TP 07 – Inducción Matemática

Para trabajar en la clase te proponemos los siguientes ejercicios de la Sección 4.1 de "Matemática Discreta" de Ralph Grimaldi: 1a,c,e) 2a) 6) 7) 9) 10) 11) 14) 17) 22a)

Ejercicios complementarios:

Probar por Inducción Matemática que:

1) $4^{2n}-1$ es un múltiplo de 15 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.
2) $1.5^1+2.5^2+3.5^3+\ldots+n.5^n=\dfrac{5+(4n-1).5^{n+1}}{16}$ para todo natural n.
3) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ para todo número natural $n \geq 2$.
4) $1+2.(2!)+3.(3!)+\ldots+n.(n!)=(n+1)!-1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$
5) 57 divide a $7^{n+2}+8^{2n+1}$, para todo n natural
6) $\sum_{i=2}^{n}(i-1).i=\dfrac{n.(n^2-1)}{3}$
7) n^2-1 es múltiplo de 8 siempre que n sea un entero positivo impar.
8) $n^2-7n+12$ es no negativo siempre que n sea un entero mayor que 3.
9) $4^n \geq 16n^2$ si n es entero positivo mayor o igual que 4.
10) $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(k+1)!}=1-\dfrac{1}{(n+1)!}$ para todo natural n.
11) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1).3^i=(n-1).3^{n+1}+3$ para todo natural n.

TP 08 – Recursión

Para trabajar en la clase te proponemos los siguientes ejercicios de la Sección 4.2 de "Matemática Discreta" de Ralph Grimaldi: 1) 13) 14) 15) 17) 18) 19)

Ejercicios complementarios:

1) Encontrar una definición recursiva para la sucesión de números que se generan con la expresión $S_n = (n^2 + n + 2)/2$, para $n \geq 1$.

2) Dar una definición recursiva del conjunto de
   a) Los enteros pares positivos
   b) Los enteros pares no negativos

3) Para $n \in \mathbb{Z}^+$, demostrar que $\sum_{i=0}^{2n}(-1)^{i+1}F_i=1-F_{2n-1}$

4) Probar por Inducción Matemática: $H_1+H_2+H_3+\ldots+H_n=(n+1).H_n-n, \quad n \in \mathbb{Z}^+$

TP 09 – Divisibilidad

Para trabajar en la clase te proponemos los siguientes ejercicios de la Sección 4.3 de “Matemática Discreta” de Ralph Grimaldi: 2) a)b)c) 4)5)7)8)9)10)12)13)18)

Ejercicios complementarios:

1) Hallar el cociente y el resto que resulta al dividir -789 por 37
2) Determinar cuántos enteros positivos menores o iguales a 187
   a) Son divisibles por 17
   b) No son divisibles por 17
   c) ¿Cuál es la respuesta si sacamos la palabra “positivos” del enunciado?
3) Demostrar las siguientes afirmaciones:
   a) Si **x** divide a **m, n** y **p**, entonces **x** divide a: **a.m+b.n+c.p**; con **a, b, c** $\in \mathbb{Z}$
   b) Si $a|b+a^2$ entonces $a|b$
4) Se sabe que un entero positivo k es el cuadrado de un cuadrado, y que 18|k. Hallar el menor valor para k
5) Escriba el número hexadecimal AF1 en base 10 y luego expresarlo en base 2, 4 y 8.
6) La representación decimal de tres números naturales es: 51966, 60318 y 64202. Cuando estos números se expresan en el sistema hexadecimal, algunos se representan por palabras con significado en castellano. ¿Cuáles son, y cuáles son esas palabras?

TP 10 – Máximo común divisor

Para trabajar en la clase te proponemos los siguientes ejercicios de la Sección 4.4 de “Matemática Discreta” de Ralph Grimaldi: 1)a)c)d) 2)3)5)6)11)13)14)

Ejercicios complementarios:

1) Probar que si mcd(a,b)=1 y a|bc, entonces a|c
2) ¿Es posible determinar las soluciones enteras de la ecuación diofántica: 6x + 50y = 17? Justifica la respuesta
3) Determinar si la ecuación diofántica 25x + 2y = 7 tiene solución. En caso afirmativo, hallar todas las soluciones.
4) Probar que si mcd(a, n)=1 y mcd(b, n)=1, entonces mcd(ab, n)=1
5) Sea d = mcd(a, b), donde a y b son enteros cualesquiera. Se sabe que existen enteros x, y tales que $ax+by=d$
   a. Calcular d, x, y si $a=59677$ y $b=57353$
   b. Calcular, para los valores de x, y, que resultan, mcd(x, y)
6) Hallar mcd(1001, 1331) y expresarlo como combinación lineal de estos números. Hallar un múltiplo de 1001 y un múltiplo de 1331 cuya diferencia sea 55.
7) Probar que si $d=mcd(a,b)$ entonces $mcd(\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1$
8) Hallar mcd(1820, 1369) y expresarlo como combinación lineal de estos números.
9) Sea $a=84,\ b=990$
   a. Hallar el mcd(a, b)
   b. Expresarlo como combinación lineal de ambos
   c. Sea $c\in\mathbb{Z}$ con la condición $10\le c\le 1000$; determinar el mínimo valor de c, para que la ecuación $84.x+990.y=c$, admita soluciones enteras
   d. Resolver dicho caso.
10) Hemos comprado libros de una oferta por 14 pesos el volumen y en otra oferta libros a 23 pesos el volumen,

pagando en total 210 pesos. Calcular cuántos libros se han comprado de cada oferta, si es posible.

11) Un hombre compró doce piezas de computadora (clavitos y pequeños cables) por 99 pesos. Si un clavito cuesta 30 centavos más que un pequeño cable, ¿tiene solución el problema?, si es así: ¿cuántos de cada uno compró?

12) Un distribuidor de equipos informáticos efectuó un pedido de entre 1100 y 1800 equipos a un fabricante que se los envió en contenedores completos con capacidad para 54 equipos cada uno. El distribuidor los repartió a los diferentes puntos de venta usando furgonetas con capacidad para 15 equipos y quedando 33 equipos sin repartir en el almacén. ¿Cuántos equipos pidió el distribuidor a la fábrica?

TP 11 – Teorema Fundamental de la Aritmética

Para trabajar en la clase te proponemos los siguientes ejercicios de la Sección 4.5 de “Matemática Discreta” de Ralph Grimaldi: 1)2)4)a)b)5)12)13)15)19)

Ejercicios complementarios:

1) Se sabe que $a,b \in \mathbb{Z}^+$, que $a.b = 2^8.3^9.5^4.7^{11}$, y también se sabe que $mcd(a,b) = 2^3.5.7^3$

   a. ¿Cuánto vale $mcm(a,b)$?

   b. ¿Quedan unívocamente determinados los números a y b?

2) Calcular el valor de d, para el cual el $mcd(3^7.5^4.7.11^6;\ 3^4.d.11^3.13^2) = 2835$

3) ¿Cuántos divisores positivos tiene el número 15435?

4) Si $a = 2.3^3.7^2.13^2$, y $b = 3^2.5.7.11$. Calcular cuántos divisores enteros positivos tienen los números: $c = mcd(a,b)$ y $d = mcm(a,b)$