DEFINICIONES RECURSIVAS

Para definir conjuntos recursivamente, se especifican algunos elementos iniciales en un paso base y proporcionamos, en el paso recursivo, una regla para construir nuevos elementos a partir de los que ya tenemos.
Un ejemplo de ello es la vista anteriormente:

$$a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ \text{y}\ \forall n \geq 3\text{: } a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$$

la cual también se puede expresar como

$$a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ \text{y}\ \forall n \geq 0\text{: } a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$$

Otros ejemplos son las definiciones de:

- Los números armónicos: $H_1 = 1$; y $\forall n \in \mathbb{Z}^+$: $H_{n+1} = H_n + \left(\dfrac{1}{n+1}\right)$
- Factorial de un número: $0! = 1$; y $\forall n \in \mathbb{N}_0$: $(n+1)! = (n+1).n!$

Los números de Fibonacci

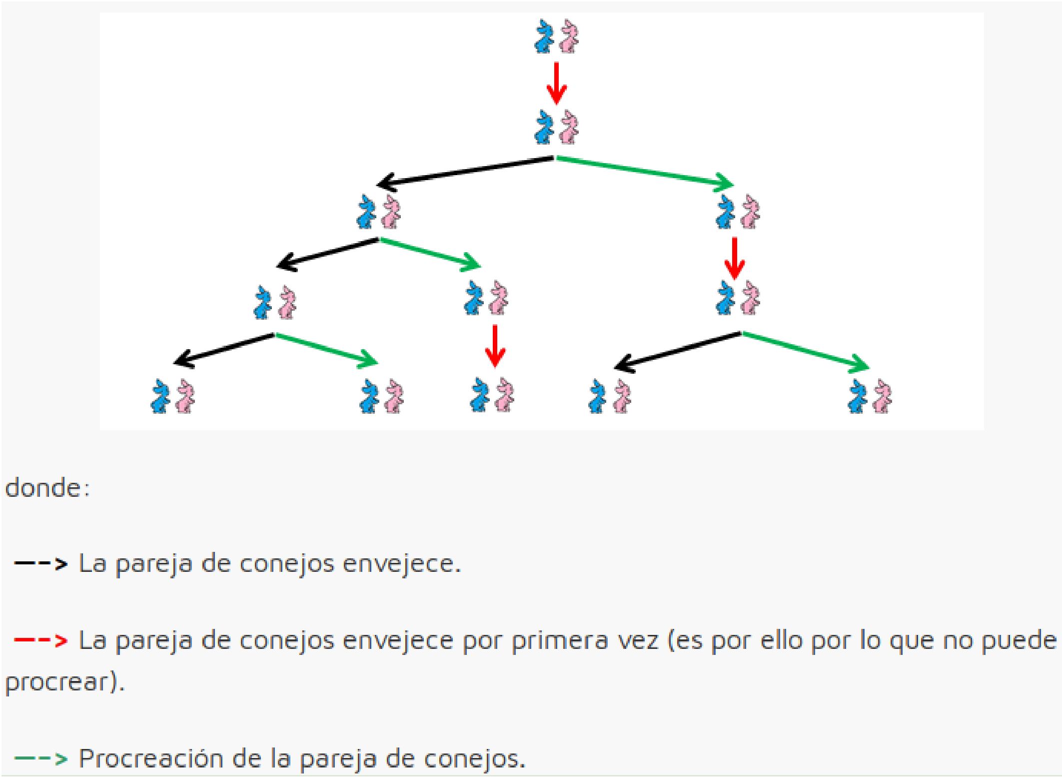
La sucesión de Fibonacci hace referencia a la secuencia ordenada de números descrita por Leonardo de Pisa, matemático italiano del siglo XIII:

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144, \ldots$$

Esta sucesión fue descrita por Fibonacci como la solución a un problema de cría de conejos: "Cierto hombre tiene una pareja de conejos juntos en un lugar cerrado y desea saber cuántos son creados a partir de este par en un año cuando, de acuerdo a su naturaleza, cada pareja necesita un mes para envejecer y cada mes posterior procrea otra pareja" (Laurence Sigler, Fibonacci's Liber Abaci, página 404).
La respuesta a esta pregunta es la que sigue: Partimos de una pareja de conejos el primer mes.

- El segundo mes la pareja envejece pero no procrea.
- El tercer mes la pareja procrea otra pareja (es decir, ya tenemos dos parejas).
- El cuarto mes, la primera pareja vuelve a procrear y la pareja nueva envejece sin procrear (luego tenemos tres parejas).
- El quinto mes, las dos parejas más viejas vuelven a procrear mientras que la nueva pareja no procrea (cinco parejas en total)
- ...

Esquemáticamente sería:



Fuente: https://quantdare.com/numeros-de-fibonacci/

Los ***números de Fibonacci*** pueden definirse recursivamente de la siguiente manera:

1. $F_0 = 0,\ F_1 = 1$; y
2. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$ con $n \geq 2$

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144, \ldots$$

Una sucesión estrechamente relacionada con los números de Fibonacci es la de los ***números de Lucas***, la cual se define:

1. $L_0 = 2,\ L_1 = 1$; y
2. $L_n = L_{n-1} + L_{n-2},\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$ con $n \geq 2$

$$2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ 29,\ 47,\ 76,\ 123,\ 199, \ldots$$

Demuestre las siguientes propiedades que tienen las sucesiones anteriormente mencionadas:

1. $\forall n \in \mathbb{Z}^+$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} {F^2}_i = F_n.F_{n+1}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}_0$: $F_n = \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$
3. $\forall n \in \mathbb{N}_0$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_i = L_{n+2} - 1$
4. $\forall n \in \mathbb{Z}^+$: $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$