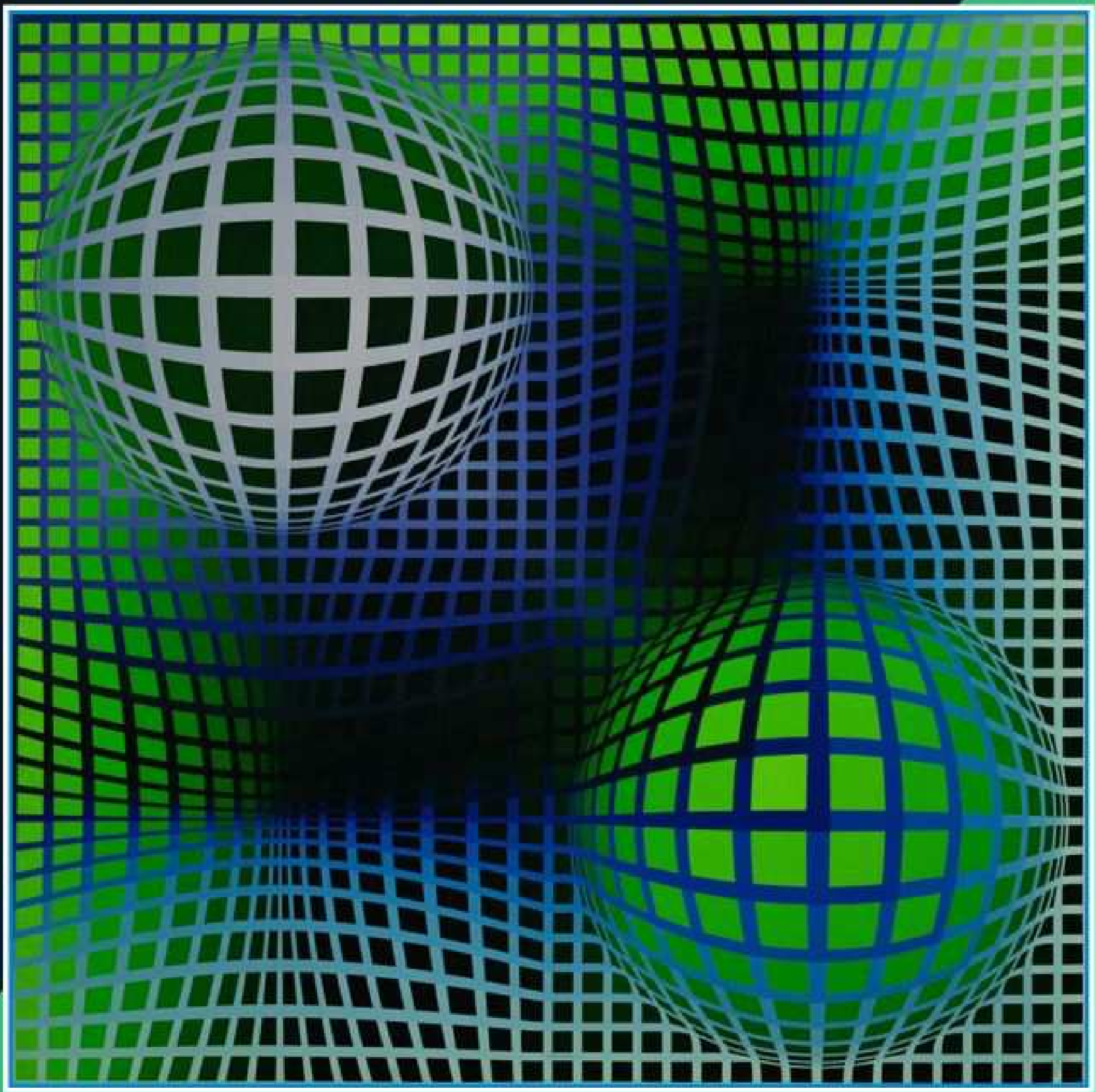
MATEMÁTICAS DISCRETAS

Sexta edición



PEARSON
Prentice Hall

Richard Johnsonbaugh

LISTA DE SÍMBOLOS

LÓGICA

$p \vee q$	p o q; p. 2
$p \wedge q$	p y q; p. 2
$\neg p$	no p; p. 5
$p \rightarrow q$	si p, entonces q; p. 8
$p \leftrightarrow q$	p si y sólo si q; p. 12
$P \equiv Q$	P y Q son lógicamente equivalentes; p. 12
$\forall$	para todo; p. 19
$\exists$	existe; p. 22
$\backslash$	por lo tanto; p. 43

NOTACIÓN DE CONJUNTOS

$\{x_1,\ldots, x_n\}$	conjunto que consta de los elementos $x_1,\ldots, x_n$; p. 76
$\{x \mid p(x)\}$	conjunto de los elementos x que satisfacen la propiedad $p(x)$; p. 77
$x \in X$	x es un elemento de X; p. 77
$x \notin X$	x no es un elemento de X; p. 77
$X = Y$	igualdad de conjuntos (X y Y tienen los mismos elementos); p. 77
$\lvert X \rvert$	número de elementos en X; p. 77
$\emptyset$	conjunto vacío; p. 77
$X \subseteq Y$	X es un subconjunto de Y; p. 77
$X \subset Y$	X es un subconjunto propio de Y; p. 79
$\mathcal{P}(X)$	conjunto potencia de X (todos los subconjuntos de X); p. 79
$X \cup Y$	X unión Y (todos los elementos en X o Y); p. 80
$\bigcup_{i=1}^{n} X_i$	unión de $X_1,\ldots, X_n$ (todos los elementos que pertenecen al menos a un conjunto de $X_1,\ldots, X_n$); p. 83
$\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$	unión de $X_1, X_2,\ldots$ (todos los elementos que pertenecen al menos a uno de $X_1, X_2,\ldots$); p. 83
$\cup\mathcal{S}$	unión de $\mathcal{S}$ (todos los elementos que pertenecen al menos a un conjunto en $\mathcal{S}$); p. 83
$X \cap Y$	X intersección Y (todos los elementos en X y Y); p. 80
$\bigcap_{i=1}^{n} X_i$	intersección de $X_1,\ldots, X_n$ (todos los elementos que pertenecen a todos los conjuntos $X_1, X_2,\ldots, X_n$); p. 83
$\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$	intersección de $X_1, X_2,\ldots$ (todos los elementos que pertenecen a todos los conjuntos $X_1, X_2,\ldots$); p. 83
$\cap\mathcal{S}$	intersección de $\mathcal{S}$ (todos los elementos que pertenecen a todos los conjuntos de $\mathcal{S}$); p. 83
$X - Y$	diferencia de conjuntos (todos los elementos en X pero no en Y); p. 80
$\overline{X}$	complemento de X (todos los elementos que no están en X); p. 80
(x, y)	par ordenado; p. 83
$(x_1,\ldots, x_n)$	n-eada; p. 84
$X \times Y$	producto cartesiano de X y Y [pares (x, y) con x en X y y en Y]; p. 83

Relaciones

$x\,R\,y$	(x, y) está en R (x está relacionada con y mediante la relación R); p. 117
$[x]$	clase de equivalencia que contiene a x; p. 127
R^{-1}	relación inversa [todo (x, y) que está en R]; p. 122
$R_2 \circ R_1$	composición de relaciones; p. 122
$x \preceq y$	$x\,R\,y$; p. 121

Funciones

$f(x)$	valor asignado a x; p. 88
$f\colon X \to Y$	función de X a Y; p. 87
$f \circ g$	composición de f y g; p. 97
f^{-1}	función inversa [todo (y, x) con (x, y) que está en f]; p. 96
$f(n) = O(g(n))$	$\lvert f(n)\rvert \le C\lvert g(n)\rvert$ para n suficientemente grande; p. 158
$f(n) = \Omega(g(n))$	$c\lvert g(n)\rvert \le \lvert f(n)\rvert$ para n suficientemente grande;p. 158
$f(n) = \Theta(g(n))$	$c\lvert g(n)\rvert \le \lvert f(n)\rvert \le C\lvert g(n)\rvert$ para n suficientemente grande; p. 158

Conteo

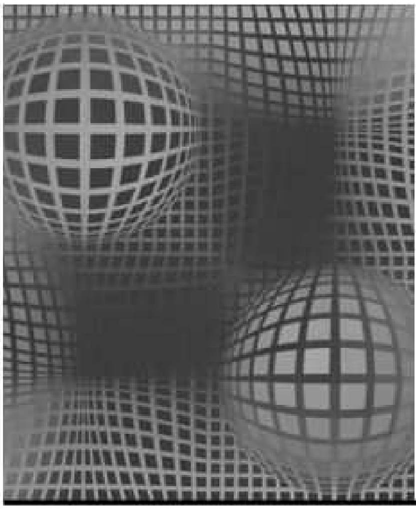
$C(n, r)$	número de combinaciones r de un conjunto de n elementos $(n!/[(n-r)!r!])$; p. 232
$P(n, r)$	número de permutaciones r de un conjunto de n elementos $[n(n-1)\cdots(n-r+1)]$; p. 231

Gráficas

$G = (V, E)$	gráfica G con conjunto de vértices V y conjunto de aristas E; p. 320
(v, w)	arista; p. 320
$\delta(v)$	grado del vértice v; p. 333
$(v_1, \ldots, v_n)$	trayectoria de v_1 a v_n; p. 330
$(v_1, \ldots, v_n),\ v_1 = v_n$	ciclo; p. 332
K_n	gráfica completa en n vértices; p. 325
$K_{m,n}$	gráfica completa bipartita en m y n vértices; p. 326
$w(i, j)$	peso de la arista (i, j); p. 347
F_{ij}	flujo en la arista (i, j); p. 445
C_{ij}	capacidad de la arista (i, j); p. 445
$(P, \overline{P})$	cortadura en una red; p. 457

Probabilidad

$P(x)$	probabilidad del resultado x; p. 250
$P(E)$	probabilidad del evento E; p. 251
$P(E\mid F)$	probabilidad condicional de E dado F $[P(E \cap F)/P(F)]$; p. 255



Capítulo 6

MÉTODOS DE CONTEO Y EL PRINCIPIO DEL PALOMAR

Existe sólo un número dado de manos en una baraja.

DE SHANE

En muchos problemas discretos nos enfrentamos al problema de contar. Por ejemplo, en la sección 4.3 se vio que para estimar el tiempo de corrida de un algoritmo, era necesario contar el número de veces que se ejecutaban ciertos pasos o ciclos. Contar, también tiene un papel crucial en la teoría de probabilidad. En virtud de la importancia del conteo, se ha desarrollado una variedad de ayudas útiles, algunas bastante elaboradas. En este capítulo se desarrollan varias técnicas para contar. Dichas técnicas resultan útiles para derivar el teorema del binomio. El capítulo concluye con un análisis del principio del palomar, que con frecuencia permite probar la existencia de un objeto con ciertas propiedades.

6.1 → Principios básicos

WWW

El menú de Comida Rápida de Kay se muestra en la figura 6.1.1. Como se observa, contiene dos entremeses, tres platos fuertes y cuatro bebidas. ¿Cuántas comidas diferentes están formadas por un plato fuerte y una bebida?

Si se listan todas las comidas posibles que consisten en un plato fuerte y una bebida,

$$HT,\ HM,\ HC,\ HR,\ CT,\ CM,\ CC,\ CR,\ FT,\ FM,\ FC,\ FR,$$

se ve que existen 12 comidas diferentes. (La comida que consiste en un plato fuerte cuya primera letra es X y una bebida cuya primera letra es Y se denota por XY. Por ejemplo, CR se refiere a una comida que consiste en carne asada y raspado de sabor). Observe que se tienen tres platos fuertes y cuatro bebidas, lo que da $12 = 3 \cdot 4$.

† Estas secciones se pueden omitir sin pérdida de continuidad.

ENTREMÉS

Nachos	2.15
Salami especial	1.90

PLATO FUERTE

Hamburguesa	3.25
Carne asada	3.65
Filete de pescado	3.15

BEBIDAS

Té	.70
Malteada	.85
Cola	.75
Refresco de sabor	.75

Figura 6.1.1 Comida Rápida de Kay.

Existen 24 comidas posibles de un entremés, un plato fuerte y una bebida.

NHT, NHM, NHC, NHR, NCT, NCM, NCC, NCR,
NFT, NFM, NFC, NFR, SHT, SHM, SHC, SHR,
SCT, SCM, SCC, SCR, SFT, SFM, SFC, SFR.

(La comida que consiste en un entremés cuya primera letra es X, un plato fuerte cuya primera letra es Y y una bebida cuya primera letra es Z se denota por XYZ). Observe que se ofrecen dos entremeses, tres platos fuertes y cuatro bebidas, y que $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$.

En cada uno de estos ejemplos se encuentra que el número total de comidas es igual al producto de los números de cada categoría. Estos ejemplos ilustran el **principio de la multiplicación**.

Principio de la multiplicación

Si una actividad se puede construir en t pasos sucesivos y el paso 1 *se puede hacer de* n_1 *maneras, el paso 2 se puede realizar de* n_2 *maneras, . . . , y el paso t de* n_t *maneras, entonces el número de actividades posibles diferentes es* $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdot \cdot n_t$.

En el problema de contar el número de comidas que consisten en un plato fuerte y una bebida, el primer paso es "seleccionar el plato fuerte" y el segundo paso es "seleccionar la bebida". Así, $n_1 = 3$ y $n_2 = 4$ y, por el principio de la multiplicación, el número total de comidas es $3 \cdot 4 = 12$. La figura 6.1.2. muestra por qué se multiplica 3 por 4; se tienen tres grupos de cuatro objetos,

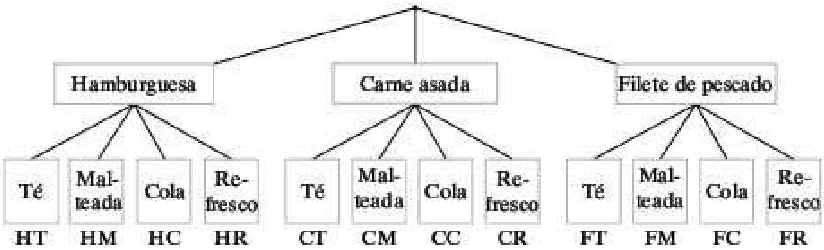


Figura 6.1.2 Ilustración del principio de la multiplicación.

En resumen, el principio de la multiplicación afirma que, cuando una actividad se construye en pasos sucesivos, se multiplican los números de maneras de realizar cada paso.

Ejemplo 6.1.1 ▶

¿Cuántas comidas de un plato fuerte y una bebida *opcional* están disponibles en Comida Rápida de Kay?

Una comida consistente en un plato fuerte y una bebida opcional se forma mediante un proceso de dos pasos. El primer paso es "seleccionar el plato fuerte" y el segundo es "seleccionar una bebida opcional". Existen $n_1 = 3$ maneras de seleccionar el plato fuerte (hamburguesa, carne asada, filete de pescado) y $n_2 = 5$ maneras de seleccionar la bebida opcional (té, malteada, cola, refresco, ninguno). Por el principio de la multiplicación, existen $3 \cdot 5 = 15$ comidas. Como confirmación, he aquí una lista de las 15 comidas (N = sin bebida):

HT, HM, HC, HR, HN, CT, CM, CC, CR, CN, FT, FM, FC, FR, FN. ◀

Ejemplo 6.1.2 ▶

Virus Melissa

A fines de los 90, un virus de computadora llamado Melissa causó estragos al acabar con los recursos del sistema. El virus se esparció por un correo electrónico que contenía un archivo adjunto de procesador de texto con un macro maligno. Cuando se abría el documento, el macro reenviaba el mensaje junto con el archivo del documento a las primeras 50 direcciones obtenidas de la libreta de direcciones del usuario. Cuando se recibían estas copias y se abrían, el macro de nuevo reenviaba el mensaje por correo electrónico y el documento de procesador de textos, y así sucesivamente. El virus causó problemas creando mensajes más rápido de lo que podían enviarse. Los mensajes listos para enviarse se almacenaban temporalmente en un disco. Si el disco se llenaba, el sistema podía caer en bloqueo permanente (congelarse o lo que se conoce habitualmente como "inhibirse") o incluso descomponerse.

Después de que el virus enviaba el correo a las primeras 50 direcciones, cada uno de esos receptores enviaba entonces el correo a 50 direcciones. Por el principio de la multiplicación, se tenían $50 \cdot 50 = 2500$ receptores más. Cada uno de ellos enviaba el correo a 50 direcciones. De nuevo, por el principio de la multiplicación, ahora había $50 \cdot 50 \cdot 50 = 125{,}000$ receptores adicionales. Después de más iteraciones, habría $50 \cdot 50 \cdot 50 \cdot 50 = 6{,}250{,}000$ receptores adicionales. Así, después de sólo cuatro iteraciones se habían enviado

$$6{,}250{,}000 + 125{,}000 + 2500 + 50 + 1 = 6{,}377{,}551$$

copias del mensaje. ◀

Ejemplo 6.1.3 ▶

a) ¿Cuántas cadenas de longitud 4 se pueden formar usando las letras *ABCDE* si no se aceptan repeticiones?
b) ¿Cuántas cadenas del inciso *a)* comienzan con la letra *B*?
c) ¿Cuántas cadenas del inciso *a)* no comienzan con la letra *B*?

a) Se usa el principio de la multiplicación. Una cadena de longitud 4 se construye en cuatro pasos sucesivos: se elige la primera letra; se elige la segunda; se elige la tercera; y se elige la cuarta letra. La primera letra se puede seleccionar de cinco maneras. Una vez elegida la primera letra, la segunda se puede elegir de cuatro maneras. Cuando se elige la segunda letra, la tercera se puede elegir de tres maneras. Una vez seleccionada la tercera letra, la cuarta se puede seleccionar de dos maneras. Por el principio de la multiplicación, existen

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$$

cadenas.

b) Las cadenas que comienzan con la letra *B* se pueden construir en cuatro pasos sucesivos: se elige la primera, la segunda, la tercera y la cuarta letra. La primera letra (*B*) se puede escoger de una manera, la segunda letra de cuatro maneras, la tercera de tres maneras y la cuarta de dos. Entonces, por el principio de la multiplicación, existen

$$1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

cadenas que comienzan con la letra B.

c) El inciso *a)* muestra que existen 120 cadenas de longitud 4 que se pueden formar usando las letras $ABCDE$, y el inciso *b)* prueba que 24 de ellas comienzan con la letra B. Se deduce que existen

$$120 - 24 = 96$$

cadenas que no comienzan con la letra B. ◀

Ejemplo 6.1.4 ▶

En una fotografía digital, deseamos codificar la cantidad de luz en cada punto como una cadena de ocho bits. ¿Cuántos valores son posibles en un punto?

Una codificación de ocho bits se puede construir en ocho pasos sucesivos: se selecciona el primer bit; el segundo bit; . . . ; el octavo bit. Como hay dos maneras de elegir cada bit, por el principio de la multiplicación, el número total de codificaciones de ocho bits es

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256.$$ ◀

Se dará una prueba usando el principio de la multiplicación de que un conjunto con n elementos tiene 2^n subconjuntos. Con anterioridad, se dio una prueba de este resultado usando inducción matemática (Teorema 2.1.6).

Ejemplo 6.1.5 ▶

Use el principio de la multiplicación para demostrar que un conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de n elementos tiene 2^n subconjuntos.

Un subconjunto se construye en n pasos sucesivos: se elige o no se elige x_1; se elige o no x_2; . . . ; se elige o no x_n. Cada paso se puede realizar de dos maneras. Entonces, el número de subconjuntos posibles es

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n \text{ factores}} = 2^n.$$ ◀

Ejemplo 6.1.6 ▶

Sea X un conjunto de n elementos. ¿Cuántos pares ordenados (A, B) satisfacen $A \subseteq B \subseteq X$?

Se tiene un par ordenado (A, B) que satisface $A \subseteq B \subseteq X$; se ve que cada elemento en X está exactamente en uno de A, $B - A$ o en $X - B$. Inversamente, si se asigna cada elemento de X a uno de los tres conjuntos A (y, por suposición, también a B y a X), $B - A$ (y, por suposición, también a X), o a $X - B$, se obtiene un par ordenado único (A, B) que satisface $A \subseteq B \subseteq X$. Entonces el número de pares ordenados (A, B) que satisfacen $A \subseteq B \subseteq X$ es igual al número de maneras para asignar a los elementos de X a los tres conjuntos A, $B - A$ y $X - B$. Se pueden hacer tales asignaciones mediante el siguiente proceso de n pasos: se asigna el primer elemento de X a uno de A, $B - A$, $X - B$; se asigna el segundo elemento de X a uno de A, $B - A$, $X - B$; . . . ; se asigna el n-ésimo elemento de X a uno de A, $B - A$, $X - B$. Como cada paso se puede hacer de tres maneras, el número de pares ordenados (A, B) que satisfacen $A \subseteq B \subseteq X$ es

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdots 3}_{n \text{ factores}} = 3^n.$$ ◀

Ahora se ilustrará el principio de la suma mediante un ejemplo y después se presentará el principio.

Ejemplo 6.1.7 ▶

¿Cuántas cadenas de ocho bits comienzan con 101 o con 111?

Una cadena de ocho bits que comienza con 101 se puede construir en cinco pasos sucesivos: se selecciona el cuarto bit; se selecciona el quinto bit; . . . ; se selecciona el octavo bit. Como cada uno de los cinco bits se puede seleccionar de dos maneras, por el principio de la multiplicación, existen

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$$

cadenas de ocho bits que comienzan con 101. El mismo argumento se utiliza para mostrar que existen 32 cadenas de ocho bits que comienzan con 111. Como hay 32 cadenas de 8 bits que comienzan con 101 y 32 cadenas de 8 bits que comienzan con 111, existen $32 + 32 = 64$ cadenas de 8 bits que comienzan con 101 o 111. ◀

En el ejemplo 6.1.7 se sumaron los números de cadenas de 8 bits (32 y 32) de cada tipo para determinar el resultado final. El **principio de la suma** dice cuándo sumar para calcular el número total de posibilidades.

Principio de la suma

Suponga que $X_1, \ldots, X_t$ son conjuntos y que el i-ésimo conjunto X_i tiene n_i elementos. Si $\{X_1, \ldots, X_t\}$ es una familia de conjuntos ajenos por pares (es decir, si $i \neq j$, $X_i \cap X_j = \emptyset$), el número de elementos posibles que se puede seleccionar de X_1 o X_2 o . . . o X_t es

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_t.$$

(De manera equivalente, la unión $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_t$ contiene $n_1 + n_2 + \cdots + n_t$ elementos).

En el ejemplo 6.1.7, X_1 podría denotar el conjunto de cadenas de 8 bits que comienzan con 101 y X_2 el conjunto de cadenas de 8 bits que comienzan con 111. Como X_1 es ajeno a X_2, de acuerdo con el principio de la suma, el número de cadenas de 8 bits de cualquier tipo, que es el número de elementos en $X_1 \cup X_2$, es $32 + 32 = 64$.

El principio de la suma se resume diciendo que se suma el número de elementos en cada subconjunto cuando es posible descomponer los elementos que se cuentan en subconjuntos ajenos.

Si se trata de contar objetos que se construyen en pasos sucesivos, se usa el principio de la multiplicación. Si se tienen conjuntos ajenos de objetos y se desea saber el número total de objetos, se usa el principio de la suma. Es importante reconocer cuándo aplicar cada principio. Esta habilidad se adquiere con la práctica y el análisis cuidadoso de cada problema.

Esta sección termina con ejemplos que ilustran ambos principios de conteo.

Ejemplo 6.1.8 ▶

¿De cuántas maneras se pueden seleccionar dos libros de temas diferentes entre cinco libros de computación distintos, tres libros de matemáticas diferentes y dos libros de arte distintos?

Mediante el principio de la multiplicación, se encuentra que podemos seleccionar dos libros, uno de computación y uno de matemáticas, de $5 \cdot 3 = 15$ maneras. De forma similar, podemos seleccionar dos libros, uno de computación y uno de arte, de $5 \cdot 2 = 10$ maneras, y podemos seleccionar dos libros, uno de matemáticas y uno de arte, de $3 \cdot 2 = 6$ maneras. Como estos conjuntos de selecciones son ajenas por pares, podemos usar el principio de la suma para concluir que existen

$$15 + 10 + 6 = 31$$

maneras de seleccionar dos libros con temas diferentes entre los libros de computación, matemáticas y arte. ◀

Ejemplo 6.1.9 ▶

Un comité de seis personas, compuesto por Alicia, Benjamín, Consuelo, Adolfo, Eduardo y Francisco, debe seleccionar un presidente, secretario y tesorero.

a) ¿De cuántas maneras pueden hacer esto?

b) ¿De cuántas maneras pueden hacerlo si Alicia o Benjamín debe ser el presidente?

c) ¿De cuántas maneras pueden hacerlo si Eduardo debe ocupar uno de los puestos?

d) ¿De cuántas maneras pueden hacerlo si tanto Adolfo como Francisco deben ocupar un puesto?

a) Se usa el principio de la multiplicación. Se selecciona a los directivos en tres pasos sucesivos: se elige el presidente, se elige el secretario, se elige el tesorero. El presidente se puede elegir de seis maneras. Una vez elegido, el secretario se puede elegir de cinco maneras. Después de elegir al presidente y el secretario, el tesorero se puede seleccionar de cuatro maneras. Por lo tanto, el número total de posibilidades es

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

b) Con un argumento como el del inciso *a)*, si Alicia es presidente, se tienen $5 \cdot 4 = 20$ maneras de seleccionar los puestos restantes. De igual manera, si Benjamín es presidente, existen 20 maneras de seleccionar los puestos restantes. Como estos casos son ajenos, por el principio de la suma, existen

$$20 + 20 = 40$$

posibilidades.

c) [Primera solución] Con un argumento como el del inciso *a)*, si Eduardo es presidente, se tienen 20 maneras de elegir los puestos restantes. De forma similar, si Eduardo es secretario, hay 20 posibilidades, y si Eduardo es tesorero, se tienen 20 posibilidades. Como estos tres casos son ajenos por pares, por el principio de la suma se tienen

$$20 + 20 + 20 = 60$$

posibilidades.

[Segunda solución] Considere que la actividad de asignar a Eduardo y otros dos para los puestos está compuesta por tres pasos sucesivos: asignar a Eduardo a un puesto, asignar el puesto más alto que queda, asignar el último puesto. Existen tres maneras de asignar a Eduardo a un puesto. Una vez asignado, existen cinco maneras de asignar el puesto más alto que queda. Una vez asignados estos dos puestos, hay cuatro maneras de asignar el último puesto. Por el principio de la multiplicación, existen

$$3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$$

posibilidades.

d) Considere que la actividad de asignar a Adolfo, Francisco y otra persona a los puestos se compone de tres pasos sucesivos: asignar a Adolfo, a Francisco y el puesto que queda. Existen tres maneras de asignar a Adolfo. Una vez asignado, hay dos maneras de asignar a Francisco. Una vez asignados Adolfo y Francisco, hay cuatro maneras de asignar el último puesto. Por el principio de la multiplicación, existen

$$3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$$

posibilidades. ◀

Sugerencias para resolver problemas

La clave para resolver problemas en esta sección es determinar cuándo usar el principio de la multiplicación y cuándo el principio de la suma. Utilice el principio de la multiplicación cuando tenga un proceso paso por paso para *construir una actividad.* Por ejemplo, para diseñar una comida del menú de Comida Rápida de Kay (figura 6.1.1) que consista en un entremés, un plato fuerte y una bebida, se requiere un proceso de tres pasos:

1. Elegir un entremés.
2. Elegir un plato fuerte.
3. Elegir una bebida.

El número de actividades diferentes posibles es el producto del número de maneras en que se puede realizar cada paso. En este caso, el entremés se puede seleccionar de 2 maneras, un plato fuerte de 3 maneras y una bebida de 4 maneras. Entonces, el número de comidas es $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Utilice el principio de la suma cuando desee contar el número de elementos en un conjunto y pueda dividir el conjunto en subconjuntos que no se traslapan. Suponga, por ejemplo, que se desea contar el número total de artículos disponibles en Comida Rápida de Kay. Como hay 2 entremeses, 3 platos fuertes y 4 bebidas, y ningún artículo pertenece a dos categorías, el número total de artículos disponibles es

$$2 + 3 + 4 = 9.$$

Observe la diferencia entre los dos ejemplos. Para construir una comida compuesta de un entremés, un plato fuerte y una bebida en Comida Rápida de Kay se usa un proceso paso por paso. El tamaño del conjunto de comidas *no* se cuenta dividiendo el conjunto en subconjuntos que no se traslapen. Para contar el número de comidas se usa el principio de la multiplicación. Para contar el número de artículos disponibles en el restaurante de Kay, sólo se suma el número de artículos en cada categoría ya que las categorías son una división natural en subconjuntos que no se traslapan. *No* estamos contando los artículos individuales disponibles usando un proceso paso por paso. Para contar el número total de artículos disponibles, se usa el principio de la adición.

Sección de ejercicios de repaso

1. Enuncie el principio de la multiplicación y dé un ejemplo de su aplicación.

2. Enuncie el principio de la adición y dé un ejemplo de su aplicación.

Ejercicios

Encuentre el número de comidas en Comida Rápida de Kay (figura 6.1.1) que satisfacen las condiciones de los ejercicios 1 al 3.

1. Un entremés y una bebida

2. Un entremés, un plato fuerte y una bebida opcional

3. Un entremés opcional, un plato fuerte y una bebida opcional

4. Un hombre tiene ocho camisas, cuatro pantalones y cinco pares de zapatos. ¿Cuántos atuendos diferentes son posibles?

5. Las opciones disponibles en un modelo específico de automóvil son cinco colores para el interior, seis colores de exterior, dos tipos de asientos, tres tipos de motor y tres tipos de radio. ¿De cuántas posibilidades diferentes dispone el cliente?

6. El sistema Braille para representar caracteres fue desarrollado a principios del siglo IX por Louis Braille. Los caracteres especiales para el invidente consisten en puntos en relieve. Las posiciones para los puntos se seleccionan en dos columnas verticales de tres puntos cada una. Debe haber al menos un punto en relieve. ¿Cuántos caracteres distintos de Braille puede haber?

7. Comente la siguiente nota del *New York Times*:

> Las camionetas de carga también llaman la atención por el aparente número infinito de maneras de personalizarlas; se necesitan las habilidades matemáticas de Will Hunting para obtener el total de configuraciones. Para comenzar, hay 32 combinaciones de cabinas (estándar, cabina club, cuadrángulo), cajas de carga (6.5 u 8 pies) y motores (3.9 litros V6, 5.2 litros V8, 5.9 litros V8, 5.9 litros V8, 5.9 litros turbo diesel alineado 6, 8 litros V10).

En los ejercicios 8 al 16, se lanzan dos dados, uno azul y otro rojo.

8. ¿Cuántos resultados posibles hay?

9. ¿Cuántos resultados suman 4?

10. ¿Cuantos resultados son dobles? (Un doble ocurre cuando los dos dados muestran el mismo número).

11. ¿Cuántos resultados suman 7 u 11?

12. ¿En cuántos resultados el dado azul muestra 2?

13. ¿En cuántos resultados exactamente un dado muestra 2?

14. ¿Cuántos resultados tienen al menos un dado que muestra 2?

15. ¿En cuántos resultados ningún dado muestra 2?

16. ¿Cuántos resultados dan una suma par?

En los ejercicios 17 al 19, suponga que existen 10 caminos de Oz a Media Tierra y 5 de Media Tierra a la Isla de la Fantasía.

17. ¿Cuántas rutas hay de Oz a la Isla de la Fantasía que pasan por Media Tierra?

18. ¿Cuántos viajes redondos de la forma Oz-Media Tierra-Isla de la Fantasía-Media Tierra-Oz hay?

19. ¿Cuántos viajes redondos de la forma Oz-Media Tierra-Isla de la Fantasía-Media Tierra-Oz hay donde en el viaje de regreso no se invierte la ruta original de Oz a la Isla de la Fantasía?

20. ¿Cuántas placas de automóvil se puede hacer que contengan tres letras seguidas de dos dígitos y si se permite que haya repeticiones? Y ¿si no hay repeticiones?

21. ¿Cuántas cadenas de 8 bits comienzan con 1100?

22. ¿Cuántas cadenas de 8 bits comienzan y terminan con 1?

23. ¿Cuántas cadenas de 8 bits tienen 1 en el segundo o el cuarto bit (o en ambos)?

24. ¿Cuántas cadenas de 8 bits tienen exactamente un 1?

25. ¿Cuántas cadenas de 8 bits tienen exactamente dos unos?

26. ¿Cuántas cadenas de 8 bits tienen al menos un 1?

27. ¿Cuántas cadenas de 8 bits se leen igual al derecho y al revés? (Un ejemplo de tal cadena es 01111110. Estas cadenas se llaman *palíndromos*).

En los ejercicios 28 al 33, un comité de seis personas compuesto por Alicia, Benjamín, Consuelo, Adolfo, Eduardo y Francisco debe elegir un presidente, secretario y tesorero.

28. ¿Cuántas selecciones excluyen a Consuelo?

29. ¿Cuántas selecciones existen en las que ni Benjamín ni Francisco tienen un puesto?

30. ¿Cuántas selecciones existen en las que tanto Benjamín como Francisco tienen un puesto?

31. ¿Cuántas selecciones hay con Adolfo en un puesto y Francisco no?

32. ¿Cuántas selecciones hay que tengan a Adolfo como presidente o que no incluyan a Adolfo?

33. ¿Cuántas selecciones hay donde Benjamín sea presidente o tesorero?

En los ejercicios 34 al 41, las letras ABCDE deben usarse para formar cadenas de longitud 3.

34. ¿Cuántas cadenas se pueden formar si se permiten repeticiones?

35. ¿Cuántas cadenas se pueden formar si no se permiten repeticiones?

36. ¿Cuántas cadenas comienzan con A, cuando hay repeticiones?

37. ¿Cuántas cadenas comienzan con A, si no hay repeticiones?

38. ¿Cuántas cadenas no contienen a la letra A cuando se permiten repeticiones?

39. ¿Cuántas cadenas no contienen a la letra A si no hay repeticiones?

40. ¿Cuántas cadenas contienen a la letra A, si se permiten repeticiones?

41. ¿Cuántas cadenas contienen a la letra A si no se permiten repeticiones?

Los ejercicios 42 al 52 se refieren a los enteros entre 5 y 200, inclusive.

42. ¿Cuántos números hay?

43. ¿Cuántos son pares?

44. ¿Cuántos son impares?

45. ¿Cuántos son divisibles entre 5?

46. ¿Cuántos son mayores que 72?

47. ¿Cuántos consisten en dígitos diferentes?

48. ¿Cuántos contienen el dígito 7?

49. ¿Cuántos no contienen el dígito 0?

50. ¿Cuántos son mayores que 101 y no contienen el dígito 6?

51. ¿Cuántos tienen dígitos en orden estrictamente creciente? (Por ejemplo, 13, 147, 8.)

52. ¿Cuántos son de la forma *xyz*, donde $0 \neq x < y$ y $y > z$?

53. *a)* ¿De cuántas maneras pueden ser diferentes los meses en que cumplen años cinco personas?

b) ¿Cuántas posibilidades hay para los meses de los cumpleaños de cinco personas?

c) ¿De cuántas maneras pueden por lo menos dos personas entre cinco tener su cumpleaños en el mismo mes?

Los ejercicios 54 al 58 se refieren a un conjunto de cinco libros de computación, tres de matemáticas y dos de arte, todos diferentes.

54. ¿De cuántas maneras pueden arreglarse estos libros en una repisa?

55. ¿De cuántas maneras pueden arreglarse éstos en una repisa si los cinco libros de computación van a la izquierda y los dos de arte a la derecha?

56. ¿De cuántas maneras se pueden arreglar estos libros en una repisa si los cinco de computación van a la izquierda?

57. ¿De cuántas maneras se pueden arreglar estos libros en una repisa si se agrupan todos los libros de la misma disciplina?

★ **58.** ¿De cuántas maneras se pueden arreglar estos libros en una repisa si los dos libros de arte no quedan juntos?

59. En algunas versiones de FORTRAN, un identificador consiste en una cadena de uno a seis caracteres alfanuméricos que comienza con una letra. (Un carácter alfanumérico es una letra de la A a la Z o un dígito del 0 al 9). ¿Cuántos identificadores válidos de FORTRAN existen?

60. Si X es un conjunto de n elementos y Y es un conjunto de m elementos, ¿cuántas funciones existen de X a Y?

★ **61.** Existen 10 copias de un libro y una copia de cada uno de otros 10 libros. ¿De cuántas maneras se pueden elegir 10 libros?

62. ¿Cuántos términos hay en la expansión de

$$(x + y)(a + b + c)(e + f + g)(h + i)?$$

★ **63.** ¿Cuántos subconjuntos de un conjunto de $(2n + 1)$ elementos tienen n elementos o menos?

64. ¿Cuántas relaciones antisimétricas existen en un conjunto de n elementos?

65. Si X y Y no son subconjuntos ajenos, no se puede sumar $|X|$ a $|Y|$ para calcular el número de elementos en $X \cup Y$. Pruebe que

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

para conjuntos arbitrarios X y Y.

Use el resultado del ejercicio 65 para resolver los ejercicios 66 al 70.

66. ¿Cuántas cadenas de 8 bits comienzan con 100 o el cuarto bit es 1?

67. ¿Cuántas cadenas de 8 bits comienzan con 1 o terminan con 1?

En los ejercicios 68 y 69, un comité de seis personas constituido por Alicia, Benjamín, Consuelo, Adolfo, Eduardo y Francisco debe seleccionar un presidente, secretario y tesorero.

68. ¿Cuántas selecciones existen en las que Benjamín es presidente o Alicia es secretaria?

69. ¿Cuántas selecciones existen en las que Consuelo es presidente o Alicia tiene un puesto?

70. Se lanzan dos dados, uno azul y otro rojo. ¿Cuántos resultados tienen un 3 en el dado azul o una suma par?

71. ¿Cuántos operadores binarios hay en $\{1, 2, \ldots, n\}$?

72. ¿Cuántos operadores binarios conmutativos hay en $\{1, 2, \ldots, n\}$?

Rincón de solución de problemas — Conteo

Problema

Encuentre el número de triadas ordenadas de conjuntos X_1, X_2, X_3 que satisfacen

$$X_1 \cup X_2 \cup X_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$
$$\text{y} \quad X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset.$$

Por *triada ordenada*, se entiende que se toma en cuenta el orden de los conjuntos X_1, X_2, X_3. Por ejemplo, las triadas

$$\{1, 2, 3\},\quad \{1, 4, 8\},\quad \{2, 5, 6, 7\}$$

y

$$\{1, 4, 8\},\quad \{1, 2, 3\},\quad \{2, 5, 6, 7\}$$

se consideran diferentes.

Cómo atacar el problema

Sería bueno comenzar por numerar las triadas, pero hay tantas que sería difícil lograr un panorama general observando unas cuantas de ellas. Se simplificará el problema sustituyendo

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

por $\{1\}$. ¿Qué puede ser más sencillo que $\{1\}$? (Bueno, quizá $\emptyset$, ¡pero es demasiado sencillo!). Ahora se pueden numerar todas la triadas ordenadas de conjuntos X_1, X_2, X_3 que satisfacen $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = \{1\}$ y $X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset$. Debemos poner un 1 en al menos uno de los conjuntos X_1, X_2, X_3 (para que la unión sea $\{1\}$), pero no debemos poner un 1 en los tres conjuntos X_1, X_2, X_3 (de otra manera, la intersección no sería vacía). Así, 1 estará en exactamente uno o dos de los conjuntos X_1, X_2, X_3. La lista completa de triadas ordenadas es la siguiente:

$$X_1 = \{1\},\quad X_2 = \emptyset,\quad X_3 = \emptyset;$$
$$X_1 = \emptyset,\quad X_2 = \{1\},\quad X_3 = \emptyset;$$
$$X_1 = \emptyset,\quad X_2 = \emptyset,\quad X_3 = \{1\};$$
$$X_1 = \{1\},\quad X_2 = \{1\},\quad X_3 = \emptyset;$$
$$X_1 = \{1\},\quad X_2 = \emptyset,\quad X_3 = \{1\};$$
$$X_1 = \emptyset,\quad X_2 = \{1\},\quad X_3 = \{1\}.$$

Entonces existen seis triadas ordenadas de conjuntos X_1, X_2, X_3 que satisfacen

$$X_1 \cup X_2 \cup X_3 = \{1\} \qquad \text{y} \qquad X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset.$$

Si subimos un nivel y numeramos todas las triadas ordenadas de conjuntos X_1, X_2, X_3 que satisfacen $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = \{1, 2\}$ y $X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset$. Como antes, debemos poner un 1 en al menos uno de los conjuntos X_1, X_2, X_3 (para que el 1 esté en la unión), pero no en los tres conjuntos X_1, X_2, X_3 (ya que la intersección no estaría vacía). Esta vez también debemos poner un 2 en al menos uno de los conjuntos X_1, X_2, X_3 (para que el 2 esté en la unión), pero no debemos poner un 2 en los tres conjuntos X_1, X_2, X_3 (ya que la intersección no estaría vacía). Entonces, cada uno de los elementos 1 y 2 estará justo en uno o dos de los conjuntos X_1, X_2, X_3. Se numeran los conjuntos de manera sistemática para reconocer algún patrón que aparezca. La lista completa de triadas ordenadas se muestra en la tabla que sigue. Por ejemplo, el elemento arriba a la izquierda, X_1 X_1, especifica que hay un 1 en X_1 y un 2 en X_1; por lo tanto, este elemento da la triada ordenada

$$X_1 = \{1, 2\},\quad X_2 = \emptyset,\quad X_3 = \emptyset.$$

Como se muestra, existen 36 triadas ordenadas de conjuntos X_1, X_2, X_3 que satisfacen

$$X_1 \cup X_2 \cup X_3 = \{1, 2\}$$
$$\text{y} \quad X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset.$$

Se ve que hay seis maneras de asignar el 1 a los conjuntos X_1, X_2, X_3, lo que explica seis líneas por bloque. De manera similar, existen seis maneras de asignar un 2 a los conjuntos X_1, X_2, X_3, lo que explica seis bloques.

Antes de seguir leyendo, ¿adivina cuántas triadas ordenadas de conjuntos X_1, X_2, X_3 satisfacen

$$X_1 \cup X_2 \cup X_3 = \{1, 2, 3\}$$
$$\text{y} \quad X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset.$$

1 está en	*2 está en*	*1 está en*	*2 está en*	*1 está en*	*2 está en*
X_1	X_1	X_1	X_2	X_1	X_3
X_2	X_1	X_2	X_2	X_2	X_3
X_3	X_1	X_3	X_2	X_3	X_3
X_1, X_2	X_1	X_1, X_2	X_2	X_1, X_2	X_3
X_1, X_3	X_1	X_1, X_3	X_2	X_1, X_3	X_3
X_2, X_3	X_1	X_2, X_3	X_2	X_2, X_3	X_3
X_1	X_1, X_2	X_1	X_1, X_3	X_1	X_2, X_3
X_2	X_1, X_2	X_2	X_1, X_3	X_2	X_2, X_3
X_2	X_1, X_2	X_3	X_1, X_3	X_3	X_2, X_3
X_1, X_2	X_1, X_2	X_1, X_2	X_1, X_3	X_1, X_2	X_2, X_3
X_1, X_3	X_1, X_2	X_1, X_3	X_1, X_3	X_1, X_3	X_2, X_3
X_2, X_3	X_1, X_2	X_2, X_3	X_1, X_3	X_2, X_3	X_2, X_3

Surge un patrón. Si $X = \{1,2, \ldots, n\}$, existen seis maneras de asignar cada uno de $1, 2, \ldots, n$ a los conjuntos X_1, X_2, X_3. Por el principio de la multiplicación, el número de triadas ordenadas es 6^n.

Cómo encontrar otra solución

Se acaba de encontrar una solución al problema comenzando con un problema más sencillo y después descubriendo y justificando el patrón que surge.

Otro enfoque consiste en buscar un problema similar e imitar su solución. El problema del ejemplo 6.1.6 es similar al que se tiene, pues también es un problema de conteo que se refiere a conjuntos:

> Sea X un conjunto de n elementos. ¿Cuántos pares ordenados (A, B) satisfacen $A \subseteq B \subseteq X$?

(En este punto, sería una buena idea regresar y leer el ejemplo 6.1.6.) La solución a que se llega en el ejemplo 6.1.6 cuenta el número de maneras para asignar elementos de X a exactamente uno de los conjuntos A, $B - A$ o $X - B$.

Podemos resolver nuestro problema tomando un enfoque parecido. Cada elemento de X está exactamente en uno de

$$\overline{X_1} \cap X_2 \cap X_3, \quad X_1 \cap \overline{X_2} \cap X_3, \quad X_1 \cap X_2 \cap \overline{X_3},$$
$$\overline{X_1} \cap \overline{X_2} \cap X_3, \quad \overline{X_1} \cap X_2 \cap \overline{X_3}, \quad X_1 \cap \overline{X_2} \cap \overline{X_3}.$$

Como cada miembro de X se puede asignar a uno de estos conjuntos de seis maneras, por el principio de la multiplicación, el número de triadas ordenadas es 6^8.

Observe que aunque este enfoque para resolver el problema es diferente que el de la sección anterior, el argumento final es en esencia el mismo.

Solución formal

Cada elemento en X está exactamente en uno de

$$Y_1 = \overline{X_1} \cap X_2 \cap X_3, \quad Y_2 = X_1 \cap \overline{X_2} \cap X_3,$$
$$Y_3 = X_1 \cap X_2 \cap \overline{X_3}, \quad Y_4 = \overline{X_1} \cap \overline{X_2} \cap X_3,$$
$$Y_5 = \overline{X_1} \cap X_2 \cap \overline{X_3}, \quad Y_6 = X_1 \cap \overline{X_2} \cap \overline{X_3}.$$

Se puede construir una triada ordenada mediante el siguiente proceso de ocho pasos: se elige j, $1 \le j \le 6$ y se pone 1 en Y_j; se elige j, $1 \le j \le 6$ y se pone 2 en Y_j; $\ldots$; se elige j, $1 \le j \le 6$ y se pone 8 en Y_j. Por ejemplo, para construir una triada

$$\{1, 2, 3\}, \quad \{1, 4, 8\}, \quad \{2, 5, 6, 7\},$$

primero se elige $j = 3$ y se pone 1 en $Y_3 = X_1 \cap X_2 \cap \overline{X_3}$. Después se selecciona $j = 2$ y se pone 2 en $Y_2 = X_1 \cap \overline{X_2} \cap X_3$. Las opciones restantes para j son $j = 6, 5, 4, 4, 4, 5$.

Cada selección para j se puede hacer de seis maneras. Por el principio de la multiplicación, el número de triadas ordenadas es

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^8 = 1,679,616.$$

Resumen de la técnica de solución de problemas

- Sustituir el problema por un problema más sencillo. Una manera de hacerlo es reducir el tamaño del problema original.
- Numerar directamente los elementos que se van a contar.
- Numerar los elementos de manera sistemática para que surjan patrones.
- Buscar patrones.
- Buscar un problema similar e imitar su solución.

6.2 ➜ Permutaciones y combinaciones

WWW

Hay cuatro candidatos, Samuel, Ignacio, Héctor y Vilma, postulados para el mismo puesto. Para que la posición de los nombres en las boletas de votación no influya en los votantes, es necesario imprimir boletas con los nombres en todos los órdenes posibles. ¿Cuántas boletas diferentes habrá?

Se puede usar el principio de la multiplicación. Una boleta se elabora en cuatro pasos sucesivos: se selecciona el primer nombre de la lista; se selecciona el segundo nombre; se selecciona el tercero; y se selecciona el cuarto nombre de la lista. El primer nombre se puede elegir de cuatro maneras. Una vez elegido el primer nombre, el segundo se puede seleccionar de tres maneras. Cuando se tiene el segundo nombre, el tercero se puede elegir de dos maneras y el cuarto sólo de una manera. Por el principio de la multiplicación, el número de boletas diferentes es

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Un ordenamiento de los objetos, como los nombres en las boletas, se llama **permutación**.

Definición 6.2.1 ▶ *Una permutación de n elementos diferentes $x_1, \ldots, x_n$ es un ordenamiento de los n elementos $x_1, \ldots, x_n$.* ◀

Ejemplo 6.2.2 ▶

Existen seis permutaciones de tres elementos. Si se denotan los elementos por A, B, C, las seis permutaciones son

$$ABC, \quad ACB, \quad BAC, \quad BCA, \quad CAB, \quad CBA. \qquad \blacktriangleleft$$

Se encontró que existen 24 maneras de ordenar cuatro candidatos en una boleta; así, hay 24 permutaciones de cuatro objetos. El método que se usó para contar el número de boletas diferentes con cuatro nombres se puede usar para derivar una fórmula para el número de permutaciones de n elementos.

La demostración del siguiente teorema para $n = 4$ se ilustra en la figura 6.2.1.

B	→	A	→	D	→	C
Elegir el 1er elemento		Elegir el 2o elemento		Elegir el 3er elemento		Elegir el 4o elemento

Figura 6.2.1 Prueba del teorema 6.2.3 para $n = 4$. Una permutación de *ABCD* se construye con la elección sucesiva del primer elemento, después el segundo elemento, luego el tercero y por último el cuarto.

Teorema 6.2.3

Existen n! permutaciones de n elementos.

Demostración Se usa el principio de la multiplicación. Una permutación de n elementos se construye en n pasos sucesivos: se elige el primer elemento; se elige el segundo elemento; . . . ; se elige el último elemento. El primer elemento se puede seleccionar de n maneras. Una vez elegido, el segundo elemento se puede seleccionar de $n - 1$ maneras. Una vez elegido, el tercer elemento se puede seleccionar de $n - 2$ maneras, y así sucesivamente. Por el principio de la multiplicación, existen

$$n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = n!$$

permutaciones de n elementos.

Ejemplo 6.2.4 ▶

Existen

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3{,}628{,}800$$

permutaciones de 10 elementos. ◀

Ejemplo 6.2.5 ▶

¿Cuántas permutaciones de las letras *ABCDEF* contienen la subcadena *DEF*?

Para garantizar la presencia del patrón *DEF* en la subcadena, estas tres letras deben estar juntas en este orden. Las letras restantes, A, B y C, se pueden colocar de forma arbitraria. Podemos pensar en construir permutaciones de las letras *ABCDEF* que contengan el patrón *DEF* con la permutación de cuatro fichas: una con la etiqueta *DEF* y las otras con etiquetas A, B y C (figura 6.2.2). Por el Teorema 6.2.3, existen 4! permutaciones de cuatro objetos. Entonces, el número de permutaciones de las letras *ABCDEF* que contienen la subcadena *DEF* es

$$4! = 24. \qquad \blacktriangleleft$$

DEF	*A*	*B*	*C*

Figura 6.2.2 Cuatro fichas para permutar.

Ejemplo 6.2.6 ▶

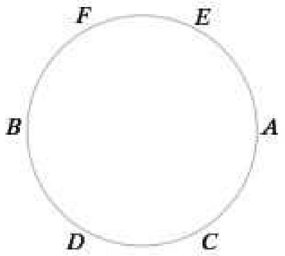
¿Cuántas permutaciones de las letras *ABCDEF* contienen a las letras *DEF* juntas en cualquier orden?

Este problema se resuelve mediante un procedimiento de dos pasos: se selecciona un orden de las letras *DEF*; se construye una permutación de *ABCDEF* que contenga el orden dado de las letras *DEF*. Por el Teorema 6.2.3, el primer paso se puede realizar de $3! = 6$ maneras y, de acuerdo con el ejemplo 6.2.5, el segundo paso se puede realizar de 24 maneras. Por el principio de la multiplicación, el número de permutaciones de las letras *ABCDEF* que contienen las letras *DEF* juntas en cualquier orden es

$$6 \cdot 24 = 144.$$ ◀

Ejemplo 6.2.7 ▶

¿De cuántas maneras se pueden sentar seis personas alrededor de una mesa circular? Si un arreglo se obtiene de otro haciendo que todos se muevan n asientos en el sentido de las manecillas del reloj, los arreglos se consideran idénticos.



Denotemos a las personas como A, B, C, D, E y F. Como los arreglos obtenidos por rotación se consideran idénticos, es lo mismo si A se sienta en un lugar arbitrario. Para sentar a las otras cinco personas, se pueden ordenar y después sentarlas en ese orden en el sentido de las manecillas del reloj a partir de A. Por ejemplo la permutación *CDBFE* definiría el arreglo de la figura al margen. Como hay $5! = 120$ permutaciones de cinco elementos, hay 120 maneras de sentar a seis personas en una mesa circular.

El mismo argumento se puede usar para demostrar que hay $(n - 1)!$ maneras de sentar a n personas alrededor de una mesa circular. ◀

Algunas veces se desea considerar un orden de r elementos seleccionados entre n elementos disponibles, es decir, de los n elementos tomados de r en r. Este ordenamiento se llama **permutación r**.

Definición 6.2.8 ▶

Una permutación r de n elementos (distintos) $x_1, \ldots, x_n$ es un ordenamiento de r elementos de $\{x_1, \ldots, x_n\}$. El número de permutaciones r de un conjunto de n elementos diferentes se denota por $P(n, r)$. ◀

Ejemplo 6.2.9 ▶

Ejemplos de permutaciones 2 de a, b, c son

$$ab, \ ba, \ ca.$$ ◀

Si $r = n$ en la definición 6.2.8, se obtiene un ordenamiento de todos los n elementos. Entonces, una permutación n de n elementos es lo que antes se llamó simplemente permutación. El Teorema 6.2.3 dice que $P(n, n) = n!$. El número $P(n, r)$ de permutaciones r de un conjunto de n elementos cuando $r < n$ se obtiene de la demostración del Teorema 6.2.3. Esta demostración para $n = 6$ y $r = 3$ se ilustra en la figura 6.2.3.

C	→	A	→	E
Elegir el 1er elemento		Elegir el 2o elemento		Elegir el 3er elemento

Figura 6.2.3 Prueba del Teorema 6.2.10 para $n = 6$ y $r = 3$. Una permutación r de *ABCDEF* se construye mediante la selección sucesiva del primero, segundo y tercer elementos.

Teorema 6.2.10

El número de permutaciones r de un conjunto de n objetos diferentes es

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1), \qquad r \leq n.$$

Demostración Debe contarse el número de maneras de ordenar r elementos seleccionados de un conjunto de n elementos. El primer elemento se puede elegir de n maneras. Una vez que se elige el primer elemento, el segundo se puede seleccionar de $n - 1$ maneras. Continuamos eligiendo elementos hasta que, habiendo elegido el elemento $r - 1$, pasamos al elemento r que se puede seleccionar de $n - r + 1$ maneras. Por el principio de la multiplicación, el número de permutaciones r de un conjunto de n objetos distintos es

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

Ejemplo 6.2.11 ▶ De acuerdo con el teorema 6.2.10, el número de permutaciones 2 de $X = \{a, b, c\}$ es

$$P(3, 2) = 3 \cdot 2 = 6$$

Estas seis permutaciones son

$$ab,\ ac,\ ba,\ bc,\ ca,\ cb.$$ ◀

Ejemplo 6.2.12 ▶ ¿De cuántas maneras se puede seleccionar el presidente, vicepresidente, secretario y tesorero de un grupo de 10 personas?

Es necesario contar el número de ordenamientos de cuatro personas seleccionadas de un grupo de 10, ya que cada arreglo elige (de manera única) un presidente (primera elección), un vicepresidente (segunda elección), un secretario (tercera elección) y un tesorero (cuarta elección). Por el Teorema 6.2.10, la solución es

$$P(10, 4) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$ ◀

Pudo haberse resuelto el ejemplo 6.2.12 usando directamente el principio de la multiplicación.

También, $P(n, r)$ se puede escribir en términos de factoriales:

$$\begin{aligned} P(n, r) &= n(n-1)\cdots(n-r+1) \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)\cdots 2\cdot 1}{(n-r)\cdots 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!}. \end{aligned} \qquad \textbf{(6.2.1)}$$

Ejemplo 6.2.13 ▶ Usando (6.2.1), la solución del ejemplo 6.2.12 se rescribe como

$$P(10, 4) = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!}.$$ ◀

Ejemplo 6.2.14 ▶ ¿De cuántas maneras pueden hacer cola siete marcianos y cinco venusinos si dos venusinos no se paran juntos?

Marcianos y venusinos se pueden formar siguiendo un proceso de dos pasos: formar marcianos; formar venusinos. Los marcianos se pueden formar de $7! = 5040$ maneras. Una vez formados los marcianos (por ejemplo en las posiciones M_1 a M_7), como los venusinos no pueden estar dos juntos, tendrán ocho posiciones posibles para formarse (espacios indicados por guión bajo);

$$\_\ M_1\ \_\ M_2\ \_\ M_3\ \_\ M_4\ \_\ M_5\ \_\ M_6\ \_\ M_7\ \_\ .$$

Así, los venusinos pueden formarse de $P(8, 5) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$ maneras. Por el principio de la multiplicación, el número de maneras en que siete marcianos y cinco venusinos puede hacer cola si dos venusinos no pueden estar juntos es

$$5040 \cdot 6720 = 33{,}868{,}800$$ ◀

Ahora se estudiarán las combinaciones. Una selección de objetos que no toma en cuenta el orden se llama **combinación.**

Definición 6.2.15 ▶ Dado un conjunto $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ que contiene n elementos (diferentes),

a) Una *combinación* r de X es una selección no ordenada de r elementos de X (es decir, un subconjunto de X de r elementos).

b) El número de combinaciones r de un conjunto de n elementos distintos se denota por $C(n, r)$ o $\binom{n}{r}$. ◀

Ejemplo 6.2.16 ▶ Un grupo de cinco estudiantes, María, Braulio, Rosa, Amanda y Néstor, ha decidido hablar con la directora del departamento de matemáticas para que ofrezcan más cursos de matemáticas discretas. La directora del departamento ha dicho que hablará con tres de los estudiantes. ¿De cuántas maneras pueden estos cinco estudiantes elegir tres de ellos para hablar con la directora del departamento?

Al resolver este problema no debe tomarse en cuenta el orden. (Por ejemplo, no hay diferencia si la directora habla con María, Amanda y Néstor o con Néstor, María y Amanda). Con sólo listar las posibilidades, se ve que existen 10 maneras de elegir tres estudiantes de un grupo de cinco para hablar con la directora.

$$MBR, MBA, MRA, BRA, MBN, MRN, BRN, MAN, BAN, RAN.$$

En la terminología de la definición 6.2.15, el número de maneras en que los cinco estudiantes pueden elegir tres de ellos es $C(5, 3)$, el número de combinaciones de 3 de cinco elementos. Se ha encontrado que

$$C(5, 3) = 10.$$ ◀

Ahora se derivará la fórmula para $C(n, r)$ contando el número de permutaciones r de un conjunto de n elementos de dos maneras. La primera simplemente usa la fórmula $P(n, r)$. La segunda manera de contar el número de permutaciones de un conjunto de n elementos implica $C(n, r)$. Igualar los dos valores nos permitirá obtener una fórmula para $C(n, r)$.

Podemos construir permutaciones r de un conjunto X de n elementos en dos pasos sucesivos: primero, elegimos una combinación r de X (un subconjunto no ordenado de r elementos); segundo, se ordena. Por ejemplo, para construir una permutación de 2 de $\{a, b, c, d\}$, primero elegimos una combinación de 2 y después lo ordenamos. La figura 6.2.4 muestra cómo se obtienen todas las permutaciones 2 de $\{a, b, c, d\}$ de esta manera. El principio de multiplicación dice que el número de permutaciones r es el producto del número de combinaciones r por el número de ordenamientos de r elementos; es decir,

$$P(n, r) = C(n, r)r!.$$

Por lo tanto,

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!}.$$

El siguiente teorema establece este resultado y da algunas maneras alternativas para escribir $C(n, r)$.

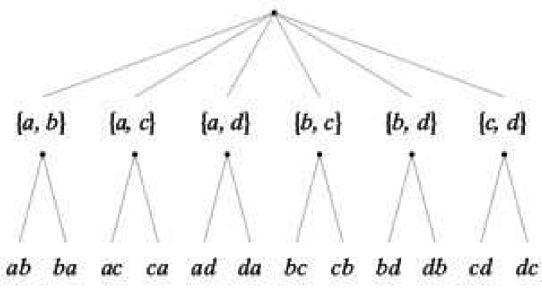


Figura 6.2.4 Permutaciones de 2 elementos de $\{a, b, c, d\}$.

Teorema 6.2.17 *El número de combinaciones r de un conjunto de n objetos distintos es*

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}, \qquad r \le n.$$

Demostración La demostración de la primera ecuación está dada antes de enunciar el Teorema. Las otras formas de la ecuación se derivan del Teorema 6.2.10 y la ecuación (6.2.1).

Ejemplo 6.2.18 ▶ ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un comité de tres a partir de un grupo de 10 personas diferentes?

Como un comité es un grupo no ordenado de personas, la respuesta es

$$C(10,3) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120. \qquad ◀$$

Ejemplo 6.2.19 ▶

¿De cuántas maneras se puede seleccionar un comité de dos mujeres y tres hombres de un grupo de cinco mujeres y seis hombres?

Igual que en el ejemplo 6.2.18, se encuentra que las dos mujeres se pueden elegir de

$$C(5,2) = 10$$

maneras y que los tres hombres se pueden elegir de

$$C(6,3) = 20$$

maneras. El comité se construye en dos pasos sucesivos: se elige a las mujeres; se elige a los hombres. Por el principio de la multiplicación, el número total de comités es

$$10 \cdot 20 = 200. \qquad ◀$$

Ejemplo 6.2.20 ▶

¿Cuántas cadenas de ocho bits contienen exactamente cuatro unos?

Una cadena de ocho bits que contiene cuatro unos se determina de manera única una vez que se establece qué bits son 1. Esto se puede hacer de

$$C(8,4) = 70$$

maneras. ◀

Ejemplo 6.2.21 ▶

Una baraja común de 52 cartas consiste en cuatro palos

tréboles, diamantes, corazones y espadas

con 13 denominaciones cada uno

as, de 2 a 10, jack, reina y rey.

a) ¿Cuántas manos de póquer (sin ordenar) de cinco cartas, seleccionadas de una baraja común de 52 cartas, existen?

b) ¿Cuántas manos de póquer contienen cartas todas del mismo palo?

c) ¿Cuántas manos de póquer contienen tres cartas de una denominación y dos de una segunda denominación?

a) La respuesta está dada por la fórmula de las combinaciones

$$C(52,5) = 2{,}598{,}960.$$

b) Una mano en la que todas las cartas son del mismo palo se puede construir en dos pasos sucesivos: seleccionamos un palo; seleccionamos cinco cartas del palo elegido. El primer paso se puede realizar de cuatro maneras y el segundo de $C(13, 5)$ maneras. Por el principio de la multiplicación, la respuesta es

$$4 \cdot C(13,5) = 5148.$$

c) Una mano que contiene tres cartas de una denominación y dos de otra se puede construir en cuatro pasos sucesivos: seleccionamos la primera denominación; seleccionamos la segunda denominación; seleccionamos tres cartas de la primera denominación; seleccionamos dos cartas de la segunda denominación. La primera denominación se puede elegir de 13 maneras. Una vez elegida, se puede seleccionar la segunda denominación de 12 maneras. Se pueden elegir tres cartas de la primera denominación de $C(4, 3)$ maneras, y se pueden seleccionar dos cartas de la segunda denominación de $C(4, 2)$ maneras. Por el principio de la multiplicación, la respuesta es

$$13 \cdot 12 \cdot C(4, 3) \cdot C(4, 2) = 3744.$$

◀

Ejemplo 6.2.22 ▶

¿Cuántas rutas existen desde la esquina inferior izquierda de una cuadrícula $n \times n$ a la esquina superior derecha si los viajes están restringidos sólo a la derecha o hacia arriba? Una ruta se muestra en una cuadrícula de 4×4 en la figura 6.2.5 *a*).

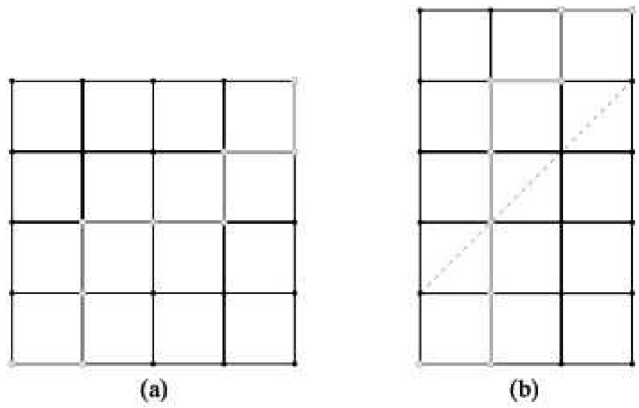


Figura 6.2.5 *a)* Rejilla de 4×4 con una ruta de la esquina inferior izquierda a la superior derecha. *b)* Ruta en *a)* transformada a una ruta en una rejilla de 5×3.

Cada ruta se puede describir por una cadena de n letras D (derecha) y A (arriba). Por ejemplo, la ruta mostrada en la figura 6.2.5 *a*), se describe como la cadena *DAADDADA*. Cualquier cadena se puede obtener seleccionando n posiciones de las D, sin importar el orden de selección, entre las $2n$ posiciones disponibles en la cadena y después llenando el resto de las posiciones con A. Así, existen $C(2n, n)$ rutas posibles. ◀

Ejemplo 6.2.23 ▶

¿Cuántas rutas hay de la esquina inferior izquierda de una rejilla cuadrada de $n \times n$ a la esquina superior derecha, si el viaje se restringe sólo hacia la derecha y arriba, y si se permite tocar pero no pasar hacia arriba de la diagonal que va de la esquina inferior izquierda a la superior derecha?

Un ruta que toca pero que no cruza la diagonal se llama una *ruta buena*, y la que cruza la diagonal se llama una *ruta mala*. El problema es contar el número de rutas buenas. Sea B_n el número de rutas buenas y M_n el número de rutas malas. En el ejemplo 6.2.22 se demostró que

$$B_n + M_n = C(2n, n);$$

entonces, basta con calcular el número de rutas malas.

Una ruta de la esquina inferior izquierda de una rejilla de $(n + 1) \times (n - 1)$ a la esquina superior derecha (sin restricciones) recibe el nombre de ruta de $(n + 1) \times (n - 1)$. La figura 6.2.5 *b*), muestra una ruta 5×3. Se demostrará que el número de rutas malas es igual al número de rutas de $(n + 1) \times (n - 1)$ describiendo una función uno a uno y sobre del conjunto de rutas malas al conjunto de rutas de $(n + 1) \times (n - 1)$.

Dada una ruta mala, se encuentra el primer movimiento (comenzando en la esquina inferior izquierda) que la lleva arriba de la diagonal. De ahí en adelante se sustituye cada movimiento a la derecha por uno hacia arriba y cada movimiento hacia arriba por uno a la derecha. Por ejemplo, la ruta de la figura 6.2.5 *a*), se transforma en la ruta que se muestra en la figura 6.2.5. *b*). Esta transformación también se puede lograr rotando la porción de la ruta que sigue al primer movimiento que cruza la diagonal, respecto a la línea punteada de la figura 6.2.5 *b*). Se ve que esta transformación sin duda asigna a cada ruta mala una ruta de $(n + 1) \times (n - 1)$.

Para demostrar que nuestra función es sobre, considere cualquier ruta de $(n + 1) \times (n - 1)$. Como esta ruta termina arriba de la diagonal, existe un primer movimiento en el que la cruza. Entonces se puede rotar el resto de la ruta respecto a la línea punteada de la figura 6.2.5 *b*), para obtener una ruta mala. La imagen de esta ruta mala bajo nuestra función es la ruta de $(n+1) \times (n-1)$ con la que se comenzó. Por lo tanto, nuestra función es sobre. Nuestra función también es uno a uno, ya que podemos verificar que la función transforma rutas malas diferentes en rutas de $(n+1) \times (n-1)$ diferentes. Así, el número de rutas malas es igual al número de rutas de $(n+1) \times (n-1)$.

Un argumento como el del ejemplo 6.2.22 demuestra que el número de rutas de $(n+1) \times (n-1)$ es igual a $C(2n, n-1)$. Entonces, el número de rutas buenas es igual a

$$\begin{aligned} C(2n,n) - B_n = C(2n,n) - C(2n,n-1) &= \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!} \\ &= \frac{(2n)!}{n!\,(n-1)!}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{(2n)!}{n!\,(n-1)!}\cdot\frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{(2n)!}{(n+1)n!\,n!} = \frac{C(2n,n)}{n+1}. \end{aligned}$$

◀

Los números $C(2n, n)/(n+1)$ se llaman **números de Catalan** en honor al matemático belga Eugène-Charles Catalan (1814-1894), quien descubrió una derivación elemental de la fórmula de $C(2n, n)/(n+1)$. Catalan publicó numerosos artículos de análisis, combinatoria, álgebra, geometría, probabilidad y teoría de números. En 1844, llegó a la conjetura de que los únicos enteros positivos consecutivos que son potencias (esto es, i^j, donde $j \geq 2$) son 8 y 9. Más de 150 años después (en 2002) Preda Mihailescu demostró el resultado.

WWW

En este libro, los números de Catalan $C(2n, n)/(n+1)$ se denotan por C_n, $n \geq 1$, y C_0 se define como 1. Los primeros números de Catalan son

$$C_0 = 1,\quad C_1 = 1,\quad C_2 = 2,\quad C_3 = 5,\quad C_4 = 14,\quad C_5 = 42.$$

Igual que los números de Fibonacci, los números de Catalan tienen forma de aparecer en lugares inesperados (vea los ejercicios 71, 76 y 77 de esta sección, y 28 y 29 de la sección 7.1).

Esta sección concluye con otra demostración del teorema 6.2.17 que da una fórmula para el número de subconjuntos de r elementos de un conjunto de n elementos. La demostración se ilustra en la figura 6.2.6. Sea X un conjunto de n elementos. Se supone que funciona la fórmula $P(n, r) = n(n-1)\cdots(n-r+1)$ que cuenta el número de ordenamientos de subconjuntos de r elementos sacados de X. Para contar el número de subconjuntos de r elementos de X, *no* se desea tomar en cuenta el orden, se quiere considerar las permutaciones del mismo subconjunto *equivalente*. De manera formal, se define una relación R sobre un conjunto S de permutaciones r de X mediante la siguiente regla: p_1Rp_2 si p_1 y p_2 son permutaciones del mismo subconjunto de r elementos de X. De manera directa se verifica que R es una relación equivalente en S.

Si p es una permutación r de X, entonces p es una permutación de algún subconjunto X_r de r elementos de X; entonces, la clase de equivalencia que contiene a p consiste en todas las permutaciones de X_r. Se ve que cada clase de equivalencia tiene $r!$ elementos. Una clase de equivalencia se determina por el subconjunto de r elementos de X que se permuta para obtener a sus miembros. Por lo tanto, existen $C(n, r)$ clases de equivalencia. Como el subconjunto S tiene $P(n, r)$ elementos, por el teorema 3.2.15, $C(n, r) = P(n, r)/r!$.

ab	*ac*	*ad*	*bc*	*bd*	*cd*
ba	*ca*	*da*	*cb*	*db*	*dc*

Figura 6.2.6 Demostración alternativa del teorema 6.2.17 para $n = 4$ y $r = 2$. Cada cuadro contiene una clase de equivalencia para la relación R sobre el conjunto de permutaciones de 2 de $X = \{a, b, c, d\}$ definida por p_1Rp_2 si p_1 y p_2 son permutaciones del mismo subconjunto de 2 elementos de X. Existen $P(4, 2) = 12$ permutaciones de 2 elementos y 2 maneras de permutar cada permutación de 2. Como cada clase equivalente corresponde a un subconjunto de X, $12/2 = C(4, 2)$.

Sugerencias para resolver problemas

Los puntos importantes que deben recordarse en esta sección son que una permutación toma en cuenta el orden y una combinación *no* toma en cuenta el orden. Así, una clave para resolver problemas de conteo es determinar si se deben contar objetos ordenados o no ordenados. Por ejemplo, una fila de personas *distintas* se considera ordenada. Entonces, seis personas pueden hacer cola de 6! maneras; se usa la fórmula de la permutación. Un comité es un ejemplo típico de un grupo no ordenado. Por ejemplo, un comité de tres personas se puede seleccionar de un conjunto de 6 personas de $C(6, 3)$ maneras; aquí se usa la fórmula de la combinación.

Sección de ejercicios de repaso

1. ¿Qué es una permutación de $x_1, \ldots, x_n$?
2. ¿Cuántas permutaciones hay de un conjunto de n elementos? ¿Cómo se obtiene esta fórmula?
3. ¿Qué es una permutación r de $x_1, \ldots, x_n$?
4. ¿Cuántas permutaciones r hay de un conjunto de n elementos? ¿Cómo se obtiene esta fórmula?
5. ¿Cómo se denota el número de permutaciones r de un conjunto de n elementos?
6. ¿Qué es una combinación r de $\{x_1, \ldots, x_n\}$?
7. ¿Cuántas combinaciones r hay de un conjunto de n elementos? ¿Cómo se deriva esta fórmula?
8. ¿Cómo se denota el número de combinaciones r de un conjunto de n elementos?

Ejercicios

1. ¿Cuántas permutaciones hay de a, b, c, d?
2. Liste las permutaciones de a, b, c, d.
3. ¿Cuántas permutaciones de 3 hay de a, b, c, d?
4. Liste las permutaciones de 3 de a, b, c, d.
5. ¿Cuántas permutaciones hay de 11 objetos diferentes?
6. ¿Cuántas permutaciones de 5 hay de 11 objetos diferentes?
7. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar el presidente, vicepresidente y secretario de un grupo de 11 personas?
8. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar el presidente, vicepresidente, secretario y tesorero de un grupo de 12 personas?
9. ¿De cuántas maneras pueden terminar 12 caballos en el orden ganador, segundo lugar, tercer lugar?

En los ejercicios 10 al 18, determine cuántas cadenas se pueden formar ordenando las letras ABCDEF sujetas a las condiciones indicadas.

10. Contiene la subcadena *ACE*
11. Contiene las letras *ACE* juntas en cualquier orden
12. Contiene las subcadenas *DB* y *AE*
13. Contiene ya sea la subcadena *AE* o la subcadena *EA*
14. *A* aparece antes que *D*. *Ejemplos: BCAED, BCADE*
15. No contiene las subcadenas *AB*, *CD*
16. No contiene las subcadenas *AB*, *BE*
17. *A* aparece antes que *C* y *C* aparece antes que *E*
18. Contiene ya sea la subcadena *DB* o la subcadena *BE*
19. ¿De cuántas maneras pueden esperar en una fila 5 marcianos y 8 venusinos, si dos marcianos no pueden estar juntos?
20. ¿De cuántas maneras pueden esperar en una fila 5 marcianos, 10 mercurianos y 8 venusinos, si dos marcianos no pueden estar juntos?
21. ¿De cuántas maneras pueden esperar en una fila 5 marcianos y 5 venusinos?
22. ¿De cuántas maneras puede sentarse 5 marcianos y 5 venusinos en una mesa circular?
23. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 5 marcianos y 5 venusinos en una mesa circular si dos marcianos no se pueden sentar juntos?
24. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 5 marcianos y 8 venusinos en una mesa circular, si dos marcianos no pueden sentarse juntos?

En los ejercicios 25 al 27, sea $X = \{a, b, c, d\}$.

25. Calcule el número de combinaciones de 3 de X.
26. Liste las combinaciones de 3 de X.
27. Demuestre la relación entre las permutaciones de 3 y las combinaciones de 3 elementos de X con un dibujo como el de la figura 6.2.4.
28. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un comité de tres entre un grupo de 11 personas?
29. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un comité de cuatro entre un grupo de 12 personas?
30. En cierto momento del juego de lotería del estado de Illinois, se pidió a una persona que escogiera 6 números (en cualquier orden) entre 44 números. ¿De cuántas maneras puede hacerlo? El estado estaba considerando cambiar el juego de manera que se pidiera a una persona elegir 6 números entre 48. ¿De cuántas maneras podría hacerlo?

Los ejercicios 31 al 36 se refieren a un club cuyos miembros son 6 hombres y 7 mujeres.

31. ¿De cuántas maneras se puede elegir un comité de 5 personas?
32. ¿De cuántas maneras se puede elegir un comité de 3 hombres y 4 mujeres?

33. ¿De cuántas maneras se puede elegir un comité de 4 personas que tenga al menos una mujer?

34. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un comité de 4 personas que incluya al menos un hombre?

35. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un comité de 4 personas que incluya personas de uno y otro sexo?

36. ¿De cuántas maneras se puede elegir un comité de 4 personas de manera que Marta y Rodolfo no estén juntos?

37. ¿De cuántas maneras se puede elegir un comité de 4 republicanos, 3 demócratas y 2 independientes entre un grupo de 10 republicanos, 12 demócratas y 4 independientes?

38. ¿Cuántas cadenas de 8 bits contienen exactamente tres ceros?

39. ¿Cuántas cadenas de 8 bits contienen 3 ceros seguidos y 5 unos?

★***40.*** ¿Cuántas cadenas de 8 bits contienen al menos 2 ceros seguidos?

En los ejercicios 41 al 49, encuentre el número de manos de póquer de 5 cartas (sin ordenar), seleccionadas de una baraja común de 52 cartas, que tengan las propiedades indicadas.

41. Contienen 4 ases

42. Contienen 4 de un tipo, es decir, cuatro cartas de la misma denominación

43. Contienen sólo espadas

44. Contienen cartas de exactamente dos palos

45. Contienen cartas de todos los palos

46. De la forma A2345 del mismo palo

47. Son consecutivas y del mismo palo (suponga que el as tiene la denominación más baja).

48. Son consecutivas (suponga que el as tiene la denominación más baja).

49. Contiene 2 de una denominación, 2 de otra y 1 de una tercera denominación

50. Encuentre el número de manos de bridge de 13 cartas (sin ordenar) seleccionadas de una baraja común de 52 cartas.

51. ¿Cuántas manos de bridge son todas del mismo palo?

52. ¿Cuántas manos de bridge contienen exactamente 2 palos?

53. ¿Cuántas manos de bridge contienen los 4 ases?

54. ¿Cuántas manos de bridge contienen 5 espadas, 4 corazones, 3 tréboles y 1 diamante?

55. ¿Cuántas manos de bridge contienen 5 cartas de un palo, 4 de otro, 3 de otro y 1 de otro palo?

56. ¿Cuántas manos de bridge contienen 4 cartas de 3 palos y una carta del cuarto palo?

57. ¿Cuántas manos de bridge no tienen cartas con cara? (Una carta con cara es una de 10, J, Q, K, A.)

En los ejercicios 58 al 62, una moneda se lanza 10 veces.

58. ¿Cuántos resultados posibles hay? (Un *resultado* es una lista de 10 letras H y T que da el resultado de cada tirada. Por ejemplo, el resultado

HHTHTHHHTH

representa 10 tiradas, donde se obtiene cara las dos primeras veces, cruz la tercera, cara la cuarta, etcétera).

59. ¿Cuántos resultados tienen exactamente tres caras?

60. ¿Cuántos resultados tienen a lo sumo tres caras?

61. ¿Cuántos resultados tienen una cara en la quinta tirada?

62. ¿Cuántos resultados tienen el mismo número de caras y cruces?

Los ejercicios 63 al 66 se refieren a un cargamento de 50 microprocesadores, de los cuales 4 son defectuosos.

63. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un conjunto de cuatro microprocesadores?

64. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un conjunto de cuatro microprocesadores no defectuosos?

65. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un conjunto de cuatro microprocesadores que contenga exactamente dos defectuosos?

66. ¿De cuántas maneras se puede elegir un conjunto de cuatro microprocesadores que contenga al menos uno defectuoso?

★**67.** Demuestre que el número de cadenas de bits de longitud $n \geq 4$ que contienen exactamente dos ocurrencias de 10 es $C(n + 1, 5)$.

★**68** Demuestre que el número de cadenas de n bits que tienen exactamente k ceros sin que haya dos consecutivos es $C(n - k + 1, k)$.

★**69.** Demuestre que el producto de cualquier entero positivo y sus $k - 1$ sucesores es divisible entre $k!$.

70. Demuestre que existen $(2n - 1)(2n - 3) \cdots 3 \cdot 1$ maneras de elegir n pares entre $2n$ objetos distintos.

Los ejercicios 71 al 73 se refieren a una elección en la que dos candidatos, Ramírez y Uribe, pretenden el puesto de contralor. Después de tabular cada voto, Ramírez nunca estuvo atrás de Uribe. Este problema se conoce como el problema de la urna.

71. Suponga que cada candidato recibe exactamente r votos. Demuestre que el número de maneras en que pueden contarse los votos es C_r, el r-ésimo número de Catalan.

72. Suponga que Ramírez recibió justo r votos y Uribe recibió justo u votos, $r \geq u > 0$. Demuestre que el número de maneras en que pueden contarse los votos es $C(r + u, r) - C(r + u, r + 1)$.

73. Demuestre que si se recibieron exactamente n votos, el número de maneras de contar los votos es $C(n, \lceil n/2 \rceil)$.

74. Suponga que comenzamos en el origen del plano xy y damos n pasos unitarios (es decir, cada paso es de longitud uno), donde cada paso es vertical (arriba o abajo) u horizontal (derecha o izquierda). ¿Cuántas trayectorias de este tipo nunca pasan estrictamente abajo del eje x?

75. Suponga que comenzamos en el origen del plano xy y damos n pasos unitarios (es decir, cada paso es de longitud uno), donde cada paso es vertical (arriba o abajo) u horizontal (derecha o izquierda). ¿Cuántas trayectorias de este tipo se quedan en el primer cuadrante ($x \geq 0, y \geq 0$)?

76. Demuestre que el número de maneras en que $2n$ personas, sentadas alrededor de una mesa circular, pueden saludarse por pares sin que se crucen los brazos es C_n, el n-ésimo número de Catalan.

★**77.** Demuestre que la instrucción de imprimir en el seudocódigo

```
for i_1 = 1 to n
    for i_2 = 1 to mín(i_1, n − 1)
        for i_3 = 1 to mín(i_2, n − 2)
            ⋱
              for i_{n−1} = 1 to mín(i_{n−2}, 2)
                  for i_n = 1 to 1
                      println(i_1, i_2, . . . , i_n)
```

se ejecuta C_n veces, donde C_n es el n-ésimo número de Catalan.

78. Suponga que se tienen n objetos, r diferentes y $n - r$ idénticos. Dé otra derivación de la fórmula

$$P(n, r) = r!\ C(n, r)$$

contando el número de ordenamientos de los n objetos de dos maneras:

- Contando los ordenamientos al elegir primero las posiciones para los r objetos distintos.
- Contando los ordenamientos al elegir primero las posiciones para los $n - r$ objetos idénticos.

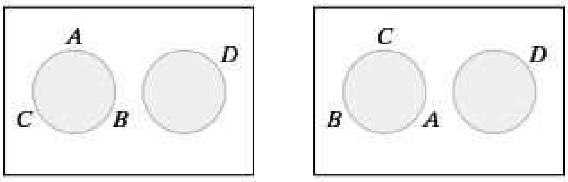
79. ¿Qué está mal en el siguiente argumento, que pretende demostrar que $4C(39, 13)$ manos de bridge contienen tres palos o menos?

Existen $C(39, 13)$ manos que contienen sólo tréboles, diamantes y espadas. De hecho, para cualesquiera tres palos, existen $C(39, 13)$ manos que contienen sólo esos tres palos. Como hay cuatro combinaciones de 3 de los palos, la respuesta es $4C(39, 13)$.

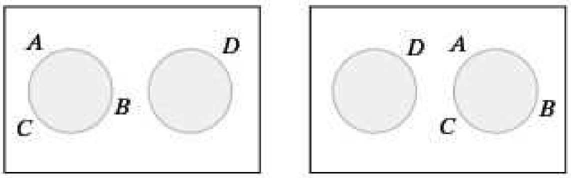
80. ¿Qué está mal en el siguiente argumento, que pretende demostrar que hay $13^4 \cdot 48$ manos de póquer (sin ordenar) de 5 cartas que contienen cartas de todos los palos?

Seleccione una carta de cada palo. Esto se puede hacer de $13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 = 13^4$ maneras. Como la quinta carta se puede elegir de 48 maneras, la respuesta es $13^4 \cdot 48$.

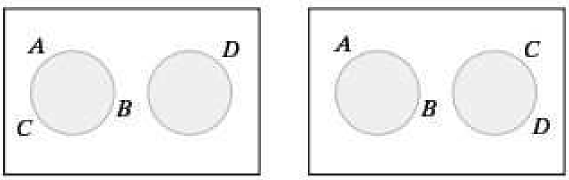
81. Sea $s_{n,k}$ el número de maneras en que n personas se pueden sentar alrededor de k mesas redondas, con al menos una persona en cada mesa. (Los números $s_{n,k}$ se llaman *números de Stirling del primer tipo*). El orden de las mesas *no* se toma en cuenta. El arreglo de lugares en una mesa *sí* se toma en cuenta excepto por las rotaciones. *Ejemplos:* El siguiente par *no* es diferente:



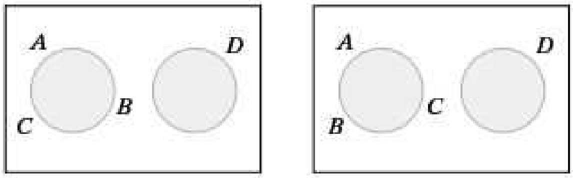
El siguiente par *no* es diferente:



El siguiente par *sí* es diferente:



El siguiente par *es* diferente:



a) Demuestre que $s_{n,k} = 0$ si $k > n$.

b) Demuestre que $s_{n,n} = 1$ para toda $n \geq 1$.

c) Demuestre que $s_{n,1} = (n-1)!$ para toda $n \geq 1$.

d) Demuestre que $s_{n,n-1} = C(n, 2)$ para toda $n \geq 2$.

e) Demuestre que

$$s_{n,2} = (n-1)!\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right)$$

para toda $n \geq 2$.

f) Demuestre que

$$\sum_{k=1}^{n} s_{n,k} = n! \qquad \text{para toda } n \geq 1.$$

g) Encuentre una fórmula para $s_{n,n-2}$, $n \geq 3$ y pruébela.

82. Sea $S_{n,k}$ el número de maneras para hacer una partición de un conjunto de n elementos en exactamente k subconjuntos no vacíos. El orden de los subconjuntos no se toma en cuenta. (Los números $S_{n,k}$ se conocen como *números de Stirling del segundo tipo.*)

a) Demuestre que $S_{n,k} = 0$ si $k > n$.

b) Demuestre que $S_{n,n} = 1$ para toda $n \geq 1$.

c) Demuestre que $S_{n,1} = 1$ para toda $n \geq 1$.

d) Demuestre que $S_{3,2} = 3$.

e) Demuestre que $S_{4,2} = 7$.

f) Demuestre que $S_{4,3} = 6$.

g) Demuestre que $S_{n,2} = 2^{n-1} - 1$ para toda $n \geq 2$.

h) Demuestre que $S_{n,n-1} = C(n, 2)$ para toda $n \geq 2$.

i) Encuentre una fórmula para $S_{n,n-2}$, $n \geq 3$, y pruébela.

83. Demuestre que existen

$$\sum_{k=1}^{n} S_{n,k}$$

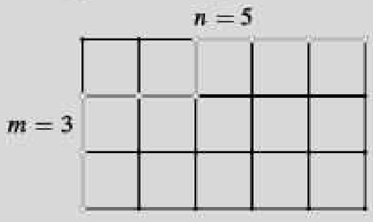
relaciones de equivalencia en un conjunto de n elementos. [Los números $S_{n,k}$ son los números de Stirling del segundo tipo (vea el ejercicio 82)].

Rincón de solución de problemas

Combinaciones

Problema

a) ¿Cuántas rutas hay de la esquina inferior izquierda a la esquina superior derecha de una rejilla de $m \times n$ en la que el movimiento se restringe a sólo la derecha o arriba? Por ejemplo, la siguiente figura es una rejilla de 3×5 y se muestra una ruta.



b) Divida las rutas en clases basándose en la primera vez que la ruta llega a la orilla superior para derivar la fórmula

$$\sum_{k=0}^{n} C(k + m - 1, k) = C(m + n, m).$$

Cómo atacar el problema

En el ejemplo 6.2.22 se contaron las trayectorias de la esquina inferior izquierda a la esquina superior derecha de una rejilla de $n \times n$ en donde se restringió el movimiento sólo hacia la derecha o arriba. La solución a ese problema codificó cada ruta como una cadena de letras D (derecha) y A (arriba). Después, el problema se convirtió en uno de contar el número de estas cadenas. Cualquiera de estas cadenas se puede obtener seleccionando n posiciones para D, sin importar el orden de selección, entre las $2n$ posiciones disponibles en la cadena y después completando las posiciones restantes con letras A. Así, el número de cadenas y el número de rutas son iguales a $C(2n, n)$.

En el problema actual, se puede codificar cada ruta como una cadena de n letras D (derecha) y m letras A (arriba). Igual que en el problema anterior, debemos contar el número de estas cadenas. Cualquiera de ellas se puede obtener seleccionando n posiciones para letras D sin importar el orden de selección, entre las $n + m$ posiciones disponibles en la cadena y luego completando las posiciones restantes con letras A. Entonces, el número de cadenas y el número de rutas son iguales a $C(n + m, n)$. Ésta es la solución del inciso *a)*.

En el inciso *b)* se da una sugerencia importante: divida las rutas en clases con base en la primera vez que llegan a la orilla superior. Una ruta puede tocar por primera vez la orilla superior en cualquiera de $n + 1$ posiciones. En la figura anterior, la ruta mostrada llega primero a la orilla superior en la tercera posición desde la izquierda. Antes de seguir leyendo, piense por qué se dividen las rutas en clases.

Observe que cuando se dividen las rutas en clases de acuerdo con la primera vez que llegan a la orilla superior:

- Las clases son *ajenas*.

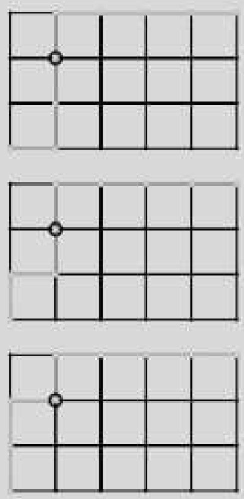
(Una ruta no puede llegar por primera vez a la orilla superior en dos posiciones o más). Observe también que todas las rutas se encuentran con la orilla superior en algún punto.

- Cada ruta pertenece a alguna clase.

En la terminología de la sección 2.1 (vea el ejemplo 2.1.14 y el análisis que le precede), las clases forman una *partición* de conjunto de rutas. Por esta razón, se aplica el principio de la suma, y la suma del número de rutas en cada clase es igual al número total de rutas. (Ninguna ruta se cuenta dos veces puesto que las clases no se traslapan, y cada ruta se cuenta una vez ya que cada una pertenece a alguna clase). Es evidente que la ecuación que se supone que debemos probar se obtiene al igualar la suma del número de rutas en cada clase con el número total de rutas.

Cómo encontrar la solución

Ya se resolvió el inciso *a)*. Para el inciso *b)*, observe la rejilla de 3×5. Hay exactamente una ruta que llega primero a la orilla superior en la primera posición de la izquierda. Existen 3 rutas que llegan por primera vez a la orilla superior en la segunda posición de la izquierda:



Observe que la única variación en las figuras anteriores ocurre entre el inicio y el punto marcado con un círculo. Dicho de otra manera, cuando una ruta llega al círculo, sólo hay una manera de terminar el viaje. Por lo tanto, basta contar el número de rutas de la esquina inferior izquierda a la esquina superior derecha en una rejilla de 2×1. Pero este problema se resolvió en el inciso *a)*. El número de rutas de la esquina inferior izquierda a la superior derecha en una rejilla de 2×1 es igual a $C(2 + 1, 1) = 3$. De manera similar, se encuentra que el número de rutas que llega primero a la orilla superior en la tercera posición de la izquierda es igual al número de rutas de la esquina inferior izquierda a la superior derecha de una rejilla de 2×2, a saber, $C(2 + 2, 2) = 6$. Sumando se obtienen todas las rutas:

$$\begin{aligned} C(5+3,5) &= C(0+2,0) + C(1+2,1) \\ &\quad + C(2+2,2) + C(3+2,3) \\ &\quad + C(4+2,4) + C(5+2,5). \end{aligned}$$

Si se sustituye cada término $C(k + 3 - 1, k)$ por su valor, se obtiene

$$56 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21.$$

Usted debe verificar la fórmula anterior, encontrar las 6 rutas que llegan primero a la orilla superior en la tercera posición de la izquierda, y ver por qué el número de rutas de este tipo es igual al número de rutas de la esquina inferior izquierda a la superior derecha en una rejilla de 2×2.

Solución formal

a) Se puede codificar cada ruta como una cadena de n letras D (derecha) y m letras A (arriba). Cualquiera de estas cadenas se puede obtener seleccionando n posiciones para letras D, sin importar el orden de selección, entre las $n + m$ posiciones disponibles en la cadena y después completando las posiciones restantes con letras A. Entonces, el número de rutas es igual a $C(n + m, n)$.

b) Cada ruta se puede describir como una cadena que contiene n letras D y m letras A. La última A en tal cadena marca el punto en que la ruta llega por primera vez a la orilla superior. Se cuentan las cadenas dividiéndolas en clases que consisten en cadenas que terminan en A, AD, ADD, etcétera. Existen

$$C(n + m - 1, n)$$

cadenas que terminan en A, ya que debemos elegir n ranuras para entre las primeras $n + m - 1$ ranuras para las n letras A. Existen

$$C((n - 1) + m - 1, n - 1)$$

cadenas que terminan en AD, ya que debemos elegir $n - 1$ ranuras entre las primeras $(n - 1) + m - 1$ ranuras para las $n - 1$ letras D. En general, existen $C(k + m - 1, k)$ cadenas que terminan en AD^{n-k}. Como hay $C(m + n, m)$ cadenas en total, la fórmula se cumple.

Resumen de las técnicas de solución de problemas

- Busque problemas similares e imite la solución.
- Contar el número de miembros de un conjunto de dos maneras diferentes lleva a una ecuación. En particular, si $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ es una *partición de X*, se aplica el principio de la suma y

$$|X| = \sum_{i=1}^{n} |X_i|.$$

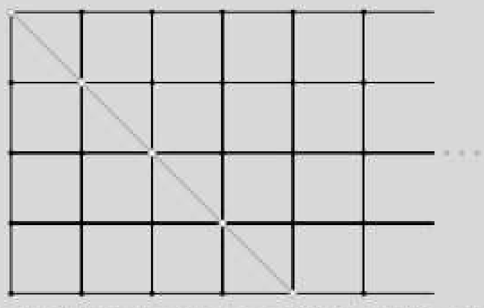
- Numere directamente algunos objetos que deben contarse.
- Busque patrones.

Comentarios

Es importante verificar que una supuesta partición sea en realidad una partición antes de usar el principio de la suma. Si X es el conjunto de cadenas de 5 bits y X_i es el conjunto de cadenas de 5 bits que contienen i ceros consecutivos, el principio de la suma *no* se aplica; los conjuntos X_i *no* son ajenos por pares. Por ejemplo, $00001 \in X_2 \cap X_3$. Como ejemplo de una partición de X, X_i podría ser el conjunto de cadenas de 5 bits que contienen exactamente i ceros.

Ejercicios

1. Divida las rutas en clases basadas en la primera vez que se encuentran una línea vertical y use el principio de la suma para derivar una fórmula como la que se probó en esta sección.
2. Divida las rutas en clases basadas en el punto en que la ruta cruza la línea inclinada que se muestra.



Use el principio de la suma para derivar una fórmula como la que se probó en esta sección.

6.3 → Algoritmos para generar permutaciones y combinaciones

El grupo de rock "Unhinged Universe" ha grabado n videos cuyas duraciones son

$$t_1, t_2, \ldots, t_n$$

WWW segundos. Debe liberarse una cinta que pueda contener C segundos. Como ésta es la primera cinta grabada por "Unhinged Universe", el grupo quiere incluir todo el material posible. Entonces el problema es elegir un subconjunto $\{i_1, \ldots, i_k\}$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tal que la suma

$$\sum_{j=1}^{k} t_{i_j} \qquad \textbf{(6.3.1)}$$

no exceda C y sea tan grande como sea posible. Un enfoque directo consiste en examinar todos los subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ y elegir un subconjunto de manera que la suma (6.3.1) no exceda C y sea lo más grande posible. Para llevar a la práctica este enfoque, se necesita un algoritmo que genere todas las combinaciones posibles de un conjunto de n elementos. En esta sección se desarrollan algoritmos para generar combinaciones y permutaciones.

Como existen 2^n subconjuntos de un conjunto de n elementos, el tiempo de corrida de un algoritmo que examina todos los subconjuntos es $\Omega(2^n)$. Como se vio en la sección 4.3, es poco práctico correr estos algoritmos excepto para valores pequeños de n. Desafortunadamente, existen problemas (un ejemplo de ellos es el problema de llenado de cinta de video que se describió) para los cuales no se conoce un método mucho mejor que el enfoque de "listar todos".

Nuestros algoritmos listan las permutaciones y combinaciones en **orden lexicográfico**. El orden lexicográfico generaliza el orden común del diccionario.

Se tienen dos palabras diferentes y, para determinar si una precede a la otra en el diccionario, se comparan las letras de las palabras. Existen dos posibilidades:

1. Las palabras tienen longitudes diferentes y cada letra en la palabra más corta es idéntica a la letra correspondiente en la palabra más larga.
2. Las palabras tienen la misma longitud o diferente y en alguna posición, las letras de las palabras difieren. **(6.3.2)**

Si se cumple el número 1, la palabra más corta precede a la más larga. (Por ejemplo, "can" precede a "canino" en el diccionario). Si se cumple el número 2, se localiza la posición p más a la izquierda en la que las letras difieren. El orden de las palabras se determina por el orden de las letras en la posición p. (Por ejemplo, "gladiador" precede a "gladiolo" en el diccionario. En la posición más a la izquierda en que las letras difieren, encontramos "a" en "gladiador" y "o" en "gladiolo"; "a" precede a "o" en el alfabeto).

El orden lexicográfico generaliza el orden común del diccionario sustituyendo el alfabeto por cualquier conjunto de símbolos donde se ha definido un orden. Se estudiarán las cadenas de enteros.

Definición 6.3.1 ▶

Sean $\alpha = s_1s_2 \cdots s_p$ y $\beta = t_1t_2 \cdots t_q$ cadenas en el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Se dice que α es *menor que* β, *en el orden lexicográfico*, y se escribe $\alpha < \beta$ si ocurre

a) $p < q$ y $s_i = t_i$ para $i = 1, \ldots, p$,

o

b) para alguna i, $s_i \neq t_i$, y para la más pequeña de esas i, se tiene $s_i < t_i$. ◀

En la definición 6.3.1, el caso *a)* corresponde a la posibilidad 1 de (6.3.2) y el caso *b)* corresponde a la posibilidad 2 de (6.3.2).

Ejemplo 6.3.2 ▶

Sean $\alpha = 132$ y $\beta = 1324$ dos cadenas en el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. En la notación de la definición 6.3.1, $p = 3$, $q = 4$, $s_1 = 1$, $s_2 = 3$, $s_3 = 2$, $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, $t_3 = 2$, y $t_4 = 4$. Como $p = 3 < 4 = q$ y $s_i = t_i$ para $i = 1, 2, 3$, se cumple la condición *a)* de la definición 6.3.1. Por lo tanto, $\alpha < \beta$. ◀

Ejemplo 6.3.3 ▶

Sean $\alpha = 13246$ y $\beta = 1342$ dos cadenas en $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. En la notación de la definición 6.3.1, $p = 5$, $q = 4$, $s_1 = 1$, $s_2 = 3$, $s_3 = 2$, $s_4 = 4$, $s_5 = 6$, $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, $t_3 = 4$, y $t_4 = 2$. La i más pequeña para la que $s_i \neq t_i$ es $i = 3$. Como $s_3 < t_3$, por la condición *b)* de la definición 6.3.1, $\alpha < \beta$. ◀

Ejemplo 6.3.4 ▶

Sean $\alpha = 1324$ y $\beta = 1342$ dos cadenas en $\{1, 2, 3, 4\}$. En la notación de la definición 6.3.1, $p = q = 4, s_1 = 1, s_2 = 3, s_3 = 2, s_4 = 4, t_1 = 1, t_2 = 3, t_3 = 4,$ y $t_4 = 2$. La i más pequeña para la que $s_i \neq t_i$ es $i = 3$. Como $s_3 < t_3$, por la condición *b)* de la definición 6.3.1, $\alpha < \beta$. ◀

Ejemplo 6.3.5 ▶

Sean $\alpha = 13542$ y $\beta = 21354$ dos cadenas en $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. En la notación de la definición 6.3.1, $s_1 = 1, s_2 = 3, s_3 = 5, s_4 = 4, s_5 = 2, t_1 = 2, t_2 = 1, t_3 = 3, t_4 = 5,$ y $t_5 = 4$. La i más pequeña para la que $s_i \neq t_i$ es $i = 1$. Como $s_1 < t_1$, por la condición *b)* de la definición 6.3.1, $\alpha < \beta$. ◀

Para cadenas de la misma longitud en $\{1, 2, \ldots, 9\}$, el orden lexicográfico es el mismo que el orden numérico en los enteros positivos si se interpretan las cadenas como números decimales (vea los ejemplos 6.3.4 y 6.3.5). Para cadenas de diferente longitud, el orden lexicográfico es diferente del orden numérico (vea el ejemplo 6.3.3). En el resto de esta sección, la palabra *orden* se referirá al orden lexicográfico.

Primero se considera el problema de listar todas las combinaciones r de $\{1, 2, \ldots, n\}$. En nuestro algoritmo, se lista la combinación r $\{x_1, \ldots, x_r\}$ como la cadena $s_1 \cdots s_r$, donde $s_1 < s_2 < \cdots < s_r$ y $\{x_1, \ldots, x_n\} = \{s_1, \ldots, s_r\}$. Por ejemplo, la combinación de 3 $\{6, 2, 4\}$ quedará en la lista como 246.

Se presentarán las combinaciones r de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en orden lexicográfico. Así, la primera cadena en la lista será $12 \cdots r$ y la última cadena listada será $(n - r + 1) \cdots n$.

Ejemplo 6.3.6 ▶

Considere el orden en el que se listan las combinaciones de 5 elementos de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. La primera cadena es 12345, que va seguida de 12346 y 12347. La siguiente cadena es 12356, seguida de 12357. La última cadena será 34567. ◀

Ejemplo 6.3.7 ▶

Encuentre la cadena que sigue a 13457 cuando se listan las combinaciones de 5 de $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Ninguna cadena que comienza con 134 y represente una combinación de 5 de X excede a 13467. Así, la cadena que sigue a 13467 debe comenzar con 135. Como 13567 es la cadena más pequeña que comienza con 135 y representa una combinación de 5 elementos de X, la respuesta es 13567. ◀

Ejemplo 6.3.8 ▶

Encuentre la cadena que sigue a 2367 cuando se listan las combinaciones de 4 de $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Ninguna cadena que comienza con 23 y represente una combinación de 4 de X excede a 2367. Entonces, la cadena que sigue a 2367 debe comenzar con 24. Como 2456 es la cadena más pequeña que comienza con 24 y representa una combinación de 4 elementos de X, la respuesta es 2456. ◀

Se está desarrollando un patrón. Dada una cadena $\alpha = s_1 \cdots s_r$, que representa la combinación r $\{s_1, \ldots, s_r\}$, para encontrar la siguiente cadena $\beta = t_1 \cdots t_r$, primero se encuentra el elemento más a la derecha s_m que no tiene su valor máximo. (s_r puede tener el valor máximo n, s_{n-1} puede tener el valor máximo $n - 1$, etcétera) Entonces,

$$t_i = s_i \quad \text{para } i = 1, \ldots, m - 1.$$

El elemento t_m es igual a $s_m + 1$. Para el resto de la cadena β se tiene

$$t_{m+1} \cdots t_r = (s_m + 2)(s_m + 3) \cdots .$$

El algoritmo es el siguiente.

Algoritmo 6.3.9 **Generación de combinaciones**

Este algoritmo lista todas las combinaciones r de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en orden lexicográfico creciente.

Entrada: r, n
Salida: Todas las combinaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en orden lexicográfico creciente.

```
1.  combinación(r, n) {
2.     for i = 1 to r
3.        s_i = i
4.     println(s_1, . . . , s_r)//imprime la primera combinación r
5.     for i = 2 to C(n, r) {
6.        m = r
7.        val_máx = n
8.        while (s_m == val_máx) {
9.           //encuentra el elemento más a la derecha
             //que no tiene su valor máximo
10.          m = m − 1
11.          val_máx = val_máx − 1
12.       }
13.       //se incrementa el elemento más a la derecha
14.       s_m = s_m + 1
15.       //el resto de los elementos son sucesores de s_m
16.       for j = m + 1 to r
17.          s_j = s_{j−1} + 1
18.       println(s_1, . . . ,s_r)//imprime la i-ésima combinación
19.    }
20. }
```

Ejemplo 6.3.10 ▶ Se mostrará la manera en que el algoritmo 6.3.9 genera la combinación de 5 elementos de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ que sigue a 23467. Se supone que

$$s_1 = 2, \quad s_2 = 3, \quad s_3 = 4, \quad s_4 = 6, \quad s_5 = 7.$$

En la línea 13, se encuentra que s_3 es el elemento más a la derecha que no tiene su valor máximo. En la línea 14, s_3 se iguala a 5. En las líneas 16 y 17, s_4 se iguala a 6 y s_5 se hace igual a 7. En este punto

$$s_1 = 2, \quad s_2 = 3, \quad s_3 = 4, \quad s_4 = 6, \quad s_5 = 7.$$

Se ha generado la combinación de 5, 23567, que sigue a 23467. ◀

Ejemplo 6.3.11 ▶ Las combinaciones de 4 de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ según las lista el algoritmo 6.3.9 son

1234, 1235, 1236, 1245, 1246, 1256, 1345, 1346,
1356, 1456, 2345, 2346, 2356, 2456, 3456. ◀

Igual que el algoritmo para generar las combinaciones r, el algoritmo para generar las permutaciones lista las permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en orden lexicográfico. (El ejercicio 16 pide un algoritmo que genere todas las permutaciones r de un conjunto de n elementos).

Ejemplo 6.3.12 ▶ Para construir la permutación de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ que sigue a 163542, debemos conservar iguales el mayor número posible de dígitos de la izquierda.

¿Puede la permutación que sigue a la permutación dada tener la forma 1635_ _? Como la única permutación de la forma 1635_ _ distinta de la permutación dada es 163524, y 163524 es menor que 163542, la permutación que sigue a la permutación dada no es de la forma 1635_ _.

¿Puede la permutación que sigue a la permutación dada tener la forma 163_ _ _? Los últimos tres dígitos deben ser una permutación de {2, 4, 5}. Como 542 es la permutación más grande de {2, 4, 5}, cualquier permutación que comience con 163 es más pequeña que la permutación dada. Entonces, la permutación que sigue a la que se da no es de la forma 163_ _ _.

La razón para que la permutación que sigue a la permutación dada no pueda comenzar con 1635 o 163 es que, en cualquiera de los dos casos, el resto de los dígitos de la permutación dada (42 y 542, respectivamente) *decrece*. Por lo tanto, al trabajar desde la derecha debemos encontrar el primer dígito d cuyo vecino de la derecha r satisface $d < r$. En nuestro caso, el tercer dígito, 3, tiene esta propiedad. Entonces, la permutación que sigue a la permutación dada comenzará con 16.

El dígito que sigue a 16 debe exceder a 3. Como se desea la siguiente permutación más pequeña, el siguiente dígito es 4, el dígito más pequeño disponible. Entonces, la permutación deseada comienza con 164. Los dígitos restantes 235 deben estar en orden creciente para lograr el valor mínimo. Por lo tanto, la permutación que sigue a la permutación dada es 164235. ◀

Se puede ver que para generar todas la permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$, se comienza con la permutación $12 \cdots n$ y después se usa el método del ejemplo 6.3.12 repetidas veces para generar la siguiente permutación. El proceso termina cuando se genera la permutación $n(n - 1) \cdots 21$.

Ejemplo 6.3.13 ▶

Usando el método del ejemplo 6.3.12, se pueden listar las permutaciones de {1, 2, 3, 4} en orden lexicográfico como

1234,	1243,	1324,	1342,	1423,	1432,	2134,	2143,
2314,	2341,	2413,	2431,	3124,	3142,	3214,	3241,
3412,	3421,	4123,	4132,	4213,	4231,	4312,	4321.

◀

El algoritmo es el siguiente.

Algoritmo 6.3.14

Generación de permutaciones

Este algoritmo lista todas las permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en orden lexicográfico creciente.

Entrada: n

Salida: todas las permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en orden lexicográfico creciente.

```
permutación(n) {
   for i = 1 to n
      s_i = i
   println(s_1, ..., s_n) // imprime la primera permutación
   for i = 2 to n! {
      m = n − 1
      while (s_m > s_{m+1})
         // encuentra el primer decremento trabajando
         // desde la derecha
         m = m − 1
      k = n
      while (s_m > s_k)
         // encuentra el elemento s_k más a la derecha
         // con s_m < s_k
         k = k − 1
      swap(s_m, s_k)
      p = m + 1
      q = n
      while (p < q) {
         // cambia s_{m+1} y s_n, cambia s_{m+2} y s_{n-1}, etc.
         swap(s_p, s_q)
         p = p + 1
```

```
21.            q = q − 1
22.        }
23.        println(s_1, . . . , s_n)//imprime la i-ésima permutación
24.    }
25. }
```

Ejemplo 6.3.15 ▶

Se mostrará la manera en que el algoritmo 6.3.14 genera la permutación que sigue a 163542. Suponga que

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 6, \quad s_3 = 3, \quad s_4 = 5, \quad s_5 = 4, \quad s_6 = 2$$

y que estamos en la línea 6. El índice mayor m que satisface $s_m < s_{m+1}$ es 3. En las líneas 10 a la 13, se encuentra que el índice más grande k que satisface $s_k > s_m$ es 5. En la línea 14, se intercambian s_m y s_k. En este punto, se tiene $s = 164532$. En las líneas 15 a la 22, se invierte el orden de los elementos $s_4s_5s_6 = 532$. Se obtiene la permutación deseada, 164235. ◀

Sección de ejercicios de repaso

1. Defina *orden lexicográfico*.
2. Describa el algoritmo para generar combinaciones r.
3. Describa el algoritmo para generar permutaciones.

Ejercicios

En los ejercicios 1 al 3, encuentre la combinación r que generará el algoritmo 6.3.9 con $n = 7$ después de la combinación r dada.

1. 1356 2. 12367 3. 14567

En los ejercicios 4 al 6, encuentre la permutación que generará el algoritmo 6.3.14 después de la permutación dada.

4. 12354 5. 625431 6. 12876543

7. Para cada cadena en los ejercicios 1 al 3, explique (como en el ejemplo 6.3.10) exactamente la forma en que el algoritmo 6.3.9 genera la siguiente combinación r.
8. Para cada cadena en los ejercicios 4 al 6, explique (como en el ejemplo 6.3.15) exactamente la forma en que el algoritmo 6.3.14 genera la siguiente permutación.
9. Muestre la salida del algoritmo 6.3.9 cuando $n = 6$ y $r = 3$.
10. Muestre la salida del algoritmo 6.3.9 cuando $n = 6$ y $r = 2$.
11. Muestre la salida del algoritmo 6.3.9 cuando $n = 7$ y $r = 5$.
12. Muestre la salida del algoritmo 6.3.14 cuando $n = 2$.
13. Muestre la salida del algoritmo 6.3.14 cuando $n = 3$.
14. Modifique el algoritmo 6.3.9 de manera que la línea 5

    5. for $i = 2$ to $C(n, r)$ {

    se elimine. Base la condición de terminación en el hecho de que la última combinación r tiene todos los elementos s_i iguales a su valor máximo.
15. Modifique el algoritmo 6.3.14 de manera que la línea 5

    5. for $i = 2$ to $n!$ {

    se elimine. Base la condición de terminación en el hecho de que la última permutación tiene los elementos s_i en orden decreciente.
16. Escriba un algoritmo que genere todas las permutaciones r de un conjunto de n elementos.
17. Escriba un algoritmo cuya entrada es una combinación r de $\{1, 2, \ldots, n\}$. La salida es la siguiente combinación r (en orden lexicográfico). La primera combinación r sigue a la última combinación r.
18. Escriba un algoritmo cuya entrada es una permutación de $\{1, 2, \ldots, n\}$. La salida es la siguiente permutación (en orden lexicográfico). La primera permutación sigue a la última permutación.
19. Escriba una algoritmo cuya entrada es una combinación r $\{1, 2, \ldots, n\}$. La salida es la combinación r anterior (en orden lexicográfico). La última combinación r precede a la primera combinación r.
20. Escriba un algoritmo cuya entrada es una permutación de $\{1, 2, \ldots, n\}$. La salida es la permutación anterior (en orden lexicográfico). La última permutación precede a la primera.
21. ★ Escriba un algoritmo recursivo que genere todas las combinaciones r del conjunto $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Divida el problema en dos subproblemas:
    - Elabore una lista de las combinaciones r que contienen a s_1.
    - Elabore una lista de las combinaciones r que no contienen a s_1.
22. Escriba un algoritmo recursivo que genere todas las permutaciones del conjunto $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Divida el problema en n subproblemas:
    - Elabore una lista de las permutaciones que comienzan con s_1.
    - Elabore una lista de las permutaciones que comienzan con s_2.

      .
      .
      .
    - Elabore una lista de las permutaciones que comienzan con s_n.

6.6 ➜ Permutaciones y combinaciones generalizadas

WWW En la sección 6.2, se estudiaron los ordenamientos y las selecciones sin permitir repeticiones. En esta sección se consideran los ordenamientos de sucesiones que contienen repeticiones y selecciones no ordenadas en las que se permiten repeticiones.

Ejemplo 6.6.1 ▶ ¿Cuántas cadenas se pueden formar usando las siguientes letras?

M I S S I S S I P P I

Por la duplicación de letras, las respuesta no es 11! sino un número menor que 11!. Considere el problema de llenar 11 espacios,

— — — — — — — — — — —,

con las letras dadas. Existen $C(11, 2)$ maneras de elegir posiciones para dos letras P. Una vez seleccionadas esas posiciones, existen $C(9, 4)$ maneras de elegir posiciones para cuatro letras S. Una vez seleccionadas esas posiciones, existen $C(5, 4)$ maneras de elegir posiciones para las cuatro letras I. Después de hacer estas selecciones, queda una posición por llenar por la M. Mediante el principio de la multiplicación, el número de maneras de ordenar las letras es

$$C(11,2)C(9,4)C(5,4) = \frac{11!}{2!\,9!}\frac{9!}{4!\,5!}\frac{5!}{4!\,1!} = \frac{11!}{2!\,4!\,4!\,1!} = 34{,}650. \qquad ◀$$

La solución al ejemplo 6.61 adopta una forma agradable. El número 11 que aparece en el numerador es el número total de letras. Los valores en el denominador dan el número de duplicados de cada letra. El método se puede usar para establecer un fórmula general.

Teorema 6.6.2 *Suponga que una sucesión S de n artículos tiene n_1 objetos idénticos del tipo 1, n_2 objetos idénticos del tipo 2, . . . , n_t objetos idénticos del tipo t. Entonces, el número de ordenamientos de S es*

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_t!}.$$

Demostración Se asignan posiciones a cada uno de los n artículos para crear un ordenamiento de S. Se pueden asignar posiciones a los n_1 objetos del tipo 1 de $C(n, n_1)$ maneras. Después de hacer estas asignaciones, se pueden asignar posiciones a los n_2 artículos del tipo 2 de $C(n - n_1, n_2)$ maneras, y así sucesivamente. Por el principio de la multiplicación, el número de ordenamientos es

$$\begin{aligned} &C(n,n_1)C(n-n_1,n_2)C(n-n_1-n_2,n_3)\cdots C(n-n_1-\cdots-n_{t-1},n_t)\\ &= \frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!\,(n-n_1-n_2)!}\cdots\frac{(n-n_1-\cdots-n_{t-1})!}{n_t!\,0!}\\ &= \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_t!}. \end{aligned}$$

Ejemplo 6.6.3 ▶ ¿De cuántas maneras pueden dividirse 8 libros diferentes entre 3 estudiantes si Brenda obtiene 4 libros, y Samuel y Mariana 2 cada uno?

Coloque los libros en algún orden fijo. Ahora considere los ordenamientos de 4 libros de B, 2 libros de S y dos libros de M. Un ejemplo es

B B B S M B M S.

Cada ordenamiento determina una distribución de los libros. Para el ordenamiento anterior, Brenda obtiene los libros 1, 2, 3 y 6, Samuel obtiene los libros 4 y 8, y Mariana los libros

5 y 7. Así, el número de maneras para ordenar *BBBBSSMM* es el número de maneras para distribuir los libros. Por el Teorema 6.6.2, este número es

$$\frac{8!}{4!\,2!\,2!} = 420.$$

◀

Se puede desarrollar otra prueba del Teorema 6.6.2 usando relaciones. Suponga que una sucesión S de n artículos tienen n_i objetos idénticos del tipo i para $i = 1, \ldots, t$. Sea X el conjunto de n elementos obtenidos de S al considerar los n_i objetos diferentes del tipo i *distintos* para $i = 1, \ldots, t$. Por ejemplo, si S es la sucesión de letras

$M\,I\,S\,S\,I\,S\,S\,I\,P\,P\,I,$

X sería el conjunto

$$\{M, I_1, S_1, S_2, I_2, S_3, S_4, I_3, P_1, P_2, I_4\}.$$

Se define una relación R en el conjunto de todas las permutaciones de X por la regla p_1Rp_2 si p_2 se obtiene de p_1 permutando el orden de los objetos tipo 1 (pero sin cambiar su posición) y/o permutando el orden de los objetos tipo 2 (pero sin cambiar su posición)... y/o permutando el orden de los objetos tipo t (pero sin cambiar su posición); por ejemplo,

$$(I_1S_1S_2I_2S_3S_4I_3P_1P_2I_4M)\ R\ (I_2S_3S_2I_1S_4S_1I_3P_1P_2I_4M).$$

Se verifica de manera directa que R es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las permutaciones de X.

La clase de equivalencia que contiene la permutación p consiste en todas las permutaciones de X que son idénticas si consideramos los objetos tipo i idénticos para $i = 1, \ldots, t$. Entonces cada clase de equivalencia tiene $n_1!n_2! \cdots n_t!$ elementos. Como una clase de equivalencia está determinada por un ordenamiento de S, el número de ordenamientos de S es igual al número de clases de equivalencia. Existen $n!$ permutaciones de X y, por el Teorema 3.2.15, el número de ordenamientos de S es

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_t!}.$$

A continuación se estudiará el problema de contar selecciones no ordenadas cuando se permiten repeticiones.

Ejemplo 6.6.4 ▶

Considere 3 libros: de computación, física e historia. Suponga que la biblioteca tienen al menos 6 copias de cada uno. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 6 libros?

El problema es elegir, sin importar el orden, selecciones de 6 elementos del conjunto {computación, física, historia}, con repeticiones permitidas. Una selección se determina de manera única mediante el número seleccionado de cada tipo de libro. Una selección en particular se denota como

Computación	Física	Historia
x x x	|x x|	x

Se ha designado la selección que consiste en 3 libros de computación, 2 de física y 1 de historia. Otro ejemplo de una selección es

Computación	Física	Historia
	|x x x x|	x x

que denota la selección que consiste en cero libros de computación, 4 de física y 2 de historia. Se observa que cada ordenamiento de seis x y dos | denota una selección. Entonces el problema es contar el número de este tipo de ordenamientos. Pero esto es justo el número de maneras

$$C(8, 2) = 28$$

de elegir dos posiciones para las | de ocho posiciones posibles. Así, existen 28 maneras de seleccionar seis libros. ◀

El método usado en el ejemplo 6.6.4 se puede usar para derivar un resultado general.

Teorema 6.6.5

Si X es un conjunto que contiene t elementos, el número de selecciones no ordenadas de k elementos de X, con repeticiones, es

$$C(k+t-1, t-1) = C(k+t-1, k).$$

Demostración Sea $X = \{a_1, \ldots, a_t\}$. Considere los $k+t-1$ espacios

$$\_\_\_ \cdots \_\_$$

y $k+t-1$ símbolos que consisten en k símbolos $\times$ y $t-1$ símbolos $|$. Cada colocación de estos símbolos en los espacios determina una selección. El número n_1 de $\times$ hasta encontrar la primera $|$ representa la selección de n_1 a_1; el número n_2 de $\times$ entre la primera y la segunda $|$ representa la selección de n_2 a_2; y así sucesivamente. Como hay $C(k+t-1, t-1)$ maneras de seleccionar las posiciones para las $|$, también hay $C(k+t-1, t-1)$ selecciones. Esto es igual a $C(k+t-1, k)$, el número de maneras de seleccionar las posiciones para las $\times$; entonces existen

$$C(k+t-1, t-1) = C(k+t-1, k)$$

selecciones no ordenadas de k elementos de X, con repeticiones.

Ejemplo 6.6.6 ▶

Suponga que existen tres pilas de pelotas rojas, azules y verdes, y que cada pila contiene al menos 8 pelotas.

a) ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 8 pelotas?

b) ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 8 pelotas si debe tenerse al menos una pelota de cada color?

Por el Teorema 6.6.5, el número de maneras para seleccionar 8 pelotas es

$$C(8+3-1, 3-1) = C(10, 2) = 45.$$

También se puede usar el Teorema 6.6.5 para resolver el inciso *b)* si primero se selecciona una pelota de cada color. Para completar la selección, deben elegirse 5 pelotas adicionales. Esto se puede hacer de

$$C(5+3-1, 3-1) = C(7, 2) = 21$$

maneras. ◀

Ejemplo 6.6.7 ▶

¿De cuántas maneras pueden distribuirse 12 libros idénticos de matemáticas entre los estudiantes Ana, Beatriz, Carmen y Daniel?

Se puede usar el Teorema 6.6.5 para resolver este problema si se considera como un problema de etiquetar cada libro con el nombre del estudiante que lo recibe. Esto es lo mismo que seleccionar 12 artículos (los nombres de los estudiantes) del conjunto {Ana, Beatriz, Carmen, Daniel}, con repeticiones permitidas. Por el Teorema 6.6.5, el número de maneras de hacer esto es

$$C(12+4-1, 4-1) = C(15, 3) = 455.$$ ◀

Ejemplo 6.6.8 ▶

a) ¿Cuántas soluciones en enteros no negativos hay para la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 29? \tag{6.6.1}$$

b) ¿Cuántas soluciones enteras hay para (6.6.1) que satisfacen $x_1 > 0$, $x_2 > 1$, $x_3 > 2$, $x_4 \geq 0$?

a) Cada solución de (6.6.1) es equivalente a seleccionar 29 elementos, x_i del tipo i,

$i = 1, 2, 3, 4$. Según el Teorema 6.6.5, el número de selecciones es

$$C(29 + 4 - 1, 4 - 1) = C(32, 3) = 4960.$$

b) Cada solución de (6.6.1) que satisface las condiciones dadas es equivalente a seleccionar 29 elementos, x_i del tipo i, $i = 1, 2, 3, 4$, donde, además, debemos tener al menos un elemento tipo 1, al menos dos elementos tipo 2 y al menos 3 elementos tipo 3. Primero se selecciona un elemento tipo 1, dos elementos tipo 2 y tres elementos tipo 3. Después, se eligen 23 elementos adicionales. Por el Teorema 6.6.5, esto se puede hacer de

$$C(23 + 4 - 1, 4 - 1) = C(26, 3) = 2600$$

maneras. ◀

Ejemplo 6.6.9 ▶

¿Cuántas veces se ejecuta la instrucción de imprimir?

```
for i1 = 1 to n
  for i2 = 1 to i1
    for i3 = 1 to i2
      ⋱
        for ik = 1 to ik-1
          println(i1, i2, . . . , ik)
```

Observe que cada línea de salida consiste en k enteros

$$i_1 i_2 \cdots i_k, \tag{6.6.2}$$

donde

$$n \geq i_1 \geq i_2 \geq \cdots \geq i_k \geq 1, \tag{6.6.3}$$

y ocurre cada sucesión (6.6.2) que satisface (6.6.3). Entonces el problema es contar el número de maneras de elegir k enteros, con repeticiones permitidas, del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. [Cualquiera de estas selecciones se puede ordenar para producir (6.6.3).] Por el Teorema 6.6.5, el número total de selecciones posibles es

$$C(k + n - 1, k).$$ ◀

Sugerencias para resolver problemas

Las fórmulas de la sección 6.6 generalizan las fórmulas de la sección 6.2 al permitir repeticiones. Una *permutación* es un ordenamiento de $s_1, \ldots, s_n$, donde las s_i son *distintas*. Existen $n!$ permutaciones. Ahora suponga que se tienen n artículos que contienen *duplicados*, en particular, n_i objetos idénticos de tipo i, para $i = 1, \ldots, t$. Entonces el número de ordenamientos es

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_t!}.$$

Para determinar si una de estas fórmulas es relevante para un problema específico, primero asegúrese de que el problema pide *ordenamientos*. Si los artículos que se van a ordenar son *distintos*, hay que usar la fórmula para permutaciones. Por otro lado, si hay *duplicados* entre los artículos que se van a ordenar, es conveniente utilizar la fórmula

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_t!}.$$

Una *combinación r* es una selección no ordenada de r elementos tomados de n elementos, *sin permitir repeticiones*. Existen $C(n, r)$ combinaciones r. Ahora suponga que se desea contar las selecciones no ordenadas de k elementos entre t elementos, *con repeticiones permitidas*. El número de estas selecciones es

$$C(k + t - 1, t - 1).$$

Para determinar si una de estas fórmulas es relevante para un problema determinado, primero asegúrese de que el problema pide selecciones *no ordenadas*. Si los artículos deben elegirse *sin repetición*, se utiliza la fórmula de combinación. Por otro lado, si los artículos deben elegirse *con repetición*, se emplea la fórmula

$$C(k+t-1, t-1).$$

La tabla siguiente resume las fórmulas:

	Sin repetición	*Con repetición*
Selecciones ordenadas	$n!$	$n!/(n_1!\cdots n_t!)$
Selecciones no ordenadas	$C(n,r)$	$C(k+t-1, t-1)$

Sección de ejercicios de repaso

1. ¿Cuántos ordenamientos existen de n elementos de t tipos con n_i objetos idénticos del tipo i? ¿Cómo se deriva esta fórmula?

2. ¿Cuántas selecciones no ordenadas de k elementos hay, tomadas de un conjunto de t elementos, con repeticiones? ¿Cómo se deriva esta fórmula?

Ejercicios

En los ejercicios 1 al 3, determine el número de cadenas que se pueden formar al ordenar las letras indicadas.

1. *GUIDE* 2. *SCHOOL*
3. *SALESPERSONS*
4. ¿Cuántas cadenas se pueden formar ordenando las letras *SALESPERSONS* si las cuatro *S* deben ser consecutivas?
5. ¿Cuántas cadenas se pueden formar ordenando las letras *SALESPERSONS* si dos *S* no pueden estar juntas?
6. ¿Cuántas cadenas se pueden formar ordenando las letras *SCHOOL* si se usan algunas o todas las letras?

Los ejercicios 7 al 9 se refieren a las selecciones entre las historietas cómicas Acción, Superman, Capitán Marvel, Archie, X-Man y Nancy.

7. ¿Cuántas maneras hay para seleccionar 6 historietas?
8. ¿Cuántas maneras hay para seleccionar 10 historietas?
9. ¿Cuántas maneras hay para seleccionar 10 historietas si elegimos al menos una de cada título?
10. ¿Cuántas rutas hay en el sistema de coordenadas xyz normal desde el origen al punto (i, j, k), donde i, j y k son enteros positivos, si estamos limitados a pasos unitarios en la dirección positiva de x, en la dirección positiva de y y en la dirección positiva de z?
11. Un examen tiene 12 problemas. ¿De cuántas maneras se pueden asignar puntos (enteros) a los problemas si el total es 100 y cada problema vale por lo menos 5 puntos?
12. Un coleccionista de bicicletas tiene 100 de ellas. ¿De cuántas maneras es posible guardar las bicicletas en cuatro almacenes si las bicicletas y los almacenes se consideran diferentes?
13. Un coleccionista de bicicletas tiene 100 de ellas. ¿De cuántas maneras se pueden almacenar las bicicletas en cuatro almacenes si las bicicletas son indistinguibles, pero los almacenes se consideran diferentes?
14. ¿De cuántas maneras se pueden dividir 10 libros diferentes entre 3 estudiantes si el primer estudiante obtiene 5 libros, el segundo 3 y el tercero 2 libros?

Los ejercicios 15 al 21 se refieren a pilas idénticas de pelotas rojas, azules y verdes, donde cada pila contiene por lo menos 10 pelotas.

15. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 10 pelotas?
16. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 10 pelotas si debe elegirse al menos una pelota roja?
17. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 10 pelotas si debe haber al menos una roja, al menos 2 azules y al menos 3 verdes?
18. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 10 pelotas si debe haber exactamente una pelota roja?
19. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 10 pelotas si deben elegirse exactamente una pelota roja y al menos una azul?
20. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 10 pelotas si debe haber cuando mucho una roja?
21. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 10 pelotas si las pelotas rojas deben ser el doble que las verdes?

En los ejercicios 22 al 29, encuentre el número de soluciones enteras de

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

sujeto a las condiciones indicadas.

22. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$
23. $x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_3 \geq 1$
24. $x_1 = 1, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$
25. $x_1 \geq 0, x_2 > 0, x_3 = 1$
26. $0 \leq x_1 \leq 6, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

★27. $0 \leq x_1 < 6, 1 \leq x_2 < 9, x_3 \geq 0$

★28. Encuentre el número de soluciones enteras de

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$$

que satisfacen $0 \leq x_1 \leq 4$, $0 \leq x_2 \leq 5$, $0 \leq x_3 \leq 8$, y $0 \leq x_4 \leq 9$.

29. Demuestre que el número de soluciones en enteros no negativos de la desigualdad

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq M,$$

donde M es un entero no negativo, es $C(M + n, n)$.

30. ¿Cuántos enteros entre 1 y 1,000,000 tienen la suma de dígitos igual a 15?

★ **31.** ¿Cuántos enteros entre 1 y 1,000,000 tienen la suma de dígitos igual a 20?

32. ¿Cuántas maneras de repartir en el bridge hay? (Repartir es lo mismo que hacer una partición de la baraja de 52 cartas en 4 manos, cada una con 13 cartas).

33. ¿De cuántas maneras pueden elegirse tres equipos que contienen 4, 2 y 2 personas, entre un grupo de 8 personas?

34. Una ficha de *dominó* es un rectángulo dividido en dos cuadros, con cada cuadro numerado de 0, 1, . . . , 6, con repeticiones. ¿Cuántas fichas diferentes de dominó hay?

Los ejercicios 35 al 40 se refieren a una bolsa que contiene 20 pelotas: 6 rojas, 6 verdes y 8 moradas.

35. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 5 pelotas si todas se consideran diferentes?

36. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 5 pelotas si las pelotas del mismo color se consideran idénticas?

37. ¿De cuántas maneras se pueden sacar 2 pelotas rojas, 3 verdes y 2 moradas, si todas las pelotas se consideran diferentes?

38. Se sacan 5 pelotas y se remplazan. Después se sacan otras 5 pelotas. ¿De cuántas maneras puede hacerse esto si las pelotas se consideran diferentes?

39. Se sacan 5 pelotas sin remplazarlas. Después se sacan otras 5 pelotas. ¿De cuántas maneras puede hacerse esto si las pelotas se consideran diferentes?

40. Se sacan 5 pelotas y al menos una es roja, después se remplazan. Luego se sacan 5 pelotas y cuando mucho una es verde. ¿De cuántas maneras puede hacerse esto si las pelotas se consideran diferentes?

41. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 15 libros de matemáticas idénticos entre 6 estudiantes?

42. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 15 libros de computación idénticos y 10 libros de psicología idénticos entre 5 estudiantes?

43. ¿De cuántas maneras se pueden colocar 10 pelotas idénticas en 12 cajas, si cada caja puede contener una pelota?

44. ¿De cuántas maneras se pueden colocar 10 pelotas idénticas en 12 cajas, si cada caja puede contener 10 pelotas?

45. Demuestre que $(kn)!$ es divisible entre $(n!)^k$.

46. Considere

for $i_1 = 1$ to n
  for $i_2 = 1$ to i_1
    println(i_1, i_2)

y el ejemplo 6.6.9 para deducir

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

★ **47.** Use el ejemplo 6.6.9 para probar la fórmula

$$C(k-1, k-1) + C(k, k-1) + \cdots + C(n+k-2, k-1) = C(k+n-1, k).$$

48. Escriba un algoritmo que liste todas las soluciones en enteros no negativos de

$$x_1 + x_2 + x_3 = n.$$

49. ¿Qué está equivocado en el siguiente argumento, que pretende contar el número de particiones de un conjunto de 10 elementos en 8 subconjuntos (no vacíos)?

Liste los elementos con espacios entre ellos:

$$x_1 — x_2 — x_3 — x_4 — x_5 — x_6 — x_7 — x_8 — x_9 — x_{10}.$$

Cada vez que se llenan 7 de los 9 espacios con 7 barras verticales, se obtiene una partición de $\{x_1, \ldots, x_{10}\}$ en 8 subconjuntos. Por ejemplo, la partición $\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3, x_4\} \{x_5\}, \{x_6\}, \{x_7, x_8\} \{x_9\}, \{x_{10}\}$ se representaría como

$$x_1 \mid x_2 \mid x_3 x_4 \mid x_5 \mid x_6 \mid x_7 x_8 \mid x_9 \mid x_{10}.$$

Entonces, la solución al problema es $C(9, 7)$.

Los ejercicios 50 y 51 se refieren a 10 discos compactos idénticos que se dan al azar a María, Iván y Juan.

50. ¿Cuál es la probabilidad de que cada persona reciba al menos dos discos compactos?

51. ¿Cuál es la probabilidad de que Iván reciba exactamente 3 discos compactos?

6.7 → Coeficientes binomiales e identidades combinatorias

A primera vista, la expresión $(a + b)^n$ no tiene mucho que ver con combinaciones; pero como se verá en esta sección, es posible obtener una fórmula para la expansión de $(a + b)^n$ usando la fórmula para el número de combinaciones r de n objetos. Con frecuencia, una expresión algebraica se relaciona con algún proceso de conteo. Varias técnicas de conteo avanzadas usan este tipo de métodos (vea [Riordan; y Tucker]).

WWW

El **teorema binomial** proporciona una fórmula para los coeficientes en la expansión de $(a + b)^n$. Como

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ factores}}, \quad \textbf{(6.7.1)}$$

la expresión es el resultado de seleccionar a o b en cada uno de los n factores, multiplicando

TABLA 6.7.1 ■ Cálculo de $(a+b)^3$.

Selección en el primer factor $(a+b)$	*Selección en el segundo factor* $(a+b)$	*Selección en el tercer factor* $(a+b)$	*Producto de selecciones*
a	a	a	$aaa = a^3$
a	a	b	$aab = a^2b$
a	b	a	$aba = a^2b$
a	b	b	$abb = ab^2$
b	a	a	$baa = a^2b$
b	a	b	$bab = ab^2$
b	b	a	$bba = ab^2$
b	b	b	$bbb = b^3$

las selecciones y después sumando todos los productos obtenidos. Por ejemplo, en la expansión de $(a+b)^3$, se elige ya sea a o b en el primer factor $(a+b)$; ya sea a o b en el segundo factor $(a+b)$; y ya sea a o b en el tercer factor $(a+b)$; se multiplican las selecciones y luego se suman los productos obtenidos. Si se elige a en todos los factores y se multiplica, el resultado es el término aaa. Si se elige a en el primer factor, b en el segundo y a en el tercero y se multiplica, se obtiene el término aba. La tabla 6.7.1 muestra todas la posibilidades. Si se suman los productos de todas las selecciones, se obtiene

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b)\\ &= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb\\ &= a^3 + a^2b + a^2b + ab^2 + a^2b + ab^2 + ab^2 + b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

En (6.7.1), un término de la forma $a^{n-k}b^k$ surge al elegir b en k factores y a en los otros $n-k$ factores. Pero esto se puede hacer de $C(n, k)$ maneras, ya que $C(n, k)$ cuenta el número de maneras de seleccionar k objetos entre n objetos. Entonces $a^{n-k}b^k$ aparece $C(n, k)$ veces. Se concluye que

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= C(n,0)a^nb^0 + C(n,1)a^{n-1}b^1 + C(n,2)a^{n-2}b^2\\ &\quad + \cdots + C(n,n-1)a^1b^{n-1} + C(n,n)a^0b^n.\end{aligned} \tag{6.7.2}$$

Este resultado se conoce como el *teorema binomial.*

Teorema 6.7.1

Teorema binomial

Si a y b son números reales y n es un entero positivo, entonces

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^{n-k}b^k.$$

Demostración La demostración precede al enunciado del teorema.

El teorema binomial también se demuestra usando inducción sobre n (vea el ejercicios 16).

Los números $C(n, r)$ se conocen como **coeficientes binomiales** porque aparecen en la expansión (6.7.2) del binomio $a+b$ elevado a una potencia.

Ejemplo 6.7.2 ▶

Tomando $n = 3$ en el Teorema 6.7.1, se obtiene

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= C(3,0)a^3b^0 + C(3,1)a^2b^1 + C(3,2)a^1b^2 + C(3,3)a^0b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

◀

Ejemplo 6.7.3 ▶

Obtenga la expansión de $(3x - 2y)^4$ usando el teorema del binomio.

Si se toma $a = 3x$, $b = -2y$ y $n = 4$ en el Teorema 6.7.1, se obtiene

$$\begin{aligned}(3x-2y)^4 &= (a+b)^4\\ &= C(4,0)a^4b^0 + C(4,1)a^3b^1 + C(4,2)a^2b^2\\ &\quad + C(4,3)a^1b^3 + C(4,4)a^0b^4\\ &= C(4,0)(3x)^4(-2y)^0 + C(4,1)(3x)^3(-2y)^1\\ &\quad + C(4,2)(3x)^2(-2y)^2 + C(4,3)(3x)^1(-2y)^3\\ &\quad + C(4,4)(3x)^0(-2y)^4\\ &= 3^4x^4 + 4\cdot 3^3x^3(-2y) + 6\cdot 3^2x^2(-2)^2y^2\\ &\quad + 4(3x)(-2)^3y^3 + (-2)^4y^4\\ &= 81x^4 - 216x^3y + 216x^2y^2 - 96xy^3 + 16y^4.\end{aligned}$$

◀

Ejemplo 6.7.4 ▶

Encuentre el coeficiente de a^5b^4 en la expansión de $(a+b)^9$.

El término que implica a a^5b^4 surge en el teorema del binomio al tomar $n = 9$ y $k = 4$:

$$C(n,k)a^{n-k}b^k = C(9,4)a^5b^4 = 126a^5b^4.$$

Entonces, el coeficiente de a^5b^4 es 126. ◀

Ejemplo 6.7.5 ▶

Encuentre el coeficiente de $x^2y^3z^4$ en la expansión de $(x+y+z)^9$.

Como

$$(x+y+z)^9 = (x+y+z)(x+y+z)\cdots(x+y+z) \quad \text{(nueve términos)},$$

se obtiene $x^2y^3z^4$ cada vez que se multiplican las x seleccionadas en 2 de los 9 términos, las y seleccionadas en 3 de los 9 términos y las z seleccionadas en 4 de los 9 términos. Se pueden elegir dos términos para las x de $C(9, 2)$ maneras. Una vez hecha esta selección, se pueden elegir tres términos para las y de $C(7,3)$ maneras. Esto deja los cuatro términos restantes para las z. Entonces, el coeficiente de $x^2y^3z^4$ en la expansión de $(x+y+z)^9$ es

$$C(9,2)C(7,3) = \frac{9!}{2!\,7!}\frac{7!}{3!\,4!} = \frac{9!}{2!\,3!\,4!} = 1260.$$

◀

```
          1
        1   1
      1   2   1
    1   3   3   1
  1   4   6   4   1
1   5  10  10   5   1
 .        .        .
```

Figura 6.7.1 Triángulo de Pascal.

Es posible escribir los coeficientes binomiales en un esquema triangular llamado **triángulo de Pascal** (vea la figura 6.7.1). El contorno está formado por unos, y cualquier valor interior es la suma de los números arriba de él. Esta relación se establece formalmente en el siguiente teorema. La demostración es un argumento combinatorio. Una identidad que se obtiene de un proceso de conteo se llama **identidad combinatoria** y el argumento que lleva a su formulación se llama **argumento combinatorio**.

WWW

Teorema 6.7.6

$$C(n+1,k) = C(n,k-1) + C(n,k)$$

para $1 \le k \le n$.

Demostración Sea X un conjunto de n elementos. Se elige $a \notin X$. Entonces $C(n+1, k)$ es el número de subconjuntos de k elementos de $Y - X \cup \{a\}$. Ahora los subconjuntos de k elementos de Y se pueden dividir en dos clases ajenas:

1. Subconjuntos de Y que no contienen a a.
2. Subconjuntos de Y que contienen a a.

Los subconjuntos de la clase 1 son sólo subconjuntos de k elementos de X y existen $C(n, k)$ de ellos. Cada subconjunto de la clase 2 consiste en un subconjunto de $(k-1)$ elementos de X junto con a y existen $C(n, k-1)$ de ellos. Por lo tanto,

$$C(n+1, k) = C(n, k-1) + C(n, k)$$

El Teorema 6.7.6 también se demuestra mediante el Teorema 6.2.17 (ejercicios 17 de esta sección).

La sección finaliza mostrando cómo emplear el teorema binomial (Teorema 6.7.1) y el Teorema 6.7.6 para derivar otras identidades combinatorias.

Ejemplo 6.7.7 ▶ Use el teorema binomial para derivar la ecuación

$$\sum_{k=0}^{n} C(n, k) = 2^n. \tag{6.7.3}$$

La suma es la misma que la suma en el teorema binomial,

$$\sum_{k=0}^{n} C(n, k) a^{n-k} b^k,$$

excepto que falta la expresión $a^{n-k}b^k$. Una manera de "eliminar" esta expresión es hacer $a = b = 1$, en cuyo caso el teorema binomial se convierte en

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n, k) 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} C(n, k).$$

◀

También es posible probar la ecuación (6.7.3) mediante un argumento combinatorio. Dado un conjunto X de n elementos, $C(n, k)$ cuenta el número de subconjuntos de k elementos. Así, el lado derecho de la ecuación (6.7.3) cuenta el número de subconjuntos de X. Pero el número de subconjuntos de X es 2^n; se ha probado de nuevo (6.7.3).

Ejemplo 6.7.8 ▶ Use el Teorema 6.7.6 para demostrar que

$$\sum_{i=k}^{n} C(i, k) = C(n+1, k+1). \tag{6.7.4}$$

Se usa el Teorema 6.7.6 en la forma

$$C(i, k) = C(i+1, k+1) - C(i, k+1)$$

para obtener

$$\begin{aligned} &C(k, k) + C(k+1, k) + C(k+2, k) + \cdots + C(n, k) \\ &\quad = 1 + C(k+2, k+1) - C(k+1, k+1) + C(k+3, k+1) \\ &\qquad - C(k+2, k+1) + \cdots + C(n+1, k+1) - C(n, k+1) \\ &\quad = C(n+1, k+1). \end{aligned}$$

◀

El ejercicio 47 de la sección 6.6 presenta otra manera de demostrar la ecuación (6.7.4).

Ejemplo 6.7.9 ▶ Use la ecuación (6.7.4) para encontrar la suma

$$1 + 2 + \ldots + n.$$

Se escribe

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+n &= C(1,1)+C(2,1)+\cdots+C(n,1) \\ &= C(n+1,2) \qquad \text{la ecuación (6.7.4)} \\ &= \frac{(n+1)n}{2}. \end{aligned}$$

◀

Sección de ejercicios de repaso

1. Enuncie el teorema binomial.
2. Explique cómo se deriva el teorema binomial.
3. ¿Qué es el triángulo de Pascal?
4. Establezca las fórmula que se utilizan para generar el triángulo de Pascal.

Ejercicios

1. Expanda $(x+4)^4$ usando el teorema binomial
2. Expanda $(2c-3d)^5$ usando el teorema binomial.

En los ejercicios 3 al 9, encuentre el coeficiente del término cuando la expresión se expande.

3. x^4y^7; $(x+y)^{11}$
4. s^6t^6; $(2s-t)^{12}$
5. $x^2y^3z^5$; $(x+y+z)^{10}$
6. $w^2x^3y^2z^5$; $(2w+x+3y+z)^{12}$
7. a^2x^3; $(a+x+c)^2(a+x+d)^3$
8. a^2x^3; $(a+ax+x)(a+x)^4$
9. a^3x^4; $(a+\sqrt{ax}+x)^2(a+x)^5$

En los ejercicios 10 al 12, encuentre el número de términos de la expansión de cada expresión.

10. $(x+y+z)^{10}$
11. $(w+x+y+z)^{12}$

★12. $(x+y+z)^{10}(w+x+y+z)^2$

13. Encuentre el siguiente renglón del triángulo de Pascal a partir del renglón

1 7 21 35 35 21 7 1.

14. *a)* Demuestre que $C(n,k) < C(n,k+1)$ si y sólo si $k < (n-1)/2$.

b) Use el inciso *a)* para deducir que el máximo de $C(n,k)$ para $k = 0, 1, \ldots, n$ es $C(n, \lfloor n/2 \rfloor)$.

15. Use el teorema binomial para demostrar que

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n,k).$$

16. Use inducción sobre n para probar el teorema binomial.
17. Pruebe el teorema binomial 6.7.6 usando el teorema 6.2.17.
18. Dé un argumento combinatorio para demostrar que

$$C(n,k) = C(n,n-k).$$

★19. Demuestre la ecuación (6.7.4) mediante un argumento combinatorio.

20. Encuentre la suma

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1)n.$$

★21. Use la ecuación (6.7.4) para derivar una fórmula para

$$1^2+2^2+\cdots+n^2.$$

22. Use el teorema binomial para demostrar que

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k C(n,k) = 3^n.$$

23. Suponga que n es par. Pruebe que

$$\sum_{k=0}^{n/2} C(n,2k) = 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n/2} C(n,2k-1).$$

24. Pruebe

$$(a+b+c)^n = \sum_{0 \le i+j \le n} \frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!} a^i b^j c^{n-i-j}.$$

25. Use el ejercicio 24 para escribir la expansión de $(x+y+z)^3$.
26. Pruebe

$$3^n = \sum_{0 \le i+j \le n} \frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!}.$$

★27. Dé un argumento combinatorio para probar que

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k)^2 = C(2n,n).$$

28. Pruebe

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} C(n,k)kx^{k-1}.$$

29. Use el resultado del ejercicio 28 para demostrar que

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kC(n,k). \qquad \textbf{(6.7.5)}$$

★30. Pruebe la ecuación (6.7.5) por inducción.

31. Una *sucesión de suavizado* $b_0, \ldots, b_{k-1}$ es una sucesión (finita) que satisface $b_i \ge 0$ para $i = 0, \ldots, k-1$ y $\sum_{i=0}^{k-1} b_i = 1$. Un *suavizado de la sucesión (infinita)* $a_1, a_2, \ldots$ *por la sucesión de suavizado* $b_0, \ldots, b_{k-1}$ es la sucesión $\{a'_j\}$ definida por

$$a'_j = \sum_{i=0}^{k-1} a_{i+j} b_i.$$

La idea es que al promediar se suaviza el ruido en los datos.

El *suavizador binomial de tamaño* k es la sucesión

$$\frac{B_0}{2^n}, \ldots, \frac{B_{k-1}}{2^n},$$

donde $B_0, \ldots, B_{k-1}$ es el renglón n del triángulo de Pascal (el renglón 0 es el renglón superior).

Sea c_0, c_1 la sucesión de suavizado definida por $c_0 = c_1 = 1/2$. Demuestre que si c suaviza a una sucesión a, c suaviza a la sucesión que se obtiene, y así sucesivamente k veces; entonces la sucesión que resulta se obtiene mediante un suavizado de a por el suavizador binomial de tamaño $k+1$.

32. En el ejemplo 6.1.6 se demostró que existen 3^n pares ordenados (A, B) que satisfacen $A \subseteq B \subseteq X$, donde X es un conjunto de n elementos. Derive este resultado considerando los casos $|A| = 0$, $|A| = 1, \ldots, |A| = n$, y después usando el teorema binomial.

33. Demuestre que

$$\sum_{k=m}^{n} C(k, m) H_k = C(n+1, m+1) \left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1} \right)$$

para toda $n \geq m$, donde H_k, el k-ésimo número armónico, está definido como

$$H_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}.$$

6.8 ➜ El principio del palomar

El **principio del palomar** (también conocido como el *principio de la pichonera, principio de la cajonera de Dirichlet* o el *principio de la caja de zapatos*) suele ser útil al responder la pregunta: ¿Hay un elemento que tiene una propiedad dada? Cuando se aplica con éxito el principio del palomar, sólo indica que existe el objeto; el principio no dice cómo encontrar el objeto ni cuántos objetos hay.

WWW

La primera versión del principio del palomar que se estudiará asegura que si n palomas vuelan y entran a k palomares y $k < n$, algunos palomares contendrán al menos dos palomas (figura 6.8.1). La razón por la que esta afirmación es cierta se aprecia mediante un argumento por contradicción. Si la conclusión es falsa, cada palomar contiene cuando mucho una paloma y, en este caso, se puede rendir cuenta de cuando mucho k palomas. Como hay n palomas y $n > k$, se tiene una contradicción.

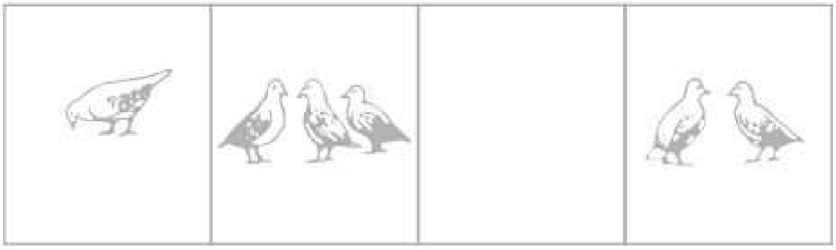


Figura 6.8.1 $n = 6$ palomas en $k = 4$ palomares. Algún palomar contiene al menos dos palomas.

Principio del palomar (primera forma)

Si n palomas vuelan a los palomares y $k < n$, algunos palomares contienen al menos dos palomas.

Se observa que el principio del palomar no establece cómo localizar el hoyo que contiene dos palomas o más. Sólo asegura la *existencia* de un hoyo con dos palomas o más.

Para aplicar el principio del palomar, debemos decidir qué objetos tendrán el papel de palomas y qué objetos tendrán el papel de palomares. El primer ejemplo ilustra una posibilidad.

Ejemplo 6.8.1 ▶

Diez personas tienen nombres de pila Alicia, Bernardo y Carlos y apellidos López, Maza y Noriega. Demuestre que al menos dos personas tienen el mismo nombre y apellido.

Existen nueve nombres posibles para las 10 personas. Si se piensa en las personas como palomas y en los nombres como los palomares, se puede considerar que la asignación de nombres a personas es lo mismo que asignar palomares a las palomas. Por el principio del palomar, algún nombre (palomar) se asigna al menos a dos personas (palomas). ◀

Se enunciará de otra manera el principio del palomar.

Principio del palomar (segunda forma)

Si f es una función de un conjunto finito X a un conjunto finito Y y $|X| > |Y|$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$ para alguna $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$.

La segunda forma del principio del palomar se reduce a la primera forma si X se define como el conjunto de palomas y Y el conjunto de palomares. Se asigna la paloma x al hoyo $f(x)$. Por la primera forma del principio del palomar, al menos dos palomas, $x_1, x_2 \in X$, se asignan al mismo palomar; es decir, $f(x_1) = f(x_2)$ para alguna $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$.

Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación de la segunda forma del principio del palomar.

Ejemplo 6.8.2 ▶

Si 20 procesadores están interconectados, demuestre que al menos dos de ellos tienen conexión directa al mismo número de procesadores.

Denote los procesadores como 1, 2, . . . , 20. Sea a_i el número de procesadores a los que el procesador i está conectado directamente. Debe demostrarse que $a_i = a_j$ para alguna $i \neq j$. El dominio de la función a es $X = \{1,2, \ldots, 20\}$ y el recorrido o imagen Y es un subconjunto de $\{0,1, \ldots, 19\}$. Por desgracia, $|X| = \{0,1, \ldots, 19\}$ y no es posible usar de inmediato la segunda forma del principio del palomar.

Se examinará la situación con más detalle. Observe que no se puede tener $a_i = 0$, para alguna i, y $a_j = 19$ para alguna j, porque se tendría un procesador (el i-ésimo procesador) sin conectar a otro procesador y, al mismo tiempo, otro procesador (el j-ésimo) conectado a todos los otros procesadores (incluso el i-ésimo). Entonces, el recorrido Y es un subconjunto ya sea de $\{0,1, \ldots, 18\}$ o bien de $\{1,2, \ldots, 19\}$. En cualquier caso, $|Y| < 20 = |X|$. Por la segunda forma del principio del palomar, $a_i = a_j$ para alguna $i \neq j$, como se desea. ◀

Ejemplo 6.8.3 ▶

Demuestre que si se seleccionan 151 cursos diferentes de computación numerados entre 1 y 300 inclusive, al menos dos tienen números consecutivos.

Sean los números seleccionados

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_{151}. \tag{6.8.1}$$

Los 302 números que consisten en los números (6.8.1) junto con

$$c_1 + 1, \quad c_2 + 1, \quad \ldots, \quad c_{151} + 1 \tag{6.8.2}$$

tienen valores que van del 1 al 301. Por la segunda forma del principio del palomar, al menos dos de estos valores coinciden. Los números (6.8.1) son todos diferentes y, por lo mismo, los números (6.8.2) también son distintos. Entonces debe ocurrir que uno en (6.8.1) y uno en (6.8.2) son iguales. Así, se tiene

$$c_i = c_j + 1$$

y el curso c_i sigue al curso c_j. ◀

Ejemplo 6.8.4 ▶

Un inventario consiste en una lista de 80 artículos, cada uno marcado "disponible" o "no disponible". Hay 45 artículos disponibles. Demuestre que hay al menos dos artículos disponibles en la lista que están separados por exactamente 9 artículos. (Por ejemplo, los artículos disponibles en las posiciones 13 y 22 o en las posiciones 69 y 78 satisfacen esta condición).

Sea a_i la posición del i-ésimo artículo disponible. Debe probarse que $a_i - a_j = 9$ para alguna i y j. Considere los números

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{45} \tag{6.8.3}$$

y

$$a_1 + 9, \quad a_2 + 9, \quad \ldots, \quad a_{45} + 9. \tag{6.8.4}$$

Los 90 números en (6.8.3) y (6.8.4) tienen valores posibles sólo del 1 al 89. Por la segunda forma del principio del palomar, dos de los números deben coincidir. No es posible tener dos de (6.8.3) o dos de (6.8.4) idénticos; entonces, algún número en (6.8.3) es igual a algún número en (6.8.4). Por lo tanto, $a_i - a_j = 9$ para alguna i y j, como se quería. ◀

Ahora se establece el principio del palomar en otra forma más.

Principio del palomar (tercera forma)

Sea f una función de un conjunto finito X a un conjunto finito Y. Suponga que $|X| = n$ y $|Y| = m$. Sea $k = \lceil n/m \rceil$. Entonces hay al menos k valores $a_1, \ldots, a_k \in X$ tal que

$$f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_k).$$

Para probar la tercer forma del principio del palomar, se da un argumento por contradicción. Sea $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Suponga que la conclusión es falsa. Entonces hay cuando mucho $k - 1$ valores de $x \in X$ con $f(x) = y_1$; hay cuando mucho $k - 1$ valores de $x \in X$ con $f(x) = y_2; \ldots$; hay cuando mucho $k - 1$ valores x con $f(x) = y_m$. Entonces hay cuando mucho $m(k - 1)$ miembros en el dominio de f. Pero

$$m(k-1) < m\frac{n}{m} = n,$$

que es una contradicción. Por lo tanto, hay al menos k valores, $a_1, \ldots, a_k \in X$, tales que

$$f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_k).$$

El último ejemplo ilustra el uso de la tercera forma del principio del palomar.

Ejemplo 6.8.5 ▶

Una característica útil de las fotografías en blanco y negro es el brillo promedio de la foto. Digamos que dos fotos son similares si su brillo promedio difiere en no más de un valor fijo. Demuestre que entre seis fotografías, hay tres que son mutuamente similares o bien tres que son mutuamente no similares.

Denote las fotografías por $P_1, P_2, \ldots, P_6$. Cada uno de los cinco pares

$$(P_1, P_2), \quad (P_1, P_3), \quad (P_1, P_4), \quad (P_1, P_5), \quad (P_1, P_6),$$

tiene el valor "similar" o "no similar". Por la tercera forma del principio del palomar, hay al menos $\lceil 5/2 \rceil = 3$ pares con el mismo valor; es decir, hay tres pares

$$(P_1, P_i), \quad (P_1, P_j), \quad (P_1, P_k)$$

todos similares o no similares. Suponga que cada par es similar. (El caso en que cada par es no similar se ve en el ejercicio 8). Si cualquier par

$$(P_i, P_j), \quad (P_i, P_k), \quad (P_j, P_k) \qquad \textbf{(6.7.5)}$$

es similar, entonces estas dos fotografías junto con P_1 son mutuamente similares y se tienen tres fotografías mutuamente similares. De otra manera, cada uno de lo pares (6.8.5) es no similar y se tienen tres pares de fotografías mutuamente no similares. ◀

Sección de ejercicios de repaso

1. Enuncie las tres formas del principio del palomar.

2. Dé un ejemplo del uso de cada forma del principio del palomar.

Ejercicios

1. Trece personas tienen nombres de pila Dora, Evita y Fernando, y apellidos Olmos, Pérez, Quintana y Rodríguez. Demuestre que al menos dos personas tienen el mismo nombre y apellido.

2. Dieciocho personas tienen nombres de pila Alfredo, Benjamín y César y apellidos Domínguez y Enríquez. Demuestre que al menos tres personas tienen el mismo nombre y apellido.

3. La profesora Eugenia recibe su salario todos los viernes. Demuestre que en algunos meses le pagan tres veces.

4. ¿Es posible interconectar cinco procesadores de manera que exactamente dos de ellos tengan conexión directa a un número idéntico de procesadores? Explique su respuesta.

5. Un inventario consiste en una lista de 115 artículos, cada uno marcado como "disponible" o "no disponible". Hay 60 artículos disponibles. Demuestre que hay al menos 2 artículos disponibles en la lista que están separados por exactamente 4 artículos.

6. Un inventario consiste en una lista de 100 artículos, cada uno marcado como "disponible" o "no disponible". Hay 55 artículos disponibles. Demuestre que hay al menos dos artículos disponibles en la lista que están separados por exactamente 9 artículos.

★ ***7.*** Un inventario consiste en una lista de 80 artículos, cada uno marcado como "disponible" o "no disponible". Hay 50 artículos disponibles. Demuestre que hay al menos 2 artículos no disponibles en la lista que están separados por 3 o por 6 artículos.

8. Complete el ejemplo 6.8.5 demostrando que si los pares (P_1, P_i), (P_1, P_j), (P_1, P_k) son no similares, hay tres fotografías que son mutuamente similares o mutuamente no similares.

9. ¿Se puede afirmar necesariamente la conclusión del ejemplo 6.8.5 si hay menos de 6 fotografías? Explique por qué.

10. ¿Se puede afirmar necesariamente la conclusión del ejemplo 6.8.5 si hay más de 6 fotografías? Explique por qué.

En los ejercicios 11 al 14 dé un argumento que muestre que si X es cualquier subconjunto de $(n + 2)$ elementos del conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n + 1\}$ y m es el elemento más grande en X, existen i y j distintos en X con $m = i + j$.

Para cada elemento $k \in X - \{m\}$, sea

$$a_k = \begin{cases} k & \text{if } k \le \dfrac{m}{2} \\ m - k & \text{if } k > \dfrac{m}{2}. \end{cases}$$

11. ¿Cuántos elementos hay en el dominio de a?

12. Demuestre que el recorrido de a está contenido en $\{1, 2, \ldots, n\}$.

13. Explique por qué los ejercicios 11 y 12 implican que $a_i = a_j$ para alguna $i \neq j$.

14. Explique por qué el ejercicio 13 implica que existen i y j distintos en X con $m = i + j$.

15. Dé un ejemplo de un subconjunto X de $(n + 1)$ elementos del conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n + 1\}$ que tenga la propiedad: no hay dos elementos distintos $i, j \in X$ para los que $i + j \in X$.

En los ejercicios 16 al 19 dé un argumento que pruebe el siguiente resultado:

Una sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ de $n^2 + 1$ números diferentes contiene ya sea una subsucesión creciente de longitud $n + 1$ o bien una subsucesión decreciente de longitud $n + 1$.

Suponga, a manera de contradicción, que toda subsucesión creciente o decreciente tiene longitud n o menor. Sea b_i la longitud de la subsucesión creciente más larga que comienza en a_i, y sea c_i la longitud de la subsucesión decreciente más larga que comienza en a_i.

16. Demuestre que los pares ordenados (b_i, c_i), $i = 1, \ldots, n^2 + 1$, son distintos.

17. ¿Cuántos pares ordenados (b_i, c_i) hay?

18. Explique por qué $1 \le b_i \le n$ y $1 \le c_i \le n$.

19. ¿Cuál es la contradicción?

En los ejercicios 20 al 23 dé un argumento que demuestre que en un grupo de 10 personas hay al menos dos tales que la diferencia o la suma de sus edades es divisible entre 16. Suponga que las edades están dadas en números enteros.

Sean $a_1, \ldots, a_{10}$ las edades. Sea $r_i = a_i \bmod 16$ y sea

$$s_i = \begin{cases} r_i & \text{if } r_i \le 8 \\ 16 - r_i & \text{if } r_i > 8. \end{cases}$$

20. Demuestre que $s_1, \ldots, s_{10}$ tienen valores que van de 0 a 8.

21. Explique por qué $s_j = s_k$ para alguna $j \neq k$.

22. Suponga que $s_j = s_k$ para alguna $j \neq k$. Explique por qué si $s_j = r_j$ y $s_k = r_k$ o $s_j = 16 - r_j$ y $s_k = 16 - r_k$, entonces 16 divide a $a_j - a_k$.

23. Demuestre que si las condiciones en el ejercicio 22 no se cumplen, entonces 16 divide a $a_j + a_k$.

24. Demuestre que en la expansión decimal del cociente de dos enteros, en algún momento un bloque de dígitos se repite. *Ejemplos:*

$$\frac{1}{6} = 0.1\underline{6}\underline{6}6\ldots, \qquad \frac{217}{660} = 0.32\underline{87}87 87\ldots$$

★25. Doce jugadores de básquetbol, cuyos uniformes están numerados del 1 al 12, están colocados alrededor del cuadro central de la cancha con un arreglo arbitrario. Demuestre que para algunos tres jugadores consecutivos, la suma de sus números es al menos 20.

★26. Para la situación del ejercicio 25, encuentre y pruebe una estimación de qué tan grande debe ser la suma de los números para algunos cuatro jugadores consecutivos.

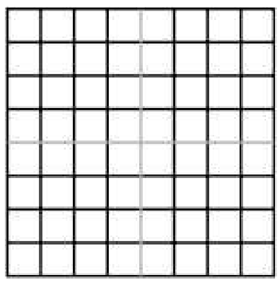
★27. Sea f una función uno a uno de $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ sobre X. Sea $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ la composición de f, k veces consigo misma. Demuestre que existen enteros positivos diferentes i y j tales que $f^i(x) = f^j(x)$ para toda $x \in X$. Demuestre que para algún entero positivo k, $f^k(x) = x$ para toda $x \in X$.

★28. Un rectángulo de 3×7 se divide en 21 cuadrados cada uno coloreado rojo o negro. Pruebe que el tablero contiene un rectángulo no trivial (no $1 \times k$ o $k \times 1$) cuyos cuatro cuadrados en las esquinas son todos negros o todos rojos.

★29. Pruebe que si p unos y q ceros se colocan alrededor de un círculo de manera arbitraria, donde p, q y k son enteros positivos que satisfacen $p \ge kq$, el arreglo debe contener al menos k unos consecutivos.

★30. Escriba un algoritmo que, dada una sucesión a, encuentre la longitud de la subsucesión creciente de a más larga.

31. Una rejilla de $2k \times 2k$ se divide en $4k^2$ cuadrados y cuatro subrejillas de $k \times k$. La figura siguiente muestra la rejilla para $k = 4$:



Demuestre que es imposible marcar k cuadrados en la subrejilla de $k \times k$ superior izquierda, y k cuadrados en la subrejilla de $k \times k$ inferior derecha, de manera que no haya dos cuadros marcados en el mismo renglón, columna o diagonal de la rejilla de $2k \times 2k$.

Ésta es una variante del *problema de las n reinas* que se analiza con detalle en la sección 9.3.

Notas

Un libro elemental referente a métodos de conteo es [Niven, 1965]. Las referencias sobre combinatoria son [Brualdi; Even, 1973; Liu, 1968; Riordan; y Roberts]. [Vilenkin] contiene muchos ejemplos resueltos de combinatoria. Las referencias generales de matemáticas discretas [Liu, 1985; y Tucker] dedican varias secciones a los temas del capítulo 6. [Even, 1973; Hu, y Reingold] estudian los algoritmos de combinatoria. Las referencias de probabilidad son [Billingsley; Ghahramani; Kelly; Ross; y Rozanov]. [Fukunaga; Gose; y Nader son libros acerca de reconocimiento de patrones.

Repaso del capítulo

Sección 6.1

1. Principio de la multiplicación
2. Principio de la suma

Sección 6.2

3. Permutaciones de $x_1, \ldots, x_n$; ordenamiento de $x_1, \ldots, x_n$
4. $n!$ = número de permutaciones de un conjunto de n elementos
5. Permutaciones r de $x_1, \ldots, x_n$; ordenamiento de r elementos de $x_1, \ldots, x_n$
6. $P(n, r)$: número de permutaciones r de un conjunto de n elementos;

$$P(n, r) = n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

7. Combinación r de $\{x_1, \ldots, x_n\}$: subconjunto (no ordenado) de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ que contiene r elementos
8. $C(n, r)$: número de combinaciones r de un conjunto de n elementos; $C(n,r) = P(n,r)/r! = n!/[(n-r)!r!]$

Sección 6.3

9. Orden lexicográfico
10. Algoritmo para generar combinaciones r: algoritmo 6.3.9
11. Algoritmo para generar permutaciones: algoritmo 6.3.14

Sección 6.4

12. Experimento
13. Evento
14. Espacio muestra
15. Probabilidad de un evento cuando todos los resultados son igualmente probables

Sección 6.5

16. Función de probabilidad
17. Probabilidad de un evento
18. Si E es un evento, $P(E) + P(\overline{E}) = 1$
19. Si E_1 y E_2 sin eventos $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$
20. Los eventos E_1 y E_2 son mutuamente excluyentes si $E_1 \cap E_2 = \emptyset$
21. Si los eventos E_1 y E_2 son mutuamente excluyentes, $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$
22. Si E y F son eventos y $P(F) > 0$, la probabilidad condicional de E dado F es $P(E \mid F) = P(E \cap F)/P(F)$
23. Los eventos E y F son independientes si $P(E \cap F) = P(E)P(F)$
24. Teorema de Bayes: Si las clases posibles son $C_1, \ldots, C_n$, cada par de estas clases es mutuamente excluyente y cada elemento que se va a clasificar pertenece a una de estas clases, para un conjunto de características F se tiene

$$P(C_j \mid F) = \frac{P(F \mid C_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(F \mid C_i)P(C_i)}.$$

Sección 6.6

25. Número de ordenamientos de n artículos de t tipos con n_i objetos idénticos de tipo $i = n!/[n_1! \cdots n_t!]$
26. Número de selecciones no ordenadas de k elementos de un conjunto de t elementos, con repeticiones permitidas $= C(k + t - 1, k)$

Sección 6.7

27. Teorema binomial: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^{n-k}b^k$
28. Triángulo de Pascal: $C(n+1,k) = C(n,k-1) + C(n,k)$

Sección 6.8

29. Principio del palomar (tres formas)

Autoevaluación del capítulo

Sección 6.1

1. ¿Cuántas cadenas de 8 bits comienzan con 0 y terminan con 101?
2. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 3 libros cada uno de un tema diferente, entre un conjunto de 6 libros de historia, 9 libros clásicos, 7 libros de leyes y 4 libros de educación, todos distintos?
3. ¿Cuántas funciones hay de un conjunto de n elementos sobre $\{0, 1\}$?
4. Un comité de 7 personas compuesto por Gregorio, Humberto, Isaac, Jazmín, Karen, Laura y Manuel debe seleccionar presidente, vicepresidente, coordinador de eventos sociales, secretario y tesorero. ¿De cuántas maneras pueden asignarse los puestos si Gregorio es secretario o no le asignan un puesto?

Sección 6.2

5. ¿Cuántas combinaciones de 3 hay de 6 objetos?
6. ¿Cuántas cadenas se pueden formar ordenando las letras *ABCDEF* si *A* aparece antes de *C* y *E* aparece antes de *C*?
7. ¿Cuántas manos de 6 cartas seleccionadas de una baraja común de 52 cartas contienen 3 cartas de un palo y 3 cartas de otro palo?
8. Un envío de 100 discos compactos contiene 5 defectuosos. De cuántas maneras se puede seleccionar un conjunto de 4 discos compactos que contenga más discos defectuosos que buenos?

Sección 6.3

9. Encuentre las combinaciones de 5 que genera el algoritmo 6.3.9 después de 12467 si $n = 7$.
10. Encuentre las combinaciones de 6 que genera el algoritmo 6.3.9 después de 145678 si $n = 8$.
11. Encuentre la permutación que genera el algoritmo 6.3.14 después de 6427135.
12. Encuentre la permutación que genera el algoritmo 6.3.14 después de 625431.

Sección 6.4

13. Se selecciona una carta al azar de una baraja común de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un corazón?
14. Se lanzan dos dados no cargados. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números que aparecen sea 8?
15. En el juego "Cash In Hand" de Maryland, el concursante elige 7 números distintos entre 1 y 31. Él gana una cantidad modesta ($40) si exactamente 5 números, en cualquier orden, coinciden con 5 de los 7 elegidos aleatoriamente por un representante de la lotería. ¿Cuál es la probabilidad de ganar $40?
16. Encuentre la probabilidad de obtener una mano de bridge con distribución 6–5–2–0, es decir, 6 cartas de un palo, 5 de otro palo, 2 de otro y ninguna carta del cuarto palo.

Sección 6.5

17. Se carga una moneda de manera que es cinco veces más probable que salga cara que cruz. Asigne probabilidades a los eventos que modelen con exactitud las posibilidades de que ocurran.

18. Una familia tiene 3 hijos. Suponga que es igualmente probable que nazca una niña o un niño. ¿Son independientes los eventos "hay niños de uno y otro sexo" y "cuando mucho hay una niña"? Explique su respuesta.

19. Jorge y Alicia presentan un examen final de C++. La probabilidad de que Jorge pase es de 0.75 y la probabilidad de que Alicia pase es de 0.80. Suponga que los eventos "Jorge pasa el examen final" y "Alicia pasa el examen final" son independientes. Encuentre la probabilidad de que Jorge no pase. Encuentre la probabilidad de que ambos pasen. Encuentre la probabilidad de que ambos reprueben. Encuentre la probabilidad de que al menos uno pase.

20. Tulio, Roberto y José escriben programas para establecer horarios para las tareas de fabricación de perros de juguete. La siguiente tabla muestra el porcentaje de código escrito por cada uno y el porcentaje de fallas de cada persona.

	Codificador		
	Tulio	*Roberto*	*José*
Porcentaje de código	30	45	25
Porcentaje de fallas	3	2	5

Dado que se encontró una falla, encuentre la probabilidad de que estuviera en el código de José.

Sección 6.6

21. ¿Cuántas cadenas se pueden formar ordenando las letras ILLINOIS?

22. ¿Cuántas cadenas se pueden formar ordenando las letras ILLINOIS si la I aparece antes que una L?

23. ¿De cuántas maneras pueden dividirse 12 libros diferentes entre cuatro estudiantes si cada estudiante obtiene tres libros?

24. ¿Cuántas soluciones enteras de

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$$

satisfacen $x_1 \geq 0, x_2 \geq 1, x_3 \geq 2, x_4 \geq 3$?

Sección 6.7

25. Expanda la expresión $(s - r)^4$ usando el teorema binomial.

26. Encuentre el coeficiente de x^3yz^4 en la expansión de $(2x + y + z)^8$.

27. Utilice el teorema binomial para probar que

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}(-1)^k C(n, k) = 1.$$

28. Rote el triángulo de Pascal al contrario de las manecillas del reloj de manera que en el primer renglón haya unos. Explique por qué el segundo renglón lista los enteros positivos en orden $1, 2, \ldots$.

Sección 6.8

29. Demuestre que todo conjunto de 15 calcetines elegidos entre 14 pares de calcetines contiene al menos un par.

30. Diecinueve personas tienen nombres de pila Zeke, Wally y Linda; segundos nombres Leo y David, y apellidos Yu, Zamora y Smith. Demuestre que al menos dos personas tienen el mismo primer nombre, segundo nombre y apellido.

31. Un inventario consiste en una lista de 200 artículos, cada uno marcado como "disponible" o "no disponible". Existen 110 artículos disponibles. Demuestre que hay al menos dos artículos disponibles en la lista que están separados exactamente por 19 artículos.

32. Sea $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ un conjunto de cinco puntos (diferentes) en el plano euclidiano normal, cada uno de los cuales tiene coordenadas enteras. Demuestre que algún par tiene un punto medio con coordenadas enteras.

Ejercicios para computadora

1. Escriba un programa que genere todas las combinaciones r de los elementos $\{1, \ldots, n\}$.
2. Escriba un programa que genere todas las permutaciones de los elementos $\{1, \ldots, n\}$.
3. Escriba un programa que genere todas las permutaciones r de los elementos $\{1, \ldots, n\}$.
4. [*Proyecto*] Entregue un trabajo acerca de algoritmos diferentes de los presentados en este capítulo para generar combinaciones y permutaciones. Desarrolle algunos de estos algoritmos como programas.
5. Escriba un programa que liste todas las permutaciones de *ABCDEF* en las que *A* aparece antes que *D*.
6. Escriba un programa que liste todas las permutaciones de *ABCDEF* en las que *C* y *E* estén juntas en cualquier orden.
7. Escriba un programa que liste todas las maneras en que m marcianos y n venusinos pueden esperar en una fila si no debe haber dos venusinos juntos.
8. Escriba un programa para calcular los números de Catalan.
9. Escriba un programa que genere el triángulo de Pascal hasta el nivel n, para n arbitraria.
10. Escriba un programa que encuentre una subsucesión creciente o decreciente de longitud $n + 1$ de una sucesión de $n^2 + 1$ números distintos.

Instructor's Manual

DISCRETE MATHEMATICS

6E

Richard Johnsonbaugh

Chapter 6

Solutions to Selected Exercises

Section 6.1

2. $2 \cdot 3 \cdot 5$ 3. $3 \cdot 3 \cdot 5$ 5. $5 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ 6. $2^6 - 1$

7. Since there are three kinds of cabs, two kinds of cargo beds, and five kinds of engines, the correct number of ways to personalize the big pickups is $3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$—not 32.

9. 3 10. 6 12. 6 13. 10 15. $5 \cdot 5$ 16. $2 \cdot 3^2$ 18. 50^2

19. $50 \cdot 49$ 21. 2^4 22. 2^6 24. 8 25. $(8 \cdot 7)/2$ 27. 2^4

29. $4 \cdot 3 \cdot 2$ 30. $3 \cdot 2 \cdot 4$ 32. $5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3$ 33. $2 \cdot 5 \cdot 4$ 35. $5 \cdot 4 \cdot 3$

36. 5^2 38. 4^3 39. $4 \cdot 3 \cdot 2$ 41. $3 \cdot 4 \cdot 3$ 43. $(200 - 4)/2$

44. $(200 - 4)/2$ 46. $200 - 72$ 47. $5 + 9 \cdot 9 + 9 \cdot 8$ 49. $196 - (9 + 2 + 18)$

50. $1 + 1 \cdot 9 \cdot 9 - 2$ 52. $2 + 3 + \cdots + 9 = 44$

53. (a) $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$ (b) 12^5 (c) $12^5 - 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$

55. $(5!)(2!)(3!)$ 56. $(5!)(5!)$ 58. $8! \cdot 9 \cdot 8$

59. $26 + 26 \cdot 36 + 26 \cdot 36^2 + 26 \cdot 36^3 + 26 \cdot 36^4 + 26 \cdot 36^5$ 60. m^n 62. $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2$

63. A subset X has n elements or less if and only if $\overline{X}$ has more than n elements. Thus exactly half of the subsets have n elements or less. Therefore, the number of subsets is $\frac{1}{2}2^{2n+1} = 2^{2n}$.

67. $2^8 - 2^6$

68. Let

$$\begin{aligned} X &= \text{selections in which Ben is chairperson} \\ Y &= \text{selections in which Alice is secretary} \end{aligned}$$

By Exercise 65,

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|.$$

By previous methods, we find that

$$|X| = |Y| = 5 \cdot 4, \quad |X \cap Y| = 4.$$

Therefore

$$|X \cup Y| = 20 + 20 - 4 = 36.$$

70. $6 + 18 - 3 = 21$

71. n^{n^2}

72. $n^{n(n-1)/2}$

Section 6.2

2. *abcd*, *abdc*, *acbd*, *acdb*, *adbc*, *adcb*,
bacd, *badc*, *bcad*, *bcda*, *bdac*, *bdca*,
cabd, *cadb*, *cbad*, *cbda*, *cdab*, *cdba*,
dabc, *dacb*, *dbac*, *dbca*, *dcab*, *dcba*

3. $P(4,3) = 4(3)(2) = 24$

5. $11!$

6. $P(11,5) = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$

8. $P(12,4) = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$

9. $P(12,3) = 12 \cdot 11 \cdot 10$

11. $3! \cdot 3!$

12. Tokens labeled AE, C, and DB can be permuted in $3!$ ways.

14. $\frac{1}{2}5!$ since half have A before D and half have A after D.

15. We first count the number of strings containing either AB or CD. To this end, let

$$\begin{aligned} X &= \text{strings that contain } AB \\ Y &= \text{strings that contain } CD \end{aligned}$$

By Exercise 65, Section 6.1,

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|.$$

By previous methods, we find that

$$|X| = |Y| = 4!, \quad |X \cap Y| = 3!.$$

Therefore there are $4! + 4! - 3!$ strings that contain either AB or CD. Since there are $5!$ total strings, the number that contain neither AB nor CD is $5! - (4! + 4! - 3!)$.

17. $C(5,3) \cdot 2!$. Pick three slots for A, C, and E. Then place the two remaining letters.

18. Let

$$\begin{aligned} X &= \text{strings that contain } DB \\ Y &= \text{strings that contain } BE \end{aligned}$$

By Exercise 65, Section 6.1,

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|.$$

By previous methods, we find that

$$|X| = |Y| = 4!, \quad |X \cap Y| = 3!.$$

Therefore

$$|X \cup Y| = 4! + 4! - 3!.$$

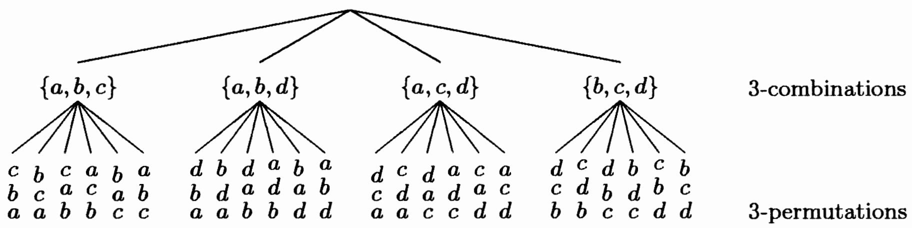
20. First, line up the Vesuvians and the Jovians. This can be done in 18! ways. For each of these arrangements, we can place the Martians in 5 of the 19 in-between and end positions, which can be done in $P(19,5)$ ways. Thus there are $18! \cdot P(19,5)$ arrangements.

22. 9!

23. Seat the Martians (4! ways). Seat the Jovians in the in-between spots ($5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ ways). The answer is $4! \cdot 5!$.

26. $\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}$

27.



29. $C(12,4)$ 30. $C(44,6)$, $C(48,6)$ 32. $C(13,7)$

33. $C(13,4) - C(6,4)$ [The number of possible committees is $C(13,4)$. The number that have no women is $C(6,4)$.]

35. $C(13,4) - [C(6,4) + C(7,4)]$ (The total number of minus the number with all men or all women.)

36. $C(13,4) - C(11,2)$ [The number of possible committees is $C(13,4)$. The number in which Mabel and Ralph serve together is $C(11,2)$.]

38. $C(8,3)$ 39. Six: 00011111, 10001111, 11000111, 11100011, 11110001, 11111000

42. $13 \cdot C(48,1)$ (Choose the denomination and then the odd card.) 43. $C(13,5)$

45. $4 \cdot C(13,2) \cdot 13^3$ (You must pick two of one suit and one of each of the three remaining suits. First choose the suit to have two cards. Then choose two cards. Then choose one of each of the remaining suits.)

46. 4

48. $9 \cdot 4^5$ (Pick the lowest card's denomination. Then pick the suit of each of the denominations.)

49. $C(13,2)C(11,1)C(4,2)C(4,2)C(4,1)$ (Pick the two denominations that receive two cards; pick the denomination to receive one card; pick two cards from each of the chosen denominations; pick one card from the other denomination.)

51. 4

52. $C(4,2)[C(26,13)-2]$ [Pick the two suits. The number of hands containing cards from the chosen suits is $C(26,13)$. Subtract the two hands that contain only cards of one of the chosen suits.]

54. $C(13,5)C(13,4)C(13,3)C(13,1)$

55. $4!C(13,5)C(13,4)C(13,3)C(13,1)$ [Pick the suits (the order determines which gets $5,4,3,1$). Then pick the desired number of cards from the selected suits.]

57. $C(32,13)$ (Select 13 cards from among the 32 non-face cards.)

59. $C(10,3)$ 60. $C(10,3)+C(10,2)+C(10,1)+C(10,0)$

62. $C(10,5)$ 64. $C(46,4)$

65. $C(46,2)C(4,2)$ (Select 2 good and 2 defective.)

67. Represent each of the two 10's by a star ("$*$"). The remaining $n-4$ bits can be placed in the three in-between and end positions with respect to the two stars. For each of these three groups of bits, if a 1 occurs, the bits to its right in that group must also be 1's. We place a vertical bar "|" in between the 0's and 1's in each of these groups. Each string can be represented by $0^a|1^b*0^c|1^d*0^e|1^f$, where $0\le a,b,c,d,e,f\le n-4$ and $a+b+c+d+e+f=n-4$. Note that the length of the string is $n+1$. A particular string is determined by the choice of five slots from $n+1$ slots for the pattern $|*|*|$. Hence there are $C(n+1,5)$ such strings.

68. Fix $n-k$ 1's. The k 0's must be assigned to the $n-k+1$ positions between the 1's or at either end. This can be done in $C(n-k+1,k)$ ways.

69. Look at the formula for $C(n,k)$.

72. Argue as in Example 6.2.23.

73. Note that the minimum number of votes for Wright is $\lceil n/2\rceil$. Thus, By Exercise 72, the number of ways the votes could be counted is

$$1+\sum_{r=\lceil n/2\rceil}^{n-1}[C(n,r)-C(n,r+1)]=C(n,\lceil n/2\rceil).$$

(The first term, 1, is the number of ways Wright receives n votes and Upshaw receives 0 votes.)

75. By Exercise 73, k vertical steps can occur in $C(k,\lceil k/2\rceil)$ ways, since, at any point, the number of up steps is greater than or equal to the number of down steps. Then, $n-k$ horizontal steps can be inserted among the k vertical steps in $C(n,k)$ ways. These $n-k$ horizontal steps can occur in $C(n-k,\lceil (n-k)/2\rceil)$ ways, since, at any point, the number of right steps is greater

than or equal to the number of left steps. Thus, the number of paths that stay in the first quadrant containing exactly k vertical steps is

$$C(k, \lceil k/2 \rceil)C(n, k)C(n-k, \lceil (n-k)/2 \rceil).$$

Summing over all k, we find that the total number of paths is

$$\sum_{k=0}^{n} C(k, \lceil k/2 \rceil)C(n, k)C(n-k, \lceil (n-k)/2 \rceil).$$

76. Fix a starting position, and move around the table. When a handshake begins, write R; when a handshake ends, write a U. The result is a sequence of n R's and n U's in which the number of R's is always greater than or equal to the number of U's. Furthermore, the correspondence between such sequences and handshakes is one-to-one and onto. Since the number of sequences of n R's and n U's in which the number of R's is always greater than or equal to the number of U's is C_n (see Example 6.2.23), the number of ways that $2n$ persons seated around a circular table can shake hands in pairs without any arms crossing is also C_n.

77. We show a one-to-one, onto correspondence between the output $i_1, i_2, \ldots, i_n$ reversed and sequences of n R's and n U's in which the number of R's is always greater than or equal to the number of U's. Since the number of such sequences is C_n, the result then follows.

For each sequence of n R's and n U's in which the number of R's is always greater than or equal to the number of U's, under each R write the number of D's that precede it. For example, for $n = 3$ we would have

R	R	D	R	D	D
0	0		1		

Then add one to each value of the resulting sequence. In our case, we obtain the sequence 112. For $n = 3$, the complete correspondence is

RD Sequence	*Numeric Sequence*	*Numeric Sequence Reversed (Output)*
RRRDDD	111	111
RRDRDD	112	211
RRDDRD	113	311
RDRRDD	122	221
RDRDRD	123	321

78. There are $P(n, r)$ ways to place the r distinct objects. There is one way to place the identical objects in the remaining slots. Thus the total number of orderings is $P(n, r)$.

There are $C(n, n-r) = C(n, r)$ ways to choose positions for the $n - r$ identical objects. After placing the identical objects in these positions, there are $r!$ ways to place the distinct objects. Thus the number of total orderings is $r!C(n, r)$. Therefore

$$P(n, r) = r!C(n, r).$$

79. The Addition Principle must be applied to a family of pairwise disjoint sets. Here the sets involved are *not* pairwise disjoint. For example, if X is the set of hands containing clubs, diamonds, and spades and Y is the set of hands containing clubs, diamonds, and hearts, $X \cap Y$ contains hands that contain clubs and diamonds.

81. (a) If there are more tables than people, it is impossible to seat at least one person at each table.

(b) If there are equal numbers of tables and people and there is at least one person at each table, there will be exactly one person at each table.

(c) See Example 6.2.7.

(d) In this case, there are two people at one table and one person at each other table. The two people to sit at one table can be chosen in $C(n, 2)$ ways.

(e) We prove this equation by induction on n. The Basis Step, $n = 2$, is part (b).

Assume that the equation is true for n and that we have $n+1$ people. Choose one person. Either this person sits alone or with others. If the person sits alone, the other persons can be seated at the other table in $(n-1)!$ ways. If this person is not alone, by the inductive hypothesis the remaining n persons can be seated in

$$(n-1)!\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}$$

ways. The $(n+1)$st person can be added to this seating arrangement in n ways (to the right of any of the other n persons). Thus there are

$$n \cdot (n-1)!\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i} = n!\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}$$

ways to seat $n+1$ people if the $(n+1)$st person does not sit alone. Therefore the total number of seatings is

$$(n-1)! + n!\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i} = n!\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}.$$

The Inductive Step is complete.

(f) Fix n. Each seating of n persons at k round tables, with at least one person at each table, determines a unique permutation of $1, \ldots, n$. If $p(i,1), \ldots, p(i, e_i)$ are seated clockwise at table i, $i = 1, \ldots, k$, in this order, we interpret this as the permutation defined by the mapping

$$\begin{array}{rcl} p(1,1) & \to & p(1,2) \\ p(1,2) & \to & p(1,3) \\ & \vdots & \\ p(1,e_1-1) & \to & p(1,e_1) \\ p(1,e_1) & \to & p(1,1) \\ & \vdots & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} p(k,1) & \to & p(k,2) \\ p(k,2) & \to & p(k,3) \\ & \vdots & \\ p(k,e_k-1) & \to & p(k,e_k) \\ p(k,e_k) & \to & p(k,1) \end{array}$$

(This representation is called the *decomposition of a permutation into its cycles.*) Since all permutations are accounted for, the equation follows.

(g) We show that $s_{3,1} = 2$ and

$$s_{n,n-2} = 2C(n, n-3) + 3C(n, n-4)$$

for $n \geq 4$.

$s_{3,1} = 2$ by part (c).

If $n \geq 4$, there are two basic seating arrangements:

1. $n-3$ tables of one person each and one table of three persons. There are $2C(n, n-3)$ such seatings since we may select the $n-3$ solitary persons in $C(n, n-3)$ ways, and then seat the remaining three persons at one table in 2! ways (using the formula from part (c)).
2. $n-4$ tables of one person each and two tables of two persons each. Select the $n-4$ solitary persons in $C(n, n-4)$ ways, and then seat the remaining four persons in three ways. In this case, there are $3C(n, n-4)$ seatings.

82. (a) If $k > n$, an n-element set cannot be partitioned into k nonempty subsets.

(b) There is one way to partition an n-element set into n nonempty subsets: Each subset must consist of one element.

(c) There is one way to partition an n-element set into one nonempty subset: The subset is the n-element set itself.

(d)–(f) See (g) and (h).

(g) Let X be an n-element set and let $x \in X$. For each nonempty subset Y of $X - \{x\}$, $\{Y, X - Y\}$ is a partition of X. Since these are also all the partitions, $S_{n,2} = 2^{n-1} - 1$.

(h) A partition of an n-element set into $n-1$ subsets consists of a subset containing two elements and $n-2$ subsets each containing one element. The 2-element subset can be chosen in $C(n, 2)$ ways. Therefore $S_{n,n-1} = C(n, 2)$.

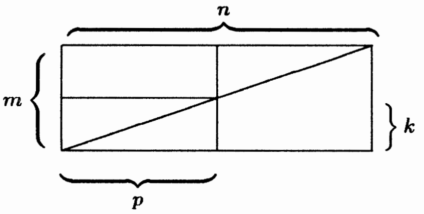
(i) $S_{n,n-2} = C(n, 3) + 3C(n, 4)$.

If we partition an n-element set into $n-2$ subsets, either there is a subset consisting of three elements with all other subsets consisting of one element [there are $C(n, 3)$ of these], or there are two subsets each consisting of two elements with all other subsets consisting of one element [there are $C(n, 4)$ ways to choose the elements to be the doubletons and three ways to organize the four elements into doubletons].

Problem-Solving Corner: Combinations

1. From the following figure, we derive the formula

$$\sum_{k=0}^{m} C(k+p,p)C(m-k+n-p,n-p) = C(m+n,m)$$



2. $\sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} C(m,k)C(n,k) = C(m+n,m)$

Section 6.3

2. 12456 3. 23456 5. 631245 6. 13245678

8. (For Exercise 5) After the while loop in lines 7–9 finishes, m is 2. After the while loop in lines 11–13 finishes, k is 5. At line 14, we swap s_2 and s_5. Now the sequence is 635421. The while loop of lines 17–22 reverses $s_3, \ldots, s_6$. The result is 631245.

10. 12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56

11. 12345, 12346, 12347, 12356, 12357, 12367, 12456, 12457, 12467, 12567, 13456, 13457, 13467, 13567, 14567, 23456, 23457, 23467, 23567, 24567, 34567

13. 123, 132, 213, 231, 312, 321

15. Change line 5 to

```
while (true) {
```

Add the following lines after line 13 to the body of the while loop at lines 11–13

```
if (k == 0)
  return
```

(Also, since there will now be multiple lines in the body of the while loop, enclose them in braces.)

16. Input: r, n
Output: A list of all r-permutations of $\{1, 2, ..., n\}$

```
list_r_perms(r, n) {
   for i = 1 to r
      s_i = i
   r_comb(r)
```

```
    for i = 2 to C(n,r) {
        find the rightmost s_m not at its maximum value
        s_m = s_m + 1
        for j = m + 1 to r
            s_j = s_j + 1
        r_comb(r)
    }
}

r_comb(r) {
    for i = 1 to r
        t_i = s_i
    println(t)
    for i = 2 to r! {
        find the largest index m satisfying t_m < t_{m+1}
        find the largest index k satisfying t_k > t_m
        swap(t_m, t_k)
        reverse the order of the elements t_{m+1}, ..., t_r
        println(t)
    }
}
```

18. Input: $s_1, \ldots, s_n$ (a permutation of $\{1, \ldots, n\}$) and n
Output: $s_1, \ldots, s_n$, the next permutation. (The first permutation follows the last permutation.)

```
next_perm(s, n) {
    s_0 = 0 // dummy value
    m = n - 1
    while (s_m > s_{m+1})
        m = m - 1
    k = n
    while (s_m > s_k)
        k = k - 1
    if (m > 0)
        swap(s_m, s_k)
    p = m + 1
    q = n
    while (p < q) {
        swap(s_p, s_q)
        p = p + 1
        q = q - 1
    }
}
```

20. Input: $s_1, \ldots, s_n$ (a permutation of $\{1, \ldots, n\}$) and n
Output: $s_1, \ldots, s_n$, the previous permutation. (The last permutation precedes the first permutation.)

```
prev_perm(s, n) {
   s_0 = n + 1 // dummy value
   // working from right, find first index where s_i > s_{i+1}
   i = n - 1
   while (s_i < s_{i+1})
      i = i - 1
   // reverse s_{i+1}, ..., s_n
   j = i + 1
   k = n
   while (j < k) {
      swap(s_j, s_k)
      j = j + 1
      k = k - 1
   }
   // if i > 0, swap s_i with the first s value after s_i that is less than s_i
   if (i > 0) {
      j = i + 1
      while (s_j > s_i)
         j = j + 1
      swap(s_i, s_j)
   }
}
```

22. Input: $s_1, \ldots, s_n, n$, and a string α
Output: All permutations of $s_1, \ldots, s_n$, each prefixed by α. (To list all permutations of $s_1, \ldots, s_n$, invoke this procedure with α equal to the null string.)

```
perm_recurs(s, n, α) {
   if (n == 1) {
      println(α + s_1)
      return
   }
   for i = 1 to n {
      α' = α + s_i
      perm_recurs({s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n}, n - 1, α')
   }
}
```

Section 6.4

2. (H,2), (H,4), (H,6)

3. (H,1), (H,3), (H,5), (T,1), (T,3), (T,5)

6. (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)

7. (1,4), (2,4), (3,4), (4,4), (5,4), (6,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,5), (4,6)

9. Suppose that the experiment is: Roll three dice. An event is: The sum of the dice is 8.

10. Suppose that the experiment is: Roll three dice. The sample space is the set of all possible outcomes. (There are 216 possible outcomes.)

12. $\frac{3}{6}$ 13. $\frac{5}{6}$ 15. $\frac{4}{52}$ 16. $\frac{13}{52}$

18. Since an odd sum can be obtained in 18 ways,

(1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (3,6),
(4,1), (4,3), (4,5), (5,2), (5,4), (5,6), (6,1), (6,3), (6,5),

the probability of obtaining an odd sum is $\frac{18}{36}$.

19. Since doubles can be obtained in six ways, (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), the probability of obtaining doubles is $\frac{6}{36}$.

21. Exactly one defective microprocessor can be obtained in $10 \cdot C(90, 3)$ ways. (Choose one defective microprocessor and choose three good microprocessors.) Since four microprocessors can be chosen in $C(100, 4)$ ways, the probability of obtaining exactly one defective microprocessor is

$$\frac{10 \cdot C(90,3)}{C(100,4)}.$$

22. At most one defective microprocessor can be obtained in $C(90, 4) + 10 \cdot C(90, 3)$ ways. (Choose four good microprocessors, or choose one defective microprocessor and three good microprocessors.) Since four microprocessors can be chosen in $C(100, 4)$ ways, the probability of obtaining at most one defective microprocessor is

$$\frac{C(90,4) + 10 \cdot C(90,3)}{C(100,4)}.$$

24. $\frac{3!}{10^3}$ 25. $\frac{1}{C(49,6)}$ 27. $\frac{1}{C(31,7)}$ 29. $\frac{C(26,13)}{C(52,13)}$ 31. $\frac{1}{2^{10}}$

32. $\frac{10}{2^{10}}$ 35. $1 - \frac{1}{3^{10}}$ 36. $\frac{1}{3^{10}}$

39. An equivalent problem is to count strings of three C's and nine N's in which no two C's are consecutive since we can regard the positions of the C's as representing the chosen lockers. For example, the string *NNCNNNCNNNNC* represents the choice of lockers 3, 7, and 12, no two of which are consecutive. We can obtain such strings by placing the three C's in the 10 in-between positions of the nine N's:

$$\_\, N \,\_\, N \,\_\, N \,\_\, N \,\_\, N \,\_\, N \,\_\, N \,\_\, N \,\_\, N \,\_$$

The number of ways of choosing the positions for the C's is, thus, $C(10,3)$. Therefore the probability that no two lockers are consecutive is

$$\frac{C(10,3)}{C(12,3)}.$$

40. $1 - \dfrac{C(10,3)}{C(12,3)}$ 42. $\left(\dfrac{18}{38}\right)^2$ 43. $\frac{1}{38}$

46. If you make a random decision, you are choosing randomly between two doors—one with a goat and one with the car; therefore, the probability of winning the car is $\frac{1}{2}$.

47. Suppose that behind the first two doors are goats, and behind the third door is the car. Consider your three initial choices. If you initially choose door one, your switch will move you to the door with the car, and you win. Similarly, if you initially choose door two, your switch will move you to the door with the car, and you win. However, if you initially choose door three, your switch will move you to a door with a goat, and you lose. Therefore the probability of winning the car is $\frac{2}{3}$.

49. If you make a random decision, you are choosing randomly between three doors—two with goats and one with the car; therefore, the probability of winning the car is $\frac{1}{3}$.

50. Suppose that behind the first three doors are goats, and behind the fourth door is the car. There are eight equally probable outcomes. If you initially choose door one, you switch to either a door with a goat or a door with a car. Similarly, if you initially choose door two or three, you switch to either a door with a goat or a door with a car. If you initially choose door four, you switch to one of two doors, each of which hides a goat. Of the eight possibilities, three win a car. Therefore the probability of winning the car is $\frac{3}{8}$.

52. The reasoning is not correct. As a small example, suppose that the sample space consist of eight eggs:
$$g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, b_1, b_2,$$
where g_i denotes a good egg and b_i denotes a bad egg. Then the probability of a bad egg is $1/4$. However, the set $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ of four eggs contains no bad eggs.

53. The probability that the player who chooses HT wins is $3/4$. There are four ways that the sequence of tosses can start: TT, HT, TH, HH. If the sequence starts TT, the player who chooses TT wins. If the sequence starts HT, the player who chooses HT wins. However, the player who chooses HT wins in the other two cases as well. To show this we argue by contradiction. Suppose that the player who chooses TT wins. Consider the first appearance of TT. Because the sequence begins TH or HH, the first T (in TT) must be preceded by H. Therefore HT wins. Contradiction.

Section 6.5

2. Since
$$P(2) = P(4) = P(6) = \frac{1}{8},$$

the probability of getting an even number is

$$P(2) + P(4) + P(6) = \frac{3}{8}.$$

3. Since the probability of getting a 5 is $\frac{1}{8}$, the probability of not getting a 5 is $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

5. $\frac{1}{4}$ 6. $\frac{1}{4}$

9. The sum of 7 is obtained in six ways: (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1). Now

$$P(1,6) = P(1)P(6) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{48}.$$

Similarly,

$$P(2,5) = P(3,4) = P(4,3) = P(5,2) = P(6,1) = \frac{1}{48}.$$

Therefore the probability of the sum of 7 is

$$6\left(\frac{1}{48}\right) = \frac{1}{8}.$$

10. Doubles or a sum of 6 is obtained in 10 ways: (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1), (1,1), (2,2), (4,4), (5,5), (6,6). Now

$$P(1,5) = P(1)P(5) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}.$$

Similarly,

$$P(3,3) = P(5,1) = P(1,1) = P(5,5) = \frac{1}{16},$$

$$P(2,4) = P(4,2) = P(2,2) = P(4,4) = P(6,6) = \frac{1}{144}.$$

Therefore the probability of getting doubles or the sum of 6 is

$$5\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{144}\right).$$

12. Let E_1 be the event "sum of 6," let E_2 be the event "doubles," and let E_3 be the event "at least one 2." We want

$$P(E_1 \cup E_2 \mid E_3) = \frac{P((E_1 \cup E_2) \cap E_3)}{P(E_3)}.$$

The event $(E_1 \cup E_2) \cap E_3$ comprises (2,4), (4,2), (2,2); therefore,

$$P((E_1 \cup E_2) \cap E_3) = 3\left(\frac{1}{12}\right)^2.$$

The solution to Exercise 11 shows that

$$P(E_3) = \frac{23}{144}.$$

Therefore

$$P(E_1 \cup E_2 \mid E_3) = \frac{P((E_1 \cup E_2) \cap E_3)}{P(E_3)} = \frac{\frac{3}{144}}{\frac{23}{144}} = \frac{3}{23}.$$

13. Let E_1 be the event "sum of 6," let E_2 be the event "sum of 8," and let E_3 be the event "at least one 2." We want

$$P(E_1 \cup E_2 \,|\, E_3) = \frac{P((E_1 \cup E_2) \cap E_3)}{P(E_3)}.$$

The event $(E_1 \cup E_2) \cap E_3$ comprises (2,4), (4,2), (2,6), (6,2); therefore,

$$P((E_1 \cup E_2) \cap E_3) = 4\left(\frac{1}{12}\right)^2.$$

The solution to Exercise 11 shows that

$$P(E_3) = \frac{23}{144}.$$

Therefore

$$P(E_1 \cup E_2 \,|\, E_3) = \frac{P((E_1 \cup E_2) \cap E_3)}{P(E_3)} = \frac{\frac{4}{144}}{\frac{23}{144}} = \frac{4}{23}.$$

15. (H,3) 16. No 18. No 20. $1 - \dfrac{C(90,10)}{C(100,10)}$

21. $\dfrac{C(10,3)C(90,3) + C(10,4)C(90,2) + C(10,5)C(90,1) + C(10,6)}{C(100,10)}$

23. $\dfrac{C(4,2)}{2^4}$

24. The probability of all boys or all girls is $\frac{2}{2^4}$, so the probability of at least one boy and at least one girl is

$$1 - \frac{2}{2^4}.$$

26. Let E be the event "exactly two girls," and let F be the event "at least one girl." We want to compute

$$P(E \,|\, F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

Now

$$P(E \cap F) = P(E) = \frac{C(4,2)}{2^4},$$

and

$$P(F) = 1 - P(\text{no girls}) = 1 - \frac{1}{2^4}.$$

Therefore

$$P(E \,|\, F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{C(4,2)}{2^4}}{1 - \frac{1}{2^4}}.$$

27. Let E be the event "at least one boy," and let F be the event "at least one girl." We want to compute

$$P(E \cap F \,|\, F) = \frac{P((E \cap F) \cap F)}{P(F)} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

Now

$$P(E \cap F) = 1 - \frac{2}{2^4},$$

and

$$P(F) = 1 - \frac{1}{2^4}.$$

Therefore

$$P(E \cap F \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{1 - \frac{2}{2^4}}{1 - \frac{1}{2^4}}.$$

29. Let E be the event "at most one boy," and let F be the event "at most one girl." Then $P(E) = P(F) = 1 - \frac{5}{2^4}$, and $P(E \cap F) = 0$. Since

$$P(E \cap F) = 0 \neq \left(1 - \frac{5}{2^4}\right)^2 = P(E)P(F),$$

E and F are not independent.

30. Let E be the event "children of both sexes," and let F be the event "at most one girl." Then

$$P(E) = 1 - \frac{2}{2^n}, \quad P(F) = \frac{n+1}{2^n}, \quad P(E \cap F) = P(\text{exactly one girl}) = \frac{n}{2^n}.$$

Now E and F are independent if and only if

$$P(E \cap F) = P(E)P(F),$$

or

$$\frac{n}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)\left(\frac{n+1}{2^n}\right).$$

This equation simplifies to $2^{n-1} = n + 1$, whose only solution is $n = 3$. (By inspection, $2^{n-1} \neq n + 1$ if $n = 1, 2$. For $n > 3$, $2^{n-1} > n + 1$.) Therefore E and F are independent if and only if $n = 3$.

32. $\dfrac{C(10,5)}{2^{10}}$ 33. $\dfrac{C(10,4) + C(10,5) + C(10,6)}{2^{10}}$

35. $\dfrac{C(10,0) + C(10,1) + C(10,2) + C(10,3) + C(10,4) + C(10,5)}{2^{10}}$

36. Let E be the event "exactly five heads," and let F be the event "at least one head." We want to compute

$$P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

Now

$$P(E \cap F) = P(E) = \frac{C(10,5)}{2^{10}},$$

and

$$P(F) = 1 - P(\text{no heads}) = 1 - \frac{1}{2^{10}}.$$

Therefore

$$P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{C(10,5)}{2^{10}}}{1 - \frac{1}{2^{10}}}.$$

38. Let E be the event "at least one head," and let F be the event "at least one tail." We want to compute

$$P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

Now

$$P(E \cap F) = 1 - P(\text{all heads or all tails}) = 1 - \frac{2}{2^{10}},$$

and

$$P(F) = 1 - P(\text{no tails}) = 1 - \frac{1}{2^{10}}.$$

Therefore

$$P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{1 - \frac{2}{2^{10}}}{1 - \frac{1}{2^{10}}}.$$

39. Let E be the event "at most five heads," and let F be the event "at least one head." We want to compute

$$P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

Now

$$\begin{aligned} P(E \cap F) &= P(1 \text{ or } 2 \text{ or } 3 \text{ or } 4 \text{ or } 5 \text{ heads}) \\ &= \frac{C(10,1) + C(10,2) + C(10,3) + C(10,4) + C(10,5)}{2^{10}}, \end{aligned}$$

and

$$P(F) = 1 - P(\text{no heads}) = 1 - \frac{1}{2^{10}}.$$

Therefore

$$P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{C(10,1)+C(10,2)+C(10,3)+C(10,4)+C(10,5)}{2^{10}}}{1 - \frac{1}{2^{10}}}.$$

41. Let H be the event "has headache," and let F be the event "has fever." We are given

$$P(H) = 0.01, \quad P(F \mid H) = 0.4, \quad P(F) = 0.02.$$

Using Bayes' Theorem, we have

$$P(H \mid F) = \frac{P(F \mid H)P(H)}{P(F)} = \frac{(0.4)(0.01)}{0.02} = 0.2.$$

43. $P(B \mid A) = 0.01$, $P(B \mid D) = 0.03$, $P(B \mid N) = 0.03$

44.

$$\begin{aligned} P(A \mid B) &= \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid D)P(D) + P(B \mid N)P(N)} \\ &= \frac{(0.01)(0.55)}{(0.01)(0.55) + (0.03)(0.1) + (0.03)(0.35)} = 0.289473684. \end{aligned}$$

Similarly,

$$P(D \mid B) = 0.157894736, \quad P(N \mid B) = 0.552631578.$$

47. By Theorem 6.5.9,
$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cup E_2).$$
Since
$$P(E_1 \cup E_2) \leq 1,$$
the result follows.

48. The Basis Step is $P(E_1) \leq P(E_1)$, which is clearly true.

Assume the statement is true for n. By Theorem 6.5.9,
$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n \cup E_{n+1}) &= P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) + P(E_{n+1}) \\ &\quad - P((E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) \cap E_{n+1}). \end{aligned}$$
Since
$$P((E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) \cap E_{n+1}) \geq 0,$$
we have
$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n \cup E_{n+1}) \leq P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) + P(E_{n+1}).$$
Using the inductive assumption, we have
$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n \cup E_{n+1}) &\leq P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) + P(E_{n+1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} P(E_i) + P(E_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} P(E_i). \end{aligned}$$

50. Yes. Since E and F are independent, $P(E \cap F) = P(E)P(F)$. Since $E \cap F$ and $E \cap \overline{F}$ are mutually exclusive and $E = (E \cap F) \cup (E \cap \overline{F})$,
$$P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap \overline{F}).$$
Now
$$P(E \cap \overline{F}) = P(E) - P(E \cap F) = P(E) - P(E)P(F) = P(E)[1 - P(F)[= P(E)P(\overline{F}).$$
Therefore E and $\overline{F}$ are independent.

51. No. If the person carries a bomb on the plane the probability of a bomb on the plane is 1. The probability of two bombs on the plane is then $1 \cdot 0.000001 = 0.000001$.

Section 6.6

2. $6!/2!$ 3. $12!/(4!2!)$

5. We form strings in which no two S's are consecutive by first placing the letters *ALEPERON*, which can be done in
$$\frac{8!}{2!}$$
ways. We then place the four S's in the nine in-between positions

$$\_\ A\ \_\ L\ \_\ E\ \_\ P\ \_\ E\ \_\ R\ \_\ O\ \_\ N\ \_,$$

which can be done in $C(9,4)$ ways. Thus

$$\frac{C(9,4)8!}{2!}$$

strings can be formed by ordering the letters *SALESPERSONS* if no two S's are consecutive.

6. We count the number of strings of length zero, the number of strings of length one, and so on, and then sum these numbers. The number of strings of length zero is one, and the number of strings of length one is five.

   There is one string of length two that uses the two O's, and there are $5 \cdot 4$ strings of length two that do not use two O's (formed by selecting a 2-permutation of *SCHOL*). Thus there are 21 strings of length two.

   There are four ways to choose three letters including two O's. There are $\frac{3!}{2!} = 3$ ways to permute these letters. Thus there are $4 \cdot 3$ strings of length three that use the two O's, and there are $5 \cdot 4 \cdot 3$ strings of length three that do not use two O's (formed by selecting a 3-permutation of *SCHOL*). Thus there are 72 strings of length three.

   There are $C(4,2) = 6$ ways to choose four letters including two O's. There are $\frac{4!}{2!} = 6$ ways to permute these letters. Thus there are $6 \cdot 6 = 36$ strings of length four that use the two O's, and there are $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ strings of length four that do not use two O's (formed by selecting a 4-permutation of *SCHOL*). Thus there are 156 strings of length four.

   There are $C(4,3) = 4$ ways to choose five letters including two O's. There are $\frac{5!}{2!} = 60$ ways to permute these letters. Thus there are $4 \cdot 60 = 240$ strings of length five that use the two O's, and there are $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ strings of length four that do not use two O's (formed by selecting a 5-permutation of *SCHOL*). Thus there are 360 strings of length five.

   There are $\frac{6!}{2!} = 360$ strings of length six. Thus there are

   $$1 + 5 + 21 + 72 + 156 + 360 + 360 = 975$$

   strings that can be formed by ordering the letters *SCHOOL* using some or all of the letters.

8. $C(10+6-1, 6-1)$

9. $C(4+6-1, 6-1)$

11. Assign each problem five points, and let x_i denote the number of additional points that can be assigned to problem i. Now the question is: How many solutions are there of

    $$\sum_{i=1}^{12} x_i = 40?$$

    Arguing as in Example 6.6.8, the answer is $C(40+12-1, 12-1)$.

12. 4^{100}

13. $C(100+4-1, 4-1)$

16. $C(9+3-1, 9)$

17. $C(4+3-1, 4)$

19. $C(8+2-1, 8)$

20. $C(10+2-1, 10) + C(9+2-1, 9)$

23. $C(12+3-1, 12)$

24. $C(14+2-1, 14)$

26. $C(15+3-1, 15) - C(8+3-1, 8)$

27. There are $C(14+3-1,14)$ solutions satisfying $0 \leq x_1$, $1 \leq x_2$, $0 \leq x_3$. Of these, $C(8+3-1,8)$ have $x_1 \geq 6$; $C(6+3-1,6)$ have $x_2 \geq 9$; and there is one with $x_1 \geq 6$ and $x_2 \geq 9$. Thus there are
$$C(8+3-1,8)+C(6+3-1,6)-1$$
solutions with $x_1 \geq 6$ or $x_2 \geq 9$. Therefore there are
$$C(14+3-1,14)-[C(8+3-1,8)+C(6+3-1,6)-1]$$
of the desired type.

29. The problem is equivalent to solving
$$x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}=M$$
since
$$0 \leq x_{n+1}=M-x_1+x_2+\cdots+x_n.$$
Thus the number of solutions is
$$C(M+(n+1)-1,(n+1)-1)=C(M+n,n).$$

30. We must count the number of solutions of
$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=15$$
satisfying $0 \leq x_i \leq 9$, $i=1,\ldots,6$. There are $C(15+6-1,15)$ solutions with $x_i \geq 0$, $i=1,\ldots,6$. There are $C(5+6-1,5)$ with $x_1 \geq 10$. There are $6C(5+6-1,5)$ with some $x_i \geq 10$. (Note that there is no double counting, since we cannot have $x_i \geq 10$ and $x_j \geq 10$, $i \neq j$.) Thus the solution is $C(15+6-1,15)-6C(5+6-1,5)$.

31. $C(20+6-1,20)-[6C(10+6-1,10)-C(6,2)]$

33. $8!/(4!\cdot 2!\cdot 2!)$ 23. $C(7+2-1,2)$ 36. $C(5+3-1,5)$ 37. $C(6,2)C(6,3)C(8,2)$

39. $C(20,5)C(15,5)$

40. $[C(20,5)-C(14,5)][C(14,5)+6C(14,4)]$ 42. $C(15+5-1,15)C(10+5-1,10)$

43. $C(12,10)$

45. Consider the number of orderings of kn objects where there are n identical objects of each of k types.

46. The number of times the print statement is executed is
$$1+2+\ldots+n.$$
Example 6.6.9 shows that this is the same as $C(2+n-1,2)=(n+1)n/2$.

48. $list\_sols(n)$ {
    for $x_1 = 0$ to n
        for $x_2 = 0$ to $n - x_1$
            $println(x_1, x_2, n - x_1 - x_2)$
    }

49. Many partitions are not counted. For example, the partition

$$\{\{x_1, x_3\}, \{x_2\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\}, \{x_7\}, \{x_8\}, \{x_9, x_{10}\}\}$$

is not counted.

51. The 10 disks can be given to Mary, Ivan, and Juan in $C(10+3-1, 3-1)$ ways. If Ivan receives exactly three disks, the remaining seven disks can be given to Mary and Juan in $C(7+2-1, 2-1)$ ways. Thus the probability that Ivan receives exactly three disks is

$$\frac{C(7+2-1, 2-1)}{C(10+3-1, 3-1)}.$$

Section 6.7

2. $32c^5 - 240c^4d + 720c^3d^2 - 1080c^2d^3 + 810cd^4 - 243d^5$

4. $59136s^6t^6$ 5. $C(10, 2)C(8, 3) = 10!/(2!3!5!)$ 7. $C(5, 2)$ 8. $C(5, 2)$

11. $C(12 + 4 - 1, 12)$ 12. $C(12 + 3 - 1, 12) + C(11 + 3 - 1, 11) + C(10 + 3 - 1, 10)$

14. (a) $C(n, k) < C(n, k + 1)$ if and only if

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} < \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

if and only if $k + 1 < n - k$ if and only if $k < (n - 1)/2$.

15. Set $a = 1$ and $b = -1$ in the Binomial Theorem.

17.
$$\begin{aligned} C(n, k-1) + C(n, k) &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(n!)k}{k!(n-k+1)!} + \frac{(n!)(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{(n!)(n+1)}{k!(n-k+1)!} = C(n+1, k). \end{aligned}$$

18. Choosing a k-element set X also selects an $(n - k)$-element set X.

20. $(n + 1)n(n - 1)/3$

21. Use the fact that $k^2 = 2C(k, 2) + C(k, 1)$.

23. Use Exercise 15 and equation (6.7.3).

24. Imitate the combinatorial proof of the Binomial Theorem.

26. Take $a = b = c = 1$ in Exercise 24.

27. Think of $C(n,k)^2$ as $C(n,k)C(n,n-k)$. Let X and Y be disjoint sets each having n elements. Now, $C(2n,n)$ is the number of ways of picking n-element subsets of $X \cup Y$. Picking an n-element subset of $X \cup Y$ is the same as picking a k-element subset of X and an $(n-k)$-element subset of Y.

29. Set $x = 1$ in Exercise 28.

30. **Inductive Step.**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} kC(n+1,k) &= \sum_{k=1}^{n} k[C(n,k-1)+C(n,k)] + (n+1)C(n+1,n+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} kC(n,k-1) + \sum_{k=1}^{n} kC(n,k) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)C(n,k-1) + \sum_{k=1}^{n+1} C(n,k-1) + \sum_{k=1}^{n} kC(n,k) \\
&= n2^{n-1} + 2^n + n2^{n-1} = (n+1)2^n
\end{aligned}$$

32. We count the number of ways to choose sets A and B with $A \subseteq B \subseteq X$. Fix an integer k with $0 \le k \le n$. There are $C(n,k)$ ways to choose a subset A of X with k elements. After choosing such a set A, there are $n-k$ elements not in A, and there are 2^{n-k} ways to choose a subset of them to union with A to produce a set B that contains A. Thus there are $C(n,k)2^{n-k}$ ways to choose subsets A and B satisfying $A \subseteq B \subseteq X$ in which A has k elements. Summing over all k we obtain the number of ordered pairs (A,B) satisfying $A \subseteq B \subseteq X$:

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k)2^{n-k}.$$

Taking $a = 2$ and $b = 1$ in the Binomial Theorem, we find that this sum is equal to

$$(a+b)^n = (2+1)^n = 3^n.$$

33. We use induction. The Basis Step is $n = m$:

$$C(m,m)H_m = H_m = C(m+1,m+1)\left(H_{m+1} - \frac{1}{m+1}\right).$$

Assume true for n. Then

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n+1} C(k,m)H_k &= \sum_{k=m}^{n} C(k,m)H_k + C(n+1,m)H_{n+1} \\
&= C(n+1,m+1)\left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1}\right) + C(n+1,m)H_{n+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C(n+1,m+1)\left(H_{n+2}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{m+1}\right)\\
&\quad +C(n+1,m)\left(H_{n+2}-\frac{1}{n+2}\right)\\
&= [C(n+1,m+1)+C(n+1,m)]H_{n+2}\\
&\quad -\frac{C(n+1,m+1)+C(n+1,m)}{n+2}-\frac{C(n+1,m+1)}{m+1}\\
&= C(n+2,m+1)H_{n+2}-\frac{C(n+2,m+1)}{n+2}-\frac{C(n+1,m+1)}{m+1}\\
&= C(n+2,m+1)H_{n+2}-\frac{C(n+1,m)}{m+1}-\frac{C(n+1,m+1)}{m+1} \qquad (6.1)\\
&= C(n+2,m+1)H_{n+2}-\frac{C(n+2,m+1)}{m+1}
\end{aligned}$$

Equality (6.1) follows from the formula

$$C(n+2,m+1)=\frac{n+2}{m+1}C(n+1,m).$$

Section 6.8

2. There are six possible combinations of first and last names. Each of the 18 persons is to be assigned a first and last name. By the Pigeonhole Principle, at least $\lceil 18/6\rceil = 3$ of them will be assigned the same first and last names.

3. Professor Euclid is paid 26 times per year. Since there are 12 months, by the Pigeonhole Principle, at least $\lceil 26/12\rceil = 3$ pay periods will occur in the same month.

5. Let $A = \{x_1,\ldots,x_{60}\}$ be the set of positions for the available items. Each x_i assumes a distinct value in $\{1,\ldots,115\}$. Let $B = \{x_1+4,\ldots,x_{60}+4\}$. The set

$$X = \{x_1,\ldots,x_{60},x_1+4,\ldots,x_{60}+4\}$$

of 120 numbers can take on values from 1 to 119. By the Pigeonhole Principle at least two of these 120 elements are identical. Since the elements in A are distinct, so are the elements in B. There is an element x_i in A and an element in x_j+4 in B which are identical.

6. Let a_i denote the position of the ith available item. The 110 numbers

$$a_1,\ldots,a_{55};\quad a_1+9,\ldots,a_{55}+9$$

have values between 1 and 109. By the second form of the Pigeonhole Principle, two must coincide. The conclusion follows.

8. If any pair (P_i,P_j), (P_i,P_k), (P_k,P_j) is dissimilar, then the two dissimilar pictures together with P_1 are three mutually dissimilar pictures. If none of these pairs are dissimilar, then P_i, P_j, and P_k are three mutually similar pictures.

9. No. Consider five pictures $P_1,\ldots,P_5$ in which P_1 is similar to P_2; P_2 is similar to P_3; P_3 is similar to P_4; P_4 is similar to P_5; P_5 is similar to P_1.

10. Yes, since any subset of six pictures has the given property.

15. Let $n = 2$, and consider the subset $\{3, 4, 5\}$ of $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

16. Let x_i denote the longest increasing subsequence and y_i denote the longest decreasing subsequence starting at a_i. Consider (b_i, c_i) and (b_j, c_j). We may assume that $i < j$. If $a_i < a_j$, $\{a_i, x_j\}$ is an increasing subsequence starting at a_i which is longer than x_j. Hence $b_i \geq$ length of $\{a_i, x_j\} > b_j$. If $a_i > a_j$, $\{a_i, y_j\}$ is a decreasing subsequence starting at a_i which is longer than y_j. Hence $c_i \geq$ length of $\{a_i, y_j\} > c_j$. Since the a_k's are distinct, the preceding cases are the only cases. For each, we have shown that (b_i, c_i) and (b_j, c_j) are distinct.

17. The number of ordered pairs (b_i, c_i) is $m = n^2 + 1$, one for each $i = 1, \ldots, m$.

18. By assumption, every increasing or decreasing subsequence has length less than or equal to n. Thus $1 \leq b_i \leq n$ and $1 \leq c_i \leq n$.

19. By Exercise 17, we have $n^2 + 1$ pairs (b_i, c_i). By Exercise 18, these pairs can take on only n^2 values. By the Pigeonhole Principle, at least two of these pairs must be identical. This contradicts the result of Exercise 16.

20. If $r_i \leq 8$, since $r_i \geq 0$ and $s_i = r_i$, we have $0 \leq s_i \leq 8$.

    If $r_i > 8$, since $r_i \leq 15$, we have $1 \leq 16 - r_i < 8$. Thus $1 \leq s_i < 8$.

21. The set $\{s_1, \ldots, s_{10}\}$ is a subset of the 9-element set $\{0, \ldots, 8\}$. By the second form of the Pigeonhole Principle, $s_j = s_k$ for $j \neq k$.

22. Suppose that $s_j = r_j$ and $s_k = r_k$. Then $r_j = r_k$, so $a_j \bmod 16 = a_k \bmod 16$. Therefore 16 divides $a_j - a_k$.

    If $s_j = 16 - r_j$ and $s_k = 16 - r_k$, we again find that $r_j = r_k$ and the conclusion follows.

23. We may suppose that $s_j = r_j$ and $s_k = 16 - r_k$. Thus $r_j = 16 - r_k$ so $r_j + r_k = 16$. By definition,

$$a_j \bmod 16 = r_j \quad \text{and} \quad a_k \bmod 16 = r_k$$

so there are integers q_j and q_k satisfying

$$a_j = 16q_j + r_j \quad \text{and} \quad a_k = 16q_k + r_k.$$

Now

$$\begin{aligned} a_j + a_k &= 16(q_j + q_k) + r_j + r_k \\ &= 16(q_j + q_k) + 16 \\ &= 16(q_j + q_k + 1). \end{aligned}$$

Therefore 16 divides $a_j + a_k$.

25. Suppose that the numbers around the circle are $x_1, \ldots, x_{12}$. We argue by contradiction. Suppose that

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 19 \\ x_2 + x_3 + x_4 &\leq 19 \\ &\vdots \\ x_{10} + x_{11} + x_{12} &\leq 19 \\ x_{11} + x_{12} + x_1 &\leq 19 \\ x_{12} + x_1 + x_2 &\leq 19. \end{aligned}$$

Summing, we obtain the contradiction

$$234 = 3\left(\frac{12 \cdot 13}{2}\right) = 3(x_1 + \cdots + x_{12}) \leq 12 \cdot 19 = 228.$$

26. The sum of some four consecutive players' numbers must be at least 26. Suppose that

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 25 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\leq 25 \\ &\vdots \\ x_{12} + x_1 + x_2 + x_3 &\leq 25 \end{aligned}$$

Summing, we obtain the contradiction

$$312 = 4\left(\frac{12 \cdot 13}{2}\right) = 4(x_1 + \cdots + x_{12}) \leq 12 \cdot 25 = 300.$$

27. Each of the $n! + 1$ functions

$$f, f^2, f^3, \ldots, f^{n!+1}$$

is a permutation of $\{1, \ldots, n\}$. Since there are $n!$ permutations of $\{1, \ldots, n\}$, by the Pigeonhole Principle,

$$f^i = f^j \tag{6.2}$$

for some distinct positive integers i and j.

Notice that if we compose each side of (6.2) with f^{-1}, we obtain

$$f^{i-1} = f^{j-1}.$$

We may assume that $i > j$. If we compose each side of (6.2) with f^{-1} j times, we obtain

$$f^{i-j} = I,$$

where $I(x) = x$ for $x = 1, \ldots, n$. We may take $k = i - j$ to obtain the desired conclusion.

29. Suppose that the numbers around the circle are $x_1, \ldots, x_{p+q}$. We argue by contradiction. Suppose that each consecutive group of k numbers contains a zero. Then each consecutive group of k numbers sums to $k-1$ or less. Thus

$$\begin{aligned} x_1 + \cdots + x_k &\leq k-1 \\ x_2 + \cdots + x_{k+1} &\leq k-1 \\ &\vdots \\ x_{p+q} + x_1 + \cdots + x_{k-1} &\leq k-1 \end{aligned}$$

Summing, we obtain

$$kp = k(x_1 + \cdots + x_{p+q}) \leq (p+q)(k-1)$$

or

$$p \leq (k-1)q.$$

Since $p \geq kq > (k-1)q$, this is a contradiction.

30. See Section 6.11.1, pages 167–169, of U. Manber, *Introduction to Algorithms*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1989.

31. Suppose that it is possible to mark k squares in the upper-left, $k \times k$ subgrid and k squares in the lower-right, $k \times k$ subgrid so that no two marked squares are in the same row, column, or diagonal of the $2k \times 2k$ grid. Then the $2k$ marked squares are contained in $2k-1$ diagonals. One diagonal begins at the top left square and runs to the bottom right square; $k-1$ diagonals begin at the $k-1$ squares immediately to the right of the top left square and run parallel to the first diagonal described; and $k-1$ diagonals begin at the $k-1$ squares immediately under the top left square and run parallel to the others described. By the Pigeonhole Principle, some diagonal contains two marked squares. This contradiction shows that it is impossible to mark k squares in the upper-left, $k \times k$ subgrid and k squares in the lower-right, $k \times k$ subgrid so that no two marked squares are in the same row, column, or diagonal of the $2k \times 2k$ grid.