CAPÍTULO 3

Desigualdades

¿Comprar o rentar?

Como se estudió en el capítulo anterior, para modelar situaciones de la vida real, se hace necesario traducir al lenguaje algebraico una situación expresada en lenguaje verbal, y así plantear ecuaciones que describan esa situación. Sin embargo, quizá con mayor frecuencia de lo que uno cree, se necesita expresar con un modelo matemático situaciones que incluyen restricciones debidas a la materia prima, a un mínimo de producción, a un nivel mínimo de ganancia o un máximo poder adquisitivo, entre otras muchas restricciones que implican utilizar desigualdades.

Como un ejemplo, a continuación se analiza el problema que tiene una compañía que debe asignar un automóvil a sus representantes de ventas para uso oficial. Con la finalidad de simplificar el problema, suponga que sólo se tiene un representante de ventas. Entonces, la compañía tiene que decidir entre comprar o rentar un automóvil. Después de analizar diferentes propuestas de empresas automotrices, la compañía considera que la elección debe hacerse entre las dos siguientes opciones.

a) Comprar un automóvil con un desembolso inicial de \$60,600, más 24 pagos mensuales fijos de \$4,700 cada uno; éste incluye el pago de un seguro para automóvil. Al término de los 24 meses, el automóvil se puede vender en \$70,000, a éste se le conoce como *valor de rescate*.

b) Rentar un automóvil, por \$3,000 mensuales, más \$0.60 por kilómetro recorrido y un pago único de \$5,000 por concepto de seguro para automóvil con vigencia de dos años.

La empresa considera que, en promedio, su representante viaja 2,000 kilómetros al mes, y esto no cambiará en los próximos dos años. En tal situación, la empresa debe calcular el costo en ambos planes y decidirse por aquel que le arroje un costo menor a lo largo de los dos años.

Con base en lo anterior, al hacer el cálculo al final de los tres años, 36 meses, el plan A implica un gasto de \$103,400; mientras que en el plan B el gasto asciende a \$105,800. Por lo que debería elegir el plan A.

No obstante, si el precio por kilómetro aún se puede negociar, ¿a partir de qué precio por kilómetro es mejor el plan B que el plan A? En este capítulo se estudiarán métodos para la resolución de problemas como éste, cuya solución aparece al final del capítulo.

TEMARIO

■ 3-1 CONJUNTOS E INTERVALOS

Empecemos recordando las definiciones de los símbolos $<$, $\leq$, $>$ y $\geq$, denominados **símbolos de desigualdad**.

Los números reales distintos de cero se dividen en dos clases, los números positivos y los números negativos. Escribimos $a > 0$ (a *es mayor que cero*) para indicar que a es positivo, y $a < 0$ (a *es menor que cero*) para señalar que a es negativo. La suma $a + b$ y el producto $a \cdot b$ de dos números reales positivos son ambos positivos. Si a es positivo, entonces $-a$ es negativo.

Si a y b son dos números reales distintos, escribimos $a > b$ si la diferencia $a - b$ es positiva y $a < b$ si $a - b$ es negativa. Por ejemplo, $5 > 2$ porque $5 - 2$ es positivo y $2 < 8$ dado que $2 - 8 = -6$ es negativo. Geométricamente, $a > b$ significa que el punto sobre la recta numérica que representa a a está a la derecha del punto que representa al número b y $a < b$ significa que el punto que representa a a está a la izquierda del punto que representa a b. (Véase la figura 1).

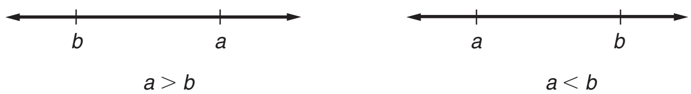

FIGURA 1

Definimos $a \geq b$ (a *es mayor o igual que* b) para indicar que $a > b$ o que $a = b$. De manera similar, $a \leq b$ (a *es menor o igual que* b) se usa para señalar que $a < b$ o $a = b$. Por ejemplo, $5 \leq 7$ es cierto y $5 \geq 5$ porque $5 = 5$ se cumple.

Proposiciones tales como $a < b$, $a > b$, $a \geq b$ o $a \leq b$ se llaman **desigualdades**. En particular, $a > b$ y $a < b$ son **desigualdades estrictas**. La desigualdad $a > b$ puede escribirse en forma equivalente en la dirección opuesta como $b < a$. Así, $5 > 3$ es lo mismo que $3 < 5$.

Cuando un número b está entre dos números a y c con $a < c$, escribimos $a < b < c$. La doble desigualdad se utiliza para indicar que $a < b$ y que $b < c$. ☛ **1**

☛ **1.** ¿Las proposiciones siguientes son falsas o verdaderas?

a) $-5 \leq -7$
b) $3 > -4$
c) Si $x > -5$ entonces $-5 \leq x$
d) Existe x tal que $-3 \leq x \leq -4$

Conjuntos

El conocimiento de los conjuntos y de las operaciones entre conjuntos es básico en todas las matemáticas modernas. Una gran cantidad de largas proposiciones matemáticas pueden escribirse clara y concisamente en términos de conjuntos y de operaciones entre ellos.

DEFINICIÓN Toda colección de objetos bien definida se llama **conjunto**. Los objetos de que consta un conjunto se denomina **miembros** o **elementos** de un conjunto.

Respuesta *a*) Falsa
b) verdadera *c*) verdadera
d) falsa

Por una colección **bien definida**, entendemos que dado cualquier objeto, podemos decidir sin ambigüedad alguna si pertenece o no a la colección.

Un conjunto puede especificarse en dos formas, haciendo una lista de todos sus elementos o estableciendo una regla que caracterice los elementos del conjunto. Examinemos estos dos métodos uno por uno.

MÉTODO DEL LISTADO Si es posible especificar todos los elementos de un conjunto, el conjunto puede describirse listando todos los elementos y encerrando la lista entre llaves.

Por ejemplo, $\{1, 2, 5\}$ denota al conjunto que consta de los tres números 1, 2 y 5 y $\{p, q\}$ simboliza el conjunto cuyos únicos elementos son las letras p y q.

En casos en que el conjunto contiene un gran número de elementos, es posible emplear a menudo lo que llamaremos una **lista parcial**. Por ejemplo, $\{2, 4, 6, \ldots, 100\}$ denota al conjunto de todos los enteros pares desde 2 hasta 100. Tres puntos suspensivos, $\ldots$, se usan para señalar que la sucesión de elementos continúa de manera tal que es clara con base en los primeros elementos listados. La sucesión termina en 100. Por medio de los puntos suspensivos, el método de la lista puede emplearse en casos en los cuales el conjunto en cuestión contiene un número infinito de elementos. Por ejemplo, $\{1, 3, 5, \ldots\}$ denota al conjunto de *todos* los números naturales impares. La ausencia de números después de los puntos suspensivos indica que la sucesión no termina, sino que continúa indefinidamente.

MÉTODO DE LA REGLA Existen muchos ejemplos en los que no es posible o que no sería conveniente listar todos los elementos de un conjunto determinado. En tales casos, el conjunto puede especificarse estableciendo una regla de pertenencia.

Por ejemplo, consideremos el conjunto de todas las personas que viven en México en este momento. Especificar este conjunto listando todos sus elementos por nombres sería una tarea prodigiosa. En lugar de ello lo podemos denotar de la siguiente manera.

$$\{x \mid x \text{ es una persona que actualmente vive en México}\}$$

El símbolo $\mid$ significa *tal que*, de modo que esta expresión se lee: *el conjunto de todas las* x *tales que* x *es una persona que actualmente vive en México*. La afirmación que sigue a la barra vertical dentro de las llaves es la regla que especifica la pertenencia al conjunto.

Como un segundo ejemplo, consideremos el conjunto.

$$\{x \mid x \text{ es un punto de esta página}\}$$

el cual denota el conjunto de todos los puntos de esta página. Éste es un ejemplo de un conjunto que no puede especificarse con el método del listado, aun si deseáramos hacerlo así.

Una gran cantidad de conjuntos pueden especificarse por el listado o estableciendo una regla, y podemos elegir el método que más nos agrade. Daremos varios ejemplos de conjuntos, algunos de los cuales pueden especificarse usando ambos métodos.

Ejemplo 1

a) Si N denota el conjunto de todos los números naturales, entonces podemos escribir

$$N = \{1, 2, 3, \dots\} = \{k \mid k \text{ es un número natural}\}$$

b) Si P denota el conjunto de los enteros de -2 a $+3$, entonces

$$P = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} = \{x \mid x \text{ es un entero, } -2 \leq x \leq 3\}$$

Obsérvese que la regla de pertenencia consta de dos condiciones separadas por una coma. Cualquier elemento del conjunto debe satisfacer ambas condiciones.

c) $$\begin{aligned} Q &= \{1, 4, 7, \dots, 37\} \\ &= \{x \mid x = 3k + 1, k \text{ es un entero, } 0 \leq k \leq 12\} \end{aligned}$$

d) El conjunto de todos los estudiantes actualmente inscritos en la Facultad de Contaduría y Administración puede escribirse formalmente como

$$S = \{x \mid x \text{ es un estudiante inscrito actualmente en la Facultad de Contaduría y Administración}\}$$

Este conjunto podría especificarse también listando los nombres de todos los estudiantes involucrados.

☛ **2.** Liste los elementos que pertenecen a los conjuntos:
a) $\{x \mid x \text{ es un número natural, } -1 \leq x < 5\}$
b) $\{x \mid x = (k + 4)^{-1}, k \text{ es un entero, } -2 \leq k \leq 2\}$

e) El conjunto de todos los números reales mayores que 1 y menores que 2 puede especificarse mediante el método de la regla como

$$T = \{x \mid x \text{ es un número real, } 1 < x < 2\}$$ ☛ **2**

Se dice que un conjunto es **finito** si su número de elementos es finito; es decir, si pueden contarse. Si el número de elementos de un conjunto no es finito, se dice que es un conjunto **infinito**.

En el ejemplo 1, todos los conjuntos de las partes *b*), *c*) y *d*) son finitos; pero los correspondientes a las partes *a*) y *e*) son infinitos.

Se acostumbra usar letras mayúsculas para denotar los conjuntos y letras minúsculas para sus elementos. Observe que seguimos esta convención en el ejemplo 1. Si A es un conjunto arbitrario y x cualquier objeto, la notación $x \in A$ se utiliza para indicar el hecho de que x es un elemento de A. La afirmación $x \in A$ se lee x *pertenece a* A o x *es un elemento de* A. La afirmación negativa x *no es un elemento de* A se indica escribiendo $x \notin A$.

Respuesta *a*) $\{1, 2, 3, 4\}$
b) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\}$

En la parte *b*) del ejemplo 1, $2 \in P$ pero $6 \notin P$. En el caso del conjunto de la parte *e*), $\sqrt{2} \in T$ y $\frac{3}{2} \in T$, pero $2 \notin T$ y $\pi \notin T$.

DEFINICIÓN Un conjunto que no contiene elementos se denomina un **conjunto vacío**. También se utiliza el término conjunto **nulo**.

Con el símbolo $\varnothing$ se denota un conjunto que es vacío y la proposición $A = \varnothing$ significa que el conjunto A no contiene elementos. Entre los ejemplos de conjuntos vacíos están los siguientes:

$$\{x \mid x \text{ es un entero y } 3x = 2\}$$

☛ **3.** ¿Las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas?
a) $2 \in \{x \mid 0 < x^2 \leq 2\}$
b) $\frac{2}{3} \notin \{x \mid x = 1 - k^{-1}$
k es un número natural$\}$
c) $0 \in \varnothing$

Respuesta *a*) Falsa; *b*) falsa *c*) falsa

$\{x \mid x$ es un número real y $x^2 + 1 = 0\}$

El conjunto de todos los dragones vivientes

El conjunto de todos los imanes que sólo tienen un polo. ☛ **3**

DEFINICIÓN Un conjunto A se dice que es un **subconjunto** de otro conjunto B si cada elemento de A también es un elemento de B. En tal caso, escribimos $A \subseteq B$.

El conjunto A se dice que es un **subconjunto propio** del conjunto B si todo elemento de A está en B pero existe al menos un elemento de B que no está en A. En este caso, escribimos $A \subset B$.

EJEMPLO 2

a) Sea $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Entonces, $A \subset B$

b) Si N es el conjunto de todos los números naturales, I es el conjunto de todos los enteros, Q es el conjunto de todos los números racionales y R es el conjunto de todos los números reales, entonces

$$N \subset I \subset Q \subset R$$

c) El conjunto de todas las estudiantes de la Universidad Nacional Autónoma es un subconjunto del conjunto de todos los estudiantes de esa universidad.

d) Todo conjunto es un subconjunto de sí mismo; es decir,

☛ **4.** Liste todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$

Respuesta $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\varnothing$

$$\boxed{A \subseteq A \text{ para cualquier conjunto } A}$$

Sin embargo, la afirmación $A \subset A$ no es verdadera.

e) Un conjunto vacío $\varnothing$ es un subconjunto de cualquier conjunto A:

$$\boxed{\varnothing \subseteq A \text{ para cualquier conjunto } A}$$

Con el propósito de explicar esta última afirmación con más detalle, reformulemos la definición de subconjunto: B es un subconjunto de A si y sólo si no hay elementos en B que no pertenezcan a A. Es claro que no existen elementos que pertenezcan a $\varnothing$ y no pertenezcan a A, por la simple razón de que $\varnothing$ no tiene elementos. En consecuencia, $\varnothing \subseteq A$. ☛ **4**

Dos conjuntos son iguales si contienen los mismos elementos. En forma más precisa, tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN Se dice que dos conjuntos A y B son iguales si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. En tal caso, escribimos $A = B$.

☛ **5.** ¿Las proposiciones siguientes son verdaderas o falsas?
a) $\{x \mid -1 \leq x \leq 1\} \subset \{x \mid x^2 < 4\}$
b) $\{0, 1, 3, 4\} \subseteq \{x \mid x^2 \neq 4\}$
c) $\{0, 3\} = \{x \mid x^2 = 3x\}$

En consecuencia, $A = B$ si no existen objetos que pertenezcan a A y que no pertenezcan a B, o que pertenezcan a B y no pertenezcan a A.

EJEMPLO 3

a) Si $A = \{x \mid x^2 = 1\}$ y $B = \{-1, +1\}$, entonces, $A = B$.

b) Si $A = \{y \mid y^2 - 3y + 2 = 0\}$ y $B = \{1, 2\}$, entonces, $A = B$. ☛ **5**

Intervalos

DEFINICIÓN Sean a y b dos números reales tales que $a < b$. Entonces el **intervalo abierto** de a a b, denotado por (a, b), es el conjunto de todos los números reales x situados entre a y b. Así,

$$(a, b) = \{x \mid x \text{ es un número real y } a < x < b\}$$

Respuesta *a*) Verdadera *b*) verdadera *c*) verdadera

De manera similar, el **intervalo cerrado** de a a b, denotado por $[a, b]$ es el conjunto de todos los números reales situados entre a y b pero que también incluye a éstos. Por tanto,

$$[a, b] = \{x \mid x \text{ es un número real y } a \leq x \leq b\}$$

Intervalos **semicerrados** o **semiabiertos** se definen de la siguiente manera:

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$
$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

☛ **6.** ¿Las proposiciones siguientes son verdaderas o falsas?
a) $2 \in [-2, 2)$ *b*) $2 \in (-2, 2]$
c) $-2 \in (-4, \infty)$

Observación La afirmación de que x es un número real se ha omitido de las reglas que definen estos conjuntos. Esto por lo regular se hace para evitar repeticiones cuando se trabaja con conjuntos de números reales. ☛ ***6***

Para todos estos intervalos, (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$ y $(a, b]$, a y b se denominan los **extremos** del intervalo. Un intervalo abierto no contiene a sus extremos; mientras que un intervalo cerrado contiene a ambos extremos. Un intervalo semicerrado contiene sólo uno de sus extremos. Los métodos de representar tales intervalos se muestran en la figura 2.

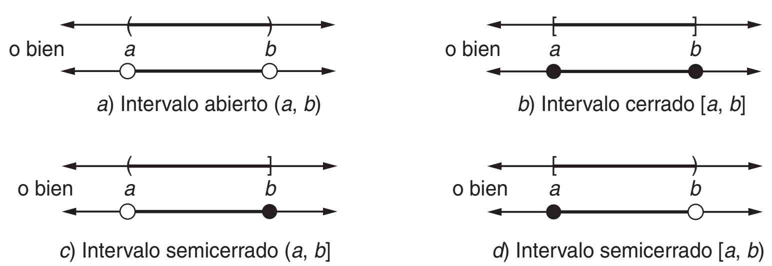

FIGURA 2

Respuesta *a*) Falsa *b*) verdadera *c*) verdadera

Usamos los símbolos ∞ (*infinito*) y $-\infty$ (*menos infinito*) para describir intervalos no acotados. (Véase la figura 3). Obsérvese que ∞ y $-\infty$ no son números reales.

a) $(a, \infty) = \{x \mid x > a\}$

b) $[a, \infty) = \{x \mid x \geq a\}$

c) $(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$

d) $(-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\}$

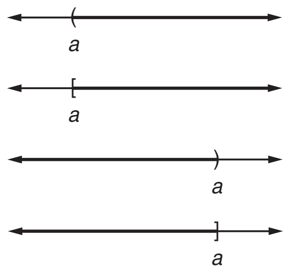

FIGURA 3

EJERCICIOS 3-1

(1-8) Utilice del método de listado para describir los siguientes conjuntos.

1. El conjunto de todos los enteros menores que 5 y mayores que -2.

2. El conjunto de todos los naturales menores que 50.

3. El conjunto de todos los enteros menores que 5.

4. El conjunto de todos los números pares mayores que 4.

5. El conjunto de todos los primos menores que 20.

6. $\left\{y \,\middle|\, y = \dfrac{1}{h+2},\ h \text{ es un número natural}\right\}$

7. $\{x \mid x \text{ es un factor primo de } 36\}$

8. $\left\{p \,\middle|\, p = \dfrac{1}{n-1},\ n \text{ es un número primo menor que } 20\right\}$

(9-16) Utilice el método de la regla para describir los conjuntos siguientes.

9. El conjunto de todos los números pares menores que 100.

10. El conjunto de todos los números primos menores que 30.

11. $\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots, 19\}$

12. $\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$

13. $\{3, 6, 9, \ldots\}$

14. $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$

15. El intervalo $[-1, 1]$.

16. El intervalo $(1, \infty)$.

(17-20) Escriba los siguientes conjuntos de números en la forma de intervalos.

17. $3 \leq x \leq 8$

18. $-2 < y \leq 7$

19. $-3 > t > -7$

20. $t \geq -5$

(21-24) Escriba los intervalos siguientes como desigualdades.

21. $[2, 5)$

22. $(-3, 7)$

23. $(-\infty, 3)$

24. $(-2, \infty)$

25. Establezca si las proposiciones siguientes son verdaderas o falsas. Si son falsas, explique por qué.

a) $2 \in \{1, 2, 3\}$

b) $3 \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$

c) $4 \in \{1, 2, 5, 7\}$

d) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$

e) $\varnothing = 0$

f) $\{0\} = \varnothing$

g) $0 \in \varnothing$

h) $\varnothing \in \{0\}$

i) $\varnothing \subseteq \{0\}$

j) $\{1, 2, 3, 4\} = \{4, 2, 1, 3\}$

k) $\left\{x \,\middle|\, \dfrac{(x-2)^2}{x-2} = 0\right\} = \{x \mid x - 2 = 0\}$

l) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

m) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $A = B$.

n) El conjunto de todos los rectángulos del plano es un subconjunto del conjunto de todos los cuadrados del plano.

o) El conjunto de todos los triángulos equiláteros es un subconjunto del conjunto de todos los triángulos.

p) El intervalo abierto (a, b) es un subconjunto del intervalo cerrado $[a, b]$.

q) $\{x \mid 2 \le x \le 3\} \in \{y \mid 1 \le y \le 5\}$

r) $\{x \mid 1 \le x \le 2\} = \{y \mid 1 \le y \le 2\}$

26. Si A es el conjunto de todos los cuadrados del plano, B el conjunto de todos los rectángulos del plano y C es el conjunto de todos los cuadriláteros del plano, entonces, ¿cuál de estos conjuntos es un subconjunto de otro (o de qué otros)?

27. Demuestre que el conjunto $\{x \mid x^2 - x - 2 = 0\}$ no es un subconjunto del intervalo $[0, \infty)$.

28. ¿El conjunto $\{x \mid x\,(x^2 - 1) = 0\}$ es un subconjunto del intervalo $(0, \infty)$?

29. ¿El conjunto $\{x \mid x^2 - x - 6 = 0\}$ es un subconjunto de los números naturales?

30. ¿Es el conjunto $\{x \mid 2x^2 - 3x + 1 = 0\}$ es un subconjunto de los enteros? ¿De los números racionales?

■ 3-2 DESIGUALDADES LINEALES DE UNA VARIABLE

En esta sección, consideraremos desigualdades que requieren una sola variable. El siguiente ejemplo se refiere a un sencillo problema de negocios que conduce a una de tales desigualdades.

El costo total (en dólares) de producción de x unidades de cierto artículo está dado por $C = 3100 + 25x$ y cada unidad se vende a \$37. El fabricante quiere saber cuántas unidades deberá producir y vender para obtener una utilidad de al menos \$2000.

Suponga que se producen y venden x unidades. El ingreso I obtenido por vender x unidades en \$37 cada una es $I = 37x$ dólares. La utilidad U (en dólares) obtenida por producir y vender x unidades está dada entonces por las siguientes ecuaciones:

$$\text{Utilidad} = \text{Ingresos} - \text{Costos}$$
$$U = 37x - (3100 + 25x) = 12x - 3100$$

Dado que la utilidad requerida debe ser al menos de \$2000, es decir, debería ser de \$2000 o más, tenemos que

$$U \ge 2000$$

o bien,

$$12x - 3100 \ge 2000 \tag{1}$$

Esta es una desigualdad en la variable x. Observemos que los términos que aparecen son de dos tipos, términos constantes o términos que son múltiplos constantes de la variable x. Cualquier desigualdad que sólo tiene estos dos tipos de términos se denomina **desigualdad lineal**. Si el símbolo de desigualdades es $>$ o $<$ la desigualdad es **estricta**; si el símbolo es $\ge$ o $\le$, se dice que es **débil**.

EJEMPLO 1

a) $3 - x \leq 2x + 4$ es una desigualdad lineal débil en la variable x.

b) $\frac{1}{4}z + 3 > 5 - \frac{1}{3}z$ es una desigualdad lineal estricta en la variable z.

Cualquier desigualdad puede escribirse en una forma equivalente, intercambiando los dos lados e invirtiendo el sentido del signo de la desigualdad. Por ejemplo, $x > 3$ es equivalente a $3 < x$; el ejemplo 1(a) es equivalente a $2x + 4 \geq 3 - x$.

DEFINICIÓN La **solución** de una desigualdad en una variable es el conjunto de todos los valores de la variable, para los cuales la desigualdad es una proposición verdadera.

Por ejemplo, la solución de la desigualdad (1) es el conjunto de todos los valores x (el número de unidades vendidas) que producen una utilidad de al menos \$2000.

A semejanza de las ecuaciones, la solución de una desigualdad se encuentra efectuando ciertas operaciones en la desigualdad con el propósito de transformarla en alguna forma estándar. Hay dos operaciones básicas que se utilizan en el manejo de las desigualdades; estableceremos ahora las reglas que gobiernan estas operaciones.

Regla 1

Cuando el mismo número real se suma o se resta a ambos lados de una desigualdad, el sentido de la desigualdad no se altera.

En símbolos, si $a > b$ y c es cualquier número real, entonces

$$a + c > b + c \quad \text{y} \quad a - c > b - c$$

EJEMPLO 2

a) Es claro que $8 > 5$ es una proposición verdadera. Su sumamos 4 a ambos lados, obtenemos $8 + 4 > 5 + 4$ o $12 > 9$, que sigue siendo cierta. Si restamos 7 a ambos lados obtenemos $8 - 7 > 5 - 7$ o $1 > -2$, que de nuevo es válida.

b) Sea $x - 1 > 3$. Sumando 1 a ambos lados,

$$x - 1 + 1 > 3 + 1$$

o bien,

$$x > 4$$

El conjunto de valores de x para los cuales $x - 1 > 3$ es el mismo conjunto para el cual $x > 4$. ☛ **7**

☛ **7.** Sume -5 a ambos miembros de las siguientes desigualdades:
a) $x + 5 \geq -5$
b) $x - 5 < 2$

En el ejemplo 2 observamos que la igualdad $x > 4$ puede obtenerse de la desigualdad original $x - 1 > 3$ pasando el término -1 del lado izquierdo al derecho y cambiando su signo. En general, la regla anterior nos permite efectuar este tipo de operación: *cualquier término puede pasarse de un lado al otro de una desigualdad*

Respuesta *a*) $x \geq -10$
b) $x - 10 < -3$

después de cambiar su signo, sin alterar el sentido de la desigualdad. En símbolos, si $a > b + c$, entonces $a - b > c$ y $a - c > b$.

EJEMPLO 3

a) Si $8 > 5 + 2$, entonces $8 - 2 > 5$.

b) De $2x - 1 < x + 4$ se sigue que $2x - x < 4 + 1$. Tanto x como -1 se pasaron de un lado a otro. Entonces, simplificando obtenemos $x < 5$.

> **Regla 2**
>
> *El sentido de la desigualdad se preserva si ambos lados se multiplican (o dividen) por el mismo número positivo y se invierte cuando se multiplican (o dividen) por el mismo número negativo.*

En símbolos, si $a > b$ y c es cualquier número positivo, entonces

$$ac > bc \quad \text{y} \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

mientras que si c es un número negativo arbitrario, entonces

$$ac < bc \quad \text{y} \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

EJEMPLO 4

a) Sabemos que $4 > -1$ es una proposición verdadera. Multiplicando ambos lados por 2, obtenemos $8 > -2$ que aún es válida. Pero si la multiplicamos por (-2), debemos invertir el sentido de la desigualdad:

$$(-2)(4) < (-2)(-1) \quad \text{o bien} \quad -8 < 2$$

que otra vez es válida.

b) Si $2x \leq 4$, entonces podemos dividir ambos lados entre 2 y obtener la desigualdad equivalente $2x/2 \leq 4/2$ o $x \leq 2$.

c) Si $-3x < 12$, podemos dividir entre -3, que es negativo, de modo que debemos invertir el sentido de la desigualdad:

$$\frac{-3x}{-3} > \frac{12}{-3} \quad \text{o bien} \quad x > -4$$ ☛ **8**

☛ **8.** Multiplique ambos miembros de las siguientes desigualdades por -2;
a) $2x > -3$; *b*) $-\frac{1}{2}x \leq 3 - x$

Respuesta *a*) $-4x < 6$
b) $x \geq -6 + 2x$

Antes de considerar más ejemplos, deduciremos estas dos reglas básicas.

DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA 1 Supongamos que $a > b$ y sea c cualquier número real. Si $a > b$, entonces por definición $a - b > 0$. Consideremos ahora la diferencia entre $(a + c)$ y $(b + c)$:

$$(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b > 0$$

Pero, dado que $(a + c) - (b + c)$ es positivo, esto significa que

$$a + c > b + c$$

lo cual es lo que deseamos encontrar.

DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA 2 De nuevo supongamos que $a > b$ y sea c cualquier número real positivo. Entonces, como antes, $a - b > 0$. Así, $a - b$ y c son números positivos, de modo que su producto también es positivo:

$$(a - b)\,c > 0$$

Es decir,

$$ac - bc > 0$$

Se sigue, por tanto, que $ac > bc$, como se requería. Si, por otro lado, c fuera negativo, el producto $(a - b)c$ sería negativo puesto que un factor sería positivo y el otro negativo. Se sigue que

$$ac - bc < 0$$

y de aquí, $ac < bc$, como se requería.

EJEMPLO 5 Encuentre todos los números reales que satisfacen la desigualdad

$$3x + 7 > 5x - 1$$

Solución Pasamos todos los términos en x a un lado de la desigualdad y todos los términos constantes al otro. Pasando $5x$ al lado izquierdo y 7 al lado derecho, cambiando sus signos y simplificando obtenemos las siguientes desigualdades:

$$3x - 5x > -1 - 7 \qquad \text{(Regla 1)}$$
$$-2x > -8$$

Enseguida, dividimos ambos lados entre -2 y cambiamos el sentido de la desigualdad (puesto que -2 es negativo).

$$\frac{-2x}{-2} < \frac{-8}{-2} \qquad \text{(Regla 2)}$$
$$x < 4$$

Por tanto, la solución consta del conjunto de números reales en el intervalo $(-\infty, 4)$. Esto se ilustra en la figura 4.

FIGURA 4

EJEMPLO 6 Resuelva la desigualdad

$$y + \frac{3}{4} \leq \frac{5y - 2}{3} + 1$$

Solución Ante todo, debemos eliminar las fracciones de la desigualdad. Aquí, el denominador común es 12, de modo que multiplicamos ambos lados por 12.

$$12\left(y + \frac{3}{4}\right) \leq 12\left(\frac{5y - 2}{3} + 1\right)$$

$$12y + 9 \leq 4(5y - 2) + 12$$

$$12y + 9 \leq 20y - 8 + 12$$

$$12y + 9 \leq 20y + 4$$

Pasando los términos en y a la izquierda y los términos constantes a la derecha, obtenemos

$$12y - 20y \leq 4 - 9$$

$$-8y \leq -5$$

Enseguida, dividimos ambos lados entre -8 e invertimos el sentido de la desigualdad (porque -8 es negativo).

$$y \geq \frac{-5}{-8} \quad \text{o bien} \quad y \geq \frac{5}{8}$$

☛ **9.** Determine las soluciones en la notación de intervalos:
a) $1 - x < 3 - 2x$
b) $x + 4 \geq 4x - 2$

Respuesta *a*) $(-\infty, 2)$
b) $(-\infty, 2]$

De aquí, la solución consta del conjunto de números reales mayores o iguales que $\frac{5}{8}$, es decir, de los números reales incluidos en el intervalo $[\frac{5}{8}, \infty)$. Este conjunto se ilustra en la figura 5. ☛ **9**

FIGURA 5

EJEMPLO 7 Resuelva la doble desigualdad en x.

$$8 - 3x \leq 2x - 7 < x - 13$$

Solución De la sección 3-1, recuerde que la doble desigualdad $a \leq b < c$ significa que $a \leq b$ y al mismo tiempo $b < c$. La doble desigualdad considerada es equivalente a las dos desigualdades siguientes:

$$8 - 3x \leq 2x - 7 \quad \text{y} \quad 2x - 7 < x - 13$$

Resolvemos estas dos desigualdades por separado por los métodos antes descritos, por lo que resulta

$$x \geq 3 \quad \text{y} \quad x < -6$$

☛ **10.** Determine la solución y dibújela en la recta numérica:
$3x - 2 \leq 2 - x < x + 6$

Respuesta $-2 < x \leq 1$

Ambas desigualdades deben ser satisfechas por x. Pero es imposible que tanto $x \geq 3$ como $x < -6$ puedan satisfacer a la vez. *Por lo que no hay solución*: ningún número real satisface la doble desigualdad. ☛ **10**

EJEMPLO 8 Determine la solución de la doble desigualdad

$$7 > 5 - 2x \geq 3$$

Solución En este caso, como x aparece sólo en la expresión de en medio, podemos manipular juntas las tres partes de la desigualdad. Primero, restamos 5 de las tres partes:

$$7 - 5 > 5 - 2x - 5 \geq 3 - 5$$

o bien,

$$2 > -2x \geq -2$$

Ahora, dividimos todo entre -2, invirtiendo ambos signos de desigualdad:

$$-1 < x \leq 1$$

La solución consiste en el intervalo semicerrado $(-1, 1]$.

EJEMPLO 9 ***(Utilidades del fabricante)*** El fabricante de cierto artículo puede vender todo lo que produce al precio de \$60 cada artículo. Gasta \$40 en materia prima y mano de obra al producir cada artículo, y tiene costos adicionales (fijos) de \$3000 a la semana en la operación de la planta. Encuentre el número de unidades que debería producir y vender para obtener una utilidad de al menos \$1000 a la semana.

Solución Sea x el número de artículos producidos y vendidos a la semana. Entonces el costo total de producir x unidades es de \$3000 más \$40 por artículo, lo cual es

$$(40x + 3000) \text{ dólares}$$

El ingreso obtenido por vender x unidades a \$60 cada una será de $60x$ dólares. Por tanto,

$$\begin{aligned} \text{Utilidad} &= \text{Ingresos} - \text{Costos} \\ &= 60x - (40x + 3000) = 20x - 3000 \end{aligned}$$

Puesto que deseamos obtener una ganancia de al menos \$1000 al mes, tenemos las desigualdades siguientes:

$$\begin{aligned} \text{Utilidad} &\geq 1000 \\ 20x - 3000 &\geq 1000 \\ 20x &\geq 4000 \\ x &\geq 200 \end{aligned}$$

☛ **11.** Un rectángulo tiene perímetro de 24 unidades. Si la diferencia entre los dos lados es menor que 6 unidades, determine el intervalo de valores para la longitud del lado más largo.

En consecuencia, el fabricante deberá producir y vender al menos 200 unidades cada semana. ☛ **11**

EJEMPLO 10 ***(Decisiones de fabricación)*** El administrador de una fábrica debe decidir si deberán producir sus propios empaques, que la empresa ha estado adquiriendo de proveedores externos a \$1.10 cada uno. La fabricación de los empaques incrementaría los costos generales de la empresa en \$800 al mes y el costo de material y de mano de obra será de 60¢ por cada empaque. ¿Cuántos empaques deberá usar la empresa al mes para justificar la decisión de fabricar sus propios empaques?

Respuesta $[6, 9)$

Solución Sea x el número de empaques utilizados por la empresa al mes. Entonces, el costo de adquirir x empaques a \$1.10 cada uno es de $1.10x$ dólares. El costo de fabricar x empaques es de \$0.60 por empaque más costos generales de \$800 al mes, de modo que el costo total es

$$(0.60x + 800) \quad \text{dólares}$$

Para justificar la fabricación de los empaques por la empresa misma, debe ser cierta la desigualdad siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Costo de adquisición} &> \text{Costo de fabricación} \\ 1.10x &> 0.60x + 800 \\ 1.10x - 0.60x &> 800 \\ 0.50\,x &> 800 \\ x &> 1600 \end{aligned}$$

En consecuencia, la empresa debe usar al menos 1601 empaques al mes para justificar su fabricación.

EJERCICIOS 3-2

(1-20) Resuelva las siguientes desigualdades.

1. $5 + 3x < 11$

2. $3 - 2y \geq 7$

3. $2u - 11 \leq 5u + 6$

4. $5x + 7 > 31 - 3x$

5. $3(2x - 1) > 4 + 5(x - 1)$

6. $x + \frac{4}{3} > \frac{2x - 3}{4} + 1$

7. $\frac{1}{4}(2x - 1) - x < \frac{x}{6} - \frac{1}{3}$

8. $\frac{3}{2}(x + 4) \geq 2 - \frac{1}{5}(1 - 4x)$

9. $\frac{y + 1}{4} - \frac{y}{3} > 1 + \frac{2y - 1}{6}$

10. $5 - 0.3t < 2.1 + 0.5(t + 1)$

11. $1.2(2t - 3) \leq 2.3(t - 1)$

12. $2(1.5x - 2.1) + 1.7 \geq 2(2.4x - 3.5)$

13. $5 < 2x + 7 < 13$

14. $4 \geq \frac{1 - 3x}{4} \geq 1$

15. $(x + 3)^2 > (x - 2)^2$

16. $(2x + 3)(3x - 1) \leq (6x + 1)(x - 2)$

17. $(3x - 1)(2x + 3) > (2x + 1)(3x + 2)$

18. $(3x + 1)(x - 2) > (x - 3)(3x + 4)$

19. $2x + 1 < 3 - x < 2x + 5$

20. $4 - 2x < x - 2 < 2x - 4$

21. $3x + 7 > 5 - 2x \geq 13 - 6x$

22. $2x - 3 < 1 + x < 3x - 1$

23. $3x - 5 < 1 + x < 2x - 3$

24. $5x - 7 \geq 3x + 1 \geq 6x - 11$

25. *(Inversión)* Un hombre tiene \$7000 para invertir. Quiere invertir parte al 8% y el resto al 10%. ¿Cuál es el monto máximo que debe invertir al 8%, si desea un ingreso anual por interés de al menos \$600 anuales?

26. *(Inversión)* La señora K tiene \$5000 que quiere invertir, parte a 6% y el resto a 8%. Si ella desea un ingreso anual por intereses de al menos \$370, ¿cuál es la cantidad mínima que debe invertir al 8%?

27. *(Decisión de producción)* Un fabricante puede vender todas las unidades que produce al precio de \$30 cada una. Tiene costos fijos de \$12,000 al mes; y además, le cuesta \$22 producir cada artículo. ¿Cuántas unidades debe producir y vender al mes la compañía para obtener utilidades?

28. *(Utilidades del fabricante)* Un fabricante de aparatos de alta fidelidad puede vender todas las unidades producidas al precio de \$150 cada una. Tiene costos fijos a la semana de \$15,000 y costos por unidad de \$100 en materiales y mano de obra. Determine el número de aparatos de alta fidelidad que deberá fabricar y vender cada semana, con el propósito de obtener utilidades semanales de al menos \$1000.

29. *(Decisiones de fabricación)* Una empresa automotriz desea saber si le conviene fabricar sus propias correas para el ventilador, que ha estado adquiriendo de proveedores externos a \$2.50 cada unidad. La fabricación de las correas por la empresa incrementará sus costos fijos en \$1500 al mes, pero sólo le costará \$1.70 fabricar cada correa. ¿Cuántas correas debe utilizar la empresa cada mes para justificar la fabricación de sus propias correas?

30. *(Decisiones sobre contratación de maquiladores)* Una empresa puede encomendar a un contratista que empaque cada unidad de su producto a un costo de \$2.75. Por otra parte, la empresa puede empacar sus productos instalando una máquina empacadora. Su instalación incrementará los costos fijos de la empresa en \$2000 al mes y el costo de empaquetamiento sería de \$1.50 por unidad. ¿Cuántas unidades tendría que producir al mes para que la instalación de la máquina empacadora fuera rentable?

31. *(Publicación de revistas)* El costo de publicación de cada ejemplar de la revista semanal *Compre y venda* es de 35¢. Los ingresos por ventas de distribución son de 30¢ por ejemplar, y los ingresos por publicidad del 20% sobre los ingresos obtenidos por ventas más allá de los 2000 ejemplares. ¿Cuántos ejemplares deberá publicar y vender cada semana para obtener ingresos semanales de al menos \$1000?

32. *(Publicación de revistas)* El editor de una revista mensual tiene costos de edición de 60.5¢ por ejemplar. El ingreso por ventas de distribución es de 70¢ por ejemplar, y los ingresos por publicidad del 15% sobre los ingresos obtenidos por ventas más allá de los 20,000 ejemplares. ¿Cuántos ejemplares deberá publicar y vender al mes para asegurar utilidades que sobrepasen los \$4000?

■ 3-3 DESIGUALDADES CUADRÁTICAS DE UNA VARIABLE

Una **desigualdad cuadrática** de una variable, tal como x, es una desigualdad que tiene términos proporcionales a x y a x^2 y términos constantes. Las formas estándares de una desigualdad cuadrática son

$$ax^2 + bx + c > 0 \ \ (\text{o bien} < 0) \qquad \text{o bien} \qquad ax^2 + bx + c \geq 0 \ \ (\text{o bien} \leq 0)$$

en donde a, b y c son constantes determinadas ($a \neq 0$). ☛ **12**

☛ **12.** Exprese en la forma estándar:
$(x + 2)(2x - 1) \leq (3x - 2)^2 + 1$

Otra vez estamos interesados en resolver una desigualdad dada, esto es, en determinar el conjunto de x para el cual la desigualdad se cumple. Podemos hacer esto primero reemplazando la desigualdad con un signo = y encontrar las soluciones de la ecuación cuadrática resultante. Estas soluciones dividen a la recta numérica en intervalos. En cada intervalo seleccionamos un punto y probamos si la desigualdad es cierta o falsa en ese punto. Si es verdadera en ese punto, entonces será verdadera en todos los puntos del intervalo, y recíprocamente, si es falsa en un punto en el intervalo, entonces será falsa en todos los puntos de ese intervalo.

EJEMPLO 1 Resuelva la desigualdad $x^2 + 3x < 4$

Solución Primero reescribimos la desigualdad en la forma estándar restando 4 de ambos miembros:

$$x^2 + 3x - 4 < 0$$

Reemplazamos el signo < por =, obtenemos la ecuación cuadrática $x^2 + 3x - 4 = 0$. Ésta puede resolverse por medio de factorización. Se convierte en $(x - 1)(x + 4) = 0$, de modo que las raíces son $x = 1$ y $x = -4$. Graficando estos puntos en la recta numérica, obtenemos la figura 6. Los dos puntos dividen a la recta numérica en tres

Respuesta $7x^2 - 15x + 7 \geq 0$

lar de incremento en el precio, las ventas bajan en 400 ejemplares. ¿Qué precio máximo deberá fijarse a cada ejemplar con objeto de lograr ingresos por lo menos de \$300,000?

33. *(Agricultura)* Un granjero desea delimitar un terreno rectangular y tiene 200 yardas de cerca disponible. Encuentre las dimensiones posibles del terreno si su área debe ser de al menos 2100 yardas cuadradas.

34. Un lado de un campo rectangular está limitado por un río. Un granjero tiene 100 yardas de cerca y quiere cubrir los otros tres lados del campo. Si quiere encerrar un área de al menos 800 yardas cuadradas, ¿cuáles son los posibles valores para la longitud del campo a lo largo del río?

35. Una caja abierta se fabrica de una hoja rectangular metálica de 16 por 14 pies, cortando cuadrados iguales de cada esquina y doblando hacia arriba los lados. Si el área de la base de la caja es al menos de 80 pies cuadrados, ¿cuál es la máxima altura posible de la caja?

36. Una hoja rectangular de cartón es de 16 por 10 pulgadas. Se cortan cuadrados iguales de cada esquina y los lados se doblan hacia arriba para formar una caja abierta. ¿Cuál es la altura máxima de esta, caja si la base tiene un área de al menos 72 pulgadas cuadradas?

37. *(Conservación)* En cierto estanque se crían peces. Si se introducen n de ellos allí, se sabe que la ganancia de peso promedio de cada pez es de $(600 - 3n)$ gramos. Determine las restricciones de n, si la ganancia total en peso de todos los peces debe ser mayor que 28,800 gramos.

38. *(Inversiones)* Un accionista invierte \$100 a un interés anual del R por ciento y otros \$100 al $2R$ por ciento anual. Si el valor de las dos inversiones debe ser de al menos \$224.80 después de 2 años, ¿qué restricciones deben establecerse sobre R?

39. *(Política de fijación de precios)* Un supermercado se encuentra con grandes existencias de manzanas que debe vender rápidamente. El gerente sabe que si las manzanas se ofrecen a p centavos por libra, venderá x libras, con $x = 1000 - 20p$. ¿Qué precio deberá fijar con el fin de obtener ingresos por lo menos de \$120?

40. *(Decisiones sobre fijación de precios)* Un peluquero atiende en promedio a 120 clientes a la semana cobrándoles \$4 por corte. Por cada incremento de 50¢ en el precio, el peluquero pierde 8 clientes. ¿Qué precio máximo deberá fijar para obtener ingresos semanales de al menos \$520?

■ 3-4 VALORES ABSOLUTOS

Si x es un número real, entonces el **valor absoluto** de x, denotado por $|x|$, se define por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

☛ **16.** Evalúe *a*) $-|-5|$
b) $|2 - 3 - 4|$
c) $|2| + |-3| - |4|$

Por ejemplo, $|5| = 5$, $|-3| = -(-3) = 3$ y $|0| = 0$. ☛ **16**

De la definición, es claro que *el valor absoluto de un número siempre es un número real no negativo*; es decir,

$$|x| \geq 0$$

El valor absoluto de x es una medida del "tamaño" de x sin tener en cuenta que x sea negativo o positivo.

EJEMPLO 1 Resuelva para x.

$$|2x - 3| = 5$$

Respuesta *a*) -5 *b*) 5 *c*) 1

Solución De acuerdo con la definición de valor absoluto, se satisface la ecuación dada si

$$2x - 3 = 5 \qquad \text{o bien} \qquad 2x - 3 = -5$$

porque en cualesquiera de los dos casos, el valor absoluto de $2x - 3$ es 5. Si $2x - 3 = 5$, entonces $2x = 3 + 5 = 8$ y así, $x = 4$. De manera similar, si $2x - 3 = -5$, entonces $x = -1$. En consecuencia, hay dos valores de x, $x = 4$ y $x = -1$, que satisfacen la ecuación dada.

EJEMPLO 2 Resuelva para x.

$$|3x - 2| = |2x + 7|$$

Solución La ecuación se satisface si

$$3x - 2 = 2x + 7 \qquad \text{o bien} \qquad 3x - 2 = -(2x + 7)$$

Resolviendo estas dos ecuaciones por separado, obtenemos $x = 9$ y $x = -1$. ☛ **17**

☛ **17.** Resuelva para x:
a) $|x + 1| = 2$
b) $|x - 1| = |3 - 2x|$
c) $|x - 1| = (3 - 2x)$

De los ejemplos 1 y 2, es claro que tenemos las siguientes reglas generales para resolver ecuaciones en que aparecen valores absolutos.

Si $|a| = b$, donde $b \geq 0$, entonces $a = b$ o bien $a = -b$
Si $|a| = |b|$, entonces $a = b$ o bien $a = -b$

Observación El símbolo $\sqrt{a}$ *denota la raíz cuadrada no negativa del número real a* ($a \geq 0$). Por ejemplo, $\sqrt{9} = 3$. La raíz cuadrada negativa de 9 se denota mediante $-\sqrt{9}$. Usando el símbolo de radical, podemos dar la siguiente definición alternativa de valor absoluto.

$$\boxed{|x| = \sqrt{x^2}}$$

Por ejemplo, $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$, $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = |-5|$ y $\sqrt{(x - 3)^2} = |x - 3|$.

Podemos interpretar $|x|$ geométricamente. (Véase la figura 11). Los números 3 y 8 sobre la recta numérica están separados 5 unidades. También $|8 - 3| = |5| = 5$ y $|3 - 8| = |-5| = 5$. En consecuencia, $|8 - 3| = |3 - 8|$ da la distancia entre los puntos 3 y 8 de la recta numérica. En general, podemos interpretar $|x - c| = |c - x|$ como la distancia entre los puntos x y c situados sobre la recta numérica, sin prestar atención a la dirección. Por ejemplo, la ecuación $|x - 2| = 5$

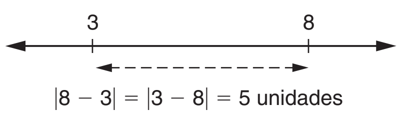

FIGURA 11

Respuesta *a*) -3 o 1
b) $\frac{4}{3}$ o 2
c) $\frac{4}{3}$ (si $x = 2$, el lado derecho es negativo)

establece que la distancia entre x y 2 sobre la recta numérica es 5 unidades, sin importar la dirección. Por tanto, x puede ser $2 + 5 = 7$ o $2 - 5 = -3$, como se aprecia en la figura 12.

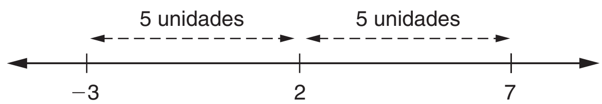

FIGURA 12

Dado que $|x| = |x - 0|$, $|x|$ representa la distancia del punto x sobre el eje real al origen O, sin importar la dirección. (Véase la figura 12). También, dado que la distancia entre O y x es igual a la distancia entre O y $-x$, se sigue que:

$$\boxed{|x| = |-x|}$$

Por ejemplo, $|7| = |-7| = 7$.

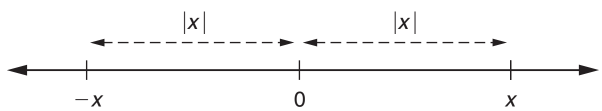

FIGURA 13

En el ejemplo 3 varios enunciados se reexpresan en términos de valores absolutos.

EJEMPLO 3

a) x está a una distancia de 3 unidades del 5: $|x - 5| = 3$

b) x está a menos de 7 unidades del 4: $|x - 4| < 7$

c) x está al menos a 7 unidades del -3: $|x - (-3)| \geq 7$ o $|x + 3| \geq 7$

d) x se encuentra estrictamente dentro de un radio de 3 unidades del 7: $|x - 7| < 3$

e) x está dentro de c unidades de a: $|x - a| \leq c$. ☛ **18**

☛ **18.** Exprese lo siguiente utilizando valores absolutos:
a) x está a lo más a 4 unidades del 3
b) $5 - x$ está 4 unidades alejado de x

Respuesta *a*) $|x - 3| \leq 4$
b) $|5 - 2x| = 4$

Consideremos ahora algunas desigualdades que incluyen valores absolutos. La desigualdad $|x| < 5$ implica que la distancia entre x y el origen es menor que 5 unidades. Dado que x puede estar a la derecha o a la izquierda del origen, x está entre -5 y 5 o $-5 < x < 5$. (Véase la figura 14). De manera similar, $|x| > 5$ implica que x está a más de 5 unidades del origen (a la derecha o a la izquierda); es decir, $x < -5$ o $x > 5$. (Véase la figura 15). Este resultado se generaliza en el teorema siguiente:

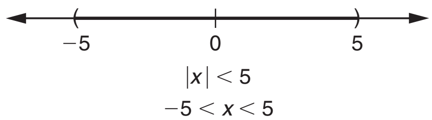

FIGURA 14

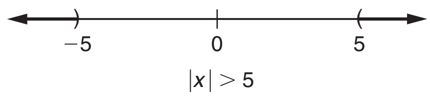

FIGURA 15

TEOREMA 1 Si $a > 0$, entonces,

$\lvert x \rvert < a$ si y sólo si $-a < x < a$	(1)
$\lvert x \rvert > a$ si y sólo si $x > a$ o bien $x < -a$	(2)

Las figuras 16 y 17 se refieren al teorema 1.

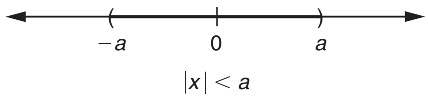

FIGURA 16

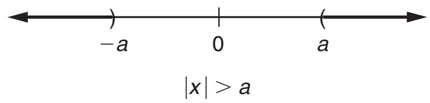

FIGURA 17

EJEMPLO 4 Resuelva $\lvert 2x - 3 \rvert < 5$ para x y exprese el resultado en términos de intervalos.

Solución Usando la proposición (1) del teorema 1, la desigualdad dada implica que

$$-5 < 2x - 3 < 5$$

Sumando 3 a cada lado de la doble desigualdad y simplificando, obtenemos

$$-5 + 3 < 2x - 3 + 3 < 5 + 3$$
$$-2 < 2x < 8$$

Enseguida dividimos todo entre 2:

$$-1 < x < 4$$

En consecuencia, la solución consta de todos los números reales x situados en el intervalo abierto $(-1, 4)$. (Véase la figura 18).

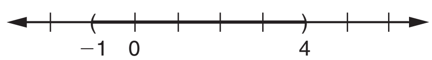

FIGURA 18

EJEMPLO 5 Resuelva $\lvert 2 - 3x \rvert > 7$ para x y exprese el resultado en notación de intervalos.

Solución Utilizando la proposición (2) del teorema 1, la desigualdad dada implica que

$$2 - 3x > 7 \quad \text{o bien} \quad 2 - 3x < -7$$

Considerando la primera desigualdad, tenemos que

$$2 - 3x > 7$$

Restando 2 a ambos lados y dividiendo entre -3 (y cambiando el sentido de la desigualdad):

$$x < -\tfrac{5}{3}$$

De manera similar, resolviendo la segunda desigualdad,

$$x > 3$$

Así, $|2 - 3x| > 7$ es equivalente a

$$x < -\tfrac{5}{3} \quad \text{o bien} \quad x > 3$$

Por tanto, la solución consta de todos los números reales que *no* están en el intervalo cerrado $[-\frac{5}{3},\ 3]$. (Véase la figura 19).

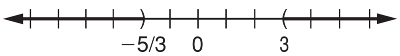

FIGURA 19

EJEMPLO 6 Resuelva $|2x - 3| + 5 \leq 0$ para x.

Solución La desigualdad dada se puede reescribir como

$$|2x - 3| \leq -5$$

Pero $|2x - 3|$ nunca puede ser negativo, de modo que no existen valores de x para los cuales sea verdadera la desigualdad dada. Así no existe solución. ☛ **19**

☛ **19.** Resuelva las desigualdades.
a) $|1 - x| < 4$
b) $|7 - 4x| \geq 3$
c) $|x - 1| + |x + 1| < 0$

EJEMPLO 7 Resuelva la desigualdad $|3x - 5| \leq x + 1$

Solución Si $(x + 1) < 0$, allí claramente no habría solución, ya que el valor absoluto del lado izquierdo no puede ser menor que un número negativo. Así el conjunto solución está restringido de inmediato a $x \geq -1$.

Si $x + 1 \geq 0$, podemos utilizar el teorema 1 para expresar la desigualdad dada en la forma

$$-(x + 1) \leq 3x - 5 \leq (x + 1)$$

La mitad izquierda de esta desigualdad doble, $-(x + 1) \leq 3x - 5$, conduce a $x \geq 1$. La mitad derecha, $3x - 5 \leq x + 1$, lleva a $x \leq 3$. Deben satisfacerse las tres condiciones, $x \geq 1$, $x \leq 3$ y $x \geq -1$. Así, el conjunto solución es $1 \leq x \leq 3$ o el intervalo cerrado $[1, 3]$.

Respuesta *a*) $-3 < x < 5$
b) $x \leq 1$ o $x \geq \frac{5}{2}$
c) no hay solución

Concluimos esta sección estableciendo dos propiedades básicas del valor absoluto. Si a y b son dos números reales, entonces

$$|ab| = |a| \cdot |b| \tag{3}$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \qquad (b \neq 0). \tag{4}$$

EJEMPLO 8

a) $|(-3)(5)| = |-3|\,|5| = (3)(5) = 15$

b) $\left|\dfrac{x-2}{1+x}\right| = \dfrac{|x-2|}{|1+x|} \qquad (x \neq -1)$

c) $\left|\dfrac{x-7}{-3}\right| = \dfrac{|x-7|}{|-3|} = \dfrac{|x-7|}{3}$

Las ecuaciones (3) y (4) se deducen con facilidad del hecho que para cualquier número real x, $|x| = \sqrt{x^2}$. Por ejemplo, la ecuación (3) se deduce como sigue:

$$\begin{aligned}
|ab| &= \sqrt{(ab)^2} \\
&= \sqrt{a^2b^2} \\
&= \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} \qquad \text{(usando una propiedad de los radicales)} \\
&= |a| \cdot |b|
\end{aligned}$$

EJERCICIOS 3-4

(1-4) Evalúe.

1. $\sqrt{2}\,|-2| + 5\,|-\sqrt{2}|$

2. $|\sqrt{3}-2| + |\sqrt{3}-1|$

3. $|\pi - 5| - |-2|$

4. $|3-\sqrt{5}| - |\sqrt{5}-2|$

(5-18) Resuelva las ecuaciones siguientes para x.

5. $|3-7x| = 4$

6. $|2x+5| = 7$

7. $|x+2| = |3-x|$

8. $\left|\dfrac{2x+1}{3}\right| = |3x-7|$

9. $|3x-2| = 4-x$

10. $|x+3| = 5-x$

11. $|x+3| = x-5$

12. $|3x-2| = x-4$

13. $|x-3| + 7 = 0$

14. $|2x+1| + |3x-2 = 0$

15. $\left|\dfrac{x-3}{3x-5}\right| = 6$

16. $\left|\dfrac{-5x-2}{x+3}\right| = 5$

17. $\left|\dfrac{1}{x} - 3\right| = 4$

18. $\left|3 - \dfrac{1}{x-2}\right| = 7$

(19-36) Resuelva las desigualdades siguientes y exprese la solución en forma de intervalos, si es posible.

19. $|3x+7| < 4$

20. $|2x-6| \leq 3$

21. $|2-5x| \geq 3$

22. $|3-4x| < \frac{1}{2}$

23. $5 + 2|3-2x| < 7$

24. $5 - 2|3-2x| \leq 1$

25. $7 + |3x-5| \leq 5$

26. $|3x-13| + 6 \geq 0$

27. $|x+2| + |2x-1| \geq 0$

28. $|3x-2| + |2x-7| < 0$

29. $\left|\dfrac{5-x}{3}\right| + 4 \leq 2$

30. $\left|\dfrac{2-5x}{4}\right| \geq 3$

31. $|5-2x| + 5 \geq 0$

32. $|2x-3| + |7+3x| < 0$

***33.** $|2x-3| < x-4$

***34.** $|x-2| < 3-x$

***35.** $|x-3| < x-2$

***36.** $|3x-2| > 2x-3$

(37-38) Exprese las siguientes afirmaciones en términos de la notación de intervalos.

37. *a*) x está a menos de 5 unidades de 3.

b) y está a lo más a 4 unidades de 7.

c) t está a una distancia de 3 unidades de 5.

d) z está estrictamente a menos de σ (sigma) unidades de μ (mu).

e) x difiere de 4 en más de 3 unidades.

f) $\bar{x}$ difiere de μ por más de 3 unidades.

38. *a*) x está al menos a 4 unidades de -5.

b) y está a lo más a 7 unidades de 3.

c) x está a menos de 3 unidades de 9.

d) x es menor que 4 y mayor que -4.

e) x es mayor que 3 o menor que -3.

f) $\bar{x}$ excede a μ en más de 2 unidades.

g) y es menor que 7 por más de 3 unidades.

h) x difiere de y por más de 5 unidades.

39. *(Acciones)* De acuerdo con una predicción de una revista financiera, el precio p de las acciones de la Bell Co no cambiarán de su valor actual de \$22 por más de \$5. Utilice la notación de valor absoluto para expresar esta predicción como una desigualdad.

40. *(Mercado de viviendas)* De acuerdo con una encuesta de bienes raíces, el precio (en dólares) de una casa promedio en Vancouver el próximo año estará dado por

$$|x - 210{,}000| < 30{,}000$$

Determine el precio más alto y el más bajo de la casa para el año próximo.

REPASO DEL CAPÍTULO 3

Términos, símbolos y conceptos importantes

3.1 Los símbolos de desigualdad $<, >, \leq, \geq$. Desigualdad estricta. Desigualdad doble.
Conjunto, miembro o elemento de un conjunto. Conjunto finito, conjunto infinito.
Conjunto vacío
Método de enumeración, enumeración parcial.
Método por comprensión o método de la regla; la notación $\{x \mid x$ satisface la regla$\}$.
Subconjunto, subconjunto propio. Igualdad de dos conjuntos.
Intervalos, puntos extremos. Intervalos cerrados, abiertos y semiabiertos.
Intervalos infinitos y semiinfinitos.
Notaciones equivalentes, tales como: $\{x|a < x \leq b\}$, $(a, b]$, o bien sobre la recta numérica,

o


3.2 Desigualdad lineal, conjunto solución de un desigualdad. Las reglas de suma y multiplicación para la manipulación de desigualdades.
Procedimiento para la resolución de una desigualdad lineal o una desigualdad lineal doble.

3.3 Desigualdad cuadrática.

Procedimiento paso a paso para la resolución de una desigualdad cuadrática.

3.4 Valor absoluto de un número real y su interpretación geométrica.

Fórmulas

Si $|a| = b$ y $b > 0$, entonces $a = b$ o $a = -b$. Si $|a| = |b|$, entonces $a = b$ o $a = -b$.

Si $|a| < b$ y $b > 0$, entonces $-b < a < b$. Si $|a| > b$, entonces $a < -b$ o bien $a > b$.

$$|a| = \sqrt{a^2}; \quad |ab| = |a| \cdot |b|; \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad (b \neq 0)$$

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPÍTULO 3

1. Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las proposiciones siguientes. Cada enunciado falso cámbielo por una proposición verdadera correspondiente.

a) Si $x > 0$ entonces $x^2 > x$

b) Al sumar en ambos lados de una desigualdad el mismo número negativo, la desigualdad cambia su sentido.

c) Cuando se multiplican ambos lados de una desigualdad por el mismo número positivo, la desigualdad preserva su sentido.

d) Si $|a| = |b|$, entonces $a = b$

e) El valor absoluto de todo número real siempre es un número positivo.

f) Si $|x^2| = |y^2|$ entonces $x = y$ o bien $x = -y$

g) La ecuación $|x - 1| + 1 = 0$ no tiene solución.

h) La ecuación $|x + 1| = x + 1$ se satisface para cualquier número real x.

i) Si $0 > x > y$ entonces $|x| > |y|$

j) Si $|x| < |y|$ entonces $x^2 < y^2$

k) Una desigualdad cuadrática tiene dos soluciones, una solución o no tiene soluciones.

l) $|x + y| < = |x| + |y|$, para cualesquiera números reales x y y.

m) Si $x, y > 0$ y $x > y$, entonces $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$

(2-40) Resuelva las desigualdades siguientes.

2. $2(x - 3) + 3(x + 5) < 9(2x - 5) + 2$

3. $3x + 2(x - 1) > 6x - 9$

4. $3(2x + 3) + 5(2x - 3) \leq 5(5x - 3)$

5. $x^2 - 5x + 6 < 0$

6. $4(x + 1) \geq (3x + 1) + 2(9 - 2x)$

7. $x^2 \geq 3 - 2x$

8. $3x^2 \geq 24x - 48$

9. $2(x^2 + 5x) - 20 > (1 - x)^2 + (1 + x)^2 - 2$

***10.** $1 - \frac{14}{x} \leq 20 - 3x$

***11.** $\frac{x}{6} \leq \frac{3}{x} + \frac{1}{2}$

12. $\frac{1}{x} > x$

13. $(x + 1)^2 < (x + 2)^2 - 2(x + 1)$

***14.** $\frac{12}{x - 1} > 2(x + 6)$

15. $(3x - 2) + 1 \leq (6x - 1)(6 - x) - 5(x - 2)$

16. $21x + 30 \geq 45x - 26$

17. $x^2 \leq 3x - 2$

***18.** $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 \geq (x + 1)^2$

***19.** $(x - 1)(x + 3)(2x - 5) \leq 0$

20. $4x^2 \leq 12x - 9$

21. $\frac{1}{x - 3} < \frac{1}{6}$

22. $\frac{1}{x + 1} > \frac{1}{12}$

23. $\frac{x}{3} + \frac{x - 5}{7} + \frac{8x}{21} \leq 1$

24. $5x^2 - 6 \leq 13x$

25. $(x + 2)(x - 3) > 2 + (x - 1)(x - 2)$

***26.** $\frac{x - 2}{7} \geq \frac{x}{7} - \frac{8 - x}{x + 1}$

27. $6x^2 < x + 1$

28. $(x + 1)(1 - 2x) \leq (2x + 7)(19 + x)$

29. $(x - 1)^2 + 1 \leq 0$

30. $(1 + 2x)^2 + (1 + x)(1 - x) \geq 3x^2 + 2x + 4$

31. $|x - 2| + 5 < 8$

32. $|2x - 1| - 4 \geq 0$

33. $|1 - 7x| + 3 \geq 0$

34. $|2x - 3| + |5x + 1| < 0$

35. $|7x - 2| + |5x - 1| \leq 0$

36. $|x - 1| > |1 - x|$

37. $\frac{3}{|x - 8|} \leq 1$

38. $\frac{|2x + 5|}{8} \leq 3$

39. $\frac{|7 - 3x|}{2} \geq 15$

40. $9 - |3x - 7| < 0$

(41-50) Resuelva las siguientes ecuaciones.

41. $|7x + 2| + 5 = 21$

42. $|2x| + |x| = 12$

***43.** $|x^2 - 3x| = 2x$

44. $|x^2 - 3| = 6$

45. $|1 - x^2| = 24$

46. $|5x - 1| + |2x - 8| = 0$

47. $|3x - 4| - 7|x + 2| = 0$

48. $|2 - 6x| + |9x - 3| = 0$

***49.** $|3x - 5| = 1 - x$

***50.** $|2x - 1| = 3x$

51. *(Decisión sobre la renta de un teléfomo celular)* Adriana Rojas va a contratar los servicios de telefonía celular, después de analizar diversos planes, su decisión queda entre los dos siguientes. El plan A, con una renta mensual de 10 dólares mensuales más \$0.20 por cada minuto de tiempo aire. El plan B, con una renta mensual de \$20 más \$0.12 por cada minuto de tiempo aire. Determine el número de minutos mensuales que debe utilizar Adriana para que el plan B sea más barato que el plan A.

52. *(Ingresos del fabricante)* Daniela Espejel puede vender x paquetes de software cada semana al precio de p dólares cada uno, en donde $p = 70 - x$. ¿Cuántos paquetes debe vender Daniela para obtener ingresos mínimos de \$1200 a la semana?

53. *(Ingresos del fabricante)* Manuel Zamora, gerente de una distribuidora de televisores, sabe que a un precio de p dólares por unidad de cierto modelo pueden venderse x unidades al mes y la relación entre precio y las unidades vendidas es $p = 1000 - 2x$. ¿Cuántas unidades deben vender Manuel para que los ingresos mensuales sean de al menos \$45,000? El precio de ese modelo de televisor no puede ser menor a \$300.

54. *(Decisiones de producción)* En el ejercicio 53, si cuesta $(6000 + 300x)$ dólares producir x televisores al mes, ¿cuántas unidades deberán producirse y venderse cada mes para que la utilidad mensual sea al menos \$13,200? (Recuerde que el precio de ese modelo de televisor no puede ser menor a \$300).

55. *(Fijación de precios)* En un terreno de cultivo familiar, Dina Vogt tuvo una cosecha de 500 kilogramos de fresas, pero debe venderlas rápidamente, pues los costos de almacenamiento son muy altos. Además, sabe que el precio que fije debe ser menor a \$20. Por otro lado, si las fresas se ofrecen a p pesos por kilogramo, venderá x kilogramos, con $x = 500 - 8p$. ¿Qué precio debe fijar Dina con el propósito de obtener ingresos de al menos \$5700?

56. *(Precio de automóviles)* De acuerdo con la revista *El mundo de la velocidad*, el año próximo el precio, p en dólares, de un automóvil compacto estará dado por

$$|p - 12000| \leq 1500$$

Determine el precio más alto y el más bajo que tendrá un automóvil compacto el próximo año, de acuerdo con esa.

57. *(Producción y utilidades)* Jorge Iñigo elabora rompecabezas de madera; puede vender todos los que produce al precio de \$12 por unidad. Los costos de materia prima y mano de obra por unidad son de \$6 y los costos fijos semanales son \$1000. ¿Cuántos rompecabezas deberá producir si desea obtener utilidades semanales de al menos \$500?

58. *(Decisión sobre inversiones)* Rubén Nava invertirá un total de \$55,000. Puede elegir entre bonos emitidos por el estado, que ofrecen una tasa de interés de 6% anual, o bien, con un riesgo mayor, bonos hipotecarios con una tasa de interés de 9% anual. ¿Qué cantidad máxima debe invertir en los bonos del estado, si desea recibir un ingreso anual, por concepto de intereses de al menos \$3900?

59. *(Decisión sobre inversiones)* Con respecto al ejercicio anterior, si Rubén puede comprar una obra de arte en \$55,000 y considera que es posible venderla dentro de un año en \$59,200. Ahora, ¿qué cantidad máxima debe invertir en los bonos del estado, si desea recibir un mayor ingreso anual, por concepto de intereses que la ganancia con la venta de la obra de arte?

60. (Decisión sobre fijación de precios) En una clínica veterinaria, un servicio que se ofrece es el aseo de perros. En promedio se atiende a 100 a la semana, cobrándoles \$20 a cada uno. Por cada incremento de \$1 en el precio, la clínica pierde 2 clientes. ¿Cuál es el menor precio que deberá fijarse para obtener ingresos semanales de al menos \$2250?

CASO DE ESTUDIO

¿COMPRAR O RENTAR?

Retomando el problema que aparece al inicio del capítulo, en el que se debe determinar el precio por kilómetro que la empresa estaría dispuesta a pagar para adoptar el plan B (renta de un automóvil) en vez del plan A (compra de un automóvil), a continuación se plantea el problema. Si se denota con p al precio por kilómetro recorrido, entonces, cada mes el costo de rentar el automóvil sería de

$$3000 + 2000p$$

Puesto que son 24 meses, el costo total de rentar el automóvil sería

(Costo del seguro) + (Costo de renta y uso del automóvil durante 36 meses),

es decir,

$$5000 + 24 \times (3000 + 2000p)$$

El costo en el plan A, era

(Pago inicial) + (24 mensualidades de $4700 cada una) − (Valor de rescate),

por lo que el costo del plan A sería de

$$5000 + (24 \times 4700) - 70,000 = \$103,400$$

Ahora, lo que se necesita determinar es el precio, p, para el cual el costo del plan B sea menor o igual al costo con el plan A, es decir,

$$5000 + 24 \times (3000 + 2000p) \leq 103,400$$

Con los métodos estudiados en este capítulo es fácil determinar que la solución es $p \leq 0.55$. Quiere decir que un precio de $0.55 por kilómetro hace que los dos planes tengan el mismo costo, pero con un precio por kilómetro inferior a $0.55, el plan B es superior al plan A.

Responda las siguientes preguntas, tome como base el planteamiento original y sólo cambie lo que se indica en cada caso:

i. ¿A lo más, cuántos kilómetros mensuales, en promedio, debe viajar el representante de ventas para que el plan B sea mejor que el plan A?

ii. Después de negociar con el distribuidor de automóviles, la empresa logra que el pago mensual en la compra del automóvil sea de $4400. ¿A lo más cuántos kilómetros debe recorrer el representante de ventas, para que el plan B sea mejor que el plan A?

Una consideración que en este momento no se tomó en cuenta es que el valor del dinero cambia con el tiempo, en capítulo 7 se tratará este tema, *matemáticas financieras*. Esto es muy importante para la toma de decisiones, pues no tiene el mismo valor desembolsar, por ejemplo, $60,000 hoy, que $5000 cada mes durante los siguientes 12 meses. Como se comentó aprenderá más de este tema posteriormente en este libro.