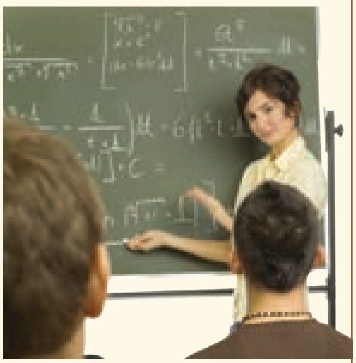
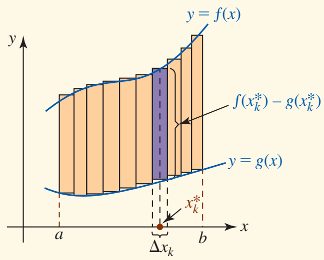
Capítulo 6

Aplicaciones de la integral





En este capítulo Aunque en la sección 6.2 se volverá al problema de encontrar áreas por integración definida, en las secciones posteriores de este capítulo veremos que la integral definida tiene muchas otras interpretaciones, además del área.

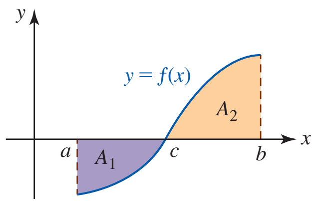
El capítulo empieza con una aplicación de la integral indefinida.

6.2 Otro repaso al área

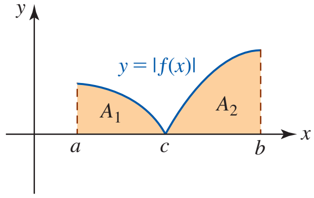
Introducción Si f es una función que asume valores tanto positivos como negativos sobre $[a, b]$, entonces la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ no representa el área bajo la gráfica de f sobre el intervalo. Como vio en la sección 5.4, el valor de $\int_a^b f(x)\,dx$ puede interpretarse como al *área neta con signo* entre la gráfica de f y el eje x sobre el intervalo $[a, b]$. En esta sección investigamos dos problemas de área:

- Encontrar el **área total** de una región acotada por la gráfica de f y el eje x sobre un intervalo $[a, b]$.
- Encontrar el **área de la región** acotada entre dos gráficas sobre un intervalo $[a, b]$.

Veremos que el primer problema es justo un caso especial del segundo problema.



a) La integral definida de f sobre $[a, b]$ no es área



b) La integral definida de $|f|$ sobre $[a, b]$ es área

FIGURA 6.2.1 El área total es $A = A_1 + A_2$

Área total Suponga que la función $y = f(x)$ es continua sobre el intervalo $[a, b]$ y que $f(x) < 0$ sobre $[a, c)$ y que $f(x) \geq 0$ sobre $[c, b]$. El **área total** es el área de la región acotada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Para encontrar esta área se emplea el valor absoluto de la función $y = |f(x)|$, que es no negativa para toda x en $[a, b]$. Recuerde que $|f(x)|$ está definida por partes. Para la función f que se muestra en la FIGURA 6.2.1*a*), $f(x) < 0$ sobre el intervalo $[a, c)$ y $f(x) \geq 0$ sobre el intervalo $[c, b]$. Por tanto,

$$|f(x)| = \begin{cases} -f(x), & \text{para } f(x) < 0 \\ f(x), & \text{para } f(x) \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Como se muestra en la figura 6.2.1*b*), la gráfica de $y = |f(x)|$ sobre el intervalo $[a, c)$ se obtiene al reflejar esa porción de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje x. Sobre el intervalo $[c, b]$, donde $f(x) \geq 0$, las gráficas de $y = f(x)$ y $y = |f(x)|$ son las mismas. Para encontrar el área total $A = A_1 + A_2$ mostradas en la figura 6.2.1*b*) usamos la propiedad aditiva del intervalo de la integral definida junto con (1):

Vea el teorema 5.4.5.

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)|\,dx &= \int_a^c |f(x)|\,dx + \int_c^b |f(x)|\,dx \\ &= \int_a^c (-f(x))\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \\ &= A_1 + A_2. \end{aligned}$$

Las ideas del análisis precedente se resumen en la siguiente definición.

Definición 6.2.1 Área total

Si $y = f(x)$ es continua sobre el intervalo $[a, b]$, entonces el **área total** A acotada por su gráfica y el eje x sobre el intervalo está dada por

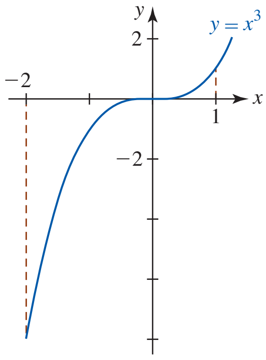
$$A = \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{2}$$

EJEMPLO 1 Área total

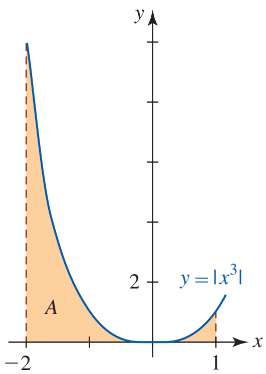
Encuentre el área total acotada por la gráfica de $y = x^3$ y el eje x sobre $[-2, 1]$.

Solución Por (2) se tiene

$$A = \int_{-2}^{1} |x^3|\,dx.$$



a)



b)

FIGURA 6.2.2 Gráfica de la función y área en el ejemplo 1

En la FIGURA 6.2.2 comparamos la gráfica de $y = x^3$ y la gráfica de $y = |x^3|$. Puesto que $x^3 < 0$ para $x < 0$, se tiene sobre $[-2, 1]$,

$$|f(x)| = \begin{cases} -x^3, & -2 \leq x < 0 \\ x^3, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Entonces, por (2) de la definición 6.2.1, el área que se busca es

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{1} |x^3|\, dx \\ &= \int_{-2}^{0} |x^3|\, dx + \int_{0}^{1} |x^3|\, dx \\ &= \int_{-2}^{0} (-x^3)\, dx + \int_{0}^{1} x^3\, dx \\ &= -\frac{1}{4}x^4\Big]_{-2}^{0} + \frac{1}{4}x^4\Big]_{0}^{1} \\ &= 0 - \left(-\frac{16}{4}\right) + \frac{1}{4} - 0 = \frac{17}{4}. \end{aligned}$$

■

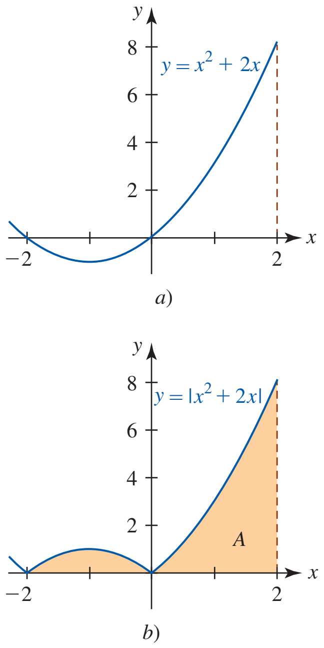


FIGURA 6.2.3 Gráfica y área en el ejemplo 2

EJEMPLO 2 Área total

Encuentre el área total acotada por la gráfica de $y = x^2 + 2x$ y el eje x sobre $[-2, 2]$.

Solución Las gráficas de $y = f(x)$ y $y = |f(x)|$ se muestran en la FIGURA 6.2.3. Luego, por la figura 6.2.3*a*), vemos que sobre $[-2, 2]$,

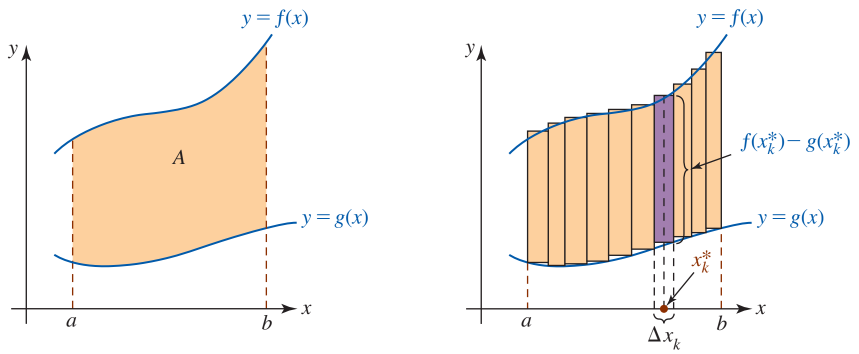
$$|f(x)| = \begin{cases} -(x^2 + 2x), & -2 \le x < 0 \\ x^2 + 2x, & 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

En consecuencia, el área total acotada por la gráfica de f sobre el intervalo $[-2, 2]$ y el eje x es

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{2} |x^2 + 2x|\, dx \\ &= \int_{-2}^{0} |x^2 + 2x|\, dx + \int_{0}^{2} |x^2 + 2x|\, dx \\ &= \int_{-2}^{0} -(x^2 + 2x)\, dx + \int_{0}^{2} (x^2 + 2x)\, dx \\ &= \left(-\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big]_{-2}^{0} + \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Big]_{0}^{2} \\ &= 0 - \left(\frac{8}{3} - 4\right) + \left(\frac{8}{3} + 4\right) - 0 = 8. \end{aligned}$$

■

Área acotada por dos gráficas El análisis anterior es un caso especial del problema más general de encontrar el **área de la región acotada** entre la gráfica de dos funciones f y g y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Vea la FIGURA 6.2.4*a*). El área *bajo* la gráfica de una función continua no negativa $y = f(x)$ sobre un intervalo $[a, b]$ puede interpretarse como el área de la región



a) $f(x) \ge g(x)$ sobre $[a, b]$

b) Construcción de n rectángulos entre dos gráficas

FIGURA 6.2.4 Área A acotada entre dos gráficas acotada por la gráfica de f y la gráfica de la función $y = 0$ (el eje x) y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

Construcción de una integral Suponga que $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son continuas sobre $[a, b]$ y que $f(x) \geq g(x)$ para toda x en el intervalo. Sea P una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$. Si escogemos un punto muestra x_k^* en cada subintervalo, es posible construir n rectángulos correspondientes que tengan el área

La hipótesis de que $f(x) \geq g(x)$ sobre el intervalo significa que las gráficas de f y g pueden tocarse pero no cruzarse mutuamente.

$$A_k = [f(x_k^*) - g(x_k^*)]\,\Delta x_k.$$

Vea la figura 6.2.4*b*). El área A de la región acotada por las dos gráficas sobre el intervalo $[a, b]$ es aproximada por la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k^*) - g(x_k^*)]\,\Delta x_k,$$

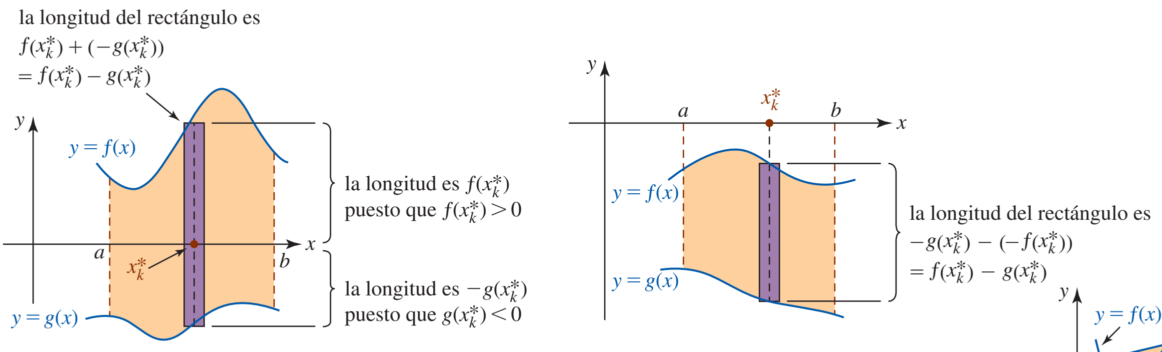
lo cual a su vez sugiere que el área es

$$A = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(x_k^*) - g(x_k^*)]\,\Delta x_k.$$

Puesto que f y g son continuas, también lo es $f - g$. Entonces, el límite anterior existe y, por definición, la integral definida

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx. \qquad (3)$$

También (3) es válida para las regiones en que una o ambas funciones f y g tienen valores negativos. Vea la FIGURA 6.2.5. Sin embargo, (3) *no* es válida sobre un intervalo $[a, b]$ donde las gráficas de f y g se cruzan en el intervalo. Observe en la FIGURA 6.2.6 que g es la gráfica superior sobre los intervalos (a, c_1) y (c_2, b), mientras que f es la gráfica superior sobre el intervalo (c_1, c_2). En el caso más general, tenemos la siguiente definición.



a) $f(x) > 0$ y $g(x) < 0$ sobre $[a, b]$

b) $f(x) < 0$ y $g(x) < 0$ sobre $[a, b]$

FIGURA 6.2.5 Las gráficas de f y g pueden estar por abajo del eje x

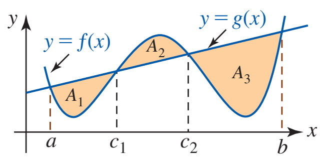


FIGURA 6.2.6 Las gráficas de f y g se cortan entre sí sobre $[a, b]$

Definición 6.2.2 Área acotada por dos gráficas

Si f y g son funciones continuas sobre un intervalo $[a, b]$, entonces el **área A de la región** acotada por sus gráficas sobre el intervalo está dada por

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx. \qquad (4)$$

Observe que (4) se reduce a (2) cuando $g(x) = 0$ para toda x en $[a, b]$. Antes de usar las fórmulas (3) o (4), se le pide trazar las gráficas necesarias. Si las curvas se cruzan sobre el intervalo, entonces como hemos visto en la figura 6.2.6, la posición relativa de las curvas cambia. En cualquier caso, sobre cualquier subintervalo de $[a, b]$, el integrando idóneo siempre es

(gráfica superior) − (gráfica inferior).

Así como en (1), el valor absoluto del integrando está dado por

$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} -(f(x) - g(x)), & \text{para } f(x) - g(x) < 0 \\ f(x) - g(x), & \text{para } f(x) - g(x) \geq 0. \end{cases} \tag{5}$$

Una manera más práctica de interpretar (5) consiste en trazar las gráficas de f y g con precisión y determinar visualmente que:

$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} g(x) - f(x), & \text{siempre que } g \text{ es la gráfica superior} \\ f(x) - g(x), & \text{siempre que } f \text{ es la gráfica superior} \end{cases}$$

En la figura 6.2.6, el área A acotada por las gráficas de f y g sobre $[a, b]$ es

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \\ &= \int_a^{c_1} |f(x) - g(x)|\, dx + \int_{c_1}^{c_2} |f(x) - g(x)|\, dx + \int_{c_2}^{b} |f(x) - g(x)|\, dx \\ &= \int_a^{c_1} [\underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ es la gráfica superior}}}{g(x)} - f(x)]\, dx + \int_{c_1}^{c_2} [\underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ es la gráfica superior}}}{f(x)} - g(x)]\, dx + \int_{c_2}^{b} [\underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ es la gráfica superior}}}{g(x)} - f(x)]\, dx. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Área acotada por dos gráficas

Encuentre el área acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$.

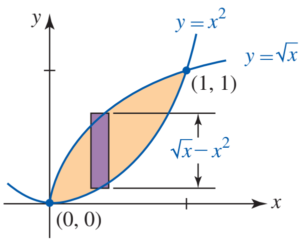


FIGURA 6.2.7 Área en el ejemplo 3

Solución Como se muestra en la FIGURA 6.2.7, la región en cuestión se localiza en el primer cuadrante. Puesto que 0 y 1 son las soluciones de la ecuación $x^2 = \sqrt{x}$, las gráficas se cortan en los puntos (0, 0) y (1, 1). En otras palabras, la región se encuentra entre las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$. Puesto que $y = \sqrt{x}$ es la gráfica superior sobre el intervalo (0, 1), se concluye que

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx \\ &= \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right)\Big]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 4 Área acotada por dos gráficas

Encuentre el área de la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 2x$ y $y = -x + 4$ sobre el intervalo $[-4, 2]$.

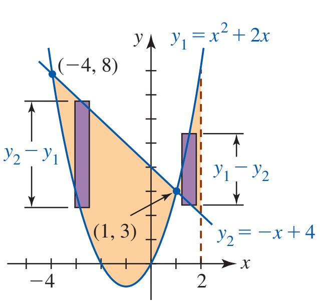


FIGURA 6.2.8 Área en el ejemplo 4

Solución Las funciones dadas se denotan por

$$y_1 = x^2 + 2x \qquad \text{y} \qquad y_2 = -x + 4.$$

Como se muestra en la FIGURA 6.2.8, las gráficas se cortan sobre el intervalo $[-4, 2]$.

Para encontrar los puntos de intersección resolvemos la ecuación $x^2 + 2x = -x + 4$ o $x^2 + 3x - 4 = 0$ y encontramos que $x = -4$ y $x = 1$. El área en cuestión es la suma de las áreas $A = A_1 + A_2$:

$$A = \int_{-4}^{2} |y_2 - y_1|\, dx = \int_{-4}^{1} |y_2 - y_1|\, dx + \int_{1}^{2} |y_2 - y_1|\, dx.$$

Pero como $y_2 = -x + 4$ es la gráfica superior sobre el intervalo $(-4, 1)$ y $y_1 = x^2 + 2x$ es la gráfica superior sobre el intervalo $(1, 2)$, es posible escribir

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4}^{1} [(-x + 4) - (x^2 + 2x)]\, dx + \int_{1}^{2} [(x^2 + 2x) - (-x + 4)]\, dx \\ &= \int_{-4}^{1} (-x^2 - 3x + 4)\, dx + \int_{1}^{2} (x^2 + 3x - 4)\, dx \\ &= \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x\right)\Big]_{-4}^{1} + \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x\right)\Big]_{1}^{2} \\ &= \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4\right) - \left(\frac{64}{3} - 24 - 16\right) + \left(\frac{8}{3} + 6 - 8\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4\right) = \frac{71}{3}. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 5 Área acotada por dos gráficas

Encuentre el área de las cuatro regiones acotadas por las gráficas de $y = \text{sen}\, x$ y $y = \cos x$ que se muestran en la FIGURA 6.2.9.

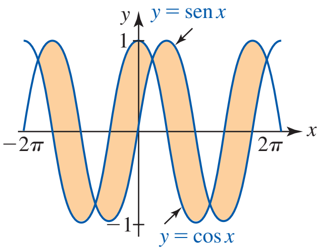


FIGURA 6.2.9 Cada una de las cuatro regiones tiene la misma área en el ejemplo 5

Solución Hay una infinidad de regiones acotadas por las gráficas de $y = \text{sen}\, x$ y $y = \cos x$ y el área de cada región es la misma. En consecuencia, sólo es necesario encontrar el área de la región sobre el intervalo correspondiente a las dos primeras soluciones positivas de la ecuación $\text{sen}\, x = \cos x$. Al dividir entre $\cos x$, una forma más útil de la última ecuación es $\tan x = 1$. La primera solución positiva es $x = \tan^{-1} 1 = \pi/4$. Luego, como $\tan x$ tiene periodo π, la siguiente solución positiva es $x = \pi + \pi/4 = 5\pi/4$. Sobre el intervalo $(\pi/4, 5\pi/4)$, $y = \text{sen}\, x$ es la gráfica superior, de modo que el área de las cuatro regiones es

$$\begin{aligned} A &= 4\int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\text{sen}\, x - \cos x)\, dx \\ &= 4(-\cos x - \text{sen}\, x)\Big]_{\pi/4}^{5\pi/4} \\ &= 4(2\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}. \end{aligned}$$

■

Al encontrar el área acotada por dos gráficas, no siempre es conveniente integrar con respecto a la variable x.

EJEMPLO 6 Área acotada por dos gráficas

Encuentre el área acotada por las gráficas $y^2 = 1 - x$ y $2y = x + 2$.

Solución Observamos que la ecuación $y^2 = 1 - x$ define de manera implícita dos funciones, $y_2 = \sqrt{1 - x}$ y $y_1 = -\sqrt{1 - x}$ para $x \leq 1$. Si definimos $y_3 = \frac{1}{2}x + 1$, por la FIGURA 6.2.10 vemos que la altura de un elemento de área sobre el intervalo $(-8, 0)$ es $y_3 - y_1$, mientras la altura de un elemento sobre el intervalo $(0, 1)$ es $y_2 - y_1$. Por tanto, si se integra con respecto a x, el área deseada es la suma de

$$A_1 = \int_{-8}^{0} (y_3 - y_1)\, dx \qquad \text{y} \qquad A_2 = \int_{0}^{1} (y_2 - y_1)\, dx.$$

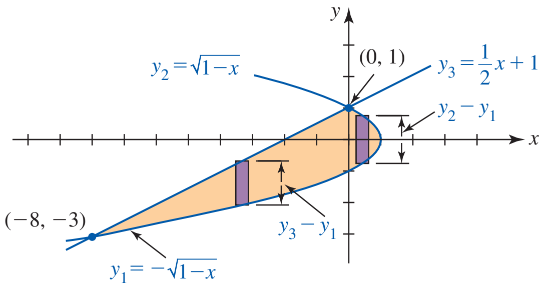


FIGURA 6.2.10 En el ejemplo 6, y_3 es la gráfica superior sobre el intervalo $(-8, 0)$; y_2 es la gráfica superior sobre el intervalo $(0, 1)$

Por tanto, el área de la región es la suma de las áreas $A = A_1 + A_2$; es decir,

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-8}^{0}\left[\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - \left(-\sqrt{1-x}\right)\right] dx + \int_{0}^{1}\left[\sqrt{1-x} - \left(-\sqrt{1-x}\right)\right] dx \\
&= \int_{-8}^{0}\left(\frac{1}{2}x + 1 + \sqrt{1-x}\right) dx + 2\int_{0}^{1}\sqrt{1-x}\, dx \\
&= \left(\frac{1}{4}x^2 + x - \frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right)\Bigg]_{-8}^{0} - \frac{4}{3}(1-x)^{3/2}\Bigg]_{0}^{1} \\
&= -\frac{2}{3}\cdot 1^{3/2} - \left(16 - 8 - \frac{2}{3}\cdot 9^{3/2}\right) - \frac{4}{3}\cdot 0 + \frac{4}{3}\cdot 1^{3/2} = \frac{32}{3}.
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 7 Solución alterna del ejemplo 6

La necesidad de usar dos integrales en el ejemplo 6 para encontrar el área se evita al construir rectángulos horizontales y usar a y como variable independiente. Si definimos $x_2 = 1 - y^2$ y $x_1 = 2y - 2$, entonces, como se muestra en la FIGURA 6.2.11, el área del elemento horizontal es

$$A_k = [\text{gráfica derecha} - \text{gráfica izquierda}] \cdot \text{ancho}.$$

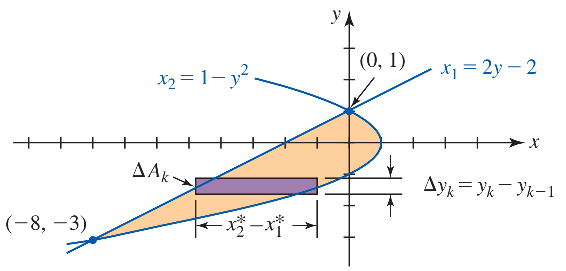


FIGURA 6.2.11 Uso de y como la variable de integración en el ejemplo 7

Es decir,
$$A_k = [x_2^* - x_1^*]\,\Delta y_k,$$
donde
$$x_2^* = 1 - (y_k^*)^2, \quad x_1^* = 2y_k^* - 2 \quad \text{y} \quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1}.$$

Al sumar los rectángulos en la dirección de y positiva obtenemos

$$A = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} [x_2^*(y) - x_1^*(y)]\;\Delta y_k,$$

donde $\|P\|$ es la norma de una partición P del intervalo sobre el eje y definida por $-3 \le y \le 1$. En otras palabras,

$$A = \int_{-3}^{1} (x_2 - x_1)\, dy,$$

donde el límite inferior -3 y el límite superior 1 son las coordenadas y de los puntos de intersección $(-8, -3)$ y $(0, 1)$, respectivamente. Luego, al sustituir por x_2 y x_1 obtenemos

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-3}^{1} [(1 - y^2) - (2y - 2)]\, dy \\
&= \int_{-3}^{1} (-y^2 - 2y + 3)\, dy \\
&= \left(-\frac{1}{3}y^3 - y^2 + 3y\right)\Bigg]_{-3}^{1} \\
&= \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3\right) - \left(\frac{27}{3} - 9 - 9\right) = \frac{32}{3}.
\end{aligned}
$$

$\int_a^b$ NOTAS DESDE EL AULA

Como se mencionó en la introducción, en este capítulo veremos diferentes interpretaciones de la integral definida. En cada sección veremos una variedad de la integral definida, dentro del párrafo *Construyendo una integral*. Antes de memorizar estas fórmulas de integrales, usted debe estar al tanto de que el resultado obtenido en general no es aplicable a toda situación geométrica o física concebible. Por ejemplo, como vimos en el ejemplo 7, para encontrar el área de una región en el plano puede resultar más conveniente integrar con respecto a y y así poder construir una integral totalmente diferente. En lugar de aplicar a ciegas una fórmula, usted debe tratar de comprender el proceso y la práctica de construir integrales al analizar la geometría de cada problema.

Ejercicios 6.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-20.

Fundamentos

En los problemas 1-22, encuentre el área total acotada por la gráfica de la función dada y el eje x en el intervalo dado.

1. $y = x^2 - 1;\quad [-1, 1]$

2. $y = x^2 - 1;\quad [0, 2]$

3. $y = x^3;\quad [-3, 0]$

4. $y = 1 - x^3;\quad [0, 2]$

5. $y = x^2 - 3x;\quad [0, 3]$

6. $y = -(x + 1)^2;\quad [-1, 0]$

7. $y = x^3 - 6x;\quad [-1, 1]$

8. $y = x^3 - 3x^2 + 2;\quad [0, 2]$

9. $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3);\quad [0, 3]$

10. $y = x(x + 1)(x - 1);\quad [-1, 1]$

11. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2};\quad [\frac{1}{2}, 3]$

12. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2};\quad [1, 2]$

13. $y = \sqrt{x} - 1;\quad [0, 4]$

14. $y = 2 - \sqrt{x};\quad [0, 9]$

15. $y = \sqrt[3]{x};\quad [-2, 3]$

16. $y = 2 - \sqrt[3]{x};\quad [-1, 8]$

17. $y = \operatorname{sen} x;\quad [-\pi, \pi]$

18. $y = 1 + \cos x;\quad [0, 3\pi]$

19. $y = -1 + \operatorname{sen} x;\quad [-3\pi/2, \pi/2]$

20. $y = \sec^2 x;\ [0, \pi/3]$

21. $y = \begin{cases} x, & -2 \le x < 0 \\ x^2, & 0 \le x \le 1 \end{cases};\quad [-2, 1]$

22. $y = \begin{cases} x + 2, & -3 \le x < 0 \\ 2 - x^2, & 0 \le x \le 2 \end{cases};\quad [-3, 2]$

En los problemas 23-50, encuentre el área de la región acotada por la gráfica de las funciones dadas.

23. $y = x,\ y = -2x,\ x = 3$

24. $y = x,\ y = 4x,\ x = 2$

25. $y = x^2,\ y = 4$

26. $y = x^2,\ y = x$

27. $y = x^3,\ y = 8,\ x = -1$

28. $y = x^3,\ y = \sqrt[3]{x}$, primer cuadrante

29. $y = 4(1 - x^2),\ y = 1 - x^2$

30. $y = 2(1 - x^2),\ y = x^2 - 1$

31. $y = x,\ y = 1/x^2,\ x = 3$

32. $y = x^2,\ y = 1/x^2,\ y = 9$, primer cuadrante

33. $y = -x^2 + 6,\ y = x^2 + 4x$

34. $y = x^2,\ y = -x^2 + 3x$

35. $y = x^{2/3},\ y = 4$

36. $y = 1 - x^{2/3},\ y = x^{2/3} - 1$

37. $y = x^2 - 2x - 3,\ y = 2x + 2$, sobre $[-1, 6]$

38. $y = -x^2 + 4x,\ y = \frac{3}{2}x$

39. $y = x^3,\ y = x + 6,\ y = -\frac{1}{2}x$

40. $x = y^2,\ x = 0,\ y = 1$

41. $x = -y,\ x = 2 - y^2$

42. $x = y^2,\ x = 6 - y^2$

43. $x = y^2 + 2y + 2,\ x = -y^2 - 2y + 2$

44. $x = y^2 - 6y + 1,\ x = -y^2 + 2y + 1$

45. $y = x^3 - x,\ y = x + 4,\ x = -1,\ x = 1$

46. $x = y^3 - y,\ x = 0$

47. $y = \cos x,\ y = \operatorname{sen} x,\ x = 0,\ x = \pi/2$

48. $y = 2 \operatorname{sen} x,\ y = -x,\ x = \pi/2$

49. $y = 4 \operatorname{sen} x,\ y = 2$, sobre $[\pi/6, 5\pi/6]$

50. $y = 2 \cos x,\ y = -\cos x$, sobre $[-\pi/2, \pi/2]$

En los problemas 51 y 52, interprete la integral definida dada como el área de la región acotada por la gráfica de dos funciones. Trace las dos regiones que tienen el área dada por la integral.

51. $\displaystyle\int_0^4 (\sqrt{x} + x)\, dx$

52. $\displaystyle\int_{-1}^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + 3 - x\right) dx$

En los problemas 53 y 54, interprete la integral definida dada como el área de la región acotada por la gráfica de dos funciones sobre un intervalo. Evalúe la integral dada y trace la región.

53. $\displaystyle\int_0^2 \left|\frac{3}{x + 1} - 4x\right| dx$

54. $\displaystyle\int_{-1}^1 |e^x - 2e^{-x}|\, dx$

En los problemas 55-58, use el hecho de que el área de un círculo de radio r es πr^2 para evaluar la integral definida dada. Trace una región cuya área esté dada por la integral definida.

55. $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\, dx$

56. $\displaystyle\int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2}\, dx$

57. $\displaystyle\int_{-2}^2 \left(1 + \sqrt{4 - x^2}\right) dx$

58. $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(2x + 3 - \sqrt{1 - x^2}\right) dx$

59. Establezca una integral definida que represente el área de una elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > b > 0$. Use la idea que se utilizó en los problemas 55-58 para evaluar la integral definida.

60. Encuentre el área del triángulo con vértices en (1, 1), (2, 4) y (3, 2).

61. Considere la región acotada por las gráficas de $y^2 = -x - 2$, $y = 2$, $y = -2$ y $y = 2(x - 1)$. Calcule el área de la región al integrar con respecto a x.

62. Calcule el área de la región dada en el problema 61 al integrar con respecto a y.

63. Considere la región acotada por las gráficas de $y = 2e^x - 1$, $y = e^x$ y $y = 2$ mostradas en la FIGURA 6.2.12. Exprese el área de la región como integrales definidas primero usando integración con respecto a x y luego usando integración con respecto a y. Escoja una de estas integrales para encontrar el área.

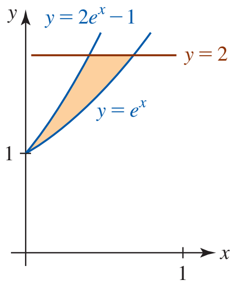


FIGURA 6.2.12 Gráficas para el problema 63

≡ Problemas con calculadora/SAC

64. Use una calculadora o un SAC para aproximar las coordenadas x de los puntos de intersección de las gráficas mostradas en la FIGURA 6.2.13. Encuentre un valor aproximado del área de la región.

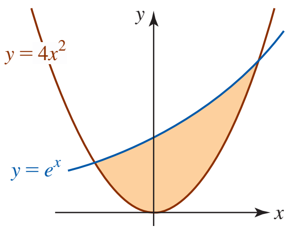


FIGURA 6.2.13 Gráficas para el problema 64

≡ Piense en ello

65. El segmento de recta entre Q y R mostrado en la FIGURA 6.2.14 es tangente a la gráfica de $y = 1/x$ en el punto P. Demuestre que el área del triángulo QOR es independiente de las coordenadas de P.

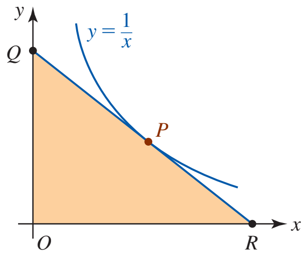


FIGURA 6.2.14 Triángulo en el problema 65

66. Un trapezoide está acotado por las gráficas de $f(x) = Ax + B$, $x = a$, $x = b$ y $x = 0$. Muestre que el área del trapezoide es $\dfrac{f(a) + f(b)}{2}(b - a)$.

67. Exprese el área de la región sombreada mostrada en la FIGURA 6.2.15 en términos del número a. Trate de ser un poco perspicaz.

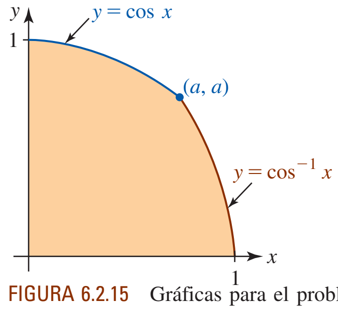
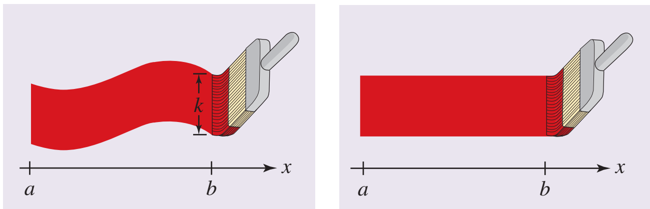


FIGURA 6.2.15 Gráficas para el problema 67

68. Suponga que los dos brochazos de pintura mostrados en la FIGURA 6.2.16 se hacen de una sola pasada usando una brocha de ancho k, $k > 0$, sobre el intervalo $[a, b]$. En la figura 6.2.16*b*) se supone que la región pintada en rojo es paralela al eje x. ¿Cuál brochazo tiene mayor área? Argumente su respuesta con una demostración matemática sólida. ¿Puede plantear un principio general?

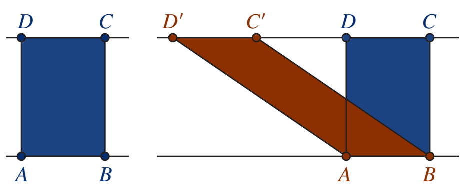


a) *b*)

FIGURA 6.2.16 Brochazos de pintura en el problema 68

≡ Proyectos

69. El área más grande Los puntos A y B están sobre una recta y los puntos C y D están sobre una recta paralela a la primera recta. Los puntos en la FIGURA 6.2.17*a*) forman un rectángulo $ABCD$. Los puntos C y D se mueven a la izquierda como se muestra en la figura 6.2.17*b*) de modo que $ABC'D'$ forme un paralelogramo. Analice: ¿cuál tiene mayor área, el rectángulo $ABCD$ o el paralelogramo $ABC'D'$?

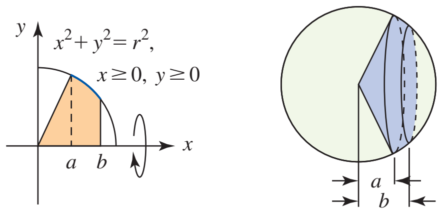


a) *b*)

FIGURA 6.2.17 Rectángulo y paralelogramo en el problema 69

70. Principio de Cavalieri Escriba un reporte breve acerca del principio de Cavalieri. Analice los problemas 68 y 69 en su reporte.

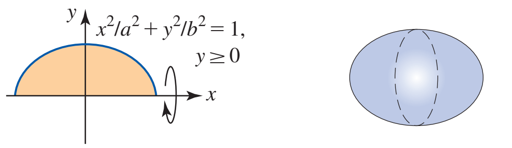
34.



a) *b)* Sector esférico

FIGURA 6.4.11 Región y sólido para el problema 34

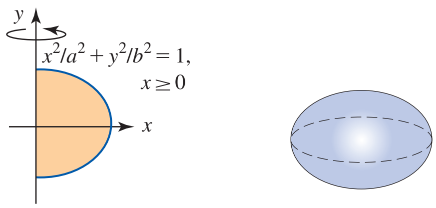
35.



a) *b)* Esferoide alargado

FIGURA 6.4.12 Región y sólido para el problema 35

36.



a) *b)* Esferoide achatado

FIGURA 6.4.13 Región y sólido para el problema 36

☰ Aplicaciones

37. Un cubo cilíndrico de radio r que contiene un líquido gira alrededor del eje y con velocidad angular constante ω. Es posible mostrar que la sección transversal del líquido está dada por $y = \omega^2 x^2/(2g)$, $-r \leq x \leq r$, donde g es la aceleración debida a la gravedad. Use el método de los cascarones para encontrar el volumen V del líquido en el líquido giratorio dado que la altura del cubo es h. Vea la FIGURA 6.4.14.

38. En el problema 37, determine la velocidad angular ω para la cual el fluido entra en contacto con el fondo del cubo. ¿Cuál es el volumen V correspondiente del líquido?

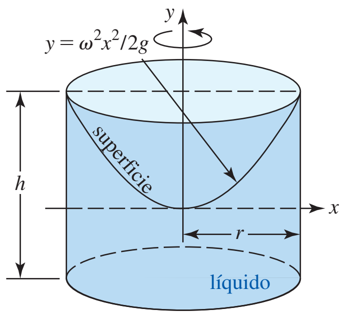


FIGURA 6.4.14 Cubo en los problemas 37 y 38

6.5 Longitud de una gráfica

Introducción Si una función $y = f(x)$ tiene una primera derivada continua sobre un intervalo $[a, b]$, entonces se dice que la gráfica es **suave** y f se denomina **función suave**. Como el nombre lo implica, una gráfica suave carece de picos. En el análisis que sigue se establece una fórmula formal de la **longitud** L, o **longitud de arco**, de una gráfica suave sobre un intervalo $[a, b]$. Vea la FIGURA 6.5.1.

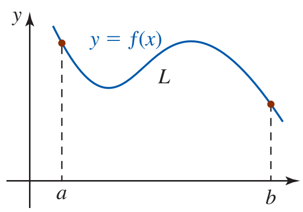


FIGURA 6.5.1 Determinación de la longitud L de la gráfica de f sobre $[a, b]$

Construcción de una integral Sean f que tiene una gráfica suave sobre $[a, b]$ y P una partición arbitraria del intervalo:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Como de costumbre, sean Δx_k el ancho del k-ésimo subintervalo y $\|P\|$ el ancho del subintervalo más grande. Como se muestra en la FIGURA 6.5.2*a*), es posible aproximar la longitud de la gráfica sobre cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ al encontrar la longitud L_k de la cuerda entre los puntos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ y $(x_k, f(x_k))$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Por la figura 6.5.2*b*), la longitud L_k se obtiene a partir del teorema de Pitágoras:

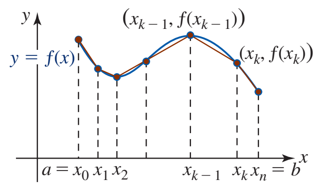
$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}. \qquad (1)$$

Por el teorema del valor medio (sección 4.4) sabemos que en cada subintervalo abierto x_k^* existe un número (x_{k-1}, x_k) tal que

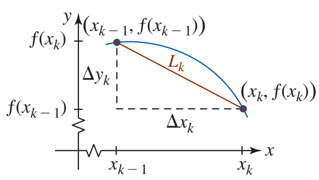
$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(x_k^*) \qquad \text{o bien,} \qquad f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(x_k^*)(x_k - x_{k-1}).$$

Al usar la última ecuación, $f(x_k) - f(x_{k-1})$ sustituimos en (1) y simplificamos:

$$\begin{aligned} L_k &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + [f'(x_k^*)]^2(x_k - x_{k-1})^2} \\ &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2(1 + [f'(x_k^*)]^2)} \\ &= \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\, \Delta x_k. \end{aligned}$$



a) n cuerdas



b) Acercamiento a la cuerda sobre el k-ésimo subintervalo

FIGURA 6.5.2 Aproximación de la longitud de una gráfica al sumar las longitudes de cuerdas

La suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\, \Delta x_k$$

representa la longitud de la curva poligonal que une $(a, f(a))$ y $(b, f(a))$, y proporciona una aproximación a la longitud total de la gráfica de $[a, b]$. Cuando $\|P\| \to 0$, obtenemos

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\, \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{2}$$

El análisis anterior sugiere usar (2) como la definición de la longitud de la gráfica sobre el intervalo.

Definición 6.5.1 Longitud de arco

Sea f una función para la cual f' es continua sobre un intervalo $[a, b]$. Entonces la **longitud** L de la gráfica de $y = f(x)$ sobre el intervalo está dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{3}$$

La fórmula para la longitud de arco (3) también se escribe como

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx. \tag{4}$$

Se dice que una gráfica que tiene longitud de arco es **rectificable**.

EJEMPLO 1 Longitud de una curva

Encuentre la longitud de la gráfica $y = 4x^{3/2}$ del origen $(0, 0)$ al punto $(1, 4)$.

Solución La gráfica de la función sobre el intervalo $[0, 1]$ se muestra en la FIGURA 6.5.3. Luego,

$$\frac{dy}{dx} = 6x^{1/2}$$

es continua sobre el intervalo. En consecuencia, por (4) se concluye que

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + [6x^{1/2}]^2}\, dx \\ &= \int_0^1 (1 + 36x)^{1/2}\, dx \\ &= \frac{1}{36}\int_0^1 (1 + 36x)^{1/2}(36\, dx) \\ &= \frac{1}{54}(1 + 36x)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{1}{54}[37^{3/2} - 1] \approx 4.1493. \end{aligned}$$

■

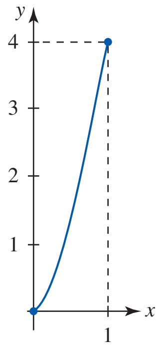


FIGURA 6.5.3 Gráfica de la función en el ejemplo 1

Diferencial de longitud de arco Si C es una curva suave definida por $y = f(x)$, entonces la longitud de arco entre un punto inicial $(a, f(a))$ y un punto variable $(x, f(x))$, donde $a \le x \le b$, está dada por

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt, \tag{5}$$

donde t representa una variable de integración ficticia. Resulta evidente que el valor de la integral en (5) depende de x, por lo que se denomina **función de longitud de arco**. Luego, por (10) de la sección 5.5, $ds/dx = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ y, en consecuencia,

$$ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{6}$$

La última función se denomina **diferencial de la longitud de arco** y puede usarse para aproximar longitudes de curvas. Con $dy = f'(x)\,dx$, (6) puede escribirse como

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \qquad \text{o bien,} \qquad (ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2. \tag{7}$$

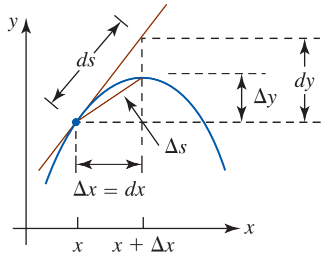


FIGURA 6.5.4 Interpretación geométrica de la diferencial de la longitud de arco

En la FIGURA 6.5.4 se muestra que la diferencial ds puede interpretarse como la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos dx y dy.

Si (3) se escribe $L = \int ds$ para abreviar y la curva C se define por $x = g(y)$, $c \le y \le d$, entonces la última expresión en (7) puede usarse para resolver ds/dy:

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \qquad \text{o} \qquad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy.$$

Por tanto, la integración con respecto a y análoga de (4) es

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy. \tag{8}$$

Vea los problemas 17 y 18 en los ejercicios 6.5.

$\int_a^b$ NOTAS DESDE EL AULA

A menudo, la integral en (3) lleva a problemas en los cuales se requieren técnicas especiales de integración. Vea el capítulo 7. Pero aun con estos procedimientos ulteriores, *no siempre* es posible evaluar la integral indefinida $\int \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$ en términos de las conocidas funciones elementales, incluso para algunas de las funciones más simples como $y = x^2$. Vea el problema 45 en los ejercicios 7.8.

Ejercicios 6.5

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-20.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-12, encuentre la longitud de la gráfica de la función dada sobre el intervalo indicado. Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica.

1. $y = x$; $[-1, 1]$

2. $y = 2x + 1$; $[0, 3]$

3. $y = x^{3/2} + 4$; $[0, 1]$

4. $y = 3x^{2/3}$; $[1, 8]$

5. $y = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2}$; $[1, 4]$

6. $(y + 1)^2 = 4(x + 1)^3$; $[-1, 0]$

7. $y = \frac{1}{3}x^{3/2} - x^{1/2}$; $[1, 4]$

8. $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$; $[2, 4]$

9. $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8x^2}$; $[2, 3]$

10. $y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{12x^3}$; $[1, 2]$

11. $y = (4 - x^{2/3})^{3/2}$; $[1, 8]$

12. $y = \begin{cases} x - 2, & 2 \le x < 3 \\ (x - 2)^{2/3}, & 3 \le x < 10; \\ \frac{1}{2}(x - 6)^{3/2}, & 10 \le x \le 15 \end{cases}$ $[2, 15]$

En los problemas 13-16 establezca, pero no evalúe, una integral para la longitud de la función dada sobre el intervalo indicado.

13. $y = x^2$; $[-1, 3]$

14. $y = 2\sqrt{x + 1}$; $[-1, 3]$

15. $y = \operatorname{sen} x$; $[0, \pi]$

16. $y = \tan x$; $[-\pi/4, \pi/4]$

En los problemas 17 y 18, use (8) para encontrar la longitud de la gráfica de la ecuación dada sobre el intervalo indicado.

17. $x = 4 - y^{2/3}$; $[0, 8]$

18. $5x = y^{5/2} + 5y^{-1/2}$; $[4, 9]$

19. Considere la longitud de la gráfica de $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ en el primer cuadrante.

a) Muestre que el uso de (3) conduce a un integrando discontinuo.

b) Suponga que el teorema fundamental del cálculo puede usarse para evaluar la integral obtenida en el inciso *a*) y encuentre la longitud total de la gráfica.

20. Establezca, pero no intente evaluar, una integral que proporcione la longitud total de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > b > 0$.

21. Dado que la circunferencia de un círculo de radio r es $2\pi r$, encuentre el valor de la integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx.$$

22. Use la diferencial de la longitud de arco (6) para aproximar la longitud de la gráfica de $y = \frac{1}{4}x^4$ desde $(2, 4)$ hasta $(2.1, 4.862025)$. [*Sugerencia*: Revise (13) de la sección 4.9.]

12. La superficie formada por dos planos paralelos que cortan una esfera de radio r se denomina **zona esférica**. Encuentre el área de la zona esférica que se muestra en la FIGURA 6.6.7.

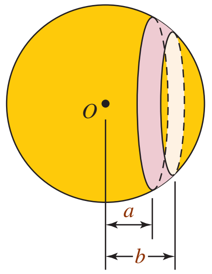


FIGURA 6.6.7 Zona esférica en el problema 12

13. La gráfica de $y = |x + 2|$ sobre $[-4, 2]$, mostrada en la FIGURA 6.6.8, gira alrededor del eje x. Encuentre el área S de la superficie de revolución.

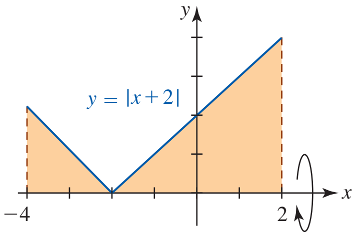


FIGURA 6.6.8 Gráfica de la función en el problema 13

14. Encuentre el área de superficie que se forma al girar $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $[-a, a]$, alrededor del eje x.

Piense en ello

15. Demuestre que el área superficial lateral de un cono circular recto de radio r y altura oblicua L es πrL. [*Sugerencia*: Cuando un cono se corta por el lado y se aplana forma un sector circular con área $\frac{1}{2}L^2\theta$.]

16. Use el problema 15 para mostrar que el área superficial lateral de un cono circular recto de radio r y altura h está dada por $\pi r\sqrt{r^2 + h^2}$. Obtenga el mismo resultado usando (3) o (4).

17. Use el problema 15 para obtener la fórmula (1). [*Sugerencia*: Considere un cono completo de radio r_2 y altura oblicua L_2. Corte la parte cónica superior. Puede ser de ayuda considerar triángulos semejantes.]

18. Muestre que el área superficial del tronco de un cono circular recto de radios r_1 y r_2 y altura h está dada por $\pi(r_1 + r_2)\sqrt{h^2 + (r_2 - r_1)^2}$.

19. Sea $y = f(x)$ una función no negativa continua sobre $[a, b]$ cuya primera derivada es continua sobre el intervalo. Demuestre que si la gráfica de f gira alrededor de una recta horizontal $y = L$, entonces el área S de la superficie de revolución resultante está dada por

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x) - L|\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

20. Use el resultado del problema 19 para encontrar una integral definida que proporcione el área de la superficie que se forma al girar $y = x^{2/3}$, $[1, 8]$, alrededor de la recta $y = 4$. No evalúe.

Proyectos

21. **Una vista desde el espacio**

a) Desde una nave espacial en órbita alrededor de la Tierra a una distancia h de la superficie terrestre, un astronauta puede observar sólo una porción A_s del área total del área superficial de la Tierra, A_e. Vea la FIGURA 6.6.9*a*). Encuentre una fórmula para la expresión fraccionaria A_s/A_e como una función de h. En la figura 6.6.9*b*) se muestra la Tierra en sección transversal como un círculo con centro C y radio R. Sean los ejes x y y como se muestra y sean y_B y $y_E = R$ las coordenadas y de los puntos B y E, respectivamente.

b) ¿Qué porcentaje de la superficie de la Tierra ve un astronauta desde una altura de 2 000 km? Considere que el radio terrestre es $R = 6\,380$ km.

c) ¿A qué altura h el astronauta ve un cuarto de la superficie de la Tierra?

d) ¿Cuál es el límite de A_s/A_e cuando la altura h crece sin cota $(h \to \infty)$? ¿Por qué la respuesta tiene sentido intuitivo?

e) ¿Qué porcentaje de la superficie terrestre ve un astronauta desde la Luna si $h = 3.76 \times 10^5$ km?

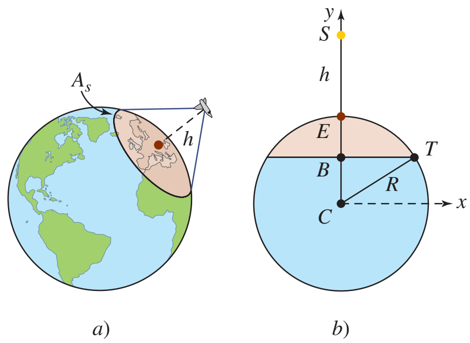


FIGURA 6.6.9 Porción de la superficie terrestre en el problema 21

6.7 Valor promedio de una función

Introducción Todos los estudiantes saben qué es un promedio. Si un estudiante presenta cuatro exámenes en un semestre y sus calificaciones porcentuales son 80, 75, 85 y 92%, entonces su promedio puntaje es

$$\frac{80 + 75 + 85 + 92}{4}$$

o bien, 83%. En general, dados n números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, se dice que su **media aritmética** o **promedio**, es

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{1}$$

En esta sección se extiende el concepto de un promedio discreto como (1) al promedio de *todos* los valores de una función continua definida sobre un intervalo $[a, b]$.

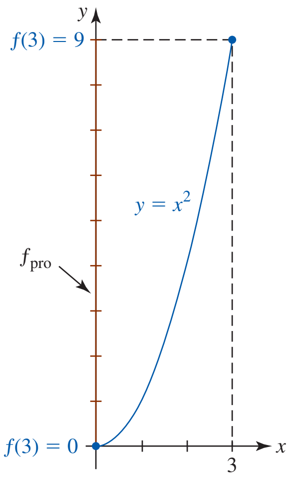


FIGURA 6.7.1 Determinación del promedio de todos los números indicados en rojo sobre el eje y

Promedio de valores funcionales

Ahora suponga que tenemos una función continua f definida sobre un intervalo $[a, b]$. Para los números x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ escogidos de manera arbitraria de modo que $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, entonces por (1) el promedio del conjunto de valores funcionales es

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k). \tag{2}$$

Si ahora se considera el conjunto de valores funcionales $f(x)$ que corresponde a todos los números x en un intervalo, debe resultar evidente que no es posible usar una suma discreta como en (1), puesto que este conjunto de valores funcionales suele ser un conjunto no numerable. Por ejemplo, para $f(x) = x^2$ sobre $[0, 3]$, los valores de la función varían desde un mínimo de $f(0) = 0$ hasta un máximo de $f(3) = 9$. Como se indica en la FIGURA 6.7.1, de manera intuitiva es de esperar que exista un valor entero promedio f_{pro} tal que $f(0) \le f_{\text{pro}} \le f(3)$.

Construcción de una integral

Volviendo al caso general de una función continua definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, sea P una partición regular del intervalo en n subintervalos de ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Si x_k^* es un número escogido en cada subintervalo, entonces el promedio

$$\frac{f(x_k^*) + f(x_k^*) + \cdots + f(x_n^*)}{n}$$

puede escribirse como

$$\frac{f(x_k^*) + f(x_2^*) + \cdots + f(x_n^*)}{\dfrac{b - a}{\Delta x}} \tag{3}$$

puesto que $n = (b - a)/\Delta x$. Al volver a escribir (3) como

$$\frac{1}{b - a}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x$$

y tomar el límite de esa expresión como $\|P\| = \Delta x \to 0$, obtenemos la integral definida

$$\frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Debido a que se ha supuesto que f es continua sobre $[a, b]$, su mínimo absoluto y su máximo absoluto sobre el intervalo se denotarán por m y M, respectivamente. Si la desigualdad

$$m \le f(x_k^*) \le M$$

se multiplica por $\Delta x > 0$ y se suma, obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} m\,\Delta x \le \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x \le \sum_{k=1}^{n} M\,\Delta x.$$

Debido a que $\sum_{k=1}^{n} \Delta x = b - a$, la desigualdad precedente equivale a

$$(b - a)m \le \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x \le (b - a)M.$$

Y así cuando $\Delta x \to 0$, se concluye que

$$(b - a)m \le \int_a^b f(x)\,dx \le (b - a)M.$$

A partir de la última desigualdad concluimos que el número obtenido a partir de (4) satisface

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) \leq M.$$

Por el teorema del valor intermedio, f asume todos los valores entre m y M. Por tanto, el número obtenido a partir de (4) en realidad corresponde a un valor de la función sobre el intervalo. Esto sugiere plantear la siguiente definición.

Definición 6.7.1 Valor promedio de una función

Sea $y = f(x)$ continua sobre $[a, b]$. El **valor promedio** de f sobre el intervalo es el número

$$f_{\text{pro}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{5}$$

Aunque principalmente se tiene interés en funciones continuas, la definición 6.7.1 es válida para cualquier función integrable sobre el intervalo.

EJEMPLO 1 Determinación de un valor promedio

Encuentre el valor promedio de $f(x) = x^2$ sobre $[0, 3]$.

Solución Por (5) de la definición 6.7.1, obtenemos

$$f_{\text{pro}} = \frac{1}{3-0}\int_0^3 x^2\,dx = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^3\right)\bigg]_0^3 = 3.$$ ■

Algunas veces es posible determinar el valor de x en el intervalo que corresponde al valor promedio de una función.

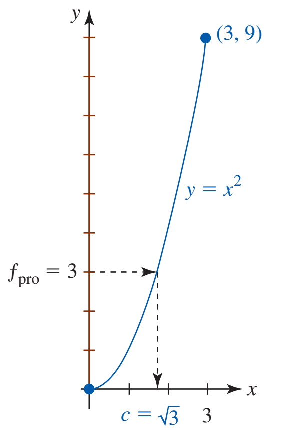


FIGURA 6.7.2 f_{pro} es el valor funcional $f(\sqrt{3})$ en el ejemplo 1

EJEMPLO 2 Determinación de x correspondiente a f_{pro}

Encuentre el valor de x en el intervalo $[0, 3]$ que corresponde al valor promedio f_{pro} de la función $f(x) = x^2$.

Solución Puesto que la función $f(x) = x^2$ es continua sobre el intervalo cerrado $[0, 3]$, por el teorema del valor intermedio sabemos que entre 0 y 3 existe un número c tal que

$$f(c) = c^2 = f_{\text{pro}}.$$

Pero, por el ejemplo 1, sabemos que $f_{\text{pro}} = 3$. Por tanto, la ecuación $c^2 = 3$ tiene las soluciones $c = \pm\sqrt{3}$. Como se muestra en la FIGURA 6.7.2, la única solución de esta ecuación en $[0, 3]$ es $c = \sqrt{3}$. ■

Teorema del valor medio para integrales definidas A continuación se presenta una consecuencia inmediata del análisis anterior. El resultado se denomina teorema del valor medio para integrales.

Teorema 6.7.1 Teorema del valor medio para integrales

Sea $y = f(x)$ continua sobre $[a, b]$. Entonces en el intervalo abierto (a, b) existe un número c tal que

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{6}$$

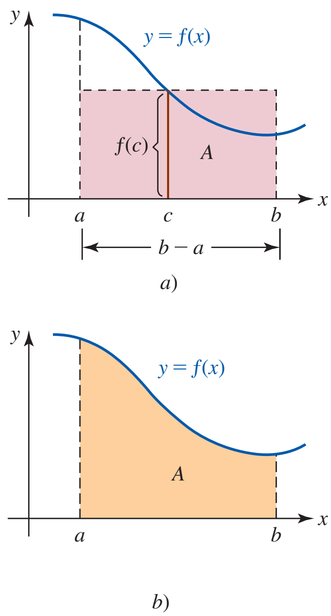


FIGURA 6.7.3 El área A del rectángulo es la misma que el área bajo la gráfica sobre $[a, b]$

En el caso en que $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$, el teorema 6.7.1 se interpreta fácilmente en términos de área. El resultado en (6) simplemente establece que en (a, b) existe un número c para el cual el área A de un *rectángulo* de altura $f(c)$ y ancho $b - a$ mostrado en la FIGURA 6.7.3*a*) es la misma que el *área A bajo la gráfica* indicada en la figura 6.7.3*b*).

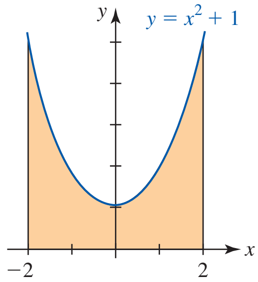
EJEMPLO 3 Determinación de x correspondiente a f_{pro}

Encuentre la altura $f(c)$ de un rectángulo de modo que el área A bajo la gráfica de $y = x^2 + 1$ sobre $[-2, 2]$ sea la misma que $f(c)[2 - (-2)] = 4f(c)$.

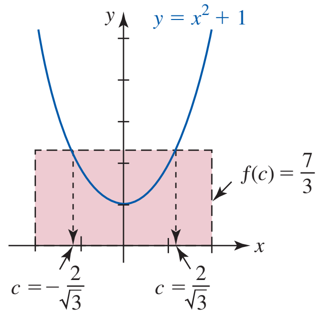
Solución Básicamente, éste es el mismo tipo de problema ilustrado en el ejemplo 2. Así, el área bajo la gráfica mostrada en la FIGURA 6.7.4*a*) es

$$A = \int_{-2}^{2} (x^2 + 1)\, dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\Big]_{-2}^{2} = \frac{28}{3}.$$

También, $4f(c) = 4(c^2 + 1)$, de modo que $4(c^2 + 1) = \frac{28}{3}$ implica $c^2 = \frac{4}{3}$. Las dos soluciones $c_1 = 2/\sqrt{3}$ y $c_2 = -2/\sqrt{3}$ están en el intervalo $(-2, 2)$. Para cualquier número, observamos que la altura del rectángulo es $f(c_1) = f(c_2) = \left(\pm 2/\sqrt{3}\right)^2 + 1 = \frac{7}{3}$. El área del rectángulo mostrado en la figura 6.7.4*b*) es $f(c)[2 - (-2)] = \frac{7}{3} \cdot 4 = \frac{28}{3}$.



a) Área bajo la gráfica



b) Área del rectángulo

FIGURA 6.7.4 El área en *a*) es la misma que el área en *b*) en el ejemplo 3 ■

Ejercicios 6.7

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-21.

Fundamentos

En los problemas 1-20, encuentre el valor promedio f_{pro} de la función dada sobre el intervalo indicado.

1. $f(x) = 4x$; $[-3, 1]$ **2.** $f(x) = 2x + 3$; $[-2, 5]$

3. $f(x) = x^2 + 10$; $[0, 2]$

4. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$; $[-1, 1]$

5. $f(x) = 3x^2 - 4x$; $[-1, 3]$ **6.** $f(x) = (x + 1)^2$; $[0, 2]$

7. $f(x) = x^3$; $[-2, 2]$ **8.** $f(x) = x(3x - 1)^2$; $[0, 1]$

9. $f(x) = \sqrt{x}$; $[0, 9]$ **10.** $f(x) = \sqrt{5x + 1}$; $[0, 3]$

11. $f(x) = x\sqrt{x^2 + 16}$; $[0, 3]$ **12.** $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1/3} \frac{1}{x^2}$; $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

13. $f(x) = \frac{1}{x^3}$; $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ **14.** $f(x) = x^{2/3} - x^{-2/3}$; $[1, 4]$

15. $f(x) = \frac{2}{(x + 1)^2}$; $[3, 5]$ **16.** $f(x) = \frac{(\sqrt{x} - 1)^3}{\sqrt{x}}$; $[4, 9]$

17. $f(x) = \operatorname{sen} x$; $[-\pi, \pi]$ **18.** $f(x) = \cos 2x$; $[0, \pi/4]$

19. $f(x) = \csc^2 x$; $[\pi/6, \pi/2]$ **20.** $f(x) = \frac{\operatorname{sen} \pi x}{\cos^2 \pi x}$; $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

En los problemas 21 y 22, encuentre un valor c en el intervalo dado para el cual $f(c) = f_{pro}$.

21. $f(x) = x^2 + 2x$; $[-1, 1]$ **22.** $f(x) = \sqrt{x + 3}$; $[1, 6]$

23. El valor promedio de una función no negativa continua $y = f(x)$ sobre el intervalo $[1, 5]$ es $f_{pro} = 3$. ¿Cuál es el área bajo la gráfica sobre el intervalo?

24. Para $f(x) = 1 - \sqrt{x}$, encuentre un valor de b tal que $f_{pro} = 0$ sobre $[0, b]$. Interprete geométricamente.

Aplicaciones

25. La función $T(t) = 100 + 3t - \frac{1}{2}t^2$ aproxima la temperatura a las t horas después de mediodía en un día típico de agosto en Las Vegas. Encuentre la temperatura media entre el mediodía y las 6 p.m.

26. Una empresa determina que las ganancias obtenidas después de la venta de x unidades de un producto están dadas por $R(x) = 50 + 4x + 3x^2$. Encuentre el promedio de las ganancias para ventas de $x = 1$ a $x = 5$. Compare el resultado con el promedio $\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5} R(k)$.

27. Sea $s(t)$ la posición de una partícula sobre un eje horizontal como una función del tiempo t. La velocidad media $\bar{v}$ durante el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ es $\bar{v} = [s(t_2) - s(t_1)]/(t_2 - t_1)$. Use (5) para demostrar que $v_{pro} = \bar{v}$. [*Sugerencia*: Recuerde que $ds/dt = v$.]

28. Cuando no hay amortiguamiento, la posición de una masa m sobre un resorte que vibra libremente está dada por la función $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, donde A, ω y ϕ son