Matemática Discreta

Licenciatura en Sistemas de Información

Docentes
Vaira, Stella - Fedonczuk, Miguel
Colliard, David - Cottonaro, Mariana - Froloff, Bárbara

FCyT - UADER

2025

Unidad 4: Relaciones de recurrencia.

La relación de recurrencia lineal de primer orden. La relación de recurrencia lineal homogénea de segundo orden, con coeficientes constantes. La relación de recurrencia no homogénea. Aplicaciones.

Sucesión numérica

Una sucesión numérica es una función de dominio natural y codominio real. Es decir,

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

La variable, que en este caso asume los valores de los números naturales, se simboliza con n.

$$f : n \to f(n)$$

Los valores asumidos por la sucesión, es decir las imágenes, determinan un conjunto ordenado que lo podemos anotar:

$$\{f(1); f(2); f(3); \ldots\}$$

Como $f(n)$ es el n-ésimo término de la sucesión, la anterior notación se sustituye por una letra afectada a un subíndice:

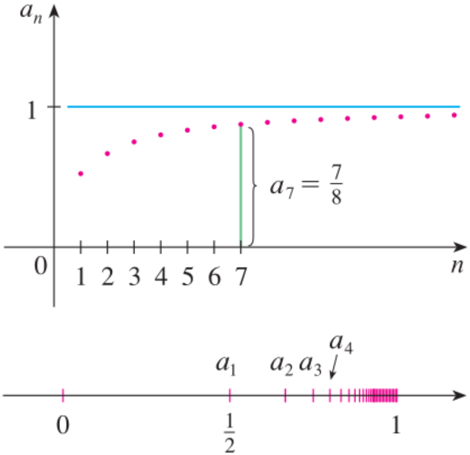
$$\{a_1; a_2; a_3; \ldots\}$$

En forma abreviada, se simbolizará $\{a_n\}$, donde a_n recibe el nombre de *término general de la sucesión*.

Ejemplos

1. $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\} = \left\{\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{4};\dfrac{4}{5};\dots\right\}$
2. $\{(-1)^n\} = \{-1;1;-1;1;\dots\}$
3. $\left\{1+\dfrac{1}{n}\right\} = \left\{2;\dfrac{3}{2};\dfrac{4}{3};\dfrac{5}{4};\dots\right\}$
4. $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\} = \left\{\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{8};\dots\right\}$
5. $\{n\} = \{1;2;3;4;\dots\}$

En general, su representación gráfica tradicional en el plano no se utiliza, en cambio se opta por su representación en la recta, como se puede ver en el siguiente ejemplo:



Actividad 1

Para cada una de las sucesiones listadas, determinar a_{10}, y si es posible extender el dominio a $\mathbb{N}_0$.

A veces es difícil definir un objeto (secuencia, función, conjunto, …) de forma explícita. Sin embargo, puede ser fácil definir este objeto en términos de sí mismo. Este proceso se denomina **recursividad**.

Cuando definimos un conjunto de forma recursiva, especificamos algunos elementos iniciales en un paso base y proporcionamos una regla para construir nuevos elementos a partir de los que ya tenemos en el paso recursivo.

Ejemplo 1 (factorial de un número)

- Paso Base: $0! = 1$
- Paso Recursivo: $n! = n \cdot (n-1)!$, $\forall n \geq 1$

Ejemplo 2 (sumatorias)

- Paso Base: $\sum_{k=0}^{0} a_k = a_0$
- Paso Recursivo: $\sum_{k=0}^{n+1} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1}, \ \forall n \geq 0$

Ejemplo 3 (la sucesión de los números armónicos)

- Paso Base: $H_1 = 1$
- Paso Recursivo: $H_{n+1} = H_n + \dfrac{1}{n+1}, \ \forall n \geq 1$

Actividad 2
Calcular los 5 primeros términos de la sucesión de número armónicos.

Es claro que una sucesión queda determinada no solo por su expresión recursiva, sino también por su valor inicial fijado en el paso base.

FCyT
Facultad de Ciencia y Tecnología

Algunos ejemplos de definiciones recursivas trabajadas en Lenguajes

Ejemplo 4 (potencia de un alfabeto)

- Paso Base: $\Sigma^1 = \Sigma$
- Paso Recursivo: $\Sigma^{n+1} = \{xy \,/\, x \in \Sigma, y \in \Sigma^n\}$

Ejemplo 5

Dado $\Sigma = \{0, 1\}$, queremos definir recursivamente el lenguaje A de todas las palabras de longitud par que sean capicúas.

- Paso Base: $\lambda \in A$
- Paso Recursivo: $\forall x \in A : 1x1 \in A \wedge 0x0 \in A$

Ejemplo 6

Ahora el lenguaje B contiene a todas las palabras capicúas de longitud impar.

- Paso Base: $0 \in B \wedge 1 \in B$
- Paso Recursivo: $\forall x \in B : 1x1 \in B \wedge 0x0 \in B$

FCyT Facultad de Ciencia y Tecnología

Ejemplo 7 (sucesiones periódicas)

- Paso Base: $x_0 = 1, x_1 = 4, x_2 = 7$
- Paso Recursivo: $x_{n+3} = x_n,\ \forall n \geq 0$

$$\{1, 4, 7, 1, 4, 7, 1, 4, 7, 1, 4, 7, \ldots\}$$

Ejemplo 8 (progresiones artiméticas)
Se denomina así a toda sucesión en que cada término, menos el primero, se obtiene sumando al anterior una cantidad fija.

- Paso Base: $a_0 = -2$
- Paso Recursivo: $a_n = a_{n-1} + 3,\ \forall n \geq 1$

$$\{-2, 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \ldots\}$$

Ejemplo 9 (progresiones geométricas)
Se denomina así a toda sucesión en que cada término, menos el primero, se obtiene multiplicando al anterior una cantidad fija.

- Paso Base: $a_0 = 3$
- Paso Recursivo: $a_n = -2a_{n-1},\ \forall n \geq 1$

$$\{3, -6, 12, -24, 48, -96, \ldots\}$$

Relación de recurrencia

Una **relación de recurrencia** para una sucesión $\{a_n\}$ es una expresión que relaciona su término general a_n con uno o más términos precedentes $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$, para cualquier n entero mayor o igual que un entero inicial m. Los valores de los primeros términos necesarios para empezar a calcular se llaman *condiciones iniciales*.

Resolver una ecuación recurrente es encontrar una función de n explícita $f(n)$ tal que $a_n = f(n)$, $\forall n \geq 0$

Por ejemplo, para la relación de recurrencia

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1}, \ \forall n \geq 1 \\ a_0 = 3 \end{cases}$$

$$\{3, -6, 12, -24, 48, -96, \ldots\}$$

Verificar que su solución es $a_n = 3(-2)^n$, $\forall n \geq 0$

Relación de recurrencia lineales

Una **relación de recurrencia de orden** k se llama **relación de recurrencia lineal** cuando su término general a_n es combinación lineal de sus k términos anteriores más una función $g(n)$ que es independiente de dichos términos:

$$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2 a_{n-2} + \cdots + \alpha_k a_{n-k} + g(n), \ \forall n \geq k$$

Si $g(n) \equiv 0$, la relación de recurrencia lineal se denomina **homogénea**; caso contrario, se llamará **no homogénea**.

Como se puede observar, el orden de una relación de recurrencia es la diferencia entre el mayor y el menor subíndice que aparecen en la relación. Así, por ejemplo:

- $a_{n+2} - 3a_n = 0$ es de segundo orden.
- $n_{n+1} - 3a_{n-1} + a_{n-2} + n^2 = 0$ es de tercer orden.
- $n_n + a_{n-2} + 2^n = 0$ es de segundo orden.

FCyT Facultad de Ciencia y Tecnología

Buscaremos inductivamente la solución para este tipo de RR

$$\begin{cases} a_n = d a_{n-1}, \ \forall n \geq 1 \\ a_0 = A \text{ (dado)} \end{cases}$$

- $a_1 = d \cdot a_0 = dA$
- $a_2 = d \cdot a_1 = d(dA) = d^2 A$
- $a_3 = d \cdot a_2 = d(d^2 A) = d^3 A$
- $a_4 = d \cdot a_3 = d(d^3 A) = d^4 A$
- $\ldots$
- $a_n = d \cdot a_{n-1} = d(d^{n-1} A) = d^n A$

Solución

$$a_n = A d^n, \ \forall n \geq 0$$

Actividad 3

Dada la siguiente relación de recurrencia $\begin{cases} 2a_n + a_{n-1} = 0, \ \forall n \geq 1 \\ a_0 = 48 \end{cases}$

1. Listar los primeros 4 términos de la sucesión que genera.
2. Resolverla.
3. Determinar k, tal que $a_k = -0{,}09375$.

Actividad 4

Dada la sucesión $\{5, -2, \frac{2}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{8}{125}, -\frac{16}{625}, \frac{32}{3125} \dots\}$

1. Justificar por qué es una progresión geométrica.
2. Encontrar una RR, con una condición inicial, que determine de manera única dicha sucesión.
3. Resolver dicha RR.

Actividades propuestas

Para realizar las actividades prácticas correspondientes a este apartado te sugerimos realizar los ejercicios del 1 al 6 del capítulo 10, sección 10.1 (Página 470) del libro *Matemática Discreta de Ralph Grimaldi* que se encuentra en el campus virtual.

Buscaremos una solución de la forma $a_n = Ar^n$, con $A \neq 0$ y $r \neq 0$, para este tipo de RR

$$\begin{cases} C_n a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} = 0, \ \forall n \geq 2 \\ a_0;\ a_1 \text{ (dados)} \end{cases}$$

- $C_n a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} = 0$
- $C_n A r^n + C_1 A r^{n-1} + C_2 A r^{n-2} = 0$
- $Ar^{n-2}\left(C_n r^2 + C_1 r + C_2\right) = 0$ y como $Ar^{n-2} \neq 0$
- $C_n r^2 + C_1 r + C_2 = 0$ (ecuación característica)

Sean r_1 y r_2 soluciones de la ecuación característica, la solución de la RR dependerá de las características de las mismas.

CASO 1

Para r_1 y r_2 reales y distintas:

$$a_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n, \ \forall n \geq 0$$

Donde las constantes A_1 y A_2 dependerán de las condiciones iniciales.

Ejemplo 10:

Resolver $a_0 = 9$; $a_1 = -7$; $a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0, \ \forall n \geq 2$

- $r^2 + r - 6 = 0$ (ecuación característica)
- $r_1 = 2$ y $r_2 = -3$ (soluciones de la ecuación característica)
- $a_n = A_1 2^n + A_2(-3)^n, \ \forall n \geq 0$
- Calculamos A_1 y A_2 a partir de las condiciones iniciales:
- $\begin{cases} a_0 = 9 \\ a_1 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 2^0 + A_2(-3)^0 = 9 \\ A_1 2^1 + A_2(-3)^1 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 9 \\ 2A_1 - 3A_2 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 4 \\ A_2 = 5 \end{cases}$
- Solución: $\boxed{a_n = 4 \cdot 2^n + 5(-3)^n, \ \forall n \geq 0}$

FCyT Facultad de Ciencia y Tecnología

Actividad 5

Resolver $a_0 = 1; a_1 = 4; a_n - 6a_{n-1} + 5a_{n-2} = 0,\ \forall n \geq 2$

1. Determinar los primeros cinco términos de la sucesión que genera.
2. Resolver dicha RR para calcular a_{10}

FCyT
Facultad de Ciencia y Tecnología

CASO 2

Para r_1 y r_2 reales e iguales: $r_1 = r_2 = r$

$$a_n = A_1 r^n + A_2 r^n n, \ \forall n \geq 0$$

Donde las constantes A_1 y A_2 dependerán de las condiciones iniciales.

Ejemplo 11:

Resolver $a_0 = 7$; $a_1 = 8$; $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n = 0, \ \forall n \geq 0$

- $r^2 - 4r + 4 = 0$ (ecuación característica)
- $r_1 = r_2 = 2$ (soluciones de la ecuación característica)
- $a_n = A_1 2^n + A_2 2^n n, \ \forall n \geq 0$
- Calculamos A_1 y A_2 a partir de las condiciones iniciales:
- $\begin{cases} a_0 = 7 \\ a_1 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 2^0 + A_2 2^0 \cdot 0 = 7 \\ A_1 2^1 + A_2 2^1 \cdot 1 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 7 \\ 2A_1 + 2A_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 7 \\ A_2 = -3 \end{cases}$
- Solución: $\boxed{a_n = 7 \cdot 2^n - 3n \cdot 2^n, \ \forall n \geq 0}$

FCyT Facultad de Ciencia y Tecnología

Actividad 6

Resolver $a_0 = 2; a_1 = 9; a_n + 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0,\ \forall n \geq 2$

1. Determinar los primeros cinco términos de la sucesión que genera.
2. Resolver dicha RR para calcular a_{10}

CASO 3

Para r_1 y r_2 complejas conjugadas:

$$a_n = A_1|z|^n \cos(n\theta) + A_2|z|^n \operatorname{sen}(n\theta),\ \forall n \geq 0$$

Con $|z| = |r_1| = |r_2|$ y θ el argumento de r_1 ó r_2, en su forma polar.
Además, las constantes A_1 y A_2 dependerán de las condiciones iniciales.

Ejemplo 12:

Resolver $a_0 = 3; a_1 = -2; a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0,\ \forall n \geq 2$

- $r^2 - 2r + 2 = 0$ (ecuación característica)
- $r_1 = 1 + i$ y $r_2 = 1 - i$ (soluciones de la ecuación característica)
- $|z| = |1 + i| = \sqrt{2}$ y $\theta = 45^o = \frac{\pi}{4}$
- $a_n = A_1\sqrt{2}^n \cos(\frac{\pi n}{4}) + A_2\sqrt{2}^n \operatorname{sen}(\frac{\pi n}{4}),\ \forall n \geq 0$
- Calculamos A_1 y A_2 a partir de las condiciones iniciales:
- $\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1\sqrt{2}^0 \cos(\frac{0}{4}) + A_2\sqrt{2}^0 \operatorname{sen}(\frac{0}{4}) = 3 \\ A_1\sqrt{2}^1 \cos(\frac{\pi}{4}) + A_2\sqrt{2}^1 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 3 \\ A_2 = -5 \end{cases}$
- Solución: $\boxed{a_n = 3\sqrt{2}^n \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) - 5\sqrt{2}^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{4}\right),\ \forall n \geq 0}$

FCyT Facultad de Ciencia y Tecnología

Actividad 7

Resolver $a_0 = 4; a_1 = 15; a_n + 9a_{n-2} = 0, \ \forall n \geq 2$

1. Determinar los primeros cinco términos de la sucesión que genera.
2. Resolver dicha RR para calcular a_{10}

Esta sucesión hace referencia a la secuencia ordenada de números descrita por Leonardo de Pisa, matemático italiano del siglo XIII:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

Esta sucesión fue descrita por Fibonacci como la solución a un problema de cría de conejos: "*Cierto hombre tiene una pareja de conejos juntos en un lugar cerrado y desea saber cuántos son creados a partir de este par en un año cuando, de acuerdo a su naturaleza, cada pareja necesita un mes para envejecer y cada mes posterior procrea otra pareja*" (Laurence Sigler, Fibonacci's Liber Abaci)

La respuesta a esta pregunta es la que sigue:

- Partimos de una pareja de conejos el primer mes. ($F_1 = 1$)
- Durante el segundo mes la pareja envejece pero no procrea. ($F_2 = 1$)
- El tercer mes la pareja procrea otra pareja (es decir, ya tenemos dos parejas). ($F_3 = 2$)
- El cuarto mes, la primera pareja vuelve a procrear y la pareja nueva envejece sin procrear (luego tenemos tres parejas). ($F_4 = 3$)
- El quinto mes, las dos parejas más viejas vuelven a procrear mientras que la nueva pareja no procrea (cinco parejas en total). ($F_5 = 5$)
- ...

FCyT Facultad de Ciencia y Tecnología

Mes 1
1 pareja

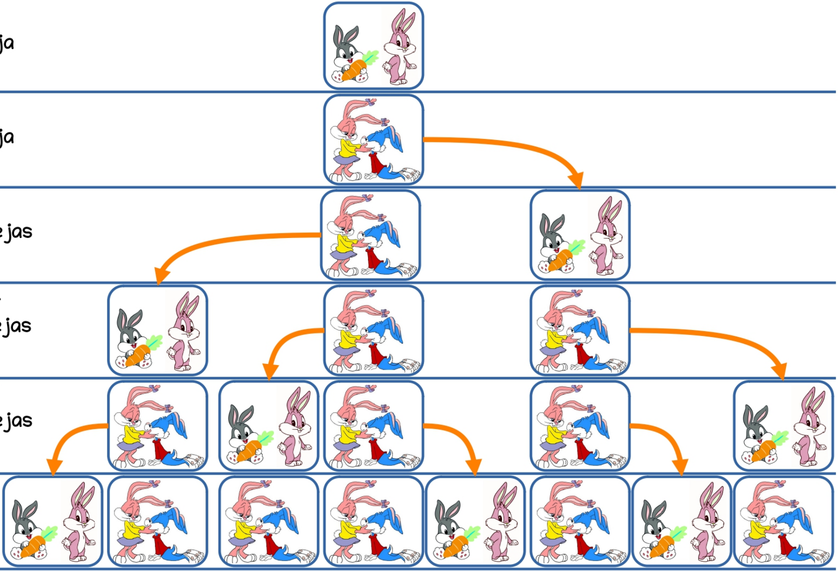
Mes 2
1 pareja

Mes 3
2 parejas

Mes 4
3 parejas

Mes 5
5 parejas

Mes 6
8 ps



Mes 7

13 parejas: 5 parejas adultas que procrean y 8 parejas que envejecen

Los ***números de Fibonacci*** pueden definirse recursivamente, mediante una relación de recurrencia lineal de segundo orden homogénea:

$$\begin{cases} F_0 = 0;\ F_1 = 1; \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Resolvamos dicha RR:

- $r^2 - r - 1 = 0$ (ecuación característica)
- $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (soluciones de la ecuación característica)
- $F_n = A_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + A_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
- Calculamos A_1 y A_2 a partir de las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} 0 = A_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + A_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 \\ 1 = A_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + A_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = A_1 + A_2 \\ 2 = A_1 \left(1 + \sqrt{5}\right) + A_2 \left(1 - \sqrt{5}\right) \end{cases} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} A_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ A_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

- Solución: $\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \forall n \geq 0}$

(∗): Aplicar propiedad distributiva en la segunda ecuación, y utilizar $A_1 + A_2 = 0$

Una sucesión estrechamente relacionada con los números de Fibonacci es la de los ***números de Lucas***, la cual se define:

$$\begin{cases} L_0 = 2;\ L_1 = 1; \\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2},\ \forall n \geq 2 \end{cases}$$

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, \ldots$$

Actividad 8

Hallar la solución para esta RR, tendiendo en cuenta que tiene similitudes con la de los números de Fibonacci.

Actividades propuestas

Para realizar las actividades prácticas correspondientes a este apartado te sugerimos realizar los siguientes ejercicios del capítulo 10, sección 10.2 del libro *Matemática Discreta de Ralph Grimaldi* que se encuentra en el campus virtual.

- 1 (a, b, c, f)
- 3, 4, 6 (a), 8 (a), 9, 11, 13

Recordemos que

Una **relación de recurrencia de orden** k es de la forma:

$$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2 a_{n-2} + \cdots + \alpha_k a_{n-k} + g(n),\ \forall n \geq k$$

Si $g(n) \equiv 0$, la relación de recurrencia lineal se denomina **homogénea**; caso contrario, se llamará **no homogénea**.

Trabajaremos en esta sección con $g(n) \not\equiv 0$.

El método que utilizaremos para resolver dichas RR No Homogéneas recibe el nombre de *método de coeficientes indeterminados*. Consiste en descomponer la solución como suma de la solución de la RR Homogénea asociada (es decir para $g(n) \equiv 0$) y una solución particular de la RR No Homogénea dada. Es decir:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

FCyT Facultad de Ciencia y Tecnología

La solución particular de la RR No Homogénea dependerá de la familia de funciones a la que pertenece $g(n)$ dada.
La siguiente tabla muestra que cuando $g(n)$ sea de la familia de funciones que indica la primera columna, la solución particular que se debe tomar es la asociada en la segunda columna.

$g(n)$	$a_n^{(p)}$
Polinómica de grado t	
c, cte	A, una constante
n	$A_1 n + A_0$, polinomio completo de grado 1
n^2	$A_2 n^2 + A_1 n + A_0$, polinomio completo de grado 2
n^3	$A_3 n^3 + A_2 n^2 + A_1 n + A_0$, polinomio completo de grado 3
n^t	polinomio completo de grado t
Exponencial de base r	
r^n	Ar^n, una constante por la misma exponencial
Trigonométricas	
$\operatorname{sen}(\theta n)$	$A_1 \operatorname{sen}(\theta n) + A_2 \cos(\theta n)$
$\cos(\theta n)$	$A_1 \operatorname{sen}(\theta n) + A_2 \cos(\theta n)$

FCyT Facultad de Ciencia y Tecnología

Para combinaciones de las funciones presentadas se sigue el mismo razonamiento.Veamos algunos ejemplos:

$$\begin{aligned}
g(n) =& 3n^2 + 1 & a_n^{(p)} &= A_2 n^2 + A_1 n + A_0 \\
g(n) =& 3n \cdot 5^n & a_n^{(p)} &= (A_1 n + A_0) \cdot 5^n \\
g(n) =& 3n + 5^n & a_n^{(p)} &= A_1 n + A_0 + A5^n \\
g(n) =& 7^n \operatorname{sen}(\theta n) & a_n^{(p)} &= 7^n [A_1 \operatorname{sen}(\theta n) + A_2 \cos(\theta n)] \\
g(n) =& (-3)^n \cos(\theta n) & a_n^{(p)} &= (-3)^n [A_1 \operatorname{sen}(\theta n) + A_2 \cos(\theta n)]
\end{aligned}$$

En los siguientes tres ejemplos veremos situaciones donde la solución particular propuesta es un múltiplo constante de un término de solución de la RR homogénea asociada. En estos casos se propone multiplicar la primera por n (o alguna potencia de n, según se requira) para evitarlo.

FCyT Facultad de Ciencia y Tecnología

Ejemplo 13

Sea $a_{n+2} - 10a_{n+1} + 21a_n = g(n)$, $\forall n \geq 0$, con a_0 y a_1 dados:

- La solución de la RR homogénea asociada es:

$$\boxed{a_n^{(h)} = A_1 3^n + A_2 7^n}$$

  Es claro que las constantes A_1 y A_2 no pueden ser halladas en este paso, ya que las condiciones iniciales son de la RR dada, y no de la homogénea asociada. Por lo que se calcularán al final.

- En la siguiente lista, se presentan algunas funciones y sus respectivas soluciones particulares que se deben plantear:

$$\begin{aligned}
g(n) &= 5n^2 - 3n + 7 & a_n^{(p)} &= A_2 n^2 + A_1 n + A_0 \\
g(n) &= 3 \cdot 11^n & a_n^{(p)} &= A \cdot 11^n \\
g(n) &= 5 \cdot 7^n & a_n^{(p)} &= An \cdot 5^n \\
g(n) &= 8 \cdot 5^n - 4 \cdot 3^n & a_n^{(p)} &= A_1 \cdot 5^n + A_2 n \cdot 3^n \\
g(n) &= 8 \cdot 7^n - 4 \cdot 3^n & a_n^{(p)} &= A_1 n \cdot 7^n + A_2 n \cdot 3^n
\end{aligned}$$

Ejemplo 14

Sea $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = g(n)$, $\forall n \geq 0$, con a_0 y a_1 dados. La solución de la RR homogénea asociada es:

$$\boxed{a_n^{(h)} = A_1 3^n + A_2 1^n = a_n^{(h)} = A_1 3^n + A_2}$$

Como vemos, el segundo término resulta una constante no nula (en principio), es decir, un polinomio de grado 1. Entonces, si

$$\begin{aligned}
g(n) &= 11 & a_n^{(p)} &= An \\
g(n) &= 5n^2 - 3n + 7 & a_n^{(p)} &= A_2 n^3 + A_1 n^2 + A_0 n \\
g(n) &= 3 \cdot 11^n & a_n^{(p)} &= A \cdot 11^n \\
g(n) &= 5 \cdot 3^n & a_n^{(p)} &= An \cdot 3^n \\
g(n) &= 8 \cdot 5^n - 4 & a_n^{(p)} &= A_1 \cdot 5^n + A_2 n \\
g(n) &= 8 \cdot 3^n - 4 & a_n^{(p)} &= A_1 n \cdot 3^n + A_2 n
\end{aligned}$$

FCyT Facultad de Ciencia y Tecnología

Ejemplo 15

Sea $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = g(n)$, $\forall n \geq 0$, con a_0 y a_1 dados. La solución de la RR homogénea asociada es:

$$\boxed{a_n^{(h)} = A_1 2^n + A_2 n 2^n}$$

Entonces, si

$$g(n) = 2 \cdot 11^n \qquad a_n^{(p)} = A \cdot 11^n$$

$$g(n) = 5 \cdot 2^n \qquad a_n^{(p)} = A_1 n^2 \cdot 2^n$$

Una vez propuesta la solución particular, se prosigue calculando sus constantes al sustituirla en la RR dada, ya que al ser una solución particular, verificará dicha ecuación.

Luego se plantea la solución general: $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$, y a partir de las condiciones iniciales se calculan las constantes que restan hallar.

FCyT Facultad de Ciencia y Tecnología

Actividad 9

Resolver $\begin{cases} 2a_n + a_{n-1} = 5 \cdot 7^n, \ \forall n \geq 1 \\ a_0 = 2 \end{cases}$

Tener en cuenta que la RRH asociada se trabajó en la actividad 3.

Actividad 10

Resolver $\begin{cases} 2a_n + a_{n-1} = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n, \ \forall n \geq 1 \\ a_0 = 3 \end{cases}$

Actividad 11

Resolver $\begin{cases} a_0 = 1; a_1 = 4; \\ a_n - 6a_{n-1} + 5a_{n-2} = 2 \cdot 3^n, \ \forall n \geq 2 \end{cases}$

Tener en cuenta que la RRH asociada se trabajó en la actividad 5.

Actividad 12

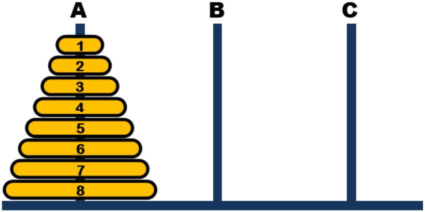
Resolver $\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2}; a_1 = 1; \\ a_n - 6a_{n-1} + 5a_{n-2} = -8n,\ \forall n \geq 2 \end{cases}$

Actividad 13

Resolver $\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2}; a_1 = 1; \\ a_n - 6a_{n-1} + 5a_{n-2} = 2 \cdot 5^n, \ \forall n \geq 2 \end{cases}$

Édouard Lucas, (1842-1891) fue un reconocido matemático francés. En 1883 publicó el juego de "La Torre de Hanoi" bajo el pseudónimo de Profesor N. Claus de Siam.

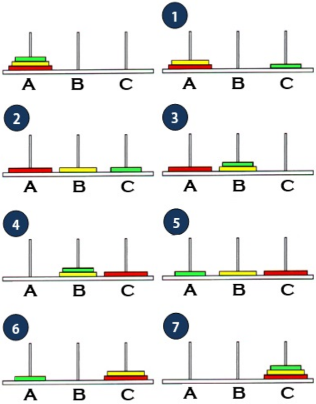
El juego de las Torres de Hanói es un dispositivo que consta de tres varillas verticales A, B y C y un número variable de discos. Los n discos son todos de diferente tamaño y, en la posición de partida del juego, todos los discos están colocados en la varilla A ordenados de mayor a menor tamaño. El juego consiste en pasar todos los discos a la tercera varilla colocándolos en el mismo orden.



Reglas

- Solo se puede mover un disco cada vez.
- Un disco de mayor tamaño no puede descansar sobre uno más pequeño que él mismo.
- Solo se puede desplazar el disco que se encuentra arriba de cada varilla.

Veamos el caso para 3 discos



Problema

¿Cuál es la menor cantidad de movimientos que se requieren para hacerlo?

La respuesta viene a partir de un algoritmo recursivo.
Si tenemos n discos, llamaremos a_n al mínimo número de movimientos necesario para transportar los n discos desde una varilla a otra. Así, para mover $n+1$ discos hacemos:

- Pasamos los n discos de arriba, de la varilla 1 a la 2, con las indicaciones dadas. Esto se realiza en a_n pasos.
- Pasamos el disco más grande de la varilla 1 a la 3. Esto se hace en un paso.
- Por último, pasamos los n discos de la varilla 2 a la 3, donde ya está el de mayor tamaño. Esto requiere otros a_n moviemientos.

De esta manera, la relación que se establece es:

$$\boxed{a_n = 2a_{n-1} + 1,\ \forall n \geq 0 \text{ con } a_0 = 0}$$

y su solución es $a_n = 2^n - 1\ \forall n \geq 0$

Actividades propuestas

Para realizar las actividades prácticas correspondientes a este apartado te sugerimos realizar los siguientes ejercicios del capítulo 10, sección 10.3 del libro *Matemática Discreta de Ralph Grimaldi* que se encuentra en el campus virtual.

- 1 (a, b, c, d)
- 5 (a, b)
- 3 (a), 4, 6 y 9