



Árboles

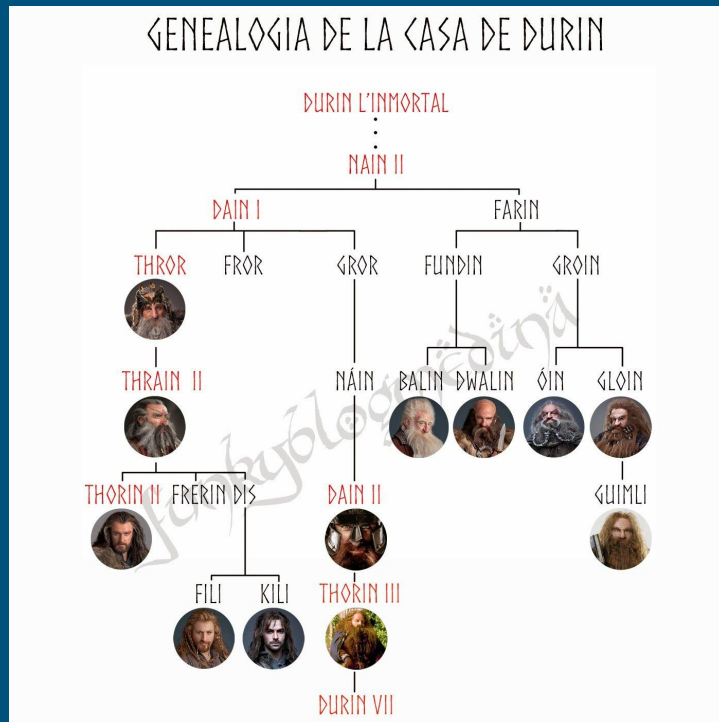
Introducción la botánica de datos

Árboles

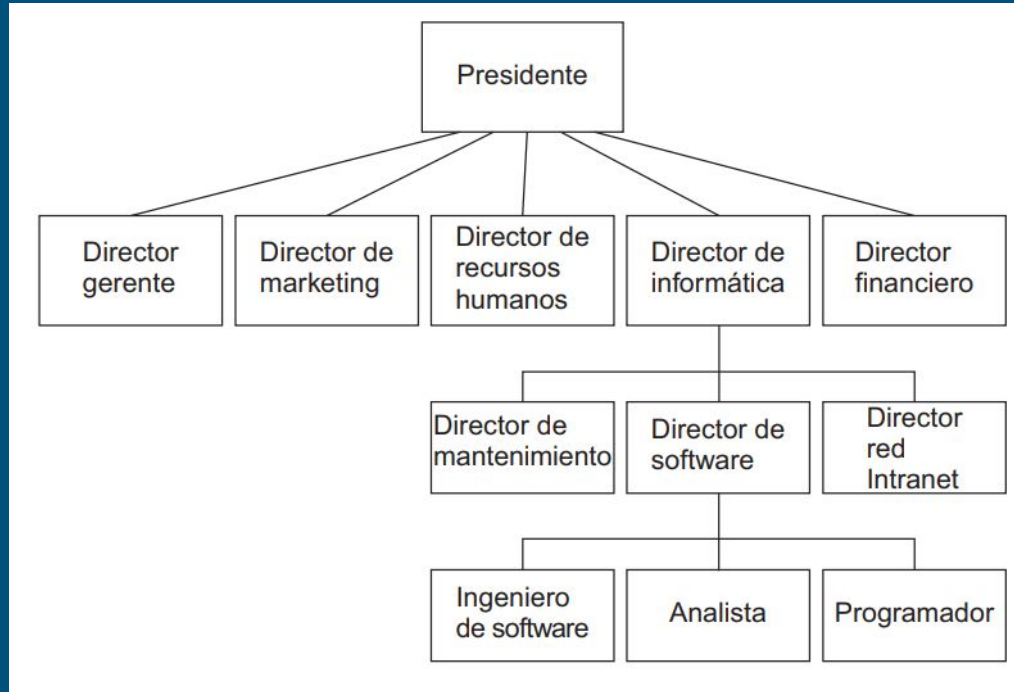
- Es una estructura de datos muy importante en informática y en ciencias de la computación.
- Son estructuras no lineales.
- Que representan entidades que están relacionadas jerárquicamente.

Algunos ejemplos de árboles
de datos que usamos en la vida
cotidiana...

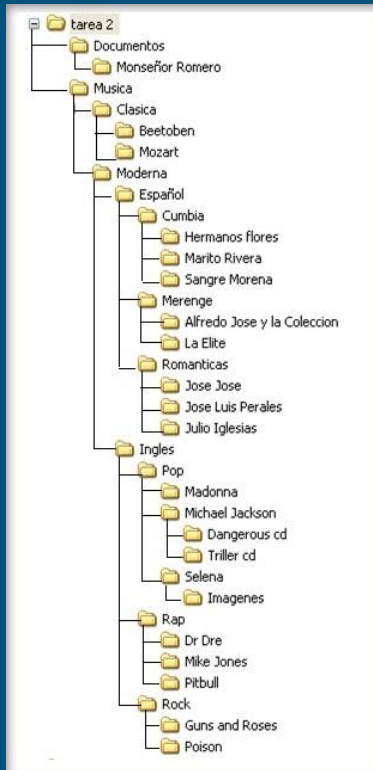
Árboles genealógicos

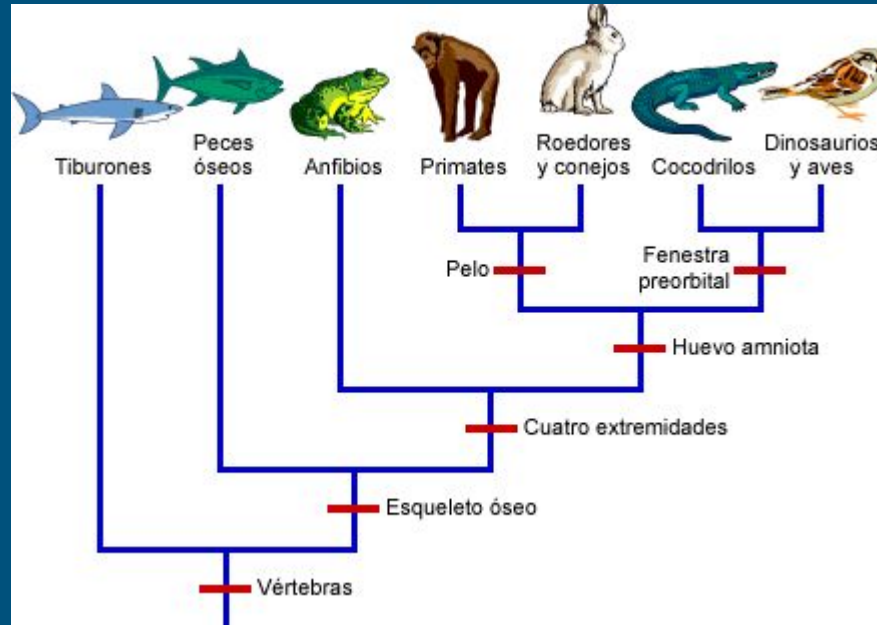


Organigrama de una empresa



Sistemas de archivos





División de un libro en capítulos, subcapítulos, etc.

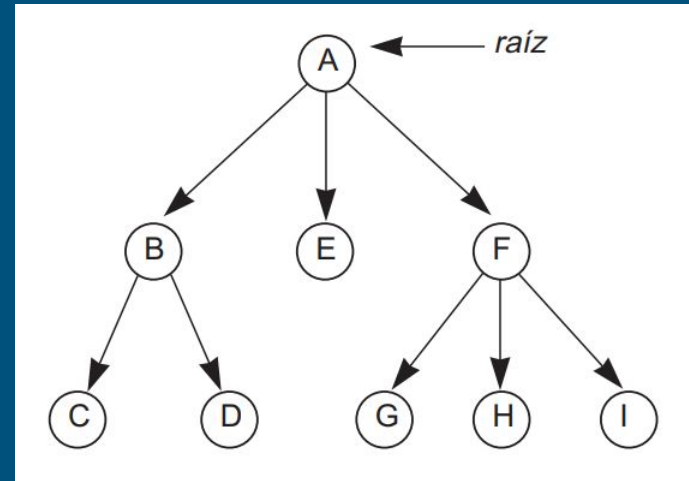
En sistemas específicamente son utilizados para:

- Representar fórmulas algebraicas.
- Sistemas de archivos.
- Organizar objetos de manera que su búsqueda sea eficientes.
- Sistemas con inteligencia artificial.
- Algoritmos de cifrado.
- Procesamiento de texto.

Definición

Intuitivamente podemos hacer algunas apreciaciones a priori:

- Se trata de una estructura jerárquica.
- Compuesta por elementos.
- Donde cada uno tiene un padre.
- Salvo el nodo raíz; que no tiene padre.
- No existen elementos "aislados".



Definición Formal

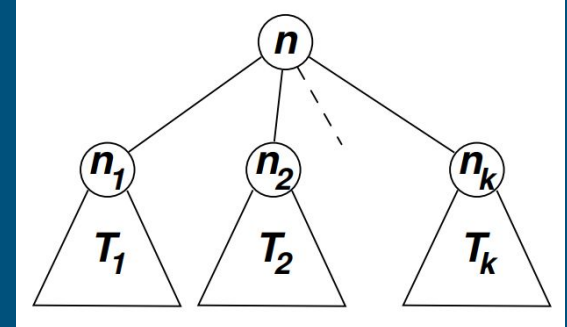
- Un árbol es una colección de elementos llamados “nodos”, uno de los cuales es la “raíz”. Existe una relación de parentesco por la cual cada nodo tiene uno y solo un “padre”, salvo la raíz que no lo tiene.
-

Un árbol es:

- 1- La estructura de datos vacía.
- 2- O bien un conjunto de uno o más nodos tales que:

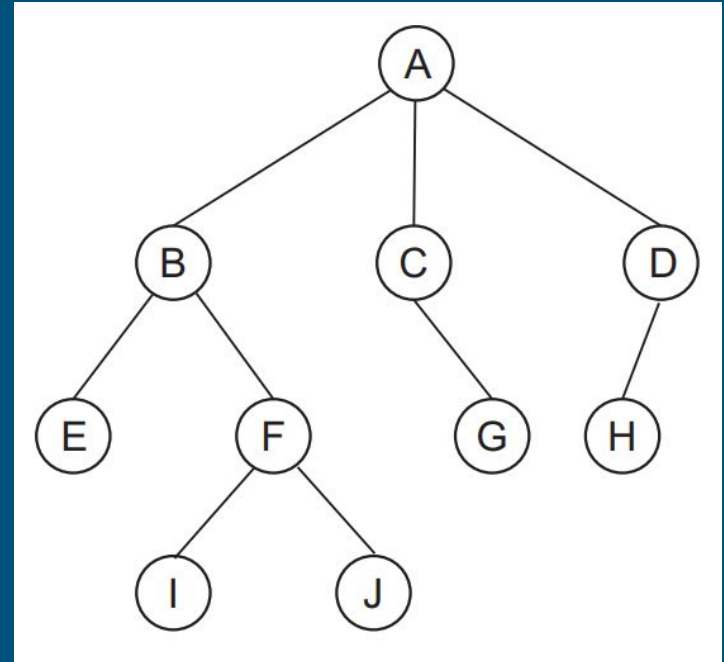
2.1 Hay un nodo especial denominado raíz, que llamaremos n .

2.2 Los nodos restantes se dividen en $k \geq 0$ conjuntos disjuntos, $T_1 \dots T_k$, tal que cada uno de estos es un árbol con raíces $n_1 \dots n_k$. Entonces podemos construir un nuevo árbol que tiene a n como raíz y donde $n_1 \dots n_k$ son “hijos” de n .



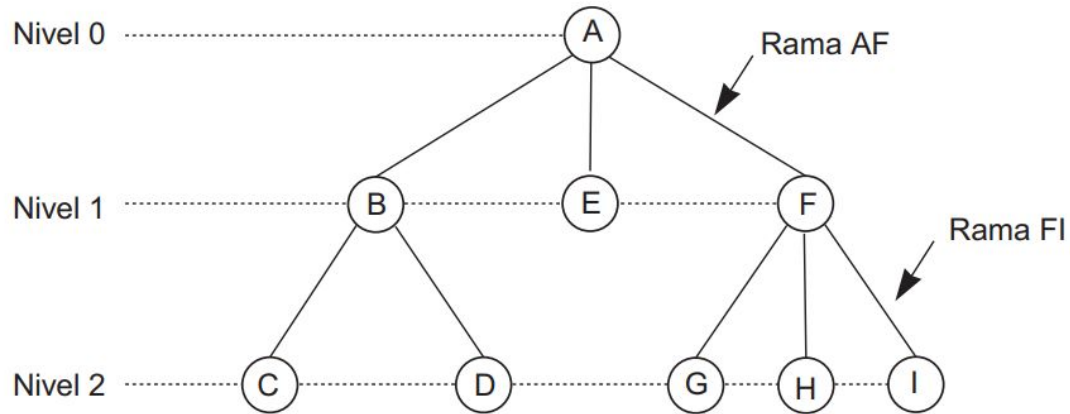
Terminología asociada a los Nodos

- Rama / Arco.
- Nodo Hoja / Terminal.
- Nodo No Hoja / Interno. Nodo Raíz.
- Nodo Padre.
- Nodo Hijo.
- Nodos Hermanos.
- Nodos Descendientes.
- Nodos Ascendentes de.



Propiedades de los Nodos

- **Nodos Adyacentes:** Nodos que están conectados por un arco.
- **Camino entre dos Nodos:** Si n_1, n_2, \dots, n_k es una secuencia de nodos tales que n_i es padre de n_{i+1} para $i = 1 \dots k - 1$, entonces decimos que esta secuencia de nodos es un "camino" ("path").
- **Longitud de Camino:** Número de arcos que contiene un "camino". También, el número de nodos del camino menos uno.
- **Descendientes y antecesores:** Si existe un camino que va del nodo a al b entonces decimos que a es antecesor de b y b es descendiente de a .
- **Altura:** La altura de un nodo en un árbol es la máxima longitud de un camino que va desde el nodo a una hoja.
- **Nivel / Profundidad:** Distancia al nodo raíz. El raíz tiene una distancia cero de sí misma, por ello se dice que el raíz está en el nivel 0. Los hijos del nodo raíz están en el nivel 1, sus hijos están en el nivel 2 y así sucesivamente. Longitud del único camino que va desde el nodo a la raíz.



padres: A, B, F

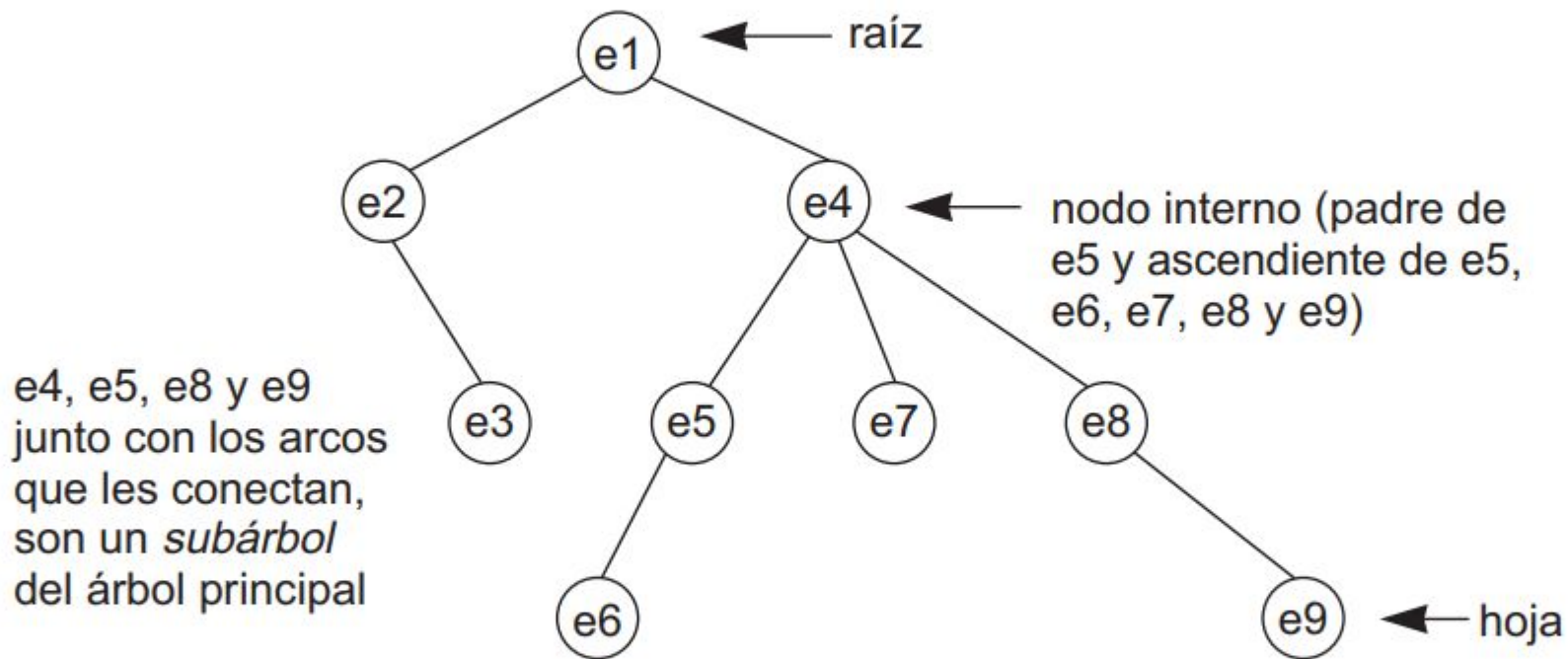
hojas: C, D, E, G, H, I

hijos: B, E, F, C, D, G, H, I,

hermanos: {B, E, F}, {C, D}, {G, H, I}

Sub-Árboles

- Un árbol se divide en subárboles. Un subárbol es cualquier estructura conectada por debajo del raíz. Cada nodo de un árbol es la raíz de un subárbol que se define por el nodo y todos o algunos de los descendientes del mismo.
- El primer nodo de un subárbol se conoce como el raíz del subárbol y se utiliza para nombrar el subárbol.
- **Subárbol Completo:** Sea S_A un subárbol de un árbol A : si para cada nodo n de S_A , S_A contiene también todos los descendientes de n en A . S_A se llama un subárbol completo de A .
- Cuando hablamos de los "subárboles de un nodo" $N1$, hacemos referencia a los subárboles completos que tienen como raíz a cada uno de los nodos hijos de $N1$.

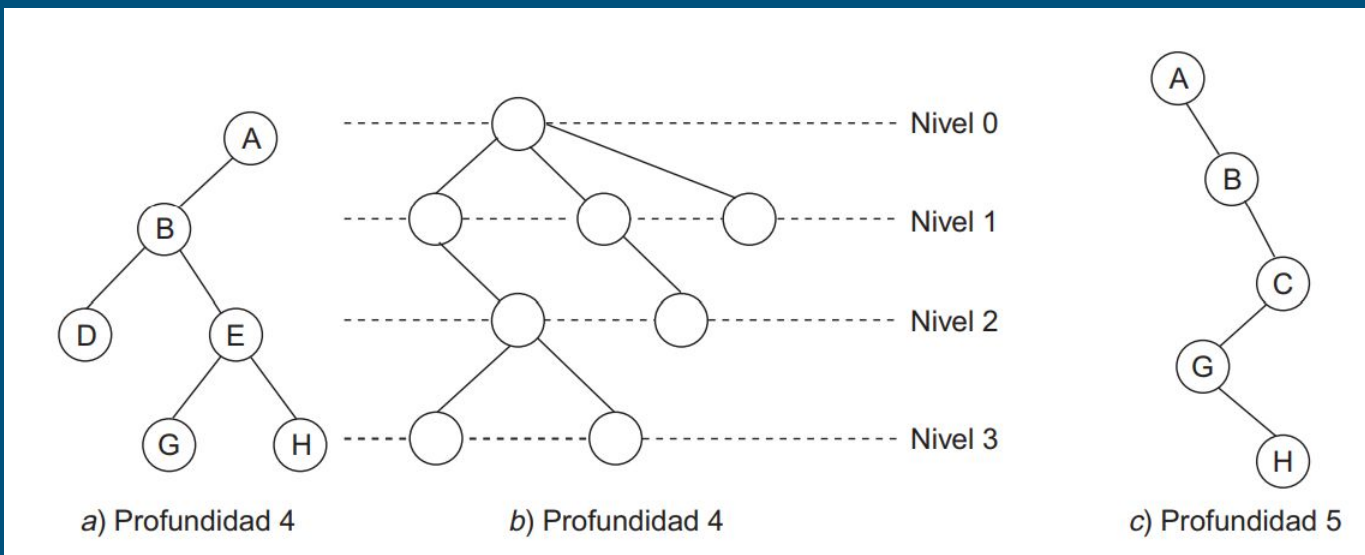


Preguntas

- ¿Puede un árbol tener un nodo que es Hoja y Raíz al mismo tiempo?
- ¿Puede un árbol NO tener hojas?
- ¿Puede un árbol NO tener raíz?
- ¿Los nodos hermanos están siempre al mismo nivel?
- ¿Los nodos que están al mismo nivel son siempre hermanos?
- ¿Puede un árbol tener un nodo que es padre e hijo al mismo tiempo?
- ¿Puede un nodo tener dos padres?
- ¿Puede un nodo tener dos hijos?

Propiedades de los Árboles

- Altura o Profundidad: Nivel de la hoja del camino más largo desde la raíz más uno. Por definición la altura de un árbol vacío es 0.



Propiedades de los Árboles

- **Equilibrado:** Dado un número máximo k de hijos de cada nodo y la altura del árbol h , cada nodo de nivel $l < (h-2)$ tiene exactamente k hijos.
- **Perfectamente Equilibrado / Lleno:**
 - Dado un número máximo k de hijos de cada nodo y la altura del árbol h , cada nodo de nivel $l < h-1$ tiene exactamente k hijos.
 - Dado un grado G , contiene G^n nodos en el nivel n con $n \geq 0$ y $n \leq (\text{altura} - 1)$.
 - El árbol, tiene todos los nodos que puede tener.

Propiedades de los Árboles

- **Balanceado:** Si, y sólo si, en cada nodo, las alturas de sus subárboles difieren a lo máximo en 1.
- **Perfectamente Balanceado:** Si, y sólo si, en cada nodo, las alturas de sus subárboles son iguales.
- **Completo:** Cada nodo tiene la cantidad máxima de hijos que puede tener, o no tiene ninguno.

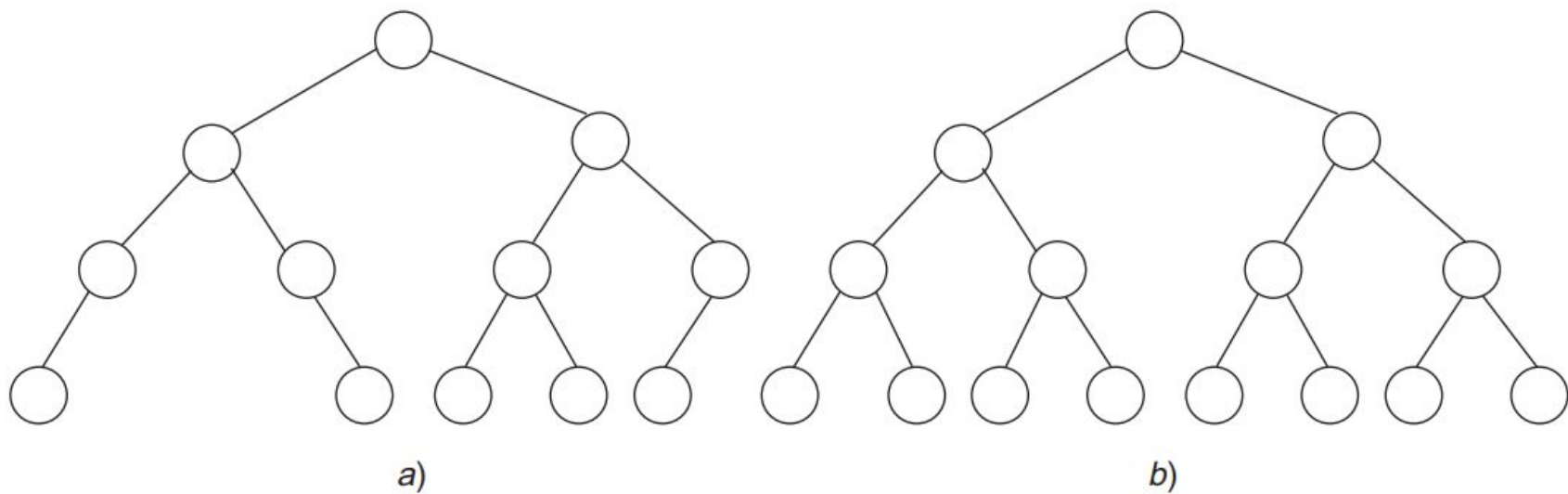


Figura 16.7. a) Un árbol equilibrado; b) Un árbol perfectamente equilibrado.

Algunos números

- En cualquier nivel n , un árbol de grado G puede contener de 1 a G^n nodos.
- En total, un Árbol de grado G y altura A (distinta de 0) puede contener un mínimo de 1 nodo y un máximo de $G^A - 1$ nodos.
- El numero de niveles l , se puede deducir a partir de la cantidad total de nodos:
 - $l + 1 > \log_2 n$
 - $l + 1 > \text{floor}(\log_2 n)$
 - $l \geq \text{floor}(\log_2 n)$

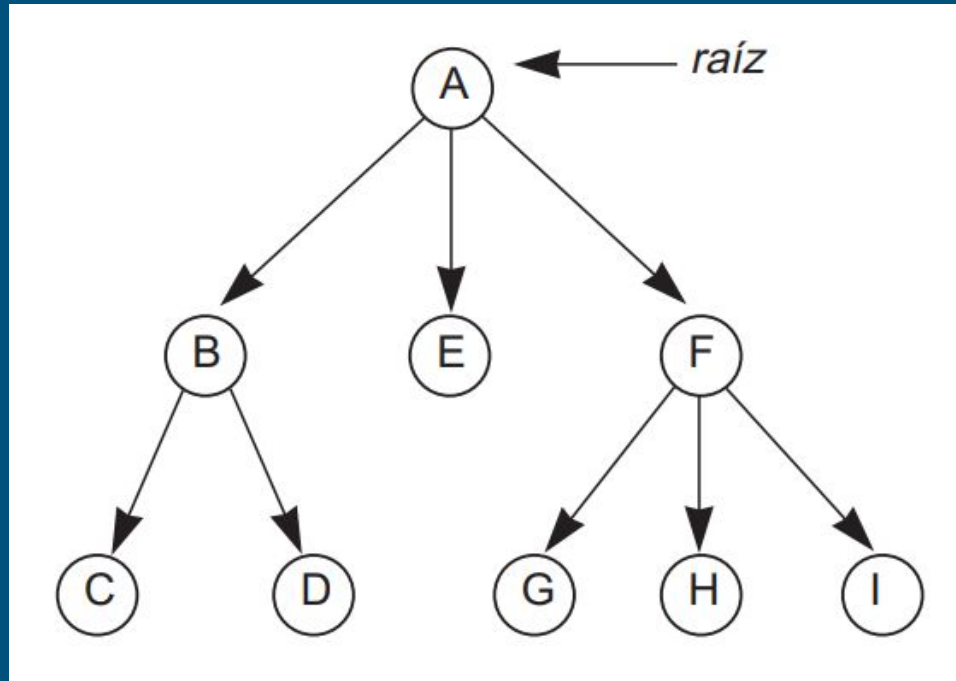
Implementación Computacional de los Árboles

- Árbol Principal Izquierdo.
- Árbol Principal Derecho.

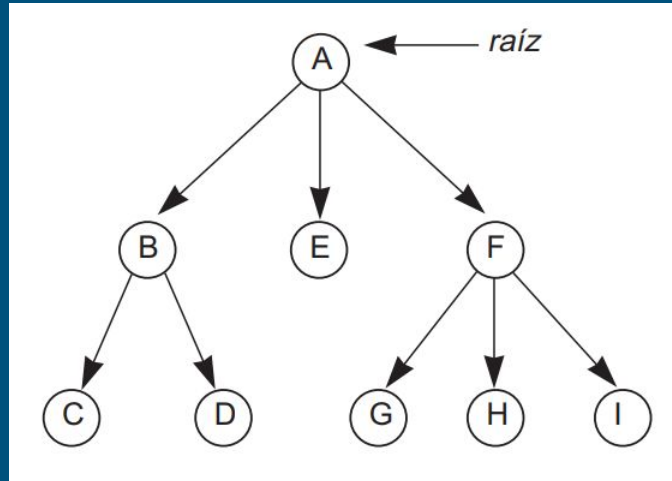
Representación de los Árboles

- Gráficamente / Grafo.
- Paréntesis Anidados / Representación de Lista.
- Sangría / Escalonamiento / Identación.
- Conjuntos Anidados.

Gráficamente / Grafo

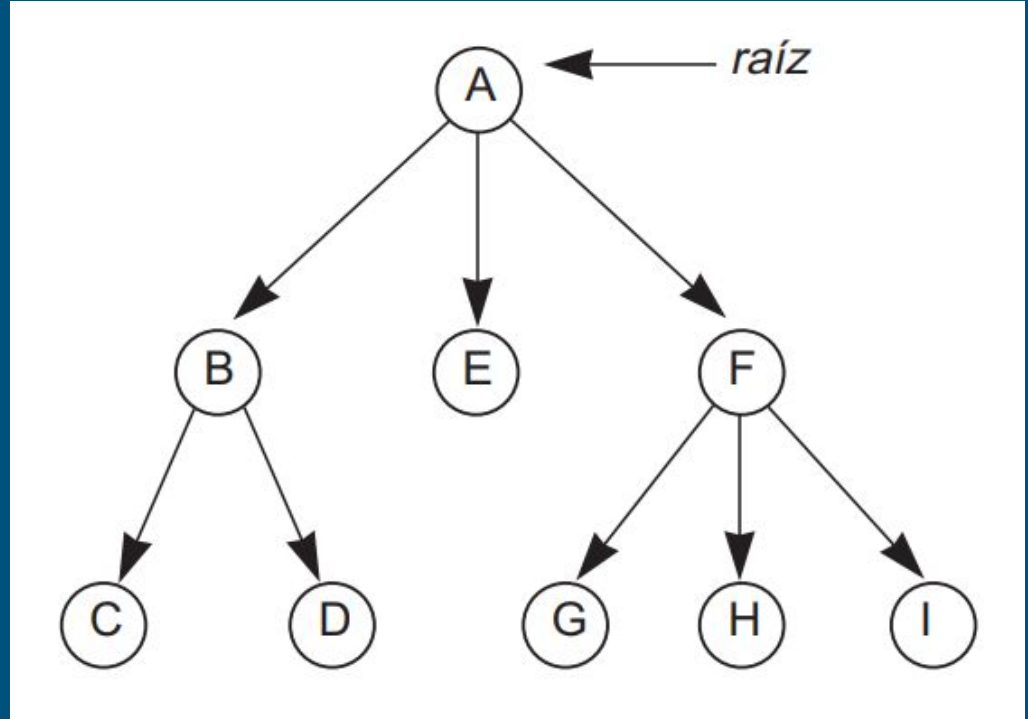


Parentesis Anidados / Representación de Lista

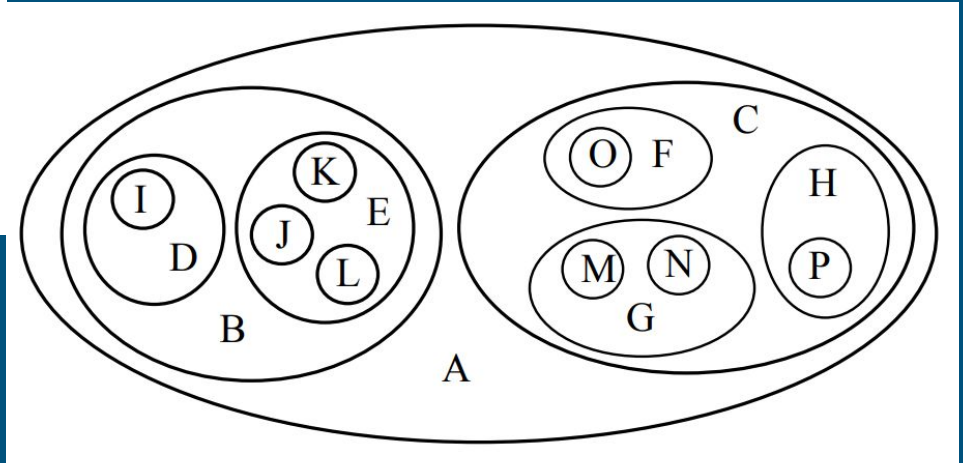
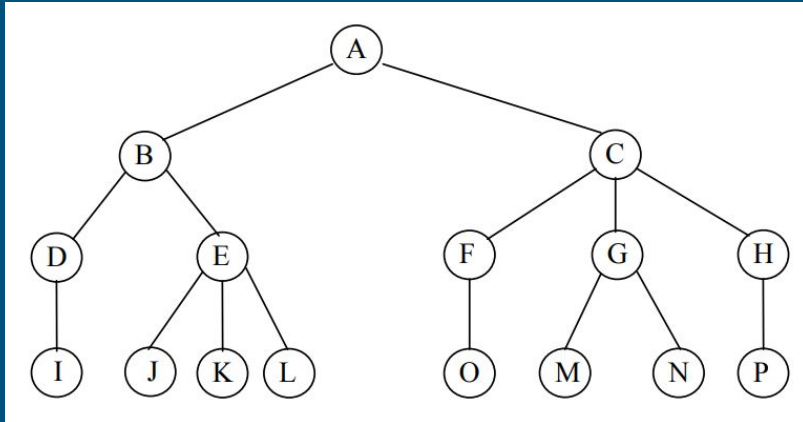


A (B (C, D), E, F (G, H, I))

Sangría / Escalonamiento / Identación



Conjuntos Anidados



Árboles Bi-Narios

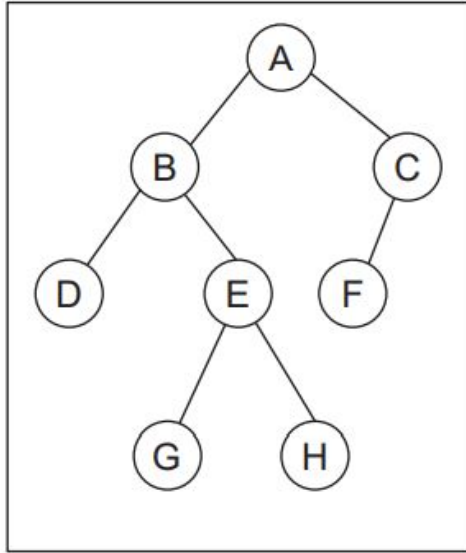
Definición

- Ningún nodo puede tener más de dos subárboles.
- Cada nodo puede tener:
 - Cero
 - Uno
 - Dos

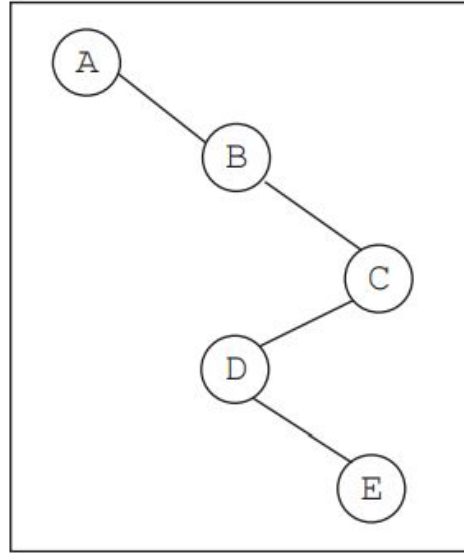
hijos (subárboles).

- Se conoce el nodo de la izquierda como hijo izquierdo y el nodo de la derecha como hijo derecho.

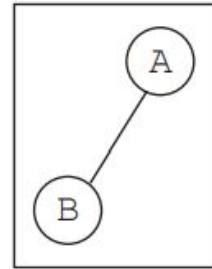
Ejemplos de Árboles Binarios



a)



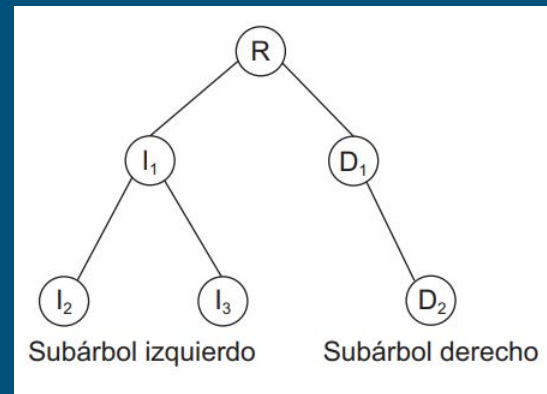
b)



c)

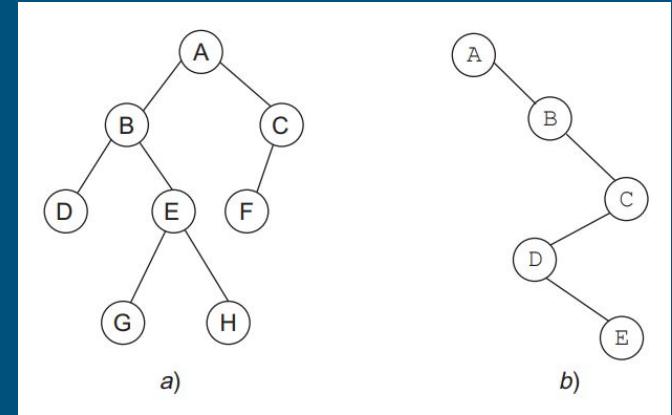
Definición utilizando recursión

- Cada nodo es el raíz de su propio subárbol y tiene hijos, que son raíces de árboles llamados los subárboles derecho e izquierdo del nodo, respectivamente.
- Un árbol binario se divide en tres subconjuntos disjuntos:
 - $\{R\}$ Nodo raíz
 - $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ Subárbol izquierdo de R
 - $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ Subárbol derecho de R



Algunos números

- **Factor de balance:** diferencia en altura entre los subárboles derecho e izquierdo. Si la altura del subárbol izquierdo es h_l y la altura del subárbol derecho como h_D , entonces el factor de balance del árbol B se determina por la siguiente fórmula: $B = h_D - h_l$.



Retomamos un par de definiciones de Árboles

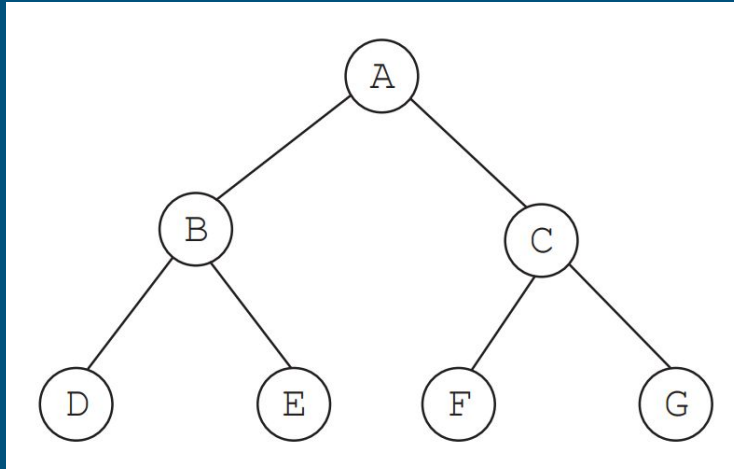
Un árbol binario está perfectamente balanceado si la altura de los subárboles de cada nodo no difiere.

Un árbol binario está balanceado si la altura de los subárboles de cada nodo difiere en no más de uno; por consiguiente, el factor de balance de cada nodo puede tomar los valores: -1 , 0 , $+1$.

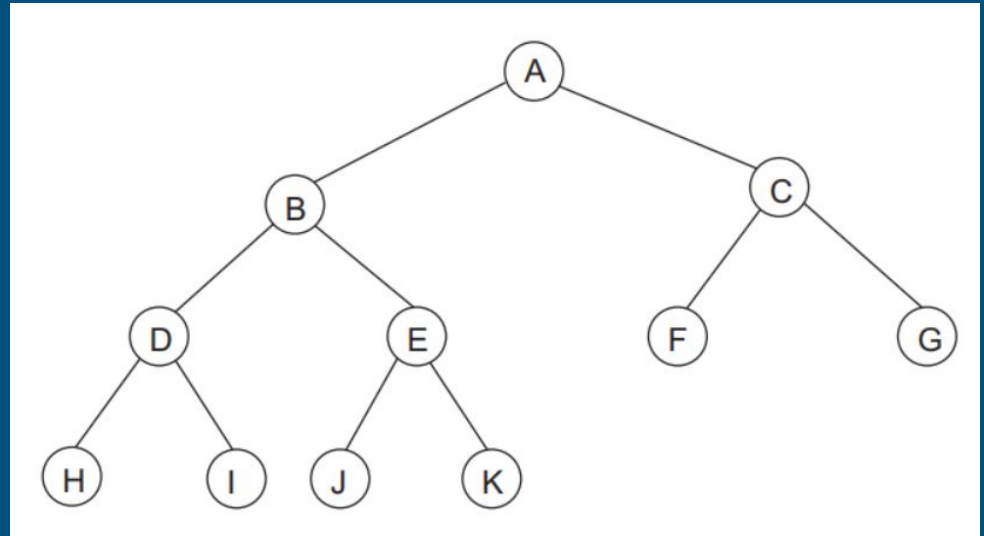
Un árbol binario completo de profundidad n (0 a $n-1$ niveles) es un árbol en el que para cada nivel, del 0 al nivel $n-2$, tiene un conjunto lleno de nodos y todos los nodos hoja a nivel $n-1$ ocupan las posiciones más a la izquierda del árbol.

Un árbol binario completo que contiene 2^n nodos en el nivel n es un árbol lleno.

Arbol Lleno

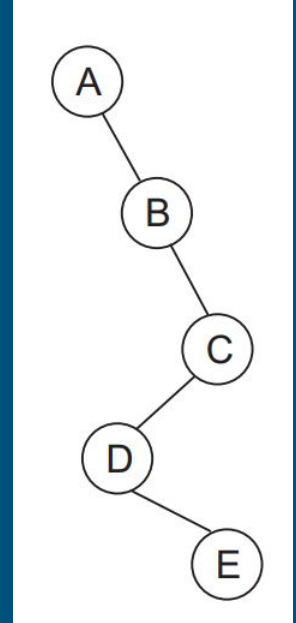


Arbol Completo



Árbol Binario Degenerado

Un árbol binario degenerado es aquel que tiene una sola hoja. Todos los nodos no-hoja tienen un solo hijo.



¿Cómo "recorremos" un árbol
binario?
