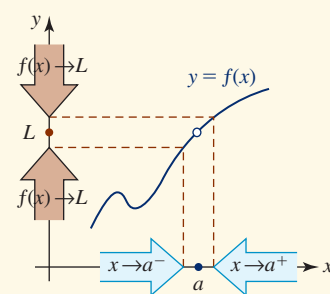
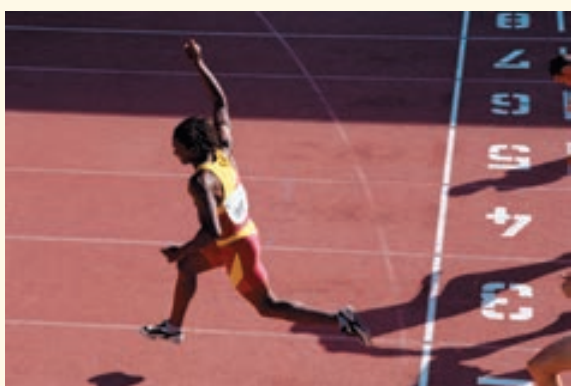


## Límite de una función



**En este capítulo** En un curso típico de cálculo se incluyen muchos temas. Sin embargo, los tres temas más importantes en este estudio son los conceptos de *límite*, *derivada* e *integral*. Cada uno de estos conceptos está relacionado con las funciones, razón por la cual empezamos con una revisión de algunos hechos importantes sobre funciones y sus gráficas.

Históricamente, para introducir los enunciados fundamentales del cálculo se han usado dos problemas: el *problema de la recta tangente* y el *problema del área*. En este capítulo y en capítulos posteriores veremos que la solución de ambos problemas implica el concepto de límite.

- 2.1 Límites: un enfoque informal
- 2.2 Teoremas sobre límites
- 2.3 Continuidad
- 2.4 Límites trigonométricos
- 2.5 Límites que involucran el infinito
- 2.6 Límites: un enfoque formal
- 2.7 El problema de la recta tangente

Revisión del capítulo 2

## 2.1 Límites: un enfoque informal

■ **Introducción** Las dos grandes áreas del cálculo, denominadas *cálculo diferencial* y *cálculo integral*, se basan en el concepto fundamental de *límite*. En esta sección, el enfoque que haremos a este importante concepto será intuitivo, centrado en la comprensión de *qué* es un límite mediante el uso de ejemplos numéricos y gráficos. En la siguiente sección nuestro enfoque será analítico; es decir, usaremos métodos algebraicos para *calcular* el valor del límite de una función.

■ **Límite de una función: enfoque informal** Considere la función

$$f(x) = \frac{16 - x^2}{4 + x} \quad (1)$$

cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales excepto  $-4$ . Aunque no es posible evaluar  $f$  en  $-4$  porque al sustituir  $-4$  por  $x$  se obtiene la cantidad indefinida  $0/0$ ,  $f(x)$  puede calcularse en cualquier número  $x$  que esté muy *próximo* a  $-4$ . Las dos tablas

$x$	$-4.1$	$-4.01$	$-4.001$	$x$	$-3.9$	$-3.99$	$-3.999$
$f(x)$	$8.1$	$8.01$	$8.001$	$f(x)$	$7.9$	$7.99$	$7.999$

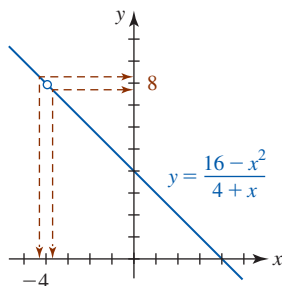
(2)


FIGURA 2.1.1 Cuando  $x$  está próxima a  $-4$ ,  $f(x)$  está cerca de  $8$

muestran que cuando  $x$  tiende a  $-4$  por la izquierda o por la derecha, parece que los valores de la función  $f(x)$  tienden a  $8$ ; en otras palabras, cuando  $x$  está próxima a  $-4$ ,  $f(x)$  está cerca de  $8$ . Para interpretar de manera gráfica la información numérica en (1), observe que para todo número  $x \neq -4$ , la función  $f$  puede simplificarse por cancelación:

$$f(x) = \frac{16 - x^2}{4 + x} = \frac{(4 + x)(4 - x)}{4 + x} = 4 - x.$$

Como se ve en la FIGURA 2.1.1, la gráfica de  $f$  es esencialmente la gráfica de  $y = 4 - x$  con la excepción de que la gráfica de  $f$  tiene un *hueco* en el punto que corresponde a  $x = -4$ . Para  $x$  suficientemente cerca de  $-4$ , representado por las dos puntas de flecha sobre el eje  $x$ , las dos puntas de flecha sobre el eje  $y$ , que representan los valores de la función  $f(x)$ , simultáneamente se aproximan cada vez más al número  $8$ . En efecto, en vista de los resultados numéricos en (2), las puntas de flecha pueden hacerse *tan próximas como se quiera* al número  $8$ . Se dice que  $8$  es el **límite** de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $-4$ .

■ **Definición informal** Suponga que  $L$  denota un número finito. El concepto de  $f(x)$  que tiende a  $L$  a medida que  $x$  tiende a un número  $a$  puede definirse informalmente de la siguiente manera.

- Si  $f(x)$  puede hacerse arbitrariamente próximo al número  $L$  al tomar  $x$  suficientemente cerca de, pero diferente de un número  $a$ , por la izquierda y por la derecha de  $a$ , entonces el **límite** de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $a$  es  $L$ .

■ **Notación** El análisis del concepto de límite se facilita al usar una notación especial. Si el símbolo de flecha  $\rightarrow$  representa la palabra *tiende*, entonces el simbolismo

$x \rightarrow a^-$  indica que  $x$  tiende al número  $a$  por la **izquierda**,

es decir, a través de los números que son menores que  $a$ , y

$x \rightarrow a^+$  significa que  $x$  tiende a  $a$  por la **derecha**,

es decir, a través de los números que son mayores que  $a$ . Finalmente, la notación

$x \rightarrow a$  significa que  $x$  tiende a  $a$  desde **ambos lados**,

en otras palabras, por la izquierda y por la derecha de  $a$  sobre una recta numérica. En la tabla izquierda en (2) se hace  $x \rightarrow -4^-$  (por ejemplo,  $-4.001$  está a la izquierda de  $-4$  sobre la recta numérica), mientras en la tabla derecha  $x \rightarrow -4^+$ .

■ **Límites laterales** En general, una función  $f(x)$  puede hacerse arbitrariamente próxima a un número  $L_1$  al tomar  $x$  suficientemente cerca, pero sin que sea igual, a un número  $a$  por la izquierda; entonces se escribe

$$f(x) \rightarrow L_1 \text{ cuando } x \rightarrow a^- \quad \text{o bien,} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1. \quad (3)$$

Se dice que el número  $L_1$  es el **límite por la izquierda de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $a$** . De manera semejante, si  $f(x)$  puede hacerse arbitrariamente próxima a un número  $L_2$  al tomar  $x$  suficientemente cerca a, pero diferente de, un número  $a$  por la *derecha*, entonces  $L_2$  es el **límite por la derecha de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $a$**  y se escribe

$$f(x) \rightarrow L_2 \text{ cuando } x \rightarrow a^+ \quad \text{o bien,} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2. \quad (4)$$

Las cantidades en (3) y (4) también se denominan **límites laterales**.

■ **Límites por dos lados** Si tanto el límite por la izquierda  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  como el límite por la derecha  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  existen y tienen un valor común  $L$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L,$$

entonces se dice que  $L$  es el **límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $a$**  y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L. \quad (5)$$

Se dice que un límite como (5) es **por los dos lados**. Vea la FIGURA 2.1.2. Puesto que las tablas numéricas en (2) sugieren que

$$f(x) \rightarrow 8 \text{ cuando } x \rightarrow -4^- \quad \text{y} \quad f(x) \rightarrow 8 \text{ cuando } x \rightarrow -4^+, \quad (6)$$

es posible sustituir las dos declaraciones simbólicas en (6) por la declaración

$$f(x) \rightarrow 8 \text{ cuando } x \rightarrow -4 \quad \text{o, en forma equivalente,} \quad \lim_{x \rightarrow -4} \frac{16 - x^2}{4 + x} = 8. \quad (7)$$

■ **Existencia o no existencia** Por supuesto, un límite (por un lado o por dos lados) no tiene por qué existir. Pero es importante no olvidar lo siguiente:

- La existencia de un límite de una función  $f$  cuando  $x$  tiende a  $a$  (desde un lado o desde ambos lados) no depende de si  $f$  está definida en  $a$ , sino sólo de si está definida para  $x$  cerca del número  $a$ .

Por ejemplo, si la función en (1) se modifica de la siguiente manera

$$f(x) = \begin{cases} \frac{16 - x^2}{4 + x}, & x \neq -4 \\ 5, & x = -4, \end{cases}$$

entonces  $f(-4)$  está definida y  $f(-4) = 5$ , pero  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{16 - x^2}{4 + x} = 8$ . Vea la FIGURA 2.1.3. En general,

el límite por los dos lados  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  **no existe**

- si alguno de los dos límites laterales,  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  o  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  no existe, o
- si  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$  y  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$ , pero  $L_1 \neq L_2$ .

### EJEMPLO 1 Un límite que existe

La gráfica de la función  $f(x) = -x^2 + 2x + 2$  se muestra en la FIGURA 2.1.4. Como se observa en la gráfica y en las tablas acompañantes, parece válido que

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -6 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = -6$$

y, en consecuencia,  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -6$ .

$x \rightarrow 4^-$	3.9	3.99	3.999
$f(x)$	-5.41000	-5.94010	-5.99400

$x \rightarrow 4^+$	4.1	4.01	4.001
$f(x)$	-6.61000	-6.06010	-6.00600

Observe que en el ejemplo 1 la función dada ciertamente está definida en 4, pero en ningún momento se sustituye  $x = 4$  en la función para encontrar el valor de  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ .

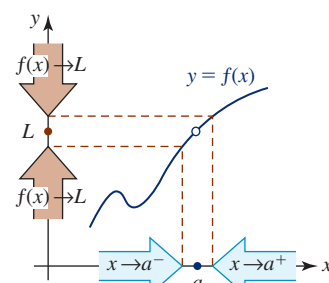


FIGURA 2.1.2  $f(x) \rightarrow L$  cuando  $x \rightarrow a$  si y sólo si  $f(x) \rightarrow L$  cuando  $x \rightarrow a^-$  y  $f(x) \rightarrow L$  cuando  $x \rightarrow a^+$

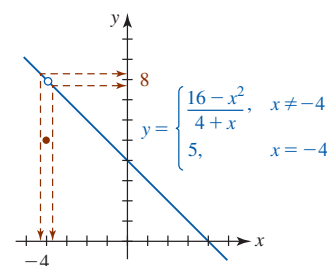


FIGURA 2.1.3 El hecho de que  $f$  esté definida o no en  $a$  es irrelevante con respecto a la existencia del límite de  $f(x)$  cuando  $x \rightarrow a$

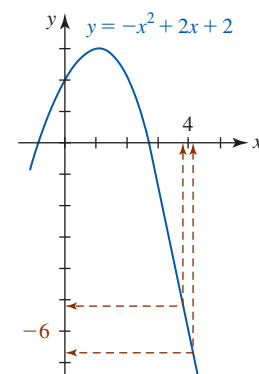


FIGURA 2.1.4 Gráfica de la función en el ejemplo 1

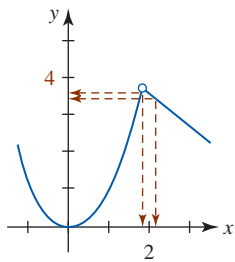


FIGURA 2.1.5 Gráfica de la función en el ejemplo 2

### EJEMPLO 2 Un límite que existe

La gráfica de la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ -x + 6, & x > 2 \end{cases}$$

se muestra en la FIGURA 2.1.5. Observe que  $f(2)$  no está definido, aunque esto no tiene ninguna consecuencia cuando se considera  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ . A partir de la gráfica y de las tablas acompañantes,

$x \rightarrow 2^-$	1.9	1.99	1.999
$f(x)$	3.61000	3.96010	3.99600

$x \rightarrow 2^+$	2.1	2.01	2.001
$f(x)$	3.90000	3.99000	3.99900

observamos que cuando  $x$  se hace próxima a 2,  $f(x)$  puede hacerse arbitrariamente próxima a 4, y así

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4.$$

Es decir,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ .

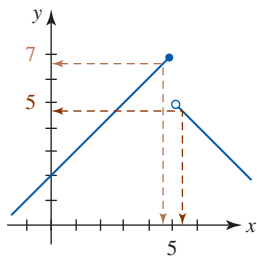


FIGURA 2.1.6 Gráfica de la función en el ejemplo 3

### EJEMPLO 3 Un límite que no existe

La gráfica de la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq 5 \\ -x + 10, & x > 5 \end{cases}$$

se muestra en la FIGURA 2.1.6. A partir de la gráfica y de las tablas acompañantes, parece que cuando  $x$  se hace próxima a 5 a través de números menores que 5,  $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 7$ . Luego, cuando  $x$  tiende a 5 a través de números mayores que 5 parece que  $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 5$ . Pero puesto que

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x),$$

se concluye que  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$  no existe.

$x \rightarrow 5^-$	4.9	4.99	4.999
$f(x)$	6.90000	6.99000	6.99900

$x \rightarrow 5^+$	5.1	5.01	5.001
$f(x)$	4.90000	4.99000	4.99900

La función entero mayor se analizó en la sección 1.1.

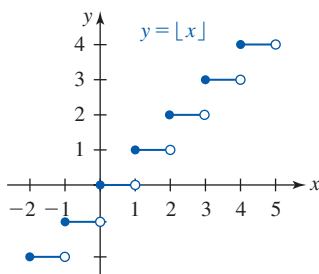


FIGURA 2.1.7 Gráfica de la función en el ejemplo 4

### EJEMPLO 4 Un límite que no existe

Recuerde que la **función entero mayor** o **parte entera**  $f(x) = [x]$  se define como el mayor entero que es menor o igual que  $x$ . El dominio de  $f$  es el conjunto de números reales  $(-\infty, \infty)$ . A partir de la gráfica en la FIGURA 2.1.7 vemos que  $f(n)$  está definida para todo entero  $n$ ; a pesar de ello, para cada entero  $n$ ,  $\lim_{x \rightarrow n} f(x)$  no existe. Por ejemplo, cuando  $x$  tiende, por ejemplo, al número 3, los dos límites laterales existen pero sus valores son diferentes:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 \quad \text{mientras que} \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3. \quad (8)$$

En general, para un entero  $n$ ,

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = n - 1 \quad \text{mientras que} \quad \lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = n.$$

### EJEMPLO 5 Un límite por la derecha

A partir de la FIGURA 2.1.8 debe resultar evidente que  $f(x) = \sqrt{x} \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow 0^+$ , es decir,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0.$$

Sería incorrecto escribir  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$  puesto que esta notación implica la connotación de que los límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales a 0. En este caso  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$  no existe puesto que  $f(x) = \sqrt{x}$  no está definida para  $x < 0$ .

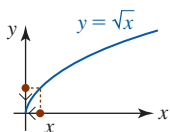


FIGURA 2.1.8 Gráfica de la función en el ejemplo 5

Si  $x = a$  es una asíntota vertical para la gráfica de  $y = f(x)$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  nunca existe porque los valores de la función  $f(x)$  deben volverse sin límite desde por lo menos un lado de la recta  $x = a$ .

### EJEMPLO 6 Un límite que no existe

Una asíntota vertical siempre corresponde a una ruptura infinita en la gráfica de la función  $f$ . En la FIGURA 2.1.9 observamos que el eje  $y$  o  $x = 0$  es una asíntota vertical para la gráfica de  $f(x) = 1/x$ . Las tablas

$x \rightarrow 0^-$	-0.1	-0.01	-0.001
$f(x)$	-10	-100	-1 000

$x \rightarrow 0^+$	0.1	0.01	0.001
$f(x)$	10	100	1 000

muestran claramente que los valores de la función  $f(x)$  se vuelven sin límite en valor absoluto cuando se tiende a 0. En otras palabras,  $f(x)$  no tiende a un número real cuando  $x \rightarrow 0^-$  ni cuando  $x \rightarrow 0^+$ . En consecuencia, ni el límite por la izquierda ni el límite por la derecha existen cuando  $x$  tiende a 0. Por tanto, es posible concluir que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  no existe. ■

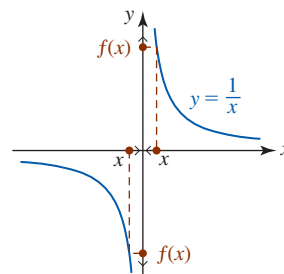


FIGURA 2.1.9 Gráfica de la función en el ejemplo 6

### EJEMPLO 7 Un límite trigonométrico importante

Para calcular las funciones trigonométricas  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$ , etc., es importante darse cuenta de que la variable  $x$  es un número real o un ángulo medido en radianes. Con eso en mente, considere los valores numéricos de  $f(x) = (\sin x)/x$  cuando  $x \rightarrow 0^+$  dados en la tabla siguiente.

$x \rightarrow 0^+$	0.1	0.01	0.001	0.0001
$f(x)$	0.99833416	0.99998333	0.99999983	0.99999999

Resulta fácil ver que se cumplen los mismos resultados proporcionados en la tabla cuando  $x \rightarrow 0^-$ . Debido a que  $\sin x$  es una función impar, para  $x > 0$  y  $-x < 0$ , se tiene  $\sin(-x) = -\sin x$  y en consecuencia,

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x).$$

Como puede verse en la FIGURA 2.1.10,  $f$  es una función par. La tabla de valores numéricos, así como la gráfica de  $f$  sugieren fuertemente el siguiente resultado:

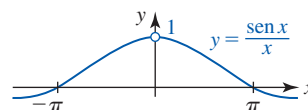


FIGURA 2.1.10 Gráfica de la función en el ejemplo 7

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (9) \quad \blacksquare$$

El límite en (9) es un resultado muy importante que se usará en la sección 3.4. Otro límite trigonométrico que se le pedirá comprobar como ejercicio está dado por

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0. \quad (10)$$

Vea el problema 43 en los ejercicios 2.1. Debido a su importancia, tanto (9) como (10) se demostrarán en la sección 2.4.

■ **Una forma indeterminada** Se dice que el límite de un cociente  $f(x)/g(x)$ , donde tanto el numerador como el denominador tienden a 0 cuando  $x \rightarrow a$ , tiene una **forma indeterminada**  $0/0$ . El límite (7) en el análisis inicial tenía esta forma indeterminada. Muchos límites importantes, como (9) y (10), y el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

que constituye la columna vertebral del cálculo diferencial, también tienen la forma indeterminada  $0/0$ .

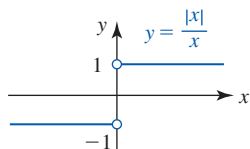


FIGURA 2.1.11 Gráfica de la función en el ejemplo 8

### EJEMPLO 8 Una forma indeterminada

El límite  $\lim_{x \rightarrow 0} |x|/x$  tiene la forma indeterminada  $0/0$ , pero, a diferencia de (7), (9) y (10), este límite no existe. Para ver por qué, analizaremos la gráfica de la función  $f(x) = |x|/x$ . Para  $x \neq 0$ ,  $|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$  y así reconocemos a  $f$  como la función definida por partes

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases} \quad (11)$$

A partir de (11) y de la gráfica de  $f$  de la FIGURA 2.1.11 debe resultar evidente que los dos límites de  $f$ , izquierdo y derecho, existen y

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1.$$

Debido a que estos límites laterales son diferentes, se concluye que  $\lim_{x \rightarrow 0} |x|/x$  no existe. ■

### NOTAS DESDE EL AULA

Aunque las gráficas y tablas de valores funcionales pueden ser convincentes para determinar si un límite existe o no, usted ciertamente está enterado de que todas las calculadoras y computadoras funcionan sólo con aproximaciones, y que las gráficas pueden trazarse de manera inexacta. Un uso ciego de las calculadoras también puede conducir a una conclusión falsa. Por ejemplo, se sabe que  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\pi/x)$  no existe, pero a partir de los valores tabulares

$x \rightarrow 0$	$\pm 0.1$	$\pm 0.01$	$\pm 0.001$
$f(x)$	0	0	0

podría concluirse en forma natural que  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\pi/x) = 0$ . Por otra parte, puede demostrarse que el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2} \quad (12)$$

existe y es igual a  $\frac{1}{4}$ . Vea el ejemplo 11 en la sección 2.2. Con calculadora se obtiene

$x \rightarrow 0$	$\pm 0.00001$	$\pm 0.000001$	$\pm 0.0000001$
$f(x)$	0.200000	0.000000	0.000000

El problema al calcular (12) para toda  $x$  próxima a 0 es que en forma correspondiente,  $\sqrt{x^2 + 4}$  está muy próximo a 2. Cuando se restan dos números casi iguales en una calculadora, es posible que ocurra una pérdida de cifras significativas debido al error por redondeo.

### Ejercicios 2.1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-8.

#### Fundamentos

En los problemas 1-14, trace la gráfica de la función para encontrar el límite dado, o concluya que no existe.

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 2)$

2.  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

4.  $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x - 1}$

5.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x}{x}$

7.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x - 3|}{x - 3}$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - x}{x}$

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x}$

10.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

11.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  donde  $f(x) = \begin{cases} x + 3, & x < 0 \\ -x + 3, & x \geq 0 \end{cases}$

12.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  donde  $f(x) = \begin{cases} x, & x < 2 \\ x + 1, & x \geq 2 \end{cases}$

13.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  donde  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x < 2 \\ 1, & x = 2 \\ x^2 - 6x + 8, & x > 2 \end{cases}$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ donde } f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ \sqrt{x} - 1, & x > 0 \end{cases}$$

En los problemas 15-18, use la gráfica dada para encontrar el valor de cada cantidad, o concluya que no existe.

$$a) f(1) \quad b) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad c) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad d) \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

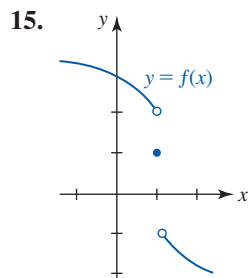


FIGURA 2.1.12 Gráfica para el problema 15

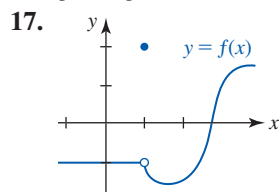


FIGURA 2.1.14 Gráfica para el problema 17

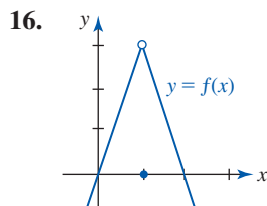


FIGURA 2.1.13 Gráfica para el problema 16

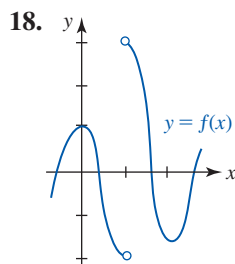


FIGURA 2.1.15 Gráfica para el problema 18

En los problemas 19-28, cada límite tiene el valor 0, pero alguna notación es incorrecta. Si la notación es incorrecta, escriba la declaración correcta.

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} = 0$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[4]{x} = 0$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1-x} = 0$$

$$22. \lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{x+2} = 0$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} [x] = 0$$

$$24. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} [x] = 0$$

$$25. \lim_{x \rightarrow \pi} \sin x = 0$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 1} \cos^{-1} x = 0$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{9-x^2} = 0$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$$

En los problemas 29 y 30, use la gráfica dada para encontrar cada límite, o concluya que no existe.

$$29. \begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) & b) \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \\ c) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) & d) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \\ e) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) & f) \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \end{array}$$

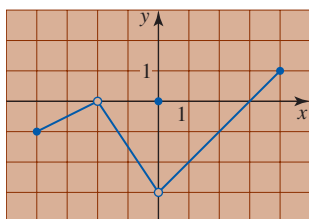


FIGURA 2.1.16 Gráfica para el problema 29

$$30. \begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow -5} f(x) & b) \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) \\ c) \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) & d) \lim_{x \rightarrow -3} f(x) \\ e) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) & f) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \end{array}$$

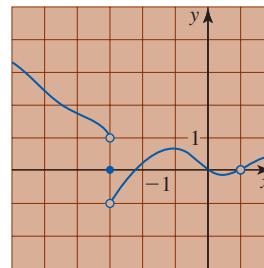


FIGURA 2.1.17 Gráfica para el problema 30

En los problemas 31-34, trace una gráfica de la función  $f$  con las propiedades dadas.

$$31. f(-1) = 3, f(0) = -1, f(1) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ no existe}$$

$$32. f(-2) = 3, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1, f(1) = -2$$

$$33. f(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3, f(1) \text{ está indefinido}, f(3) = 0$$

$$34. f(-2) = 2, f(x) = 1, -1 \leq x \leq 1, \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ no existe}, f(2) = 3$$

### Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 35-40, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función dada  $f$  sobre el intervalo  $[-0.5, 0.5]$ . Use la gráfica para conjeturar el valor de  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , o concluya que el límite no existe.

$$35. f(x) = \cos \frac{1}{x} \quad 36. f(x) = x \cos \frac{1}{x}$$

$$37. f(x) = \frac{2 - \sqrt{4+x}}{x}$$

$$38. f(x) = \frac{9}{x} [\sqrt{9-x} - \sqrt{9+x}]$$

$$39. f(x) = \frac{e^{-2x} - 1}{x} \quad 40. f(x) = \frac{\ln|x|}{x}$$

En los problemas 41-50, proceda como en los ejemplos 3, 6 y 7 y use una calculadora para construir tablas de valores funcionales. Conjeture el valor de cada límite o concluya que no existe.

$$41. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6\sqrt{x} - 6\sqrt{2x-1}}{x-1}$$

$$42. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$$

$$43. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

$$44. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$45. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x}$$

$$46. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

$$47. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - 2}{x-4}$$

$$48. \lim_{x \rightarrow 3} \left[ \frac{6}{x^2-9} - \frac{6\sqrt{x-2}}{x^2-9} \right]$$

$$49. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x - 2}{x-1}$$

$$50. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x+2}$$

## 2.2 Teoremas sobre límites

■ **Introducción** La intención del análisis informal en la sección 2.1 fue proporcionarle una comprensión intuitiva de cuándo un límite existe o no. Sin embargo, no es aconsejable ni práctico, en ninguna instancia, llegar a una conclusión respecto a la existencia de un límite con base en una gráfica o tabla de valores numéricos. Debe ser posible evaluar un límite, o concluir su no existencia, de alguna forma mecánica. Los teoremas que se considerarán en esta sección establecen tales mecanismos. Las demostraciones de algunos de estos resultados se muestran en el apéndice.

El primer teorema proporciona dos resultados básicos que se usarán en todo el análisis de esta sección.

### Teorema 2.2.1 Dos límites fundamentales

- i)  $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ , donde  $c$  es una constante.
- ii)  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

Aunque ambas partes del teorema 2.2.1 requieren una demostración formal, el teorema 2.2.1ii) es casi tautológico cuando se plantea verbalmente:

- El límite de  $x$  cuando  $x$  tiende a  $a$  es  $a$ .

En el apéndice se proporciona una demostración del teorema 2.2.1i).

### EJEMPLO 1 Uso del teorema 2.2.1

- a) A partir del teorema 2.2.1i),

$$\lim_{x \rightarrow 2} 10 = 10 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 6} \pi = \pi.$$

- b) A partir del teorema 2.2.1ii),

$$\lim_{x \rightarrow 2} x = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0. \quad \blacksquare$$

El límite de una constante por una función  $f$  es la constante por el límite de  $f$  cuando  $x$  tiende a un número  $a$ .

### Teorema 2.2.2 Límite de una función multiplicada por una constante

Si  $c$  es una constante, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Ahora es posible empezar a usar los teoremas combinados.

### EJEMPLO 2 Uso de los teoremas 2.2.1 y 2.2.2

A partir de los teoremas 2.2.1ii) y 2.2.2,

a)  $\lim_{x \rightarrow 8} 5x = 5 \lim_{x \rightarrow 8} x = 5 \cdot 8 = 40$

b)  $\lim_{x \rightarrow -2} \left(-\frac{3}{2}x\right) = -\frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow -2} x = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (-2) = 3. \quad \blacksquare$

El siguiente teorema es particularmente importante porque constituye un medio para calcular límites de manera algebraica.



**Teorema 2.2.3** Límites de una suma, un producto y un cociente

Suponga que  $a$  es un número real y que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  existen. Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ , entonces

$$i) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \pm L_2,$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = L_1 L_2, \text{ y}$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0.$$

El teorema 2.2.3 puede plantearse coloquialmente como

- Si ambos límites existen, entonces
  - i) el límite de una suma es la suma de los límites,
  - ii) el límite de un producto es el producto de los límites y
  - iii) el límite de un cociente es el cociente de los límites, en el supuesto que el límite del denominador no es cero.

**Nota:** Si todos los límites existen, entonces el teorema 2.2.3 también es válido para límites laterales; es decir, la notación  $x \rightarrow a$  en el teorema 2.2.3 puede sustituirse por  $x \rightarrow a^-$  o por  $x \rightarrow a^+$ . Además, el teorema 2.2.3 puede extenderse a diferencias, sumas, productos y cocientes que impliquen más de dos funciones. Consulte el apéndice para ver una demostración del teorema 2.2.3.

**EJEMPLO 3** Uso del teorema 2.2.3

Evalúe  $\lim_{x \rightarrow 5} (10x + 7)$ .

**Solución** Por los teoremas 2.2.1 y 2.2.2, sabemos que  $\lim_{x \rightarrow 5} 7$  y  $\lim_{x \rightarrow 5} 10x$  existen. Por tanto, a partir del teorema 2.2.3i),

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} (10x + 7) &= \lim_{x \rightarrow 5} 10x + \lim_{x \rightarrow 5} 7 \\ &= 10 \lim_{x \rightarrow 5} x + \lim_{x \rightarrow 5} 7 \\ &= 10 \cdot 5 + 7 = 57. \end{aligned}$$

■ **Límite de una potencia** El teorema 2.2.3ii) puede usarse para calcular el límite de una potencia entera positiva de una función. Por ejemplo, si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , entonces por el teorema 2.2.3ii) con  $g(x) = f(x)$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^2 = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot f(x)] = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right) = L^2.$$

Por el mismo razonamiento es posible aplicar el teorema 2.2.3ii) al caso general en que  $f(x)$  es un factor  $n$  veces. Este resultado se plantea en el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.4** Límites de una potencia

Sean  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $n$  un entero positivo. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right]^n = L^n.$$

Para el caso especial  $f(x) = x^n$ , el resultado proporcionado en el teorema 2.2.4 produce

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n. \quad (1)$$

**EJEMPLO 4** Uso de (1) y el teorema 2.2.3

Evalúe

$$a) \lim_{x \rightarrow 10} x^3 \qquad b) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{5}{x^2}.$$

**Solución**

a) Por (1),

$$\lim_{x \rightarrow 10} x^3 = 10^3 = 1\,000.$$

b) Por el teorema 2.2.1 y (1) sabemos que  $\lim_{x \rightarrow 4} 5 = 5$  y  $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 = 16 \neq 0$ . En consecuencia, por el teorema 2.2.3iii),

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5}{x^2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 4} 5}{\lim_{x \rightarrow 4} x^2} = \frac{5}{4^2} = \frac{5}{16}.$$

**EJEMPLO 5** Uso del teorema 2.2.3Evalúe  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5x + 6)$ .**Solución** Debido a los teoremas 2.2.1, 2.2.2 y (1), todos los límites existen. En consecuencia, por el teorema 2.2.3i),

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5x + 6) = \lim_{x \rightarrow 3} x^2 - \lim_{x \rightarrow 3} 5x + \lim_{x \rightarrow 3} 6 = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0.$$

**EJEMPLO 6** Uso de los teoremas 2.2.3 y 2.2.4Evalúe  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1)^{10}$ .**Solución** Primero, por el teorema 2.2.3i) se observa que

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} 3x - \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 2.$$

Luego, por el teorema 2.2.4 se concluye que

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1)^{10} = \left[ \lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1) \right]^{10} = 2^{10} = 1\,024.$$

■ **Límite de funciones polinomiales** Algunos límites pueden evaluarse por *sustitución directa*. Para calcular el límite de una función polinomial general pueden usarse (1) y el teorema 2.2.3i). Si

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

es una función polinomial, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} c_n x^n + \lim_{x \rightarrow a} c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \lim_{x \rightarrow a} c_1 x + \lim_{x \rightarrow a} c_0 \\ &= c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \cdots + c_1 a + c_0. \end{aligned}$$

← *f* está definida en  $x = a$  y este límite es  $f(a)$

En otras palabras, para evaluar el límite de una función polinomial  $f$  cuando  $x$  tiende a un número real  $a$ , sólo es necesario evaluar la función en  $x = a$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \tag{2}$$

Al revisar el ejemplo 5 observamos que  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ , donde  $f(x) = x^2 - 5x + 6$  está dada por  $f(3) = 0$ .

Debido a que una función racional  $f$  es el cociente de dos polinomios  $p(x)$  y  $q(x)$ , por (2) y por el teorema 2.2.3iii) se concluye que el límite de una función racional  $f(x) = p(x)/q(x)$  también puede encontrarse al evaluar  $f$  en  $x = a$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}. \tag{3}$$

Por supuesto, es necesario agregar a (3) el siempre importante requisito de que el límite del denominador no sea cero; es decir,  $q(a) \neq 0$ .

### EJEMPLO 7 Uso de (2) y (3)

Evalúe  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x - 4}{8x^2 + 2x - 2}$ .

**Solución**  $f(x) = \frac{3x - 4}{8x^2 + 2x - 2}$  es una función racional, de modo que si se identifican los polinomios  $p(x) = 3x - 4$  y  $q(x) = 8x^2 + 2x - 2$ , entonces por (2)

$$\lim_{x \rightarrow -1} p(x) = p(-1) = -7 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -1} q(x) = q(-1) = 4.$$

Puesto que  $q(-1) \neq 0$ , por (3) se concluye que

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x - 4}{8x^2 + 2x - 2} = \frac{p(-1)}{q(-1)} = \frac{-7}{4} = -\frac{7}{4}.$$

Usted no debe quedarse con la impresión de que *siempre* es posible encontrar el límite de una función al sustituir el número  $a$  *directamente en la función*.

### EJEMPLO 8 Uso del teorema 2.2.3

Evalúe  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 + x - 2}$ .

**Solución** En este límite la función es racional, pero si en la función sustituimos  $x = 1$ , se observa que el límite tiene la forma indeterminada  $0/0$ . No obstante, si *primero* se simplifica, después puede aplicarse el teorema 2.2.3iii):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 + x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 2)} \quad \leftarrow \text{cancelar es válido en el supuesto que } x \neq 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 2} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 1}{\lim_{x \rightarrow 1} (x + 2)} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Si un límite de una función racional tiene la forma indeterminada  $0/0$  cuando  $x \rightarrow a$ , entonces por el teorema del factor del álgebra  $x - a$  debe ser un factor tanto del numerador como del denominador. Estas cantidades se factorizan y se cancela el factor  $x - a$ .

Algunas veces es posible afirmar a primera vista *cuándo no existe un límite*.

### Teorema 2.2.5 Un límite que no existe

Sean  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \neq 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

no existe.

**DEMOSTRACIÓN** Se proporcionará una demostración indirecta de este resultado, basada en el teorema 2.2.3. Suponga que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \neq 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , y también que  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x))$  existe y que es igual a  $L_2$ . Entonces

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left( g(x) \cdot \frac{f(x)}{g(x)} \right), \quad g(x) \neq 0, \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \right) = 0 \cdot L_2 = 0. \end{aligned}$$

El teorema se ha demostrado por contradicción de la hipótesis  $L_1 \neq 0$ .

**EJEMPLO 9** Uso de los teoremas 2.2.3 y 2.2.5

Evalúe

$$a) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x}{x-5} \quad b) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 10x - 25}{x^2 - 4x - 5} \quad c) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2 - 10x + 25}.$$

**Solución** Cada función en los tres incisos del ejemplo es racional.

- a) Puesto que el límite del denominador  $x$  es 5, pero el límite del denominador  $x - 5$  es 0, concluimos del teorema 2.2.5 que el límite no existe.
- b) Al sustituir  $x = 5$ , tanto el denominador como el numerador se hacen iguales a 0, de modo que el límite tiene la forma indeterminada  $0/0$ . Por el teorema del factor del álgebra,  $x - 5$  es un factor tanto del numerador como del denominador. Así,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 10x - 25}{x^2 - 4x - 5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)^2}{(x-5)(x+1)} \quad \leftarrow \text{se cancela el factor } x-5 \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x+1} \\ &= \frac{0}{6} = 0. \quad \leftarrow \text{el límite existe} \end{aligned}$$

- c) De nuevo, el límite tiene la forma indeterminada  $0/0$ . Después de factorizar el denominador y cancelar los factores, por la manipulación algebraica

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2 - 10x + 25} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{(x-5)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x-5} \end{aligned}$$

se ve que el límite no existe puesto que el límite del numerador en la última expresión ahora es 1, pero el límite del denominador es 0. ■

■ **Límite de una raíz** El límite de la raíz  $n$ -ésima de una función es la raíz  $n$ -ésima del límite siempre que el límite exista y tenga una raíz  $n$ -ésima real. El siguiente teorema resume este hecho.

**Teorema 2.2.6** Límite de una raíz

Sean  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $n$  un entero positivo. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L},$$

en el supuesto que  $L \geq 0$  cuando  $n$  es par.

Un caso especial inmediato del teorema 2.2.6 es

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}, \quad (4)$$

en el supuesto que  $a \geq 0$  cuando  $n$  es par. Por ejemplo,  $\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x} = [\lim_{x \rightarrow 9} x]^{1/2} = 9^{1/2} = 3$ .

**EJEMPLO 10** Uso de (4) y del teorema 2.2.3

Evalúe  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x - \sqrt[3]{x}}{2x + 10}.$

**Solución** Puesto que  $\lim_{x \rightarrow -8} (2x + 10) = -6 \neq 0$ , por el teorema 2.2.3iii) y (4) observamos que

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x - \sqrt[3]{x}}{2x + 10} = \frac{\lim_{x \rightarrow -8} x - [\lim_{x \rightarrow -8} x]^{1/3}}{\lim_{x \rightarrow -8} (2x + 10)} = \frac{-8 - (-8)^{1/3}}{-6} = \frac{-6}{-6} = 1. \quad \blacksquare$$

Cuando el límite de una función algebraica que implica radicales tiene la forma indeterminada  $0/0$ , algo que puede intentarse es racionalizar el numerador o el denominador.

**EJEMPLO 11** Racionalización de un numerador

Evalúe  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2}$ .

**Solución** Puesto que  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 4)} = 2$  por inspección vemos que el límite dado tiene la forma indeterminada  $0/0$ . Sin embargo, al racionalizar el numerador obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 4} + 2}{\sqrt{x^2 + 4} + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4) - 4}{x^2(\sqrt{x^2 + 4} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2 + 4} + 2)} \quad \leftarrow \text{se cancelan las } x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4} + 2}. \quad \leftarrow \text{el límite ya no es } 0/0 \end{aligned}$$

Ahora ya es posible que apliquemos los teoremas 2.2.3 y 2.2.6:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4} + 2} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 4)} + \lim_{x \rightarrow 0} 2} \\ &= \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

En caso de que alguien se pregunte si puede haber más de un límite de una función  $f(x)$  cuando  $x \rightarrow a$ , para que quede registro se plantea el último teorema.

**Teorema 2.2.7** Existencia implica unicidad

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe, entonces es único.

**límites** NOTAS DESDE EL AULA

En matemáticas es tan importante saber lo que un teorema o una definición *no* dice, así como saber lo que dice.

- i) La propiedad i) del teorema 2.2.3 no dice que el límite de una suma *siempre* es la suma de los límites. Por ejemplo,  $\lim_{x \rightarrow 0} (1/x)$  no existe, de modo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right] \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}.$$

A pesar de ello, puesto que  $1/x - 1/x = 0$  para  $x \neq 0$ , el límite de la diferencia existe.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

- ii) En forma semejante, el límite de un producto puede existir y no obstante no ser igual al producto de los límites. Por ejemplo,  $x/x = 1$ , para  $x \neq 0$ , y así

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( x \cdot \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

pero 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( x \cdot \frac{1}{x} \right) \neq \left( \lim_{x \rightarrow 0} x \right) \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \right)$$

puesto que  $\lim_{x \rightarrow 0} (1/x)$  no existe.

En la sección “Notas desde el aula”, al final de la sección 2.1, vimos este límite en la ecuación (12).

iii) El teorema 2.2.5 no afirma que el límite de un cociente no existe cuando el límite del denominador es cero. El ejemplo 8 es un contraejemplo de esa interpretación. No obstante, el teorema 2.2.5 establece que el límite de un cociente no existe cuando el límite del denominador es cero y el límite del numerador no es cero.

**Ejercicios 2.2**

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-8.

**Fundamentos**

En los problemas 1-52, encuentre el límite dado, o concluya que no existe.

1.  $\lim_{x \rightarrow -4} 15$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \pi$
3.  $\lim_{x \rightarrow 3} (-4)x$
4.  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 9)$
5.  $\lim_{x \rightarrow -2} x^2$
6.  $\lim_{x \rightarrow 5} (-x^3)$
7.  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 4x + 1)$
8.  $\lim_{x \rightarrow 6} (-5x^2 + 6x + 8)$
9.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 4}{x - 7}$
10.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 5}{3x}$
11.  $\lim_{t \rightarrow 1} (3t - 1)(5t^2 + 2)$
12.  $\lim_{t \rightarrow -2} (t + 4)^2$
13.  $\lim_{s \rightarrow 7} \frac{s^2 - 21}{s + 2}$
14.  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 6x}{x^2 - 7x + 6}$
15.  $\lim_{x \rightarrow -1} (x + x^2 + x^3)^{135}$
16.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x - 4)^{40}}{(x^2 - 2)^{36}}$
17.  $\lim_{x \rightarrow 6} \sqrt{2x - 5}$
18.  $\lim_{x \rightarrow 8} (1 + \sqrt[3]{x})$
19.  $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{t}}{t^2 + t - 2}$
20.  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 \sqrt{x^2 + 5x + 2}$
21.  $\lim_{y \rightarrow -5} \frac{y^2 - 25}{y + 5}$
22.  $\lim_{u \rightarrow 8} \frac{u^2 - 5u - 24}{u - 8}$
23.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$
24.  $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^3 + 1}{t^2 - 1}$
25.  $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{(x - 2)(x + 5)}{(x - 8)}$
26.  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x + 6}{4x^2 - 36}$
27.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 10x}{x - 2}$
28.  $\lim_{x \rightarrow 1.5} \frac{2x^2 + 3x - 9}{x - 1.5}$
29.  $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3 - 2t + 1}{t^3 + t^2 - 2}$
30.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^3(x^4 + 2x^3)^{-1}$
31.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x + 2)(x^5 - 1)^3}{(\sqrt{x} + 4)^2}$
32.  $\lim_{x \rightarrow -2} x\sqrt{x + 4} \sqrt[3]{x - 6}$
33.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x^2 + 3x - 1}{x} + \frac{1}{x} \right]$
34.  $\lim_{x \rightarrow 2} \left[ \frac{1}{x - 2} - \frac{6}{x^2 + 2x - 8} \right]$
35.  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x + 3)^2}{\sqrt{x} - 3}$
36.  $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 4)^{99}(x^2 - 7)^{10}$
37.  $\lim_{x \rightarrow 10} \sqrt{\frac{10x}{2x + 5}}$
38.  $\lim_{r \rightarrow 1} \frac{\sqrt{(r^2 + 3r - 2)^3}}{\sqrt[3]{(5r - 3)^2}}$

39.  $\lim_{h \rightarrow 4} \sqrt{\frac{h}{h + 5}} \left( \frac{h^2 - 16}{h - 4} \right)^2$
40.  $\lim_{t \rightarrow 2} (t + 2)^{3/2} (2t + 4)^{1/3}$
41.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[5]{\frac{x^3 - 64x}{x^2 + 2x}}$
42.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( 8x + \frac{2}{x} \right)^5$
43.  $\lim_{t \rightarrow 1} (at^2 - bt)^2$
44.  $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{u^2 x^2 + 2xu + 1}$
45.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(8 + h)^2 - 64}{h}$
46.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [(1 + h)^3 - 1]$
47.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{1}{x + h} - \frac{1}{x} \right)$
48.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} \quad (x > 0)$
49.  $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{t} - 1}{t - 1}$
50.  $\lim_{u \rightarrow 5} \frac{\sqrt{u + 4} - 3}{u - 5}$
51.  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\sqrt{25 + v} - 5}{\sqrt{1 + v} - 1}$
52.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - \sqrt{x + 15}}{x^2 - 1}$

En los problemas 53-60, suponga que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 4$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 2$ . Encuentre el límite dado, o concluya que no existe.

53.  $\lim_{x \rightarrow a} [5f(x) + 6g(x)]$
54.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^3$
55.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)}$
56.  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}$
57.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{f(x) - 2g(x)}$
58.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{[f(x)]^2 - 4[g(x)]^2}{f(x) - 2g(x)}$
59.  $\lim_{x \rightarrow a} xf(x)g(x)$
60.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{6x + 3}{xf(x) + g(x)}, a \neq -\frac{1}{2}$

**Piense en ello**

En los problemas 61 y 62, use el primer resultado para encontrar los límites en los incisos a)-c). Justifique cada paso de su trabajo citando la propiedad idónea de los límites.

61.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 1}{x - 1} = 100$   
 a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 1}{x^2 - 1}$     b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{50} - 1}{x - 1}$     c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{100} - 1)^2}{(x - 1)^2}$
62.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$   
 a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x}$     b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$     c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2 - \sin x}{x}$
63. Use  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , para mostrar que  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ .
64. Si  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - 5}{x + 3} = 4$ , encuentre  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

## 2.3 Continuidad

**■ Introducción** En el análisis de la sección 1.1 sobre funciones y gráficas se usó la frase “estos puntos se unen con una curva suave”. Esta frase invoca la imagen que es una curva *continua* agradable; en otras palabras, una curva sin rupturas, saltos o huecos. En efecto, una función continua a menudo se describe como una cuya gráfica puede trazarse sin levantar el lápiz del papel.

En la sección 2.2 vimos que el valor funcional  $f(a)$  no desempeñaba ningún papel en la determinación de la existencia de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ . Pero en la sección 2.2 observamos que los límites cuando  $x \rightarrow a$  de funciones polinomiales y ciertas funciones racionales pueden encontrarse simplemente al evaluar la función en  $x = a$ . La razón por la que puede hacerse lo anterior en algunas instancias es el hecho de que la función es *continua* en un número  $a$ . En esta sección veremos que tanto el valor de  $f(a)$  como el límite de  $f$  cuando  $x$  tiende a un número  $a$  desempeñan papeles primordiales al definir el concepto de continuidad. Antes de proporcionar la definición, en la FIGURA 2.3.1 se ilustran algunos ejemplos intuitivos de funciones que *no* son continuas en  $a$ .

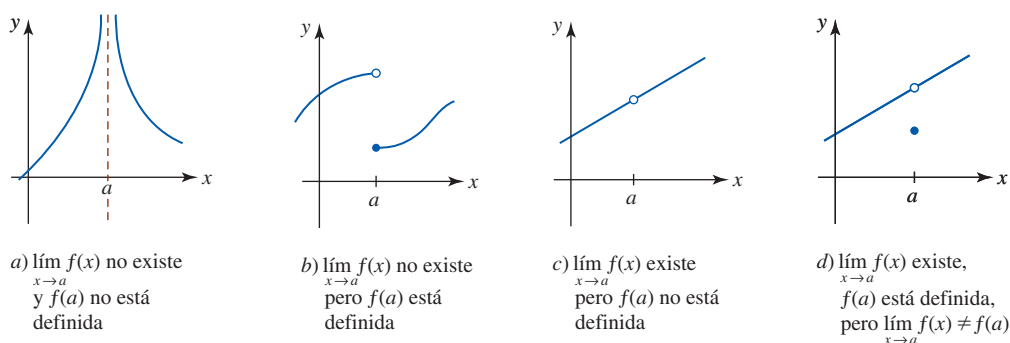


FIGURA 2.3.1 Cuatro ejemplos de  $f$  no continua en  $a$

**■ Continuidad en un número** La figura 2.3.1 sugiere la siguiente condición tripartita de continuidad de una función  $f$  en un número  $a$ .

### Definición 2.3.1 Continuidad en $a$

Se dice que una función  $f$  es **continua** en un número  $a$  si

- i)  $f(a)$  está definido,      ii)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe y      iii)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Si alguna de las condiciones en la definición 2.3.1 no se cumple, entonces se dice que  $f$  es **discontinua** en el número  $a$ .

### EJEMPLO 1 Tres funciones

Determine si cada una de las siguientes funciones es continua en 1.

$$a) f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} \quad b) g(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases} \quad c) h(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$$

### Solución

a)  $f$  es discontinua en 1 puesto que al sustituir  $x = 1$  en la función se obtiene  $0/0$ . Se afirma que  $f(1)$  no está definida, de modo que se viola la primera condición de continuidad en la definición 2.3.1.

b) Debido a que  $g$  está definida en 1, es decir,  $g(1) = 2$ , a continuación se determina si  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$  existe. Por

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3 \quad (1)$$

Recuerde de sus conocimientos de álgebra que

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a - b) \\ &\quad (a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

concluimos que  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$  existe y es igual a 3. Puesto que este valor no es el mismo que  $g(1) = 2$ , se viola la segunda condición de la definición 2.3.1. La función  $g$  es discontinua en 1.

- c) Primero,  $h(1)$  está definida; en este caso,  $h(1) = 3$ . Segundo,  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 3$  por (1) del inciso b). Tercero, se tiene  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = h(1) = 3$ . Por tanto, se cumplen *las tres* condiciones en la definición 2.3.1 y así la función  $h$  es continua en 1.

Las gráficas de las tres funciones se comparan en la FIGURA 2.3.2.

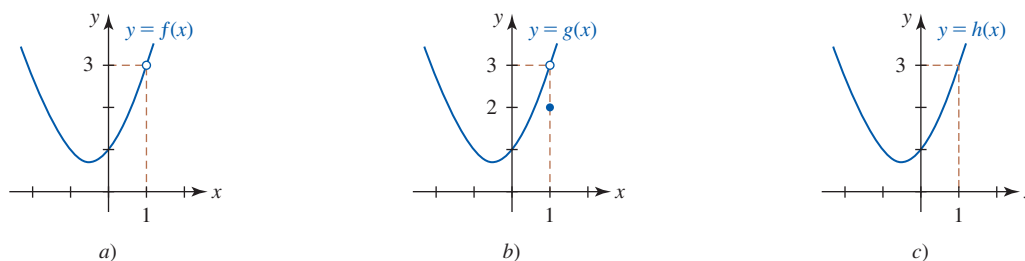


FIGURA 2.3.2 Gráficas de las funciones en el ejemplo 1

### EJEMPLO 2 Función definida por partes

Determine si la función definida por partes es continua en 2.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 5, & x = 2 \\ -x + 6, & x > 2. \end{cases}$$

**Solución** Primero, observe que  $f(2)$  está definida y es igual a 5. Luego, por

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x + 6) = 4 \end{aligned} \right\} \text{ implica } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

observamos que el límite de  $f$  existe cuando  $x \rightarrow 2$ . Por último, debido a que  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2) = 5$ , por iii) de la definición 2.3.1 se concluye que  $f$  es discontinua en 2. La gráfica de  $f$  se muestra en la FIGURA 2.3.3.

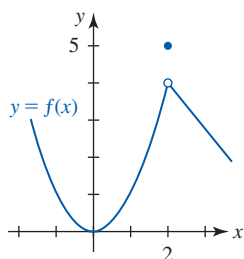


FIGURA 2.3.3 Gráfica de la función en el ejemplo 2

■ **Continuidad sobre un intervalo** A continuación veremos que el concepto de continuidad en un número  $a$  se extiende a **continuidad sobre un intervalo**.

#### Definición 2.3.2 Continuidad sobre un intervalo

Una función  $f$  es continua

- i) sobre un **intervalo abierto**  $(a, b)$  si es continua en todo número en el intervalo; y
- ii) sobre un **intervalo cerrado**  $[a, b]$  si es continua en  $(a, b)$  y, además,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

Si se cumple la condición límite por la derecha  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$  dada por ii) de la definición 2.3.1, se dice que  $f$  es **continua por la derecha en  $a$** ; si  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ , entonces  $f$  es **continua por la izquierda en  $b$** .

Extensiones de estos conceptos a intervalos como  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $(a, \infty)$ ,  $(-\infty, b)$ ,  $(-\infty, \infty)$ ,  $[a, \infty)$  y  $(-\infty, b]$  se hacen como se espera. Por ejemplo,  $f$  es continua en  $[1, 5)$  si es continua en el intervalo abierto  $(1, 5)$  y es continua por la derecha en 1.



**EJEMPLO 3** Continuidad sobre un intervalo

a) Como observamos en la FIGURA 2.3.4a),  $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$  es continua sobre el intervalo abierto  $(-1, 1)$  pero no es continua sobre el intervalo cerrado  $[-1, 1]$ , ya que ni  $f(-1)$  ni  $f(1)$  están definidos.

b)  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  es continua sobre  $[-1, 1]$ . Observe por la figura 2.3.4b) que

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 0.$$

c)  $f(x) = \sqrt{x-1}$  es continua sobre el intervalo no acotado  $[1, \infty)$ , ya que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} (x-1)} = \sqrt{a-1} = f(a),$$

para cualquier número real  $a$  que cumpla  $a > 1$ , y  $f$  es continua por la derecha en 1 puesto que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = f(1) = 0.$$

Vea la figura 2.3.4c).

Una revisión de las gráficas en las figuras 1.4.1 y 1.4.2 muestra que  $y = \sin x$  y  $y = \cos x$  son continuas en  $(-\infty, \infty)$ . Las figuras 1.4.3 y 1.4.5 muestran que  $y = \tan x$  y  $y = \sec x$  son discontinuas en  $x = (2n+1)\pi/2$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , mientras las figuras 1.4.4 y 1.4.6 muestran que  $y = \cot x$  y  $y = \csc x$  son discontinuas en  $x = n\pi$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Las funciones trigonométricas inversas  $y = \sin^{-1} x$  y  $y = \cos^{-1} x$  son continuas sobre el intervalo cerrado  $[-1, 1]$ . Vea las figuras 1.5.9 y 1.5.12. La función exponencial natural  $y = e^x$  es continua sobre el intervalo  $(-\infty, \infty)$ , mientras que la función logaritmo natural  $y = \ln x$  es continua sobre  $(0, \infty)$ . Vea las figuras 1.6.5 y 1.6.6.

■ **Continuidad de una suma, producto y cociente** Cuando dos funciones  $f$  y  $g$  son continuas en un número  $a$ , entonces la combinación de las funciones formadas por suma, multiplicación y división también es continua en  $a$ . En el caso de la división  $f/g$  es necesario, por supuesto, requerir que  $g(a) \neq 0$ .

**Teorema 2.3.1** Continuidad de una suma, un producto y un cociente

Si las funciones  $f$  y  $g$  son continuas en un número  $a$ , entonces la suma  $f + g$ , el producto  $fg$  y el cociente  $f/g$  ( $g(a) \neq 0$ ) son continuos en  $x = a$ .

**DEMOSTRACIÓN DE LA CONTINUIDAD DEL PRODUCTO  $fg$**  Como una consecuencia de la hipótesis de que las funciones  $f$  y  $g$  son continuas en un número  $a$ , podemos decir que ambas funciones están definidas en  $x = a$ , los límites de las dos funciones existen cuando  $x$  tiende a  $a$  y

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a).$$

Debido a que el límite existe, sabemos que el límite de un producto es el producto de los límites:

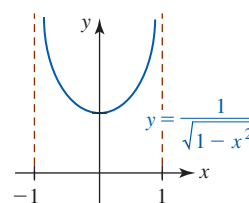
$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left( \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) = f(a)g(a).$$

Las demostraciones de las partes restantes del teorema 2.3.1 se obtienen de manera semejante. ■

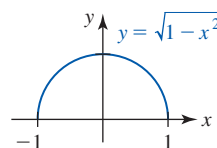
Puesto que la definición 2.3.1 implica que  $f(x) = x$  es continua en cualquier número real  $x$ , a partir de aplicaciones sucesivas del teorema 2.3.1 se observa que las funciones  $x, x^2, x^3, \dots, x^n$  también son continuas para cualquier  $x$  en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ . Debido a que una función polinomial es justo una suma de potencias de  $x$ , otra aplicación del teorema 2.3.1 muestra lo siguiente:

- Una función polinomial  $f$  es continua en  $(-\infty, \infty)$ .

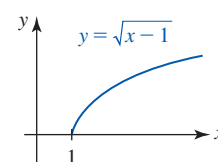
Se dice que las funciones, como las polinomiales, el seno y el coseno, que son continuas para *todos* los números reales, es decir, sobre el intervalo  $(-\infty, \infty)$ , son **continuas en todas partes**. De una función que es continua en todas partes también se dice que es **continua**. Luego,



a)



b)



c)

**FIGURA 2.3.4** Gráficas de las funciones en el ejemplo 3

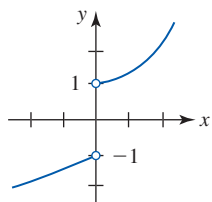
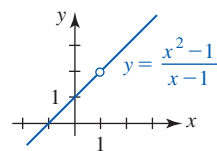
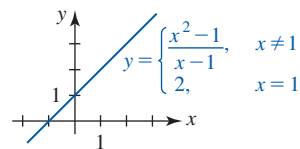


FIGURA 2.3.5 Discontinuidad tipo salto en  $x = 0$



a) No es continua en 1



b) Continua en 1

FIGURA 2.3.6 Discontinuidad removible en  $x = 1$

si  $p(x)$  y  $q(x)$  son funciones polinomiales, por el teorema 2.3.1 también se concluye directamente que

- Una función racional  $f(x) = p(x)/q(x)$  es continua excepto en números en los que el denominador  $q(x)$  es cero.

■ **Terminología** Una discontinuidad de una función  $f$  a menudo se denomina de manera especial.

- Si  $x = a$  es una asíntota vertical para la gráfica de  $y = f(x)$ , entonces se dice que  $f$  tiene una **discontinuidad infinita** en  $a$ .

La figura 2.3.1a) ilustra una función con una discontinuidad infinita en  $a$ .

- Si  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$  y  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$  y  $L_1 \neq L_2$ , entonces se dice que  $f$  tiene una **discontinuidad finita** o una **discontinuidad de tipo salto** en  $a$ .

La función  $y = f(x)$  dada en la FIGURA 2.3.5 tiene una discontinuidad de tipo salto en 0, puesto que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ . La función entero mayor  $f(x) = \lfloor x \rfloor$  tiene una discontinuidad de tipo salto en todo valor entero de  $x$ .

- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe pero  $f$  no está definida en  $x = a$  o  $f(a) \neq \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , entonces se dice que  $f$  tiene una **discontinuidad removible** en  $a$ .

Por ejemplo, la función  $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$  no está definida en  $x = 1$  pero  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ . Al definir  $f(1) = 2$ , la nueva función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

es continua en todas partes. Vea la FIGURA 2.3.6.

■ **Continuidad de  $f^{-1}$**  La validez del siguiente teorema se concluye del hecho de que la gráfica de la función inversa  $f^{-1}$  es una reflexión de la gráfica de  $f$  en la recta  $y = x$ .

### Teorema 2.3.2 Continuidad de una función inversa

Si  $f$  es una función continua uno a uno sobre un intervalo  $[a, b]$ , entonces  $f^{-1}$  es continua ya sea sobre  $[f(a), f(b)]$  o sobre  $[f(b), f(a)]$ .

La función seno,  $f(x) = \sin x$ , es continua sobre  $[-\pi/2, \pi/2]$ , y como ya se observó, la inversa de  $f$ ,  $y = \sin^{-1} x$ , es continua sobre el intervalo cerrado  $[f(-\pi/2), f(\pi/2)] = [-1, 1]$ .

■ **Límite de una función compuesta** El siguiente teorema establece que si una función es continua, entonces el límite de esa función es la función del límite. La demostración del teorema 2.3.3 se proporciona en el apéndice.

### Teorema 2.3.3 Límite de una función compuesta

Si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$  y  $f$  es continua en  $L$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(L).$$

El teorema 2.3.3 es útil en la demostración de otros teoremas. Si la función  $g$  es continua en  $a$  y  $f$  es continua en  $g(a)$ , entonces vemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(g(a)).$$

Acabamos de demostrar que la composición de dos funciones continuas es continua.

### Teorema 2.3.4 Continuidad de una función compuesta

Si  $g$  es continua en un número  $a$  y  $f$  es continua en  $g(a)$ , entonces la función compuesta  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  es continua en  $a$ .

### EJEMPLO 4 Continuidad de una función compuesta

$f(x) = \sqrt{x}$  es continua sobre el intervalo  $[0, \infty)$  y  $g(x) = x^2 + 2$  es continua sobre  $(-\infty, \infty)$ . Pero, puesto que  $g(x) \geq 0$  para toda  $x$ , la función compuesta

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 + 2}$$

es continua en todas partes.

Si una función  $f$  es continua sobre un intervalo cerrado  $[a, b]$ , entonces, como se ilustra en la FIGURA 2.3.7,  $f$  asume todos los valores entre  $f(a)$  y  $f(b)$ . Dicho de otra manera, una función continua  $f$  no omite ningún valor.

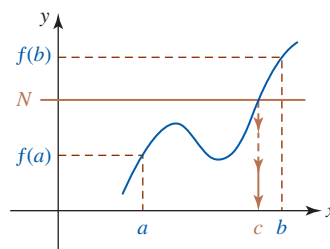


FIGURA 2.3.7 Una función continua  $f$  asume todos los valores entre  $f(a)$  y  $f(b)$

### Teorema 2.3.5 Teorema del valor intermedio

Si  $f$  denota una función continua sobre un intervalo cerrado  $[a, b]$  para el cual  $f(a) \neq f(b)$ , y si  $N$  es cualquier número entre  $f(a)$  y  $f(b)$ , entonces existe por lo menos un número  $c$  entre  $a$  y  $b$  tal que  $f(c) = N$ .

### EJEMPLO 5 Consecuencia de la continuidad

La función polinomial  $f(x) = x^2 - x - 5$  es continua sobre el intervalo  $[-1, 4]$  y  $f(-1) = -3$ ,  $f(4) = 7$ . Para cualquier número  $N$  para el cual  $-3 \leq N \leq 7$ , el teorema 2.3.5 garantiza que hay una solución para la ecuación  $f(c) = N$ , es decir,  $c^2 - c - 5 = N$  en  $[-1, 4]$ . Específicamente, si se escoge  $N = 1$ , entonces  $c^2 - c - 5 = 1$  es equivalente a

$$c^2 - c - 6 = 0 \quad \text{o bien,} \quad (c - 3)(c + 2) = 0.$$

Aunque la última ecuación tiene dos soluciones, sólo el valor  $c = 3$  está entre  $-1$  y  $4$ . ■

El ejemplo anterior sugiere un corolario al teorema del valor intermedio.

- Si  $f$  satisface las hipótesis del teorema 2.3.5 y  $f(a)$  y  $f(b)$  tienen signos algebraicos opuestos, entonces existe un número  $x$  entre  $a$  y  $b$  para el que  $f(x) = 0$ .

Este hecho se usa a menudo para localizar ceros reales de una función continua  $f$ . Si los valores  $f(a)$  y  $f(b)$  tienen signos opuestos, entonces al identificar  $N = 0$  podemos afirmar que hay por lo menos un número  $c$  en  $(a, b)$  para el cual  $f(c) = 0$ . En otras palabras, si  $f(a) > 0$ ,  $f(b) < 0$  o  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$ , entonces  $f(x)$  tiene por lo menos un cero  $c$  en el intervalo  $(a, b)$ . La validez de esta conclusión se ilustra en la FIGURA 2.3.8.

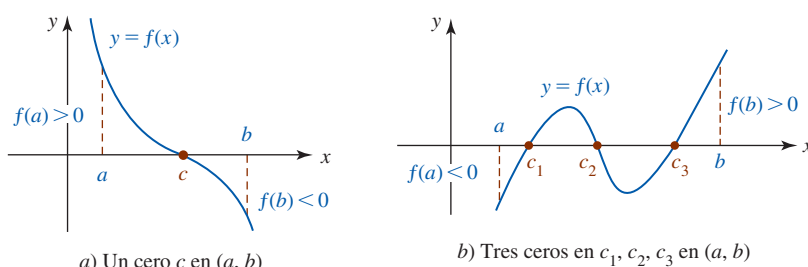


FIGURA 2.3.8 Localización de ceros de funciones usando el teorema del valor intermedio

■ **Método de bisección** Como una consecuencia directa del teorema del valor intermedio, es posible concebir un medio para aproximar los ceros de una función continua hasta cualquier grado de precisión. Suponga que  $y = f(x)$  es continua sobre el intervalo cerrado  $[a, b]$  tal que  $f(a)$  y  $f(b)$  tienen signos algebraicos opuestos. Luego, como acabamos de ver,  $f$  tiene un cero en  $[a, b]$ . Suponga que el intervalo  $[a, b]$  se biseca encontrando el punto medio  $m_1 = (a + b)/2$ . Si  $f(m_1) = 0$ , entonces  $m_1$  es un cero de  $f$  y ya no se continúa, pero si  $f(m_1) \neq 0$ , entonces puede afirmarse lo siguiente:

- Si  $f(a)$  y  $f(m_1)$  tienen signos algebraicos opuestos, entonces  $f$  tiene un cero  $c$  en  $[a, m_1]$ .
- Si  $f(m_1)$  y  $f(b)$  tienen signos algebraicos opuestos, entonces  $f$  tiene un cero  $c$  en  $[m_1, b]$ .

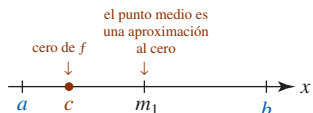


FIGURA 2.3.9 El número  $m_1$  es una aproximación al número  $c$

Es decir, si  $f(m_1) \neq 0$ , entonces  $f$  tiene un cero en un intervalo que mide la mitad del intervalo original. Vea la FIGURA 2.3.9. A continuación se repite el proceso al bisecar este nuevo intervalo al encontrar su punto medio  $m_2$ . Si  $m_2$  es un cero de  $f$ , entonces detenemos el proceso, pero si  $f(m_2) \neq 0$ , hemos localizado un cero en un intervalo que mide la cuarta parte del intervalo  $[a, b]$ . Continuamos este proceso de localizar un cero en  $f$  de manera indefinida en intervalos cada vez más cortos. Este método de aproximar un cero de una función continua por medio de una sucesión de puntos medios se denomina **método de bisección**. Al volver a inspeccionar la figura 2.3.9 se observa que el error en una aproximación a un cero en un intervalo es menos de la mitad de la longitud del intervalo.

### EJEMPLO 6 Ceros de una función polinomial

- Demuestre que los ceros de la función polinomial  $f(x) = x^6 - 3x - 1$  tiene un cero real en  $[-1, 0]$  y en  $[1, 2]$ .
- Aproxime el cero en  $[1, 2]$  hasta dos cifras decimales.

#### Solución

- Observe que  $f(-1) = 3 > 0$  y  $f(0) = -1 < 0$ . Este cambio de signo indica que la gráfica de  $f$  debe cruzar el eje  $x$  por lo menos una vez en el intervalo  $[-1, 0]$ . En otras palabras, hay por lo menos un cero en  $[-1, 0]$ .

De manera semejante,  $f(1) = -3 < 0$  y  $f(2) = 57 > 0$  implican que hay por lo menos un cero de  $f$  en el intervalo  $[1, 2]$ .

- Una primera aproximación al cero en  $[1, 2]$  es el punto medio del intervalo:

$$m_1 = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2} = 1.5, \quad \text{error} < \frac{1}{2}(2 - 1) = 0.5.$$

Luego, puesto que  $f(m_1) = f\left(\frac{3}{2}\right) > 0$  y  $f(1) < 0$ , se sabe que el cero está en el intervalo  $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ .

La segunda aproximación al cero es el punto medio de  $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ :

$$m_2 = \frac{1 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4} = 1.25, \quad \text{error} < \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - 1\right) = 0.25.$$

Puesto que  $f(m_2) = f\left(\frac{5}{4}\right) < 0$ , el cero está en el intervalo  $\left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right]$ .

La tercera aproximación al cero es el punto medio de  $\left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right]$ :

$$m_3 = \frac{\frac{5}{4} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{11}{8} = 1.375, \quad \text{error} < \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right) = 0.125.$$

Después de ocho cálculos, encontramos que  $m_8 = 1.300781$  con error menor que 0.005. Por tanto, 1.30 es una aproximación al cero de  $f$  en  $[1, 2]$  que es precisa hasta dos cifras decimales. La gráfica de  $f$  se proporciona en la FIGURA 2.3.10. ■

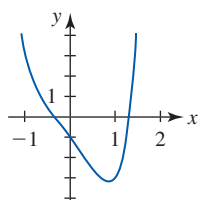


FIGURA 2.3.10 Gráfica de la función en el ejemplo 6

Si se desea que la aproximación sea precisa hasta tres cifras decimales, continuamos hasta que el error se vuelva menor que 0.0005, y así sucesivamente.

### Ejercicios 2.3

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-8.

### Fundamentos

En los problemas 1-12, encuentre los números, en caso de haberlos, en que la función  $f$  dada es discontinua.

1.  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7$       2.  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$

3.  $f(x) = (x^2 - 9x + 18)^{-1}$       4.  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^4 - 1}$

5.  $f(x) = \frac{x - 1}{\sin 2x}$       6.  $f(x) = \frac{\tan x}{x + 3}$

$$7. f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 2 \\ x, & x > 2 \end{cases} \quad 8. f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$9. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5}, & x \neq 5 \\ 10, & x = 5 \end{cases}$$

$$10. f(x) = \begin{cases} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}, & x \neq 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

$$11. f(x) = \frac{1}{2 + \ln x}$$

$$12. f(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

En los problemas 13-24, determine si la función  $f$  es continua en el intervalo indicado.

$$13. f(x) = x^2 + 1$$

$$a) [-1, 4]$$

$$b) [5, \infty)$$

$$14. f(x) = \frac{1}{x}$$

$$a) (-\infty, \infty)$$

$$b) (0, \infty)$$

$$15. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$a) (0, 4]$$

$$b) [1, 9]$$

$$16. f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

$$a) [-3, 3]$$

$$b) [3, \infty)$$

$$17. f(x) = \tan x$$

$$a) [0, \pi]$$

$$b) [-\pi/2, \pi/2]$$

$$18. f(x) = \csc x$$

$$a) (0, \pi)$$

$$b) (2\pi, 3\pi)$$

$$19. f(x) = \frac{x}{x^3 + 8}$$

$$a) [-4, -3]$$

$$b) (-\infty, \infty)$$

$$20. f(x) = \frac{1}{|x| - 4}$$

$$a) (-\infty, -1]$$

$$b) [1, 6]$$

$$21. f(x) = \frac{x}{2 + \sec x}$$

$$a) (-\infty, \infty)$$

$$b) [\pi/2, 3\pi/2]$$

$$22. f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

$$a) [1/\pi, \infty)$$

$$b) [-2/\pi, 2/\pi]$$

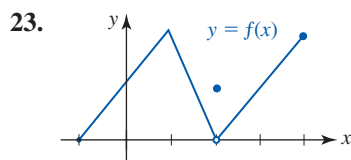


FIGURA 2.3.11 Gráfica para el problema 23

$$a) [-1, 3]$$

$$b) (2, 4]$$

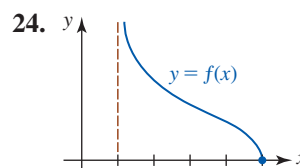


FIGURA 2.3.12 Gráfica para el problema 24

$$a) [2, 4]$$

$$b) [1, 5]$$

En los problemas 25-28, encuentre los valores de  $m$  y  $n$  de tal manera que la función  $f$  sea continua.

$$25. f(x) = \begin{cases} mx, & x < 4 \\ x^2, & x \geq 4 \end{cases}$$

$$26. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ m, & x = 2 \end{cases}$$

$$27. f(x) = \begin{cases} mx, & x < 3 \\ n, & x = 3 \\ -2x + 9, & x > 3 \end{cases}$$

$$28. f(x) = \begin{cases} mx - n, & x < 1 \\ 5, & x = 1 \\ 2mx + n, & x > 1 \end{cases}$$

En los problemas 29 y 30,  $\lfloor x \rfloor$  denota el mayor entero que no excede a  $x$ . Trace una gráfica para determinar los puntos en que la función dada es discontinua.

$$29. f(x) = \lfloor 2x - 1 \rfloor$$

$$30. f(x) = \lfloor x \rfloor - x$$

En los problemas 31 y 32, determine si la función dada tiene una discontinuidad removible en el número dado  $a$ . Si la discontinuidad es removible, defina una nueva función que sea continua en  $a$ .

$$31. f(x) = \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}, \quad a = 9 \quad 32. f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}, \quad a = 1$$

En los problemas 33-42, use el teorema 2.3.3 para encontrar el límite dado.

$$33. \lim_{x \rightarrow \pi/6} \sin(2x + \pi/3)$$

$$34. \lim_{x \rightarrow \pi^2} \cos \sqrt{x}$$

$$35. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin(\cos x)$$

$$36. \lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + \cos(\cos x))$$

$$37. \lim_{t \rightarrow \pi} \cos\left(\frac{t^2 - \pi^2}{t - \pi}\right)$$

$$38. \lim_{t \rightarrow 0} \tan\left(\frac{\pi t}{t^2 + 3t}\right)$$

$$39. \lim_{t \rightarrow \pi} \sqrt{t - \pi + \cos^2 t}$$

$$40. \lim_{t \rightarrow 1} (4t + \sin 2\pi t)^3$$

$$41. \lim_{x \rightarrow -3} \sin^{-1}\left(\frac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}\right)$$

$$42. \lim_{x \rightarrow \pi} e^{\cos 3x}$$

En los problemas 43 y 44, determine el (los) intervalo(s) donde  $f \circ g$  es continua.

$$43. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}, \quad g(x) = x + 4$$

$$44. f(x) = \frac{5x}{x - 1}, \quad g(x) = (x - 2)^2$$

En los problemas 45-48, compruebe el teorema del valor intermedio para  $f$  en el intervalo dado. Encuentre un número  $c$  en el intervalo para el valor indicado de  $N$ .

45.  $f(x) = x^2 - 2x$ ,  $[1, 5]$ ;  $N = 8$

46.  $f(x) = x^2 + x + 1$ ,  $[-2, 3]$ ;  $N = 6$

47.  $f(x) = x^3 - 2x + 1$ ,  $[-2, 2]$ ;  $N = 1$

48.  $f(x) = \frac{10}{x^2 + 1}$ ,  $[0, 1]$ ;  $N = 8$

49. Dado que  $f(x) = x^5 + 2x - 7$ , demuestre que hay un número  $c$  tal que  $f(c) = 50$ .

50. Dado que  $f$  y  $g$  son continuas sobre  $[a, b]$  de modo que  $f(a) > g(a)$  y  $f(b) < g(b)$ , demuestre que hay un número  $c$  en  $(a, b)$  tal que  $f(c) = g(c)$ . [Sugerencia: Considere la función  $f - g$ .]

En los problemas 51-54, muestre que la ecuación dada tiene una solución en el intervalo indicado.

51.  $2x^7 = 1 - x$ ,  $(0, 1)$

52.  $\frac{x^2 + 1}{x + 3} + \frac{x^4 + 1}{x - 4} = 0$ ,  $(-3, 4)$

53.  $e^{-x} = \ln x$ ,  $(1, 2)$

54.  $\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}$ ,  $(\pi/2, \pi)$

### ≡ Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 55 y 56, use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de la función dada. Use el método de bisección para aproximar, con precisión de dos cifras decimales, los ceros reales de  $f$  que descubra a partir de la gráfica.

55.  $f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 1$       56.  $f(x) = x^5 + x - 1$

57. Use el método de bisección para aproximar el valor de  $c$  en el problema 49 hasta una precisión de dos cifras decimales.

58. Use el método de bisección para aproximar la solución en el problema 51 hasta una precisión de dos cifras decimales.

59. Use el método de bisección para aproximar la solución en el problema 52 hasta una precisión de dos cifras decimales.

60. Suponga que un cilindro circular recto cerrado tiene un volumen  $V$  y un área superficial  $S$  (lado lateral, tapa y base).

a) Demuestre que el radio  $r$  del cilindro debe satisfacer la ecuación  $2\pi r^3 - Sr + 2V = 0$ .

b) Suponga que  $V = 3\,000$  pies<sup>3</sup> y  $S = 1\,800$  pies<sup>2</sup>. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de

$$f(r) = 2\pi r^3 - 1\,800r + 6\,000.$$

c) Use la gráfica en el inciso b) y el método de bisección para encontrar las dimensiones del cilindro correspondientes al volumen y área superficial dadas en el inciso b). Use una precisión de dos cifras decimales.

### ≡ Piense en ello

61. Dado que  $f$  y  $g$  son continuas en un número  $a$ , demuestre que  $f + g$  es continua en  $a$ .

62. Dado que  $f$  y  $g$  son continuas en un número  $a$  y  $g(a) \neq 0$ , demuestre que  $f/g$  es continua en  $a$ .

63. Sean  $f(x) = \lfloor x \rfloor$  la función entero mayor y  $g(x) = \cos x$ . Determine los puntos en que  $f \circ g$  es discontinua.

64. Considere las funciones

$$f(x) = |x| \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0 \\ x - 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Trace las gráficas de  $f \circ g$  y  $g \circ f$ . Determine si  $f \circ g$  y  $g \circ f$  son continuas en 0.

65. **Un clásico matemático** La función de Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional} \end{cases}$$

recibe su nombre en honor del matemático alemán **Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet** (1805-1859). A Dirichlet se debe la definición de una función como se conoce actualmente.

a) Demuestre que  $f$  es discontinua en todo número real  $a$ . En otras palabras,  $f$  no es una función continua en ninguna parte.

b) ¿Cómo se ve la gráfica de  $f$ ?

c) Si  $r$  es un número racional positivo, demuestre que  $f$  es  $r$ -periódica; es decir,  $f(x + r) = f(x)$ .

## 2.4 Límites trigonométricos

■ **Introducción** En esta sección se analizan límites que implican funciones trigonométricas. Como se ilustrará con los ejemplos de esta sección, el cálculo de límites trigonométricos supone manipulaciones algebraicas y conocimiento de algunas identidades trigonométricas básicas. Empezaremos con algunos resultados simples sobre límites que son consecuencia de la continuidad.

■ **Uso de la continuidad** En la sección precedente vimos que las funciones seno y coseno son continuas en todas partes. Por la definición 2.3.1 se concluye que para cualquier número real  $a$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a, \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a. \quad (2)$$

En forma semejante, para un número  $a$  en el dominio de la función trigonométrica dada

$$\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a, \quad \lim_{x \rightarrow a} \cot x = \cot a, \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sec x = \sec a, \quad \lim_{x \rightarrow a} \csc x = \csc a. \quad (4)$$

### EJEMPLO 1 Uso de (1) y (2)

A partir de (1) y (2) se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1. \quad (5) \blacksquare$$

Los resultados en (5) se obtendrán en el siguiente análisis sobre el cálculo de otros límites trigonométricos. Pero primero se considera un teorema que reviste una utilidad particular cuando se trabaja con límites trigonométricos.

**Teorema de compresión** El siguiente teorema posee muchos nombres, algunos de éstos son: **teorema de compresión**, **teorema del pellizco**, **teorema del emparedado**, **teorema del juego de compresión** y **teorema de Flyswatter**. Como se muestra en la FIGURA 2.4.1, si la gráfica de  $f(x)$  se “comprime” entre las gráficas de otras dos funciones  $g(x)$  y  $h(x)$  para toda  $x$  próxima a  $a$ , y si las funciones  $g$  y  $h$  tienen un límite común  $L$  cuando  $x \rightarrow a$ , tiene sentido afirmar que  $f$  también tiende a  $L$  cuando  $x \rightarrow a$ . La demostración del teorema 2.4.1 se proporciona en el apéndice.

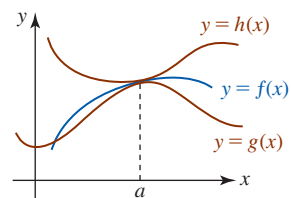


FIGURA 2.4.1 Gráfica de  $f$  oprimida entre las gráficas de  $g$  y  $h$

#### Teorema 2.4.1 Teorema de compresión

Suponga que  $f$ ,  $g$  y  $h$  son funciones para las cuales  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  para toda  $x$  en un intervalo abierto que contiene a un número  $a$ , excepto posiblemente al mismo  $a$ . Si

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L,$$

entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .

◀ Un colega ruso dijo que este resultado se denominaba **teorema de los dos soldados** cuando estaba en la escuela. Piense en ello.

Antes de aplicar el teorema 2.4.1 se considerará un límite trigonométrico que no existe.

### EJEMPLO 2 Un límite que no existe

El límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$  no existe. La función  $f(x) = \sin(1/x)$  es impar pero no es periódica. La gráfica oscila entre  $-1$  y  $1$  cuando  $x \rightarrow 0$ :

$$\sin \frac{1}{x} = \pm 1 \quad \text{para} \quad \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Por ejemplo,  $\sin(1/x) = 1$  para  $n = 500$  o  $x \approx 0.00064$ , y  $\sin(1/x) = -1$  para  $n = 501$  o  $x \approx 0.00063$ . Esto significa que cerca del origen la gráfica de  $f$  se vuelve tan comprimida que parece ser una mancha continua de color. Vea la FIGURA 2.4.2.

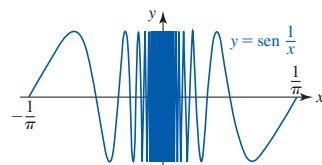


FIGURA 2.4.2 Gráfica de la función en el ejemplo 2

### EJEMPLO 3 Uso del teorema de compresión

Encuentre el límite  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$ .

**Solución** Primero observe que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} \neq \left( \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \right) \left( \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \right)$$

porque en el ejemplo 2 acabamos de ver que  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$  no existe. Pero para  $x \neq 0$  tenemos  $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$ . En consecuencia,

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2.$$



Luego, si hacemos las identificaciones  $g(x) = -x^2$  y  $h(x) = x^2$ , por (1) de la sección 2.2 se sigue que  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$ . Así, por el teorema de compresión concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0.$$

En la FIGURA 2.4.3 observe la pequeña escala en los ejes  $x$  y  $y$ .

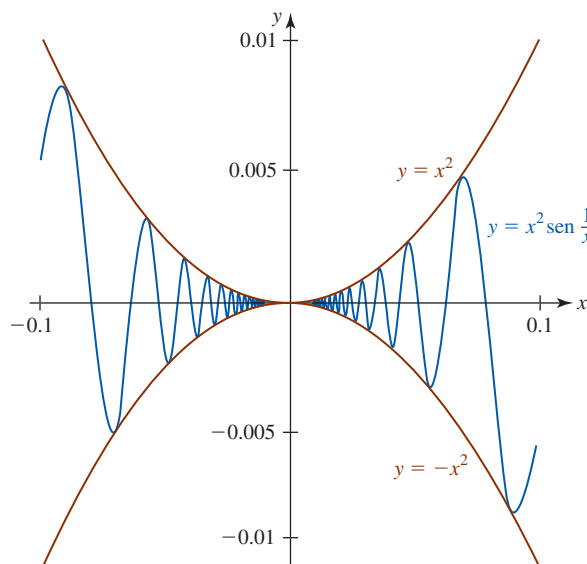


FIGURA 2.4.3 Gráfica de la función en el ejemplo 3

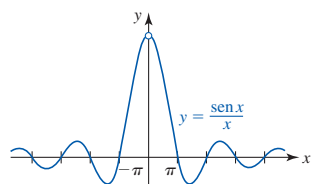


FIGURA 2.4.4 Gráfica de  $f(x) = (\sin x)/x$

■ **Un límite trigonométrico importante** Aunque la función  $f(x) = (\sin x)/x$  no está definida en  $x = 0$ , la tabla numérica en el ejemplo 7 de la sección 2.1 y la gráfica en la FIGURA 2.4.4 sugieren que  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/x$  existe. Ahora ya es posible demostrar esta conjetura usando el teorema de compresión.

Considere un círculo con centro en el origen  $O$  y radio 1. Como se muestra en la FIGURA 2.4.5a), sea la región sombreada  $OPR$  un sector del círculo con ángulo central  $t$  tal que  $0 < t < \pi/2$ . A partir de los incisos b), c) y d) de la figura 2.4.5 se observa que

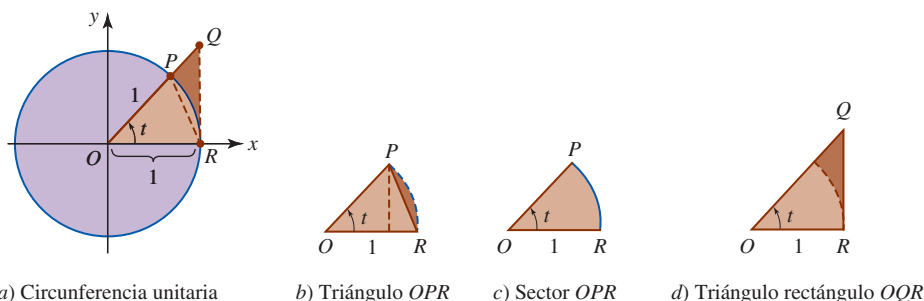
$$\text{área de } \triangle OPR \leq \text{área del sector } OPR \leq \text{área de } \triangle OQR. \quad (6)$$

Por la figura 2.4.5b), la altura de  $\triangle OPR$  es  $\overline{OP} \sin t = 1 \cdot \sin t = \sin t$ , y así

$$\text{área de } \triangle OPR = \frac{1}{2} \overline{OR} \cdot (\text{altura}) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin t = \frac{1}{2} \sin t. \quad (7)$$

Por la figura 2.4.5d),  $\overline{QR}/\overline{OR} = \tan t$  o  $\overline{QR} = \tan t$ , de modo que

$$\text{área de } \triangle OQR = \frac{1}{2} \overline{OR} \cdot \overline{QR} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan t = \frac{1}{2} \tan t. \quad (8)$$



a) Circunferencia unitaria      b) Triángulo  $OPR$       c) Sector  $OPR$       d) Triángulo rectángulo  $OQR$   
FIGURA 2.4.5 Circunferencia unitaria junto con dos triángulos y un sector circular



Por último, el área de un sector del círculo es  $\frac{1}{2}r^2\theta$ , donde  $r$  es el radio y  $\theta$  es el ángulo central medido en radianes. Así,

$$\text{área del sector } OPR = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot t = \frac{1}{2}t. \quad (9)$$

Al usar (7), (8) y (9) en la desigualdad (6) se obtiene

$$\frac{1}{2}\sin t < \frac{1}{2}t < \frac{1}{2}\tan t \quad \text{o bien,} \quad 1 < \frac{t}{\sin t} < \frac{1}{\cos t}.$$

Por las propiedades de las desigualdades, la última desigualdad puede escribirse como

$$\cos t < \frac{\sin t}{t} < 1.$$

Ahora se hace  $t \rightarrow 0^+$  en el último resultado. Puesto que  $(\sin t)/t$  está “comprimada” entre 1 y  $\cos t$  (del cual se sabe por (5) que tiende a (1), a partir del teorema 2.4.1 se concluye que  $(\sin t)/t \rightarrow 1$ . Aunque se ha supuesto  $0 < t < \pi/2$ , el mismo resultado se cumple para  $t \rightarrow 0^-$  cuando  $-\pi/2 < t < 0$ . Al usar el símbolo  $x$  en lugar de  $t$ , el resultado se resume como sigue:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (10)$$

Como se ilustra con los siguientes ejemplos, los resultados en (1), (2), (3) y (10) se usan a menudo para calcular otros límites. Observe que el límite (10) es de la forma indeterminada  $0/0$ .

#### EJEMPLO 4 Uso de (10)

Encuentre el límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x - 3\sin x}{x}$ .

**Solución** La expresión fraccionaria vuelve a escribirse como dos fracciones con el mismo denominador  $x$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x - 3\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{10x}{x} - \frac{3\sin x}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x}{x} - 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{puesto que ambos límites existen,} \\ \text{las } x \text{ también se cancelan en la} \\ \text{primera expresión} \end{array} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 10 - 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad \leftarrow \text{ahora se usa (10)} \\ &= 10 - 3 \cdot 1 \\ &= 7. \end{aligned}$$

#### EJEMPLO 5 Uso de la fórmula del ángulo doble

Encuentre el límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$ .

**Solución** Para evaluar el límite dado se usan la fórmula del ángulo doble  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  de la sección 1.4, y el hecho de que el límite existe:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x \sin x}{x} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left( \cos x \cdot \frac{\sin x}{x} \right) \\ &= 2 \left( \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \right) \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right). \end{aligned}$$

Por (5) y (10) se sabe que  $\cos x \rightarrow 1$  y  $(\sin x)/x \rightarrow 1$  cuando  $x \rightarrow 0$ , de modo que la línea precedente se vuelve

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2.$$

**EJEMPLO 6** Uso de (5) y (10)

Encuentre el límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ .

**Solución** Al usar  $\tan x = (\sin x)/\cos x$  y el hecho de que el límite existe, puede escribirse

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)/\cos x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \right) \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) \\ &= \frac{1}{1} \cdot 1 = 1. \quad \leftarrow \text{por (5) y (10)}\end{aligned}$$

■ **Uso de una sustitución** A menudo se tiene interés en límites semejantes a los considerados en el ejemplo 5. Pero si queremos encontrar, por ejemplo,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$ , el procedimiento empleado en el ejemplo 5 deja de funcionar a nivel práctico puesto que no se cuenta con una identidad trigonométrica a la mano para  $\sin 5x$ . Hay un procedimiento alternativo que permite encontrar rápidamente  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x}$ , donde  $k \neq 0$  es cualquier constante real, al simplemente cambiar la variable por medio de una **sustitución**. Si se hace  $t = kx$ , entonces  $x = t/k$ . Observe que cuando  $x \rightarrow 0$  entonces necesariamente  $t \rightarrow 0$ . Así, es posible escribir

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t/k} = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\sin t}{1} \cdot \frac{k}{t} \right) = k \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = k. \quad \begin{array}{c} \text{por (10)} \\ \downarrow \end{array}$$

Por tanto, se ha demostrado el resultado general

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k. \quad (11)$$

Por (11), con  $k = 2$ , se obtiene el mismo resultado  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$  que se obtuvo en el ejemplo 5.

**EJEMPLO 7** Una sustitución

Encuentre el límite  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 + 2x - 3}$ .

**Solución** Antes de empezar, observe que el límite tiene la forma indeterminada  $0/0$  cuando  $x \rightarrow 1$ . Al factorizar  $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$  el límite dado puede expresarse como un límite de un producto:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{(x+3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{x+3} \cdot \frac{\sin(x-1)}{x-1} \right]. \quad (12)$$

Luego, si se hace  $t = x - 1$ , veremos que  $x \rightarrow 1$  implica  $t \rightarrow 0$ . En consecuencia,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1. \quad \leftarrow \text{por (10)}$$

Al volver a (12) es posible escribir

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 + 2x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{x+3} \cdot \frac{\sin(x-1)}{x-1} \right] \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+3} \right) \left( \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \right) \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+3} \right) \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \right)\end{aligned}$$

puesto que ambos límites existen. Así,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 + 2x - 3} = \left( \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+3} \right) \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \right) = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}.$$

### EJEMPLO 8 Uso de una identidad pitagórica

Encuentre el límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$ .

**Solución** Para calcular este límite empezamos con un poco de ingenio algebraico al multiplicar el numerador y el denominador por el factor conjugado del numerador. Luego usamos la identidad pitagórica fundamental  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  en la forma  $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)}. \end{aligned}$$

Para el siguiente paso de nuevo se acude al álgebra para volver a escribir la expresión fraccionaria como un producto, y luego se usan los resultados en (5):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right). \end{aligned}$$

Debido a que  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/(1 + \cos x) = 0/2 = 0$  se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0. \quad (13)$$

Puesto que el límite en (13) es igual a 0, puede escribirse

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(\cos x - 1)}{x} = (-1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

Luego, al dividir entre  $-1$  se obtiene otro importante límite trigonométrico:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0. \quad (14)$$

En la FIGURA 2.4.6 se muestra la gráfica de  $f(x) = (\cos x - 1)/x$ . Los resultados en (10) y (14) se usarán en los ejercicios 2.7 y también en la sección 3.4.

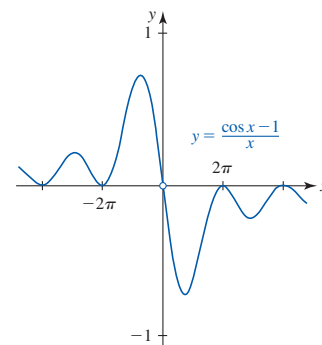


FIGURA 2.4.6 Gráfica de  $f(x) = (\cos x - 1)/x$

### Ejercicios 2.4 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-8.

#### Fundamentos

En los problemas 1-36, encuentre el límite dado, o concluya que no existe.

1.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3t}{2t}$

2.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(-4t)}{t}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{4 + \cos x}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x}{\cos 3x}$

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{3x}$

7.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t \sec t \csc 4t}$

9.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 t}{t \cos^2 t}$

11.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 6t}{t^2}$

13.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{2x-2}$

8.  $\lim_{t \rightarrow 0} 5t \cot 2t$

10.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2(t/2)}{\sin t}$

12.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{\sin^2 3t}$

14.  $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{x - 2\pi}{\sin x}$

15.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}$
16.  $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$
17.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x - \pi/2)}{x}$
18.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(5x + 10)}{4x + 8}$
19.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3t}{\sin 7t}$
20.  $\lim_{t \rightarrow 0} \sin 2t \csc 3t$
21.  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$
22.  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{t}}{\sqrt{t}}$
23.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 - 5t \sin t}{t^2}$
24.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos 4t}{\cos 8t}$
25.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x + 2\sqrt{\sin x})^2}{x}$
26.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{x}$
27.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\cos^2 x - 1}$
28.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \tan x}{x}$
29.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x^2}{x^2}$
30.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{1 - \cos t}$
31.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x - 2)}{x^2 + 2x - 8}$
32.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sin(x - 3)}$
33.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 4x + 1 - \cos x}{x}$
34.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 2 \sin x}{x}$
35.  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \tan x}{\cos x - \sin x}$
36.  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$
37. Suponga que  $f(x) = \sin x$ . Use (10) y (14) de esta sección junto con (17) de la sección 1.4 para encontrar el límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{4} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}.$$

38. Suponga que  $f(x) = \cos x$ . Use (10) y (14) de esta sección junto con (18) de la sección 1.4 para encontrar el límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{6} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h}.$$

En los problemas 39 y 40, use el teorema de compresión para establecer el límite dado.

39.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$
40.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{\pi}{x} = 0$
41. Use las propiedades de los límites dadas en el teorema 2.2.3 para demostrar que
- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin \frac{1}{x} = 0$       b)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin^2 \frac{1}{x} = 0.$
42. Si  $|f(x)| \leq B$  para toda  $x$  en un intervalo que contiene a 0, demuestre que  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(x) = 0$ .

En los problemas 43 y 44, use el teorema de compresión para establecer el límite dado.

43.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  donde  $2x - 1 \leq f(x) \leq x^2 - 2x + 3, x \neq 2$
44.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  donde  $|f(x) - 1| \leq x^2, x \neq 0$

### ≡ Piense en ello

En los problemas 45-48, use una sustitución idónea para encontrar el límite dado.

45.  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{x - \pi/4}$
46.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{\tan 2x}$
47.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi/x)}{x - 1}$
48.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos(\pi/x)}{x - 2}$

49. Analice: ¿La función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

es continua en 0?

50. La existencia de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  no implica la existencia de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin|x|}{x}$ . Explique por qué el segundo límite no existe.

En algunos textos se usa el símbolo  $+\infty$  y las palabras *más infinito* en lugar de  $\infty$  e *infinito*.

## 2.5 Límites que involucran el infinito

■ **Introducción** En las secciones 1.2 y 1.3 se consideraron algunas funciones cuyas gráficas poseían asíntotas. En esta sección se verá que las asíntotas vertical y horizontal de una gráfica están definidas en términos de límites que implican el concepto de *infinito*. Recuerde, los **símbolos de infinito**,  $-\infty$  (“menos infinito”) y  $\infty$  (“más infinito”) son herramientas de notación usadas para indicar, a su vez, que una cantidad decrece o crece sin límite en la dirección negativa (en el plano cartesiano esto significa a la izquierda para  $x$  y hacia abajo para  $y$ ) y en la dirección positiva (a la derecha para  $x$  y hacia arriba para  $y$ ).

Aunque la terminología y notación usadas cuando se trabaja con  $\pm\infty$  son estándar, lamentablemente son ligeramente desafortunadas y pueden ser confusas. Así, desde el principio se advierte que se considerarán dos tipos de límites. Primero se analizarán

- **límites infinitos.**

La expresión *límites infinitos* siempre se refiere a un *límite que no existe* porque la función  $f$  exhibe un comportamiento no acotado:  $f(x) \rightarrow -\infty$  o  $f(x) \rightarrow \infty$ . Luego se considerarán

- **límites en el infinito.**

La expresión *en el infinito* significa que se está intentando determinar si una función  $f$  posee un límite cuando se deja que el valor de la variable  $x$  disminuya o aumente sin límite:  $x \rightarrow -\infty$  o  $x \rightarrow \infty$ . Estos límites pueden o no existir.

◀ A lo largo de todo el análisis, no olvide que  $-\infty$  y  $\infty$  no representan números reales y *nunca* deben manipularse aritméticamente como se hace con los números.

■ **Límites infinitos** El límite de una función  $f$  no existe cuando  $x$  tiende a un número  $a$  siempre que los valores de la función crecen o decrecen sin límite. El hecho de que los valores de la función  $f(x)$  crecen sin límite cuando  $x$  tiende a  $a$  se expresa simbólicamente por

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ cuando } x \rightarrow a \quad \text{o bien,} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty. \quad (1)$$

Si los valores de la función decrecen sin límite cuando  $x$  tiende a  $a$ , se escribe

$$f(x) \rightarrow -\infty \text{ cuando } x \rightarrow a \quad \text{o bien,} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty. \quad (2)$$

Recuerde que el uso del símbolo  $x \rightarrow a$  significa que  $f$  muestra el mismo comportamiento —en este caso, sin límite— a ambos lados del número  $a$  sobre el eje  $x$ . Por ejemplo, la notación en (1) indica que

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ cuando } x \rightarrow a^- \quad \text{y} \quad f(x) \rightarrow \infty \text{ cuando } x \rightarrow a^+.$$

Vea la FIGURA 2.5.1.

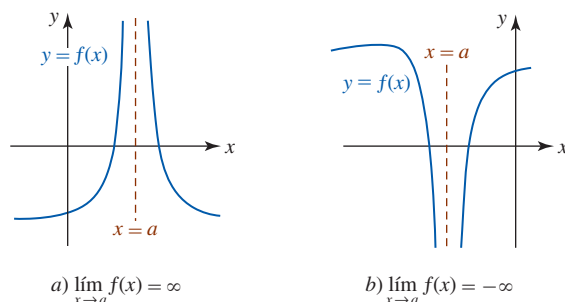


FIGURA 2.5.1 Dos tipos de límites infinitos

En forma semejante, la FIGURA 2.5.2 muestra el comportamiento sin límite de una función  $f$  cuando  $x$  tiende a  $a$  por un lado. Observe en la figura 2.5.2c) que no es posible describir el comportamiento de  $f$  cerca de  $a$  usando un solo símbolo de límite.

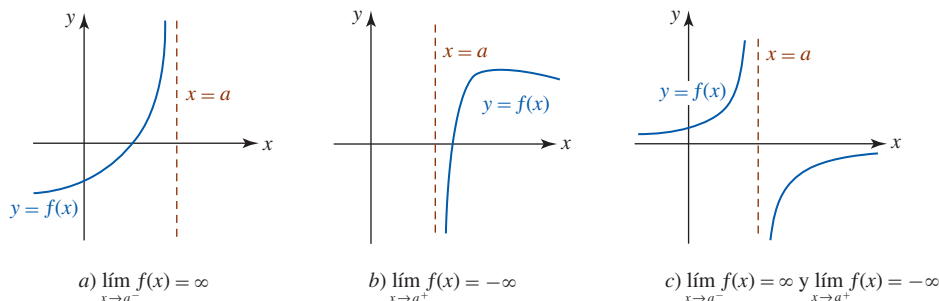


FIGURA 2.5.2 Tres tipos más de límites infinitos

En general, cualquier límite de los seis tipos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &= \infty, \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) &= \infty, \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \infty, \end{aligned} \quad (3)$$

se denomina **límite infinito**. De nuevo, en cada caso de (3) simplemente se está describiendo de manera simbólica el comportamiento de una función  $f$  cerca del número  $a$ . Ninguno de los límites en (3) existe.

En la sección 1.3 se repasó cómo identificar una asíntota vertical para la gráfica de una función racional  $f(x) = p(x)/q(x)$ . Ahora ya podemos definir una asíntota vertical de cualquier función en términos del concepto de límite.

**Definición 2.5.1** Asíntota vertical

Se dice que una recta  $x = a$  es una **asíntota vertical** para la gráfica de una función  $f$  si por lo menos una de las seis afirmaciones en (3) es verdadera.

► **Vea la figura 1.2.1.**

En el repaso de las funciones en el capítulo 1 se vio que las gráficas de funciones racionales a menudo poseen asíntotas. Se vio que las gráficas de las funciones racionales  $y = 1/x$  y  $y = 1/x^2$  eran semejantes a las gráficas en la figura 2.5.2c) y 2.5.1a), respectivamente. El eje  $y$ , es decir,  $x = 0$ , es una asíntota vertical para cada una de estas funciones. Las gráficas de

$$y = \frac{1}{x - a} \quad \text{y} \quad y = \frac{1}{(x - a)^2} \quad (4)$$

se obtienen al desplazar las gráficas  $y = 1/x$  y  $y = 1/x^2$  horizontalmente  $|a|$  unidades. Como se observa en la **FIGURA 2.5.3**,  $x = a$  es una asíntota vertical para las funciones racionales en (4). Se tiene

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{x - a} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x - a} = \infty \quad (5)$$

$$\text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x - a)^2} = \infty. \quad (6)$$

Los límites infinitos en (5) y (6) son justo casos especiales del siguiente resultado general:

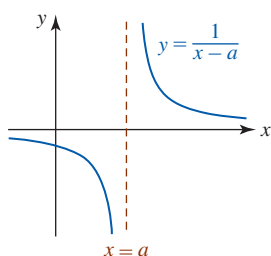
$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{(x - a)^n} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{(x - a)^n} = \infty, \quad (7)$$

para  $n$  un entero positivo impar y

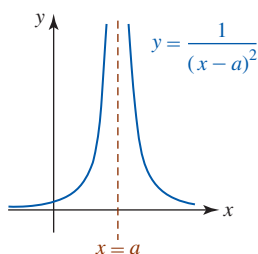
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x - a)^n} = \infty, \quad (8)$$

para  $n$  un entero positivo par. Como consecuencia de (7) y (8), la gráfica de una función racional  $y = 1/(x - a)^n$  se asemeja a la gráfica en la figura 2.5.3a) para  $n$  impar o la de la figura 2.5.3b) para  $n$  par.

Para una función racional general  $f(x) = p(x)/q(x)$ , donde  $p$  y  $q$  no tienen factores comunes, por este análisis debe resultar evidente que cuando  $q$  contiene un factor  $(x - a)^n$ ,  $n$  un entero positivo, entonces la forma de la gráfica cerca de la recta vertical  $x = a$  debe ser alguna de las que se muestran en la figura 2.5.3 o su reflexión en el eje  $x$ .

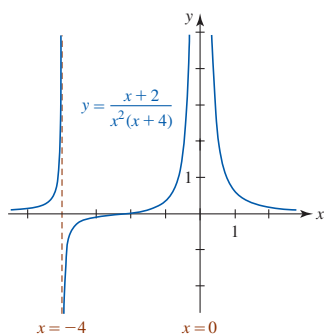


a)



b)

**FIGURA 2.5.3** Gráfica de las funciones en (4)



**FIGURA 2.5.4** Gráfica de la función en el ejemplo 1

**EJEMPLO 1** Asíntotas verticales de una función racional

Al inspeccionar la función racional

$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2(x + 4)}$$

se observa que  $x = -4$  y  $x = 0$  son asíntotas verticales para la gráfica de  $f$ . Puesto que el denominador contiene los factores  $(x - (-4))^1$  y  $(x - 0)^2$ , es de esperar que la gráfica de  $f$  cerca de la recta  $x = -4$  se asemeje a la figura 2.5.3a) o a su reflexión en el eje  $x$ , y la gráfica de  $f$  cerca de  $x = 0$  se asemeje a la figura 2.5.3b) o a su reflexión en el eje  $x$ .

Para  $x$  próxima a 0 por cualquier lado, resulta fácil ver que  $f(x) > 0$ . Pero para  $x$  cerca de  $-4$ , por ejemplo  $x = -4.1$  y  $x = -3.9$ , se tiene  $f(x) > 0$  y  $f(x) < 0$ , respectivamente. Al usar la información adicional de que sólo hay una intersección  $x$  simple  $(-2, 0)$ , se obtiene la gráfica de  $f$  en la **FIGURA 2.5.4**. ■

**EJEMPLO 2** Límite por un lado

En la figura 1.6.6 se vio que el eje  $y$ , o la recta  $x = 0$ , es una asíntota vertical para la función logarítmica natural  $f(x) = \ln x$  puesto que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

La gráfica de la función logarítmica  $y = \ln(x + 3)$  es la gráfica de  $f(x) = \ln x$  desplazada 3 unidades a la izquierda. Por tanto,  $x = -3$  es una asíntota vertical para la gráfica de  $y = \ln(x + 3)$  puesto que  $\lim_{x \rightarrow -3^+} \ln(x + 3) = -\infty$ . ■

### EJEMPLO 3 Límite por un lado

Grafique la función  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$ .

**Solución** Al inspeccionar  $f$  se observa que su dominio es el intervalo  $(-2, \infty)$  y la intersección con el eje  $y$  es  $(0, 0)$ . A partir de la tabla siguiente se concluye que  $f$  decrece

$x \rightarrow -2^+$	-1.9	-1.99	-1.999	-1.9999
$f(x)$	-6.01	-19.90	-63.21	-199.90

sin límite cuando  $x$  tiende a  $-2$  por la derecha:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty.$$

Por tanto, la recta  $x = -2$  es una asíntota vertical. La gráfica de  $f$  se proporciona en la FIGURA 2.5.5. ■

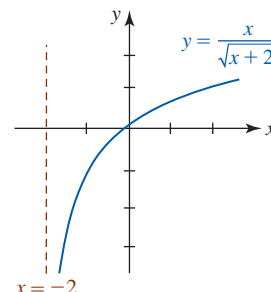


FIGURA 2.5.5 Gráfica de la función en el ejemplo 3

■ **Límites en el infinito** Si una función  $f$  tiende a un valor constante  $L$  cuando la variable independiente  $x$  crece sin límite ( $x \rightarrow \infty$ ) o cuando  $x$  decrece ( $x \rightarrow -\infty$ ) sin límite, entonces se escribe

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \quad (9)$$

y se dice que  $f$  posee un **límite en el infinito**. A continuación se presentan todas las posibilidades para límites en el infinito  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ :

- Un límite existe pero el otro no.
- Tanto  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  como  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  existen y son iguales al mismo número.
- Tanto  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  como  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  existen pero son números diferentes.
- Ni  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ni  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  existen.

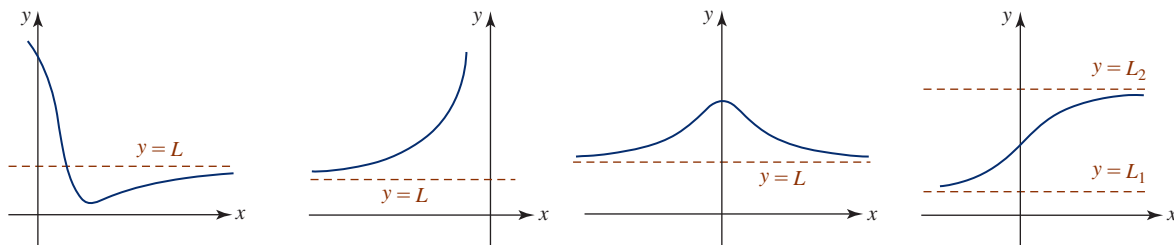
Si por lo menos uno de los límites existe, por ejemplo,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ , entonces la gráfica de  $f$  puede hacerse arbitrariamente próxima a la recta  $y = L$  cuando  $x$  crece en la dirección positiva.

#### Definición 2.5.2 Asíntota horizontal

Se dice que la recta  $y = L$  es una **asíntota horizontal** para la gráfica de una función  $f$  si por lo menos una de las dos declaraciones en (9) es verdadera.

En la FIGURA 2.5.6 se han ilustrado algunas asíntotas horizontales típicas. Se observa, junto con la figura 2.5.6d) que, en general, la gráfica de una función puede tener como máximo *dos* asíntotas horizontales, aunque la gráfica de una *función racional*  $f(x) = p(x)/q(x)$  puede tener cuando mucho *una*. Si la gráfica de una función racional  $f$  posee una asíntota horizontal  $y = L$ , entonces su comportamiento final es como se muestra en la figura 2.5.6c); es decir:

$$f(x) \rightarrow L \text{ cuando } x \rightarrow -\infty \quad \text{y} \quad f(x) \rightarrow L \text{ cuando } x \rightarrow \infty.$$



a)  $f(x) \rightarrow L$  cuando  $x \rightarrow \infty$     b)  $f(x) \rightarrow L$  cuando  $x \rightarrow -\infty$     c)  $f(x) \rightarrow L$  cuando  $x \rightarrow -\infty$ ,  
 $f(x) \rightarrow L$  cuando  $x \rightarrow \infty$     d)  $f(x) \rightarrow L_1$  cuando  $x \rightarrow -\infty$ ,  
 $f(x) \rightarrow L_2$  cuando  $x \rightarrow \infty$

FIGURA 2.5.6  $y = L$  es una asíntota horizontal en a), b) y c);  $y = L_1$  y  $y = L_2$  son asíntotas horizontales en d)

Por ejemplo, si  $x$  se vuelve sin límite en la dirección positiva o en la negativa, las funciones en (4) tienden a 0 y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-a} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-a} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x-a)^2} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x-a)^2} = 0. \quad (10)$$

En general, si  $r$  es un número racional positivo, y si  $(x-a)^r$  está definido, entonces

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x-a)^r} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x-a)^r} = 0. \quad (11)$$

Estos resultados también son verdaderos cuando  $x-a$  se sustituye por  $a-x$ , en el supuesto que  $(a-x)^r$  esté definido.

#### EJEMPLO 4 Asíntotas horizontal y vertical

El dominio de la función  $f(x) = \frac{4}{\sqrt{2-x}}$  es el intervalo  $(-\infty, 2)$ . En virtud de (11) puede escribirse

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{\sqrt{2-x}} = 0.$$

Observe que no es posible considerar el límite de  $f$  cuando  $x \rightarrow \infty$  porque la función no está definida para  $x \geq 2$ . No obstante,  $y = 0$  es una asíntota horizontal. Luego, por el límite en infinito

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4}{\sqrt{2-x}} = \infty$$

se concluye que  $x = 2$  es una asíntota vertical para la gráfica de  $f$ . Vea la FIGURA 2.5.7. ■

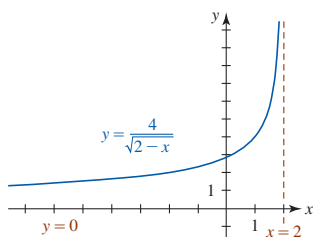


FIGURA 2.5.7 Gráfica de la función en el ejemplo 4

En general, si  $F(x) = f(x)/g(x)$ , entonces en la siguiente tabla se resumen los resultados para límites de las formas  $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ . El símbolo  $L$  denota un número real.

forma límite: $x \rightarrow a, \infty, -\infty$	$\frac{L}{\pm\infty}$	$\frac{\pm\infty}{L}, L \neq 0$	$\frac{L}{0}, L \neq 0$
el límite es:	0	infinito	infinito

(12)

Se dice que límites de la forma  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \pm\infty$  o  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \pm\infty$  son **límites infinitos en el infinito**. Además, las propiedades de los límites dadas en el teorema 2.2.3 se cumplen al sustituir el símbolo  $a$  por  $\infty$  o  $-\infty$  en el supuesto de que los límites existen. Por ejemplo,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)\right)\left(\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)\right) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)}, \quad (13)$$

siempre que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$  existan. En el caso del límite de un cociente, también debe tenerse  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \neq 0$ .

■ **Comportamiento final** En la sección 1.3 vimos que la forma en que una función  $f$  se comporta cuando  $|x|$  es muy grande se denomina **comportamiento final**. Como ya se analizó, si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ , entonces la gráfica de  $f$  puede hacerse arbitrariamente próxima a la recta  $y = L$  para grandes valores positivos de  $x$ . La gráfica de una función polinomial,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

se asemeja a la gráfica de  $y = a_n x^n$  para  $|x|$  muy grande. En otras palabras, para

$$f(x) = a_n x^n + \boxed{a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0} \quad (14)$$

Los términos encerrados en el rectángulo azul en (14) son irrelevantes cuando la gráfica de una función polinomial se observa globalmente; es decir, para  $|x|$  muy grande. Así, se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0), \quad (15)$$

cundo (15) es  $\infty$  o  $-\infty$  dependiendo de  $a_n$  y  $n$ . En otras palabras, el límite en (15) constituye un ejemplo de límite infinito en el infinito.



**EJEMPLO 5** Límite en el infinito

Evalúe  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^4 + x^2 + 1}{2x^4 - x}$ .

**Solución** No es posible aplicar la ley del límite de un cociente en (13) a la función dada, puesto que  $\lim_{x \rightarrow \infty} (-6x^4 + x^2 + 1) = -\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^4 - x) = \infty$ . No obstante, al dividir el numerador y el denominador entre  $x^4$  podemos escribir

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^4 + x^2 + 1}{2x^4 - x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6 + \left(\frac{1}{x^2}\right) + \left(\frac{1}{x^4}\right)}{2 - \left(\frac{1}{x^3}\right)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[-6 + \left(\frac{1}{x^2}\right) + \left(\frac{1}{x^4}\right)\right]}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[2 - \left(\frac{1}{x^3}\right)\right]} \quad \begin{array}{l} \text{El límite del numerador} \\ \text{existe, así como el límite} \\ \text{del denominador, y el} \\ \text{límite del denominador} \\ \text{no es cero} \end{array} \\ &= \frac{-6 + 0 + 0}{2 - 0} = -3. \end{aligned}$$

Esto significa que la recta  $y = -3$  es una asíntota horizontal para la gráfica de la función.

**Solución alterna** En virtud de (14) es posible descartar todas las potencias de  $x$ , menos la más alta:

descartar términos de los recuadros azules

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^4 + \boxed{x^2 + 1}}{2x^4 - \boxed{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^4}{2x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6}{2} = -3. \quad \blacksquare$$

**EJEMPLO 6** Límite infinito en el infinito

Evalúe  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x^3}{3x + 2}$ .

**Solución** Por (14),

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x^3}{3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3}{3x} = -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = -\infty.$$

En otras palabras, el límite no existe. \blacksquare

**EJEMPLO 7** Gráfica de una función racional

Grafique la función  $f(x) = \frac{x^2}{1 - x^2}$ .

**Solución** Al inspeccionar la función  $f$  se observa que su gráfica es simétrica con respecto al eje  $y$ , la intersección con el eje  $y$  es  $(0, 0)$  y las asíntotas verticales son  $x = -1$  y  $x = 1$ . Luego, a partir del límite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{-x^2} = -\lim_{x \rightarrow \infty} 1 = -1$$

se concluye que la recta  $y = -1$  es una asíntota horizontal. La gráfica de  $f$  se muestra en la FIGURA 2.5.8. \blacksquare

Otra ley de los límites que se cumple para límites en el infinito es que el límite de una raíz  $n$ -ésima de una función es la raíz  $n$ -ésima del límite, siempre que el límite exista y la raíz  $n$ -ésima esté definida. En símbolos, si  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)} = \sqrt[n]{L}, \quad (16)$$

en el supuesto de que  $L \geq 0$  cuando  $n$  es par. El resultado también se cumple para  $x \rightarrow -\infty$ .

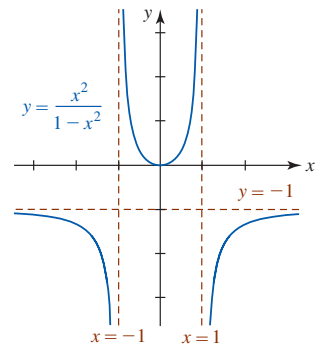


FIGURA 2.5.8 Gráfica de la función en el ejemplo 7

**EJEMPLO 8** Límite de una raíz cuadrada

Evalúe  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2x^3 - 5x^2 + 4x - 6}{6x^3 + 2x}}$ .

**Solución** Debido a que el límite de la función racional en el radical existe y es positivo, puede escribirse

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2x^3 - 5x^2 + 4x - 6}{6x^3 + 2x}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 5x^2 + 4x - 6}{6x^3 + 2x}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{6x^3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad \blacksquare$$

**EJEMPLO 9** Gráfica con dos asíntotas horizontales

Determine si la gráfica de  $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 4}}$  tiene asíntotas horizontales.

**Solución** Puesto que la función no es racional, es necesario investigar el límite de  $f$  cuando  $x \rightarrow \infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$ . Primero, recuerde del álgebra que  $\sqrt{x^2}$  es no negativa, o más al punto,

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Luego, volvemos a escribir  $f$  como

$$f(x) = \frac{\frac{5x}{\sqrt{x^2}}}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{\frac{5x}{|x|}}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{\frac{5x}{|x|}}{\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}.$$

Los límites de  $f$  cuando  $x \rightarrow \infty$  y  $x \rightarrow -\infty$  son, respectivamente,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x}{|x|}}{\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x}{x}}{\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 5}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}} = \frac{5}{1} = 5,$$

$$y \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{5x}{|x|}}{\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{5x}{-x}}{\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5)}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}} = \frac{-5}{1} = -5.$$

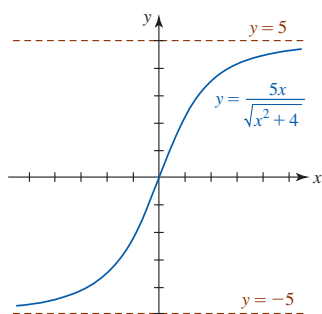


FIGURA 2.5.9 Gráfica de la función en el ejemplo 9

Por tanto, la gráfica de  $f$  tiene dos asíntotas horizontales  $y = 5$  y  $y = -5$ . La gráfica de  $f$ , que es semejante a la figura 2.5.6d), se proporciona en la FIGURA 2.5.9.  $\blacksquare$

En el siguiente ejemplo se ve que la forma del límite dado es  $\infty - \infty$ , pero el límite existe y *no es* 0.

**EJEMPLO 10** Uso de racionalización

Evalúe  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1})$ .

**Solución** Debido a que  $f(x) = x^2 - \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}$  es una función par (compruebe que  $f(-x) = f(x)$ ) con dominio  $(-\infty, \infty)$ , si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  existe, debe ser el mismo que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . Primero racionalizamos el numerador:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1})(x^2 + \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1})}{1 \cdot (x^2 + \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - (x^4 + 7x^2 + 1)}{x^2 + \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7x^2 - 1}{x^2 + \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Luego, el numerador y el denominador se dividen entre  $\sqrt{x^4} = x^2$ :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7x^2 - 1}{x^2 + \sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-7x^2}{\sqrt{x^4}} - \frac{1}{\sqrt{x^4}}}{\frac{x^2}{\sqrt{x^4}} + \frac{\sqrt{x^4 + 7x^2 + 1}}{\sqrt{x^4}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7 - \frac{1}{x^2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{7}{x^2} + \frac{1}{x^4}}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-7 - \frac{1}{x^2}\right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)}} \\ &= \frac{-7}{1 + 1} = -\frac{7}{2}.\end{aligned}$$

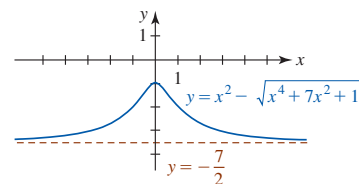


FIGURA 2.5.10 Gráfica de la función en el ejemplo 10

Con ayuda de un SAC, la gráfica de la función  $f$  se proporciona en la FIGURA 2.5.10. La recta  $y = -\frac{7}{2}$  es una asíntota horizontal. Observe la simetría de la gráfica con respecto al eje  $y$ . ■

Cuando se trabaja con funciones que contienen la función exponencial natural, los cuatro siguientes límites ameritan una atención especial:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty. \quad (17)$$

Como se analizó en la sección 1.6 y se comprobó por los límites segundo y tercero en (17),  $y = 0$  es una asíntota horizontal para la gráfica de  $y = e^x$  y  $y = e^{-x}$ . Vea la FIGURA 2.5.11.

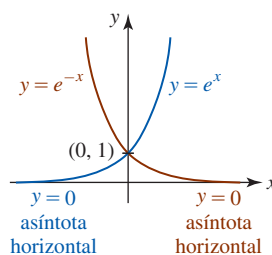


FIGURA 2.5.11 Gráficas de funciones exponenciales

### EJEMPLO 11 Gráfica con dos asíntotas horizontales

Determine si la gráfica de  $f(x) = \frac{6}{1 + e^{-x}}$  tiene alguna asíntota horizontal.

**Solución** Debido a que  $f$  no es una función racional, es necesario analizar  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . Primero, en virtud del tercer resultado proporcionado en (17) podemos escribir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{1 + e^{-x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 6}{\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + e^{-x})} = \frac{6}{1 + 0} = 6.$$

Así,  $y = 6$  es una asíntota horizontal. Luego, debido a que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty$  por la tabla en (12) se concluye que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{1 + e^{-x}} = 0.$$

En consecuencia,  $y = 0$  es una asíntota horizontal. La gráfica de  $f$  se muestra en la FIGURA 2.5.12. ■

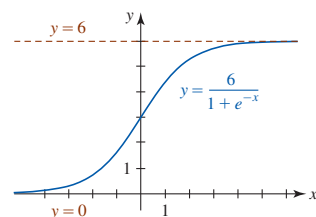


FIGURA 2.5.12 Gráfica de la función en el ejemplo 11

■ **Funciones compuestas** El teorema 2.3.3, el límite de una función compuesta, se cumple cuando  $a$  se sustituye por  $-\infty$  o  $\infty$  y el límite existe. Por ejemplo, si  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L$  y  $f$  es continua en  $L$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)\right) = f(L). \quad (18)$$

El resultado del límite en (16) es justo un caso especial de (18) cuando  $f(x) = \sqrt[n]{x}$ . El resultado en (18) también se cumple para  $x \rightarrow -\infty$ . El último ejemplo ilustra a (18) cuando implica un límite en  $\infty$ .

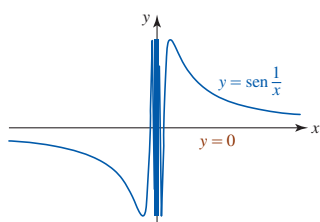


FIGURA 2.5.13 Gráfica de la función en el ejemplo 12

### EJEMPLO 12 Otro repaso a una función trigonométrica

En el ejemplo 2 de la sección 2.4 vimos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(1/x)$  no existe. No obstante, el límite en el infinito,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(1/x)$ , existe. Por la ecuación (18), podemos escribir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = \sin \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right) = \sin 0 = 0.$$

Como se observa en la FIGURA 2.5.13,  $y = 0$  es una asíntota horizontal para la gráfica de  $f(x) = \sin(1/x)$ . Compare esta gráfica con la mostrada en la figura 2.4.2. ■

### Ejercicios 2.5

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-8.

#### Fundamentos

En los problemas 1-24, exprese el límite dado como un número, como  $-\infty$ , o como  $\infty$ .

- $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{1}{x-5}$
- $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{4}{(x-6)^2}$
- $\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{2}{(x+4)^3}$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{10}{x^2-4}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^4}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 + \sin x}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \csc x$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-3x}{4x^2+5}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^{-2}}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 5 - \frac{2}{x^4} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{6}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[5]{x}} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 - \sqrt{x}}{1 + 4\sqrt{x}}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 7\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[3]{x}}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x}{x+2} - \frac{x-1}{2x+6} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{3x+1} \right) \left( \frac{4x^2+1}{2x^2+x} \right)^3$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3x+2}{6x-8}}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{2x-1}{7-16x}}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2+1})$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+5x} - x)$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{5}{x}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin\left(\frac{\pi x}{3-6x}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{4x^2+1}}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x}{x+8}\right)$

En los problemas 25-32, encuentre  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  para la función dada  $f$ .

- $f(x) = \frac{4x+1}{\sqrt{x^2+1}}$
- $f(x) = \frac{\sqrt{9x^2+6}}{5x-1}$
- $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{3x^2+1}}$
- $f(x) = \frac{-5x^2+6x+3}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$

$$29. f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$31. f(x) = \frac{|x-5|}{x-5}$$

$$30. f(x) = 1 + \frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$32. f(x) = \frac{|4x| + |x-1|}{x}$$

En los problemas 33-42, encuentre todas las asíntotas verticales y horizontales para la gráfica de la función dada  $f$ . Trace la gráfica.

$$33. f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

$$34. f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$35. f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

$$36. f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-1}$$

$$37. f(x) = \frac{1}{x^2(x-2)}$$

$$38. f(x) = \frac{4x^2}{x^2+4}$$

$$39. f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

$$40. f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$41. f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$42. f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2-1}}$$

En los problemas 43-46, use la gráfica dada para encontrar:

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

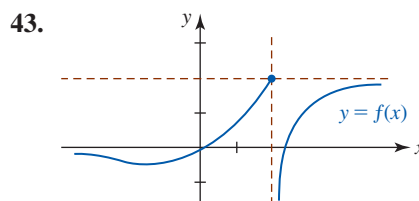


FIGURA 2.5.14 Gráfica para el problema 43

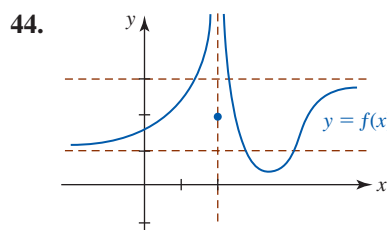


FIGURA 2.5.15 Gráfica para el problema 44

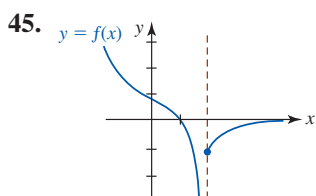


FIGURA 2.5.16 Gráfica para el problema 45

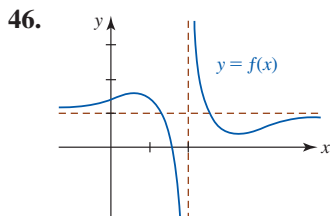


FIGURA 2.5.17 Gráfica para el problema 46

En los problemas 47-50, trace una gráfica de una función  $f$  que satisfice las condiciones dadas.

47.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ ,  $f(2) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

48.  $f(0) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -2$

49.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

50.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ ,  $f(\frac{3}{2}) = 0$ ,  $f(3) = 0$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

51. Use una sustitución idónea para evaluar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{3}{x}.$$

52. Según la teoría de la relatividad de Einstein, la masa  $m$  de un cuerpo que se mueve con velocidad  $v$  es  $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ , donde  $m_0$  es la masa inicial y  $c$  es la velocidad de la luz. ¿Qué ocurre a  $m$  cuando  $v \rightarrow c^-$ ?

### Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 53 y 54, use una calculadora o SAC para investigar el límite dado. Conjeture su valor.

53.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin \frac{2}{x^2}$

54.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{1}{x} \right)^x$

55. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de  $f(x) = (1+x)^{1/x}$ . Use la gráfica para conjeturar los valores de  $f(x)$  cuando

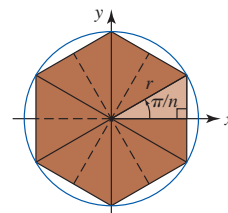
a)  $x \rightarrow -1^+$ , b)  $x \rightarrow 0$  y c)  $x \rightarrow \infty$ .

56. a) Un  $n$ -gono regular es un polígono regular de  $n$  lados inscrito en un círculo; el polígono está formado por  $n$  puntos equidistantes sobre el círculo. Suponga que el polígono que se muestra en la FIGURA 2.5.18 repre-

senta un  $n$ -gono regular inscrito en un círculo de radio  $r$ . Use trigonometría para demostrar que el área  $A(n)$  del  $n$ -gono está dada por

$$A(n) = \frac{n}{2} r^2 \sin \left( \frac{2\pi}{n} \right).$$

- b) Tiene sentido afirmar que el área  $A(n)$  tiende al área del círculo a medida que aumenta el número de lados del  $n$ -gono. Use una calculadora para obtener  $A(100)$  y  $A(1\,000)$ .  
 c) Sea  $x = 2\pi/n$  en  $A(n)$  y observe que cuando  $n \rightarrow \infty$  entonces  $x \rightarrow 0$ . Use (10) de la sección 2.4 para demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} A(n) = \pi r^2$ .

FIGURA 2.5.18  $n$ -gono inscrito para el problema 56

### Piense en ello

57. a) Suponga que  $f(x) = x^2/(x+1)$  y  $g(x) = x-1$ . Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - g(x)] = 0.$$

- b) ¿Qué indica el resultado del inciso a) respecto a las gráficas de  $f$  y  $g$ , donde  $|x|$  es grande?  
 c) De ser posible, asigne un nombre a la función  $g$ .

58. Muy a menudo los estudiantes e incluso los profesores trazan incorrectamente gráficas desplazadas verticalmente. Por ejemplo, las gráficas de  $y = x^2$  y  $y = x^2 + 1$  están dibujadas incorrectamente en la FIGURA 2.5.19a) pero lo están correctamente en la figura 2.5.19b). Demuestre que la figura 2.5.19b) es correcta al mostrar que la distancia horizontal entre los dos puntos  $P$  y  $Q$  en la figura tiende a 0 cuando  $x \rightarrow \infty$ .

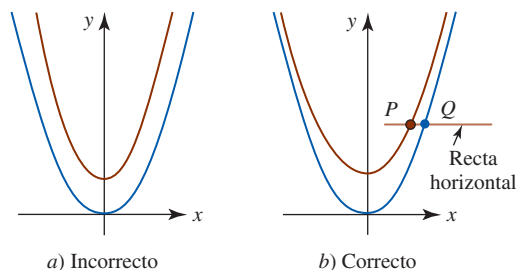


FIGURA 2.5.19 Gráficas para el problema 58

## 2.6 Límites: un enfoque formal

**Introducción** En el análisis que se presenta a continuación se considerará un enfoque alternativo a la idea de límite, que se basa en conceptos analíticos más que en conceptos intuitivos. Una **demostración** de la existencia de un límite jamás debe estar basada en la habilidad para elaborar gráficas o en tablas de valores numéricos. Aunque una buena comprensión intuitiva de

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  es suficiente para continuar con el estudio del cálculo en este texto, en general una comprensión intuitiva es algo muy vago como para usarlo en la demostración de teoremas. Para presentar una demostración rigurosa de la existencia de un límite, o para demostrar los importantes teoremas de la sección 2.2, es necesario empezar con una definición precisa de límite.

■ **Límite de una función** Se intentará demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 6) = 10$  al trabajar la siguiente idea: “Si  $f(x) = 2x + 6$  puede hacerse arbitrariamente próximo a 10 al tomar  $x$  suficientemente próximo a 2, por ambos lados pero diferente de 2, entonces  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 10$ .” Es necesario precisar los conceptos *arbitrariamente próximo* y *suficientemente próximo*. Para establecer una norma de proximidad arbitraria, se pedirá que la distancia entre los números  $f(x)$  y 10 sea menor que 0.1; es decir,

$$|f(x) - 10| < 0.1 \quad \text{o} \quad 9.9 < f(x) < 10.1. \quad (1)$$

Así, ¿cuán próximo a 2 debe estar  $x$  para satisfacer (1)? Para averiguarlo, es posible usar álgebra normal para volver a escribir la desigualdad

$$9.9 < 2x + 6 < 10.1$$

cuando  $1.95 < x < 2.05$ . Al sumar  $-2$  a ambos miembros de esta desigualdad simultánea se obtiene

$$-0.05 < x - 2 < 0.05.$$

Al usar valores absolutos y recordar que  $x \neq 2$ , la última desigualdad puede escribirse como  $0 < |x - 2| < 0.05$ . Así, para una *cercanía arbitrariamente próxima a 10* de 0.1, *suficientemente próximo a 2* significa a menos de 0.05. En otras palabras, si  $x$  es un número diferente de 2 tal que su distancia a 2 satisface  $|x - 2| < 0.05$ , entonces se garantiza que la distancia de  $f(x)$  a 10 satisface  $|f(x) - 10| < 0.1$ . Al expresarlo de otra manera, cuando  $x$  es un número diferente de 2, pero que está en el intervalo abierto  $(1.95, 2.05)$  sobre el eje  $x$ , entonces  $f(x)$  está en el intervalo  $(9.9, 10.1)$  sobre el eje  $y$ .

Se intentará generalizar usando el mismo ejemplo. Suponga que  $\varepsilon$  (la letra griega *épsilon*) denota un *número positivo* arbitrario que constituye la medida de la proximidad arbitraria al número 10. Si se pide que

$$|f(x) - 10| < \varepsilon \quad \text{o} \quad 10 - \varepsilon < f(x) < 10 + \varepsilon, \quad (2)$$

entonces por  $10 - \varepsilon < 2x + 6 < 10 + \varepsilon$  y por álgebra, se encuentra que

$$2 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{o} \quad -\frac{\varepsilon}{2} < x - 2 < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3)$$

De nuevo, al usar valores absolutos y al recordar que  $x \neq 2$ , la última desigualdad en (3) puede escribirse como

$$0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4)$$

Si  $\varepsilon/2$  se denota por el nuevo símbolo  $\delta$  (la letra griega *delta*), (2) y (4) pueden escribirse como

$$|f(x) - 10| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - 2| < \delta.$$

Así, para un nuevo valor para  $\varepsilon$ , por ejemplo  $\varepsilon = 0.001$ ,  $\delta = \varepsilon/2 = 0.0005$  establece la proximidad correspondiente a 2. Para cualquier número  $x$  diferente de 2 en  $(1.9995, 2.0005)$ ,\* puede tenerse la certeza de que  $f(x)$  está en  $(9.999, 10.001)$ . Vea la FIGURA 2.6.1.

■ **Una definición** El análisis anterior conduce a la **definición  $\varepsilon$ - $\delta$  de límite**.

### Definición 2.6.1 Definición de límite

Suponga que una función  $f$  está definida en todas partes sobre un intervalo abierto, excepto quizás en un número  $a$  en el intervalo. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

significa que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un número  $\delta > 0$  tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

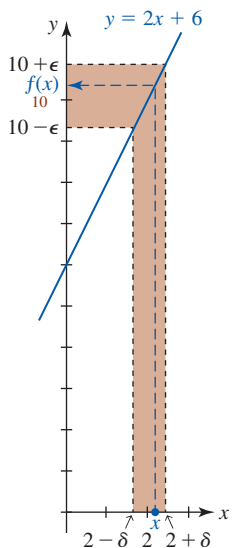


FIGURA 2.6.1  $f(x)$  está en  $(10 - \varepsilon, 10 + \varepsilon)$  siempre que  $x$  esté en  $(2 - \delta, 2 + \delta)$ ,  $x \neq 2$

\* Por esta razón se usa  $0 < |x - 2| < \delta$  en lugar de  $|x - 2| < \delta$ . Al considerar  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ , no olvide que  $f$  en 2 carece de importancia.

Sea  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y suponga que  $\delta > 0$  es el número que “funciona” en el sentido de la definición 2.6.1 para un  $\varepsilon > 0$  dado. Como se muestra en la FIGURA 2.6.2a), toda  $x$  en  $(a - \delta, a + \delta)$ , con la posible excepción de  $a$  mismo, tendrá entonces una imagen  $f(x)$  en  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ . Además, en la figura 2.6.2b), una elección  $\delta_1 < \delta$  para la misma  $\varepsilon$  también “funciona” en el sentido de que toda  $x$  diferente a  $a$  en  $(a - \delta_1, a + \delta_1)$  proporciona  $f(x)$  en  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ . No obstante, la figura 2.6.2c) muestra que al escoger un  $\varepsilon_1$ ,  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ , más pequeño, demanda encontrar un nuevo valor de  $\delta$ . Observe en la figura 2.6.2c) que  $x$  está en  $(a - \delta, a + \delta)$  pero no en  $(a - \delta_1, a + \delta_1)$ , de modo que  $f(x)$  no necesariamente está en  $(L - \varepsilon_1, L + \varepsilon_1)$ .

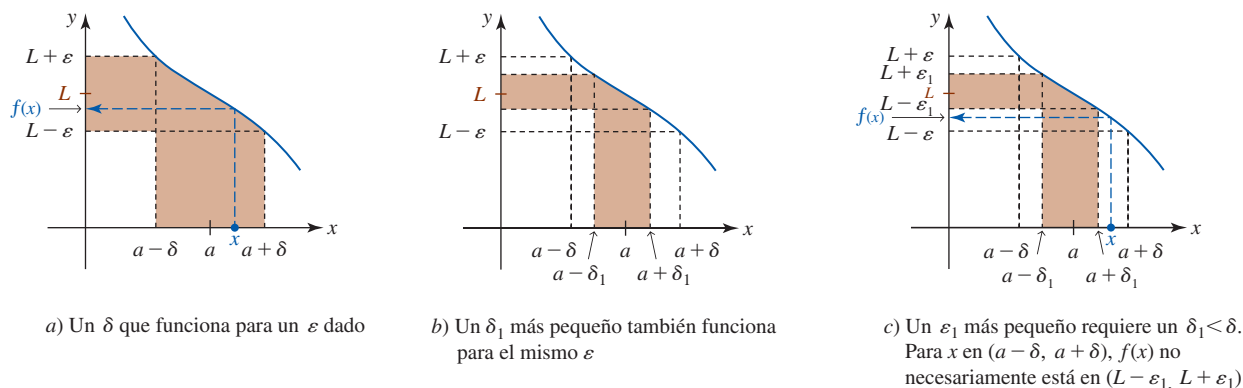


FIGURA 2.6.2  $f(x)$  está en  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  siempre que  $x$  esté en  $(a - \delta, a + \delta)$ ,  $x \neq a$

### EJEMPLO 1 Uso de la definición 2.6.1

Demuestre que  $\lim_{x \rightarrow 3} (5x + 2) = 17$ .

**Solución** Para cualquier  $\varepsilon > 0$ , arbitrario sin importar cuán pequeño sea, se quiere encontrar un  $\delta$  de modo que

$$|(5x + 2) - 17| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - 3| < \delta.$$

Para hacer lo anterior, considere

$$|(5x + 2) - 17| = |5x - 15| = 5|x - 3|.$$

Así, para hacer  $|(5x + 2) - 17| = 5|x - 3| < \varepsilon$ , sólo es necesario hacer  $0 < |x - 3| < \varepsilon/5$ ; es decir, se escoge  $\delta = \varepsilon/5$ .

**Verificación** Si  $0 < |x - 3| < \varepsilon/5$ , entonces  $5|x - 3| < \varepsilon$  implica

$$|5x - 15| < \varepsilon \quad \text{o bien,} \quad |(5x + 2) - 17| < \varepsilon \quad \text{o bien,} \quad |f(x) - 17| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

### EJEMPLO 2 Uso de la definición 2.6.1

Demuestre que  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{16 - x^2}{4 + x} = 8$ .

**Solución** Para  $x \neq -4$ ,

$$\left| \frac{16 - x^2}{4 + x} - 8 \right| = |4 - x - 8| = |-x - 4| = |x + 4| = |x - (-4)|$$

$$\text{Así,} \quad \left| \frac{16 - x^2}{4 + x} - 8 \right| = |x - (-4)| < \varepsilon$$

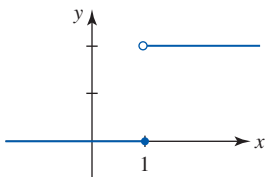
siempre que se tiene  $0 < |x - (-4)| < \varepsilon$ ; es decir, se escoge  $\delta = \varepsilon$ .  $\blacksquare$

### EJEMPLO 3 Un límite que no existe

Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

◀ Este límite se analizó en (1) y (2) de la sección 2.1.



**FIGURA 2.6.3** El límite de  $f$  no existe cuando  $x$  tiende a 1 en el ejemplo 3

En la **FIGURA 2.6.3** se reconoce que  $f$  tiene una discontinuidad de tipo salto en 1, de modo que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  no existe. No obstante, para *demostrar* este último hecho, se procederá indirectamente. Suponga que el límite existe; a saber,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = L$ . Luego, por la definición 2.6.1 sabemos que para la elección  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  debe existir un  $\delta > 0$  tal que

$$|f(x) - L| < \frac{1}{2} \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - 1| < \delta.$$

Luego, a la derecha de 1 se escoge  $x = 1 + \delta/2$ . Puesto que

$$0 < \left| 1 + \frac{\delta}{2} - 1 \right| = \left| \frac{\delta}{2} \right| < \delta$$

debe tenerse

$$\left| f\left(1 + \frac{\delta}{2}\right) - L \right| = |2 - L| < \frac{1}{2}. \quad (5)$$

A la izquierda de 1, se escoge  $x = 1 - \delta/2$ . Pero

$$0 < \left| 1 - \frac{\delta}{2} - 1 \right| = \left| -\frac{\delta}{2} \right| < \delta$$

$$\text{implica} \quad \left| f\left(1 - \frac{\delta}{2}\right) - L \right| = |0 - L| = |L| < \frac{1}{2}. \quad (6)$$

Al resolver las desigualdades en valor absoluto (5) y (6) se obtiene, respectivamente,

$$\frac{3}{2} < L < \frac{5}{2} \quad \text{y} \quad -\frac{1}{2} < L < \frac{1}{2}.$$

Puesto que ningún número  $L$  puede satisfacer estas dos desigualdades, concluimos que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  no debe existir. ■

En el siguiente ejemplo se considera el límite de una función cuadrática. Veremos que en este caso encontrar la  $\delta$  requiere un poco más de ingenio que en los ejemplos 1 y 2.

#### **EJEMPLO 4** Uso de la definición 2.6.1

► Demuestre que  $\lim_{x \rightarrow 4} (-x^2 + 2x + 2) = -6$ .

**Solución** Para un  $\varepsilon > 0$  arbitrario es necesario encontrar un  $\delta > 0$  tal que

$$|-x^2 + 2x + 2 - (-6)| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - 4| < \delta.$$

Luego,

$$\begin{aligned} |-x^2 + 2x + 2 - (-6)| &= |(-1)(x^2 - 2x - 8)| \\ &= |(x + 2)(x - 4)| \\ &= |x + 2||x - 4|. \end{aligned} \quad (7)$$

En otras palabras, se quiere hacer  $|x + 2||x - 4| < \varepsilon$ . Pero puesto que hemos acordado examinar valores de  $x$  cerca de 4, sólo se consideran aquellos valores para los cuales  $|x - 4| < 1$ . Esta última desigualdad da  $3 < x < 5$  o, de manera equivalente,  $5 < x + 2 < 7$ . En consecuencia, podemos escribir  $|x + 2| < 7$ . Entonces, por (7),

$$0 < |x - 4| < 1 \quad \text{implica} \quad |-x^2 + 2x + 2 - (-6)| < 7|x - 4|.$$

Si ahora  $\delta$  se escoge como el mínimo de los dos números 1 y  $\varepsilon/7$ , escrito  $\delta = \min\{1, \varepsilon/7\}$  se tiene

$$0 < |x - 4| < \delta \quad \text{implica} \quad |-x^2 + 2x + 2 - (-6)| < 7|x - 4| < 7 \cdot \frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

El razonamiento en el ejemplo 4 es sutil. En consecuencia, merece la pena dedicar unos minutos para volver a leer el análisis que está inmediatamente después de la definición 2.6.1,

Este límite se analizó en el ejemplo 1 de la sección 2.1.



volver a examinar la figura 2.3.2b) y luego volver a pensar en por qué  $\delta = \min\{1, \varepsilon/7\}$  es el  $\delta$  que “funciona” en el ejemplo. Recuerde que el valor de  $\varepsilon$  puede escogerse arbitrariamente; considere  $\delta$  para, por ejemplo,  $\varepsilon = 8$ ,  $\varepsilon = 6$  y  $\varepsilon = 0.01$ .

**■ Límites laterales** A continuación se presentan las definiciones de los **límites laterales**,

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .

### Definición 2.6.2 Límite por la izquierda

Suponga que una función  $f$  está definida sobre un intervalo abierto  $(c, a)$ . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

significa que para todo  $\varepsilon > 0$  existe una  $\delta > 0$  tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad a - \delta < x < a.$$

### Definición 2.6.3 Límite por la derecha

Suponga que una función  $f$  está definida sobre un intervalo abierto  $(a, c)$ . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

significa que para todo  $\varepsilon > 0$  existe una  $\delta > 0$  tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad a < x < a + \delta.$$

### EJEMPLO 5 Uso de la definición 2.6.3

Demuestre que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ .

**Solución** Primero, podemos escribir

$$|\sqrt{x} - 0| = |\sqrt{x}| = \sqrt{x}.$$

Luego,  $|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$  siempre que  $0 < x < \varepsilon^2$ . En otras palabras, se escoge  $\delta = \varepsilon^2$ .

**Verificación** Si  $0 < x < \varepsilon^2$ , entonces  $0 < \sqrt{x} < \varepsilon$  implica

$$|\sqrt{x}| < \varepsilon \quad \text{o bien,} \quad |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

**■ Límites que implican el infinito** Los dos conceptos de **límite infinito**

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ (o bien, } -\infty) \text{ cuando } x \rightarrow a$$

y **límite en el infinito**

$$f(x) \rightarrow L \text{ cuando } x \rightarrow \infty \text{ (o bien, } -\infty)$$

se formalizan en las dos secciones siguientes.

Recuerde que un límite infinito es un límite que no existe cuando  $x \rightarrow a$ .

### Definición 2.6.4 Límites infinitos

- i)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  significa que para todo  $M > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $f(x) > M$  siempre que  $0 < |x - a| < \delta$ .
- ii)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  significa que para todo  $M < 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $f(x) < M$  siempre que  $0 < |x - a| < \delta$ .

Los incisos *i*) y *ii*) de la definición 2.6.4 se ilustran en la FIGURA 2.6.4a) y en la figura 2.6.4b), respectivamente. Recuerde, si  $f(x) \rightarrow \infty$  (o  $-\infty$ ) cuando  $x \rightarrow a$ , entonces  $x = a$  es una asíntota vertical para la gráfica de  $f$ . En el caso en que  $f(x) \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow a$ , entonces  $f(x)$  puede hacerse más grande que cualquier número positivo arbitrario (es decir,  $f(x) > M$ ) al tomar  $x$  suficientemente próximo a  $a$  (es decir,  $0 < |x - a| < \delta$ ).

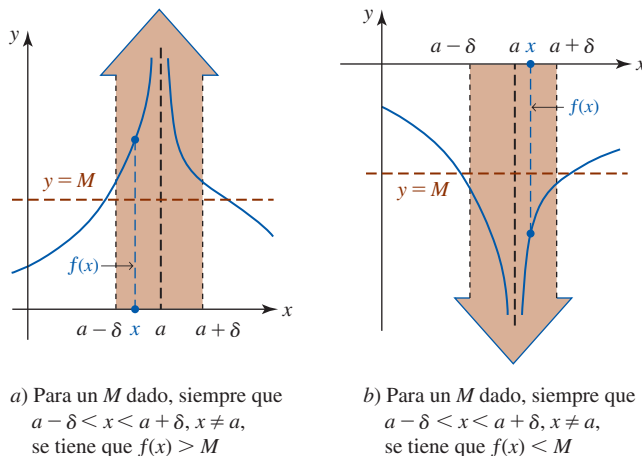


FIGURA 2.6.4 Límites infinitos cuando  $x \rightarrow a$

Los cuatro límites infinitos por un lado

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \infty \text{ cuando } x \rightarrow a^-, & f(x) &\rightarrow -\infty \text{ cuando } x \rightarrow a^- \\ f(x) &\rightarrow \infty \text{ cuando } x \rightarrow a^+, & f(x) &\rightarrow -\infty \text{ cuando } x \rightarrow a^+ \end{aligned}$$

se definen de forma análoga a la proporcionada en las definiciones 2.6.2 y 2.6.3.

### Definición 2.6.5 Límites en el infinito

- i*)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  si para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un  $N > 0$  tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  siempre que  $x > N$ .
- ii*)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  si para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un  $N < 0$  tal que  $|f(x) - L| < \varepsilon$  siempre que  $x < N$ .

Los incisos *i*) y *ii*) de la definición 2.6.5 se ilustran en la FIGURA 2.6.5a) y en la figura 2.6.5b), respectivamente. Recuerde, si  $f(x) \rightarrow L$  cuando  $x \rightarrow \infty$  (o  $-\infty$ ), entonces  $y = L$  es una asíntota horizontal para la gráfica de  $f$ . En el caso en que  $f(x) \rightarrow L$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , entonces la gráfica de  $f$  puede hacerse arbitrariamente próxima a la recta  $y = L$  (es decir,  $|f(x) - L| < \varepsilon$ ) al tomar  $x$  suficientemente lejos sobre el eje  $x$  positivo (es decir,  $x > N$ ).

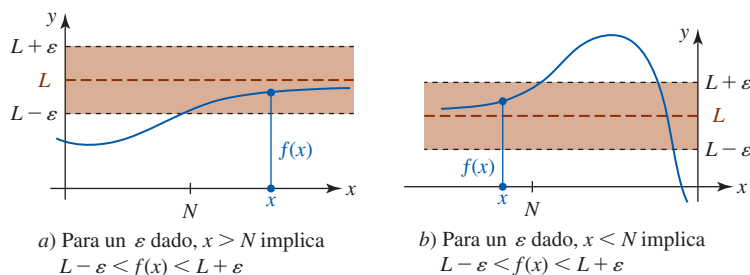


FIGURA 2.6.5 Límites en el infinito

**EJEMPLO 6** Uso de la definición 2.6.5i)

Demuestre que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x+1} = 3$ .

**Solución** Por la definición 2.6.5i), para cualquier  $\varepsilon > 0$  es necesario encontrar un número  $N > 0$  tal que

$$\left| \frac{3x}{x+1} - 3 \right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad x > N.$$

Luego, al considerar  $x > 0$ , tenemos

$$\left| \frac{3x}{x+1} - 3 \right| = \left| \frac{-3}{x+1} \right| = \frac{3}{x+1} < \frac{3}{x} < \varepsilon$$

siempre que  $x > 3/\varepsilon$ . Entonces, se escoge  $N = 3/\varepsilon$ . Por ejemplo, si  $\varepsilon = 0.01$ , entonces  $N = 3/(0.01) = 300$  garantiza que  $|f(x) - 3| < 0.01$  siempre que  $x > 300$ . ■

■ **Posdata: Un poco de historia** Después de esta sección tal vez esté de acuerdo con el filósofo, predicador, historiador y científico inglés William Whewell (1794-1866), quien escribió en 1858 que “Un límite es una concepción. . . peculiar”. Durante muchos años después de la invención del cálculo en el siglo XVII, los matemáticos discutían y debatían acerca de la naturaleza de un límite. Había la percepción de que la intuición, las gráficas y ejemplos numéricos de razones de cantidades que desaparecen proporcionan cuando mucho un cimiento inestable para tal concepto fundamental. Como se verá al principio del siguiente capítulo, el concepto de límite juega un papel central en cálculo. El estudio del cálculo pasó por varios periodos de creciente rigor matemático empezando con el matemático francés Augustin-Louis Cauchy y luego con el matemático alemán Karl Wilhelm Weierstrass.



Cauchy

**Augustin-Louis Cauchy** (1789-1857) nació durante una época de convulsión en la historia de Francia. Cauchy estaba destinado a iniciar una revolución por sí mismo en matemáticas. Por muchas contribuciones, pero especialmente debido a sus esfuerzos por clarificar cuestiones matemáticas oscuras, su demanda incesante por contar con definiciones satisfactorias y demostraciones rigurosas de teoremas, Cauchy a menudo es denominado “padre del análisis moderno”. Escritor prolífico cuyo trabajo sólo ha sido superado por unos cuantos, Cauchy produjo casi 800 artículos sobre astronomía, física y matemáticas. Sin embargo, la misma mentalidad que siempre estaba abierta y preguntaba sobre ciencia y matemáticas también era estrecha y no cuestionaba muchas otras áreas. Franca y arrogante, la postura apasionada de Cauchy respecto a asuntos políticos y religiosos a menudo lo alejaron de sus colegas.



Weierstrass

**Karl Wilhelm Weierstrass** (1815-1897) ¡Uno de los analistas matemáticos más destacados del siglo XIX sin haber tenido ningún grado académico! Después de especializarse en leyes en la Universidad de Bonn, aunque concentrado en esgrima y en beber cerveza durante cuatro años, Weierstrass se “graduó” en la vida real sin ningún título. Al necesitar trabajo, Weierstrass aprobó un examen estatal y recibió un certificado para enseñar en 1841. Durante 15 años como profesor de enseñanza secundaria, su genio matemático dormido floreció. Aunque la cantidad de sus investigaciones publicadas era modesta, especialmente en comparación con la de Cauchy, la calidad de estos trabajos impresionó tanto a la comunidad matemática alemana que se le otorgó un doctorado, *honoris causa*, de la Universidad de Königsberg, y finalmente fue contratado como profesor en la Universidad de Berlín. Una vez ahí, Weierstrass obtuvo reconocimiento internacional como matemático y como maestro de matemáticas. Una de sus estudiantes fue Sonja Kowalewski, la más grande matemática del siglo XIX. Fue Karl Weierstrass quien dotó de sólidos fundamentos al concepto de límite con la definición  $\varepsilon$ - $\delta$ .

**Ejercicios 2.6**

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-9.

**Fundamentos**

En los problemas 1-24, use las definiciones 2.6.1, 2.6.2 o 2.6.3 para demostrar el resultado sobre límites dado.

1.  $\lim_{x \rightarrow 5} 10 = 10$
2.  $\lim_{x \rightarrow -2} \pi = \pi$
3.  $\lim_{x \rightarrow 3} x = 3$
4.  $\lim_{x \rightarrow 4} 2x = 8$
5.  $\lim_{x \rightarrow -1} (x + 6) = 5$
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} (x - 4) = -4$
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} (3x + 7) = 7$
8.  $\lim_{x \rightarrow 1} (9 - 6x) = 3$
9.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 3}{4} = \frac{1}{4}$
10.  $\lim_{x \rightarrow 1/2} 8(2x + 5) = 48$
11.  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{x + 5} = -10$
12.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{2x - 6} = -\frac{1}{2}$
13.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^5 + 12x^4}{x^4} = 12$
14.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 5x^2 - 2x - 5}{x^2 - 1} = 7$
15.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$
16.  $\lim_{x \rightarrow 0} 8x^3 = 0$
17.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{5x} = 0$
18.  $\lim_{x \rightarrow (1/2)^+} \sqrt{2x - 1} = 0$
19.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ ,  $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 0 \\ 2x + 1, & x > 0 \end{cases}$
20.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$ ,  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 3, & x > 1 \end{cases}$
21.  $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$
22.  $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + 4) = 12$
23.  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 4) = 3$
24.  $\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 + 2x) = 35$

25. Para  $a > 0$ , use la identidad

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}| \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

y el hecho de que  $\sqrt{x} \geq 0$  para demostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ .

26. Demuestre que  $\lim_{x \rightarrow 2} (1/x) = \frac{1}{2}$ . [Sugerencia: Considere sólo los números  $x$  tales que  $1 < x < 3$ .]

En los problemas 27-30, demuestre que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  no existe.

27.  $f(x) = \begin{cases} 2, & x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}; \quad a = 1$

28.  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 3 \\ -1, & x > 3 \end{cases}; \quad a = 3$

29.  $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ 2 - x, & x > 0 \end{cases}; \quad a = 0$

30.  $f(x) = \frac{1}{x}; \quad a = 0$

En los problemas 31-34, use la definición 2.6.5 para demostrar el resultado de límites dado.

31.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x - 1}{2x + 1} = \frac{5}{2}$

32.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{3x + 8} = \frac{2}{3}$

33.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x}{x - 3} = 10$

34.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 + 3} = 1$

**Piense en ello**

35. Demuestre que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ,  
donde  $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional.} \end{cases}$

## 2.7 El problema de la recta tangente

**■ Introducción** En un curso de cálculo se estudian muchas cosas diferentes, pero como se mencionó en la introducción de la sección 2.1, el tema “cálculo” por lo regular se divide en dos amplias áreas —relacionadas entre sí— denominadas **cálculo diferencial** y **cálculo integral**. El análisis de cada uno de estos temas suele comenzar con un problema de motivación que implica la gráfica de una función. El estudio del cálculo diferencial se motiva con el siguiente problema.

- Encontrar la recta tangente a la gráfica de una función  $f$ ,

mientras el estudio del cálculo integral se motiva con el siguiente problema:

- Encontrar el área bajo la gráfica de una función  $f$ .

El primer problema se abordará en esta sección, el segundo se analizará en la sección 5.3.

**■ Recta tangente a una gráfica** La palabra *tangente* surge del verbo latín *tangere*, que significa “tocar”. Quizá recuerde del estudio de geometría plana que una tangente a un círculo es una recta  $L$  que corta, o toca, al círculo exactamente en un punto  $P$ . Vea la FIGURA 2.7.1. No resulta tan fácil definir una recta tangente a la gráfica de una función  $f$ . La idea de *tocar* traslada del concepto de recta tangente a la gráfica de una función, pero la idea de *cortar la gráfica en un punto* no lo hace.

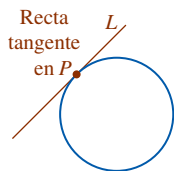


FIGURA 2.7.1 La recta tangente  $L$  toca un círculo en el punto  $P$

Suponga que  $y = f(x)$  es una función continua. Si, como se muestra en la FIGURA 2.7.2,  $f$  posee una recta tangente  $L$  a su gráfica en un punto  $P$ , entonces ¿cuál es la ecuación de esta recta? Para contestar esta pregunta requerimos las coordenadas de  $P$  y la pendiente  $m_{\tan}$  de  $L$ . Las coordenadas de  $P$  no presentan ninguna dificultad, puesto que un punto sobre la gráfica de una función  $f$  se obtiene al especificar un valor de  $x$  en el dominio de  $f$ . Así, las coordenadas del punto de tangencia en  $x = a$  son  $(a, f(a))$ . En consecuencia, el problema de encontrar una recta tangente se vuelve en el problema de encontrar la pendiente  $m_{\tan}$  de la recta. Como medio para *aproximar*  $m_{\tan}$ , es fácil encontrar las pendientes  $m_{\sec}$  de *rectas secantes* (del verbo latino *secare*, que significa “cortar”) que pasan por el punto  $P$  y cualquier otro punto  $Q$  sobre la gráfica. Vea la FIGURA 2.7.3.

■ **Pendiente de rectas secantes** Si las coordenadas de  $P$  son  $(a, f(a))$  y las coordenadas de  $Q$  son  $(a + h, f(a + h))$ , entonces como se muestra en la FIGURA 2.7.4, la pendiente de la recta secante que pasa por  $P$  y  $Q$  es

$$m_{\sec} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a}$$

o bien,

$$m_{\sec} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}. \quad (1)$$

La expresión en el miembro derecho de la igualdad en (1) se denomina **cociente diferencial**. Cuando se hace que  $h$  asuma valores que cada vez son más próximos a cero, es decir, cuando  $h \rightarrow 0$ , entonces los puntos  $Q(a + h, f(a + h))$  se mueven en la curva cada vez más cerca del punto  $P(a, f(a))$ . Intuitivamente, es de esperar que las rectas secantes tiendan a la recta tangente  $L$ , y que  $m_{\sec} \rightarrow m_{\tan}$  cuando  $h \rightarrow 0$ . Es decir,

$$m_{\tan} = \lim_{h \rightarrow 0} m_{\sec}$$

en el supuesto de que el límite existe. Esta conclusión se resume en una forma equivalente del límite usando el cociente diferencial (1).

### Definición 2.7.1 Recta tangente con pendiente

Sea  $y = f(x)$  continua en el número  $a$ . Si el límite

$$m_{\tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad (2)$$

existe, entonces la **recta tangente** a la gráfica de  $f$  en  $(a, f(a))$  es la recta que pasa por el punto  $(a, f(a))$  con pendiente  $m_{\tan}$ .

Justo como muchos de los problemas analizados antes en este capítulo, observe que el límite en (2) tiene la forma indeterminada  $0/0$  cuando  $h \rightarrow 0$ .

Si el límite en (2) existe, el número  $m_{\tan}$  también se denomina **pendiente de la curva**  $y = f(x)$  en  $(a, f(a))$ .

El cálculo de (2) es esencialmente un *proceso de cuatro pasos*, tres de los cuales implican sólo precálculo matemático: álgebra y trigonometría. Si los tres primeros pasos se llevan a cabo con precisión, el cuarto, o paso de cálculo, *puede ser* la parte más sencilla del problema.

### Directrices para calcular (2)

- Evaluar  $f(a)$  y  $f(a + h)$ .
- Evaluar la diferencia  $f(a + h) - f(a)$ . Simplificar.
- Simplificar el cociente diferencial

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

- Calcular el límite del cociente diferencial

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

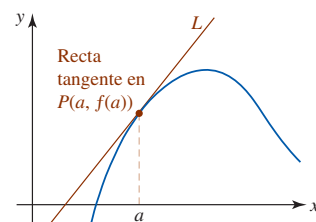


FIGURA 2.7.2 Recta tangente  $L$  a una gráfica en el punto  $P$

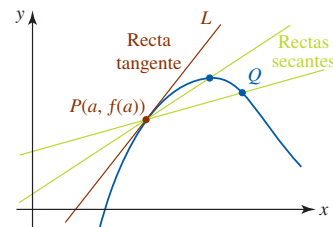


FIGURA 2.7.3 Pendientes de rectas secantes aproximan la pendiente  $m_{\tan}$  de  $L$

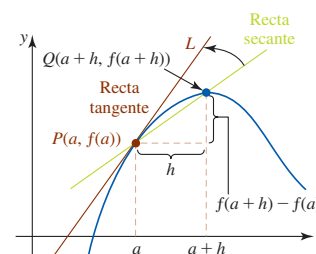


FIGURA 2.7.4 Rectas secantes giran en la recta tangente  $L$  cuando  $h \rightarrow 0$

En muchas instancias, el cálculo de la diferencia  $f(a + h) - f(a)$  en el paso *ii*) es el más importante. Resulta imperativo que usted simplifique este paso cuanto sea posible. Un consejo de cómo hacerlo: en muchos problemas que implican el cálculo de (2) es posible factorizar  $h$  de la diferencia  $f(a + h) - f(a)$ .

**Nota** ▶

### EJEMPLO 1 El proceso de cuatro pasos

Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $y = x^2 + 2$  en  $x = 1$ .

**Solución** El procedimiento de cuatro pasos presentado antes se usa con el número 1 en lugar del símbolo  $a$ .

*i)* El paso inicial es el cálculo de  $f(1)$  y  $f(1 + h)$ . Se tiene  $f(1) = 1^2 + 2 = 3$ , y

$$\begin{aligned} f(1 + h) &= (1 + h)^2 + 2 \\ &= (1 + 2h + h^2) + 2 \\ &= 3 + 2h + h^2. \end{aligned}$$

*ii)* Luego, por el resultado en el paso precedente, la diferencia es:

$$\begin{aligned} f(1 + h) - f(1) &= 3 + 2h + h^2 - 3 \\ &= 2h + h^2 \\ &= h(2 + h). \quad \leftarrow \text{observe el factor de } h \end{aligned}$$

*iii)* Ahora, el cálculo del cociente diferencial  $\frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$  es directo. De nuevo, se usan los resultados del paso precedente:

$$\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{h(2 + h)}{h} = 2 + h. \quad \leftarrow \text{las } h \text{ se cancelan}$$

*iv)* Ahora el último paso es fácil. Se observa que el límite en (2) es

$$m_{\tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + h) \overset{\text{por el paso precedente}}{\downarrow} f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = 2.$$

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $y = x^2 + 2$  en  $(1, 3)$  es 2. ■

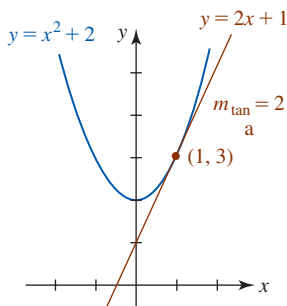


FIGURA 2.7.5 Recta tangente en el ejemplo 2

### EJEMPLO 2 Ecuación de la recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente cuya pendiente se halló en el ejemplo 1.

**Solución** Se conocen el punto de tangencia  $(1, 3)$  y la pendiente  $m_{\tan} = 2$ , de modo que por la ecuación punto-pendiente de una recta se encuentra

$$y - 3 = 2(x - 1) \quad \text{o bien,} \quad y = 2x + 1.$$

Observe que la última ecuación es consistente con las intersecciones  $x$  y  $y$  de la recta roja en la FIGURA 2.7.5. ■

### EJEMPLO 3 Ecuación de la recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x) = 2/x$  en  $x = 2$ .

**Solución** Se empieza por usar (2) para encontrar  $m_{\tan}$  con  $a$  identificada como 2. En el segundo de los cuatro pasos es necesario combinar dos fracciones simbólicas por medio de un común denominador.

*i)* Se tiene  $f(2) = 2/2 = 1$  y  $f(2 + h) = 2/(2 + h)$ .

$$\begin{aligned} \textit{ii)} \quad f(2 + h) - f(2) &= \frac{2}{2 + h} - 1 \\ &= \frac{2}{2 + h} - \frac{1}{1} \cdot \frac{2 + h}{2 + h} \quad \leftarrow \text{un común denominador es } 2 + h \\ &= \frac{2 - 2 - h}{2 + h} \\ &= \frac{-h}{2 + h}. \quad \leftarrow \text{aquí está el factor de } h \end{aligned}$$

iii) El último resultado debe dividirse entre  $h$  o, más precisamente, entre  $\frac{h}{1}$ . Se invierte y multiplica por  $\frac{1}{h}$ :

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{\frac{-h}{2+h}}{\frac{h}{1}} = \frac{-h}{2+h} \cdot \frac{1}{h} = \frac{-1}{2+h} \quad \leftarrow \text{las } h \text{ se cancelan}$$

iv) Por (2),  $m_{\text{tan}}$  es

$$m_{\text{tan}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2+h} = -\frac{1}{2}.$$

Como  $f(2) = 1$ , el punto de tangencia es  $(2, 1)$  y la pendiente de la recta tangente en  $(2, 1)$  es  $m_{\text{tan}} = -\frac{1}{2}$ . Con base en la ecuación punto-pendiente de una recta, la recta tangente es

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2) \quad \text{o} \quad y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

Las gráficas de  $y = 2/x$  y la recta tangente en  $(2, 1)$  se muestran en la FIGURA 2.7.6.

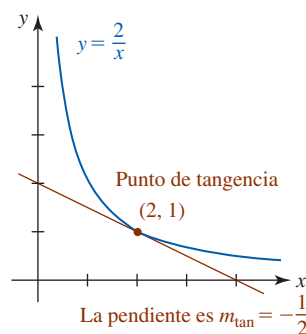


FIGURA 2.7.6 Recta tangente en el ejemplo 3

#### EJEMPLO 4 Pendiente de una recta tangente

Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $f(x) = \sqrt{x-1}$  en  $x = 5$ .

**Solución** Al sustituir  $a$  por 5 en (2) se tiene:

$$i) \quad f(5) = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2, \text{ y}$$

$$f(5+h) = \sqrt{5+h-1} = \sqrt{4+h}.$$

ii) La diferencia es

$$f(5+h) - f(5) = \sqrt{4+h} - 2.$$

Debido a que se espera encontrar un factor de  $h$  en esta diferencia, procedemos a racionalizar el numerador:

$$\begin{aligned} f(5+h) - f(5) &= \frac{\sqrt{4+h} - 2}{1} \cdot \frac{\sqrt{4+h} + 2}{\sqrt{4+h} + 2} \\ &= \frac{(4+h) - 4}{\sqrt{4+h} + 2} \\ &= \frac{h}{\sqrt{4+h} + 2}. \quad \leftarrow \text{éste es el factor de } h \end{aligned}$$

iii) Así, el cociente diferencial  $\frac{f(5+h) - f(5)}{h}$  es:

$$\begin{aligned} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} &= \frac{\frac{h}{\sqrt{4+h} + 2}}{h} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{4+h} + 2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2}. \end{aligned}$$

iv) El límite en (2) es

$$m_{\text{tan}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}.$$

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $f(x) = \sqrt{x-1}$  en  $(5, 2)$  es  $\frac{1}{4}$ .

El resultado obtenido en el siguiente ejemplo no es sorprendente.

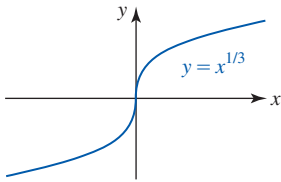


FIGURA 2.7.7 Tangente vertical en el ejemplo 6

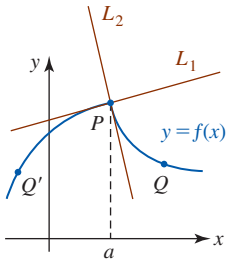


FIGURA 2.7.8 La tangente no existe en  $(a, f(a))$

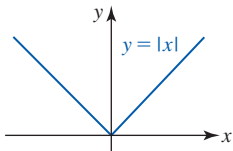


FIGURA 2.7.9 Función en el ejemplo 7

### EJEMPLO 5 Recta tangente a una recta

Para cualquier función lineal  $y = mx + b$ , la recta tangente a su gráfica coincide con la recta misma. Así, no de manera inesperada, la pendiente de la recta tangente para cualquier número  $x = a$  es

$$m_{\text{tan}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(a+h) + b - (ma + b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{mh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} m = m. \quad \blacksquare$$

■ **Tangentes verticales** El límite en (2) puede no existir para una función  $f$  en  $x = a$  y aun así ser una tangente en el punto  $(a, f(a))$ . La recta tangente a una gráfica puede ser **vertical**, en cuyo caso su pendiente está indefinida. El concepto de tangente vertical se abordará en la sección 3.1.

### EJEMPLO 6 Recta tangente vertical

Aunque por esta ocasión no se abundará en los detalles, puede demostrarse que la gráfica de  $f(x) = x^{1/3}$  posee una tangente vertical en el origen. En la FIGURA 2.7.7 se observa que el eje  $y$ , es decir, la recta  $x = 0$ , es tangente a la gráfica en el punto  $(0, 0)$ . ■

■ **Una tangente que puede no existir** La gráfica de una función  $f$  que es continua en un número  $a$  no tiene por qué poseer una recta tangente en el punto  $(a, f(a))$ . Una recta tangente no existirá cuando la gráfica de  $f$  tenga un pico pronunciado en  $(a, f(a))$ . En la FIGURA 2.7.8 se indica qué puede ser erróneo cuando la gráfica de la función tiene un “pico”. En este caso  $f$  es continua en  $a$ , pero las rectas secantes que pasan por  $P$  y  $Q$  tienden a  $L_2$  cuando  $Q \rightarrow P$ , y las rectas secantes que pasan por  $P$  y  $Q'$  tienden a una recta diferente  $L_1$  cuando  $Q' \rightarrow P$ . En otras palabras, el límite en (2) no existe porque los límites laterales del cociente diferencial son diferentes (cuando  $h \rightarrow 0^+$  y cuando  $h \rightarrow 0^-$ ).

### EJEMPLO 7 Gráfica con un pico

Demuestre que la gráfica de  $f(x) = |x|$  no tiene tangente en  $(0, 0)$ .

**Solución** La gráfica de la función valor absoluto en la FIGURA 2.7.9 tiene un pico en el origen. Para demostrar que la gráfica de  $f$  no posee una recta tangente en el origen es necesario examinar

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}.$$

Por la definición de valor absoluto

$$|h| = \begin{cases} h, & h > 0 \\ -h, & h < 0 \end{cases}$$

observamos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{mientras} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Puesto que los límites por la derecha y por la izquierda no son iguales, se concluye que el límite (2) no existe. Aunque la función  $f(x) = |x|$  es continua en  $x = 0$ , la gráfica de  $f$  no posee ninguna tangente en  $(0, 0)$ . ■

■ **Razón de cambio media** En contextos diferentes el cociente diferencial en (1) y (2), o pendiente de la recta secante, se escribe en términos de símbolos alternos. El símbolo  $h$  en (1) y (2) a menudo se escribe como  $\Delta x$  y la diferencia  $f(a + \Delta x) - f(a)$  se denota por  $\Delta y$ , es decir, el cociente diferencial es

$$\frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{(a + \Delta x) - a} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (3)$$

Además, si  $x_1 = a + \Delta x$ ,  $x_0 = a$ , entonces  $\Delta x = x_1 - x_0$  y (3) es lo mismo que

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (4)$$

La pendiente  $\Delta y / \Delta x$  de la recta secante que pasa por los puntos  $(x_0, f(x_0))$  y  $(x_1, f(x_1))$  se denomina **razón de cambio media de la función**  $f$  sobre el intervalo  $[x_0, x_1]$ . Así, el límite  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y / \Delta x$  se denomina **razón de cambio media instantánea de la función** con respecto a  $x$  en  $x_0$ .

Casi todo mundo tiene una noción intuitiva de la velocidad como la razón a la cual se cubre una distancia en cierto lapso. Cuando, por ejemplo, un autobús recorre 60 mi en 1 h, la



*velocidad media* del autobús debe haber sido 60 mi/h. Por supuesto, resulta difícil mantener la razón de 60 mi/h durante todo el recorrido porque el autobús disminuye su velocidad al pasar por poblaciones y la aumenta al rebasar a otros vehículos. En otras palabras, la velocidad cambia con el tiempo. Si el programa de la compañía de transportes demanda que el autobús recorra las 60 millas de una población a otra en 1 h, el conductor sabe intuitivamente que debe compensar velocidades inferiores a 60 mi/h al conducir a velocidades superiores en otros puntos del recorrido. Saber que la velocidad media es 60 mi/h no permite, sin embargo, contestar la pregunta: ¿cuál es la velocidad del autobús en un instante particular?

■ **Velocidad media** En general, la **velocidad media** o **rapidez media** de un objeto en movimiento está definida por

$$v_{\text{pro}} = \frac{\text{cambio en distancia}}{\text{cambio en tiempo}}. \quad (5)$$

Considere un corredor que termina una carrera de 10 km en un tiempo de 1 h 15 min (1.25 h). La velocidad media del corredor, o rapidez media de la carrera, fue

$$v_{\text{pro}} = \frac{10 - 0}{1.25 - 0} = 8 \text{ km/h}.$$

Pero suponga ahora que deseamos determinar la velocidad *exacta*  $v$  en el instante en que el corredor ya lleva media hora corriendo. Si se mide que la distancia recorrida en el intervalo de 0 h a 0.5 h es igual a 5 km, entonces

$$v_{\text{pro}} = \frac{5}{0.5} = 10 \text{ km/h}.$$

De nuevo, este número no es una medida, o necesariamente incluso un indicador aceptable, de la velocidad instantánea  $v$  a que el corredor se ha movido 0.5 h en la carrera. Si determinamos que a 0.6 h el corredor está a 5.7 km de la línea de salida, entonces la velocidad media de 0 h a 0.6 h es  $v_{\text{pro}} = 5.7/0.6 = 9.5 \text{ km/h}$ . No obstante, durante el lapso de 0.5 h a 0.6 h,

$$v_{\text{pro}} = \frac{5.7 - 5}{0.6 - 0.5} = 7 \text{ km/h}.$$

El último número es una medida más realista de la razón  $v$ . Vea la FIGURA 2.7.10. Al “estirar” el lapso entre 0.5 h y el tiempo que corresponde a la posición medida cerca de 5 km, se espera obtener incluso una mejor aproximación a la velocidad del corredor en el instante 0.5 h.

■ **Movimiento rectilíneo** Para generalizar el análisis precedente, suponga que un objeto, o partícula, en el punto  $P$  se mueve a lo largo de una recta de coordenadas vertical u horizontal como se muestra en la FIGURA 2.7.11. Además, considere que la partícula se mueve de modo que su posición, o coordenada, sobre la recta está dada por una función  $s = s(t)$ , donde  $t$  representa el tiempo. Los valores de  $s$  son distancias dirigidas medidas a partir de  $O$  en unidades como centímetros, metros, pies o millas. Cuando  $P$  está a la derecha o arriba de  $O$ , se considera  $s > 0$ , mientras  $s < 0$  cuando  $P$  está a la izquierda o abajo de  $O$ . El movimiento en línea recta se denomina **movimiento rectilíneo**.

Si un objeto, como un automóvil de juguete, se mueve sobre una recta de coordenadas horizontal, se trata de un punto  $P$  en el instante  $t_0$  y un punto  $P'$  en el instante  $t_1$ , y entonces las coordenadas de los puntos, que se muestran en la FIGURA 2.7.12, son  $s(t_0)$  y  $s(t_1)$ . Por (4), la **velocidad media** del objeto en el intervalo de tiempo  $[t_0, t_1]$  es

$$v_{\text{pro}} = \frac{\text{cambio en posición}}{\text{cambio en tiempo}} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}. \quad (6)$$

### EJEMPLO 8 Velocidad media

La altura  $s$  por arriba del suelo a que se suelta una pelota desde la parte superior del Arco de San Luis Missouri está dada por  $s(t) = -16t^2 + 630$ , donde  $s$  se mide en pies y  $t$  en segundos. Vea la FIGURA 2.7.13. Encuentre la velocidad media de la pelota que cae entre el instante en que se suelta la pelota y el instante en que golpea el suelo.

**Solución** El instante en que se suelta la pelota está determinado por la ecuación  $s(t) = 630$  o  $-16t^2 + 630 = 630$ . Así se obtiene  $t = 0$  s. Cuando la pelota golpea el suelo, entonces

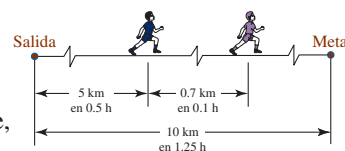


FIGURA 2.7.10 Corredor en una carrera de 10 km

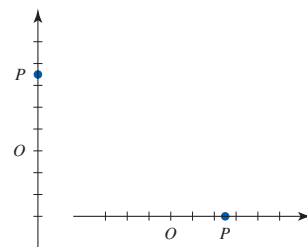


FIGURA 2.7.11 Rectas coordenadas

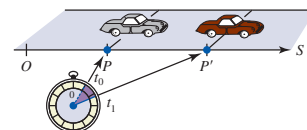


FIGURA 2.7.12 Posición de un automóvil de juguete sobre una recta coordenada en dos instantes

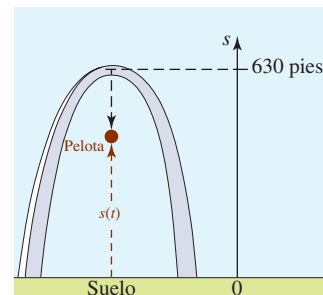


FIGURA 2.7.13 Pelota que cae en el ejemplo 8

$s(t) = 0$  o  $-16t^2 + 630 = 0$ . Con la última ecuación se obtiene  $t = \sqrt{315/8} \approx 6.27$  s. Así, por (6) la velocidad media en el intervalo de tiempo  $[0, \sqrt{315/8}]$  es

$$v_{\text{pro}} = \frac{s(\sqrt{315/8}) - s(0)}{\sqrt{315/8} - 0} = \frac{0 - 630}{\sqrt{315/8} - 0} \approx -100.40 \text{ pies/s.}$$

Si se hace  $t_1 = t_0 + \Delta t$ , o  $\Delta t = t_1 - t_0$ , y  $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ , entonces (6) es equivalente a

$$v_{\text{pro}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (7)$$

Esto sugiere que el límite de (7) cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  proporciona la **razón de cambio instantánea** de  $s(t)$  en  $t = t_0$ , o **velocidad instantánea**.

### Definición 2.7.2 Velocidad instantánea

Sea  $s = s(t)$  una función que proporciona la posición de un objeto que se mueve en línea recta. Entonces la **velocidad instantánea** en el instante  $t = t_0$  es

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad (8)$$

siempre que el límite exista.

**Nota:** Excepto por notación e interpretación, no hay ninguna diferencia matemática entre (2) y (8). También, a menudo se omite la palabra *instantánea*, de modo que entonces se habla de la *razón de cambio* de una función o la *velocidad* de una partícula en movimiento.

### EJEMPLO 9 Otro repaso al ejemplo 8

Encuentre la velocidad instantánea de la pelota que cae en el ejemplo 8 en  $t = 3$  s.

**Solución** Se usa el mismo procedimiento de cuatro pasos que en los ejemplos anteriores con  $s = s(t)$  dada en el ejemplo 8.

$$i) \quad s(3) = -16(9) + 630 = 486. \text{ Para cualquier } \Delta t \neq 0,$$

$$s(3 + \Delta t) = -16(3 + \Delta t)^2 + 630 = -16(\Delta t)^2 - 96\Delta t + 486.$$

$$ii) \quad s(3 + \Delta t) - s(3) = [-16(\Delta t)^2 - 96\Delta t + 486] - 486 \\ = -16(\Delta t)^2 - 96\Delta t = \Delta t(-16\Delta t - 96)$$

$$iii) \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta t(-16\Delta t - 96)}{\Delta t} = -16\Delta t - 96$$

$$iv) \quad \text{Por (8),}$$

$$v(3) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (-16\Delta t - 96) = -96 \text{ pies/s.} \quad (9)$$

En el ejemplo 9, el número  $s(3) = 486$  pies es la altura de la pelota por arriba del nivel del suelo a 3 s de haber sido soltada. El signo menos en (9) es importante porque la pelota se está moviendo en dirección opuesta a la dirección positiva (hacia arriba), es decir, se mueve hacia abajo.

### Ejercicios 2.7

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-9.

#### Fundamentos

En los problemas 1-6, trace la gráfica de la función y la recta tangente en el punto dado. Encuentre la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos que corresponden a los valores indicados de  $x$ .

$$1. \quad f(x) = -x^2 + 9, (2, 5); x = 2, x = 2.5$$

$$2. \quad f(x) = x^2 + 4x, (0, 0); x = -\frac{1}{4}, x = 0$$

$$3. \quad f(x) = x^3, (-2, -8); x = -2, x = -1$$

$$4. \quad f(x) = 1/x, (1, 1); x = 0.9, x = 1$$

$$5. \quad f(x) = \sin x, (\pi/2, 1); x = \pi/2, x = 2\pi/3$$

$$6. \quad f(x) = \cos x, (-\pi/3, \frac{1}{2}); x = -\pi/2, x = -\pi/3$$

En los problemas 7-18, use (2) para encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el valor dado de  $x$ . Encuentre una ecuación de la recta tangente en el punto correspondiente.

7.  $f(x) = x^2 - 6$ ,  $x = 3$   
 8.  $f(x) = -3x^2 + 10$ ,  $x = -1$   
 9.  $f(x) = x^2 - 3x$ ,  $x = 1$   
 10.  $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ ,  $x = -2$   
 11.  $f(x) = -2x^3 + x$ ,  $x = 2$     12.  $f(x) = 8x^3 - 4$ ,  $x = \frac{1}{2}$   
 13.  $f(x) = \frac{1}{2x}$ ,  $x = -1$     14.  $f(x) = \frac{4}{x-1}$ ,  $x = 2$   
 15.  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ ,  $x = 0$     16.  $f(x) = 4 - \frac{8}{x}$ ,  $x = -1$   
 17.  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x = 4$     18.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $x = 1$

En los problemas 19 y 20, use (2) para encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el valor dado de  $x$ . Encuentre una ecuación de la recta tangente en el punto correspondiente. Antes de empezar, revise los límites en (10) y (14) de la sección 2.4, así como las fórmulas de suma (17) y (18) en la sección 1.4.

19.  $f(x) = \sin x$ ,  $x = \pi/6$     20.  $f(x) = \cos x$ ,  $x = \pi/4$

En los problemas 21 y 22, determine si la recta que pasa por los puntos rojos es tangente a la gráfica de  $f(x) = x^2$  en el punto azul.

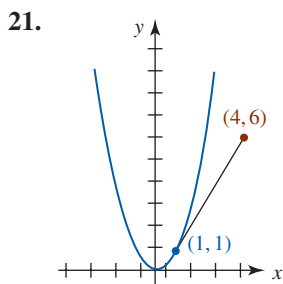


FIGURA 2.7.14 Gráfica para el problema 21

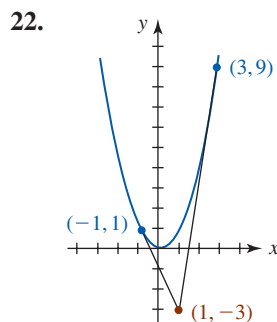


FIGURA 2.7.15 Gráfica para el problema 22

23. En la FIGURA 2.7.16, la recta roja es tangente a la gráfica de  $y = f(x)$  en el punto indicado. Encuentre una ecuación de la recta tangente. ¿Cuál es la intersección  $y$  de la recta tangente?

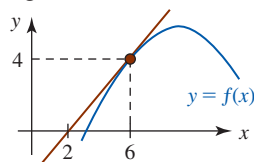


FIGURA 2.7.16 Gráfica para el problema 23

24. En la FIGURA 2.7.17, la recta roja es tangente a la gráfica de  $y = f(x)$  en el punto indicado. Encuentre  $f(-5)$ .

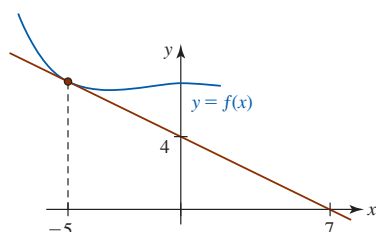


FIGURA 2.7.17 Gráfica para el problema 24

En los problemas 25-28, use (2) para encontrar una fórmula para  $m_{\text{tan}}$  en un punto general  $(x, f(x))$  sobre la gráfica de  $f$ . Use la fórmula  $m_{\text{tan}}$  para determinar los puntos en que la recta tangente a la gráfica es horizontal.

25.  $f(x) = -x^2 + 6x + 1$     26.  $f(x) = 2x^2 + 24x - 22$   
 27.  $f(x) = x^3 - 3x$     28.  $f(x) = -x^3 + x^2$

### ≡ Aplicaciones

29. Un automóvil recorre 290 mi entre Los Ángeles y Las Vegas en 5 h. ¿Cuál es la velocidad media?  
 30. Dos señalizaciones sobre una carretera recta están a una distancia de  $\frac{1}{2}$  mi entre sí. Una patrulla observa que un automóvil cubre la distancia entre las marcas en 40 s. Suponiendo que la velocidad límite es 60 mi/h, ¿el automóvil será detenido por exceso de velocidad?  
 31. Un avión se desplaza a 920 mi/h para recorrer los 3 500 km que hay entre Hawaii y San Francisco. ¿En cuántas horas realiza este vuelo?  
 32. Una carrera de maratón se lleva a cabo en una pista recta de 26 mi. La carrera empieza a mediodía. A la 1:30 p.m., un corredor cruza la marca de 10 mi y a las 3:10 p.m. el corredor pasa por la marca de 20 mi. ¿Cuál es la velocidad media del corredor entre la 1:30 p.m. y las 3:10 p.m.?

En los problemas 33 y 34, la posición de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal de coordenadas está dada por la función. Use (8) para encontrar la velocidad instantánea de la partícula en el instante indicado.

33.  $s(t) = -4t^2 + 10t + 6$ ,  $t = 3$     34.  $s(t) = t^2 + \frac{1}{5t+1}$ ,  $t = 0$   
 35. La altura por arriba del suelo a que se suelta una pelota a una altura inicial de 122.5 m está dada por  $s(t) = -4.9t^2 + 122.5$ , donde  $s$  se mide en metros y  $t$  en segundos.  
 a) ¿Cuál es la velocidad instantánea en  $t = \frac{1}{2}$ ?  
 b) ¿En qué instante la pelota golpea el suelo?  
 c) ¿Cuál es la velocidad de impacto?  
 36. Al ignorar la resistencia del aire, si un objeto se deja caer desde una altura inicial  $h$ , entonces su altura por arriba del nivel del suelo en el instante  $t > 0$  está dada por  $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$ , donde  $g$  es la aceleración de la gravedad.  
 a) ¿En qué instante el objeto choca contra el suelo?  
 b) Si  $h = 100$  pies, compare los instantes de impacto para la Tierra ( $g = 32$  pies/s<sup>2</sup>), Marte ( $g = 12$  pies/s<sup>2</sup>) y la Luna ( $g = 5.5$  pies/s<sup>2</sup>).  
 c) Use (8) para encontrar una fórmula para la velocidad instantánea  $v$  en el instante general  $t$ .  
 d) Use los instantes encontrados en el inciso b) y la fórmula encontrada en el inciso c) para calcular las velocidades de impacto correspondientes para la Tierra, Marte y la Luna.  
 37. La altura de un proyectil disparado desde el nivel del suelo está dada por  $s = -16t^2 + 256t$ , donde  $s$  se mide en pies y  $t$  en segundos.

- a) Determine la altura del proyectil en  $t = 2$ ,  $t = 6$ ,  $t = 9$  y  $t = 10$ .  
 b) ¿Cuál es la velocidad media del proyectil entre  $t = 2$  y  $t = 5$ ?

- c) Demuestre que la velocidad media entre  $t = 7$  y  $t = 9$  es cero. Interprete físicamente.
- d) ¿En qué instante el proyectil choca contra el suelo?
- e) Use (8) para encontrar una fórmula para la velocidad instantánea  $v$  en el instante general  $t$ .
- f) Use el resultado del inciso d) y la fórmula encontrada en el inciso e) para aproximar la velocidad de impacto final.
- g) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil?
38. Suponga que la gráfica mostrada en la FIGURA 2.7.18 es la de la función de posición  $s = s(t)$  de una partícula que se mueve en una línea recta, donde  $s$  se mide en metros y  $t$  en segundos.

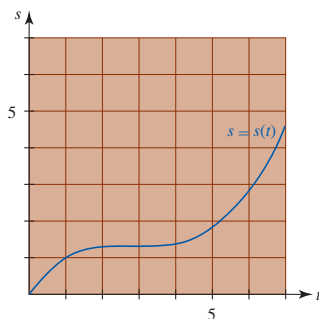


FIGURA 2.7.18 Gráfica para el problema 38

- a) Calcule la posición de la partícula en  $t = 4$  y  $t = 6$ .
- b) Calcule la velocidad media de la partícula entre  $t = 4$  y  $t = 6$ .
- c) Calcule la velocidad inicial de la partícula; es decir, su velocidad en  $t = 0$ .
- d) Calcule el instante en que la velocidad de la partícula es cero.
- e) Determine un intervalo en que la velocidad de la partícula es decreciente.
- f) Determine un intervalo en que la velocidad de la partícula es creciente.

### ≡ Piense en ello

39. Sea  $y = f(x)$  una función par cuya gráfica tiene una recta tangente  $m$  con pendiente  $(a, f(a))$ . Demuestre que la pendiente de la recta tangente en  $(-a, f(a))$  es  $-m$ . [Sugerencia: Explique por qué  $f(-a + h) = f(a - h)$ .]
40. Sea  $y = f(x)$  una función impar cuya gráfica tiene una recta tangente  $m$  con pendiente  $(a, f(a))$ . Demuestre que la pendiente de la recta tangente en  $(-a, -f(a))$  es  $m$ .
41. Proceda como en el ejemplo 7 y demuestre que no hay recta tangente a la gráfica de  $f(x) = x^2 + |x|$  en  $(0, 0)$ .

## Revisión del capítulo 2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-9.

### A. Falso/verdadero

En los problemas 1-22, indique si la afirmación dada es falsa (F) o verdadera (V).

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = 12$  \_\_\_\_\_
- $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x - 5} = 0$  \_\_\_\_\_
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = 1$  \_\_\_\_\_
- $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{2x - x^2} = \infty$  \_\_\_\_\_
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$  no existe. \_\_\_\_\_
- $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^3 + 8z - 2}{z^2 + 9z - 10}$  no existe. \_\_\_\_\_
- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$  no existe. \_\_\_\_\_
- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  no existe, entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$  no existe. \_\_\_\_\_
- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = 1$ . \_\_\_\_\_
- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = 0$ . \_\_\_\_\_
- Si  $f$  es una función polinomial, entonces  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ . \_\_\_\_\_
- Toda función polinomial es continua sobre  $(-\infty, \infty)$ . \_\_\_\_\_
- Para  $f(x) = x^5 + 3x - 1$  existe un número  $c$  en  $[-1, 1]$  tal que  $f(c) = 0$ . \_\_\_\_\_
- Si  $f$  y  $g$  son continuas en el número 2, entonces  $f/g$  es continua en 2. \_\_\_\_\_
- La función entero mayor  $f(x) = \lfloor x \rfloor$  no es continua sobre el intervalo  $[0, 1]$ . \_\_\_\_\_
- Si  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  existen, entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe. \_\_\_\_\_
- Si una función  $f$  es discontinua en el número 3, entonces  $f(3)$  no está definido. \_\_\_\_\_
- Si una función  $f$  es discontinua en el número  $a$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} (x - a)f(x) = 0$ . \_\_\_\_\_
- Si  $f$  es continua y  $f(a)f(b) < 0$ , existe una raíz de  $f(x) = 0$  en el intervalo  $[a, b]$ . \_\_\_\_\_

20. La función  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}, & x \neq 5 \\ 4, & x = 5 \end{cases}$  es discontinua en 5. \_\_\_\_\_
21. La función  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$  tiene una asíntota vertical en  $x = -1$ . \_\_\_\_\_
22. Si  $y = x - 2$  es una recta tangente a la gráfica de la función  $y = f(x)$  en  $(3, f(3))$ , entonces  $f(3) = 1$ . \_\_\_\_\_

### B. Llene los espacios en blanco \_\_\_\_\_

En los problemas 1-22, llene los espacios en blanco.

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 4x) = \underline{\hspace{2cm}}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 3} (5x^2)^0 = \underline{\hspace{2cm}}$
3.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t - 1}{3 - 10t} = \underline{\hspace{2cm}}$
4.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x + 1} = \underline{\hspace{2cm}}$
5.  $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{1 - \cos^2(t - 1)}{t - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x} = \underline{\hspace{2cm}}$
7.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = \underline{\hspace{2cm}}$
8.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = \underline{\hspace{2cm}}$
9.  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x} = \underline{\hspace{2cm}}$
10.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + 2e^x}{4 + e^x} = \underline{\hspace{2cm}}$
11.  $\lim_{x \rightarrow -} \frac{1}{x - 3} = -\infty$
12.  $\lim_{x \rightarrow -} (5x + 2) = 22$
13.  $\lim_{x \rightarrow -} x^3 = -\infty$
14.  $\lim_{x \rightarrow -} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$
15. Si  $f(x) = 2(x - 4)/|x - 4|$ ,  $x \neq 4$ , y  $f(4) = 9$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
16. Suponga que  $x^2 - x^4/3 \leq f(x) \leq x^2$  para toda  $x$ . Entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/x^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ .
17. Si  $f$  es continua en un número  $a$  y  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 10$ , entonces  $f(a) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
18. Si  $f$  es continua en  $x = 5$ ,  $f(5) = 2$ , y  $\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 10$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow 5} [g(x) - f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$ .
19.  $f(x) = \begin{cases} \frac{2x - 1}{4x^2 - 1}, & x \neq \frac{1}{2} \\ 0.5, & x = \frac{1}{2} \end{cases}$  es \_\_\_\_\_ (continua/discontinua) en el número  $\frac{1}{2}$ .
20. La ecuación  $e^{-x^2} = x^2 - 1$  tiene precisamente \_\_\_\_\_ raíces en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ .
21. La función  $f(x) = \frac{10}{x} + \frac{x^2 - 4}{x - 2}$  tiene una discontinuidad removible en  $x = 2$ . Para quitar la discontinuidad, es necesario definir que  $f(2)$  sea \_\_\_\_\_.
22. Si  $\lim_{x \rightarrow -5} g(x) = -9$  y  $f(x) = x^2$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow -5} f(g(x)) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

### C. Ejercicios \_\_\_\_\_

En los problemas 1-4, trace una gráfica de la función  $f$  que satisface las condiciones dadas.

1.  $f(0) = 1, f(4) = 0, f(6) = 0, \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, f(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \infty, f(5) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1$
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2, f(-1) = 3, f(0) = 0, f(-x) = -f(x)$
4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, f(0) = -3, f(1) = 0, f(-x) = f(x)$

En los problemas 5-10, establezca cuáles de las condiciones a)-j) son aplicables a la gráfica de  $y = f(x)$ .

- a)  $f(a)$  no está definida    b)  $f(a) = L$     c)  $f$  es continua en  $x = a$     d)  $f$  es continua sobre  $[0, a]$     e)  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$   
 f)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$     g)  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty$     h)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$     i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$     j)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

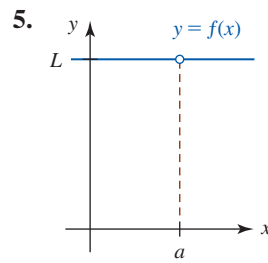


FIGURA 2.R.1 Gráfica para el problema 5

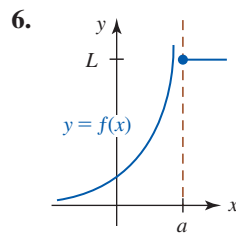


FIGURA 2.R.2 Gráfica para el problema 6

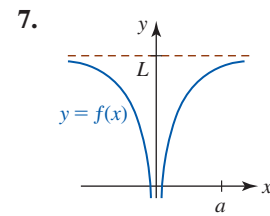


FIGURA 2.R.3 Gráfica para el problema 7

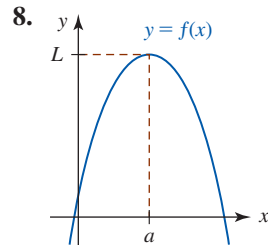


FIGURA 2.R.4 Gráfica para el problema 8

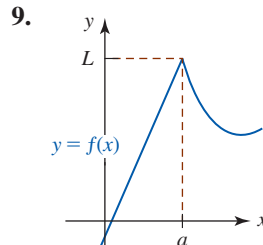


FIGURA 2.R.5 Gráfica para el problema 9

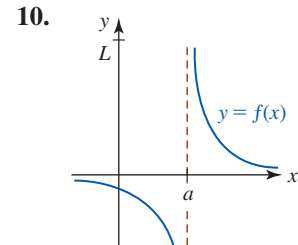


FIGURA 2.R.6 Gráfica para el problema 10

En los problemas 11 y 12, trace la gráfica de la función dada. Determine los valores (números), en caso de haber alguno, en que  $f$  es continua.

11.  $f(x) = |x| + x$       12.  $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 2 \\ 3, & 2 < x < 4 \\ -x + 7, & x > 4 \end{cases}$

En los problemas 13-16, determine intervalos sobre los que la función dada es continua.

13.  $f(x) = \frac{x + 6}{x^3 - x}$       14.  $f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2 - 4x + 3}$   
 15.  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}$       16.  $f(x) = \frac{\csc x}{\sqrt{x}}$

17. Encuentre un número  $k$  de modo que

$$f(x) = \begin{cases} kx + 1, & x \leq 3 \\ 2 - kx, & x > 3 \end{cases}$$

sea continua en el número 3.

18. Encuentre números  $a$  y  $b$  tales que

$$f(x) = \begin{cases} x + 4, & x \leq 1 \\ ax + b, & 1 < x \leq 3 \\ 3x - 8, & x > 3 \end{cases}$$

sea continua en todas partes.

En los problemas 19-22, encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el valor dado de  $x$ . Encuentre una ecuación de la recta tangente en el punto correspondiente.

19.  $f(x) = -3x^2 + 16x + 12$ ,  $x = 2$       20.  $f(x) = x^3 - x^2$ ,  $x = -1$

21.  $f(x) = \frac{-1}{2x^2}$ ,  $x = \frac{1}{2}$       22.  $f(x) = x + 4\sqrt{x}$ ,  $x = 4$

23. Encuentre una ecuación de la recta que es perpendicular a la recta tangente en el punto  $(1, 2)$  sobre la gráfica de  $f(x) = -4x^2 + 6x$ .

24. Suponga que  $f(x) = 2x + 5$  y  $\varepsilon = 0.01$ . Encuentre un  $\delta > 0$  que garantice que  $|f(x) - 7| < \varepsilon$  cuando  $0 < |x - 1| < \delta$ . Al encontrar  $\delta$ , ¿qué límite se ha demostrado?