Unidad 1: Técnicas de Conteo

Principios básicos

Principio de la suma (o)

SI una actividad se puede construir en t pasos sucesivos y cada paso p puede realizarse de n_p *maneras. El número de actividades posibles diferentes es* $\boldsymbol{n_1 * n_2 * \ldots * n_t}$.

Principio de la multiplicación (y)

Si una primera tarea puede realizarse de m formas y la segunda de n formas y no pueden realizarse en simultáneo, entonces, para hacer cualquiera de ellas hay $\boldsymbol{m+n}$ formas.

Permutación

Una permutación de n elementos diferentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es un ***ordenamiento*** de los n elementos.

Teorema 1

Existen $\boldsymbol{n!}$ permutaciones de n elementos.
Demostración: Una permutación de n elementos se construye en n pasos sucesivos (principio de la mult.): se elige el primer elemento, el segundo, …, el último. El primero se puede seleccionar de n maneras, el segundo de $n - 1$ maneras, el tercero de $n - 2$ maneras, y así sucesivamente.
Entonces:

$$n! = n(n - 1)(n - 2)\ldots(n - i + 1)(n - i)$$

Permutación de r en n ($P_{(n, r)}$)

Una permutación r elementos seleccionados de un conjunto de n elementos diferentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es un ***ordenamiento*** de r elementos de $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
Demostración: El primer elemento se puede elegir de n maneras. Se elige el primer elemento de n maneras, el segundo de $n - 1$. Se continúa hasta llegar al elemento r que se puede seleccionar de $n - r + 1$ maneras. Por el principio de la multiplicación, el número de permutaciones r de un conjunto de n objetos distintos es:

$$P_{(n, r)} = n(n - 1)(n - 2)\ldots(n - r + 1)$$

$$P_{(n, r)} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Combinaciones

Sea un conjunto $X = \{x_1, ..., x_n\}$ con *n* elementos diferentes, una combinación *r* de *X* es una ***selección*** ***<u>no</u> ordenada*** de *r* elementos de *X*.

Teorema 1

El número de combinaciones *r* de un conjunto de *n* objetos distintos es:

$$C_{(n,r)} = \frac{P_{(n,r)}}{r!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\ r \leq n$$

Teorema 2

Una sucesión *S* de *n* artículos tiene n_1 objetos iguales del *tipo 1*, n_2 objetos iguales del *tipo 2*, …, n_t objetos iguales del *tipo t*, donde $n_1 + n_2 + ... + n_t = n_p$. Entonces, el número de ordenamientos de *S* es:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_t!}$$

<u>Demostración:</u> Se asignan posiciones a cada uno de los *n* artículos para crear un ordenamiento de *S*. Se pueden asignar posiciones a los n_1 objetos del tipo 1 de $C_{(n,n_1)}$ maneras. Luego, se pueden asignar posiciones a los n_2 artículos del tipo 2 de $C_{(n-n_1,n_2)}$ maneras, y así sucesivamente. Por el principio de la multiplicación, el número de ordenamiento es:

$$C_{(n,n_1)}\,C_{(n-n_1,n_2)}\,C_{(n-n_1-n_2,n_3)}\ldots C_{(n-n_1-\ldots-n_{t-1},n_t)} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\,\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdots$$
$$\frac{(n-n_1-\ldots-n_{t-1})!}{n_t!0!} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_t!}$$

Combinaciones con repetición

Si *X* es un conjunto que contiene *t* elementos, el número de ***selecciones <u>no</u> ordenadas*** de *k* elementos de *X*, ***con repeticiones***, es:

$$C_{(k+t-1,\,t-1)} = C_{(k+t-1,\,k)}$$

<u>Demostración:</u> Sea $X = \{a_1, ..., a_t\}$. Considerando los *k + t - 1* espacios

$$\_\ \_\ \_\ \cdots\ \_\ \_$$

y *k + t - 1* símbolos que consisten en *k* símbolos *x* y *t - 1* símbolos *z*. Cada colocación de estos símbolos en los espacios determina una selección:

- El número n_1 de *x* hasta encontrar la primera *z* representa la selección $n_1\,a_1$;
- el número n_2 de *x* entre la primera y la segunda *z* representa la selección $n_2\,a_2$;
- y así sucesivamente.

Como hay $C_{(k+t-1,\,t-1)}$ maneras de seleccionar las posiciones para las *z*, también hay $C_{(k+t-1,\,t-1)}$ selecciones. Esto es igual a $C_{(k+t-1,\,k)}$, el número de maneras de seleccionar las posiciones para las *x*; entonces existen:

$$C_{(k+t-1,\,t-1)} = C_{(k+t-1,\,k)}$$

selecciones no ordenadas de *k* elementos de *X*, con repeticiones.

Propiedades

1. $C_{(n,\,0)} = 1 \rightarrow$
2. $C_{(n,\,n)} = 1 \rightarrow$
3. $C_{(n,\,1)} = n \rightarrow$
4. $C_{(n,\,p)} = C_{(n,\,n-p)} \rightarrow$

Coeficientes binomiales e identidades combinatorias

Teorema binomial

Si a y b son variables y n un Z^+:

$$(a + b)^n =$$

En notación sigma: $\sum_{i=0}^{n} C_{(n,\,i)} a^{n-i} b^{i}$

Teorema multinomial

Sean n y t naturales, el coeficiente de $x_1^{n1} x_2^{n2} \ldots x_t^{nt}$ en el desarrollo de:

$(x_1 + x_2 + \ldots + x_t)^n$ es $\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_t!}$

Unidad 2: Lenguaje - Máquinas de estados finitos

Lenguaje

El símbolo Σ representa un conjunto de símbolos finitos *no* vacío llamado ***alfabeto***. Usándolo de base, podemos construir *cadenas* con base a los símbolos de Σ.

Definiciones

DEF. 1: Definición 1: Si Σ es un alfabeto y $n \in Z^{+}$, definimos las POTENCIAS de Z^{+}.

$\Sigma^{1} = \Sigma$ $\quad\quad$ $\Sigma^{n+1} = \{x,\ y\ /\ x \in \Sigma,\ y \in \Sigma^{n}\}$, donde *xy* denota la yuxtaposición de x e y.

DEF. 2: Para cualquier alfabeto Σ definimos $\Sigma^{0} = \{\lambda\}$, donde λ denota la CADENA VACÍA (no consta de ningún símbolo de Σ).

$$|\Sigma|^{0} = |\{\lambda\}| = 1$$

Aunque $\lambda \notin \Sigma,\ \emptyset \in \Sigma$. *E*ntonces, es necesario aclarar que:

- $\lambda\ no\ es\ un\ elemento\ de\ \Sigma$.
- $\{\lambda\} \not\subset \Sigma,\ ya\ que\ \lambda \notin \Sigma$.
- $\{\lambda\} \neq \emptyset,\ ya\ que\ |\{\lambda\}| = 1\ y\ |\emptyset| = 0$.

DEF. 3: Si Σ es cualquier alfabeto:

$$\Sigma^{+} = \bigcup_{n-1}^{\infty} \Sigma^{n} = \bigcup_{n \in Z^{+}} \Sigma^{n} \quad\quad \text{y} \quad\quad \Sigma^{*} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma^{n}$$

Aunque los conjuntos Σ^{+} y Σ^{*}son *infinitos*, los elementos de estos conjuntos son cadenas *finitas* de símbolos.

DEF. 4: Dos cadenas w_1 y w_2 son IGUALES solo cuándo cada una está formada por el mismo número de símbolos de Σ y los símbolos correspondientes en las cadenas coinciden idénticamente. Es decir, si $m = n$ y $xi = yi\ \forall 1 \leq i \leq m$.

DEF. 5: La LONGITUD de w_1 es $||w_1||$. Para $||\lambda|| = 0$.

DEF. 6: La CONCATENACIÓN de $w1$ y $w2$, denotada como $w1w2$, es la cadena $x_1 x_2 ... x_m y_1 y_2 ... y_n$. La concatenación con λ será: $w_1\lambda = w_1,\ \lambda w_1 = w_1\ y\ \lambda\lambda = \lambda$.

DEF. 7: Para cualquier $x \in \Sigma^*$ serán las **POTENCIAS DE X**:
$x^0 = \lambda,\ x^1 = x,\ x^2 = xx,\ \dots,\ x^{n+1} = xx^n\ donde\ n \in N.$

DEF. 8: Si $x,\ y \in \Sigma^*$ y $w = xy$, entonces:

- x es **PREFIJO** de w (**PREFIJO PROPIO** si $y \neq \lambda$)
- y es **SUFIJO** de w (**SUFIJO PROPIO** si $x \neq \lambda$)

DEF. 9: Si $x,\ y,\ z \in \Sigma^*$ y $w = xyz$, entonces y es una **SUBCADENA**. Si $x \neq \lambda$ y $z \neq \lambda$, es una **SUBCADENA PROPIA**.

DEF. 10: Para un alfabeto dado Σ, cualquier subconjunto de Σ^* es un **LENGUAJE** sobre Σ. Esto incluye al subconjunto ∅.

Ya que los lenguajes son conjuntos, podemos formar la unión, intersección y diferencia simétrica de dos lenguajes.

DEF. 11: Para un alfabeto Σ y los lenguajes $A, B \subseteq \Sigma^*$, la **CONCATENACIÓN** de A y B, denotada con AB, es $\{ab | a \in A,\ b \in B\}$.

DEF. 12: Para cualquier lenguaje $A \subseteq \Sigma^*$ podemos **CONSTRUIR OTROS LENGUAJES** de la sgte. manera:

a. $A^0 = \{\lambda\},\ A^1 = A$ y para cualquier $n \in Z^+,\ A^{n+1} = \{ab | a \in A,\ b \in A^n\}$.

b. $A^+ = \bigcup_{n \in Z^+} A^n$, la *clausura positiva de A.*

c. $A^* = A^+ \cup \{\lambda\}$, la *clausura de Kleene de A.*

Teorema 1

Para un alfabeto Σ, sean $A, B, C \subseteq \Sigma^*$. Entonces:

a. $A\{\lambda\} = \{\lambda\}A = A.$
b. $A(B \cup C) = AB \cup AC.$
c. $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC.$
d. $(AB)C = A(BC).$
e. $(B \cup C)A = BA \cup CA.$
f. $(B \cap C)A \subseteq BA \cap C$

Teorema 1

Sea un Σ un alfabeto, con lenguajes $A,\ B \subseteq \Sigma^*$. Si $A \subseteq B$, entonces

$$A^n \subseteq B^n\ \forall\ n \in Z^+$$

Teorema 2

Para un alfabeto Σ y los lenguajes $A,\ B \subseteq \Sigma^*$,

a. $A \subseteq AB^*$
b. $A \subseteq B^*A$
c. $A \subseteq B \rightarrow A^+ \subseteq B^+$
d. $A \subseteq B \rightarrow A^* \subseteq B^*$
e. $AA^* = A^*A = A^+$
f. $A^*A^* = A^* = (A^*)^* = (A^*)^+ = (A^+)^*$
g. $(A \cup B)^* = (A^* \cup B^*)^* = (A^*B^*)^*$

Máquinas de estados finitos

Una ***máquina de estados finitos*** es una 5-upla $\mathcal{M} = (S,\ \mathcal{I},\ \mathcal{O},\ \upsilon,\ \omega)$, donde S es el conjunto de estados internos de $\mathcal{M}$; $\mathcal{I}$ es el alfabeto de entrada de $\mathcal{M}$; $\mathcal{O}$ es el alfabeto de salida de $\mathcal{M}$; υ: $Sx\mathcal{I} \longrightarrow S$ es la *función siguiente estado*; y ω: $Sx\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{O}$ es la *función de salida.*
La salida en el instante t_i es $\omega(s, x)$ y le sigue la transición de la máquina, en el instante t_{i+1}, al siguiente estado interno, dado por $\upsilon(s, x)$.
Es posible representar υ y ω por medio de la *tabla de estados* o *tabla de transición* y visualmente con un *diagrama de estados*.
El SOLAPAMIENTO es el caso en que algunos caracteres en la cadena de entrada son caracteres de más de una salida.

Tipos

Reconocedoras o detectoras

Detectan patrones o secuencias determinadas en respuesta a las entradas recibidas. No proveen acciones de salida, transicionan desde un estado inicial a un estado final de "Éxito".

De retraso

La salida de esta máquina no depende del estado actual inmediato, si no de los estados alcanzados con un ***retraso de k pasos*** respecto a la entrada, donde $k \in Z^{+}$. La salida en el instante t depende del estado alcanzado en el instante $t - k$.

Definiciones

DEF. 1: Sea $\mathcal{M} = (S,\ \mathcal{I},\ \mathcal{O},\ \upsilon,\ \omega)$ una máquina de estados finitos.

a. Para $s_i, s_j \in S$, decimos que s_j ***se puede alcanzar desde*** s_i si $s_i = s_j$ o si existe una cadena de entrada $x \in \mathcal{I}^{*}$ tal que $\upsilon(s_i, x) = s_j$.

b. Un estado $s \in S$ es ***transitorio*** si $\upsilon(s, x) = s$ para $x \in \mathcal{I}^{*}$ implica $x = \lambda$; es decir, no existe $x \in \mathcal{I}^{+}$ tal que $\upsilon(s, x) = s$.

c. Un estado $s \in S$ es ***sumidero*** si $\upsilon(s, x) = s\ \forall\ x \in \mathcal{I}^{*}$.

d. Sea $S_1 \subseteq S$, $\mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}$. Si $\upsilon_1 = \upsilon|_{S_1 x \mathcal{I}_1} : S_1 x\, \mathcal{I}_1 \longrightarrow S_1$, entonces con $\omega_1 = \omega|_{S_1 x \mathcal{I}_1}$, $\mathcal{M}_1 = (S_1,\ \mathcal{I}_1,\ \mathcal{O}_1,\ \upsilon_1,\ \omega_1)$ es una ***submáquina*** de $\mathcal{M}$.

e. Una máquina es ***fuertemente conexa*** si para cualesquiera estados $s_i, s_j \in S$, podemos alcanzar s_j desde s_i.

DEF. 2: Para una máquina de estados finitos $\mathcal{M}$, sean s_i, s_j dos estados distintos en S. La cadena de entrada más corta $x \in \mathcal{I}^{+}$ es una ***secuencia de transferencia (o transición)*** desde s_i a s_j si:

a. $\upsilon(s_i, x) = s_j$, y

b. $y \in \mathcal{I}^{+}$ con $\upsilon(s_i, y) = s_j \Rightarrow ||y|| \geq ||x||$