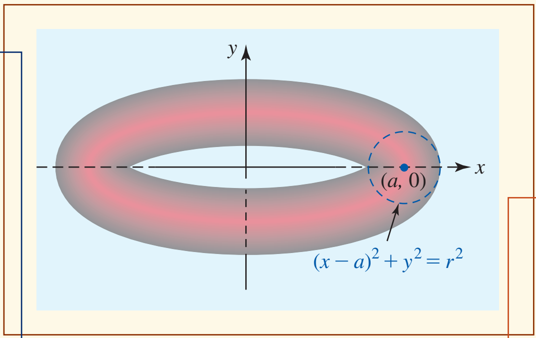
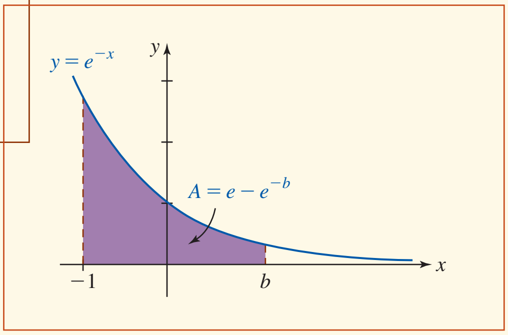
Capítulo 7

Técnicas de integración





En este capítulo A menudo uno se encuentra una integral que no puede clasificarse en una forma conocida como $\int u^n\,du$ o $\int e^u\,du$. Por ejemplo, no es posible evaluar $\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$ mediante la aplicación inmediata de cualquiera de las fórmulas enumeradas en las páginas 380-381. No obstante, al aplicar una **técnica de integración** algunas veces es posible reducir una integral como ésta a una o más de estas formas conocidas.

7.1 Integración: tres recursos

Introducción En este capítulo vamos a resumir el estudio de antiderivadas que empezó en el capítulo 5, en el que mostramos superficialmente cómo obtener antiderivadas de una función f. Recuerde que una integral definida

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

es una familia $F(x) + C$ de antiderivadas de la función f; es decir, F está relacionada con f por el hecho de que $F'(x) = f(x)$. De esta manera, a la derivada de una función específica (sen x, cos x, e^x, ln x, etc.) corresponde una integral indefinida análoga. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x \qquad \text{implica} \qquad \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C.$$

Tablas La TABLA 7.1.1 que se muestra a continuación es una versión ampliada de la tabla 5.2.1. Puesto que resume en notación integral indefinida todas las derivadas de la regla de la cadena de las funciones analizadas en los capítulos 1 y 3, referiremos las entradas de la tabla 7.1.1 a formas *familiares* o *básicas*. El objetivo de este capítulo consiste en evaluar integrales que, en su mayor parte, no caen en ninguna de las formas proporcionadas en la tabla.

La tabla 7.1.1 es sólo la punta de un *iceberg* más bien enorme; los manuales de referencia solían incluir cientos de fórmulas de integración. Aunque aquí no somos tan ambiciosos, en la sección *Fórmulas matemáticas* al final de este texto proporcionamos una tabla más amplia de fórmulas de integración. Como de costumbre, en ambas se usa notación diferencial. Si $u = g(x)$ denota una función diferenciable, entonces la diferencial de u es el producto $du = g'(x)\,dx$.

TABLA 7.1.1

Fórmulas de integración

Integrandos constantes

1. $\int du = u + C$	2. $\int k\,du = ku + C$

Integrandos que son potencias

3. $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	4. $\int u^{-1}\,du = \int \frac{1}{u}\,du = \ln\lvert u\rvert + C$

Integrandos exponenciales

5. $\int e^u\,du = e^u + C$	6. $\int a^u\,du = \frac{1}{\ln a}a^u + C$

Integrandos trigonométricos

7. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$	8. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$
9. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$	10. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
11. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$	12. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$
13. $\int \tan u\,du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$	14. $\int \cot u\,du = \ln\lvert\operatorname{sen} u\rvert + C$
15. $\int \sec u\,du = \ln\lvert\sec u + \tan u\rvert + C$	16. $\int \csc u\,du = \ln\lvert\csc u - \cot u\rvert + C$

(continúa)

Integrandos hiperbólicos

17. $\displaystyle\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$

18. $\displaystyle\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$

19. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \tanh u + C$

20. $\displaystyle\int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\coth u + C$

21. $\displaystyle\int \operatorname{sech} u \tanh u\, du = -\operatorname{sech} u + C$

22. $\displaystyle\int \operatorname{csch} u \coth u\, du = -\operatorname{csch} u + C$

Integrandos algebraicos

23. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}}\, du = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

24. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 + u^2}\, du = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$

25. $\displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}}\, du = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C$

26. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + u^2}}\, du = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C$

27. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}}\, du = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

28. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 - u^2}\, du = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u + a}{u - a}\right| + C$

29. $\displaystyle\int \frac{1}{u^2 - a^2}\, du = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + C$

30. $\displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{a^2 - u^2}}\, du = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

31. $\displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{a^2 + u^2}}\, du = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 + u^2}}{u}\right| + C$

Aunque estas fórmulas de integración se han designado como *familiares* o *básicas*, tal vez usted observe que puede no estar *familiarizado* con algunas de ellas, especialmente las fórmulas 17-22 y 26-31. Debido a que los profesores a veces prestan poca atención a las funciones hiperbólicas, se le solicita revisar (o, en caso de ser necesario, estudiar por primera vez) la sección 3.10. Las fórmulas 26-31, que semejan a las fórmulas 23-25, son las formas de integral indefinida de las fórmulas de diferenciación para las funciones hiperbólicas inversas combinadas con el hecho de que toda función hiperbólica inversa es un logaritmo natural. Vea la página 183.

Técnicas de integración En las siguientes secciones, las integrales que analizaremos no pueden clasificarse como una simple forma familiar como $\int u^n\, du$, $\int e^u\, du$ o $\int \operatorname{sen} u\, du$. A pesar de ello, la tabla 7.1.1 es importante; a medida que avance en este capítulo, necesariamente se le hará referencia a esa tabla. Una gran cantidad de integrales puede evaluarse al ejecutar operaciones específicas sobre el integrando —denominada **técnica de integración**— y reducir una integral dada a *una o más* de las formas familiares en la tabla. Por ejemplo, no es posible evaluar $\int \ln x\, dx$ al identificarla con cualquiera de las fórmulas de integración en la tabla 7.1.1. No obstante, en la sección 7.3 veremos que al aplicar una técnica de integración, $\int \ln x\, dx$ puede evaluarse en pocos segundos al usar la derivada de $\ln x$ junto con la fórmula 1 en la tabla.

Para efecto de repaso, se solicita al lector que trabaje los problemas en los ejercicios 7.1. Por medio de una sustitución u idónea, cada problema puede hacerse corresponder con una de las fórmulas en la tabla 7.1.1.

Pero ni una tabla, sin importar cuán grande sea, ni las técnicas de integración, sin importar lo poderosas que sean, constituye un remedio para todos los problemas de integración. Mientras algunas integrales, como $\int e^{x^2}\, dx$, desafían por completo a las tablas y técnicas de integración, otras sólo *parecen* desafiar tales recursos. Por ejemplo, la integral $\int e^{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} 2x\, dx$ no aparece en ninguna tabla pero *es posible* evaluarla por medio de una técnica de integración. El problema aquí es que no resulta evidente de forma inmediata *cuál* técnica puede aplicarse. Algunas veces se espera que el lector proporcione algunas ideas para replantear un integrando en una forma más receptiva para una técnica de integración.

En la sección 5.5 se indicó (vea las páginas 312-313) que una función continua f puede no tener una antiderivada que sea una función elemental.

Tecnología Unas palabras sobre tecnología: si usted no ha trabajado con un sistema algebraico computarizado (SAC) como *Mathematica*, *Maple*, *Derive* o *Axiom*, debe corregir esta deficiencia lo más pronto posible. Un sistema algebraico computarizado es un programa extremadamente sofisticado diseñado para realizar una amplia gama de operaciones matemáticas simbólicas como álgebra normal, álgebra matricial, aritmética con números complejos, resolver ecuaciones polinomiales, aproximar raíces de ecuaciones, diferenciación, integración, graficado de ecuaciones en dos o tres dimensiones, resolver ecuaciones diferenciales, manipular funciones especiales ya contempladas en el SAC, etcétera. Si usted piensa convertirse en un estudiante serio de matemáticas, ciencias o ingeniería, entonces una ayuda ideal para sus clases teóricas y prácticas (así como para su carrera futura) sería contar con una computadora portátil equipada con un programa como *Mathematica*, *Maple* o MATLAB. También verifique en los laboratorios de matemáticas de su departamento de matemáticas o física; las computadoras que ahí encuentre indudablemente cuentan con uno o más de estos programas.

A medida que conozca y se sienta cómodo al usar un SAC, tal vez se interese en investigar sitios en la web como:

http://scienceworld.wolfram.com
http://mathworld.wolfram.com

Wolfram Research es el desarrollador del sistema computacional de álgebra *Mathematica*.

Ejercicios 7.1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-21.

Fundamentos

En los problemas 1-32, use una sustitución u y la tabla 7.1.1 para evaluar la integral dada.

1. $\int 5^{-5x}\,dx$

2. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}\,dx$

3. $\int \dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}\,dx$

4. $\int \dfrac{\cos e^{-x}}{e^{x}}\,dx$

5. $\int \dfrac{x}{\sqrt{25-4x^2}}\,dx$

6. $\int \dfrac{1}{\sqrt{25-4x^2}}\,dx$

7. $\int \dfrac{1}{x\sqrt{4x^2-25}}\,dx$

8. $\int \dfrac{1}{\sqrt{25+4x^2}}\,dx$

9. $\int \dfrac{1}{25+4x^2}\,dx$

10. $\int \dfrac{x}{25+4x^2}\,dx$

11. $\int \dfrac{1}{4x^2-25}\,dx$

12. $\int \dfrac{1}{x\sqrt{4x^2+25}}\,dx$

13. $\int \cot 10x\,dx$

14. $\int x\csc^2 x^2\,dx$

15. $\int \dfrac{6}{(3-5t)^{2.2}}\,dx$

16. $\int x^2\sqrt{(1-x^3)^5}\,dx$

17. $\int \sec 3x\,dx$

18. $\int 2\csc 2x\,dx$

19. $\int \dfrac{\operatorname{sen}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

20. $\int \dfrac{1}{(1+x^2)\tan^{-1}x}\,dx$

21. $\int \dfrac{\operatorname{sen}x}{1+\cos^2 x}\,dx$

22. $\int \dfrac{\cos(\ln 9x)}{x}\,dx$

23. $\int \dfrac{x^3}{\cosh^2 x^4}\,dx$

24. $\int \tanh x\,dx$

25. $\int \tan 2x\sec 2x\,dx$

25. $\int \operatorname{sen}x\operatorname{sen}(\cos x)\,dx$

27. $\int \operatorname{sen}x\csc(\cos x)\cot(\cos x)\,dx$

28. $\int \cos x\csc^2(\operatorname{sen}x)\,dx$

29. $\int (1+\tan x)^2\sec^2 x\,dx$

30. $\int \dfrac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

31. $\int \dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx$

32. $\int \dfrac{e^{x}}{1+e^{2x}}\,dx$

7.2 Integración por sustitución

Introducción En esta sección se ampliará la idea de **sustitución *u*** presentada en la sección 5.2, donde esta sustitución se usó básicamente como ayuda para identificar que una integral era una de las fórmulas de integración familiares como $\int u^n\,du$, $\int du/u$, $\int e^u\,du$, etcétera. Por ejemplo, con la sustitución $u=\ln x$ y $du=(1/x)\,dx$ reconocemos que

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx \qquad \text{es lo mismo que} \qquad \int u^2\,du.$$

Usted debe comprobar que $\int x^2\sqrt{2x+1}\,dx$ no se ajusta a *ninguna* de las 31 fórmulas de integración de la tabla 7.1.1. No obstante, con ayuda de una sustitución es posible reducir la integral a *varios* casos de una de las fórmulas en la tabla 7.1.1.

El primer ejemplo ilustra la idea general.

EJEMPLO 1 Uso de una sustitución u

Evalúe $\displaystyle\int x^2\sqrt{2x+1}\,dx$.

Solución Si se hace $u = 2x + 1$, entonces la integral dada puede replantearse en términos de la variable u. Para ello, observe que

$$x = \frac{1}{2}(u-1), \qquad dx = \frac{1}{2}\,du,$$

$$x^2 = \frac{1}{4}(u-1)^2 = \frac{1}{4}(u^2-2u+1) \text{ y } \sqrt{2x+1} = u^{1/2}.$$

Al sustituir estas expresiones en la integral dada se obtiene:

$$\int x^2\sqrt{2x+1}\,dx = \int \frac{1}{4}(u^2-2u+1)u^{1/2}\frac{1}{2}\,du,$$

es decir,

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{2x+1}\,dx &= \frac{1}{8}\int (u^2-2u+1)u^{1/2}\,du\\ &= \frac{1}{8}\int (u^{5/2}-2u^{3/2}+u^{1/2})\,du && \leftarrow \text{tres aplicaciones de la fórmula 3 en la tabla 7.1.1}\\ &= \frac{1}{8}\int\left(\frac{2}{7}u^{7/2}-\frac{4}{5}u^{5/2}+\frac{2}{3}u^{3/2}\right)+C && \leftarrow \text{ahora se vuelve a sustituir para } u\\ &= \frac{1}{28}(2x+1)^{7/2}-\frac{1}{10}(2x+1)^{5/2}+\frac{1}{12}(2x+1)^{3/2}+C.\end{aligned}$$

Usted debe comprobar que la derivada de la última línea en realidad es $x^2\sqrt{2x+1}$. ■

La elección de cuál sustitución usar, en caso de haber alguna, no siempre es evidente. En general, si el integrando contiene una potencia de una función, entonces una buena idea consiste en intentar que u sea esa función *o* potencia de la función en sí. En el ejemplo 1, la sustitución alterna $u = \sqrt{2x+1}$ o $u^2 = 2x + 1$ lleva a la integral diferente $\frac{1}{4}\int(1-u^2)^2u^2\,du$. La última puede evaluarse al desarrollar el integrando e integrar cada término.

EJEMPLO 2 Uso de una sustitución u

Evalúe $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

Solución Sea $u = \sqrt{x}$ de modo que $x = u^2$ y $dx = 2u\,du$. Entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx &= \int \frac{1}{1+u}2u\,du\\ &= \int \frac{2u}{1+u}\,du && \leftarrow \text{ahora se usa división larga}\\ &= \int\left(2-\frac{2}{1+u}\right)du && \leftarrow \text{fórmulas 2 y 4 en tabla 7.1.1}\\ &= 2u - 2\ln|1+u| + C && \leftarrow \text{se vuelve a sustituir para } u\\ &= 2\sqrt{x} - 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C.\end{aligned}$$

■

Integrandos que contienen una expresión cuadrática Si un integrando contiene una expresión cuadrática $ax^2 + bx + c$, completar el cuadrado puede producir una integral que sea posible expresar en términos de una función trigonométrica inversa o una función hiperbólica inversa. Por supuesto, también es posible que integrales más complicadas produzcan otras funciones.

EJEMPLO 3 Completar el cuadrado

Evalúe $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+6x+18}\,dx$.

Solución Después de completar el cuadrado, la integral dada puede escribirse como

$$\int \frac{x+4}{x^2+6x+18}\,dx = \int \frac{x+4}{(x+3)^2+9}\,dx.$$

Ahora, si $u = x + 3$, entonces $x = u - 3$ y $dx = du$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+4}{x^2+6x+18}\,dx &= \int \frac{u+1}{u^2+9}\,du \leftarrow \text{división término a término}\\
&= \int \frac{u}{u^2+9}\,du + \int \frac{1}{u^2+9}\,du\\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+9}\,du + \int \frac{1}{u^2+9}\,du \quad \leftarrow \begin{array}{l}\text{fórmulas 4 y 24}\\ \text{en la tabla 7.1.1}\end{array}\\
&= \frac{1}{2}\ln(u^2+9) + \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{u}{3} + C\\
&= \frac{1}{2}\ln[(x+3)^2+9] + \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x+3}{3} + C\\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+6x+18) + \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x+3}{3} + C.
\end{aligned}$$

■

El siguiente ejemplo ilustra una sustitución algebraica en una integral definida.

EJEMPLO 4 Una integral definida

Evalúe $\displaystyle\int_0^2 \frac{6x+1}{\sqrt[3]{3x+2}}\,dx$.

Solución Si $u = 3x + 2$, entonces

$$x = \frac{1}{3}(u-2), \qquad dx = \frac{1}{3}\,du,$$

$$6x + 1 = 2(u-2) + 1 = 2u - 3 \text{ y } \sqrt[3]{3x+2} = u^{1/3}.$$

Puesto que se cambiará la variable de integración, es necesario convertir los límites de integración x en límites de integración u. Observe que cuando $x = 0$, $u = 2$ y cuando $x = 2$, $u = 8$. En consecuencia, la integral original se vuelve

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{6x+1}{\sqrt[3]{3x+2}}\,dx &= \int_2^8 \frac{2u-3}{u^{1/3}}\,\frac{1}{3}\,du \leftarrow \text{de nuevo división término a término}\\
&= \int_2^8 \left(\frac{2}{3}u^{2/3} - u^{-1/3}\right) du\\
&= \left(\frac{2}{5}u^{5/3} - \frac{3}{2}u^{2/3}\right)\Big]_2^8\\
&= \left(\frac{2}{5}\cdot 2^5 - \frac{3}{2}\cdot 2^2\right) - \left(\frac{2}{5}\cdot 2^{5/3} - \frac{3}{2}\cdot 2^{2/3}\right)\\
&= \frac{34}{5} - \frac{2}{5}\cdot 2^{5/3} + \frac{3}{2}\cdot 2^{2/3} \approx 7.9112.
\end{aligned}$$

■

Se pide que el lector vuelva a trabajar el ejemplo 4. La segunda vez use $u = \sqrt[3]{3x+2}$.

$\int$ NOTAS DESDE EL AULA

i) Cuando trabaje los ejercicios presentados en este capítulo, no se preocupe demasiado si no siempre obtiene la misma respuesta que se proporciona en el texto. Al aplicar técnicas diferentes al mismo problema es posible obtener respuestas que parecen diferentes. Recuerde que dos antiderivadas de la misma función pueden diferir cuando mucho por una constante. Intente conciliar los conflictos que se presenten.

ii) También podría ser de utilidad en este punto recordar que la integración del cociente de dos funciones polinomiales, $p(x)/q(x)$, suele empezar con división larga si el grado de $p(x)$ es mayor que o igual al grado de $q(x)$. Vea el ejemplo 2.

iii) Busque problemas que sea posible resolver con métodos previos.

Ejercicios 7.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-22.

Fundamentos

En los problemas 1-26, use una sustitución para evaluar la integral dada.

1. $\displaystyle\int x(x+1)^3\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{x^2-3}{(x+1)^3}\,dx$

3. $\displaystyle\int (2x+1)\sqrt{x-5}\,dx$

4. $\displaystyle\int (x^2-1)\sqrt{2x+1}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x+2}}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{x+3}{(3x-4)^{3/2}}\,dx$

8. $\displaystyle\int (x^2+x)\sqrt[3]{x+7}\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{t}+1}\,dt$

11. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{t}-3}{\sqrt{t}+1}\,dt$

12. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{r}+3}{r+3}\,dr$

13. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt[5]{x^2+4}}\,dx$

15. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)^4}\,dx$

16. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x+7)^2}\,dx$

17. $\displaystyle\int \sqrt{e^x-1}\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$

19. $\displaystyle\int \sqrt{1-\sqrt{v}}\,dv$

20. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{1-\sqrt{w}}}\,dw$

21. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$

22. $\displaystyle\int \sqrt{t}\sqrt{1+t\sqrt{t}}\,dt$

23. $\displaystyle\int \frac{2x+7}{x^2+2x+5}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{6x-1}{4x^2+4x+10}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{2x+5}{\sqrt{16-6x-x^2}}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{4x-3}{\sqrt{11+10x-x^2}}\,dx$

En los problemas 27 y 28, use la sustitución $u = x^{1/6}$ para evaluar la integral.

27. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$

En los problemas 29-40, use una sustitución para evaluar la integral definida dada.

29. $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{5x+4}\,dx$

30. $\displaystyle\int_{-1}^0 x\sqrt[3]{x+1}\,dx$

31. $\displaystyle\int_1^{16} \frac{1}{10+\sqrt{x}}\,dx$

32. $\displaystyle\int_4^9 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\,dx$

33. $\displaystyle\int_2^9 \frac{5x-6}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$

34. $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^0 \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

35. $\displaystyle\int_0^1 \left(1-\sqrt{x}\right)^{50}dx$

36. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}\,dx$

37. $\displaystyle\int_1^8 \frac{1}{x^{1/3}+x^{2/3}}\,dx$

38. $\displaystyle\int_1^{64} \frac{x^{1/3}}{x^{2/3}+2}\,dx$

39. $\displaystyle\int_0^1 x^2(1-x)^5\,dx$

40. $\displaystyle\int_0^6 \frac{2x+5}{\sqrt{2x+4}}\,dx$

En los problemas 41 y 42, use una sustitución para establecer el resultado dado. Suponga $x > 0$.

41. $\displaystyle\int_1^{x^2} \frac{1}{t}\,dt = 2\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

42. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

Repaso de aplicaciones

43. Encuentre el área bajo la gráfica de $y = \dfrac{1}{x^{1/3}+1}$ sobre el intervalo $[0, 1]$.

44. Encuentre el área acotada por la gráfica de $y = x^3\sqrt{x+1}$ y el eje x sobre el intervalo $[-1, 1]$.

45. Encuentre el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región acotada por las gráficas de $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$, $x = 0$, $x = 4$ y $y = 0$ alrededor del eje y.

46. Encuentre el volumen del sólido de revolución que se forma al girar alrededor del eje x la región en el problema 45.

47. Encuentre la longitud de la gráfica de $y = \frac{4}{5}x^{5/4}$ en el intervalo $[0, 9]$.

48. La **ecuación diferencial de Bertalanffy** es un modelo matemático para el crecimiento de un organismo donde se supone que el metabolismo constructivo (anabolismo) del organismo procede en razón proporcional al área superficial, mientras el metabolismo destructivo (catabolismo) procede en razón proporcional al volumen. Si también se supone que el área superficial es proporcional a la potencia dos tercios del volumen y que el peso w del organismo es proporcional al volumen, entonces es posible escribir la ecuación de Bertalanffy como

$$\frac{dw}{dt} = Aw^{2/3} - Bw,$$

donde A y B son parámetros positivos. A partir de esta ecuación puede concluirse que el tiempo necesario para que tal organismo aumente de peso desde w_1 hasta w_2 está dado por la integral definida

$$T = \int_{w_1}^{w_2} \frac{1}{Aw^{2/3} - Bw}\,dw.$$

Evalúe esta integral. Encuentre un límite superior sobre cuánto puede crecer el organismo.

7.3 Integración por partes

Introducción En esta sección desarrollaremos una fórmula importante que puede usarse a menudo para integrar el producto de dos funciones. Para aplicar la fórmula es necesario identificar una de las funciones en el producto como una diferencial. Recuerde que si $v = g(x)$, entonces su diferencial es la función $dv = g'(x)\,dx$.

Integración de productos Puesto que deseamos integrar un producto, parece razonable empezar con la regla de diferenciación del producto. Si $u = f(x)$ y $v = g(x)$ son funciones diferenciables, entonces la derivada de $f(x)g(x)$ es

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \tag{1}$$

A su vez, la integración de ambos miembros de (1),

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\,dx = \int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx$$

o

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx,$$

produce la fórmula

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx. \tag{2}$$

La fórmula (2) suele escribirse en términos de las diferenciales $du = f'(x)\,dx$ y $dv = g'(x)\,dx$:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{3}$$

El procedimiento definido por la fórmula (3) se denomina **integración por partes**. La idea esencial detrás de (3) es evaluar la integral $\int u\,dv$ mediante la evaluación de otra, que se espera sea más simple, integral $\int v\,du$.

Directrices para la integración por partes

- El **primer paso** en este proceso de integración por partes consta en la elección e integración de dv en la integral dada. Como cuestión práctica, la función dv *suele ser* el factor más complicado en el producto que puede integrarse usando una de las fórmulas básicas en la tabla 7.1.1.
- El **segundo paso** es la diferenciación del factor restante u en la integral dada. Luego se forma

se diferencia

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

se integra

- El **tercer paso**, por supuesto, es la evaluación de $\int v\,du$.

Algunas veces los problemas de integración pueden efectuarse aplicando varios métodos. En el primer ejemplo, la integral puede evaluarse por medio de una sustitución algebraica (sección 7.2) así como por integración por partes.

EJEMPLO 1 Uso de (3)

Evalúe $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

Solución Primero, la integral se escribe como

$$\int x(x+1)^{-1/2}\,dx.$$

A partir de esta última forma vemos que para la función dv hay varias opciones. De las posibles opciones para dv,

$$dv = (x+1)^{-1/2}\,dx, \quad dv = x\,dx \quad \text{o} \quad dv = dx,$$

escogemos

$$dv = (x+1)^{-1/2}\,dx \quad \text{y} \quad u = x.$$

Luego, por integración de la fórmula 3 en la tabla 7.1.1 encontramos

$$v = \int (x+1)^{-1/2}\,dx = 2(x+1)^{1/2}.$$

Cuando se integra dv no se requiere ninguna constante de integración.

Al sustituir $v = 2(x+1)^{1/2}$ y $du = dx$ en (3) se obtiene

$$\begin{aligned}\int \overbrace{x}^{u}\overbrace{(x+1)^{-1/2}\,dx}^{dv} &= \overbrace{x}^{u}\cdot\overbrace{2(x+1)^{1/2}}^{v} - \int \overbrace{2(x+1)^{1/2}}^{v}\,\overbrace{dx}^{du}\\ &= 2x(x+1)^{1/2} - 2\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C \leftarrow \text{se usó la fórmula 3 en la tabla 7.1.1}\\ &= 2x(x+1)^{1/2} - \frac{4}{3}(x+1)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

Comprobación por diferenciación Para verificar el resultado precedente se usa la regla del producto:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(2x(x+1)^{1/2} - \frac{4}{3}(x+1)^{3/2} + C\right) &= 2x\cdot\frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} + 2(x+1)^{1/2} - \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}(x+1)^{1/2}\\ &= x(x+1)^{-1/2} + 2(x+1)^{1/2} - 2(x+1)^{1/2}\\ &= \frac{x}{\sqrt{x+1}}.\end{aligned}$$

■

La clave para que la integración por partes funcione consiste en hacer la elección "correcta" de la función dv. En las directrices antes del ejemplo 1 se afirmó que dv suele ser el factor más complicado en el producto que puede integrarse de inmediato por medio de una fórmula conocida de antemano. Sin embargo, esto no puede tomarse como una regla estricta. Considerando que la opción "correcta" para dv que se ha hecho a menudo se basa en retrospectiva pragmática, ¿la segunda integral $\int v\,du$ es menos complicada que la primera integral $\int u\,dv$? ¿Es posible evaluar esta segunda integral? Para ver qué ocurre cuando se hace una elección "mala", de nuevo se considerará el ejemplo 1, aunque esta vez se escoge

$$dv = x\,dx \qquad \text{y} \qquad u = (x+1)^{-1/2}$$

de modo que

$$v = \frac{1}{2}x^2 \qquad \text{y} \qquad du = -\frac{1}{2}(x+1)^{-3/2}\,dx.$$

En este caso, al aplicar (3) se obtiene

$$\int x(x+1)^{-1/2}\,dx = \frac{1}{2}x^2(x+1)^{-1/2} + \frac{1}{4}\int x^2(x+1)^{-3/2}\,dx.$$

Aquí la dificultad es evidente: la segunda integral $\int v\, du$ es más complicada que la original $\int u\, dv$. La selección alterna $dv = dx$ también conduce a un callejón sin salida.

EJEMPLO 2 Uso de (3)

Evalúe $\displaystyle\int x^3 \ln x\, dx$.

Solución De nuevo, hay varias opciones posibles para la función dv:

$$dv = \ln x\, dx, \quad dv = x^3\, dx \quad \text{o} \quad dv = dx. \tag{4}$$

Aunque la elección $dv = \ln x\, dx$ es indudablemente el factor más complicado en el producto $x^3 \ln x\, dx$, esta opción se rechaza porque no coincide con ninguna fórmula en la tabla 7.1.1. De las dos funciones restantes en (4), la segunda es la más "complicada", de modo que se escoge

$$dv = x^3\, dx \qquad \text{y} \qquad u = \ln x,$$

entonces

$$v = \frac{1}{4}x^4 \qquad \text{y} \qquad du = \frac{1}{x}\, dx.$$

Así, por (3),

$$\begin{aligned}\int x^3 \ln x\, dx &= \overbrace{\ln x}^{u} \cdot \overbrace{\frac{1}{4}x^4}^{v} - \int \overbrace{\frac{1}{4}x^4}^{v} \cdot \overbrace{\frac{1}{x}\, dx}^{du} && \leftarrow \text{se simplifica el integrando}\\ &= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^3\, dx && \leftarrow \text{se integra } x^3\\ &= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3 Uso de (3)

Evalúe $\displaystyle\int x \tan^{-1} x\, dx$.

Solución La elección $dv = \tan^{-1} x\, dx$ no es prudente, puesto que no es posible integrar de inmediato esta función con base en un resultado previo conocido. Así, escogemos

$$dv = x\, dx \qquad \text{y} \qquad u = \tan^{-1} x$$

y se encuentra

$$v = \frac{1}{2}x^2 \qquad \text{y} \qquad du = \frac{1}{1 + x^2}\, dx.$$

En consecuencia, con (3) se obtiene

$$\int \overbrace{(\tan^{-1} x)}^{u}\, \overbrace{(x\, dx)}^{dv} = \overbrace{(\tan^{-1} x)}^{u}\, \overbrace{\frac{1}{2}x^2}^{v} - \int \overbrace{\frac{1}{2}x^2}^{v} \cdot \overbrace{\frac{1}{1 + x^2}\, dx}^{du}. \quad \leftarrow \text{se simplifica el integrando}$$

Para evaluar la integral indefinida $\int x^2\, dx/(1 + x^2)$, usamos la división larga (vea el ejemplo 7 de la sección 5.1). Por tanto,

$$\begin{aligned}\int x \tan^{-1} x\, dx &= \frac{1}{2}x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right) dx\\ &= \frac{1}{2}x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\tan^{-1} x + C.\end{aligned}$$

■

Integraciones sucesivas Un problema puede requerir integración por partes varias veces consecutivas. Como regla, integrales del tipo

$$\int p(x) \operatorname{sen} kx\, dx, \qquad \int p(x) \cos kx\, dx \qquad \text{y} \qquad \int p(x) e^{kx}\, dx, \tag{5}$$

donde $p(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$ y k es una constante, requieren integración por partes n veces. Además, una integral como

$$\int x^k(\ln x)^n\, dx, \tag{6}$$

donde de nuevo n es un entero positivo, también requiere n aplicaciones de (3). La integral en el ejemplo 2 es de la forma (6) con $k = 3$ y $n = 1$.

EJEMPLO 4 Uso de (3) dos veces consecutivas

Evalúe $\displaystyle\int x^2 \cos x\, dx$.

Solución La integral $\int x^2 \cos x\, dx$ es la segunda de tres formas en (5) con $p(x) = x^2$ y $n = 2$. En consecuencia, (3) se aplica dos veces consecutivas. En la primera integración se usa

$$dv = \cos x\, dx \qquad \text{y} \qquad u = x^2$$

de modo que

$$v = \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad du = 2x\, dx.$$

Por tanto, (3) se vuelve

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \operatorname{sen} x - 2\int \overset{\substack{\text{se requiere integración por partes}\\ \downarrow}}{x \operatorname{sen} x\, dx}. \tag{7}$$

La segunda integral en (7) es la primera forma en (5) y sólo requiere una integración por partes, puesto que el grado del polinomio $p(x) = x$ es $n = 1$. En esta segunda integral se escoge $dv = \operatorname{sen} x\, dx$ y $u = x$:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cos x\, dx &= x^2 \operatorname{sen} x - 2\left[x(-\cos x) - \int (-\cos x)\, dx\right] \\
&= x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2\int \cos x\, dx \;\leftarrow \text{fórmula 8 en la tabla 7.1.1} \\
&= x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C. \qquad (8) \;\blacksquare
\end{aligned}$$

El resultado en (8) puede obtenerse con un atajo sistemático. Si consideramos la integral en el ejemplo 4 como $\int f(x)g'(x)\, dx$ donde $f(x) = x^2$ y $g'(x) = \cos x$, entonces podemos mostrar las derivadas y la integral en un arreglo:

$f(x)$ y sus derivadas		$g'(x)$ y sus integrales
x^2	$+$	$\cos x$
$2x$	$-$	$\operatorname{sen} x$
2	$+$	$-\cos x$
0		$-\operatorname{sen} x$

Luego formamos los productos de las funciones unidas por las flechas y sumamos o restamos un producto según el signo algebraico indicado en azul:

$$\int x^2 \cos x\, dx = +x^2(\operatorname{sen} x) - 2x(-\cos x) + 2(-\operatorname{sen} x) + C.$$

El último cero en la columna de las derivadas indica que ya no es necesario integrar más $g'(x)$; los productos de ese punto son cero.

Esta técnica de integración sucesiva por partes funciona para todas las integrales del tipo mostrado en (5) y se denomina **integración tabular**. Para una integral como $\int x^4 e^{-2x}\, dx$ podríamos escoger $f(x) = x^4$ y $g'(x) = e^{-2x}$. Usted debe comprobar que con integración tabular se obtiene

$$\begin{aligned}
\int x^4 e^{-2x}\, dx &= +x^4\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - 4x^3\left(\frac{1}{4}e^{-2x}\right) + 12x^2\left(-\frac{1}{8}e^{-2x}\right) - 24x\left(\frac{1}{16}e^{-2x}\right) + 24\left(-\frac{1}{32}e^{-2x}\right) + C \\
&= -\frac{1}{2}x^4 e^{-2x} - x^3 e^{-2x} - \frac{3}{2}x^2 e^{-2x} - \frac{3}{2}x e^{-2x} - \frac{3}{4}e^{-2x} + C.
\end{aligned}$$

Despeje de integrales Para ciertas integrales, una o más aplicaciones de la integración por partes puede resultar en una situación en que la integral original aparece en el miembro derecho. En este caso el problema de evaluar la integral se completa al *despejar* la integral original. El siguiente ejemplo ilustra la técnica.

EJEMPLO 5 Despeje de la integral original

Evalúe $\int \sec^3 x\, dx$.

Solución Al examinar la integral no se observa ninguna elección evidente para dv. No obstante, al escribir el integrando como el producto $\sec^3 x = \sec x \cdot \sec^2 x$, identificamos

$$dv = \sec^2 x\, dx \quad \text{y} \quad u = \sec x$$

de modo que

$$v = \tan x \quad \text{y} \quad du = \sec x \tan x\, dx.$$

Por (3) se concluye que

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\, dx &= \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x\, dx \\ &= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1)\sec x\, dx \quad \leftarrow \text{identidad trigonométrica para } \tan^2 x \\ &= \sec x \tan x + \int \sec x\, dx - \int \sec^3 x\, dx \\ &= \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x\, dx.\end{aligned}$$

Vea (18) en la sección 5.2 para la evaluación de la integral $\int \sec x\, dx$. También, vea la fórmula 15 en la tabla 7.1.1.

En la última ecuación despejamos $\int \sec^3 x\, dx$ y sumamos una constante de integración:

$$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|$$

y así

$$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C. \quad ■$$

Integrales del tipo

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx \quad \text{y} \quad \int e^{ax} \cos bx\, dx \tag{9}$$

son importantes en ciertos aspectos de matemáticas aplicadas. Estas integrales requieren dos aplicaciones de la integración por partes antes de recuperar la integral original en el miembro derecho.

EJEMPLO 6 Despeje de la integral original

Evalúe $\int e^{2x} \cos 3x\, dx$.

Solución Si se escoge

$$dv = e^{2x}\, dx \quad \text{y} \quad u = \cos 3x,$$

entonces

$$v = \frac{1}{2}e^{2x} \quad \text{y} \quad du = -3 \operatorname{sen} 3x\, dx.$$

Luego, la fórmula (3) de integración por partes proporciona

$$\int e^{2x} \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x} \operatorname{sen} 3x\, dx.$$

A la integral destacada en color le aplicamos de nuevo integración por partes con $dv = e^{2x}\,dx$ y $u = \text{sen}\ 3x$:

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\,\text{sen}\ 3x - \int \frac{1}{2}e^{2x}(3\cos 3x)\,dx\right]$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\,\text{sen}\ 3x - \frac{9}{4}\int e^{2x}\cos 3x\,dx.$$

Al despejar $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$ de la última ecuación se obtiene

$$\frac{13}{4}\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\,\text{sen}\ 3x.$$

Después de dividir entre $\frac{13}{4}$ y fijar una constante de integración obtenemos

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{2}{13}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{13}e^{2x}\,\text{sen}\ 3x + C.$$ ■

Al evaluar las integrales $\int e^{ax}\,\text{sen}\ bx\,dx$ y $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ no importa cuáles funciones se escojan como dv y u. En el ejemplo 6 escogimos $dv = e^{2x}\,dx$ y $u = \cos 3x$; se le solicita volver a trabajar este ejemplo usando $dv = \cos 3x\,dx$ y $u = e^{2x}$.

Integrales definidas Una integral definida puede evaluarse usando integración por partes como sigue:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx.$$

Por conveniencia, la ecuación anterior suele escribirse como

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big]_a^b - \int_a^b v\,du, \tag{10}$$

donde se entiende que los *límites de integración son valores de x* y las integraciones en las integrales se llevan a cabo con respecto a la variable x.

EJEMPLO 7 Área bajo la gráfica

Encuentre el área bajo la gráfica de $f(x) = \ln x$ sobre el intervalo $[1, e]$.

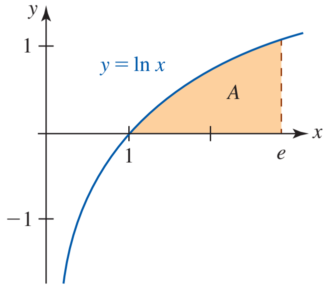


FIGURA 7.3.1 Área bajo la gráfica en el ejemplo 7

Solución Por la FIGURA 7.3.1 vemos que $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo. Por tanto, el área A está dada por la integral definida

$$A = \int_1^e \ln x\,dx.$$

Al escoger $\quad dv = dx \quad$ y $\quad u = \ln x,$

entonces $\quad v = x \quad$ y $\quad du = \frac{1}{x}\,dx.$

Por (10) tenemos

$$A = x\ln x\Big]_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= x\ln x\Big]_1^e - \int_1^e dx$$
$$= x\ln x\Big]_1^e - x\Big]_1^e$$
$$= e\ln e - \ln 1 - e + 1 = 1.$$

Aquí usamos $\ln e = 1$ y $\ln 1 = 0$. ■

(a, 0), es jalada por una cuerda de longitud constante a que mantiene durante todo el movimiento.

a) Demuestre que la ecuación diferencial de la tractriz es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

b) Resuelva la ecuación en el inciso *a*). Suponga que el punto inicial sobre el eje x es (10, 0) y que la longitud de la cuerda es $a = 10$ pies.

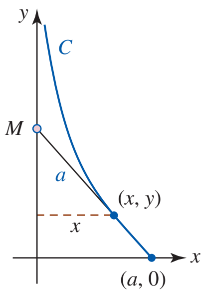


FIGURA 7.5.8 Tractriz en el problema 57

58. La región acotada por la gráfica de $(x - a)^2 + y^2 = r^2$, $r < a$, gira alrededor del eje y. Encuentre el volumen del sólido de revolución o **toroide**. Vea la FIGURA 7.5.9.

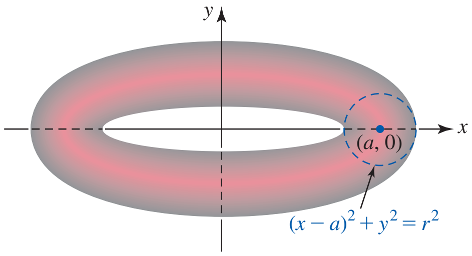


FIGURA 7.5.9 Toroide en el problema 58

59. Encuentre la fuerza del fluido sobre un lado de la placa vertical mostrada en la FIGURA 7.5.10. Suponga que la placa está sumergida en agua y que las dimensiones están en pies.

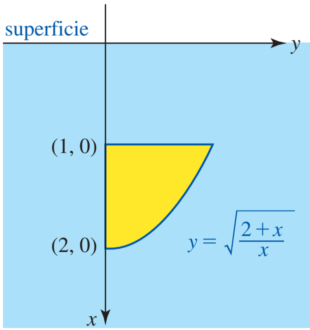


FIGURA 7.5.10 Placa sumergida en el problema 59

60. Encuentre el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = \sqrt{3}$.

≡ Piense en ello

61. Evalúe las siguientes integrales por medio de una sustitución trigonométrica idónea.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}}\,dx$ ***b***) $\displaystyle\int \sqrt{e^{2x} - 1}\,dx$

62. Encuentre el área de la región en forma creciente mostrada en amarillo en la FIGURA 7.5.11. La región, fuera del círculo de radio a pero dentro del círculo de radio b, $a \neq b$, se denomina **luna**.

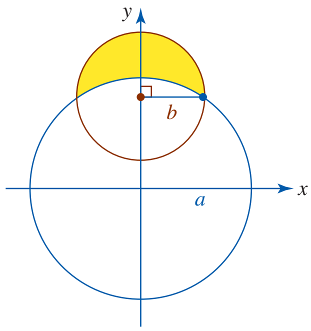


FIGURA 7.5.11 Luna en el problema 62

7.6 Fracciones parciales

Introducción Cuando se suman dos funciones racionales, por ejemplo $g(x) = 2/(x + 5)$ y $h(x) = 1/(x + 1)$, los términos se combinan por medio de un denominador común:

$$g(x) + h(x) = \frac{2}{x + 5} + \frac{1}{x + 1} = \frac{2}{x + 5}\left(\frac{x + 1}{x + 1}\right) + \frac{1}{x + 1}\left(\frac{x + 5}{x + 5}\right). \tag{1}$$

Al sumar los denominadores en el miembro derecho de (1) obtenemos la función racional simple

$$f(x) = \frac{3x + 7}{(x + 5)(x + 1)}. \tag{2}$$

Ahora suponga que es necesario integrar la función f. Por supuesto, la solución es evidente: usamos la igualdad de (1) y (2) para escribir

$$\int \frac{3x + 7}{(x + 5)(x + 1)}\,dx = \int \left[\frac{2}{x + 5} + \frac{1}{x + 1}\right] dx = 2\ln|x + 5| + \ln|x + 1| + C.$$

Este ejemplo ilustra un procedimiento para integrar ciertas funciones racionales $f(x) = p(x)/q(x)$. Este método consiste en invertir el proceso ilustrado en (1); en otras palabras, empezamos con una función racional —como (2)— y la separamos en fracciones componentes más simples $g(x) = 2/(x + 5)$ y $h(x) = 1/(x + 1)$, denominadas **fracciones parciales**. Luego evaluamos la integral término a término.

Fracciones parciales El proceso algebraico para separar una expresión racional, como (2), en fracciones parciales se denomina **descomposición en fracciones parciales**. Por conveniencia supondremos que la función racional $f(x) = p(x)/q(x)$, $q(x) \neq 0$, es una **fracción propia** o una **expresión racional propia**; es decir, que el grado de $p(x)$ es menor que el grado de $q(x)$. También supondremos que $p(x)$ y $q(x)$ no tienen factores comunes.

En esta sección estudiaremos cuatro casos de descomposición en fracciones parciales.

Factores lineales distintos El siguiente hecho del álgebra se plantea sin demostración. Si el denominador $q(x)$ contiene un producto de n factores lineales distintos,

$$(a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\cdots(a_nx + b_n),$$

donde las a_i y b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, son números reales, entonces es posible encontrar constantes reales únicas $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tales que la descomposición en fracciones parciales de $f(x) = p(x)/q(x)$ contiene la suma

$$\frac{C_1}{a_1x + b_1} + \frac{C_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{C_n}{a_nx + b_n}.$$

En otras palabras, la descomposición en fracciones parciales que se ha supuesto para f contiene una fracción parcial para cada uno de los factores lineales $a_ix + b_i$.

EJEMPLO 1 Factores lineales distintos

Evalúe $\displaystyle\int \frac{2x + 1}{(x - 1)(x + 3)}\,dx.$

Solución Se establece la hipótesis de que el integrando puede escribirse como

$$\frac{2x + 1}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3}.$$

Al combinar los términos del miembro derecho de la ecuación sobre un común denominador obtenemos

$$\frac{2x + 1}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{A(x + 3) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 3)}.$$

Puesto que los denominadores son iguales, los numeradores de las dos expresiones deben ser idénticamente iguales:

$$2x + 1 = A(x + 3) + B(x - 1). \tag{3}$$

Puesto que la última línea es una identidad, los coeficientes de las potencias de x son los mismos

iguales

$$2x + 1x^0 = (A + B)x + (3A - B)x^0$$

iguales

y en consecuencia,

$$\begin{aligned} 2 &= A + B \\ 1 &= 3A - B. \end{aligned} \tag{4}$$

Al sumar las dos ecuaciones obtenemos $3 = 4A$, de modo que encontramos $A = \frac{3}{4}$. Luego, al sustituir este valor en cualquier ecuación de (4) obtenemos $B = \frac{5}{4}$. Por tanto, la descomposición en fracciones parciales deseada es

$$\frac{2x + 1}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{\frac{3}{4}}{x - 1} + \frac{\frac{5}{4}}{x + 3}.$$

En consecuencia,

$$\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+3)}\,dx = \int \left[\frac{\frac{3}{4}}{x-1} + \frac{\frac{5}{4}}{x+3}\right] dx = \frac{3}{4}\ln|x-1| + \frac{5}{4}\ln|x+3| + C. \quad \blacksquare$$

Un atajo que vale la pena conocer Si el denominador contiene, por ejemplo, tres factores lineales, como en $\dfrac{4x^2 - x + 1}{(x-1)(x+3)(x-6)}$, entonces la descomposición en fracciones parciales aparece como sigue:

$$\frac{4x^2 - x + 1}{(x-1)(x+3)(x-6)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-6}.$$

Al seguir los mismos pasos que en el ejemplo 1, sería deseable encontrar que el análogo de (4) ahora son tres ecuaciones en las tres incógnitas A, B y C. La cuestión es ésta: mientras más fracciones lineales haya en el denominador, más grande es el sistema de ecuaciones que habrá que resolver. Hay un procedimiento algebraico que vale la pena conocer porque permite abreviar algo del álgebra. Para ilustrarlo, se volverá a la identidad (3). Puesto que la igualdad es cierta para todo valor de x, se cumple para $x = 1$ y $x = -3$, *los ceros del denominador*. Al hacer $x = 1$ en (3) obtenemos $3 = 4A$, a partir de lo cual se concluye de inmediato que $A = \frac{3}{4}$. En forma semejante, al hacer $x = -3$ en (3) obtenemos $-5 = (-4)B$ o $B = \frac{5}{4}$.

Vea las *Notas desde el aula* al final de esta sección para consultar otro método rápido para determinar las constantes.

EJEMPLO 2 Área bajo una gráfica

Encuentre el área A bajo la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$ sobre el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

Solución El área en cuestión se muestra en la FIGURA 7.6.1. Puesto que $f(x)$ es positiva para toda x en el intervalo, el área es la integral definida

$$A = \int_{1/2}^{2} \frac{1}{x(x+1)}\,dx.$$

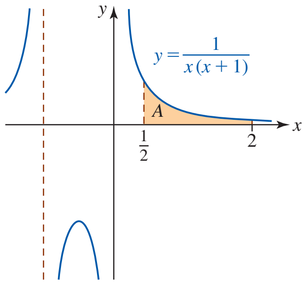


FIGURA 7.6.1 Área bajo la gráfica en el ejemplo 2

Al usar fracciones parciales

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + Bx}{x(x+1)}$$

se concluye que

$$1 = A(x+1) + Bx. \tag{5}$$

Al seguir el atajo previo a este ejemplo, vemos, a la vez, que $x = 0$ y $x = -1$ en (5) y obtenemos $A = 1$ y $B = -1$. En consecuencia,

$$A = \int_{1/2}^{2} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right] dx = (\ln|x| - \ln|x+1|)\Big]_{1/2}^{2}$$

$$= \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Big]_{1/2}^{2} = \ln 2 \approx 0.6931. \quad \blacksquare$$

Factores lineales repetidos Si el denominador de la función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ contiene un factor lineal repetido $(ax+b)^n$, $n > 1$, donde a y b son números reales, entonces es posible encontrar constantes reales únicas $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tales que la descomposición en fracciones parciales de f contiene la suma

$$\frac{C_1}{ax+b} + \frac{C_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(ax+b)^n}.$$

En otras palabras, la descomposición en fracciones parciales de f contiene una fracción parcial para cada potencia de $ax + b$.

EJEMPLO 3 Factor lineal repetido

Evalúe $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x + 4}{(x+1)^3}\,dx$.

Solución La descomposición del integrando contiene una fracción parcial para cada una de las tres potencias de $x + 1$:

$$\frac{x^2 + 2x + 4}{(x + 1)^3} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{(x + 1)^3}.$$

Al igualar los numeradores obtenemos

$$x^2 + 2x + 4 = A(x + 1)^2 + B(x + 1) + C = Ax^2 + (2A + B)x + (A + B + C). \tag{6}$$

Observe que al hacer $x = -1$ (el único cero del denominador) en (6) obtenemos sólo $C = 3$. Pero los coeficientes de x^2 y x en (6) producen el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 1 &= A \\ 2 &= 2A + B. \end{aligned}$$

A partir de estas ecuaciones vemos que $A = 1$ y $B = 0$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2x + 4}{(x + 1)^3}\,dx &= \int \left[\frac{1}{x + 1} + \frac{3}{(x + 1)^3}\right] dx \\ &= \int \left[\frac{1}{x + 1} + 3(x + 1)^{-3}\right] dx \\ &= \ln|x + 1| - \frac{3}{2}(x + 1)^{-2} + D. \end{aligned}$$ ■

Cuando el denominador $q(x)$ contiene factores lineales y también repetidos, se combinan los dos casos que acaban de considerarse.

EJEMPLO 4 Factor repetido y factor distinto

Evalúe $\displaystyle\int \frac{6x - 1}{x^3(2x - 1)}\,dx$.

Solución Puesto que x es un factor lineal repetido en el denominador del integrando, la descomposición en fracciones parciales que se ha supuesto contiene una fracción parcial para cada una de las tres potencias de x y una fracción parcial para el factor lineal distinto $2x - 1$:

$$\frac{6x - 1}{x^3(2x - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{2x - 1}.$$

Después de escribir el miembro derecho sobre un común denominador, se igualan los numeradores:

$$6x - 1 = Ax^2(2x - 1) + Bx(2x - 1) + C(2x - 1) + Dx^3 \tag{7}$$
$$= (2A + D)x^3 + (-A + 2B)x^2 + (-B + 2C)x - C. \tag{8}$$

Si $x = 0$ y $x = \frac{1}{2}$ en (7), encontramos $C = 1$ y $D = 16$, respectivamente. Entonces, al igualar los coeficientes de x^3 y x^2 en (8) obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= 2A + D \\ 0 &= -A + 2B. \end{aligned}$$

Puesto que conocemos el valor de D, la primera ecuación produce $A = -\frac{1}{2}D = -8$. Luego, con la segunda obtenemos $B = \frac{1}{2}A = -4$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \int \frac{6x - 1}{x^3(2x - 1)}\,dx &= \int \left[-\frac{8}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{16}{2x - 1}\right] dx \\ &= -8\ln|x| + 4x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2} + 8\ln|2x - 1| + E \\ &= 8\ln\left|\frac{2x - 1}{x}\right| + 4x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-2} + E. \end{aligned}$$ ■

La palabra *irreducible* significa que la expresión cuadrática no se factoriza sobre el conjunto de los números reales.

Factores cuadráticos distintos Si el denominador de la función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ contiene un producto de n factores cuadráticos *irreductibles*

$$(a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2x^2 + b_2x + c_2)\cdots(a_nx^2 + b_nx + c_n),$$

donde los coeficientes a_i, b_i y c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son números reales, entonces es posible encontrar constantes reales únicas $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ tales que la descomposición en fracciones parciales para f contiene la suma

$$\frac{A_1x + B_1}{a_1x^2 + b_1x + c_1} + \frac{A_2x + B_2}{a_2x^2 + b_2x + c_2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{a_nx^2 + b_nx + c_n}.$$

En forma análoga al caso en que $q(x)$ contiene un producto de factores lineales distintos, la descomposición en fracciones parciales que se ha supuesto para f contiene una fracción parcial para cada uno de los factores cuadráticos $a_ix^2 + b_ix + c_i$.

EJEMPLO 5 Factor lineal repetido y uno cuadrático distinto

Evalúe $\displaystyle\int \frac{x + 3}{x^4 + 9x^2}\,dx$.

Solución A partir de $x^4 + 9x^2 = x^2(x^2 + 9)$, vemos que el problema combina el factor cuadrático irreductible $x^2 + 9$ con el factor lineal repetido x. En consecuencia, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{x + 3}{x^2(x^2 + 9)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 9}.$$

Al proceder como de costumbre, encontramos

$$x + 3 = Ax(x^2 + 9) + B(x^2 + 9) + (Cx + D)x^2 \qquad (9)$$

$$= (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + 9Ax + 9B. \qquad (10)$$

Al hacer $x = 0$ en (9) obtenemos $B = \frac{1}{3}$. Luego, con (10) obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= A + C \\ 0 &= B + D \\ 1 &= 9A. \end{aligned}$$

A partir de este sistema obtenemos $A = \frac{1}{9}$, $C = -\frac{1}{9}$ y $D = -\frac{1}{3}$. Así se llega a

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 3}{x^2(x^2 + 9)}\,dx &= \int \left[\frac{\frac{1}{9}}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x^2} + \frac{-\frac{1}{9}x - \frac{1}{3}}{x^2 + 9}\right] dx \\ &= \int \left[\frac{\frac{1}{9}}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x^2} - \frac{1}{18}\frac{2x}{x^2 + 9} - \frac{1}{3}\frac{1}{x^2 + 9}\right] dx \\ &= \frac{1}{9}\ln|x| - \frac{1}{3}x^{-1} - \frac{1}{18}\ln(x^2 + 9) - \frac{1}{9}\tan^{-1}\frac{x}{3} + E \\ &= \frac{1}{18}\ln\frac{x^2}{x^2 + 9} - \frac{1}{3}x^{-1} - \frac{1}{9}\tan^{-1}\frac{x}{3} + E. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6 Factores cuadráticos distintos

Evalúe $\displaystyle\int \frac{4x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 3)}\,dx$.

Solución Puesto que cada factor cuadrático en el denominador del integrando es irreductible, escribimos

$$\frac{4x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 3)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 3}$$

a partir de lo cual encontramos

$$\begin{aligned} 4x &= (Ax + B)(x^2 + 2x + 3) + (Cx + D)(x^2 + 1) \\ &= (A + C)x^3 + (2A + B + D)x^2 + (3A + 2B + C)x + (3B + D). \end{aligned}$$

Puesto que el denominador del integrando no tiene ceros reales, se comparan los coeficientes de las potencias de x:

$$\begin{aligned} 0 &= A + C \\ 0 &= 2A + B + D \\ 4 &= 3A + 2B + C \\ 0 &= 3B + D. \end{aligned}$$

Al resolver las ecuaciones obtenemos $A = 1$, $B = 1$, $C = -1$ y $D = -3$. En consecuencia,

$$\int \frac{4x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 3)}\, dx = \int \left[\frac{x + 1}{x^2 + 1} - \frac{x + 3}{x^2 + 2x + 3} \right] dx.$$

Ahora, la integral de cada término sigue representando un ligero desafío. Para el primer término en el integrando usamos división término a término para escribir

$$\frac{x + 1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1}, \tag{11}$$

y luego en el segundo término se completa el cuadrado:

$$\frac{x + 3}{x^2 + 2x + 3} = \frac{x + 1 + 2}{(x + 1)^2 + 2} = \frac{1}{2}\frac{2(x + 1)}{(x + 1)^2 + 2} + \frac{2}{(x + 1)^2 + 2}. \tag{12}$$

En los miembros derechos de (11) y (12) identificamos que las integrales de los términos primero y segundo son, respectivamente, de las formas $\int du/u$ y $\int du/(u^2 + a^2)$. Por último, obtenemos

$$\begin{aligned} &\int \frac{4x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 3)}\, dx \\ &= \int \left[\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{2}\frac{2(x + 1)}{(x + 1)^2 + 2} - \frac{2}{(x + 1)^2 + (\sqrt{2})^2} \right] dx \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln[(x + 1)^2 + 2] - \sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{x + 1}{\sqrt{2}}\right) + E \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x + 3}\right) + \tan^{-1} x - \sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{x + 1}{\sqrt{2}}\right) + E. \end{aligned}$$

■

Factores cuadráticos repetidos Si el denominador de la función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ contiene un factor cuadrático irreductible repetido $(ax^2 + bx + c)^n$, $n > 1$, donde a, b y c son números reales, entonces es posible encontrar constantes reales únicas $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ tales que la descomposición en fracciones parciales de f contiene la suma

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}.$$

Es decir, la descomposición en fracciones parciales que se ha supuesto para f contiene una fracción parcial para cada potencia de $ax^2 + bx + c$.

EJEMPLO 7 Factor cuadrático repetido

Evalúe $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2}\, dx$.

Solución La descomposición en fracciones parciales del integrando

$$\frac{x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 4)^2}$$

lleva a
$$\begin{aligned} x^2 &= (Ax + B)(x^2 + 4) + Cx + D \\ &= Ax^3 + Bx^2 + (4A + C)x + (4B + D) \end{aligned}$$

y
$$\begin{aligned} 0 &= A \\ 1 &= B \\ 0 &= 4A + C \\ 0 &= 4B + D. \end{aligned}$$

A partir de este sistema encontramos $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$ y $D = -4$. En consecuencia,

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2}\,dx = \int \left[\frac{1}{x^2 + 4} - \frac{4}{(x^2 + 4)^2}\right] dx.$$

La integral del primer término es una tangente inversa. No obstante, para evaluar la integral del segundo término, empleamos la sustitución trigonométrica $x = 2\tan\theta$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 + 4)^2}\,dx &= \int \frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{(4\tan^2\theta + 4)^2} \\ &= \frac{1}{8}\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta}\,d\theta = \frac{1}{8}\int \cos^2\theta\,d\theta \\ &= \frac{1}{16}\int (1 + \cos 2\theta)\,d\theta = \frac{1}{16}\left(\theta + \frac{1}{2}\text{sen}\,2\theta\right) \quad \leftarrow \text{aquí se usa la fórmula del ángulo doble} \\ &= \frac{1}{16}(\theta + \text{sen}\,\theta\cos\theta) \\ &= \frac{1}{16}\left[\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \cdot \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}}\right] \\ &= \frac{1}{16}\left[\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{2x}{x^2 + 4}\right]. \end{aligned}$$

Por tanto, la integral original es

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2}\,dx &= \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} - 4\left[\frac{1}{16}\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\frac{x}{x^2 + 4}\right] + E \\ &= \frac{1}{4}\tan^{-1}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{x}{x^2 + 4} + E. \end{aligned}$$ ■

Revise la sección 5.1.

Fracciones impropias En cada uno de los ejemplos precedentes el integrando $f(x) = p(x)/q(x)$ era una fracción propia. Recordemos que cuando $f(x) = p(x)/q(x)$ es una **fracción impropia**, es decir, cuando el grado de $p(x)$ es mayor que o igual al grado de $q(x)$, procedemos con una división larga.

EJEMPLO 8 El integrando es una fracción impropia

Evalúe $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 3x + 2}\,dx.$

Solución El integrando se identifica como una fracción impropia y el numerador se divide entre el denominador:

$$\frac{x^3 - 2x}{x^2 + 3x + 2} = x - 3 + \frac{5x + 6}{x^2 + 3x + 2}.$$

Luego, como el denominador se factoriza como $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$, el residuo se descompone en fracciones parciales:

$$\frac{5x + 6}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{x + 1} + \frac{4}{x + 2}.$$

Con esta información, la evaluación de la integral es inmediata:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 3x + 2}\,dx &= \int \left[x - 3 + \frac{1}{x + 1} + \frac{4}{x + 2}\right] dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 3x + \ln|x + 1| + 4\ln|x + 2| + C. \end{aligned}$$ ■

$\int$ NOTAS DESDE EL AULA

Hay otra forma, denominada **método de encubrimiento**, para determinar los coeficientes en una descomposición en fracciones parciales en el caso especial cuando el denominador del integrando es el producto de factores lineales distintos:

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)}.$$

Este método se ilustrará por medio de un ejemplo específico. A partir del análisis anterior sabemos que existen constantes únicas A, B y C tales que

$$\frac{x^2 + 4x - 1}{(x - 1)(x - 2)(x + 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 3}. \tag{13}$$

Suponga que multiplicamos por $x - 1$, que se simplifica y luego se hace $x = 1$, a ambos miembros de esta última expresión. Puesto que los coeficientes de B y C son cero, obtenemos

$$\left.\frac{x^2 + 4x - 1}{(x - 2)(x + 3)}\right|_{x=1} = A \qquad \text{o} \qquad A = -1.$$

Escrito de otra forma,

$$\left.\frac{x^2 + 4x - 1}{\boxed{(x - 1)}\,(x - 2)(x + 3)}\right|_{x=1} = A$$

donde sombreamos o cubrimos el factor que se cancela cuando el miembro izquierdo de (13) se multiplica por $x - 1$. *Este factor cubierto no se evalúa* en $x = 1$. Luego, para obtener B y C simplemente evaluamos el miembro izquierdo de (13) mientras se cubren, a la vez, $x - 2$ y $x + 3$:

$$\left.\frac{x^2 + 4x - 1}{(x - 1)\,\boxed{(x - 2)}\,(x + 3)}\right|_{x=2} = B \qquad \text{o} \qquad B = \frac{11}{5}$$

$$\left.\frac{x^2 + 4x - 1}{(x - 1)\,(x - 2)\,\boxed{(x + 3)}}\right|_{x=-3} = C \qquad \text{o} \qquad C = -\frac{1}{5}.$$

Por tanto, obtenemos la descomposición

$$\frac{x^2 + 4x - 1}{(x - 1)(x - 2)(x + 3)} = \frac{-1}{x - 1} + \frac{\frac{11}{15}}{x - 2} + \frac{-\frac{1}{5}}{x + 3}.$$

Ejercicios 7.6

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-23.

Fundamentos

En los problemas 1-8, escriba la forma idónea de la descomposición en fracciones parciales de la expresión dada. No evalúe los coeficientes.

1. $\dfrac{x - 1}{x^2 + x}$

2. $\dfrac{9x - 8}{(x - 3)(2x - 5)}$

3. $\dfrac{x^3}{(x - 1)(x + 2)^3}$

4. $\dfrac{2x^2 - 3}{x^3 + 6x^2}$

5. $\dfrac{4}{x^3(x^2 + 3)}$

6. $\dfrac{-x^2 + 3x + 7}{(x + 2)^2(x^2 + x + 1)}$

7. $\dfrac{2x^3 - x}{(x^2 + 9)^2}$

8. $\dfrac{3x^2 - x + 4}{x^4 + 2x^3 + x}$

En los problemas 9-42, use fracciones parciales para evaluar la integral dada.

9. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x - 2)}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{x(2x + 3)}\,dx$

11. $\displaystyle\int \frac{x + 2}{2x^2 - x}\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{3x + 10}{x^2 + 2x}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{x + 1}{x^2 - 16}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2 - 25}\,dx$

15. $\displaystyle\int \frac{x}{2x^2 + 5x + 2}\,dx$

16. $\displaystyle\int \frac{x + 5}{(x + 4)(x^2 - 1)}\,dx$

17. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 6}{x^3 - x}\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{5x^2 - x + 1}{x^3 - 4x}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx$ **20.** $\displaystyle\int \frac{1}{(4x^2-1)(x+7)}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{4t^2+3t-1}{t^3-t^2}\,dt$ **22.** $\displaystyle\int \frac{2x-11}{x^3+2x^2}\,dx$

23. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+2x^2+x}\,dx$ **24.** $\displaystyle\int \frac{t-1}{t^4+6t^3+9t^2}\,dt$

25. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x+1)^3}\,dx$ **26.** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x^2-4)^2}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+6x+5)^2}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-x-6)(x^2-2x-8)}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^2-x+9}{x^5+2x^4}\,dx$ **30.** $\displaystyle\int \frac{5x-1}{x(x-3)^2(x+2)^2}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x(x^2+1)}\,dx$ **32.** $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x^2+3)}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$ **34.** $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)^3(x^2+4)}\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+5x^2+4}\,dx$ **36.** $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+13x^2+36}\,dx$

37. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$ **38.** $\displaystyle\int \frac{81}{x^4+27x}\,dx$

39. $\displaystyle\int \frac{3x^2-x+1}{(x+1)(x^2+2x+2)}\,dx$

40. $\displaystyle\int \frac{4x+12}{(x-2)(x^2+4x+8)}\,dx$

41. $\displaystyle\int \frac{x^2-x+4}{(x^2+4)^2}\,dx$ **42.** $\displaystyle\int \frac{1}{x^3(x^2+1)^2}\,dx$

En los problemas 43 y 44, proceda como en el ejemplo 7 para evaluar la integral dada.

43. $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2+x-3}{x^4+8x^2+16}\,dx$ **44.** $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+3)^2}\,dx$

En los problemas 45 y 46, proceda como en el ejemplo 8 para evaluar la integral dada.

45. $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^2+4}{(x+1)^2}\,dx$ **46.** $\displaystyle\int \frac{x^5-10x^3}{x^4-10x^2+9}\,dx$

En los problemas 47-54, evalúe la integral definida dada.

47. $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{x^2-6x+5}\,dx$ **48.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-4}\,dx$

49. $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x-1}{(x+3)^2}\,dx$ **50.** $\displaystyle\int_1^5 \frac{2x+6}{x(x+1)^2}\,dx$

51. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3+x^2+2x+2}\,dx$ **52.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+8x^2+16}\,dx$

53. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+6}\,dx$ **54.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^5+4x^4+5x^3}\,dx$

En los problemas 55-58, evalúe la integral definida dada usando primero la sustitución indicada seguida por fracciones parciales.

55. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^3}\,dx;\quad u^2 = 1-x^2$

56. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx;\quad u^2 = \frac{x-1}{x+1}$

57. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x}\,dx;\quad u^3 = x+1$

58. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}\,dx;\quad u^6 = x$

☰ Repaso de aplicaciones

En los problemas 59 y 60, encuentre el área bajo la gráfica de la función dada sobre el intervalo indicado. De ser necesario, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función.

59. $y = \dfrac{1}{x^2+2x-3};\quad [2, 4]$

60. $y = \dfrac{x^3}{(x^2+1)(x^2+2)};\quad [0, 4]$

En los problemas 61 y 62, encuentre el área acotada por la gráfica de la función dada y el eje x sobre el intervalo indicado. De ser necesario, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función.

61. $y = \dfrac{x}{(x+2)(x+3)};\quad [-1, 1]$

62. $y = \dfrac{3x^3}{x^3-8};\quad [-2, 1]$

En los problemas 63-66, encuentre el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región acotada en el primer cuadrante por las gráficas de las ecuaciones dadas alrededor del eje indicado. De ser necesario, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función dada.

63. $y = \dfrac{2}{x(x+1)},\ x = 1,\ x = 3,\ y = 0;\quad$ eje x

64. $y = \dfrac{1}{\sqrt{(x+1)(x+4)}},\ x = 0,\ x = 2,\ y = 0;\quad$ eje x

65. $y = \dfrac{4}{(x+1)^2},\ x = 0,\ x = 1,\ y = 0;\quad$ eje y

66. $y = \dfrac{8}{(x^2+1)(x^2+4)},\ x = 0,\ x = 1,\ y = 0;\quad$ eje y

☰ Piense en ello

En los problemas 67-70, evalúe la integral dada haciendo primero la sustitución seguida de una descomposición en fracciones parciales.

67. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x + 2}\,dx$ **68.** $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x - \cos^3 x}\,dx$

69. $\displaystyle\int \frac{e^t}{(e^t+1)^2(e^t-2)}\,dt$ **70.** $\displaystyle\int \frac{e^{2t}}{(e^t+1)^3}\,dt$

71. Encuentre la longitud de la gráfica de $y = e^x$ sobre el intervalo $[0, \ln 2]$. [*Sugerencia*: Evalúe la integral empezando con una sustitución.]

72. Explique por qué una descomposición en fracciones parciales podría ser innecesaria o inadecuada para la integral dada. Analice cómo es posible evaluar estas integrales.

***a*)** $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2-1)(x^2+1)}\,dx$ ***b*)** $\displaystyle\int \frac{3x+4}{x^2+4}\,dx$

***c*)** $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+5)^2}\,dx$ ***d*)** $\displaystyle\int \frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+6}\,dx$

73. Aunque para evaluar

$$\int \frac{x^5}{(x-1)^{10}(x+1)^{10}}\,dx$$

puede usarse descomposición en fracciones parciales, sería necesario resolver 20 ecuaciones en 20 incógnitas. Evalúe la integral usando una técnica de integración más sencilla.

74. ¿Por qué la respuesta al problema 53 podría obtenerse *sin ningún trabajo*?

7.7 Integrales impropias

Introducción Hasta el momento, en el estudio de la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, entendíamos que

- los límites de integración eran números finitos, y que
- la función f era *continua* sobre $[a, b]$ o, en caso de ser discontinua, que estaba *acotada* sobre el intervalo.

Cuando se omite una de estas dos condiciones, se dice que la integral resultante es una **integral impropia**. En el siguiente análisis, primero consideramos integrales de funciones que están definidas y son continuas sobre intervalos no acotados; en otras palabras,

- por lo menos uno de los límites de integración es ∞ o $-\infty$.

Después de eso examinamos integrales sobre intervalos acotados de funciones que se vuelven no acotadas sobre un intervalo. En el segundo tipo de integral impropia,

- el integrando f tiene una *discontinuidad infinita* en algún número en el intervalo de integración.

Integrales impropias: intervalos no acotados Si el integrando f está definido sobre un intervalo no acotado, hay tres **integrales impropias** posibles con límites de integración infinitos. Sus definiciones se resumen como sigue:

Definición 7.7.1 Intervalos no acotados

i) Si f es continua sobre $[a, \infty)$, entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

ii) Si f es continua sobre $(-\infty, b]$, entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

iii) Si f es continua sobre $(-\infty, \infty)$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Cuando los límites (1) y (2) existen, se dice que las integrales **convergen**. Si el límite no existe, se dice que las integrales **divergen**. En (3) la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ converge en el supuesto de que *ambas* $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ y $\int_c^{\infty} f(x)\,dx$ convergen. Si cualquiera de $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ o $\int_c^{\infty} f(x)\,dx$ diverge, entonces la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ diverge.

EJEMPLO 1 Uso de (1)

Evalúe $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$.

Solución Por (1),

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b x^{-3}\,dx = \lim_{b\to\infty}\frac{x^{-2}}{-2}\Big]_2^b = -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}(b^{-2} - 2^{-2}).$$

Puesto que el límite $\lim_{b\to\infty} b^{-2} = \lim_{b\to\infty}(1/b^2)$ existe,

$$\lim_{b\to\infty}(b^{-2} - 2^{-2}) = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{4}\right) = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4},$$

la integral dada converge, y

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}.$$ ■

EJEMPLO 2 Uso de (1)

Evalúe $\displaystyle\int_1^\infty x^2\,dx$.

Solución Por (1),

$$\int_1^\infty x^2\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^2\,dx = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}x^3\Big]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}\right).$$

Puesto que $\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}\right) = \infty$ existe, se concluye que la integral diverge. ■

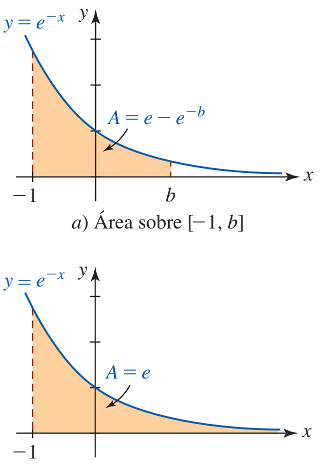
EJEMPLO 3 Uso de (3)

Evalúe $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^2\,dx$.

Solución Puesto que c puede escogerse de manera arbitraria en (3), se elige $c = 1$ y escribimos

$$\int_{-\infty}^\infty x^2\,dx = \int_{-\infty}^1 x^2\,dx + \int_1^\infty x^2\,dx.$$

Pero en el ejemplo 2 vimos que $\int_1^\infty x^2\,dx$ diverge. Esto es suficiente para concluir que $\int_{-\infty}^\infty x^2\,dx$ también diverge. ■



a) Área sobre $[-1, b]$

b) Área sobre $[-1, \infty)$

FIGURA 7.7.1 Área bajo la gráfica en el ejemplo 4

Área Si $f(x) \ge 0$ para toda x sobre $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ o $(-\infty, \infty)$, entonces cada una de las integrales en (1), (2) y (3) puede interpretarse como área bajo la gráfica de f sobre el intervalo siempre que la integral converge.

EJEMPLO 4 Área

Evalúe $\displaystyle\int_{-1}^\infty e^{-x}\,dx$. Interprete geométricamente.

Solución Por (1),

$$\int_{-1}^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{-1}^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}(-e^{-x})\Big]_{-1}^b = \lim_{b\to\infty}(e - e^{-b}).$$

Puesto que $\lim_{b\to\infty} e^{-b} = 0$, $\lim_{b\to\infty}(e - e^{-b}) = e$ y así la integral dada converge a e. En la FIGURA 7.7.1*a*) vemos que el área bajo la gráfica de la función positiva $f(x) = e^{-x}$ sobre el intervalo $[-1, b]$ es $e - e^{-b}$. Pero, al tomar $b \to \infty$, $e^{-b} \to 0$, y entonces, como se muestra en la figura 7.7.1*b*), es posible interpretar $\int_{-1}^\infty e^{-x}\,dx = e$ como una medida del área bajo la gráfica de f sobre $[-1, \infty)$. ■

EJEMPLO 5 Uso de (2)

Evalúe $\int_{-\infty}^{0} \cos x\, dx$.

Solución Por (2),

$$\int_{-\infty}^{0} \cos x\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \cos x\, dx = \lim_{a\to-\infty} \operatorname{sen} x \Big]_{a}^{0} = \lim_{a\to-\infty} (-\operatorname{sen} a).$$

Puesto que sen a oscila entre -1 y 1, concluimos que $\lim_{a\to-\infty} (-\operatorname{sen} a)$ no existe. Por tanto, $\int_{-\infty}^{0} \cos x\, dx$ diverge. ■

EJEMPLO 6 Uso de (3)

Evalúe $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx$.

Solución Al escoger $c = 0$, es posible escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx = I_1 + I_2.$$

Primero, se analizará I_1:

$$I_1 = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx = \lim_{a\to-\infty} \ln(e^x + 1)\Big]_{a}^{0} = \lim_{a\to-\infty} [\ln 2 - \ln(e^a + 1)].$$

Luego, $e^a + 1 \to 1$ puesto que $e^a \to 0$ cuando $a \to -\infty$. En consecuencia, $\ln(e^a + 1) \to \ln 1 = 0$ cuando $a \to -\infty$. Por tanto, $I_1 = \ln 2$.

Segundo, se tiene

$$I_2 = \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx = \lim_{b\to\infty} \ln(e^x + 1)\Big]_{0}^{b} = \lim_{b\to\infty} [\ln(e^b + 1) - \ln 2].$$

No obstante, $e^b + 1 \to \infty$ cuando $b \to \infty$, de modo que $\ln(e^b + 1) \to \infty$. Por tanto, I_2 diverge.

Debido a que *ambas* I_1 e I_2 no convergen, se concluye que la integral dada es divergente. ■

EJEMPLO 7 Uso de (3)

La integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2}\, dx$ converge porque

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1 + x^2}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

El resultado se concluye a partir de los hechos de que

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1 + x^2}\, dx = -\lim_{a\to-\infty} \tan^{-1} a = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \tan^{-1} b = \frac{\pi}{2}.$$ ■

EJEMPLO 8 Trabajo

En (5) de la sección 6.8 vimos que el trabajo realizado para levantar una masa m_2 desde la superficie de un planeta de masa m_1 hasta una altura h está dado por

$$W = \int_{R}^{R+h} \frac{k m_1 m_2}{r^2}\, dr,$$

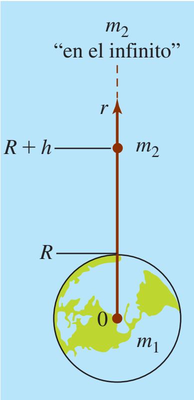


FIGURA 7.7.2 Masa m_2 levantada hasta el "infinito" en el ejemplo 8

donde R es el radio del planeta. Así, la cantidad de trabajo realizado para levantar m_2 hasta una distancia ilimitada o "infinita" desde la superficie del planeta es

$$\begin{aligned} W &= \int_R^{\infty} \frac{km_1 m_2}{r^2}\, dr \\ &= km_1 m_2 \lim_{b\to\infty} \int_R^b r^{-2}\, dr \\ &= km_1 m_2 \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{b} + \frac{1}{R} \right] \\ &= \frac{km_1 m_2}{R}. \end{aligned}$$

Vea la FIGURA 7.7.2. A partir de los datos en el ejemplo 2 de la sección 6.8 se concluye que el trabajo realizado para levantar una carga útil de 5 000 kg hasta una "distancia infinita" desde la superficie terrestre es

$$W = \frac{(6.67 \times 10^{-11})(6.0 \times 10^{24})(5\,000)}{6.4 \times 10^6} \approx 3.13 \times 10^{11} \text{ joules.} \qquad \blacksquare$$

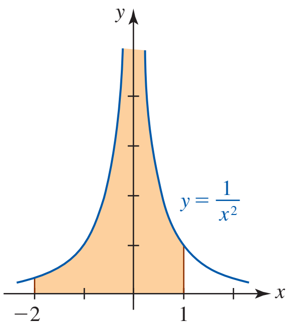


FIGURA 7.7.3 $x = 0$ es una asíntota vertical para la gráfica de $f(x) = 1/x^2$

Recuerde que si f es continua sobre $[a, b]$, entonces la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ existe. Además, si $F'(x) = f(x)$, entonces $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$. Sin embargo, no es posible evaluar una integral como

$$\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx \tag{4}$$

mediante el mismo procedimiento, puesto que $f(x) = 1/x^2$ tiene una discontinuidad infinita en $[-2, 1]$. Vea la FIGURA 7.7.3. En otras palabras, para la integral en (4), el "procedimiento"

$$-x^{-1}\Big]_{-2}^{1} = (-1) - \left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

carece de sentido. Por tanto, se tiene otro tipo de integral que demanda un tratamiento especial.

Integrales impropias: discontinuidades infinitas De una integral $\int_a^b f(x)\, dx$ también se dice que es **impropia** si f no está acotada sobre $[a, b]$, es decir, si f tiene una discontinuidad infinita en algún número en el intervalo de integración. Hay tres **integrales impropias** posibles de este tipo. Sus definiciones se resumen a continuación.

Definición 7.7.2 Discontinuidades infinitas

i) Si f es continua sobre $[a, b)$ y $|f(x)| \to \infty$ cuando $x \to b^-$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\, dx. \tag{5}$$

ii) Si f es continua sobre $(a, b]$ y $|f(x)| \to \infty$ cuando $x \to a^+$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{s\to a^+} \int_s^b f(x)\, dx. \tag{6}$$

iii) Si $|f(x)| \to \infty$ cuando $x \to c$ para alguna c en (a, b) y f es continua en todos los demás números en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx. \tag{7}$$

Cuando los límites en (5) y (6) existen, se dice que las integrales **convergen**. Si el límite no existe, entonces se dice que la integral **diverge**. En (7) la integral $\int_a^b f(x)\, dx$ converge siempre que *ambas* $\int_a^c f(x)\, dx$ y $\int_c^b f(x)\, dx$ convergen. Si cualquiera de $\int_a^c f(x)\, dx$ o $\int_c^b f(x)\, dx$ diverge, entonces $\int_a^b f(x)\, dx$ diverge.

EJEMPLO 9 Uso de (6)

Evalúe $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

Solución Observe que $f(x) = 1/\sqrt{x} \to \infty$ cuando $x \to 0^+$, es decir, $x = 0$ es una asíntota vertical para la gráfica de f. Así, por (6) de la definición 7.7.2,

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{s\to 0^+}\int_s^4 x^{-1/2}\,dx = \lim_{s\to 0^+} 2x^{1/2}\Big]_s^4 = \lim_{s\to 0^+}[4 - 2s^{1/2}].$$

Puesto que $\lim_{s\to 0^+} s^{1/2} = 0$ se tiene $\lim_{s\to 0^+}[4 - 2s^{1/2}] = 4$. Entonces, la integral dada converge y

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 4.$$

Como vemos en la FIGURA 7.7.4, el número 4 puede considerarse como el área bajo la gráfica de f sobre el intervalo $[0, 4]$. ■

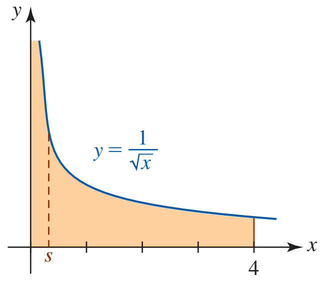


FIGURA 7.7.4 Área bajo la gráfica en el ejemplo 9

EJEMPLO 10 Uso de (6)

Evalúe $\displaystyle\int_0^e \ln x\,dx$.

Solución En este caso se sabe que $f(x) = \ln x \to -\infty$ cuando $x \to 0^+$. Al usar (6) e integración por partes obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^e \ln x\,dx &= \lim_{s\to 0^+}\int_s^e \ln x\,dx\\ &= \lim_{s\to 0^+}(x\ln x - x)\Big]_s^e\\ &= \lim_{s\to 0^+}[(e\ln e - e) - (s\ln s - s)] \quad \leftarrow \ln e = 1\\ &= \lim_{s\to 0^+} s(1 - \ln s).\end{aligned}$$

Luego, el último límite tiene la forma indeterminada $0 \cdot \infty$, pero si se escribe como

$$\lim_{s\to 0^+}\frac{1 - \ln s}{1/s},$$

identificamos que la forma indeterminada ahora es ∞/∞. Entonces, por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{s\to 0^+}\frac{1 - \ln s}{1/s} \stackrel{h}{=} \lim_{s\to 0^+}\frac{-1/s}{-1/s^2} = \lim_{s\to 0^+} s = 0.$$

En consecuencia, la integral converge y $\int_0^e \ln x\,dx = 0$. ■

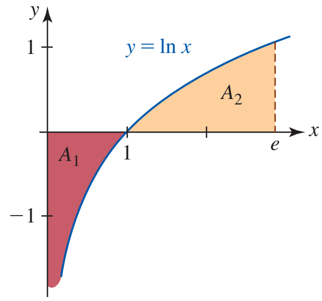


FIGURA 7.7.5 Área neta con signo en el ejemplo 10

El resultado $\int_0^e \ln x\,dx = 0$ en el ejemplo 10 indica que el área neta con signo entre la gráfica de $f(x) = \ln x$ y el eje x sobre $[0, e]$ es 0. A partir de la FIGURA 7.7.5 vemos que

$$\int_0^e \ln x\,dx = \int_0^1 \ln x\,dx + \int_1^e \ln x\,dx = -A_1 + A_2 = 0.$$

En el ejemplo 7 de la sección 7.3 vimos que $\int_1^e \ln x\,dx = 1$, y así $A_1 = A_2 = 1$.

EJEMPLO 11 Uso de (7)

Evalúe $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{(x-2)^{1/3}}\,dx$.

Solución En el intervalo $[1, 5]$ el integrando tiene una discontinuidad infinita en 2. En consecuencia, a partir de (7) escribimos

$$\int_1^5 \frac{1}{(x-2)^{1/3}}\,dx = \int_1^2 (x-2)^{-1/3}\,dx + \int_2^5 (x-2)^{-1/3}\,dx = I_1 + I_2.$$

Ahora,
$$I_1 = \lim_{t\to 2^-}\int_1^t (x-2)^{-1/3}\,dx = \lim_{t\to 2^-}\frac{3}{2}(x-2)^{2/3}\Big]_1^t$$
$$= \frac{3}{2}\lim_{t\to 2^-}[(t-2)^{2/3}-1] = -\frac{3}{2}.$$

De forma similar,
$$I_2 = \lim_{s\to 2^+}\int_s^5 (x-2)^{-1/3}\,dx = \lim_{s\to 2^+}\frac{3}{2}(x-2)^{2/3}\Big]_s^5$$
$$= \frac{3}{2}\lim_{s\to 2^+}[3^{2/3}-(s-2)^{2/3}] = \frac{3^{5/3}}{2}.$$

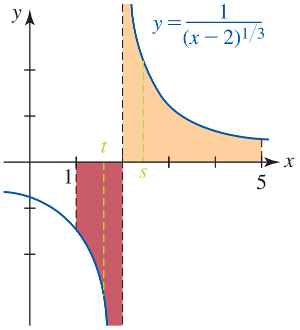


FIGURA 7.7.6 Gráfica del integrando en el ejemplo 11

Puesto que ambas I_1 e I_2 convergen, la integral dada converge y
$$\int_1^5 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}} = -\frac{3}{2} + \frac{3^{5/3}}{2} \approx 1.62.$$

Observe a partir de la FIGURA 7.7.6 que este último número representa un área neta con signo sobre el intervalo [1, 5]. ■

EJEMPLO 12 Otro repaso a la integral en (4)

Evalúe $\displaystyle\int_{-2}^{1}\frac{1}{x^2}\,dx$.

Solución Ésta es la integral analizada en (4). Puesto que en el intervalo [−2, 1] el integrando tiene una discontinuidad infinita en 0, escribimos
$$\int_{-2}^{1}\frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-2}^{0}\frac{1}{x^2}\,dx + \int_0^1\frac{1}{x^2}\,dx = I_1 + I_2.$$

Luego, el resultado
$$I_1 = \int_{-2}^{0}\frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to 0^-}\int_{-2}^{t}x^{-2}\,dx = \lim_{t\to 0^-}(-x^{-1})\Big]_{-2}^{t} = \lim_{t\to 0^-}\left[-\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right] = \infty$$
indica que no hay necesidad de evaluar $I_2 = \int_0^1 dx/x^2$. La integral $\int_{-2}^{1} dx/x^2$ diverge.

NOTAS DESDE EL AULA

i) Usted debe comprobar que $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \int_{-\infty}^{0} x\,dx + \int_0^{\infty} x\,dx$ diverge, puesto que ambas $\int_{-\infty}^{0} x\,dx$ y $\int_0^{\infty} x\,dx$ divergen. Un error común que se comete al trabajar con integrales con límites infinitos dobles es usar un límite:
$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} x\,dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}x^2\Big]_{-t}^{t} = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}[t^2-t^2] = 0.$$
Por supuesto, esta "respuesta" es incorrecta. Integrales del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ requieren la evaluación de dos límites *independientes*.

ii) En el trabajo previo a menudo escribimos sin pensar que la integral de una suma es la suma de las integrales:
$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \tag{8}$$
Para integrales impropias es necesario proceder con más cautela. Por ejemplo, la integral $\displaystyle\int_1^{\infty}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right]dx$ converge (vea el problema 25 en los ejercicios 7.7), pero
$$\int_1^{\infty}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right]dx \neq \int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,dx - \int_1^{\infty}\frac{1}{x+1}\,dx.$$
La propiedad en (8) sigue siendo válida para integrales impropias siempre que ambas integrales en el miembro derecho de la igualdad converjan.

iii) Para ejemplos, problemas y gráficas como la figura 7.7.1, los estudiantes a menudo quedan con la impresión de que $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$ es una condición necesaria para que la integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converja. Esto no es así. Cuando llegue a los ejercicios 9.3 trabaje el problema 70.

iv) Es posible que una integral tenga límites de integración infinitos *y* un integrando con una discontinuidad infinita. Para determinar si una integral como

$$\overset{\text{límite infinito} \to}{\underset{\text{el integrando es discontinuo en } x=1 \to}{}} \int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

converge, la integración se interrumpe en algún punto de continuidad conveniente del integrando; por ejemplo, $x = 2$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx + \int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = I_1 + I_2. \qquad (9)$$

I_1 e I_2 son integrales impropias; I_1 es del tipo dado en (6) e I_2 es del tipo dado en (1). Si ambas I_1 *e* I_2 convergen, entonces la integral original converge. Vea los problemas 85 y 86 en los ejercicios 7.7.

v) El integrando de $\int_a^b f(x)\,dx$ también puede tener discontinuidades infinitas tanto en $x = a$ como en $x = b$. En este caso la integral impropia se define en forma análoga a (7). Si un integrando f tiene una discontinuidad infinita en varios números en (a, b), entonces la integral impropia se define mediante una extensión natural de (7). Vea los problemas 87 y 88 en los ejercicios 7.7.

vi) Algunas veces ocurren cosas raras cuando se trabaja con integrales impropias. Es posible girar una región con área infinita alrededor de un eje y el volumen resultante del sólido de revolución puede ser finito. Un ejemplo bastante famoso de esta clase se proporciona en el problema 89 de los ejercicios 7.7.

Ejercicios 7.7

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-24.

Fundamentos

En los problemas 1-30, evalúe la integral impropia dada o demuestre que diverge.

1. $\int_3^\infty \frac{1}{x^4}\,dx$

2. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

3. $\int_1^\infty \frac{1}{x^{0.99}}\,dx$

4. $\int_1^\infty \frac{1}{x^{1.01}}\,dx$

5. $\int_{-\infty}^3 e^{2x}\,dx$

6. $\int_{-\infty}^\infty e^{-x}\,dx$

7. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$

8. $\int_1^\infty \frac{\ln t}{t^2}\,dt$

9. $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx$

10. $\int_e^\infty \ln x\,dx$

11. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx$

12. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$

13. $\int_{-\infty}^0 \frac{x}{(x^2+9)^2}\,dx$

14. $\int_5^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{3x+1}}\,dx$

15. $\int_2^\infty ue^{-u}\,du$

16. $\int_{-\infty}^3 \frac{x^3}{x^4+1}\,dx$

17. $\int_{2/\pi}^\infty \frac{\text{sen}\,(1/x)}{x^2}\,dx$

18. $\int_{-\infty}^\infty te^{-t^2}\,dt$

19. $\int_{-1}^\infty \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$

20. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx$

21. $\int_0^\infty e^{-x}\,\text{sen}\,x\,dx$

22. $\int_{-\infty}^0 e^x \cos 2x\,dx$

23. $\int_{1/2}^\infty \frac{x+1}{x^3}\,dx$

24. $\int_0^\infty (e^{-x} - e^{-2x})^2\,dx$

25. $\int_1^\infty \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right]dx$

26. $\int_3^\infty \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2+9}\right]dx$

27. $\int_2^\infty \frac{1}{x^2+6x+5}\,dx$

28. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$

29. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{x^2}{(x^3+1)^2}\,dx$

30. $\int_0^\infty \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

En los problemas 31-52, evalúe la integral impropia dada o demuestre que diverge.

31. $\int_0^5 \frac{1}{x}\,dx$

32. $\int_0^8 \frac{1}{x^{2/3}}\,dx$

33. $\int_0^1 \frac{1}{x^{0.99}}\,dx$

34. $\int_0^1 \frac{1}{x^{1.01}}\,dx$

35. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$

36. $\int_1^3 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

37. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^{5/3}}\,dx$

38. $\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$

39. $\int_{0}^{2} (x-1)^{-2/3}\,dx$

40. $\int_{0}^{27} \frac{e^{x^{1/3}}}{x^{2/3}}\,dx$

41. $\int_{0}^{1} x \ln x\,dx$

42. $\int_{1}^{e} \frac{1}{x \ln x}\,dx$

43. $\int_{0}^{\pi/2} \tan t\,dt$

44. $\int_{0}^{\pi/4} \frac{\sec^2 \theta}{\sqrt{\tan \theta}}\,d\theta$

45. $\int_{0}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\,dx$

46. $\int_{0}^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}\,dx$

47. $\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$

48. $\int_{0}^{3} \frac{1}{x^2-1}\,dx$

49. $\int_{0}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

50. $\int_{0}^{2} \frac{e^w}{\sqrt{e^w-1}}\,dw$

51. $\int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx$

52. $\int_{0}^{1} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right] dx$

En los problemas 53 y 54, use una sustitución para evaluar la integral dada.

53. $\int_{12}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+4)}\,dx$

54. $\int_{1}^{\infty} \sqrt{x}\,e^{-\sqrt{x}}\,dx$

Repaso de aplicaciones

En los problemas 55-58, encuentre el área bajo la gráfica de la función dada sobre el intervalo indicado.

55. $f(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$; $[1, \infty)$

56. $f(x) = \dfrac{10}{x^2+25}$; $(-\infty, 5]$

57. $f(x) = e^{-|x|}$; $(-\infty, \infty)$

58. $f(x) = |x|^3 e^{-x^4}$; $(-\infty, \infty)$

59. Encuentre el área de la región que está acotada por las gráficas de $y = 1/\sqrt{x-1}$ y $y = -1/\sqrt{x-1}$ sobre el intervalo $[1, 5]$.

60. Considere la región que está acotada por las gráficas de $y = 1/\sqrt{x+2}$ y $y = 0$ sobre el intervalo $[-2, 1]$.

a) Demuestre que el área de la región es finita.

b) Demuestre que el sólido de revolución formado al girar la región alrededor del eje x tiene volumen infinito.

61. Use una calculadora o un SAC para obtener las gráficas de

$$y = \frac{1}{x} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{1}{x(x^2+1)}.$$

Determine si el área de la región acotada por estas gráficas sobre el intervalo $[0, 1]$ es finita.

62. Encuentre el volumen del sólido de revolución formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = xe^{-x}$ y $y = 0$ sobre $[0, \infty)$ alrededor del eje x.

63. Encuentre el trabajo realizado contra la gravedad al levantar una carga de 10 000 kg hasta una distancia infinita por arriba de la superficie de la Luna. [*Sugerencia*: Revise la página 357 de la sección 6.8.]

64. El trabajo realizado por una fuerza externa para mover una prueba de carga q_0 radialmente desde el punto A hasta el punto B en el campo eléctrico de una carga q se define como

$$W = -\frac{qq_0}{4\pi e_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2}\,dr.$$

Vea la FIGURA 7.7.7.

a) Demuestre que $W = \dfrac{qq_0}{4\pi e_0}\left(\dfrac{1}{r_B} - \dfrac{1}{r_A}\right)$.

b) Encuentre el trabajo realizado para llevar la carga de prueba hasta una distancia infinita del punto B.

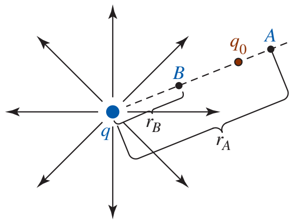


FIGURA 7.7.7 Carga en el problema 64

La **transformada de Laplace** de una función $y = f(x)$, definida por la integral

$$\mathscr{L}\{f(x)\} = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt,$$

es muy útil en algunas áreas de las matemáticas aplicadas. En los problemas 65-72, encuentre la transformada de Laplace de la función e imponga una restricción sobre s para la cual la integral converja.

65. $f(x) = 1$

66. $f(x) = x$

67. $f(x) = e^x$

68. $f(x) = e^{-5x}$

69. $f(x) = \operatorname{sen} x$

70. $f(x) = \cos 2x$

71. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$

72. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 3 \\ e^{-x}, & x \ge 3 \end{cases}$

73. Una **función de densidad de probabilidad** es cualquier función no negativa f definida sobre un intervalo $[a, b]$ para la cual $\int_a^b f(x)\,dx = 1$. Compruebe que para $k > 0$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ ke^{-kx}, & x \ge 0 \end{cases}$$

es una función de densidad de probabilidad sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

74. Otra integral de matemáticas aplicadas es la **función gamma**:

$$\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\,dt, \qquad x > 0.$$

a) Demuestre que $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

b) Use el resultado en el inciso *a*) para demostrar que

$$\Gamma(n+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n = n!,$$

donde el símbolo $n!$ se lee "n factorial". Debido a esta propiedad, la función gamma se denomina **función factorial generalizada**.

≡ Piense en ello

En los problemas 75-78, determine todos los valores de k tales que la integral dada sea convergente.

75. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^k}\,dx$

76. $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} x^{2k}\,dx$

77. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{kx}\,dx$

78. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^k}{x}\,dx$

La siguiente es una **prueba de comparación** para integrales impropias. Suponga que f y g son continuas y que $0 \le f(x) \le g(x)$ para $x \ge a$. Si $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ converge, entonces $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ también converge. En los problemas 79-82, use este resultado para demostrar que la integral dada es convergente.

79. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx$

80. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3 + 4}\,dx$

81. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x + e^x}\,dx$

82. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$

En la prueba de comparación para integrales impropias, si la integral $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ es divergente. En los problemas 83 y 84, use este resultado para demostrar que la integral dada es divergente.

83. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1 + e^{-2x}}{\sqrt{x}}\,dx$

84. $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{x^2}\,dx$

En los problemas 85-88, determine si la integral dada es convergente o divergente.

85. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}\,dx$

86. $\displaystyle\int_{-\infty}^{4} \frac{1}{(x - 1)^{2/3}}\,dx$

87. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

88. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{2x - 1}{\sqrt[3]{x^2 - x}}\,dx$

≡ Proyectos

89. Un clásico matemático El matemático y físico italiano **Evangelista Torricelli** (1608-1647) fue el primero en investigar las interesantes propiedades de la región acotada por las gráficas de $y = 1/x$ y $y = 0$ sobre el intervalo $[1, \infty)$.

a) Demuestre que el área de la región es infinita.

b) Demuestre, no obstante, que el sólido de revolución formado al girar la región alrededor del eje x tiene volumen finito. Al sólido mostrado en la FIGURA 7.7.8 se le denomina **trompeta de Gabriel** o **trompeta de Torricelli**. En algunas tradiciones religiosas se afirma que Gabriel es el ángel del juicio, el destructor de Sodoma y Gomorra, y a menudo se le identifica como el ángel que tocará la trompeta para anunciar el día del Juicio Final.

c) Use (3) de la sección 6.6 para demostrar que el área superficial S del sólido de revolución está dada por

$$S = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3}\,dx.$$

Use la versión de la prueba de comparación dada en los problemas 83 y 84 para demostrar que el área superficial es infinita.

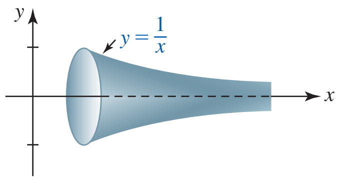


FIGURA 7.7.8 Trompeta de Gabriel en el problema 89

90. Un poco de historia: Regreso a la peste Un estudio de la epidemia de Bombay de 1905-1906 encontró que la tasa de mortalidad de la epidemia podía aproximarse con el modelo matemático

$$R = 890\,\operatorname{sech}^2(0.2t - 3.4),$$

donde R es el número de muertes por semana y t es el tiempo (en semanas) desde el inicio de la epidemia.

a) ¿Cuál es la tasa pico de mortalidad y cuándo ocurre?

b) Estime el número total de muertes al calcular la integral $\int_{-\infty}^{\infty} R_0(t)\,dt$.

c) Demuestre que más de 99% de muertes ocurrió en las 34 primeras semanas de la epidemia; es decir, compare $\int_0^{34} R(t)\,dt$ con el resultado en el inciso *b*).

d) Suponga que se desea usar un modelo "más simple" para encontrar la tasa de mortalidad de la forma

$$R_0 = \frac{a}{t^2 - 2bt + c},$$

donde $c > b^2$. Se quiere que este modelo tenga la misma tasa pico de mortalidad que el modelo original y también que el número de muertes, $\int_{-\infty}^{\infty} R_0(t)\,dt$, sea el mismo. Encuentre coeficientes a, b y c que satisfagan estos requerimientos.

e) Para el modelo en el inciso *d*), demuestre que menos de 89% de las muertes ocurre en las 34 primeras semanas de la epidemia.

7.8 Integración aproximada

Introducción La vida en matemáticas podría ser bastante placentera si la antiderivada de cualquier función pudiera expresarse en términos de funciones elementales como funciones polinomiales, racionales, exponenciales o trigonométricas. Como se analizó en las *Notas desde el aula* en la sección 5.5, éste no es el caso. Por tanto, el teorema 5.5.1 no puede usarse para evaluar cualquier integral definida. Algunas veces lo mejor que podemos esperar es una aproximación del valor de una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$. En esta última sección del capítulo consideraremos tres de estos procedimientos numéricos o de *integración aproximada*.

Revisión del capítulo 7

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-24.

A. Falso/verdadero

En los problemas 1-20, indique si la afirmación dada es falsa (F) o verdadera (V).

1. Bajo el cambio de variable $u = 2x + 3$, la integral $\displaystyle\int_1^5 \frac{4x}{\sqrt{2x+3}}\,dx$ se vuelve $\int_5^{13}(u^{1/2} - 3u^{-1/2})\,du$. _____

2. La sustitución trigonométrica $u = a\sec\theta$ es idónea para integrales que contienen $\sqrt{a^2+u^2}$. _____

3. El método de integración por partes se obtiene a partir de la regla del producto para diferenciación. _____

4. $\int_1^e 2x\ln x^2\,dx = e^2 + 1$. _____

5. Las fracciones parciales no son aplicables a $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^3}\,dx$. _____

6. Una descomposición en fracciones parciales de $x^2/(x+1)^2$ puede encontrarse al tener la forma $A/(x+1) + B/(x+1)^2$, donde A y B son constantes. _____

7. Para evaluar $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-1)^2}\,dx$, se supone que es posible encontrar constantes A, B, C y D tales que $\displaystyle\frac{1}{(x^2-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2-1} + \frac{Cx+D}{(x^2-1)^2}$. _____

8. Para evaluar $\int x^n e^x\,dx$, n un entero positivo, la integración por partes se usa $n-1$ veces. _____

9. Para evaluar $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$, es necesario usar $x = 3\,\text{sen}\,\theta$. _____

10. Cuando se evalúa, la integral $\int \text{sen}^3 x\cos^2 x\,dx$ puede expresarse como una suma de potencias de $\cos x$. _____

11. Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ y $\int_a^\infty g(x)\,dx$ convergen, entonces $\int_a^\infty [f(x) + g(x)]\,dx$ converge. _____

12. Si $\int_a^\infty [f(x) + g(x)]\,dx$ converge, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge. _____

13. Si f es continua para toda x y $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ diverge. _____

14. La integral $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ es definida por $\lim\limits_{x\to\infty} \int_{-t}^t f(x)\,dx$. _____

15. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{1+\ln x}\,dx$ es una integral impropia. _____

16. $\int_{-1}^1 x^{-3}\,dx = 0$. ______

17. $\int_0^4 x^{-0.999}\,dx$ converge. _____

18. $\int_1^\infty x^{-0.999}\,dx$ diverge. _____

19. $\displaystyle\int_2^\infty \left[\frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{e^x-1}\right]dx$ diverge, ya que $\displaystyle\int_2^\infty \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ diverge. _____

20. Si una función f positiva tiene una discontinuidad infinita en un número $[a, b]$, entonces el área bajo la gráfica sobre el intervalo también es infinita. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-6, llene los espacios en blanco.

1. $\int_0^\infty e^{-5x}\,dx =$ _______.

2. Si $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$, entonces $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx =$ ________.

3. Si $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$, entonces $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx =$ ________.

4. La integral $\int_1^\infty x^p\,dx$ converge para $p <$ _____ y diverge para $p \geq$ _____.

5. $\int_0^x e^{-2t}\,dt = \int_x^{\infty} e^{-2t}\,dt$ para $x =$ __________.

6. $\int \operatorname{sen} x \ln(\operatorname{sen} x)\,dx =$ __________.

C. Ejercicios

En los problemas 1-80, use los métodos de este capítulo, o de capítulos previos, para evaluar la integral dada.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+9}\,dx$

2. $\displaystyle\int e^{\sqrt{x+1}}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+4)^3}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+4}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{x^2}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x(x^2-4)}\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{x-5}{x^2+4}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x+27}}{x}\,dx$

11. $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^9}{x}\,dx$

12. $\displaystyle\int (\ln 3x)^2\,dx$

13. $\displaystyle\int t \operatorname{sen}^{-1} t\,dt$

14. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{(x-1)^2}\,dx$

15. $\displaystyle\int (x+1)^3(x-2)\,dx$

16. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^3(x-2)}\,dx$

17. $\displaystyle\int \ln(x^2+4)\,dx$

18. $\displaystyle\int 8te^{2t^2}\,dt$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+10x^3+25x^2}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+8x+25}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{x}{x^3+3x^2-9x-27}\,dx$

22. $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2-x)(x^2+3)}\,dx$

23. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t}\,dt$

24. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{(\cos\theta)^{3/2}}\,d\theta$

25. $\displaystyle\int \tan^{10} x \sec^4 x\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{x\tan x}{\cos x}\,dx$

27. $\displaystyle\int y\cos y\,dy$

28. $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x^3\,dx$

29. $\displaystyle\int (1+\operatorname{sen}^2 t)\cos^3 t\,dt$

30. $\displaystyle\int \frac{\sec^3\theta}{\tan\theta}\,d\theta$

31. $\displaystyle\int e^w(1+e^w)^5\,dw$

32. $\displaystyle\int (x-1)e^{-x}\,dx$

33. $\displaystyle\int \cot^3 4x\,dx$

34. $\displaystyle\int (3-\sec x)^2\,dx$

35. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^2 x\tan x\,dx$

36. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}^4 x\tan x\,dx$

37. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\,dx$

38. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}\,dx$

39. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx$

40. $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 2} \sqrt{e^x+1}\,dx$

41. $\displaystyle\int e^x\cos 3x\,dx$

42. $\displaystyle\int x(x-5)^9\,dx$

43. $\int \cos(\ln t)\, dt$

44. $\int \sec^2 x \ln(\tan x)\, dx$

45. $\int \cos\sqrt{x}\, dx$

46. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

47. $\int \cos x \operatorname{sen} 2x\, dx$

48. $\int (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\, dx$

49. $\int \sqrt{x^2 + 2x + 5}\, dx$

50. $\int \frac{1}{(8 - 2x - x^2)^{3/2}}\, dx$

51. $\int \tan^5 x \sec^3 x\, dx$

52. $\int \cos^4 \frac{x}{2}\, dx$

53. $\int \frac{t^5}{1 + t^2}\, dt$

54. $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

55. $\int \frac{5x^3 + x^2 + 6x + 1}{(x^2 + 1)^2}\, dx$

56. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x^2}\, dx$

57. $\int x \operatorname{sen}^2 x\, dx$

58. $\int (t + 1)^2 e^{3t}\, dt$

59. $\int e^{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} 2x\, dx$

60. $\int e^x \tan^2 e^x\, dx$

61. $\int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}\, dx$

62. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}\, dx$

63. $\int \operatorname{senh}^{-1} t\, dt$

64. $\int x \cot x^2\, dx$

65. $\int_3^8 \frac{1}{x\sqrt{x + 1}}\, dx$

66. $\int \frac{t + 3}{t^2 + 2t + 1}\, dt$

67. $\int \frac{\sec^4 3u}{\cot^{12} 3u}\, du$

68. $\int_0^2 x^5 \sqrt{x^2 + 4}\, dx$

69. $\int \frac{3 + \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx$

70. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{5 + \cos^2 x}\, dx$

71. $\int x(1 + \ln x)^2\, dx$

72. $\int x \cos^2 x\, dx$

73. $\int e^x e^{e^x}\, dx$

74. $\int \frac{1}{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x}}\, dx$

75. $\int \frac{2t}{1 + e^{t^2}}\, dt$

76. $\int \cos x \cos 2x\, dx$

77. $\int \frac{1}{\sqrt{1 - (5x + 2)^2}}\, dx$

78. $\int (\ln 2x) \ln x\, dx$

79. $\int \cos x \ln|\operatorname{sen} x|\, dx$

80. $\int \ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right) dx$

En los problemas 81-92, evalúe la integral dada o demuestre que diverge.

81. $\int_0^3 x(x^2 - 9)^{-2/3}\, dx$

82. $\int_0^5 x(x^2 - 9)^{-2/3}\, dx$

83. $\int_{-\infty}^0 (x + 1)e^x\, dx$

84. $\int_0^\infty \frac{e^{2x}}{e^{4x} + 1}\, dx$

85. $\int_3^\infty \frac{1}{1 + 5x}\, dx$

86. $\int_0^\infty \frac{x}{(x^2 + 4)^2}\, dx$

87. $\int_0^e \ln\sqrt{x}\, dx$

88. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 t}{\tan^3 t}\, dt$

89. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - \cos x}\,dx$

90. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{x + 1}\,dx$

91. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}\,dx$

92. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}\,dx$

En los problemas 93 y 94, demuestre el resultado que se proporciona.

93. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1 + x)^2}\,dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$

94. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x + 1)}\,dx = \pi$

En los problemas 95 y 96, use el hecho de que $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{t^2}\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_0^{x} e^{t^2}\,dt = \infty$ para evaluar el límite dado.

95. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x\displaystyle\int_0^{x} e^{t^2}\,dt}{e^{x^2}}$

96. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\displaystyle\int_0^{x} e^{t^2}\,dt}{xe^{x^2}}$

97. Encuentre el área de la región acotada por las gráficas de $y = e^{-x}$ y $y = e^{-3x}$ sobre $[0, \infty)$.

98. Considere la región acotada por las gráficas de $y = 1/\sqrt[3]{1 - x}$ y $y = 0$ en el intervalo $[0, 1]$.

a) Encuentre el área de la región.
b) Encuentre el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región alrededor del eje x.
c) Encuentre el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región alrededor de la recta $x = 1$.

99. Considere la gráfica de $f(x) = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$ dada en la FIGURA 7.R.1.

a) Determine si la región R_1, que está acotada entre las gráficas de f y su asíntota horizontal, es finita.
b) Determine si las regiones R_2 y R_3 tienen áreas finitas.

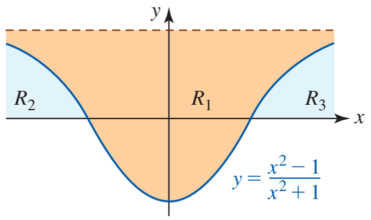


FIGURA 7.R.1 Gráfica para el problema 99

100. Use el método de Newton para encontrar el número x^* para el cual la región sombreada R en la FIGURA 7.R.2 es 99% del área total bajo la gráfica de $y = xe^{-x}$ sobre $[0, \infty)$.

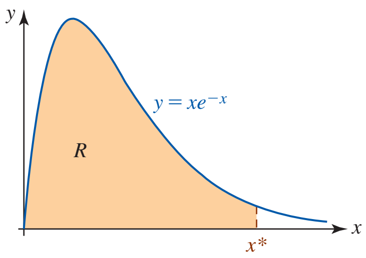


FIGURA 7.R.2 Gráfica para el problema 100

101. Una fuerza variable continua $f(x)$ actúa sobre el intervalo $[0, 1]$, donde F se mide en newtons y x en metros. Empíricamente se ha determinado que

x (m)	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$F(x)$ (N)	0	50	90	150	210	260

Use una técnica numérica idónea para aproximar el trabajo realizado sobre el intervalo.