EJERCICIOS DE RECURRENCIA 11.10.2011

(con algunas soluciones)

1. Resolver la recurrencia $\begin{array}{l} F_n = 5F_{n-1} - 6F_{n-2} \\ F_0 = 0, F_1 = 1 \end{array}$ y también ésta: $\begin{array}{l} F_n = 2F_{n-1} - 2F_{n-2} \\ F_0 = 1, F_1 = 3 \end{array}$.

Resolvamos la primera. En primer lugar notamos que es una **recurrencia linea**l, pues pasando todos los términos con alguna F al primer miembro nos queda una combinación lineal de los mismos: $F_n - 5F_{n-1} + 6F_{n-2} = 0$**.** Ahora observamos también que el segundo miembro es 0, por lo que la recurrencia es **homogénea**. Por tanto, podemos **resolverla suponiendo que las soluciones van a ser del tipo** $F_n = r^n$, donde r es un número todavía desconocido. Sustituyendo en la ecuación de la recurrencia obtenemos la "ecuación característica" $r^n - 5r^{n-1} + 6r^{n-2} = 0$, que tras dividir por r^{n-2} se reduce á $r^2 - 5r + 6 = 0$. Resolviendo se obtiene que r puede valer 2 ó 3. Por tanto, hay dos soluciones posibles: $F_n = 2^n$ y $F_n = 3^n$**.** Dada la linealidad de la recurrencia, la solución general es del tipo: $F_n = a2^n + b3^n$, y determinaremos las constantes a y b usando las condiciones iniciales $F_0 = 0, F_1 = 1$:

$$F_0 = 0 = a2^0 + b3^0 \Rightarrow a + b = 0$$
$$F_1 = 1 = a2^1 + b3^1 \Rightarrow 2a + 3b = 1$$

Luego $a = -1,\ b = 1$. Por tanto, **la solución general de la recurrenci**a es $F_n = 3^n - 2^n$**.**

NOTA 1: También puede resolverse usando la función generatriz.

NOTA 2: Comprobar numéricamente el resultado obtenido, construyendo algunos términos de la sucesión recurrente.

Resolvamos ahora la segunda. Todo es igual al caso anterior, hasta obtener la correspondiente ecuación característica $r^2 - 2r + 2 = 0$**.** Las soluciones de esta ecuación son **dos números complejos conjugados**, $1 \pm i$**.** El hecho de que las soluciones sean complejas no plantea ninguna dificultad (además, conviene recordar que este tipo de soluciones siempre aparecen en pares conjugados si los coeficientes de la ecuación son números reales). Para trabajar nos quedaremos sólo con una de ellas, p. ej. $1 + i$**,** que nos provee la solución $F_n = (1+i)^n$**. NOTEMOS ahora que tanto la parte imaginaria de esta solución como la parte real son también soluciones de la recurrencia (esto puede demostrarse sin dificultad).** Operemos ahora, escribiendo el complejo en forma trigonométrica:

$$(1+i)^n = \left[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \mathrm{sen}\frac{\pi}{4})\right]^n = (\sqrt{2})^n(\cos\frac{n\pi}{4} + i\ \mathrm{sen}\frac{n\pi}{4}).$$

Luego la solución general es de la forma $F_n = a(\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4} + b(\sqrt{2})^n \mathrm{sen}\frac{n\pi}{4}$**,** donde determinaremos las constantes a y b usando las condiciones inicales $F_0 = 1, F_1 = 3$:

$$F_0 = 1 = a(\sqrt{2})^0 \cos\frac{0\pi}{4} + b(\sqrt{2})^0 \operatorname{sen}\frac{0\pi}{4} \Rightarrow a = 1$$

$$F_1 = 3 = a(\sqrt{2})^1 \cos\frac{\pi}{4} + b(\sqrt{2})^1 \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \Rightarrow a + b = 3$$

Luego $a = 1,\ b = 2$. Por tanto, **la solución general de la recurrenci**a es:

$$F_1 = (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4} + 2(\sqrt{2})^n \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} .$$

NOTA: Comprobar numéricamente el resultado obtenido, construyendo algunos términos de la sucesión recurrente.

2. **Consideramos** los números de Fibonacci dados por la siguiente recurrencia:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$
$$F_1 = F_2 = 1$$

Demostrar que $1 + F_1 + F_2 + ... + F_n = F_{n+2}$ y que $F_1^2 + F_2^2 + ... + F_n^2 = F_n F_{n+1}$.

Haremos sólo la primera. Es un caso claro de demostración **por inducción**, así que damos los pasos correspondientes:

a) **Comprobación** para n = 1: $1 + F_1 = 1 + 1 = 2 = F_3,$ pues por definición se tiene que $F_3 = F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2$.

b) **Hipótesis de inducción**: Supongamos cierto el caso n=k-1, esto es:
$1 + F_1 + F_2 + ... + F_{k-1} = F_{k+1}$.

c) **Conclusión**. En efecto:

$$1 + F_1 + F_2 + ... + F_k = (1 + F_1 + F_2 + ... + F_{k-1}) + F_k =$$
$$[\text{usando la hipótesis de inducción}] = F_{k+1} + F_k =$$
$$[\text{por la definición de la recurrencia}] = F_{k+2}$$

NOTA: También puede demostrarse usando el "método de descenso": Este procedimiento consiste en suponer cierto lo que se va a probar e ir rebajando el número de sumandos hasta llegar a una expresión de la que se sabe sin duda alguna que es cierta. En efecto:

$$1 + F_1 + F_2 + ... + F_n = F_{n+2} = [\text{por la definición de la recurrencia}] =$$
$$= F_{n+1} + F_n \Rightarrow 1 + F_1 + F_2 + ... + F_{n-1} = F_{n+1} \ [\text{han desaparecido los } F_n]$$

Reiterando el proceso, **lo cual sólo puede hacerse un número finito de veces**, se llegará finalmente a la expresión, evidentemente cierta, 1+1 = 2.

3. Resolver la recurrencia $\begin{matrix} F_n = 4F_{n-1} + 2n \\ F_0 = 1 \end{matrix}$ y también ésta: $\begin{matrix} F_{n+1} - F_n = 2n+3 \\ F_0 = 1 \end{matrix}$.

Resolvamos la primera. Nos encontramos ante una recurrencia **lineal y no homogénea**, debido a la presencia del término 2n. Por tanto, la solución general se compondrá de dos partes: $F_n = F_n^{(h)} + F_n^{(p)}$, procedentes, respectivamente, de la recurrencia homogénea y de la parte no homogénea. $F_n^{(p)}$ recibe el nombre de **solución particular**.

a) Solución de la parte homogénea $F_n = 4F_{n-1}$**.** Usando la hipótesis $F_n = r^n$ se obtiene inmediatamente que $F_n^{(h)} = 4^n$ **.**

b) Como 2n es **un polinomio** de primer grado en n, buscaremos una **solución particular** en forma de polinomio, también de primer grado: $F_n^{(p)} = an + b$. Sustituyendo esta forma en la ecuación original completa quedará: $an + b = 4(a(n-1)+b) + 2n$ o bien, pasándolo todo al primer miembro: $n(-3a-2) + (-3b+4a) = 0$, lo cual nos da el siguiente sistema:

$$-3a - 2 = 0 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

$$-3b + 4a = 0 \Rightarrow b = \frac{4a}{3} = -\frac{8}{9}$$

Luego la solución particular es: $F_n^{(p)} = -\frac{2}{3}n - \frac{8}{9}$, y la solución general será:

$$F_n = F_n^{(h)} + F_n^{(p)} = k4^n - \frac{2}{3}n - \frac{8}{9}$$

Donde, usando la condición inicial $F_0 = 1$ quedará $F_0 = 1 = k4^0 - \frac{2}{3}0 - \frac{8}{9} = k - \frac{8}{9} \Rightarrow k = \frac{17}{9}$.

Así pues, $F_n = F_n^{(h)} + F_n^{(p)} = \frac{17}{9}4^n - \frac{2}{3}n - \frac{8}{9}$.

Resolvamos la segunda. Nos encontramos también ante una recurrencia **lineal y no homogénea**, debido a la presencia del término 2n+3. Por tanto, la solución general se compondrá de dos partes: $F_n = F_n^{(h)} + F_n^{(p)}$. Sin embargo, la ecuación característica resulta ser en este caso $r = 1$, lo cual **no nos permite utilizar el método** del ejercicio anterior. **PREGUNTA: ¿POR QUÉ?** En lugar de ello, construyamos una tabla:

n	0	1	2	3	4	5	…	k	…
F_n	1	4	9	16	25	36	…	$(k+1)^2$	…
$F_{n+1} - F_n$	3	5	7	9	11	13	…	$2k+3$	…

En ella observamos inmediatamente que $F_n = (n+1)^2$**, lo cual nos pide una demostración por inducción:**

a) **Comprobación** para n = 0: $F_0 = (0+1)^2 = 1^2 = 1$.

b) **Hipótesis de inducción**: Supongamos cierto el caso n=k, esto es: $F_k = (k+1)^2$.

c) **Conclusión**: $(k+2)^2 = k^2 + 4k + 4 = (k^2 + 2k + 1) + (2k+3) = F_k + (2k+3) = F_{k+1}$

NOTA: Observar que en la tabla de más arriba los elementos de la tercera fila son las diferencias de los que se hallan encima de ellos y forman una progresión aritmética de diferencia 2. Si repitiéramos el proceso de hallar las diferencias, tendríamos una cuarta fila toda de 2's, y la quinta sería toda de 0's. Por ello se dice a veces que la solución obtenida es <u>una progresión aritmética de segundo grado</u>.

4. Dado el alfabeto $\{a,b,c\}$ **,** se define F_n como el número de ristras, listas o palabras de n letras formadas con ese alfabeto que poseen exactamente dos letras b que, además, aparecen consecutivas. Hallar la relación de recurrencia correspondiente y resolverla.

Construyamos una tabla para hacernos una idea del problema:

n	0	1	2	3	4	5	…	k	…
F_n	0	0	1	4	12	32	…	$(k-1)\times 2^{k-2}$	…

Analicemos con algún detalle el caso k=5, por ejemplo. Una palabra de longitud 5 que satifsaga las condiciones del problema se compone de la pareja **bb** y de tres letra que pueden ser **a** ó **c.** El número de grupos formados con a's y c's es $VR_3^2 = 2^3 (= VR_{k-2}^2 = 2^{k-2} \text{ si } k=5) = 8$**.** Ahora bien**, elegida una de la 8 variaciones,** por ejemplo **aca**, el grupo **bb** puede ubicarse en **cuatro** posiciones diferentes: ***aca, a*ca, ac*a y aca***. Luego, por el **Principio Fundamental de la Combinatoria**: **Nº de palabras de 5 letras que satisfacen las condiciones del ejercicio** = (8 grupos de tres letras a, c) x (4 ubicaciones posibles) = **32**.

Por tanto, la tabla sugiere que $F_k = (k-1)\times 2^{k-2}$**. Para asegurarnos,** es necesaria una demostración por inducción: **¡¡EJERCICIO!!**

Tal como está, tenemos ya la recurrencia resuelta. Podemos encontrar una fórmula recurrente simplemente restando dos términos consecutivos de la misma:

$$F_n - F_{n-1} = (n-1)\times 2^{n-2} - (n-2)\times 2^{n-3} = 2^{n-3}(2(n-1)-(n-2)) = n2^{n-3}$$

Por tanto: $F_n = F_{n-1} + n2^{n-3}$**.**

5. En muchos procesos informáticos se utilizan algoritmos conocidos como "*de divide y vencerás*".

El más simple de todos origina la recurrencia siguiente: $F_n = 2F_{n/2} + n, \text{ con } F_1 = 0.$ **Resolverla. SUGERENCIA: Libro de Rosen, págs. 397 y siguientes.**

Tal como se advierte, la solución se puede leer en el texto de Rosen. Sin embargo, daremos una pista razonable: "*divide y vencerás*" quiere decir que para resolver un problema, se divide éste en varios subproblemas más sencillos y después se combinan las soluciones parciales obtenidas. El caso más simple corresponde a **dividir el problema en dos** (aunque puede hacerse en varios más, claro está), y después continuar dividiendo cada subproblema en otros dos, etc. etc.

Por tanto, en este caso **el índice n recorrerá las potencias de 2, esto es, 1, 2, 4, 8, 16…**, así que podemos construir una tabla para hacernos una idea:

$F_1 = 0$

$F_2 = 2F_1 + 2 = 2 \times 0 + 2 = 2$

$F_4 = 2F_2 + 4 = 2 \times 2 + 4 = 8$

$F_8 = 2F_4 + 8 = 2 \times 8 + 8 = 24$

$F_{16} = 2F_8 + 16 = 2 \times 24 + 16 = 64$

…

¡¡Terminen el proceso!!