Facultad de Ciencia y Tecnología – UADER – Sede Oro Verde.

Licenciatura en Sistemas Informáticos - MATEMÁTICA DISCRETA – REPASO para Tercer Parcial

Ejercicio 1.
a) Calcular, si es posible, el inverso multiplicativo de 72 en Z_{113}.
c) Demostrar que existen (encontrarlos) generadores para el grupo Z_{14}.
c) Construir el grupo multiplicativo U_{14}, (construir la tabla). Identificar los inversos de cada elemento.
d) ¿Cuál es el último dígito de 27^{2010}?
e) Utilizar el Teorema Chino del Resto para encontrar un isomorfismo para el anillo Z_{12}.
f) ¿Cuántos inversos multiplicativos tiene el anillo Z_{222}?

Ejercicio 2.
Sea G el grupo de la matrices reales de orden 2x2 de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ donde $ac \neq 0$, con la operación multiplicación matricial. Sea S = $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{con } b \in R \right\}$.
a) ¿S es un subgrupo de G?
b) ¿Es G un grupo abeliano? Justificar su respuesta.
c) ¿El elemento $N^{-1}AN$ con $N \in S$ y $A \in G$, es un elemento de G o de S?

Ejercicio 3.
a) Encontrar la matriz G generadora del Código de 3 repeticiones (es decir la que se utiliza para codificar 01 en 010101), donde E: $Z_2^2 \to Z_2^6$.
b) ¿Cuál es la matriz de verificación de paridad H asociada en este caso?
c) Si $x \in Z_2^6$, ¿cuánto vale $|S(x,2)|$?

Ejercicio 4.
a) El primero de diciembre se depositaron 800 pesos en una cuenta que paga intereses mensualmente a razón de un 8% anual. Si se continúa realizando esto durante los próximos cuatro años, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta tras esos cuatro años?, ¿Cuánto habrá que esperar para duplicar el depósito inicial?
b) El primero de Noviembre se depositaron 1000 pesos en una cuenta que paga intereses mensualmente a razón de un 8% anual. Al principio de cada mes, se realizará un ingreso por valor de 150 pesos. Se continúa así, ¿cuál es el modelo recursivo para esta nueva situación?

Ejercicio 5.
a) Encontrar la solución general de la relación de recurrencia de segundo orden homogénea: $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$ para $n \geq 2$.
b) Encontrar la solución general de la relación de recurrencia de segundo orden no homogénea: $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = n$ para $n \geq 2$.
c) Encontrar la solución particular de la relación de recurrencia de segundo orden no homogénea: $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = n$ para $n \geq 2$, con $a_0 = 1$ y $a_1 = 3$.
d) Encontrar la solución particular de la relación de recurrencia de segundo orden no homogénea: $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 7^n$ para $n \geq 2$, con $a_0 = 1$ y $a_1 = 3$.

e) Para $n \in Z^+$ se sabe que $S_n = 1 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = (1/3)(n)(2n-1)(2n+1)$. Determinar el último dígito de S_{8642}.

Ejercicio 6.
a) Sea (m) = {mz, con $z \in Z$}. Demostrar que I = (m) es un ideal del anillo de los enteros.
b) Sea S = $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ con } a \text{ y } b \text{ reales} \right\}$. Probar que es un subanillo del anillo de las matrices 2x2 con componentes reales. ¿Es un subanillo conmutativo?

Ejercicio 7.
Para el grupo ($G = Z_8$, +):
a) Identificar el neutro y dar la lista de los inversos aditivos.
b) Dar la lista de los elementos del subgrupo generado por b = 2, es decir <2>.
c) Determinar el valor de γ, tal que: $\left|\dfrac{G}{<2>}\right| = \gamma$. Interpretar ese valor.

Ejercicio 8.
a) Dada la matriz H de Hamming de verificación de paridad dada por: $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, determinar todas las secuencias $x = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4]$ donde los $x_i \in \{0, 1\}$, tales que $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

b) Encontrar la distancia mínima, d, para el código C asociado a la matriz de verificación de paridad

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9.
Consideremos los dos grupos: G_1 = (ZxZ, "+: suma usual de pares ordenados", es decir (x, y) + (z, w) = (x+z, y+w)) y G_2 = (Z, +). Sea f: $G_1 \rightarrow G_2$, tal que: f(x, y) = x – y.

a) Probar que f es un homomorfismo de grupos y que f es sobreyectiva. ¿Es f inyectiva?
b) Hallar el conjunto f(x, y) = 1.

Ejercicio 10.
Sea G = { $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $con\ \ a \in Z_4$ }. a) Escribir todos los elementos de G. b) Construir la tabla para G como grupo multiplicativo. Identificar: Neutro e inverso multiplicativo de cada elemento.

Ejercicio 11.
Si x ≡ 3 (mod 17), y ≡ 6 ,(mod 17), se pide:

a) x + 20y módulo 17.
b) x^{-4} módulo 17.
c) 12x – 14 y módulo 17.