Facultad de Ciencia y Tecnología – UADER – Sede Oro Verde
Licenciatura en Sistemas Informáticos - Matemática Discreta – Segundo Parcial – 29/06/2016

Ejercicio 1. (25 puntos)
Utilizar Inducción Matemática para probar que los números de Fibonaci verifican que:

$$F^2_0 + F^2_1 + F^2_2 + \ldots + F^2_n = F_n . F_{n+1} \quad \text{para los enteros } n \geq 0.$$

Recordar: La sucesión de Fibonaci se define como: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $n \geq 2$.

Respuesta:
Para n = 1: $F^2_0 + F^2_1 = 0 + 1 = 1$ $\quad F_n . F_{n+1} = F_1 . F_{1+1} = 1.1 = 1$ se cumple.

Para n = k (HI): $F^2_0 + F^2_1 + F^2_2 + \ldots + F^2_k = F_k . F_{k+1}$

Para n = k + 1: $F^2_0 + F^2_1 + F^2_2 + \ldots + F^2_k + F^2_{k+1} = F_{k+1} . F_{k+1+1}$ **¿?**

Demostración:

$$(F^2_0 + F^2_1 + F^2_2 + \ldots + F^2_k) + F^2_{k+1} = F_k . F_{k+1} + F^2_{k+1} = F_{k+1} . (F_k + F_{k+1}) = F_{k+1} . F_{k+2} \quad \surd$$

Ejercicio 2. (25 puntos)
a) Encontrar todas las soluciones enteras de la ecuación diofántica 525 x - 100 y = 50.
b) Si a |2n +3 y a|5n +1 para cualquier número entero n, probar que a es 1 ó 13.

Respuesta:
a) 525 x - 100 y = 50 o bien 525 x + 100 (- y) = 50

mcd(525, 100) = 25 = (1) 525 + (-5)100

50 = (2) 525 + (-10) 100 (Aquí hemos encontrado UNA solución de la ecuación Diofántica que se quiere resolver)

Para hallar TODAS las soluciones, debemos tener coeficientes coprimos, dividimos todo por 25:

2 = (2) 21 + (-10) 4 **+ 21.4.k – 21.4.k**

2 = 21 (2 – 4k) + 4 (-10 + 21k)

Ahora volvemos a multiplicar por 25:

50 = 525 (2 – 4k) + 100(-10 + 21k) con k entero.

b) Si a |2n +3 y a|5n +1 entonces a divide a cualquier combinación lineal entera, es decir

a | x(2n +3) + y(5n + 1) con x e y enteros. Como x e y son cualesquiera elegimos x = 5 e y = -2:

a | 5(2n +3) - 2(5n + 1) = 10n + 15 – 10n - 2 = 13, entonces a | 13.

Ejercicio 3. (25 puntos)
a) Hallar d = mcd(222, 471) y escribirlo como combinación lineal entera.

b) Se considera el conjunto B = {*a, b, c, d, e, f*}
b.1) ¿Cuántas relaciones binarias se pueden definir sobre B?
b.2) ¿Cuántas relaciones son simétricas y NO contienen al par (b, e)?
b.3) Encontrar al menos dos relaciones reflexivas definidas sobre B.
b.4) ¿Cuántas relaciones son reflexivas, antisimétricas y NO contienen al par (b, e)?

Respuesta:
a) d = mcd(222, 471) = 3, pues

471 = (2) 222 + 27
222 = (8) 27 + 6
27 = (4) 6 + 3

d = mcd(222, 471) = 3 = (33) 471 + (-70) 222

b.1) ¿Cuántas relaciones binarias se pueden definir sobre B? 2^{36}
b.2) ¿Cuántas relaciones son simétricas y NO contienen al par (b, e)? $2^{6} \cdot 2^{14} = 2^{20}$
b.3) Encontrar al menos dos relaciones reflexivas definidas sobre B.
R1 = {(a, a) (b, b) (c, c) (d, d) (e, e) (f, f)}
R2 = {(a, a) (b, b) (c, c) (d, d) (e, e) (f, f) (a, e)}

b.4) ¿Cuántas relaciones son reflexivas, antisimétricas y NO contienen al par (b, e)? 3^{14}

Ejercicio 4. (25 puntos)

a) Demostrar que para todo número natural n ≥ 0 se verifica que 4 divide a $5^n - 1$.

Para n = 1: 4 divide a $5^1 - 1 = 4$ se cumple.

Para n = k (HI): 4 divide a $5^k - 1$

Para n = k + 1: 4 divide a $5^{k+1} - 1$ **¿?**

Demostración:

$5^{k+1} - 1 = 5^k . 5 - 1 = 5^k (1 + 4) - 1 = 5^k + 4. 5^k – 1 = (5^k – 1) + 4. 5^k = 4m$ (es un múltiplo de cuatro), por lo tanto 4 divide a $5^{k+1} - 1$. √

b) Expresar el número 264 como suma de dos números enteros, s, t ∈ Z, de forma que s sea múltiplo de 20 y t sea múltiplo de 28.

264 = s + t = 20x + 28y (se procede igual que todas las ecuaciones diofánticas)