene un extremo relativo.

48. Analice: ¿por qué una función polinomial de grado n puede tener a lo sumo $n - 1$ números críticos?

49. Suponga que f es una función par continua tal que $f(a)$ es un mínimo relativo. ¿Qué puede afirmarse sobre $f(-a)$?

50. Suponga que f es una función impar continua tal que $f(a)$ es un máximo relativo. ¿Qué puede afirmarse sobre $f(-a)$?

51. Suponga que f es una función par continua que es diferenciable en todas partes. Demuestre que $x = 0$ es un número crítico de f.

52. Suponga que f es una función diferenciable que tiene sólo un número crítico c. Si $k \neq 0$, encuentre los números críticos de:

a) $k + f(x)$ ***b)*** $kf(x)$ ***c)*** $f(x + k)$ ***d)*** $f(kx)$

☰ Problemas con calculadora/SAC

53. ***a)*** Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $f(x) = -2 \cos x + \cos 2x$.

b) Encuentre los números críticos de f en el intervalo $[0, 2\pi]$.

c) Encuentre los extremos absolutos de f en el intervalo $[0, 2\pi]$.

54. En el estudio del crecimiento de los copos de nieve, la fórmula

$$I(t) = \frac{b}{\pi} + \frac{b}{2}\operatorname{sen} \omega t - \frac{2b}{3\pi}\cos 2\omega t$$

es un modelo matemático para la variación diaria en la intensidad de radiación solar que penetra la superficie de la nieve. Aquí t representa el tiempo medido en horas después del amanecer ($t = 0$) y $\omega = 2\pi/24$.

a) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de I sobre el intervalo [0, 24]. Use $b = 1$.

b) Encuentre los números críticos de I en el intervalo [0, 24].

4.4 Teorema del valor medio

Introducción Suponga que una función $y = f(x)$ es continua y diferenciable sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ y que $f(a) = f(b) = 0$. Estas condiciones significan que los números a y b son las coordenadas x de las intersecciones x de la gráfica de f. En la FIGURA 4.4.1*a*) se muestra una gráfica típica de una función f que satisface estas condiciones. A partir de la figura 4.4.1*b*) parece válido que debe haber por lo menos un número c en el intervalo abierto (a, b) correspondiente a un punto sobre la gráfica de f donde la tangente es horizontal. Esta observación conduce a un resultado denominado teorema de Rolle. Usaremos este teorema para demostrar el resultado más importante de esta sección: el teorema del valor medio para derivadas.

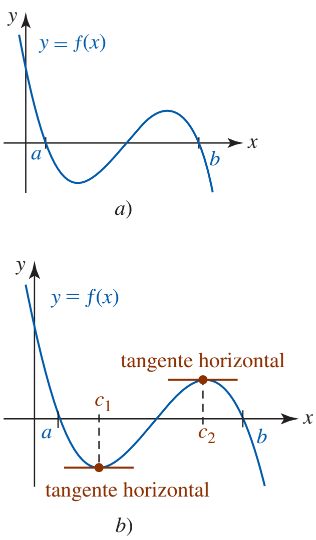


FIGURA 4.4.1 Dos puntos donde la tangente es horizontal

> **Teorema 4.4.1** Teorema de Rolle
>
> Sea f una función continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b). Si $f(a) = f(b) = 0$, entonces hay un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

DEMOSTRACIÓN Ocurre que f es una función constante sobre el intervalo $[a, b]$ o no lo es. Si f es una función constante sobre $[a, b]$, entonces debe tenerse $f'(c) = 0$ para todo número c en (a, b). Luego, si f no es una función constante sobre $[a, b]$, entonces debe haber un número x

en (a, b) donde $f(x) > 0$ o $f(x) < 0$. Suponga que $f(x) > 0$. Puesto que f es continua sobre $[a, b]$, por el teorema del valor extremo sabemos que f alcanza un máximo absoluto en algún número c en $[a, b]$. Pero por $f(a) = f(b) = 0$ y $f(x) > 0$ para alguna x en (a, b), concluimos que el número c no puede ser un punto frontera de $[a, b]$. En consecuencia, c está en (a, b). Puesto que f es diferenciable sobre (a, b), es diferenciable en c. Entonces, por el teorema 4.3.2 tenemos $f'(c) = 0$. La demostración para el caso en que $f(x) < 0$ se concluye en forma semejante. ■

EJEMPLO 1 Comprobación del teorema de Rolle

Considere la función $f(x) = -x^3 + x$ definida sobre $[-1, 1]$. La gráfica de f se muestra en la FIGURA 4.4.2. Puesto que f es una función polinomial, es continua en $[-1, 1]$ y diferenciable sobre $(-1, 1)$. También, $f(-1) = f(1) = 0$. Por tanto, se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle. Concluimos que debe haber por lo menos un número en $(-1, 1)$ para el cual $f'(x) = -3x^2 + 1$ es cero. Para encontrar este número, se resuelve $f'(c) = 0$ o $-3c^2 + 1 = 0$. Esta última conduce a *dos* soluciones en el intervalo: $c_1 = -\sqrt{3}/3 \approx -0.57$ y $c_2 = \sqrt{3}/3 \approx 0.57$. ■

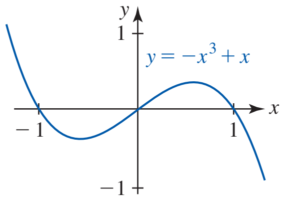


FIGURA 4.4.2 Gráfica de la función en el ejemplo 1

En el ejemplo 1, observe que la función f dada satisface las hipótesis del teorema de Rolle sobre $[0, 1]$, así como sobre $[-1, 1]$. En el caso del intervalo $[0, 1]$, $f'(c) = -3c^2 + 1 = 0$ produce la única solución $c = \sqrt{3}/3$.

EJEMPLO 2 Comprobación del teorema de Rolle

a) La función $f(x) = x - 4x^{1/3}$, que se muestra en la FIGURA 4.4.3, es continua sobre $[-8, 8]$ y satisface $f(-8) = f(8) = 0$. Pero no es diferenciable sobre $(-8, 8)$, puesto que en el origen hay una tangente vertical. No obstante, como sugiere la figura, hay dos números c_1 y c_2 en $(-8, 8)$ donde $f'(x) = 0$. Usted debe comprobar que $f'\left(-8\sqrt{3}/9\right) = 0$ y $f'\left(8\sqrt{3}/9\right) = 0$. Tenga en cuenta que las hipótesis del teorema de Rolle son condiciones suficientes pero no necesarias. En otras palabras, si no se cumple una de estas tres hipótesis: continuidad sobre $[a, b]$, diferenciabilidad sobre (a, b) y $f(a) = f(b) = 0$, la conclusión de que en (a, b) hay un número c tal que $f'(c) = 0$ puede cumplirse o no.

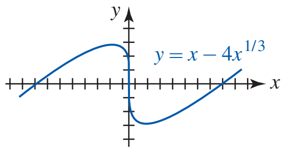


FIGURA 4.4.3 Gráfica de la función f en el ejemplo 2

b) Considere otra función $g(x) = 1 - x^{2/3}$. Esta función es continua sobre $[-1, 1]$ y $f(-1) = f(1) = 0$. Pero como la función f anterior, g no es diferenciable en $x = 0$ y por tanto no es diferenciable sobre el intervalo abierto $(-1, 1)$. En este caso, sin embargo, en $(-1, 1)$ no hay algún c para el cual $f'(c) = 0$. Vea la FIGURA 4.4.4. ■

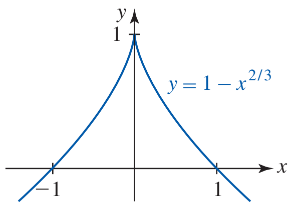


FIGURA 4.4.4 Gráfica de la función g en el ejemplo 2

La conclusión del teorema de Rolle también se cumple cuando la condición $f(a) = f(b) = 0$ se sustituye por $f(a) = f(b)$. La validez de este hecho se ilustra en la FIGURA 4.4.5.

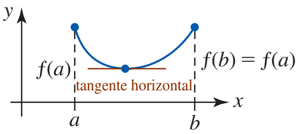


FIGURA 4.4.5 El teorema de Rolle se cumple cuando $f(a) = f(b)$

Teorema del valor medio El teorema de Rolle es de utilidad para demostrar el siguiente resultado importante denominado **teorema del valor medio**. Este teorema establece que cuando una función f es continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b), entonces debe haber por lo menos un punto sobre la gráfica donde la pendiente de la recta tangente es la misma que la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. La palabra *medio* se refiere aquí a un promedio; es decir, al valor de la derivada en algún punto es el mismo que la razón de cambio media de la función sobre el intervalo.

Teorema 4.4.2 Teorema del valor medio para derivadas

Sea f una función continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b). Entonces en (a, b) existe un número c tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

DEMOSTRACIÓN Como se muestra en la FIGURA 4.4.6, sea $d(x)$ la distancia vertical entre un punto sobre la gráfica de $y = f(x)$ y la recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Puesto que la ecuación de la recta secante es

$$y - f(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b)$$

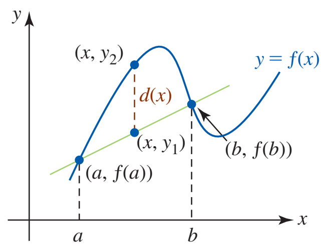


FIGURA 4.4.6 Recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

tenemos, como se muestra en la figura, $d(x) = y_2 - y_1$, o bien,

$$d(x) = f(x) - \left[f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) \right].$$

Puesto que $d(a) = d(b) = 0$ y $d(x)$ es continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b), el teorema de Rolle implica que en (a, b) existe un número c para el cual $d'(c) = 0$. Entonces,

$$d'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y así $d'(c) = 0$ es lo mismo que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad \blacksquare$$

Como se indica en la FIGURA 4.4.7, en (a, b) puede haber más de un número c para el que las rectas tangente y secante son paralelas.

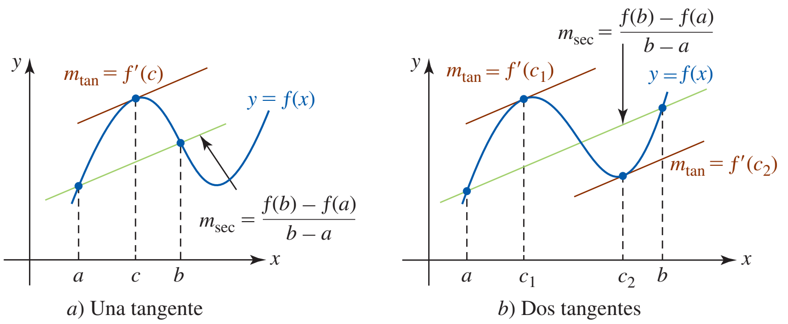


FIGURA 4.4.7 Las tangentes son paralelas a la recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

EJEMPLO 3 Comprobación del teorema del valor medio

Dada la función $f(x) = x^3 - 12x$ definida sobre el intervalo cerrado $[-1, 3]$, ¿existe un número c en el intervalo abierto $(-1, 3)$ que cumple la conclusión del teorema del valor medio?

Solución Puesto que f es una función polinomial, es continua sobre $[-1, 3]$ y diferenciable sobre $(-1, 3)$. Entonces, $f(3) = -9, f(-1) = 11$,

$$f'(x) = 3x^2 - 12 \qquad \text{y} \qquad f'(c) = 3c^2 - 12.$$

Así, debe tenerse

$$\frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{-20}{4} = 3c^2 - 12.$$

Por tanto, $3c^2 = 7$. Aunque la última ecuación tiene dos soluciones, la única solución en el intervalo $(-1, 3)$ es $c = \sqrt{7/3} \approx 1.53$. $\blacksquare$

El teorema del valor medio es muy útil para demostrar otros teoremas. Recuerde de la sección 3.2 que si $f(x) = k$ es una función constante, entonces $f'(x) = 0$. El converso de este resultado se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema 4.4.3 Función constante

Si $f'(x) = 0$ para toda x en un intervalo $[a, b]$, entonces $f(x)$ es una constante sobre el intervalo.

DEMOSTRACIÓN Sean x_1 y x_2 dos números arbitrarios en $[a, b]$ tales que $x_1 < x_2$. Por el teorema del valor medio, en el intervalo (x_1, x_2) hay un número c tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

Pero por hipótesis, $f'(x) = 0$. Entonces, $f(x_2) - f(x_1) = 0$ o $f(x_1) = f(x_2)$. Puesto que x_1 y x_2 se escogen de manera arbitraria, la función f tiene el mismo valor en todos los puntos en el intervalo. Así, f es constante. $\blacksquare$

Funciones crecientes y decrecientes Suponga que una función $y = f(x)$ está definida sobre un intervalo I y que x_1 y x_2 son dos números cualesquiera en el intervalo tales que $x_1 < x_2$. En la sección 1.3 vimos que f es **creciente** sobre I si $f(x_1) < f(x_2)$, y **decreciente** sobre I si $f(x_1) > f(x_2)$. Vea la figura 1.3.4. Intuitivamente, la gráfica de una función creciente *sube* cuando x crece (es decir, la gráfica asciende cuando se lee de izquierda a derecha) y la gráfica de una función decreciente *baja* cuando x crece. Por ejemplo, $y = e^x$ crece sobre $(-\infty, \infty)$ y $y = e^{-x}$ decrece sobre $(-\infty, \infty)$. Por supuesto, una función f puede ser creciente sobre ciertos intervalos y decreciente sobre intervalos diferentes. Por ejemplo, $y = \operatorname{sen} x$ crece sobre $[-\pi/2, \pi/2]$ y decrece sobre $[\pi/2, 3\pi/2]$.

La gráfica en la FIGURA 4.4.8 ilustra una función f que es creciente sobre los intervalos $[b, c]$ y $[d, e]$ y decreciente sobre $[a, b]$, $[c, d]$ y $[e, h]$.

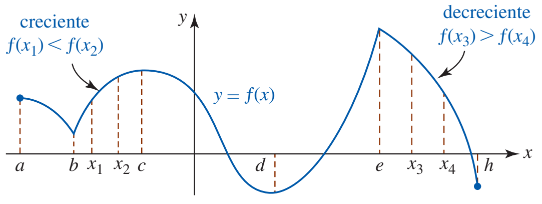


FIGURA 4.4.8 Una función puede crecer sobre algunos intervalos y decrecer en otros

El siguiente teorema es una prueba de la derivada para crecimiento/decrecimiento.

Teorema 4.4.4 Prueba para crecimiento/decrecimiento

Sea f una función continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b).

i) Si $f'(x) > 0$ para toda x en (a, b), entonces f es creciente sobre $[a, b]$.
ii) Si $f'(x) < 0$ para toda x en (a, b), entonces f es decreciente sobre $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN *i*) Sean x_1 y x_2 dos números arbitrarios en $[a, b]$ tales que $x_1 < x_2$. Por el teorema del valor medio, en el intervalo (x_1, x_2) hay un número c tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Pero $f'(c) > 0$ por hipótesis. Entonces, $f(x_2) - f(x_1) > 0$ o $f(x_1) < f(x_2)$. Puesto que x_1 y x_2 se escogen de manera arbitraria, concluimos que f es creciente sobre $[a, b]$.

ii) Si $f'(c) < 0$, entonces $f(x_2) - f(x_1) < 0$ o $f(x_1) > f(x_2)$. Puesto que x_1 y x_2 se escogen de manera arbitraria, concluimos que f es decreciente sobre $[a, b]$. ■

EJEMPLO 4 Prueba de la derivada para crecimiento/decrecimiento

Determine los intervalos sobre los cuales $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x$ es creciente y los intervalos sobre los cuales f es decreciente.

Solución La derivada es

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x + 2)(x - 4).$$

Para determinar cuándo $f'(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ es necesario resolver

$$(x + 2)(x - 4) > 0 \qquad \text{y} \qquad (x + 2)(x - 4) < 0,$$

respectivamente. Una manera de resolver estas desigualdades es analizar los signos algebraicos de los factores $(x + 2)$ y $(x - 4)$ sobre los intervalos de la recta numérica determinada por los puntos críticos -2 y 4: $(-\infty, -2]$, $[-2, 4]$, $[4, \infty)$. Vea la FIGURA 4.4.9.

En precálculo, este procedimiento para resolver desigualdades no lineales se denomina *método de la tabla de signos.*

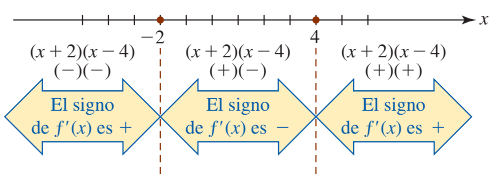


FIGURA 4.4.9 Signos de $f(x)$ en tres intervalos en el ejemplo 4

La información obtenida a partir de la figura 4.4.9 se resume en la tabla siguiente.

Intervalo	**Signo de $f'(x)$**	**$y = f(x)$**
$(-\infty, -2)$	$+$	creciente sobre $(-\infty, -2]$
$(-2, 4)$	$-$	decreciente sobre $[-2, 4]$
$(4, \infty)$	$+$	creciente sobre $[4, \infty)$

■

EJEMPLO 5 Prueba de la derivada para creciente/decreciente

Determine los intervalos sobre los cuales $f(x) = \sqrt{x}e^{-x/2}$ es creciente y los intervalos sobre los cuales f es decreciente.

Solución Primero observe que el dominio de f está definido por $x \geq 0$. Luego, la derivada

$$f'(x) = x^{1/2}e^{-x/2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}x^{-1/2}e^{-x/2} = \frac{e^{-x/2}}{2\sqrt{x}}(1 - x)$$

es cero en 1 y está indefinida en 0. Puesto que 0 está en el dominio de f y ya que $f'(x) \to \infty$ cuando $x \to 0^+$, concluimos que la gráfica de f tiene una tangente vertical (el eje y) en (0, 0). Además, debido a que $e^{-x/2}/2\sqrt{x} > 0$ para $x > 0$, sólo es necesario resolver

$$1 - x > 0 \qquad \text{y} \qquad 1 - x < 0$$

para determinar dónde $f'(x) > 0$ y $f'(x) < 0$, respectivamente. Los resultados se muestran en la tabla siguiente.

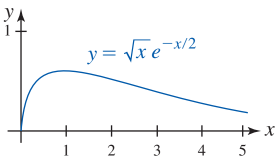


FIGURA 4.4.10 Gráfica de la función en el ejemplo 5

Intervalo	**Signo de $f'(x)$**	**$y = f(x)$**
$(0, 1)$	$+$	creciente sobre $[0, 1]$
$(1, \infty)$	$-$	decreciente sobre $[1, \infty)$

Con ayuda de un dispositivo para graficar obtenemos la gráfica de f que se observa en la FIGURA 4.4.10. ■

Si una función f es discontinua en uno o en ambos puntos extremos de $[a, b]$, entonces $f'(x) > 0$ (o $f'(x) < 0$) sobre (a, b) implica que f es creciente (o decreciente) sobre el intervalo abierto (a, b).

Posdata: Un poco de historia **Michel Rolle** (1652-1719), francés, maestro de escuela elemental, estaba profundamente interesado en las matemáticas, y a pesar de que su educación fue bastante deficiente resolvió varios teoremas de importancia. Pero, curiosamente, Rolle no demostró el teorema que lleva su nombre. De hecho, fue uno de los primeros críticos rotundos del, entonces, nuevo cálculo. A Rolle también se le acredita la invención del simbolismo $\sqrt[n]{x}$ para denotar la raíz n-ésima de un número x.

$f'(x)$ NOTAS DESDE EL AULA

i) Como ya se mencionó, las hipótesis planteadas en el teorema de Rolle, así como las hipótesis del teorema del valor medio, son condiciones suficientes pero no necesarias. En el teorema de Rolle, por ejemplo, si una o más de las hipótesis: continuidad sobre $[a, b]$, diferenciabilidad sobre (a, b) y $f(a) = f(b) = 0$ no se cumple, entonces la conclusión de que en el intervalo abierto (a, b) existe un número c tal que $f'(c) = 0$ puede cumplirse o no.

ii) El converso de los incisos *i*) y *ii*) del teorema 4.4.4 no necesariamente son ciertos. En otras palabras, cuando f es una función creciente (o decreciente) sobre un intervalo, no se concluye que $f'(x) > 0$ (o $f'(x) < 0$) sobre el intervalo. Una función puede ser creciente sobre un intervalo e incluso no ser diferenciable sobre ese intervalo.

Ejercicios 4.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-14.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-10, determine si la función dada satisface las hipótesis del teorema de Rolle sobre el intervalo indicado. En caso afirmativo, encuentre todos los valores de c que satisfacen la conclusión del teorema.

1. $f(x) = x^2 - 4;\quad [-2, 2]$

2. $f(x) = x^2 - 6x + 5;\quad [1, 5]$

3. $f(x) = x^3 + 27;\quad [-3, -2]$

4. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x;\quad [0, 4]$

5. $f(x) = x^3 + x^2;\quad [-1, 0]$

6. $f(x) = x(x - 1)^2;\quad [0, 1]$

7. $f(x) = \operatorname{sen} x;\quad [-\pi, 2\pi]$

8. $f(x) = \tan x;\quad [0, \pi]$

9. $f(x) = x^{2/3} - 1;\quad [-1, 1]$

10. $f(x) = x^{2/3} - 3x^{1/3} + 2;\quad [1, 8]$

En los problemas 11 y 12, establezca por qué la función f cuya gráfica se proporciona no satisface las hipótesis del teorema de Rolle sobre $[a, b]$.

11.

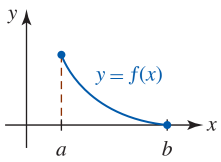


FIGURA 4.4.11 Gráfica para el problema 11

12.

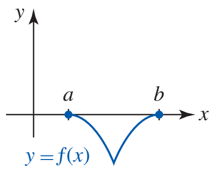


FIGURA 4.4.12 Gráfica para el problema 12

En los problemas 13-22, determine si la función dada satisface las hipótesis del teorema del valor medio sobre el intervalo indicado. En caso afirmativo, encuentre todos los valores de c que satisfacen la conclusión del teorema.

13. $f(x) = x^2;\quad [-1, 7]$

14. $f(x) = -x^2 + 8x - 6;\quad [2, 3]$

15. $f(x) = x^3 + x + 2;\quad [2, 5]$

16. $f(x) = x^4 - 2x^2;\quad [-3, 3]$

17. $f(x) = 1/x;\quad [-10, 10]$

18. $f(x) = x + \dfrac{1}{x};\quad [1, 5]$

19. $f(x) = 1 + \sqrt{x};\quad [0, 9]$

20. $f(x) = \sqrt{4x + 1};\quad [2, 6]$

21. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1};\quad [-2, -1]$

22. $f(x) = x^{1/3} - x;\quad [-8, 1]$

En los problemas 23 y 24, establezca por qué la función f cuya gráfica se proporciona no satisface las hipótesis del teorema del valor medio sobre $[a, b]$.

23.

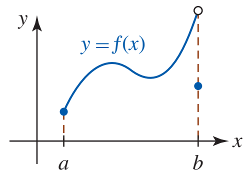


FIGURA 4.4.13 Gráfica para el problema 23

24.

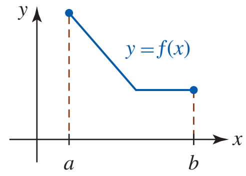


FIGURA 4.4.14 Gráfica para el problema 24

En los problemas 25-46, determine los intervalos sobre los cuales la función dada f es creciente y los intervalos sobre los cuales es decreciente.

25. $f(x) = x^2 + 5$

26. $f(x) = x^3$

27. $f(x) = x^2 + 6x - 1$

28. $f(x) = -x^2 + 10x + 3$

29. $f(x) = x^3 - 3x^2$

30. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + 1$

31. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 9$

32. $f(x) = 4x^5 - 10x^4 + 2$

33. $f(x) = 1 - x^{1/3}$

34. $f(x) = x^{2/3} - 2x^{1/3}$

35. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

36. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

37. $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$

38. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

39. $f(x) = \dfrac{5}{x^2 + 1}$

40. $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}$

41. $f(x) = x(x - 3)^2$

42. $f(x) = (x^2 - 1)^3$

43. $f(x) = \operatorname{sen} x$

44. $f(x) = -x + \tan x$

45. $f(x) = x + e^{-x}$

46. $f(x) = x^2 e^{-x}$

En los problemas 47 y 48, demuestre, sin graficar, que la función dada no tiene extremos relativos.

47. $f(x) = 4x^3 + x$

48. $f(x) = -x + \sqrt{2 - x}$

≡ Aplicaciones

49. Un motociclista entra a una carretera de peaje y en el comprobante de pago la hora indicada es 1:15 p.m. Luego de 70 millas, cuando el motociclista paga en la caseta de peaje a las 2:15 p.m., también recibe un comprobante de pago. Explique esto por medio del teorema del valor medio. Suponga que la velocidad límite es 65 mi/h.

50. En el análisis matemático de la tos humana se supone que la tráquea o tubo respiratorio es un tubo cilíndrico. Un modelo matemático para el volumen de aire (en cm^3/s) que fluye a través de la tráquea durante su contracción es

$$V(r) = kr^4(r_0 - r), \quad r_0/2 \le r \le r_0,$$

donde k es una constante positiva y r_0 es su radio cuando no hay diferencia de presión en los extremos del tubo respiratorio. Determine un intervalo para el cual V sea creciente y un intervalo para el cual V sea decreciente. ¿Con qué radio obtiene el volumen máximo de flujo de aire?

≡ Piense en ello

51. Considere la función $f(x) = x^4 + x^3 - x - 1$. Use esta función y el teorema de Rolle para demostrar que la ecuación $4x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ tiene por lo menos una raíz en $[-1, 1]$.

52. Suponga que las funciones f y g son continuas sobre $[a, b]$ y diferenciables sobre (a, b) de modo que $f'(x) > 0$ y $g'(x) > 0$ para toda x en (a, b). Demuestre que $f + g$ es una función creciente sobre $[a, b]$.

53. Suponga que las funciones f y g son continuas sobre $[a, b]$ y diferenciables sobre (a, b) de modo que $f'(x) > 0$ y $g'(x) > 0$ para toda x en (a, b). Proporcione una condición sobre $f(x)$ y $g(x)$ que garantice que el producto fg es creciente sobre $[a, b]$.

54. Demuestre que la ecuación $ax^3 + bx + c = 0$, $a > 0$, $b > 0$, no puede tener dos raíces reales. [*Sugerencia*: Considere la función $f(x) = ax^3 + bx + c$. Suponga que hay dos números r_1 y r_2 tales que $f(r_1) = f(r_2) = 0$.]

55. Demuestre que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene a lo sumo una raíz real. [*Sugerencia*: Considere la función $f(x) = ax^2 + bx + c$. Suponga que hay tres números distintos r_1, r_2 y r_3 tales que $f(r_1) = f(r_2) = f(r_3) = 0$.]

56. Para una función polinomial cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ demuestre que el valor de x_3 que satisface la conclusión del teorema del valor medio sobre cualquier intervalo $[x_1, x_2]$ es $x_3 = (x_1 + x_2)/2$.

57. Suponga que la gráfica de una función polinomial f tiene cuatro intersecciones x distintas. Analice: ¿cuál es el número mínimo de puntos en los cuales una recta tangente a la gráfica de f es horizontal?

58. Como se mencionó después del ejemplo 2, la hipótesis $f(a) = f(b) = 0$ en el teorema de Rolle puede sustituirse por la hipótesis $f(a) = f(b)$.

a) Encuentre una función explícita f definida sobre un intervalo $[a, b]$ tal que f sea continua sobre el intervalo, diferenciable sobre (a, b) y $f(a) = f(b)$.

b) Encuentre un número c para el que $f'(c) = 0$.

59. Considere la función $f(x) = x$ sen x. Use f y el teorema de Rolle para demostrar que la ecuación $\cot x = -1/x$ tiene una solución sobre el intervalo $(0, \pi)$.

≡ Problemas con calculadora/SAC

60. *a*) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de $f(x) = x - 4x^{1/3}$.

b) Compruebe que todas las hipótesis, excepto una del teorema de Rolle, se cumplen en el intervalo $[-8, 8]$.

c) Determine si en $(-8, 8)$ existe un número c para el cual $f'(c) = 0$.

En los problemas 61 y 62, use una calculadora para encontrar un valor de c que satisfaga la conclusión del teorema del valor medio.

61. $f(x) = \cos 2x$; $[0, \pi/4]$

62. $f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$; $[\pi/4, \pi/2]$

4.5 Otro repaso a los límites: regla de L'Hôpital

Introducción En los capítulos 2 y 3 vimos cómo el concepto de límite conduce a la idea de derivada de una función. En esta sección se invierte la situación. Vemos cómo la derivada puede usarse para calcular ciertos límites con formas indeterminadas.

Terminología Recuerde que en el capítulo 2 se consideraron límites de cocientes como

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - x}{3x^2 + 1}. \tag{1}$$

El primer límite en (1) tiene la forma indeterminada $0/0$ en $x = 1$, mientras que el segundo tiene la forma indeterminada ∞/∞. En general, decimos que el límite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

tiene la **forma indeterminada 0/0** en $x = a$ si

$$f(x) \to 0 \quad \text{y} \quad g(x) \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad x \to a$$

y la **forma indeterminada ∞/∞** en $x = a$ si

$$|f(x)| \to \infty \quad \text{y} \quad |g(x)| \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to a.$$

Los signos de valor absoluto aquí significan que cuando x tiende a a es posible tener, por ejemplo,

$$f(x) \to \infty, \quad g(x) \to -\infty; \text{ o bien,}$$
$$f(x) \to -\infty, \quad g(x) \to \infty; \text{ o bien,}$$
$$f(x) \to -\infty, \quad g(x) \to -\infty,$$

y así sucesivamente. Un límite también puede tener una forma indeterminada como

$$x \to a^-, \quad x \to a^+, \quad x \to -\infty, \quad \text{o bien,} \quad x \to \infty.$$

Límites de la forma

$$\frac{0}{k}, \quad \frac{k}{0}, \quad \frac{\infty}{k} \quad \text{y} \quad \frac{k}{\infty},$$

Nota

donde k es una constante *diferente de cero*, *no* son formas indeterminadas. Merece la pena recordar que:

- El valor de un límite cuya forma es $0/k$ o k/∞ es 0. (2)
- Un límite cuya forma es $k/0$ o ∞/k no existe. (3)

Al establecer si límites de cocientes como los que se muestran en (1) existen, usamos manipulaciones algebraicas de factorización, cancelación y división. No obstante, recuerde que en la demostración de $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{sen} x)/x = 1$ se usó un razonamiento geométrico elaborado. Sin embargo, la intuición algebraica y geométrica fracasan lamentablemente cuando intentan abordar un problema del tipo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x - e^{-x}},$$

que tiene una forma indeterminada $0/0$. El siguiente teorema es de utilidad cuando se demuestra una regla de suma importancia en la evaluación de muchos límites que tienen una forma indeterminada.

Teorema 4.5.1 Teorema del valor medio ampliado

Sean f y g continuas sobre $[a, b]$ y diferenciables sobre (a, b) y $g'(x) \neq 0$ para toda x en (a, b). Entonces en (a, b) existe un número c tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Observe que el teorema 4.5.1 se reduce al teorema del valor medio cuando $g(x) = x$. Aquí no se proporciona ninguna demostración de este teorema, que evoca la demostración del teorema 4.4.2.

La siguiente regla se denomina así en honor del matemático francés G.F.A. L'Hôpital.

Teorema 4.5.2 Regla de L'Hôpital

Suponga que f y g son diferenciables sobre un intervalo abierto que contiene al número a, excepto posiblemente en a mismo, y que $g'(x) \neq 0$ para toda x en el intervalo salvo posiblemente en a. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x)$ es una forma indeterminada, y $\lim\limits_{x\to a} f'(x)/g'(x) = L$ o $\pm\infty$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{4}$$

DEMOSTRACIÓN DEL CASO 0/0 Sea (r, s) el intervalo abierto. Como se supone que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

también puede asumirse que $f(a) = 0$ y $g(a) = 0$. Concluimos que f y g son continuas en a. Además, puesto que f y g son diferenciables, éstas son continuas sobre los intervalos abiertos (r, a) y (a, s). En consecuencia, f y g son continuas en el intervalo (r, s). Luego, para cualquier $x \neq a$ en el intervalo, el teorema 4.5.1 es aplicable a $[x, a]$ o $[a, x]$. En cualquier caso, entre x y a existe un número c tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Al hacer $x \to a$ implica $c \to a$, y entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 1 Forma indeterminada 0/0

Evalúe $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Solución Puesto que el límite dado tiene la forma indeterminada $0/0$ en $x = 0$, por (4) es posible escribir

La letra *h* en cursiva roja arriba de la primera desigualdad indica que los dos límites son iguales como resultado de aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \overset{h}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} x}{\dfrac{d}{dx}x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

EJEMPLO 2 Forma indeterminada 0/0

Evalúe $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x - e^{-x}}$.

Solución Puesto que el límite dado tiene la forma indeterminada $0/0$ en $x = 0$, se aplica (4):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x - e^{-x}} \overset{h}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} x}{\dfrac{d}{dx}(e^x - e^{-x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

El resultado proporcionado en (4) sigue siendo válido cuando $x \to a$ se sustituye por límites por un lado o por $x \to \infty$, $x \to -\infty$. La demostración para el caso $x \to \infty$ puede obtenerse al usar la sustitución $x = 1/t$ en $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x)$ y al observar que $x \to \infty$ es equivalente a $t \to 0^+$.

EJEMPLO 3 Forma indeterminada ∞/∞

Evalúe $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{e^x}$.

Solución Puesto que el límite dado tiene la forma indeterminada ∞/∞. Así, por la regla de L'Hôpital tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x} \overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{xe^x}.$$

En este último límite, $xe^x \to \infty$ cuando $x \to \infty$, mientras 1 permanece constante. En consecuencia, por (2),

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{xe^x} = 0$$

Al resolver un problema puede ser necesario aplicar varias veces la regla de L'Hôpital.

EJEMPLO 4 Aplicaciones sucesivas de la regla de L'Hôpital

Evalúe $\lim_{x\to\infty} \dfrac{6x^2 + 5x + 7}{4x^2 + 2x}$.

Solución Resulta evidente que la forma indeterminada es ∞/∞, de modo que por (4),

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x^2 + 5x + 7}{4x^2 + 2x} \overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{12x + 5}{8x + 2}.$$

Puesto que el nuevo límite sigue teniendo la forma indeterminada ∞/∞, aplicamos (4) por segunda vez:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{12x + 5}{8x + 2} \overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

Hemos demostrado que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+5x+7}{4x^2+2x}=\frac{3}{2}. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 5 Aplicaciones sucesivas de la regla de L'Hôpital

Evalúe $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^{3x}}{x^2}$.

Solución El límite dado y el límite obtenido después de una aplicación de la regla de L'Hôpital tienen la forma indeterminada ∞/∞:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{3x}}{x^2}\overset{h}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{3e^{3x}}{2x}\overset{h}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{9e^{3x}}{2}.$$

Después de la segunda aplicación de (4), observamos que $e^{3x}\to\infty$ mientras el denominador permanece constante. A partir de ello concluimos que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{3x}}{x^2}=\infty.$$

En otras palabras, el límite no existe. $\blacksquare$

EJEMPLO 6 Aplicaciones sucesivas de la regla de L'Hôpital

Evalúe $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{e^{2x}}$.

Solución Aplicamos (4) cuatro veces:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{e^{2x}}&\overset{h}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3}{2e^{2x}} \quad (\infty/\infty)\\ &\overset{h}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2}{4e^{2x}} \quad (\infty/\infty)\\ &\overset{h}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{2e^{2x}} \quad (\infty/\infty)\\ &\overset{h}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{6}{4e^{2x}}=0.\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

En aplicaciones sucesivas de la regla de L'Hôpital, algunas veces es posible cambiar un límite de una forma indeterminada a otra; por ejemplo, ∞/∞ a $0/0$.

EJEMPLO 7 Forma indeterminada ∞/∞

Evalúe $\displaystyle\lim_{t\to\pi/2^+}\frac{\tan t}{\tan 3t}$.

Solución Se observa que $\tan t\to-\infty$ y $\tan 3t\to-\infty$ cuando $t\to\pi/2^+$. Entonces, por (4),

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\pi/2^+}\frac{\tan t}{\tan 3t}&\overset{h}{=}\lim_{t\to\pi/2^+}\frac{\sec^2 t}{3\sec^2 3t} \quad (\infty/\infty)\\ &=\lim_{t\to\pi/2^+}\frac{\cos^2 3t}{3\cos^2 t} \quad (0/0)\\ &\overset{h}{=}\lim_{t\to\pi/2^+}\frac{2\cos 3t(-3\,\mathrm{sen}\,3t)}{6\cos t(-\mathrm{sen}\,t)}\\ &=\lim_{t\to\pi/2^+}\frac{2\,\mathrm{sen}\,3t\cos 3t}{2\,\mathrm{sen}\,t\cos t}\\ &=\lim_{t\to\pi/2^+}\frac{\mathrm{sen}\,6t}{\mathrm{sen}\,2t} \quad (0/0)\\ &\overset{h}{=}\lim_{t\to\pi/2^+}\frac{6\cos 6t}{2\cos 2t}=\frac{-6}{-2}=3.\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

← se vuelve a escribir usando $\sec t = 1/\cos t$

← se vuelve a escribir usando la fórmula del ángulo doble en el numerador y en el denominador

EJEMPLO 8 Límite por un lado

Evalúe $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{\sqrt{x-1}}$.

Solución El límite dado tiene la forma indeterminada $0/0$ en $x = 1$. Así, por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{\sqrt{x-1}} \overset{h}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{1/x}{\frac{1}{2}(x-1)^{-1/2}} = \lim_{x\to 1^+}\frac{2\sqrt{x-1}}{x} = \frac{0}{1} = 0.$$ ■

Otras formas indeterminadas Hay cinco formas indeterminadas adicionales:

$$\infty-\infty,\quad 0\cdot\infty,\quad 0^0,\quad \infty^0 \quad \text{y} \quad 1^\infty. \tag{5}$$

Por medio de una combinación de álgebra y un poco de astucia a menudo es posible convertir una de estas nuevas formas de límites ya sea a $0/0$ o a ∞/∞.

La forma $\infty - \infty$ El siguiente ejemplo ilustra un límite que tiene la forma indeterminada $\infty-\infty$. Este ejemplo debe anular cualquier convicción garantizada de que $\infty-\infty = 0$.

EJEMPLO 9 Forma indeterminada $\infty-\infty$

Evalúe $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{3x+1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x}\right]$.

Solución Se observa que $(3x+1)/\operatorname{sen} x \to \infty$ y $1/x \to \infty$ cuando $x \to 0^+$. No obstante, después de escribir la diferencia como una fracción simple, se identifica la forma $0/0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{3x+1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x}\right] &= \lim_{x\to 0^+}\frac{3x^2+x-\operatorname{sen} x}{x\operatorname{sen} x} \qquad \leftarrow \text{común denominador}\\
&\overset{h}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{6x+1-\cos x}{x\cos x+\operatorname{sen} x}\\
&\overset{h}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{6+\operatorname{sen} x}{-x\operatorname{sen} x+2\cos x}\\
&= \frac{6+0}{0+2} = 3.
\end{aligned}$$ ■

La forma $0 \cdot \infty$ Si

$$f(x)\to 0 \quad \text{y} \quad |g(x)|\to\infty \quad \text{cuando} \quad x\to a,$$

entonces $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ tiene la forma indeterminada $0\cdot\infty$. Un límite que tiene este forma puede cambiarse a uno con la forma $0/0$ o ∞/∞ al escribir, a su vez,

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} \qquad \text{o bien,} \qquad f(x)g(x) = \frac{g(x)}{1/f(x)}.$$

EJEMPLO 10 Forma indeterminada $0\cdot\infty$

Evalúe $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$.

Solución Puesto que $1/x \to 0$, tenemos $\operatorname{sen}(1/x) \to 0$ cuando $x\to\infty$. Por tanto, el límite tiene la forma indeterminada $0\cdot\infty$. Al escribir

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x}$$

ahora tenemos la forma $0/0$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x} &\overset{h}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{(-x^{-2})\cos(1/x)}{(-x^{-2})}\\
&= \lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x} = 1.
\end{aligned}$$

En la última línea se usó el hecho de que $1/x \to 0$ cuando $x\to\infty$ y $\cos 0 = 1$. ■

Las formas 0^0, ∞^0 y 1^∞ Suponga que $y = f(x)^{g(x)}$ tiende a 0^0, ∞^0 o 1^∞ cuando $x \to a$. Al tomar el logaritmo natural de y:

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)} = g(x) \ln f(x)$$

observamos que el miembro derecho de

$$\lim_{x\to a} \ln y = \lim_{x\to a} g(x) \ln f(x)$$

tiene la forma $0 \cdot \infty$. Si se supone que $\lim_{x\to a} \ln y = \ln(\lim_{x\to a} y) = L$, entonces

$$\lim_{x\to a} y = e^L \qquad \text{o bien,} \qquad \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^L.$$

Por supuesto, el procedimiento que acaba de presentarse es aplicable a límites que implican

$$x \to a^-, \quad x \to a^+, \quad x \to \infty \quad \text{o bien,} \quad x \to -\infty.$$

EJEMPLO 11 Forma indeterminada 0^0

Evalúe $\lim_{x\to 0^+} x^{1/\ln x}$.

Solución Ya que $\ln x \to -\infty$ cuando $x \to 0^+$, por (2) concluimos que $1/\ln x \to 0$. Así, el límite dado tiene la forma indeterminada 0^0. Luego, si se hace $y = x^{1/\ln x}$, entonces

$$\ln y = \frac{1}{\ln x} \ln x = 1.$$

Observe que en este caso no es necesaria la regla de L'Hôpital, ya que

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1 \qquad \text{o bien,} \qquad \ln\left(\lim_{x\to 0^+} y\right) = 1.$$

Por tanto, $\lim_{x\to 0^+} y = e^1$ o de manera equivalente, $\lim_{x\to 0^+} x^{1/\ln x} = e$. ■

EJEMPLO 12 Forma indeterminada 1^∞

Evalúe $\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x}$.

Solución Ya que $1 - 3/x \to 1$ cuando $x \to \infty$, la forma indeterminada es 1^∞. Si

$$y = \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x} \qquad \text{entonces} \qquad \ln y = 2x \ln\left(1 - \frac{3}{x}\right).$$

Observe que la forma de $\lim_{x\to\infty} 2x \ln(1 - 3/x)$ es $\infty \cdot 0$, mientras la forma de

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\ln\left(1 - \frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

es $0/0$. Al aplicar (4) al último límite y simplificar obtenemos

$$\lim_{x\to\infty} 2\frac{\ln(1 - 3/x)}{1/x} \overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} 2\frac{\dfrac{3/x^2}{(1 - 3/x)}}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-6}{(1 - 3/x)} = -6.$$

A partir de $\lim_{x\to\infty} \ln y = \ln(\lim_{x\to\infty} y) = -6$ concluimos que $\lim_{x\to\infty} y = e^{-6}$ o

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x} = e^{-6}.$$

■

L'Hôpital

Posdata: Un poco de historia Es cuestionable si el matemático francés **Marquis Guillaume François Antoine de L'Hôpital** (1661-1704) descubrió la regla que lleva su nombre. El resultado se debe probablemente a Johann Bernoulli. Sin embargo, L'Hôpital fue el primero en publicar la regla en su texto *Analyse des Infiniment Petits*. Este libro fue publicado en 1696 y es considerado como el primer libro de texto de cálculo.

$f'(x)$ NOTAS DESDE EL AULA

i) En la aplicación de la regla de L'Hôpital, los estudiantes a veces interpretan mal

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{cuando} \quad \lim_{x\to a}\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Recuerde que en la regla de L'Hôpital se utiliza el *cociente de derivadas* y no la *derivada del cociente*.

ii) Analice un problema antes de saltar a su solución. El límite $\lim_{x\to 0}(\cos x)/x$ es de la forma $1/0$ y, en consecuencia, no existe. La falta de previsión matemática al escribir

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{1} = 0$$

es una aplicación incorrecta de la regla de L'Hôpital. Por supuesto, la "respuesta" carece de significado.

iii) La regla de L'Hôpital no es un remedio para todas las formas indeterminadas. Por ejemplo, $\lim_{x\to\infty} e^x/e^{x^2}$ es ciertamente de la forma ∞/∞, pero

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2xe^{x^2}}$$

no es de ayuda práctica.

Ejercicios 4.5

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-14.

Fundamentos

En los problemas 1-40, use la regla de L'Hôpital donde sea idóneo para encontrar el límite dado, o concluya que no existe.

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x}$

2. $\lim_{t\to 3}\frac{t^3 - 27}{t - 3}$

3. $\lim_{x\to 1}\frac{2x - 2}{\ln x}$

4. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln 2x}{\ln 3x}$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x} - 1}{3x + x^2}$

6. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{2x}$

7. $\lim_{t\to \pi}\frac{5\operatorname{sen}^2 t}{1 + \cos t}$

8. $\lim_{\theta\to 1}\frac{\theta^2 - 1}{e^{\theta^2} - e}$

9. $\lim_{x\to 0}\frac{6 + 6x + 3x^2 - 6e^x}{x - \operatorname{sen} x}$

10. $\lim_{x\to \infty}\frac{3x^2 - 4x^3}{5x + 7x^3}$

11. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\cot 2x}{\cot x}$

12. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}(x/6)}{\arctan(x/2)}$

13. $\lim_{t\to 2}\frac{t^2 + 3t - 10}{t^3 - 2t^2 + t - 2}$

14. $\lim_{r\to -1}\frac{r^3 - r^2 - 5r - 3}{(r + 1)^2}$

15. $\lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

16. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2 + 4}{x^2 + 1}$

17. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{x^2}$

18. $\lim_{x\to \infty}\frac{2e^{4x} + x}{e^{4x} + 3x}$

19. $\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln\sqrt{x}}{x - 1}$

20. $\lim_{x\to \infty}\frac{\ln(3x^2 + 5)}{\ln(5x^2 + 1)}$

21. $\lim_{x\to 2}\frac{e^{x^2} - e^{2x}}{x - 2}$

22. $\lim_{x\to 0}\frac{4^x - 3^x}{x}$

23. $\lim_{x\to \infty}\frac{x\ln x}{x^2 + 1}$

24. $\lim_{t\to 0}\frac{1 - \cosh t}{t^2}$

25. $\lim_{x\to 0}\frac{x - \tan^{-1} x}{x^3}$

26. $\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{sen} 2x)^2}{x^2}$

27. $\lim_{x\to \infty}\frac{e^x}{x^4}$

28. $\lim_{x\to \infty}\frac{e^{1/x}}{\operatorname{sen}(1/x)}$

29. $\lim_{x\to 0}\frac{x - \tan^{-1} x}{x - \operatorname{sen}^{-1} x}$

30. $\lim_{t\to 1}\frac{t^{1/3} - t^{1/2}}{t - 1}$

31. $\lim_{u\to \pi/2}\frac{\ln(\operatorname{sen} u)}{(2u - \pi)^2}$

32. $\lim_{\theta\to \pi/2}\frac{\tan\theta}{\ln(\cos\theta)}$

33. $\lim_{x\to -\infty}\frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$

34. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{2x^2}$

35. $\lim_{r\to 0}\frac{r - \cos r}{r - \operatorname{sen} r}$

36. $\lim_{t\to \pi}\frac{\csc 7t}{\csc 2t}$

37. $\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\ln^2(1 + 3x)}$

38. $\lim_{x\to 3}\left(\frac{\ln x - \ln 3}{x - 3}\right)^2$

39. $\lim_{x\to 0}\frac{3x^2 + e^x - e^{-x} - 2\operatorname{sen} x}{x\operatorname{sen} x}$

40. $\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x + 1} - 3}{x^2 - 64}$

En los problemas 41-74, identifique el límite dado como una de las formas indeterminadas proporcionadas en (5). Use la regla de L'Hôpital donde sea idóneo para encontrar el límite dado, o concluya que no existe.

41. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$

42. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x-\csc x)$

43. $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{1/x}-1)$

44. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

45. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

46. $\lim\limits_{x\to 1^-} x^{1/(1-x)}$

47. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right]$

48. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cos 3x}{x^2}\right]$

49. $\lim\limits_{t\to 3}\left[\dfrac{\sqrt{t+1}}{t^2-9}-\dfrac{2}{t^2-9}\right]$

50. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(x+1)}\right]$

51. $\lim\limits_{\theta\to 0}\theta\csc 4\theta$

52. $\lim\limits_{x\to\pi/2^-}(\operatorname{sen}^2 x)^{\tan x}$

53. $\lim\limits_{x\to\infty}(2+e^x)^{e^{-x}}$

54. $\lim\limits_{x\to 0^-}(1-e^x)^{x^2}$

55. $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{t}\right)^t$

56. $\lim\limits_{h\to 0}(1+2h)^{4/h}$

57. $\lim\limits_{x\to 0} x^{(1-\cos x)}$

58. $\lim\limits_{\theta\to 0}(\cos 2\theta)^{1/\theta^2}$

59. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2\operatorname{sen}^2(2/x)}$

60. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)^{x^2}$

61. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{5}{x^2+3x-4}\right]$

62. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right]$

63. $\lim\limits_{x\to\infty} x^5e^{-x}$

64. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+e^x)^{2/x}$

65. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$

66. $\lim\limits_{t\to\pi/4}\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)\tan 2t$

67. $\lim\limits_{x\to\infty} x\tan\left(\dfrac{5}{x}\right)$

68. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(\operatorname{sen} x)$

69. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\dfrac{1}{e^x}-x^2\right]$

70. $\lim\limits_{x\to 0}(1+5\operatorname{sen} x)^{\cot x}$

71. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x+1}\right)^x$

72. $\lim\limits_{\theta\to\pi/2^-}(\sec^3\theta-\tan^3\theta)$

73. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{senh} x)^{\tan x}$

74. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{(\ln x)^2}$

En los problemas 75 y 76, identifique el límite dado.

75. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$

76. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$

Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 77 y 78, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función dada para el valor de n sobre el intervalo indicado. En cada caso, conjeture el valor de $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

77. $f(x)=\dfrac{e^x}{x^n}$; $n=3$ sobre $[0, 15]$; $n=4$ sobre $[0, 20]$; $n=5$ sobre $[0, 25]$

78. $f(x)=\dfrac{x^n}{e^x}$; $n=3$ sobre $[0, 15]$; $n=4$ sobre $[0, 15]$; $n=5$ sobre $[0, 20]$

En los problemas 79 y 80, use $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n$,

$$\frac{d^n}{dx^n}x^n = n!,$$

donde n es un entero positivo, y la regla de L'Hôpital para encontrar el límite.

79. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$

80. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^n}$

Aplicaciones

81. Considere el círculo que se muestra en la FIGURA 4.5.1.

a) Si el arco ABC mide 5 pulg de longitud, exprese el área A de la región sombreada como una función del ángulo indicado θ. [*Sugerencia*: El área de un sector circular es $\frac{1}{2}r^2\theta$ y la longitud del arco de un círculo es $r\theta$, donde θ se mide en radianes.]

b) Evalúe $\lim\limits_{\theta\to 0} A(\theta)$

c) Evalúe $\lim\limits_{\theta\to 0} dA/d\theta$

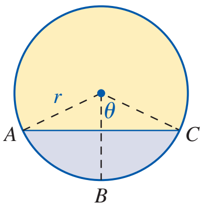


FIGURA 4.5.1 Círculo en el problema 81

82. En ausencia de fuerzas de amortiguamiento, un modelo matemático para el desplazamiento $x(t)$ de una masa en un resorte (vea el problema 60 en los ejercicios 3.5) cuando el sistema es activado sinusoidalmente por una fuerza externa de amplitud F_0 y frecuencia $\gamma/2\pi$ es

$$x(t)=\frac{F_0}{\omega(\omega^2-\gamma^2)}(-\gamma\operatorname{sen}\omega t+\omega\operatorname{sen}\gamma t),\quad \gamma\neq\omega,$$

donde $\omega/2\pi$ es la frecuencia de las vibraciones libres (no excitadas) del sistema.

a) Cuando $\gamma=\omega$, se dice que el sistema masa-resorte está en **resonancia pura**, y el desplazamiento de la masa se define por

$$x(t)=\lim_{\gamma\to\omega}\frac{F_0}{\omega(\omega^2-\gamma^2)}(-\gamma\operatorname{sen}\omega t+\omega\operatorname{sen}\gamma t).$$

Determine $x(t)$ al encontrar este límite.

b) Use un dispositivo para graficar y analice la gráfica de $x(t)$ encontrada en el inciso *a*) en el caso en que $F_0=2$, $\gamma=\omega=1$. Describa el comportamiento del sistema masa-resorte en resonancia pura cuando $t\to\infty$.

83. Cuando un gas ideal se expande a partir de la presión p_1 y volumen v_1 hasta la presión p_2 y volumen v_2 tal que $pv^\gamma=k$ (constante) durante toda la expansión, si $\gamma\neq 1$, entonces el trabajo realizado está dado por

$$W=\frac{p_2v_2-p_1v_1}{1-\gamma}.$$

a) Demuestre que

$$W = p_1 v_1 \left[\frac{(v_2/v_1)^{1-\gamma} - 1}{1 - \gamma} \right].$$

b) Encuentre el trabajo realizado en el caso en que $pv = k$ (constante) durante toda la expansión al hacer $\gamma \to 1$ en la expresión en el inciso *a*).

84. La retina es más sensible a fotones que penetran al ojo cerca del centro de la pupila y menos sensible a la luz que entra cerca del borde de la pupila. (Este fenómeno se denomina **efecto Stiles-Crawford** del primer tipo.) El porcentaje σ de fotones que llegan a los fotopigmentos está relacionado con el radio de la pupila p (medido en radianes) por el modelo matemático

$$\sigma = \frac{1 - 10^{-0.05p^2}}{0.115p^2} \times 100.$$

Vea la FIGURA 4.5.2.

a) ¿Qué porcentaje de fotones llega a los fotopigmentos cuando $p = 2$ mm?

b) Según la fórmula, ¿cuál es el porcentaje limitante cuando el radio de la pupila tiende a cero? ¿Puede explicar por qué parece ser más de 100%?

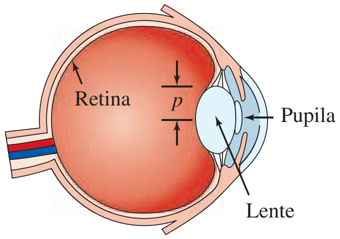


FIGURA 4.5.2 Ojo en el problema 84

Piense en ello

85. Suponga que una función f tiene segunda derivada. Evalúe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2}.$$

86. ***a***) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de

$$f(x) = \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 1}.$$

b) A partir de la gráfica en el inciso *a*), conjeture el valor de $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

c) Explique por qué la regla de L'Hôpital no es válida para $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

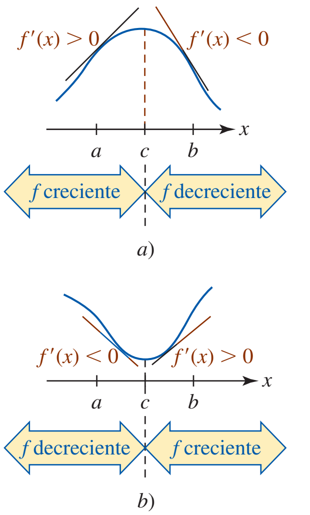


FIGURA 4.6.1 Máximo relativo en *a*); mínimo relativo en *b*)

4.6 Gráficas y la primera derivada

Introducción Saber que una función tiene, o no, extremos relativos es de gran ayuda al trazar su gráfica. En la sección 4.3 (teorema 4.3.2) vimos que cuando una función tiene un extremo relativo debe ocurrir en un número crítico. Al encontrar los números críticos de una función, tenemos una *lista de candidatos* para las coordenadas x de los puntos que corresponden a extremos relativos. A continuación se combinarán las ideas de las primeras secciones de este capítulo para establecer dos pruebas para determinar cuándo un número crítico es en realidad la coordenada x de un extremo relativo.

Prueba de la primera derivada Suponga que f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable sobre un intervalo abierto (a, b), excepto tal vez en un número crítico c dentro del intervalo. Si $f'(x) > 0$ para toda x en (a, c) y $f'(x) < 0$ para toda x en (c, b), entonces la gráfica de f sobre el intervalo (a, b) puede ser como se muestra en la FIGURA 4.6.1*a*); es decir, $f(c)$ es un máximo relativo. Por otra parte, cuando $f'(x) < 0$ para toda x en (a, c) y $f'(x) > 0$ para toda x en (c, b), entonces, como se muestra en la figura 4.6.1*b*), $f(c)$ es un mínimo relativo. Se han demostrado dos casos especiales del siguiente teorema.

Teorema 4.6.1 Prueba de la primera derivada

Sea f continua sobre $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b) excepto tal vez en el número crítico c.

i) Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en c, entonces $f(c)$ es un máximo relativo.
ii) Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en c, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo.
iii) Si $f'(x)$ tiene el mismo signo algebraico a cada lado de c, entonces $f(c)$ no es un extremo.

Las conclusiones del teorema 4.6.1 pueden resumirse en una frase:

- Una función f tiene un extremo relativo en un número crítico c donde $f'(x)$ cambia de signo.

En la FIGURA 4.6.2 se ilustra cuál sería el caso cuando $f'(c)$ *no* cambia de signo en un número crítico c. En las figuras 4.6.2*a*) y 4.6.2*b*) se muestra una tangente horizontal en $(c, f(c))$ y

$f'(c) = 0$ pero $f(c)$ no es ni máximo ni mínimo relativo. En la figura 4.6.2c) se muestra una tangente vertical en $(c, f(c))$ y así $f'(c)$ no existe, pero de nuevo $f(c)$ no es un extremo relativo porque $f'(c)$ no cambia de signo en el número crítico c.

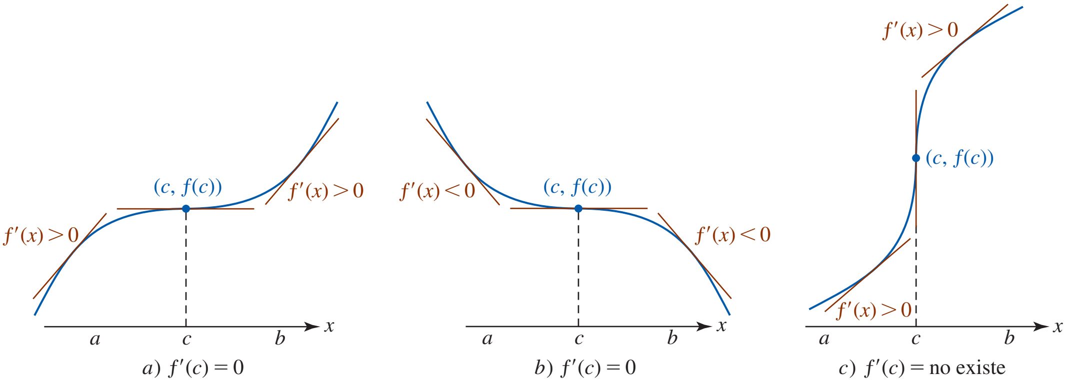


FIGURA 4.6.2 No hay extremo porque $f'(x)$ no cambia de signo en el número crítico c

En los cinco ejemplos siguientes se ilustra la utilidad del teorema 4.6.1 para trazar a mano la gráfica de una función f. Además del cálculo:

- Encuentre la derivada de f y factorice f' tanto como sea posible.
- Encuentre los números críticos de f.
- Aplique la prueba de la primera derivada a cada número crítico.

También resulta útil preguntar:

- ¿Cuál es el dominio de f?
- La gráfica de f, ¿tiene alguna intersección? ← intersecciones x: resuelva para $f(x) = 0$; intersección y: encuentre $f(0)$
- La gráfica de f, ¿tiene alguna simetría? ← determine si $f(-x) = f(x)$ o bien, $f(-x) = -f(x)$
- La gráfica de f, ¿tiene alguna asíntota?

Las funciones consideradas en los ejemplos 1 y 2 son polinomiales. Observe que estas funciones constan de potencias pares e impares de x; esto es suficiente para concluir que las gráficas de estas funciones no son simétricas con respecto al eje y o al origen.

EJEMPLO 1 Función polinomial de grado 3

Grafique $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$.

Solución La primera derivada

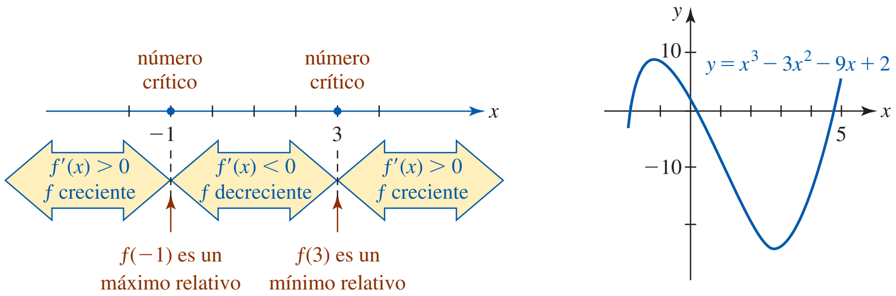
$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x + 1)(x - 3) \tag{1}$$

produce los números críticos -1 y 3. Luego, la prueba de la primera derivada es esencialmente el procedimiento que se usó para encontrar los intervalos sobre los cuales f es creciente o decreciente. En la FIGURA 4.6.3a) vemos que $f'(x) > 0$ para $-\infty < x < -1$ y $f'(x) < 0$ para $-1 < x < 3$. En otras palabras, $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en -1 y así por el inciso i) del teorema 4.6.1 concluimos que $f(-1) = 7$ es un máximo relativo. En forma semejante, $f'(x) < 0$ para $-1 < x < 3$ y $f'(x) > 0$ para $3 < x < \infty$. Debido a que $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en 3, el inciso ii) del teorema 4.6.1 indica que $f(3) = -25$ es un mínimo relativo. Luego, como $f(0) = 2$, el punto $(0, 2)$ es la intersección y para la gráfica de f. Además, al buscar si la ecuación $x^3 - 3x^2 - 9x + 2 = 0$ tiene raíces positivas se encuentra que $x = -2$ es una raíz real. Luego, al dividir entre el factor $x + 2$ obtenemos $(x + 2)(x^2 - 5x + 1) = 0$. Cuando la fórmula cuadrática se aplica al factor cuadrático se encuentran dos raíces reales adicionales:

Vea las *MRS* para un breve repaso de cómo encontrar las raíces de ecuaciones polinomiales.

$$\frac{1}{2}\left(5 - \sqrt{21}\right) \approx 0.21 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{2}\left(5 + \sqrt{21}\right) \approx 4.79.$$

Entonces, las intersecciones x son $(-2, 0)$, $\left(\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}, 0\right)$. Al reunir toda esta información se llega a la gráfica mostrada en la figura 4.6.3b):



a) Prueba de la primera derivada

b) Observe las intersecciones *x* y *y*

FIGURA 4.6.3 Gráfica de la función en el ejemplo 1 ■

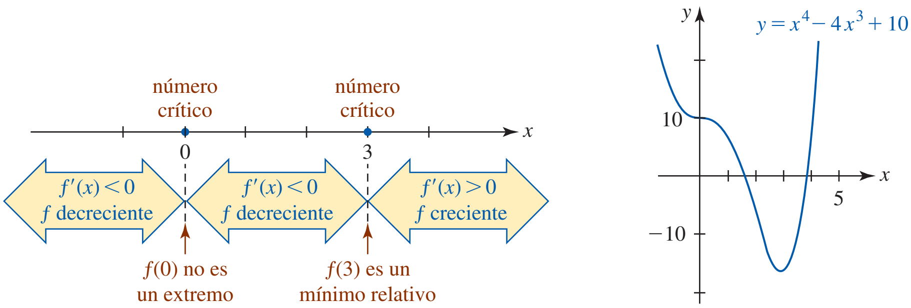
EJEMPLO 2 Función polinomial de grado 4

Grafique $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$.

Solución La derivada

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

muestra que los números críticos son 0 y 3. Luego, como se observa en la FIGURA 4.6.4*a*), f' tiene el mismo signo algebraico negativo en los intervalos adyacentes $(-\infty, 0)$ y $(0, 3)$. Entonces $f(0) = 10$ *no* es un extremo. En este caso $f'(0) = 0$ significa que en la intersección y $(0, f(0)) = (0, 10)$ hay una sola tangente horizontal. Sin embargo, por la prueba de la primera derivada resulta evidente que $f(3) = -17$ es un mínimo relativo. En efecto, la información de que f es decreciente por el lado izquierdo y creciente por el lado derecho del número crítico 3 (la gráfica de f no puede retroceder) permite concluir que $f(3) = -17$ también es un *mínimo absoluto*. Por último, vemos que la gráfica de f tiene dos intersecciones x. Con ayuda de una calculadora o un SAC se encuentra que las intersecciones x son aproximadamente (1.61, 0) y (3.82, 0).



a) Prueba de la primera derivada

b) $f'(0) = 0$ pero $f(0) = 10$ no es un extremo

FIGURA 4.6.4 Gráfica de la función en el ejemplo 2 ■

EJEMPLO 3 Gráfica de una función racional

Grafique $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 1}$.

Solución La lista que se muestra a continuación resume algunos hechos que es posible descubrir sobre la gráfica de esta función racional f antes de graficarla realmente.

intersección y: $f(0) = -3$; en consecuencia, la intersección y es $(0, -3)$.
intersecciones x: $f(x) = 0$ cuando $x^2 - 3 = 0$. Por tanto, $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$. Las intersecciones x son $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$.
Simetría: Con respecto al eje y, puesto que $f(-x) = f(x)$.
Asíntotas verticales: Ninguna, puesto que $x^2 + 1 \neq 0$ para todos los números reales.
Asíntotas horizontales: Puesto que el límite en el infinito es la forma indeterminada ∞/∞, podemos aplicar la regla de L'Hôpital para demostrar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1} \overset{h}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2} = 1,$$

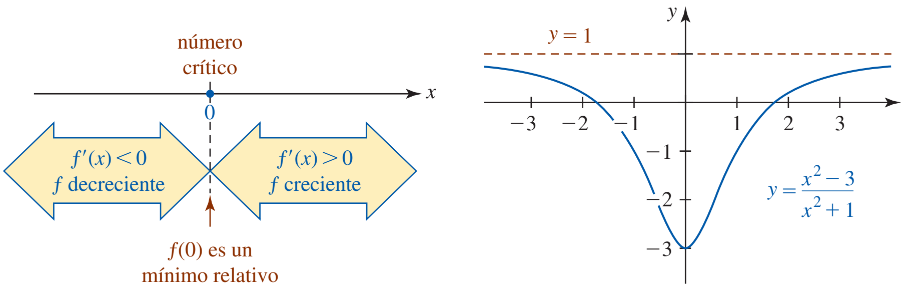
y así la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Derivada: Con la regla del cociente obtenemos $f'(x) = \dfrac{8x}{(x^2+1)^2}$.

Números críticos: $f'(x) = 0$ cuando $x = 0$. En consecuencia, 0 es el único número crítico.

Prueba de la primera derivada: Vea la FIGURA 4.6.5*a*); $f(0) = -3$ es un mínimo relativo.

Grafique: Vea la figura 4.6.5*b*).



a) Prueba de la primera derivada *b*) $y = 1$ es una asíntota horizontal

FIGURA 4.6.5 Gráfica de la función en el ejemplo 3 ■

EJEMPLO 4 Gráfica con una asíntota vertical

Grafique $f(x) = x^2 + x - \ln|x|$.

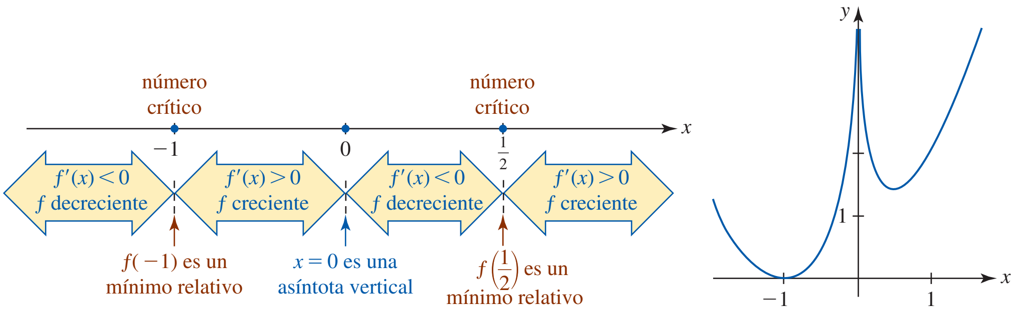
Solución Primero observe que el dominio de f es $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Luego, al igualar a cero el denominador de la derivada

$$f'(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + x - 1}{x} = \frac{(2x-1)(x+1)}{x}$$

se observa que -1 y $\frac{1}{2}$ son números críticos. Aunque f no es diferenciable en $x = 0$, 0 no es un número crítico puesto que 0 no está en el dominio de f. De hecho, $x = 0$ es una asíntota vertical para $\ln|x|$ y también es una asíntota vertical para la gráfica de f. Los números críticos y 0 se escriben en la recta numérica porque el signo de la derivada a la izquierda y a la derecha de 0 indica el comportamiento de f. Como se observa en la FIGURA 4.6.6*a*), $f'(x) < 0$ para $-\infty < x < -1$ y $f'(x) > 0$ para $-1 < x < 0$. Concluimos que $f(-1) = 0$ es un mínimo relativo (al mismo tiempo, $f(-1) = 0$ muestra que $x = -1$ es la coordenada x de una intersección x). Al continuar, $f'(x) < 0$ para $0 < x < \frac{1}{2}$ y $f'(x) > 0$ para $\frac{1}{2} < x < \infty$ muestra que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \ln\frac{1}{2} \approx 1.44$ es otro mínimo relativo.

Como se observó, f no está definida en $x = 0$, de modo que no hay intersección y. Por último, no hay simetría con respecto al eje y o con respecto al origen. La gráfica de la función f se muestra en la figura 4.6.6*b*).

◀ Verifique que $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$.



a) Prueba de la primera derivada *b*) $x = 0$ es una asíntota vertical

FIGURA 4.6.6 Gráfica de la función en el ejemplo 4 ■

EJEMPLO 5 Gráfica con una cúspide

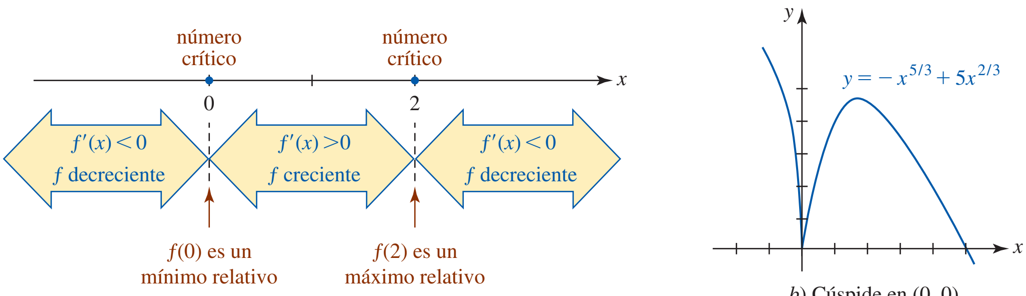
Grafique $f(x) = -x^{5/3} + 5x^{2/3}$.

Solución La derivada es

$$f'(x) = -\frac{5}{3}x^{2/3} + \frac{10}{3}x^{-1/3} = \frac{5}{3}\frac{(-x+2)}{x^{1/3}}.$$

Revise la definición de *cúspide* en la sección 3.2

Observe que f' no existe en 0 pero 0 está en el dominio de la función puesto que $f(0) = 0$. Los números críticos son 0 y 2. La prueba de la primera derivada, ilustrada en la FIGURA 4.6.7*a*), muestra que $f(0) = 0$ es un mínimo relativo y que $f(2) = -(2)^{5/3} + 5(2)^{2/3} \approx 4.76$ es un máximo relativo. Además, puesto que $f'(x) \to \infty$ cuando $x \to 0^+$ y $f'(x) \to -\infty$ cuando $x \to 0^-$ en (0, 0) hay una cúspide. Por último, al escribir $f(x) = x^{2/3}(-x + 5)$, vemos que $f(x) = 0$ y que $x = 5$. Las intersecciones x son los puntos (0, 0) y (5, 0). La gráfica de f se muestra en la figura 4.6.7*b*).



a) Prueba de la primera derivada

b) Cúspide en (0, 0)

FIGURA 4.6.7 Gráfica de la función en el ejemplo 5

Algunas veces resulta conveniente saber antes de graficar, e incluso antes de molestarse en graficar, si un extremo relativo $f(c)$ es un extremo *absoluto*. El siguiente teorema es algo útil. Usted debe trazar algunas gráficas y convencerse sobre la validez del teorema.

Teorema 4.6.2 Prueba del único número crítico

Suponga que c es el único número crítico de una función f dentro de un intervalo I. Si se demuestra que $f(c)$ es un extremo relativo, entonces $f(c)$ es un extremo absoluto.

En el ejemplo 3, mediante la prueba de la primera derivada se demostró que $f(0) = 0$ es un mínimo relativo. También se hubiera podido concluir de inmediato que este valor de la función es un mínimo absoluto. Este hecho se concluye por el teorema 4.6.2 porque 0 es el único número crítico en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Ejercicios 4.6

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-15.

Fundamentos

En los problemas 1-32, use la prueba de la primera derivada para encontrar los extremos relativos de la función dada. Grafique. Encuentre las intersecciones cuando sea posible.

1. $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

2. $f(x) = (x - 1)(x + 3)$

3. $f(x) = x^3 - 3x$

4. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$

5. $f(x) = x(x - 2)^2$

6. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$

7. $f(x) = x^3 + x - 3$

8. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 3$

9. $f(x) = x^4 + 4x$

10. $f(x) = (x^2 - 1)^2$

11. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2$

12. $f(x) = 2x^4 - 16x^2 + 3$

13. $f(x) = -x^2(x - 3)^2$

14. $f(x) = -3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 2$

15. $f(x) = 4x^5 - 5x^4$

16. $f(x) = (x - 2)^2(x + 3)^3$

17. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$

18. $f(x) = x + \dfrac{25}{x}$

19. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}$

20. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

21. $f(x) = \dfrac{10}{x^2 + 1}$

22. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$

23. $f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$

24. $f(x) = (x^2 - 1)^{1/3}$

25. $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$

26. $f(x) = x(x^2 - 5)^{1/3}$

27. $f(x) = x - 12x^{1/3}$

28. $f(x) = x^{4/3} + 32x^{1/3}$

29. $f(x) = x^3 - 24 \ln |x|$

30. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

31. $f(x) = (x + 3)^2 e^{-x}$

32. $f(x) = 8x^2 e^{-x^2}$

En los problemas 33-36, trace una gráfica de la función f cuya derivada f' tiene la gráfica dada.

33.

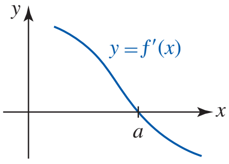


FIGURA 4.6.8 Gráfica para el problema 33

34.

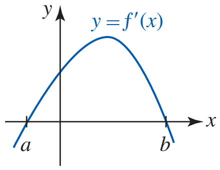


FIGURA 4.6.9 Gráfica para el problema 34

35.

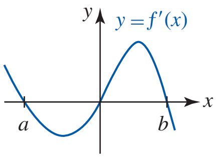


FIGURA 4.6.10 Gráfica para el problema 35

36.

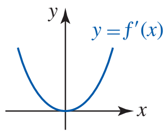


FIGURA 4.6.11 Gráfica para el problema 36

En los problemas 37 y 38, trace la gráfica de f' a partir de la gráfica de f.

37.

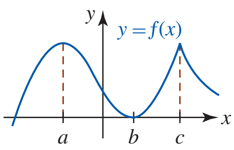


FIGURA 4.6.12 Gráfica para el problema 37

38.

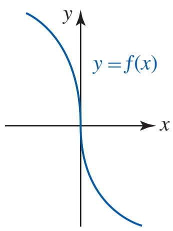


FIGURA 4.6.13 Gráfica para el problema 38

En los problemas 39-42, trace una gráfica de una función f que tenga las propiedades dadas.

39. $f(-1) = 0, f(0) = 1$
$f'(3)$ no existe, $f'(5) = 0$
$f'(x) > 0, x < 3$ y $x > 5$
$f'(x) < 0, 3 < x < 5$

40. $f(0) = 0$
$f'(-1) = 0, f'(0) = 0, f'(1) = 0$
$f'(x) < 0, x < -1, -1 < x < 0$
$f'(x) > 0, 0 < x < 1, x > 1$

41. $f(-x) = f(x)$
$f(2) = 3$
$f'(x) < 0, 0 < x < 2$
$f'(x) > 0, x > 2$

42. $f(1) = -2, f(0) = -1$
$\lim_{x\to 3} f(x) = \infty, f'(4) = 0$
$f'(x) < 0, x < 1$
$f'(x) < 0, x > 4$

En los problemas 43 y 44, determine dónde la pendiente de la tangente a la gráfica de la función dada tiene un máximo relativo o un mínimo relativo.

43. $f(x) = x^3 + 6x^2 - x$ **44.** $f(x) = x^4 - 6x^2$

45. ***a***) A partir de la gráfica de $g(x) = \operatorname{sen} 2x$ determine los intervalos para los cuales $g(x) > 0$ y los intervalos para los cuales $g(x) < 0$.

b) Encuentre los números críticos de $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$. Use la prueba de la primera derivada y la información en el inciso *a*) para encontrar los extremos relativos de f.

c) Trace la gráfica de la función f en el inciso *b*).

46. ***a***) Encuentre los números críticos de $f(x) = x - \operatorname{sen} x$.

b) Demuestre que f no tiene extremos relativos.

c) Trace la gráfica de f.

≡ Aplicaciones

47. La **media aritmética**, o **promedio**, de n números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ está dada por

$$\bar{x} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

a) Demuestre que $\bar{x}$ es un número crítico de la función

$$f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \cdots + (x - a_n)^2.$$

b) Demuestre que $f(\bar{x})$ es un mínimo relativo.

48. Cuando el sonido pasa de un medio a otro, puede perder algo de su energía debido a una diferencia en las resistencias acústicas de los dos medios. (La resistencia acústica es el producto de la densidad y la elasticidad.) La fracción de la energía transmitida está dada por

$$T(r) = \frac{4r}{(r+1)^2},$$

donde r es la razón de las resistencias acústicas de los dos medios.

a) Demuestre que $T(r) = T(1/r)$. Explique el significado físico de esta expresión.

b) Use la prueba de la primera derivada para encontrar los extremos relativos de T.

c) Trace la gráfica de la función T para $r \geq 0$.

≡ Piense en ello

49. Encuentre valores de a, b y c tales que $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga un máximo relativo 6 en $x = 2$ y la gráfica de f tenga intersección y igual a 4.

50. Encuentre valores de a, b, c y d tales que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un mínimo relativo -3 en $x = 0$ y un máximo relativo 4 en $x = 1$.

51. Suponga que f es una función diferenciable cuya gráfica es simétrica con respecto al eje y. Demuestre que $f'(0) = 0$. ¿Tiene f necesariamente un extremo relativo en $x = 0$?

52. Sean m y n enteros positivos. Demuestre que $f(x) = x^m(x - 1)^n$ siempre tiene un mínimo relativo.

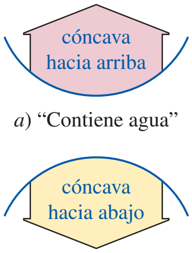
53. Suponga que f y g son diferenciables y que tienen máximos relativos en el mismo número crítico c.

a) Demuestre que c es un número crítico para las $f + g$, $f - g$ y fg.

b) ¿Se concluye que las $f + g$, $f - g$ y fg tienen máximos relativos en c? Demuestre sus aseveraciones o dé un contraejemplo.

4.7 Gráficas y la segunda derivada

Introducción En el siguiente análisis el objetivo es relacionar el concepto de concavidad con la segunda derivada de una función. Así, la segunda derivada constituye otra manera para probar si un extremo relativo de una función f ocurre en un número crítico.



a) "Contiene agua"

b) "Derrama agua"

FIGURA 4.7.1 Concavidad

Concavidad Tal vez usted tiene una idea *intuitiva* del significado de concavidad. En las FIGURAS 4.7.1*a*) y 4.7.1*b*) se ilustran formas geométricas **cóncavas hacia arriba** y **cóncavas hacia abajo**, respectivamente. Por ejemplo, el Arco de San Luis Missouri es cóncavo hacia abajo; los cables entre los soportes verticales del puente Golden Gate son cóncavos hacia arriba. A menudo decimos que una forma cóncava hacia arriba "contiene agua", mientras una forma cóncava hacia abajo "derrama agua". No obstante, la definición precisa de concavidad se proporciona en términos de la derivada.

Definición 4.7.1 Concavidad

Sea f una función diferenciable sobre un intervalo (a, b).

i) Si f' es una función creciente sobre (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava **hacia arriba** sobre el intervalo.
ii) Si f' es una función decreciente sobre (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava **hacia abajo** sobre el intervalo.

En otras palabras, si las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de f crecen (decrecen) cuando x crece sobre (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba (abajo) sobre el intervalo. Si las pendientes crecen (decrecen) cuando x crece, entonces esto significa que las rectas tangentes giran en sentido contrario al de las manecillas del reloj sobre el intervalo. La validez de la definición 4.7.1 se ilustra en la FIGURA 4.7.2. Una manera equivalente de considerar la concavidad también resulta evidente a partir de la figura 4.7.2. La gráfica de una función f es cóncava hacia arriba (hacia abajo) sobre un intervalo si la gráfica en cualquier punto se encuentra por arriba (abajo) de las rectas tangentes.

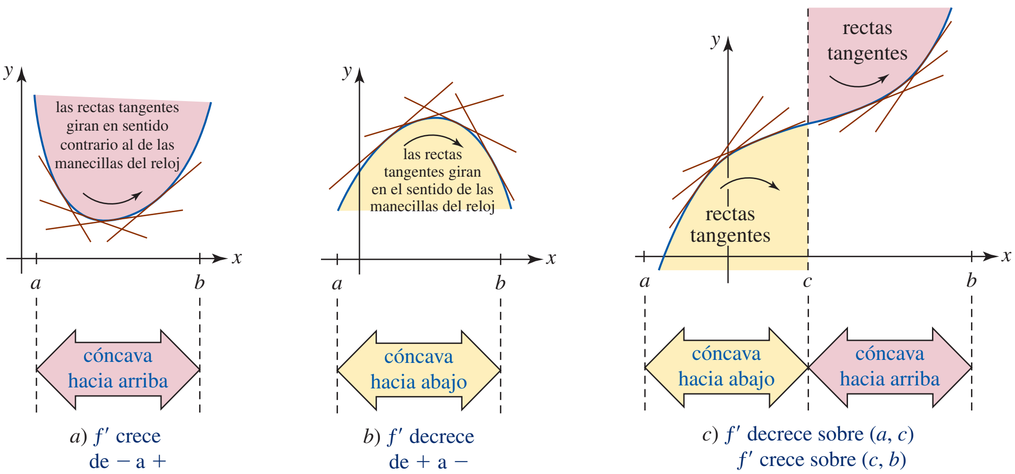


FIGURA 4.7.2 Concavidad sobre intervalos

Concavidad y la segunda derivada En el teorema 4.4.4 de la sección 4.4 vimos que el signo algebraico de la derivada de una función indica cuándo la función es creciente o decreciente sobre un intervalo. En específico, si la función referida en la oración precedente es la derivada f', entonces podemos concluir que el signo algebraico de la derivada de f', es decir, f'', indica cuándo f' es creciente o decreciente sobre un intervalo. Por ejemplo, si $f''(x) > 0$ sobre (a, b), entonces f' es creciente sobre (a, b). Debido a la definición 4.7.1, si f' es creciente sobre (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre el intervalo. En consecuencia, se llega a la siguiente prueba para concavidad.

Teorema 4.7.1 Prueba para concavidad

Sea f una función para la cual f'' existe sobre (a, b).

i) Si $f''(x) > 0$ para toda x en (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre (a, b).
ii) Si $f''(x) < 0$ para toda x en (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre (a, b).

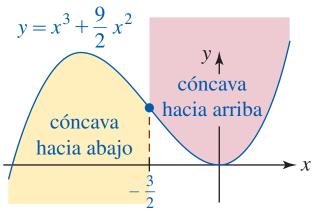
EJEMPLO 1 Prueba para concavidad

Determine los intervalos sobre los cuales la gráfica de $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2$ es cóncava hacia arriba y los intervalos sobre los cuales la gráfica es cóncava hacia abajo.

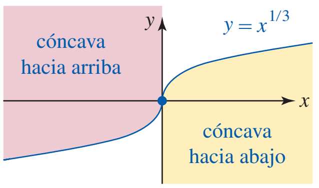
Solución A partir de $f'(x) = 3x^2 + 9x$ obtenemos

$$f''(x) = 6x + 9 = 6\left(x + \tfrac{3}{2}\right).$$

Se observa que $f''(x) < 0$ cuando $6\left(x + \frac{3}{2}\right) < 0$ o $x < -\frac{3}{2}$ y que $f''(x) > 0$ cuando $6\left(x + \frac{3}{2}\right) > 0$ o $x > -\frac{3}{2}$. Por el teorema 4.7.1 concluimos que la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre el intervalo $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ y cóncava hacia arriba sobre el intervalo $\left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$. ■



a) $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$



b) $f''(x)$ no existe en 0

FIGURA 4.7.3 Puntos de inflexión

Punto de inflexión La gráfica de la función en el ejemplo 1 cambia de concavidad en el punto que corresponde a $x = -\frac{3}{2}$. Cuando x crece a través de $-\frac{3}{2}$, la gráfica de f cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba en el punto $\left(-\frac{3}{2}, \frac{27}{4}\right)$. Un punto sobre la gráfica de una función donde la concavidad cambia de arriba abajo o viceversa tiene un nombre especial.

Definición 4.7.2 Punto de inflexión

Sea f continua sobre un intervalo (a, b) que contiene al número c. Un punto $(c, f(c))$ es un **punto de inflexión** de la gráfica de f si en $(c, f(c))$ hay una recta tangente y la gráfica cambia de concavidad en este punto.

Al volver a examinar el ejemplo 1 se observa que $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2$ es continua en $-\frac{3}{2}$, tiene una recta tangente en $\left(-\frac{3}{2}, \frac{27}{4}\right)$ y cambia de concavidad en este punto. Por tanto, $\left(-\frac{3}{2}, \frac{27}{4}\right)$ es un punto de inflexión. También observe que $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$. Vea la FIGURA 4.7.3*a*). También sabemos que la función $f(x) = x^{1/3}$ es continua en 0 y tiene una tangente vertical en (0, 0) (vea el ejemplo 10 de la sección 3.1). A partir de $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$ se observa que $f''(x) > 0$ para $x < 0$ y que $f''(x) < 0$ para $x > 0$. Por tanto, (0, 0) es un punto de inflexión. Observe que en este caso $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$ no está definida en $x = 0$. Vea la figura 4.7.3*b*). Estos dos casos se ilustran en el siguiente teorema.

Teorema 4.7.2 Punto de inflexión

Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión para la gráfica de una función f, entonces $f''(c) = 0$ o $f''(c)$ no existe.

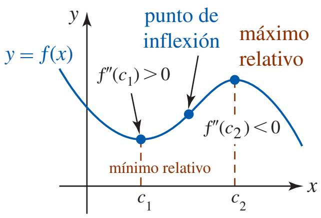


FIGURA 4.7.4 Prueba de la segunda derivada

Prueba de la segunda derivada Si c es un número crítico de una función $y = f(x)$ y, por ejemplo, $f''(c) > 0$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre algún intervalo abierto (a, b) que contiene a c. Entonces, necesariamente $f(c)$ es un mínimo relativo. En forma semejante, $f''(c) < 0$ en un valor crítico c implica que $f(c)$ es un máximo relativo. Este teorema se denomina **prueba de la segunda derivada** y se ilustra en la FIGURA 4.7.4.

Teorema 4.7.3 Prueba de la segunda derivada

Sea f una función para la cual f'' existe sobre un intervalo (a, b) que contiene al número crítico c.

i) Si $f''(c) > 0$, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo.
ii) Si $f''(c) < 0$, entonces $f(c)$ es un máximo relativo.
iii) Si $f''(c) = 0$, entonces la prueba falla y $f(c)$ puede ser o no un extremo relativo. En este caso se usa la prueba de la primera derivada.

En este punto podría plantearse la pregunta: ¿por qué se requiere otra prueba para extremos relativos cuando ya se cuenta con la prueba de la primera derivada? Si la función f en consideración es un polinomio, es muy sencillo calcular la segunda derivada. Al usar el teorema 4.7.3 sólo necesitamos determinar el signo algebraico de $f''(x)$ *en* el número crítico. Compare esto con el teorema 4.6.1, donde es necesario determinar el signo de $f'(x)$ en los números a la derecha y a la izquierda del número crítico. Si no es fácil factorizar f', el último procedimiento puede ser algo difícil. Por otra parte, puede resultar igualmente tedioso usar el teorema 4.7.3 en el caso de algunas funciones que impliquen productos, cocientes, potencias, etcétera. Por tanto, los teoremas 4.6.1 y 4.7.3 pueden tener ventajas y desventajas,

EJEMPLO 2 Prueba de la segunda derivada

Grafique $f(x) = 4x^4 - 4x^2$.

Solución A partir de $f(x) = 4x^2(x^2 - 1) = 4x^2(x + 1)(x - 1)$ se observa que la gráfica de f tiene las intersecciones $(-1, 0)$, $(0, 0)$ y $(1, 0)$. Además, puesto que f es un polinomio que sólo tiene potencias pares, concluimos que su gráfica es simétrica con respecto al eje y (función par). Así, las derivadas primera y segunda son

$$f'(x) = 16x^3 - 8x = 8x\left(\sqrt{2}x + 1\right)\left(\sqrt{2}x - 1\right)$$
$$f''(x) = 48x^2 - 8 = 8\left(\sqrt{6}x + 1\right)\left(\sqrt{6}x - 1\right).$$

A partir de f' vemos que los números críticos de f son $0, -\sqrt{2}/2$ y $\sqrt{2}/2$. La prueba de la segunda derivada se resume en la tabla siguiente.

x	Signo de $f''(x)$	$f(x)$	Conclusión
0	$-$	0	máximo relativo
$\sqrt{2}/2$	$+$	-1	mínimo relativo
$-\sqrt{2}/2$	$+$	-1	mínimo relativo

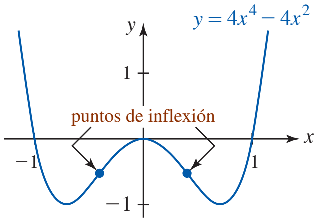


FIGURA 4.7.5 Gráfica de la función en el ejemplo 2

Por último, a partir de la forma factorizada de f'' observamos que $f''(x)$ cambia de signo en $x = -\sqrt{6}/6$ y en $x = \sqrt{6}/6$. Por tanto, la gráfica de f tiene dos puntos de inflexión: $\left(-\sqrt{6}/6, -\frac{5}{9}\right)$ y $\left(\sqrt{6}/6, -\frac{5}{9}\right)$. Vea la FIGURA 4.7.5. ■

EJEMPLO 3 Fracaso de la prueba de la segunda derivada

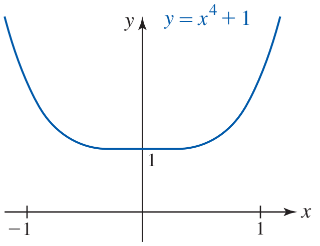


FIGURA 4.7.6 Gráfica de la función en el ejemplo 3

Considere la función simple $f(x) = x^4 + 1$. A partir de $f'(x) = 4x^3$ vemos que 0 es un número crítico. Pero por la segunda derivada $f''(x) = 12x^2$ obtenemos $f''(0) = 0$. Por tanto, la prueba de la segunda derivada no conduce a ninguna conclusión. No obstante, a partir de la primera derivada $f'(x) = 4x^3$ vemos lo siguiente:

$$f'(x) < 0 \quad \text{para} \quad x < 0 \qquad \text{y} \qquad f'(x) > 0 \quad \text{para} \quad x > 0.$$

La prueba de la primera derivada indica que $f(0) = 1$ es un mínimo relativo. La FIGURA 4.7.6 muestra que $f(0) = 1$ es realmente un mínimo absoluto. ■

EJEMPLO 4 Prueba de la segunda derivada

Grafique $f(x) = 2 \cos x - \cos 2x$.

Solución Debido a que $\cos x$ y $\cos 2x$ son pares, la gráfica de f es simétrica con respecto al eje y. También, $f(0) = 1$ produce la intersección $(0, 1)$. Así, las derivadas primera y segunda son

$$f'(x) = -2 \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} 2x \qquad \text{y} \qquad f''(x) = -2\cos x + 4 \cos 2x.$$

Al usar la identidad trigonométrica $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ es posible simplificar la ecuación $f'(x) = 0$ a $\operatorname{sen} x(1 - 2\cos x) = 0$. Las soluciones de $\operatorname{sen} x = 0$ son $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ y las soluciones de $\cos x = \frac{1}{2}$ son $\pm\pi/3, \pm 5\pi/3, \ldots$ Pero como el periodo de f es 2π (¡demuéstrelo!), es suficiente considerar sólo los números críticos en $[0, 2\pi]$, a saber, $0, \pi/3, \pi, 5\pi/3$ y 2π. En la tabla siguiente se resume la aplicación de la prueba de la segunda derivada a estos valores.

x	**Signo de $f''(x)$**	$f(x)$	**Conclusión**
0	$+$	1	mínimo relativo
$\pi/3$	$-$	$\frac{3}{2}$	máximo relativo
π	$+$	-3	mínimo relativo
$5\pi/3$	$-$	$\frac{3}{2}$	máximo relativo
2π	$+$	1	mínimo relativo

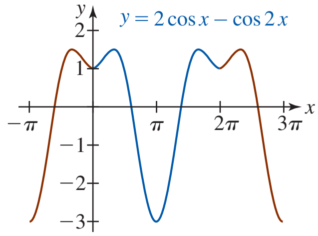


FIGURA 4.7.7 Gráfica de la función en el ejemplo 4

La gráfica de f es la extensión con periodo 2π de la porción azul que se muestra en la FIGURA 4.7.7 sobre el intervalo $[0, 2\pi]$. ■

$f'(x)$ NOTAS DESDE EL AULA

i) Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión, entonces $f''(c) = 0$ o $f''(c)$ no existe. El converso de esta afirmación no necesariamente es verdadero. No es posible concluir, simplemente a partir del hecho de que cuando $f''(c) = 0$ o $f''(c)$ no existe, que $(c, f(c))$ es un punto de inflexión. En este sentido, en el ejemplo 3 vimos que $f''(0) = 0$ para $f(x) = x^4 + 1$. Pero a partir de la figura 4.7.6 resulta evidente que $(0, f(0))$ no es un punto de inflexión. También, para $f(x) = 1/x$, vemos que $f''(x) = 2/x^3$ está indefinida en $x = 0$ y que la gráfica de f cambia de concavidad en $x = 0$:

$$f''(x) < 0 \quad \text{para} \quad x < 0 \qquad \text{y} \qquad f''(x) > 0 \quad \text{para} \quad x > 0.$$

No obstante, $x = 0$ no es la coordenada x de un punto de inflexión porque f no es continua en 0.

ii) Usted no debe pensar que la gráfica de una función *debe tener* concavidad. Hay funciones perfectamente bien diferenciables cuyas gráficas no poseen concavidad. Vea el problema 60 en los ejercicios 4.7.

iii) Usted debe estar al tanto de que los libros de texto no coinciden respecto a la definición precisa de punto de inflexión. Esto no es algo por lo cual deba preocuparse, pero si usted tiene interés, vea el problema 65 en los ejercicios 4.7.

Ejercicios 4.7

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-16.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-12, use la segunda derivada para determinar los intervalos sobre los cuales la gráfica de la función dada es cóncava hacia arriba y los intervalos sobre los cuales es cóncava hacia abajo. Grafique.

1. $f(x) = -x^2 + 7x$

2. $f(x) = -(x + 2)^2 + 8$

3. $f(x) = -x^3 + 6x^2 + x - 1$

4. $f(x) = (x + 5)^3$

5. $f(x) = x(x - 4)^3$

6. $f(x) = 6x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 3$

7. $f(x) = x^{1/3} + 2x$

8. $f(x) = x^{8/3} - 20x^{2/3}$

9. $f(x) = x + \dfrac{9}{x}$

10. $f(x) = \sqrt{x^2 + 10}$

11. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3}$

12. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 2}$

En los problemas 13-16, a partir de la gráfica de la función dada f calcule los intervalos sobre los cuales f' es creciente y los intervalos sobre los cuales f' es decreciente.

13.

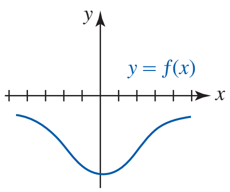


FIGURA 4.7.8 Gráfica para el problema 13

14.

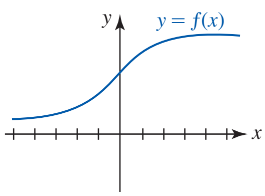


FIGURA 4.7.9 Gráfica para el problema 14

15.

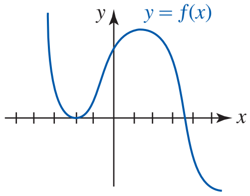


FIGURA 4.7.10 Gráfica para el problema 15

16.

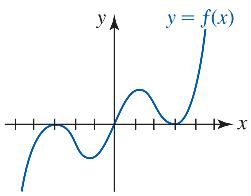


FIGURA 4.7.11 Gráfica para el problema 16

17. Demuestre que la gráfica de $f(x) = \sec x$ es cóncava hacia arriba sobre los intervalos donde $\cos x > 0$ y cóncava hacia abajo sobre los intervalos donde $\cos x < 0$.

18. Demuestre que la gráfica de $f(x) = \csc x$ es cóncava hacia arriba sobre los intervalos donde $\operatorname{sen} x > 0$ y cóncava hacia abajo sobre los intervalos donde $\operatorname{sen} x < 0$.

En los problemas 19-26, use la segunda derivada para localizar todos los puntos de inflexión.

19. $f(x) = x^4 - 12x^2 + x - 1$ **20.** $f(x) = x^{5/3} + 4x$

21. $f(x) = \operatorname{sen} x$ **22.** $f(x) = \cos x$

23. $f(x) = x - \operatorname{sen} x$ **24.** $f(x) = \tan x$

25. $f(x) = x + xe^{-x}$ **26.** $f(x) = xe^{-x^2}$

En los problemas 27-44, use la prueba de la segunda derivada, cuando sea pertinente aplicarla, para encontrar los extremos relativos de la función dada. Grafique y encuentre todos los puntos de inflexión cuando sea posible.

27. $f(x) = -(2x - 5)^2$ **28.** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 12x$

29. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ **30.** $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

31. $f(x) = 6x^5 - 10x^3$ **32.** $f(x) = x^3(x + 1)^2$

33. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$ **34.** $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

35. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ **36.** $f(x) = x\sqrt{x - 6}$

37. $f(x) = x^{1/3}(x + 1)$ **38.** $f(x) = x^{1/2} - \frac{1}{4}x$

39. $f(x) = \cos 3x,\ [0, 2\pi]$ **40.** $f(x) = 2 + \operatorname{sen} 2x,\ [0, 2\pi]$

41. $f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x,\ [0, 2\pi]$

42. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x,\ [0, 2\pi]$

43. $f(x) = 2x - x \ln x$ **44.** $f(x) = \ln(x^2 + 2)$

En los problemas 45-48, determine si la función dada tiene un extremo relativo en el número crítico indicado.

45. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x;\ \pi/4$ **46.** $f(x) = x \operatorname{sen} x;\ \ 0$

47. $f(x) = \tan^2 x;\ \ \pi$ **48.** $f(x) = (1 + \operatorname{sen} 4x)^3;\ \ \pi/8$

En los problemas 49-52, trace una gráfica de una función que tenga las propiedades dadas.

49. $f(-2) = 0, f(4) = 0$
$f'(3) = 0, f''(1) = 0, f''(2) = 0$
$f''(x) < 0, x < 1, x > 2$
$f''(x) > 0, 1 < x < 2$

50. $f(0) = 5, f(2) = 0$
$f'(2) = 0, f''(3)$ no existe
$f''(x) > 0, x < 3$
$f''(x) < 0, x > 3$

51. $f(0) = -1, f(\pi/2) > 0$
$f'(x) \geq 0$ para toda x
$f''(x) > 0, (2n - 1)\frac{\pi}{2} < x < (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, n par
$f''(x) < 0, (2n - 1)\frac{\pi}{2} < x < (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, n impar

52. $f(-x) = -f(x)$
asíntota vertical $x = 2$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
$f''(x) < 0, 0 < x < 2$
$f''(x) > 0, x > 2$

☰ Piense en ello

53. Encuentre valores de a, b y c tales que la gráfica de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ pase por $(-1, 0)$ y tenga un punto de inflexión en $(1, 1)$.

54. Encuentre valores de a, b y c tales que la gráfica de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ tenga una tangente horizontal en el punto de inflexión en $(1, 1)$.

55. Use la prueba de la segunda derivada como ayuda para graficar $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$. Observe que f es discontinua en $x = 0$.

56. Demuestre que la gráfica de una función polinomial general

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0$$

puede tener cuando mucho $n - 2$ puntos de inflexión.

57. Sea $f(x) = (x - x_0)^n$, donde n es un entero positivo.

a) Demuestre que $(x_0, 0)$ es un punto de inflexión de la gráfica de f si n es un entero impar.

b) Demuestre que $(x_0, 0)$ no es un punto de inflexión de la gráfica de f, sino que corresponde a un mínimo relativo cuando n es un entero par.

58. Demuestre que la gráfica de una función polinomial cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, es cóncava hacia arriba sobre el eje x cuando $a > 0$ y cóncava hacia abajo sobre el eje x cuando $a < 0$.

59. Sea f una función para la cual f'' existe sobre un intervalo (a, b) que contiene al número c. Si $f''(c) = 0$ y $f'''(c) \neq 0$, ¿qué puede afirmarse sobre $(c, f(c))$?

60. Proporcione un ejemplo de una función diferenciable cuya gráfica no tenga concavidad. No piense demasiado.

61. Demuestre o refute lo siguiente. Un punto de inflexión para una función f debe ocurrir en un valor crítico de f'.

62. Sin graficar, explique por qué la gráfica de $f(x) = 10x^2 - x - 40 + e^x$ no puede tener un punto de inflexión.

63. Demuestre o refute lo siguiente. La función

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - x, & x \leq 0 \\ -x^3, & x > 0 \end{cases}$$

tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$.

64. Suponga que f es una función polinomial de grado 3 y que c_1 y c_2 son números críticos distintos.

a) $f(c_1)$ y $f(c_2)$, ¿son necesariamente extremos relativos de la función? Demuestre su respuesta.

b) ¿Cuál considera que es la coordenada x del punto de inflexión para la gráfica de f? Demuestre su respuesta.

☰ Proyecto

65. Puntos de inflexión Encuentre otros libros de texto de cálculo y anote cómo definen el punto de inflexión. Luego, investigue en internet acerca de la definición de punto de inflexión. Escriba un breve artículo en que compare estas definiciones. Ilustre su artículo con gráficas idóneas.

d) Exprese la longitud total L de los tres cables mostrados en la figura 4.8.49*b*) como una función de la longitud del cable AB.

e) Use una calculadora o un SAC para comprobar que la gráfica de L tiene un mínimo.

f) Use la gráfica obtenida en el inciso *e*) o un SAC como ayuda en la aproximación de la longitud del cable AB que minimiza la función L obtenida en el inciso *d*).

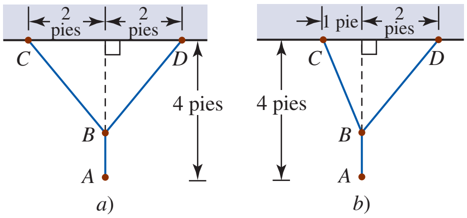


FIGURA 4.8.49 Cables en el problema 67

Proyecto

68. Interferencia de frecuencia Cuando la Administración Federal de Aviación (FAA, por sus siglas en inglés) asigna numerosas frecuencias para un radiotransmisor en un aeropuerto, bastante a menudo los transmisores cercanos usan las mismas frecuencias. Como consecuencia, la FAA intenta minimizar la interferencia entre estos transmisores. En la FIGURA 4.8.50, el punto (x_t, y_t) representa la ubicación de un transmisor cuya jurisdicción radial está indicada por el círculo C de radio con centro en el origen. Un segundo transmisor se encuentra en $(x_i, 0)$ como se muestra en la figura. En este problema, usted desarrolla y analiza una función para encontrar la interferencia entre dos transmisores.

a) La intensidad de la señal de un transmisor a un punto es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ambos. Suponga que un punto (x, y) está ubicado sobre la porción superior del círculo C como se muestra en la figura 4.8.50. Exprese la intensidad primaria de la señal en (x, y) desde un transmisor en (x_t, y_t) como una función de x. Exprese la intensidad secundaria en (x, y) desde el transmisor en $(x_i, 0)$ como una función de x. Luego defina una función $R(x)$ como un cociente de la intensidad primaria de la señal entre la intensidad secundaria de la señal. Puede considerarse que $R(x)$ es una *razón señal a ruido*. Para garantizar que la interferencia permanezca pequeña es necesario demostrar que la razón señal a ruido mínima es mayor que el umbral mínimo de la FAA de -0.7.

b) Suponga que $x_t = 760$ m, $y_t = -560$ m, $r = 1.1$ km y $x_i = 12$ km. Use un SAC para simplificar y luego trazar la gráfica de $R(x)$. Use la gráfica para estimar el dominio y el rango de $R(x)$.

c) Use la gráfica en el inciso *b*) para estimar el valor de x donde ocurre la razón mínima R. Estime el valor de R en ese punto. Este valor de R, ¿excede el umbral mínimo de la FAA?

d) Use un SAC para diferenciar $R(x)$. Use un SAC para encontrar la raíz de $R'(x) = 0$ y para calcular el valor correspondiente de $R(x)$. Compare sus respuestas aquí con las estimaciones en el inciso *c*).

e) ¿Cuál es el punto (x, y) sobre el círculo C?

f) Se supuso que el punto (x, y) estaba en el semiplano superior cuando (x_t, y_t) estaba en el semiplano inferior. Explique por qué esta suposición es correcta.

g) Use un SAC para encontrar el valor de x donde ocurre la interferencia mínima en términos de los símbolos x_t, y_t, x_i y r.

h) ¿Dónde está el punto que minimiza la razón señal a ruido cuando el transmisor en (x_t, y_t) está sobre el eje x? Proporcione un argumento convincente y justifique su respuesta.

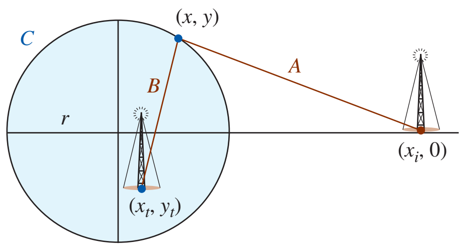


FIGURA 4.8.50 Radiotransmisores en el problema 68

4.9 Linealización y diferenciales

Introducción Empezamos el análisis de la derivada con el problema de encontrar la recta tangente a la gráfica de una función $y = f(x)$ en un punto $(a, f(a))$. Intuitivamente, es de esperar que una recta tangente esté muy próxima a la gráfica de f siempre que x esté cerca del número a. En otras palabras, cuando x está en una pequeña vecindad de a, los valores de la función $f(x)$ están muy próximos al valor de las coordenadas y de la recta tangente. Así, al encontrar una ecuación de la recta tangente en $(a, f(a))$ podemos usar esa ecuación para aproximar $f(x)$.

Una ecuación de la recta tangente mostrada en rojo en la FIGURA 4.9.1 está dada por

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \qquad \text{o bien,} \qquad y = f(a) + f'(a)(x - a). \tag{1}$$

Al usar notación funcional estándar, la última ecuación en (1) se escribirá como $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Esta función lineal recibe un nombre especial.

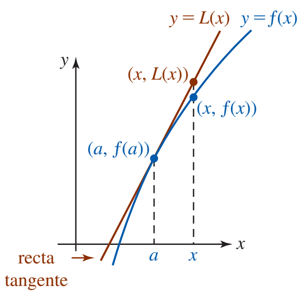


FIGURA 4.9.1 Cuando x está próximo a a, el valor $L(x)$ está cerca de $f(x)$

Definición 4.9.1 Linealización

Si una función $y = f(x)$ es diferenciable en un número a, entonces decimos que la función

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \tag{2}$$

es una **linealización** de f en a. Para un número x próximo a a, la aproximación

$$f(x) \approx L(x) \tag{3}$$

se denomina **aproximación lineal local** de f en a.

No es necesario memorizar (2); es simplemente la forma punto-pendiente de una recta tangente en $(a, f(a))$.

EJEMPLO 1 Linealización de sen x

Encuentre una linealización de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $a = 0$.

Solución Al usar $f(0) = 0$, $f'(x) = \cos x$ y $f'(0) = 1$, la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $(0, 0)$ es $y - 0 = 1 \cdot (x - 0)$. En consecuencia, la linealización de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $a = 0$ es $L(x) = x$. Como se observa en la FIGURA 4.9.2, la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y su linealización en $a = 0$ son casi indistinguibles cerca del origen. La aproximación lineal local $f(x) \approx L(x)$ de f en $a = 0$ es

$$\operatorname{sen} x \approx x. \tag{4}$$ ■

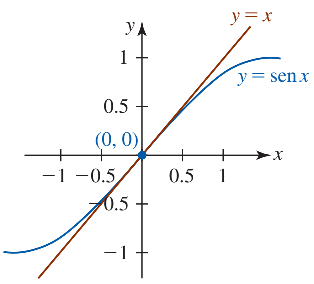


FIGURA 4.9.2 Gráfica de función y linealización en el ejemplo 1

Errores En el ejemplo 1 se recalca algo que usted ya sabe por trigonometría. La aproximación lineal local (4) muestra que el seno de un ángulo pequeño x (medido en radianes) es aproximadamente el mismo que el ángulo. Para efectos de comparación, si se escoge $x = 0.1$, entonces (4) indica que $f(0.1) \approx L(0.1)$ o $\operatorname{sen}(0.1) \approx 0.1$. Para efectos de comparación, con una calculadora se obtiene (redondeado hasta cinco cifras decimales) $f(0.1) = \operatorname{sen}(0.1) = 0.09983$. Luego, un error en el cálculo se define por

$$\textbf{error} = \textbf{valor verdadero} - \textbf{valor aproximado}. \tag{5}$$

No obstante, en la práctica

$$\textbf{error relativo} = \frac{\textbf{error}}{\textbf{valor verdadero}} \tag{6}$$

suele ser más importante que el error. Además (error relativo) · 100 se denomina **error porcentual**. Así, con ayuda de una calculadora se encuentra que el error porcentual en la aproximación $f(0.1) \approx L(0.1)$ es sólo alrededor de 0.2%. En la figura 4.9.2 se muestra claramente que cuando x se aleja de 0, la precisión de la aproximación $\operatorname{sen} x \approx x$ disminuye. Por ejemplo, para el número 0.9, con una calculadora obtenemos $f(0.9) = \operatorname{sen}(0.9) = 0.78333$, mientras que $L(0.9) = 0.9$. En esta ocasión el error porcentual es aproximadamente 15%.

También hemos visto el resultado del ejemplo 1 presentado de manera ligeramente distinta en la sección 2.4. Si la aproximación lineal local $\operatorname{sen} x \approx x$ la dividimos entre x, obtenemos $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \approx 1$ para valores de x próximos a 0. Esto lleva de regreso al límite trigonométrico importante $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

EJEMPLO 2 Linealización y aproximación

a) Encuentre una linealización de $f(x) = \sqrt{x + 1}$ en $a = 3$.
b) Use una aproximación lineal local para aproximar $\sqrt{3.95}$ y $\sqrt{4.01}$.

Solución

a) Por la regla de potencias para funciones, la derivada de f es

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x + 1}}.$$

Cuando ambas se evalúan en $a = 3$ obtenemos:

$$f(3) = \sqrt{4} = 2 \qquad \leftarrow \text{el punto de tangencia es } (3, 2)$$

$$f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}. \qquad \leftarrow \text{la pendiente de la tangente en } (3, 2) \text{ es } \tfrac{1}{4}$$

Así, por la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, la linealización de f en $a = 3$ está dada por $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 3)$, o bien

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x - 3). \tag{7}$$

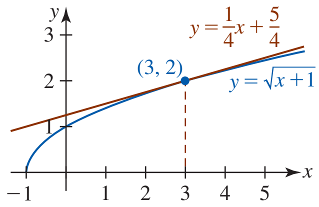


FIGURA 4.9.3 Gráficas de función y linealización en el ejemplo 2

Las gráficas de f y L se muestran en la FIGURA 4.9.3. Por supuesto, L puede expresarse en la forma punto-pendiente $L(x) = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$, pero para efectos de cálculo es más conveniente la forma proporcionada en (7).

***b*)** Al usar (7) del inciso *a*), tenemos la aproximación lineal local $f(x) \approx L(x)$, o bien

$$\sqrt{x + 1} \approx 2 + \frac{1}{4}(x - 3), \tag{8}$$

siempre que x esté cerca de 3. Luego, al hacer $x = 2.95$ y $x = 3.01$ en (8) obtenemos, a su vez, las aproximaciones:

$$\overbrace{\sqrt{3.95}}^{f(2.95)} \approx \overbrace{2 + \frac{1}{4}(2.95 - 3) = 2 - \frac{0.05}{4}}^{L(2.95)} = 1.9875.$$

y

$$\overbrace{\sqrt{4.01}}^{f(3.01)} \approx \overbrace{2 + \frac{1}{4}(3.01 - 3) = 2 + \frac{0.01}{4}}^{L(3.01)} = 2.0025. \qquad \blacksquare$$

Diferenciales La idea fundamental de linealización de una función originalmente fue expresada en la terminología de *diferenciales*. Suponga que $y = f(x)$ es una función diferenciable en un intervalo abierto que contiene al número a. Si x_1 es un número diferente sobre el eje x, entonces los **incrementos** Δx y Δy son las diferencias

$$\Delta x = x_1 - a \qquad \text{y} \qquad \Delta y = f(x_1) - f(a).$$

Pero ya que $x_1 = a + \Delta x$, el **cambio en la función** es

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a).$$

Para valores de Δx que están próximos a 0, el cociente diferencial

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

es una aproximación del valor de la derivada de f en a:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(a) \qquad \text{o bien,} \qquad \Delta y \approx f'(a)\Delta x.$$

Las cantidades Δx y $f'(a)\Delta x$ se denominan **diferenciales** y se denotan por los símbolos dx y dy, respectivamente. Es decir,

$$\Delta x = dx \qquad \text{y} \qquad dy = f'(a)\,dx.$$

Como se muestra en la FIGURA 4.9.4, para un cambio dx en x la cantidad $dy = f'(a)dx$ representa el **cambio en la linealización** (el *ascenso* en la recta tangente en $(a, f(a))$).* Y cuando $dx \approx 0$, el cambio en la función Δy es aproximadamente el mismo que el cambio en la linealización dy:

$$\Delta y \approx dy. \tag{9}$$

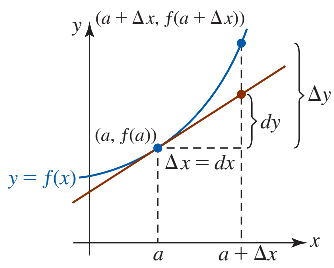


FIGURA 4.9.4 Interpretaciones geométricas de dx, Δy y dy

* Por esta razón, la notación dy/dx de Leibniz para la derivada parece un cociente.

Definición 4.9.2 Diferenciales

La **diferencial de la variable independiente** x es el número diferente de cero Δx y se denota por dx; es decir,

$$dx = \Delta x. \tag{10}$$

Si f es una función diferenciable en x, entonces la **diferencial de la variable dependiente** y se denota por dy; es decir,

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x)\,dx. \tag{11}$$

EJEMPLO 3 Diferenciales

a) Encuentre Δy y dy para $f(x) = 5x^2 + 4x + 1$.

b) Compare los valores de Δy y dy para $x = 6$, $\Delta x = dx = 0.02$.

Solución

a)

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x)\\ &= [5(x + \Delta x)^2 + 4(x + \Delta x) + 1] - [5x^2 + 4x + 1]\\ &= 10x\Delta x + 4\Delta x + 5(\Delta x)^2.\end{aligned}$$

Luego, puesto que $f'(x) = 10x + 4$, por (11) de la definición 4.9.2 tenemos

$$dy = (10x + 4)\,dx. \tag{12}$$

Al volver a escribir Δy como $\Delta y = (10x + 4)\Delta x + 5(\Delta x)^2$ y usar $dx = \Delta x$, se observa que $dy = (10x + 4)\Delta x$ y $\Delta y = (10x + 4)\Delta x + 5(\Delta x)^2$ difieren por la cantidad $5(\Delta x)^2$.

b) Cuando $x = 6$, $\Delta x = 0.02$:

$$\Delta y = 10(6)(0.02) + 4(0.02) + 5(0.02)^2 = 1.282$$

mientras $$dy = (10(6) + 4)(0.02) = 1.28.$$

Por supuesto, la diferencia en las respuestas es $5(\Delta x)^2 = 5(0.02)^2 = 0.002$. ■

En el ejemplo 3, el valor $\Delta y = 1.282$ es la cantidad *exacta* por la cual la función $f(x) = 5x^2 + 4x + 1$ cambia cuando x cambia de 6 a 6.02. La diferencial $dy = 1.28$ representa una *aproximación* de la cantidad por la cual cambia la función. Como se muestra en (9), para un cambio o incremento pequeño Δx en la variable independiente, el cambio correspondiente Δy en la variable dependiente puede aproximarse por la diferencial dy.

Otro repaso a la aproximación lineal Las diferenciales pueden usarse para aproximar el valor $f(x + \Delta x)$. A partir de $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, obtenemos

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y.$$

Pero debido a (9), para un cambio pequeño en x puede escribirse como

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy.$$

Con $dy = f'(x)\,dx = f'(x)\Delta x$ la línea precedente es exactamente la misma que

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,dx. \tag{13}$$

La fórmula en (13) ya se ha visto bajo otra forma. Si se hace $x = a$ y $dx = \Delta x = x - a$, entonces (13) se vuelve

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a). \tag{14}$$

El miembro derecho de la desigualdad en (14) se identifica como $L(x)$ y (13) se vuelve $f(x) \approx L(x)$, que es el resultado proporcionado en (3).

EJEMPLO 4 Aproximación por diferenciales

Use (13) para aproximar $(2.01)^3$.

Solución Primero se identifica la función $f(x) = x^3$. Deseamos calcular el valor aproximado de $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3$ cuando $x = 2$ y $\Delta x = 0.01$. Así, por (11),

$$dy = 3x^2 dx = 3x^2 \Delta x.$$

Por tanto, (13) proporciona

$$(x + \Delta x)^3 \approx x^3 + 3x^2 \Delta x.$$

Con $x = 2$ y $\Delta x = 0.01$, la fórmula precedente proporciona la aproximación

$$(2.01)^3 \approx 2^3 + 3(2)^2(0.01) = 8.12.$$ ■

EJEMPLO 5 Aproximación por diferenciales

La arista de un cubo mide 30 cm con un error posible de ± 0.02 cm. ¿Cuál es el máximo error posible aproximado en el volumen del cubo?

Solución El volumen de un cubo es $V = x^3$, donde x es la longitud de la arista. Si Δx representa el error en la longitud de la arista, entonces el error correspondiente en el volumen es

$$\Delta V = (x + \Delta x)^3 - x^3.$$

Para simplificar la situación se utiliza la diferencial $dV = 3x^2 dx = 3x^2 \Delta x$ como una aproximación a ΔV. Así, para $x = 30$ y $\Delta x = \pm 0.02$ el máximo error aproximado es

$$dV = 3(30)^2(\pm 0.02) = \pm 54 \text{ cm}^3.$$ ■

En el ejemplo 5, un error de alrededor de 54 cm^3 en el volumen para un error de 0.02 cm en la longitud de la arista parece considerable. Sin embargo, observe que si el error relativo (6) es $\Delta V/V$, entonces el error relativo *aproximado* es dV/V. Cuando $x = 30$ y $V = (30)^3 = 27\,000$, el error porcentual máximo es $\pm 54/27\,000 = \pm 1/500$, y el error porcentual máximo es aproximadamente de sólo $\pm 0.2\%$.

Reglas para diferenciales Las reglas para diferenciación consideradas en este capítulo pueden volver a plantearse en términos de diferenciales; por ejemplo, si $u = f(x)$ y $v = g(x)$ y $y = f(x) + g(x)$, entonces $dy/dx = f'(x) + g'(x)$. Por tanto, $dy = [f'(x) + g'(x)]\, dx = f'(x)\, dx + g'(x)\, dx = du + dv$. A continuación se resumen los equivalentes diferenciales de las reglas de la suma, el producto y el cociente:

$$d(u + v) = du + dv \tag{15}$$

$$d(uv) = u\, dv + v\, du \tag{16}$$

$$d(u/v) = \frac{v\, du - u\, dv}{v^2}. \tag{17}$$

Como se muestra en el siguiente ejemplo, casi no es necesario memorizar las expresiones (15), (16) y (17).

EJEMPLO 6 Diferencial de y

Encuentre dy para $y = x^2 \cos 3x$.

Solución Para encontrar la diferencial de una función, simplemente puede multiplicar su derivada por dx. Así, por la regla del producto,

$$\frac{dy}{dx} = x^2(-\operatorname{sen} 3x \cdot 3) + \cos 3x(2x)$$

de modo que

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot dx = (-3x^2 \operatorname{sen} 3x + 2x \cos 3x)\, dx. \tag{18}$$

Solución alterna Al aplicar (16) obtenemos

$$\begin{aligned} dy &= x^2 d(\cos 3x) + \cos 3x\, d(x^2) \\ &= x^2(-\operatorname{sen} 3x \cdot 3\, dx) + \cos 3x(2x\, dx). \end{aligned} \tag{19}$$

Al factorizar dx en (19) obtenemos (18). ■

Ejercicios 4.9

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-17.

Fundamentos

En los problemas 1-8, encuentre una linealización de la función dada en el número indicado.

1. $f(x) = \sqrt{x}; \quad a = 9$ **2.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}; \quad a = 1$

3. $f(x) = \tan x; \quad a = \pi/4$ **4.** $f(x) = \cos x; \quad a = \pi/2$

5. $f(x) = \ln x; \quad a = 1$ **6.** $f(x) = 5x + e^{x-2}; \quad a = 2$

7. $f(x) = \sqrt{1 + x}; \quad a = 3$ **8.** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3 + x}}; \quad a = 6$

En los problemas 9-16, use una linealización en $a = 0$ para establecer la aproximación lineal local dada.

9. $e^x \approx 1 + x$ **10.** $\tan x \approx x$

11. $(1 + x)^{10} \approx 1 + 10x$ **12.** $(1 + 2x)^{-3} \approx 1 - 6x$

13. $\sqrt{1 - x} \approx 1 - \dfrac{1}{2}x$ **14.** $\sqrt{x^2 + x + 4} \approx 2 + \dfrac{1}{4}x$

15. $\dfrac{1}{3 + x} \approx \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9}x$ **16.** $\sqrt[3]{1 - 4x} \approx 1 - \dfrac{4}{3}x$

En los problemas 17-20, use un resultado idóneo de los problemas 1-8 para encontrar una aproximación de la cantidad dada.

17. $(1.01)^{-2}$ **18.** $\sqrt{9.05}$ **19.** $10.5 + e^{0.1}$ **20.** $\ln 0.98$

En los problemas 21-24, use un resultado idóneo de los problemas 9-16 para encontrar una aproximación de la cantidad dada.

21. $\dfrac{1}{(1.1)^3}$ **22.** $(1.02)^{10}$ **23.** $(0.88)^{1/3}$ **24.** $\sqrt{4.11}$

En los problemas 25-32, use una función idónea y una aproximación lineal local para encontrar una aproximación de la cantidad dada.

25. $(1.8)^5$ **26.** $(7.9)^{2/3}$

27. $\dfrac{(0.9)^4}{(0.9) + 1}$ **28.** $(1.1)^3 + 6(1.1)^2$

29. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 0.4\right)$ **30.** $\operatorname{sen} 1°$

31. $\operatorname{sen} 33°$ **32.** $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + 0.1\right)$

En los problemas 33 y 34, encuentre una linealización $L(x)$ de f en el valor dado de a. Use $L(x)$ para aproximar el valor de la función dado.

33. $a = 1; \quad f(1.04)$ **34.** $a = -2; \quad f(-1.98)$

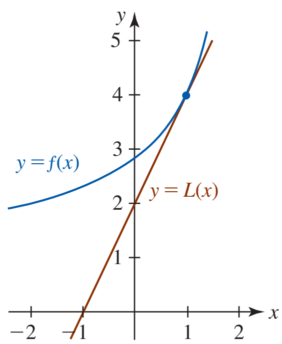


FIGURA 4.9.5 Gráfica para el problema 33

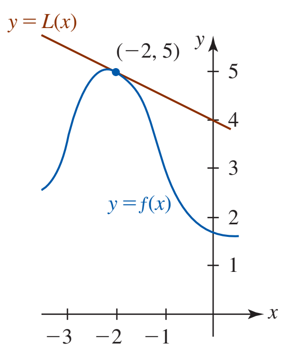


FIGURA 4.9.6 Gráfica para el problema 34

En los problemas 35-42, encuentre Δy y dy.

35. $y = x^2 + 1$ **36.** $y = 3x^2 - 5x + 6$

37. $y = (x + 1)^2$ **38.** $y = x^3$

39. $y = \dfrac{3x + 1}{x}$ **40.** $y = \dfrac{1}{x^2}$

41. $y = \operatorname{sen} x$ **42.** $y = -4\cos 2x$

En los problemas 43 y 44, complete la tabla siguiente para cada función.

x	Δx	Δy	dy	$\Delta y - dy$
2	1			
2	0.5			
2	0.1			
2	0.01			

43. $y = 5x^2$ **44.** $y = 1/x$

45. Calcule la cantidad aproximada por la cual la función $f(x) = 4x^2 + 5x + 8$ cambia cuando x cambia de:

a) 4 a 4.03 ***b)*** 3 a 2.9.

46. ***a)*** Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3 + 3x^2$ en $x = 1$.

b) Encuentre la coordenada y del punto sobre la recta tangente en el inciso *a)* que corresponde a $x = 1.02$.

c) Use (3) para encontrar una aproximación a $f(1.02)$. Compare su respuesta con la del inciso *b)*.

47. El área de un círculo con radio r es $A = \pi r^2$.

a) Dado que el radio de un círculo cambia de 4 cm a 5 cm, encuentre el cambio exacto en el área.

b) ¿Cuál es el cambio aproximado en área?

Aplicaciones

48. Según Poiseuille, la resistencia R de un vaso capilar de longitud l y radio r es $R = kl/r^4$, donde k es una constante. Dado que l es constante, encuentre el cambio aproximado en R cuando r cambia de 0.2 mm a 0.3 mm.

49. Muchas pelotas de golf constan de una cubierta esférica sobre un núcleo sólido. Encuentre el volumen exacto de la cubierta si su grosor es t y el radio del núcleo es r. [*Sugerencia*: El volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Considere esferas concéntricas cuyos radios son r y $r + \Delta r$.] Use diferenciales para encontrar una aproximación al volumen de la cubierta. Vea la FIGURA 4.9.7. Encuentre una aproximación al volumen de la cubierta si $r = 0.8$ y $t = 0.04$ pulg.

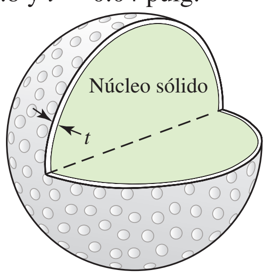


FIGURA 4.9.7 Pelota de golf en el problema 49

50. Un tubo de metal hueco mide 1.5 m de longitud. Encuentre una aproximación al volumen del metal si el radio interior mide 2 cm y el grosor del metal es 0.25 cm. Vea la FIGURA 4.9.8.

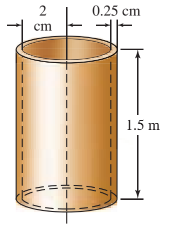


FIGURA 4.9.8 Tubo en el problema 50

51. El lado de un cuadrado mide 10 cm con un error posible de ± 0.3 cm. Use diferenciales para encontrar una aproximación al error máximo en el área. Encuentre el error relativo aproximado y el error porcentual aproximado.

52. Un tanque de almacenamiento de petróleo en forma de cilindro circular mide 5 m de altura. El radio mide 8 m con un error posible de ± 0.25 m. Use diferenciales para estimar el error máximo en el volumen. Encuentre el error relativo aproximado y el error porcentual aproximado.

53. En el estudio de ciertos procesos adiabáticos, la presión P de un gas está relacionada con el volumen V que ocupa por $P = c/V^{\gamma}$, donde c y γ son constantes. Demuestre que el error relativo aproximado en P es proporcional al error relativo aproximado en V.

54. El alcance de un proyectil R con velocidad inicial υ_0 y ángulo de elevación θ está dado por $R = (\upsilon_0^2/g)\text{sen}\,2\theta$, donde g es la aceleración de la gravedad. Si υ_0 y θ se mantienen constantes, demuestre entonces que el error porcentual en el alcance es proporcional al error porcentual en g.

55. Use la fórmula en el problema 54 para determinar el alcance de un proyectil cuando la velocidad inicial es 256 pies/s, el ángulo de elevación es 45° y la aceleración de la gravedad es 32 pies/s^2. ¿Cuál es el cambio aproximado en el alcance del proyectil si la velocidad inicial se incrementa a 266 pies/s?

56. La aceleración debida a la gravedad g no es constante, ya que varía con la altitud. Para efectos prácticos, en la superficie terrestre, g se considera igual a 32 pies/s^2, 980 cm/s^2 o 9.8 m/s^2.

a) A partir de la ley de la gravitación universal, la fuerza F entre un cuerpo de masa m_1 y la Tierra de masa m_2 es $F = km_1m_2/r^2$, donde k es una constante y r es la distancia al centro de la Tierra. En forma alterna, la segunda ley de movimiento de Newton implica $F = m_1 g$. Demuestre que $g = km_2/r^2$.

b) Use el resultado del inciso *a*) para demostrar que $dg/g = -2dr/r$.

c) Sea $r = 6\,400$ km en la superficie de la Tierra. Use el inciso *b*) para demostrar que el valor aproximado de g a una altitud de 16 km es 9.75 m/s^2.

57. La aceleración debida la gravedad g también cambia con la latitud. La International Geodesy Association ha definido g (a nivel del mar) como una función de la latitud θ como sigue:

$$g = 978.0318\,(1 + 53.024 \times 10^{-4}\,\text{sen}^2\,\theta - 5.9 \times 10^{-6}\,\text{sen}^2\,2\theta),$$

donde g se mide en cm/s^2.

a) Según este modelo matemático, ¿dónde es mínima g? ¿Dónde es máxima?

b) ¿Cuál es el valor de g a latitud 60° N?

c) ¿Cuál es el cambio aproximado en g cuando θ cambia de 60° N a 61° N? [*Sugerencia*: Recuerde usar medida en radianes.]

58. El periodo (en segundos) de un péndulo simple de longitud L es $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, donde g es la aceleración debida a la gravedad. Calcule el cambio exacto en el periodo si L se incrementa de 4 m a 5 m. Luego use diferenciales para encontrar una aproximación al cambio en periodo. Suponga $g = 9.8$ m/s^2.

59. En el problema 58, dado que L es fijo a 4 m, encuentre una aproximación al cambio en el periodo si el péndulo se mueve a una altitud donde $g = 9.75$ m/s^2.

60. Puesto que casi todas las placas de circulación son del mismo tamaño (12 pulg de largo), un detector óptico computarizado montado en la parte frontal del automóvil A puede registrar la distancia D al automóvil B directamente enfrente del automóvil A para medir el ángulo θ subtendido por la placa de circulación del automóvil B. Vea la FIGURA 4.9.9.

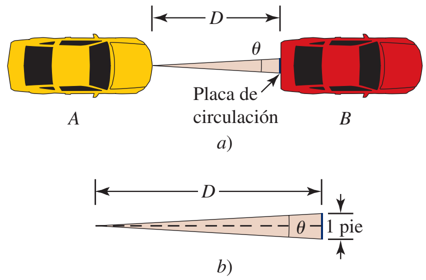


FIGURA 4.9.9 Automóviles en el problema 60

a) Exprese D como una función del ángulo subtendido θ.

b) Encuentre la distancia al automóvil de enfrente si el ángulo subtendido θ es 30 minutos de arco (es decir, $\frac{1}{2}^{\circ}$).

c) Suponga en el inciso *b*) que θ decrece a razón de 2 minutos de arco por segundo, y que el automóvil A se mueve a razón de 30 mi/h. ¿A qué razón se mueve el automóvil B?

d) Demuestre que el error relativo aproximado al medir D está dado por

$$\frac{dD}{D} = -\frac{d\theta}{\text{sen}\,\theta},$$

donde $d\theta$ es el error aproximado (en radianes) al medir θ. ¿Cuál es el error relativo aproximado en D en el inciso *b*) si el ángulo subtendido θ se mide con un error posible de ± 1 minuto de arco?

≡ Piense en ello

61. Suponga que la función $y = f(x)$ es diferenciable en un número a. Si un polinomio $p(x) = c_1x + c_0$ tiene las propiedades de que $p(a) = f(a)$ y $p'(a) = f'(a)$, demuestre entonces que $p(x) = L(x)$, donde L se define en (2).

62. Sin usar trigonometría, explique por qué para valores pequeños de x, $\cos x \approx 1$.

63. Suponga que una función f y f' son diferenciables en un número a y que $L(x)$ es una linealización de f en a. Analice: Si $f''(x) > 0$ para toda x en algún intervalo abierto que contiene a a, $L(x)$ ¿sobrestima o subestima $f(x)$ para x próximo a a?

64. Suponga que $(c, f(c))$ es un punto de inflexión para la gráfica de $y = f(x)$ tal que $f''(c) = 0$ y suponga también que $L(x)$ es una linealización de f en c. Describa a qué se parece la gráfica de $y = f(x) - L(x)$ en una vecindad de c.

65. El área de un cuadrado cuyo lado mide x es $A = x^2$. Suponga, como se muestra en la FIGURA 4.9.10, que cada lado del cuadrado se incrementa por una cantidad Δx. En la figura 4.9.10, identifique por color las áreas ΔA, dA y $\Delta A - dA$.

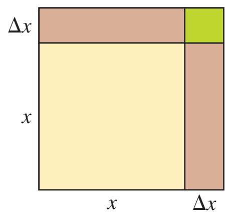


FIGURA 4.9.10 Cuadrado en el problema 65

4.10 Método de Newton

Introducción Encontrar raíces de ciertos tipos de ecuaciones fue un problema que cautivó a los matemáticos durante siglos. Los ceros de una función *polinomial* f de grado 4 o menos (es decir, las raíces de la ecuación $f(x) = 0$) siempre pueden encontrarse por medio de una fórmula algebraica que expresa la incógnita x en términos de los coeficientes de f. Por ejemplo, la ecuación polinomial de grado 2, $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, puede resolverse con la fórmula cuadrática. Uno de los logros más importantes en la historia de las matemáticas fue la demostración en el siglo XIX de que las ecuaciones polinomiales de grado mayor que 4 no pueden resolverse por medio de fórmulas algebraicas; en otras palabras, en términos de radicales. Por tanto, resolver una ecuación algebraica como

$$x^5 - 3x^2 + 4x - 6 = 0 \tag{1}$$

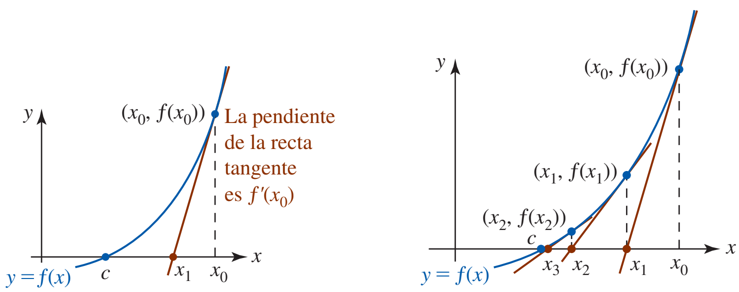
plantea un dilema a menos que el polinomio de quinto grado $x^5 - 3x^2 + 4x - 6$ pueda factorizarse. Además, en análisis científicos, a menudo se pide encontrar las raíces de ecuaciones trascendentes como

$$2x = \tan x. \tag{2}$$

En el caso de problemas como (1) y (2), suele acostumbrarse usar algún método que produzca una aproximación o estimación de las raíces. En esta sección consideraremos una técnica de aproximación que utiliza la derivada de una función f o, con más precisión, una recta tangente a la gráfica de f. Este nuevo método se denomina **método de Newton**, o **método de Newton-Raphson**.

Método de Newton Suponga que f es diferenciable y suponga que c representa alguna raíz real desconocida de $f(x) = 0$; es decir, $f(c) = 0$. Sea x_0 un número que se escoge de manera arbitraria como primera conjetura para c. Si $f(x_0) \neq 0$, calcule $f'(x_0)$ y, como se muestra en la FIGURA 4.10.1*a*), construya una tangente a la gráfica de f en $(x_0, f(x_0))$. Si se hace que $(x_1, 0)$ denote la intersección x de la recta tangente $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, entonces las coordenadas $x = x_1$ y $y = 0$ deben satisfacer esta ecuación. Al despejar x_1 de $0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$ obtenemos

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$



a) Una recta tangente

b) Tres rectas tangentes

FIGURA 4.10.1 Coordenadas x sucesivas de intersecciones x de rectas tangentes próximas a la raíz c

Revisión del capítulo 4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-17.

A. Falso/verdadero

En los problemas 1-20, indique si la afirmación dada es falsa (F) o verdadera (V).

1. Si f es creciente sobre un intervalo, entonces $f'(x) > 0$ sobre el intervalo. _____
2. Una función f tiene un extremo en c cuando $f'(c) = 0$. _____
3. Una partícula en movimiento rectilíneo desacelera cuando su velocidad $v(t)$ disminuye. _____
4. Si la posición de una partícula en movimiento rectilíneo sobre una recta horizontal es $s(t) = t^2 - 2t$, entonces la partícula acelera para $t > 1$. _____
5. Si $f''(x) < 0$ para toda x en el intervalo (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre el intervalo. _____
6. Si $f''(c) = 0$, entonces $(c, f(c))$ es un punto de inflexión. _____
7. Si $f(c)$ es un máximo relativo, entonces $f'(c) = 0$ y $f'(x) > 0$ para $x < c$ y $f'(x) < 0$ para $x > c$. _____
8. Si $f(c)$ es mínimo relativo, entonces $f''(c) > 0$. _____
9. Una función f que es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ tiene tanto un máximo absoluto como un mínimo absoluto sobre el intervalo. _____
10. Todo extremo absoluto también es un extremo relativo. _____
11. Si $c > 0$ es una constante y $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - cx^2$, entonces $(c, f(c))$ es un punto de inflexión. _____
12. $x = 1$ es un número crítico de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. _____
13. Si $f'(x) > 0$ y $g'(x) > 0$ sobre un intervalo I, entonces $f + g$ es creciente sobre I. _____
14. Si $f'(x) > 0$ sobre un intervalo I, entonces $f''(x) > 0$ sobre I. _____
15. Un límite de la forma $\infty - \infty$ siempre tiene valor 0. _____
16. Un límite de la forma 1^∞ siempre es 1. _____
17. Un límite de la forma ∞/∞ es indeterminado. _____
18. Un límite de la forma $0/\infty$ es indeterminado. _____
19. Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ son ambos de la forma ∞/∞, entonces el primer límite no existe. _____
20. Para una forma indeterminada, la regla de L'Hôpital establece que el límite de un cociente es lo mismo que la derivada del cociente. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-10, llene los espacios en blanco.

1. Para una partícula que se mueve rectilíneamente, la aceleración es la primera derivada de __________.
2. La gráfica de un polinomio cúbico puede tener a lo sumo __________ punto(s) de inflexión.
3. Un ejemplo de una función $y = f(x)$ que es cóncava hacia arriba sobre $(-\infty, 0)$, cóncava hacia abajo sobre $(0, \infty)$ y creciente sobre $(-\infty, \infty)$ es ________.
4. Dos números no negativos cuya suma es 8 tales que la suma de sus cuadrados es máximo son ________.
5. Si f es continua sobre $[a, b]$, diferenciable sobre (a, b) y $f(a) = f(b) = 0$, entonces en (a, b) existe algún c tal que $f'(c) =$ ________.
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x} =$ para todo entero n.
7. La suma de un número positivo y su recíproco siempre es mayor que o igual a __________.
8. Si $f(1) = 13$ y $f'(x) = 5^{x^2}$, entonces una linealización de f en $a = 1$ es __________ y $f(1.1) \approx$ __________.

9. Si $y = x^2 - x$, entonces $\Delta y =$ __________.

10. Si $y = x^3 e^{-x}$, entonces $dy =$ __________.

C. Ejercicios

En los problemas 1-4, encuentre los extremos absolutos de la función dada sobre el intervalo indicado.

1. $f(x) = x^3 - 75x + 150; \quad [-3, 4]$

2. $f(x) = 4x^2 - \dfrac{1}{x}; \quad \left[\frac{1}{4}, 1\right]$

3. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+4}; \quad [-1, 3]$

4. $f(x) = (x^2 - 3x + 5)^{1/2}; \quad [1, 3]$

5. Trace la gráfica de una función continua que tenga las propiedades:

$$\begin{array}{ll} f(0) = 1, & f(2) = 3 \\ f'(0) = 0, & f'(2) \text{ no existe} \\ f'(x) > 0, & x < 0 \\ f'(x) > 0, & 0 < x < 2 \\ f'(x) < 0, & x > 2. \end{array}$$

6. Use las derivadas primera y segunda como ayuda para comparar las gráficas de

$$y = x + \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad y = x + \operatorname{sen} 2x.$$

7. La posición de una partícula que se mueve sobre una línea recta está dada por $s(t) = -t^3 + 6t^2$.

a) Grafique el movimiento sobre el intervalo de tiempo $[-1, 5]$.

b) ¿En qué instante la función velocidad es máxima?

c) ¿Corresponde este instante a la rapidez máxima?

8. La altura por arriba del nivel del suelo alcanzada por un proyectil disparado verticalmente es $s(t) = -4.9t^2 + 14.7t + 49$, donde s se mide en metros y t en segundos.

a) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el proyectil?

b) ¿A qué velocidad choca el proyectil contra el suelo?

9. Suponga que f es una función polinomial con ceros de multiplicidad 2 en $x = a$ y $x = b$; es decir,

$$f(x) = (x - a)^2(x - b)^2 g(x)$$

donde g es una función polinomial.

a) Demuestre que f' tiene por lo menos tres ceros en el intervalo cerrado $[a, b]$.

b) Si $g(x)$ es constante, encuentre los ceros de f' en $[a, b]$.

10. Demuestre que la función $f(x) = x^{1/3}$ no satisface las hipótesis del teorema del valor medio sobre el intervalo $[-1, 8]$, aunque es posible encontrar un número c en $(-1, 8)$ tal que $f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b - a)$. Explique.

En los problemas 11-14, encuentre los extremos relativos de la función dada f. Grafique.

11. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$

12. $f(x) = x^5 - \dfrac{5}{3}x^3 + 2$

13. $f(x) = 4x - 6x^{2/3} + 2$

14. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

En los problemas 15-18, encuentre los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función dada f. No grafique.

15. $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2$

16. $f(x) = x^6 - 3x^4 + 5$

17. $f(x) = 10 - (x - 3)^{1/3}$

18. $f(x) = x(x - 1)^{5/2}$

En los problemas 19-24, relacione cada figura con una o más de las siguientes afirmaciones. Sobre el intervalo correspondiente a la porción de la gráfica de $y = f(x)$ mostrada:

a) f tiene una primera derivada positiva.

b) f tiene una segunda derivada negativa.

c) La gráfica de f tiene un punto de inflexión.

d) f es diferenciable.

***e*)** f tiene un extremo relativo.

***f*)** Las pendientes de las rectas tangentes crecen cuando x crece.

19.

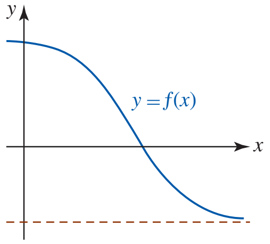


FIGURA 4.R.1 Gráfica para el problema 19

20.

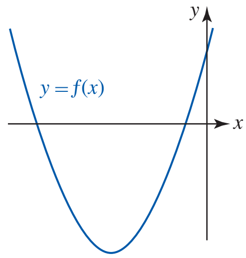


FIGURA 4.R.2 Gráfica para el problema 20

21.

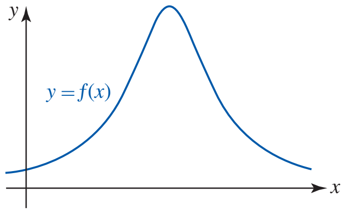


FIGURA 4.R.3 Gráfica para el problema 21

22.

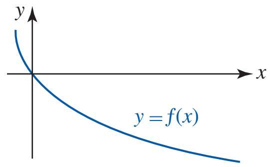


FIGURA 4.R.4 Gráfica para el problema 22

23.

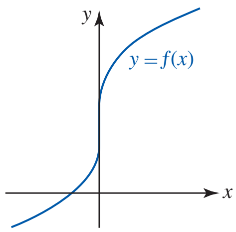


FIGURA 4.R.5 Gráfica para el problema 23

24.

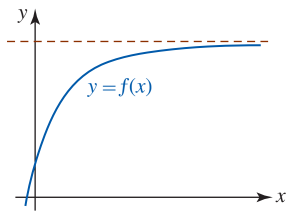


FIGURA 4.R.6 Gráfica para el problema 24

25. Sean a, b y c números reales. Encuentre la coordenada x del punto de inflexión para la gráfica de

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c).$$

26. Un triángulo se expande con el tiempo. El área del triángulo crece a razón de 15 pulg^2/min, mientras la longitud de su base decrece a razón de $\frac{1}{2}$ pulg/min. ¿A qué razón cambia la altura del triángulo cuando la altura mide 8 pulg y la base mide 6 pulg?

27. Un cuadrado está inscrito en un círculo de radio r, como se muestra en la FIGURA 4.R.7. ¿A qué razón cambia el área del cuadrado en el instante en que el radio del círculo mide 2 pulg y crece a razón de 4 pulg/min?

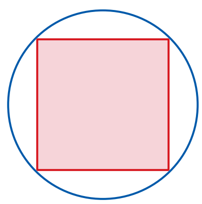


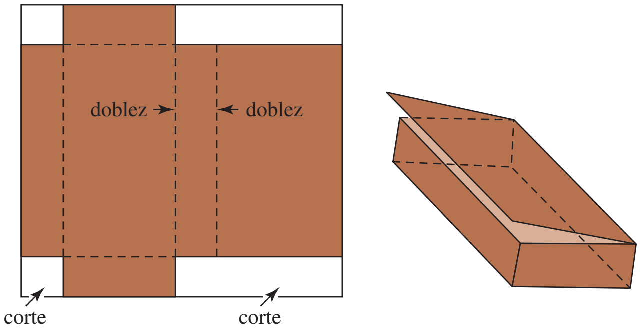
FIGURA 4.R.7 Círculo en el problema 27

28. De un tanque hemisférico de 10 m de radio gotea agua a razón de $\frac{1}{10}$ m^3/min, y ésta sale por un orificio en la parte inferior del tanque a razón de $\frac{1}{5}$ m^3/min. Es posible demostrar que el volumen del agua en el tanque en t es $V = 10\pi h^2 - (\pi/3)h^3$. Vea la FIGURA 4.R.8.

***a*)** La profundidad del agua, ¿aumenta o disminuye?

***b*)** ¿A qué razón cambia la profundidad del agua cuando la profundidad es de 5 m?

38. Se va a elaborar una caja con cubierta hecha de una pieza rectangular de cartón de 30 pulg de longitud y 15 pulg de ancho al cortar un cuadrado en un extremo del cartón y cortando un rectángulo de cada esquina del otro extremo, como se muestra en la FIGURA 4.R.15. Encuentre las dimensiones de la caja con que se obtiene el volumen máximo. ¿Cuál es el volumen máximo?



a) *b)*

FIGURA 4.R.15 Caja en el problema 38

En los problemas 39-48, use la regla de L'Hôpital para encontrar el límite.

39. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \dfrac{\sqrt{3} - \tan(\pi/x^2)}{x - \sqrt{3}}$

40. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{10\theta - 5\,\text{sen}\,2\theta}{10\theta - 2\,\text{sen}\,5\theta}$

41. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\cos\dfrac{1}{x} - e^{2/x}\right)$

42. $\lim\limits_{y\to 0} \left[\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{\ln(y+1)}\right]$

43. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{(\text{sen}\,t)^2}{\text{sen}\,t^2}$

44. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(5x)}{e^{3x/2} - e^{-x/2}}$

45. $\lim\limits_{x\to 0^+} (3x)^{-1/\ln x}$

46. $\lim\limits_{x\to 0} (2x + e^{3x})^{4/x}$

47. $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(\dfrac{x + e^{2x}}{1 + e^{4x}}\right)$

48. $\lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x)^2$

En los problemas 49 y 50, use el método de Newton para encontrar la raíz indicada. Aplique el método hasta que dos aproximaciones sucesivas coincidan hasta cuatro cifras decimales.

49. $x^3 - 4x + 2 = 0$, la raíz positiva más grande.

50. $\left(\dfrac{\text{sen}\,x}{x}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$, la raíz positiva más pequeña.