Unidad 1: Probabilidad

Ejemplos

Permite ponderar (estimar cuantitativamente) la ocurrencia de un evento futuro con ayuda del análisis del mismo evento ocurrido en el pasado (Estadística).

**Usos o aplicaciones (teóricas):* Permitir valorar la ocurrencia de un evento en términos económicos, es decir:

<u>Evento negativo:</u> contrastarlo con el costo de evitar que ocurra (si puedo) o pagar o perder dinero (seguros); o reglamentar normas.
<u>Evento positivo:</u> invertir o no dinero para beneficiarse si el evento ocurre (lotería, etc.).

En la gestión estatal: Vial, Mantenimiento, Urbanismo, Salud.
En las ciencias: Cs. Sociales, Cs. Naturales, Cs. Biológicas, Informática, Ingeniería.

<u>Ejemplos</u>

- Costo de abrir una caja adicional en peaje de autopista o en supermercado.
- Costo de comprar un repuesto de mejor calidad en informática.
- Costo de colocar un semáforo.
- Costo de abrir una agencia en una localidad.
- Costo de habilitar un nuevo cajero automático en bancos, supermercados, facultades.
- Costo de aumentar la resistencia de partes de líneas de transmisión de energía eléctrica en redes.

<u>Probabilidad:</u> Cuantificar la ocurrencia de un evento con ayuda de la estadística.

$$P(A) = \frac{n}{N} \qquad \frac{casos\ favorables\ del\ evento\ A}{casos\ posibles\ del\ evento\ A}$$

Jamás la probabilidad es mayor a 1

A <u>Evento</u>:
Suceso que se estudia.
Subconjunto de un Espacio Muestral.

B <u>Espacio Muestral</u> (E.M o S):
Conjunto de todos los resultados posibles de un experimento (finito o infinito).

<u>Experimento:</u>
Cualquier proceso que genere un conjunto de datos.

<u>Elemento (o Puntos Muestrales):</u>
Dato perteneciente a un Espacio Muestral.

<u>Observación:</u>
Registro de los datos que genera un experimento.

<u>Tipos de datos:</u>
Categóricos (Discretos).
Numéricos (Discretos o continuos).

Ej. 1: Lanzar una moneda
Experimento: Lanzar una moneda al aire 1 vez.
Observación: Dato: Indica el resultado del lanzamiento según lo que observo del experimento.
Espacio Muestral: $S = \{C, X\}$ Conjunto de todos los elementos posibles.
Elementos: C (cara), X (seca ó cruz).
Evento: Suceso Cara (C), un subconjunto del S.

$$P(C) = \frac{n}{N} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Ej. 2: Lanzar un dado
Experimento: Lanzar un dado.
Observación: Dato que muestra la cara superior del dado.
Elementos: 1,2,3,4,5,6.
Espacio Muestral: $S = \{1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6\}$
Eventos (Subconjunto):

$$A \to Que\ salga\ impar$$
$$B \to Que\ sea\ mayor\ que\ 4$$
$$C \to Que\ sea\ un\ 2$$

Probabilidad de los eventos A,B,C

$$P(A) = \frac{n}{N} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
$$P(B) = \frac{n}{N} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
$$P(C) = \frac{n}{N} = \frac{1}{6}$$

Se observa que según se define el evento, la probabilidad es diferente para el mismo experimento y el mismo espacio muestral.
¿Si cambiamos el experimento, cambia el espacio muestral? *Sí.*

Ej. Experimento: Lanzar un dado una vez y observar la cara superior e inferior del dado.

Espacio muestral: $S = \{1{,}6;\ 2{,}5;\ 3{,}4;\ 6{,}1;\ 5{,}2;\ 4{,}3\}$

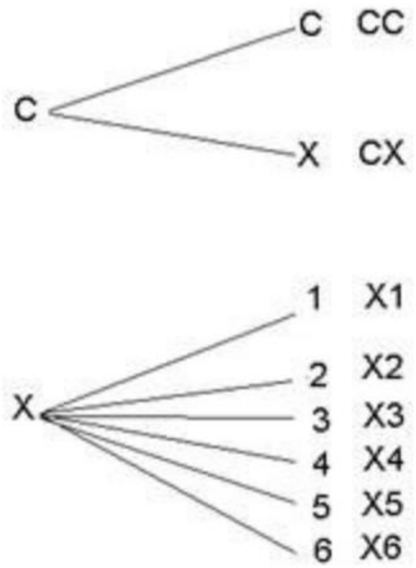
¿La probabilidad de los eventos cambia? *Sí.*

$$P(A) = \frac{n}{N} = \frac{6}{6} = 1$$
$$P(B) = \frac{n}{N} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$
$$P(C) = \frac{n}{N} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Si cambia.

Diagrama de tallo y hoja

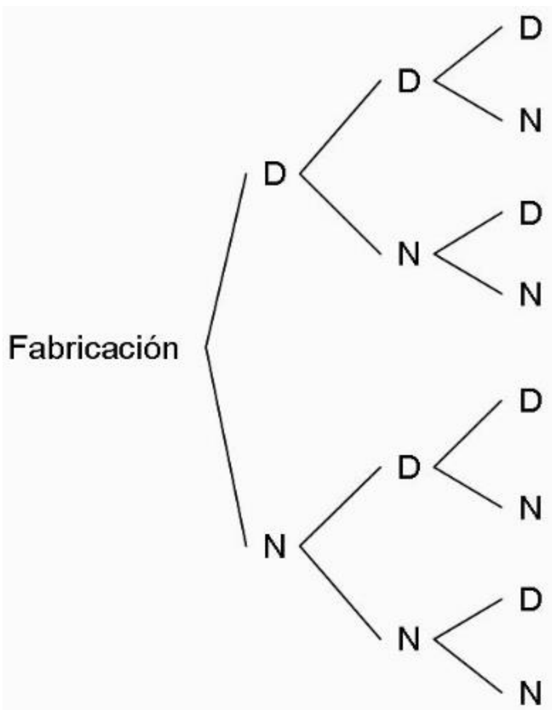
Experimento: Lanzar una moneda al aire una vez y dos en caso que ocurra cara, si ocurre cruz entonces lanzar un dado.



$$S = \{cc, cx, x1, x2, x3, x4, x5, x6\}$$

Ej. 3: Selección aleatoria de 3 artículos de un proceso de fabricación para ser clasificados como:
D = Defectuoso
N = No defectuoso

-Construya el diagrama de tallo y hoja
-Obtenga el Espacio Muestral.



$$S = \{(D, D, D); (D, D, N); (D, N, D); (D, N, N); (N, D, D); (N, D, N); (N, N, D); (N, N, N)\}$$
N = 8

También puede indicarse el Espacio Muestral con una expresión matemática en vez de listar los elementos:

$$S = \{(x, y) \; / \; x^2 + y^2 \le 4\} \quad \rightarrow ¿\, Que\ es\, ?$$

Teoría de conjuntos ⇒ Más definiciones

Complemento:

De un evento A del espacio muestral S es el conjunto de todos los elementos de S que no pertenecen a A.

Del Ej. 2: $A = \{1,2,3,4\} \rightarrow \underline{A} = \{5,6\}$	Del Ej. 3: $B = \{N >= 1\}$Al menos uno no defectuoso $\underline{B} = \{DDD\}$

Intersección:

De dos eventos A y B $(A \cap B)$ es el conjunto de todos los elementos comunes de A y B.

Ej. 4:

Sea $M = \{a, e, i, o, u\}$ y $N = \{r, s, t\}$

$$M \cap N = \emptyset$$

Si dos eventos no pueden ocurrir simultáneamente se dice que son “Mutuamente Excluyentes”

Unión: Evento que contiene a todos los elementos que pertenecen a dos o más eventos del Espacio Muestral. $(A \cup B)$

Ej. 5:

Si $M = \{X \mid 3 < X < 9\}$ y $N = \{Y \mid 5 < Y < 12\}$

$$M \cup N = \{Z \mid 3 < Z < 12\}$$

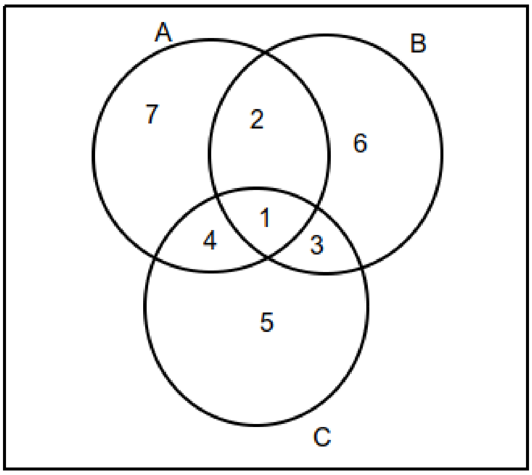
Representación Gráfica → Diagrama de Venn

Espacio Muestral → Un rectángulo

Eventos → Círculos dentro del rectángulo

Ej. 6:

$$A \cap B = \{1,2\}$$
$$B \cap C = \{1,3\}$$
$$A \cup C = \{1,2,3,4,5,7\}$$
$$\underline{B} \cap A = \{4,7\}$$
$$A \cap B \cap C = \{1\}$$
$$(A \cup B) \cap \underline{C} = \{2,6,7\}$$



Definición relacionada a teorema de conjuntos

Probabilidad: si un evento puede tener como resultado cualquiera de los *N* diferentes resultados igualmente probables y si exactamente *n* de estos resultados corresponde al evento A, entonces:

$P(A) = \frac{n}{N}$

En muchos casos todos los eventos tienen la misma oportunidad de ocurrencia y se les asigna la misma probabilidad.

Caso dado: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

Evento A: que salga 1 en la cara superior.

$P(A) = \frac{n}{N} = \frac{1}{6}$ (Todos los números tienen la misma probabilidad de salir)

Igualmente Probables

Cada número es un punto muestral.

El evento A corresponde en este caso a 1 punto muestral.

Evento $B: \{x/x < 4\}$ $\quad P(B) = \frac{3}{6}\ (suma\ de\ los\ puntos\ muestrales) = \frac{1}{2}$

¿Qué sucede si no todos los puntos muestrales tienen la misma probabilidad de ocurrir?

Ej. 7: Se carga un dado de manera que sea 2 veces más probable que salga un número par que uno impar. Calcular la probabilidad del evento B.

$$Evento\ B: \{x/x < 4\}$$

En vez de sumar los puntos muestrales correspondientes a este evento debemos hacer una suma ponderada dando más "peso" al que tiene más probabilidad de ocurrencia.

Llamemos *w* a la probabilidad de que salga Impar.

Llamemos *2w* a la probabilidad de que salga par.

$P(S) = 1 \Rightarrow$ suma de los puntos muestrales

$$P(S) = w + 2w + w + 2w + w + 2w = 9w = 1$$

Entonces $w = \frac{1}{9}$

$$P(x/x\ es\ impar) = 3w = \frac{3}{9}$$

$$P(x/x\ es\ par) = 3.(2w) = \frac{6}{9}$$

$P(B) = P(1) + P(2) + P(3) = w + 2w + w = 4w = \frac{4}{9}$ $\quad P(B) = \frac{4}{9}$

En muchos casos se hace difícil conocer los **N** diferentes resultado de un experimento para el cálculo de probabilidad.

Para calcular en forma rápida la cantidad de elementos de un espacio muestral puede usarse la **regla de la multiplicación**

Regla de Multiplicación

N: N° de elementos en un Espacio Muestral que resulta de un experimento con varias operaciones.

"Si una operación puede realizarse de N_1formas y por cada una de estas, una segunda operación puede realizarse de $n_2$formas, entonces las 2 operaciones se pueden realizar juntas de $N_1 N_2$formas"

$N = N_1 N_2 \ ... \ N_s$ $\qquad$ N_s: N° de elementos en la operación S

Del **Ej. 3** ⇒ 3 elementos y 2 posibilidades (Defectuoso/No defectuoso) para cada uno.

$N = n_1.n_2.n_3 = 2.2.2 = 8$

Del **Ej. 2** ⇒ Se lanza un dado y luego una moneda. Obtener el número de puntos muestrales o elementos en este espacio muestral.

$N_1 = 6$	N° de elementos de S es 12
$N_2 = 2$	$N_1 N_2 = (6)(2) = 12$

Ej. 8: **¿**Cuántos números pares de 3 dígitos pueden formarse con los dígitos 1, 2, 5, 6 y 9 si cada uno de ellos puede utilizarse sólo una vez?

$N_3 = 2$ (Número par) en las unidades $N_1 \ N_2 \ N_3$
□.□.2
c d u

Al ocuparse un número en las unidades (u), quedan 4 números disponibles para las decenas (d).

$N_2 = 4$ (Los 4 números restantes) □.4.2
$N_1 = 3$ (los 3 números restantes) en las centenas 3.4.2
$N_1 . N_2 . N_3 = (3).(4).(2) = 24$ números pares de 3 dígitos

Permutaciones

Número posible de arreglos de todos o algunos elementos de un Espacio Muestral.

A Todos distintos N = n! n: N° de elementos a ordenar

Ej. 9: Considere las letras a, b, c. ¿ Cuántas formas posibles de ordenar estas letras sin repetir ninguna existen?

$n_3 = 3 \ (puede \ estar \ cualquiera \ de \ ellas)$ $n_2 = 2 \ (quedan \ 2)$ $n_1 = 1 \ (queda \ 1)$ $N = n_1 . n_2 . n_3 = 3! = 6 \ formas$	$n_1 \ n_2 \ n_3$ □.□.□ (1)(2)(3)	a, b, c a, c, b b, c, a c, b, a b, a, c c, a, b

¿Y si es posible que se repitan?

$$n_1 = 3; \quad n_2 = 3; \quad n_3 = 3 \quad \Rightarrow \quad n_1.n_2.n_3 = 27$$

El número de permutaciones de *n* objetos distintos es *n*!

$n! = n.(n-1).(n-2). \dots 1$ Ya que al usar un objeto en una posición, quedan (n-1) objetos para las demás

$$3! = 3.2.1 = 6$$

Por definición:

$$1! = 1$$
$$0! = 1$$

Si en vez de tomar todos los elementos para arreglarlos o acomodarlos se toman solo una parte de ellos se tiene:

‘N’ objetos tomados “de a ‘r’

¿Cuantas formas hay de arreglarlos? (Importa el orden. No repetir.)

$$n(n-1)(n-2)(n-r-1)\ formas$$

B Todos distintos, se toma una parte (importa el orden).

$$nPr = n!/(n-r)!$$

Ej. 10: De las 4 primeras letras del abecedario, tomar de a 2 sin repetir.

a,b	a,c	a,d	
b,a	c,a	d,a	12 formas
b,c	c,b	b,d	
d,b	c,d	d,c	

$$nPr = 4P_2 = (n-r+1)! = (4-2+1)! = 3! = 12$$

$$nPr = 4P_2 = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{4.3.2.1}{2.1} = 12$$

Ej. 11: Se sacan 2 ticket de lotería para el 1° y 2° premio de un total de 20. Encuentre el número de posibles formas de sacar el 1° y 2° premio.

n = 20 $\qquad nPr = 20P_2 = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{20!}{18!} = (20).(19)$

r = 2 $\qquad 20P_2 = 380\ formas\ de\ sacar\ el\ 1°\ y\ 2°\ premio$

Ej. 12: 3 Disertantes se pueden ubicar en 5 fechas distintas. ¿ Cuál es el número total de formas en que se podrían organizar estas 3 disertaciones?

n = 5 fechas $\quad 5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 5.4.3 = 60$

r = 3 disertantes

Rta: Estos 3 disertantes se pueden organizar de 60 formas diferentes.

C <u>Caso en que no todos los elementos son distintos (algunos son iguales)</u>

Ej. 13: Árbol de navidad

4 focos rojos
3 focos verdes
2 focos azules

¿Cuantas formas tengo para ordenarlas en el árbol?

Sean n objetos de los cuales:

$$n_1 = tipo\ 1$$
$$n_2 = tipo\ 2$$
$$\ldots \quad \ldots.$$
$$n_k = tipo\ k$$

$$nP_k = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

$$9P_3 = \frac{9!}{4!\, 3!\, 2!} = \frac{9.8.7.6.5}{(3.2).2} = 1260$$

D <u>Permutaciones de n objetos distintos arreglados en un círculo</u>

$$nP° = (n-1)!$$
$$nP° = (8-1)! = 7!$$
$$8P° = 5040$$

3 Elementos: a, b, c

<u>Combinatoria</u> $\quad C_r^n = \frac{n}{r}$

N° de formas posibles de seleccionar *r* objetos de un total de *n* <u>sin importar el orden</u>.

Del Ejemplo 4 letras del abecedario

a,b	a,c	a,d	de las 12 formas sólo quedan 6
b,a	c,a	d,a	
b,c	c,b	b,d	
d,b	c,d	d,c	

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

a, b, c, d

a,b	b,c
a,c	b,d
a,d	c,d

$$C_2^4 = \frac{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4.3.2}{2.2} = 6$$

Ej. 14: Encuentre el número de formas de organizar comités científicos que estén representados por 2 químicos y 1 físico sabiendo que se cuenta con 4 químicos y 3 físicos.

Solución:

1. De los 4 químicos, debo elegir 2.
2. De los 3 físicos debo elegir 1.
3. Con la regla de la multiplicación puedo encontrar el n° de comités sabiendo que hay químicos y físicos.
   N = Q (formas de elegir químicos 1).F (formas de elegir físicos 2)

1. Formas de elegir 2 químicos de 4 sin importar el orden.
$$n_Q = C_2^4 = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$$
2. Formas de elegir 1 físico de 3
$$n_F = C_1^3 = \frac{3!}{1!} = 3$$
3. Número de comités científicos $N = Q.F = (6).(3) = 18\ comités$

Ej. 15: En una mano de póker que consiste en 5 cartas, encuentre la posibilidad de obtener 3 ases y 2 reyes si el mazo de cartas es de 52.

Solución:

A.A.A	R.R
n_1	n_2

1. n_1:formas de obtener 3 ases de 4 ases posibles
$$n_1 = C_3^4 = 4$$
2. n_2:formas de obtener 2 reyes de 4 posibles
$$n_2 = C_2^4 = 6$$
3. ¿Cuantas manos de 3 ases y 2 reyes son posibles?
$$n = n_1.n_2 = 4.6 = 24\ manos$$
4. ¿Cuantas formas de obtener esas manos de 3 ases y 2 reyes del total de cartas?
$$N = C_5^{52} = \frac{52!}{5!\,(47!)} = 2.598.960$$

P(A): 3 ases y 2 reyes en una mano de poker

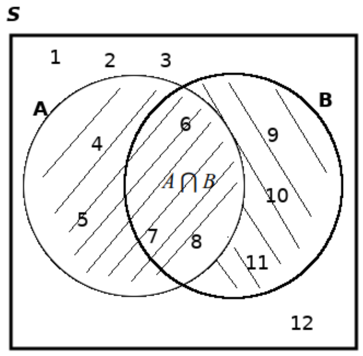
$$P(A) = \frac{n}{N} = \frac{24}{2.598.960}$$

Reglas Aditivas

Si un evento puede ser expresado como la unión de otros eventos entonces:

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Del ejemplo de unión:



$$A: \{x/3 < x < 9\};\ B: \{y/5 < y < 12\}$$
$$P(A \cup B) = K: \{z/3 < z < 12\}$$
$$P(A) = \frac{5}{12};\ P(B) = \frac{6}{12};\ P(C) = \frac{8}{12}$$
$$P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5+6-3}{12} = \frac{8}{12}$$

En el caso de tres eventos *A*, *B* y *C*; para la unión de los tres, representado por el evento *D*, se tiene:

$$P(D) = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

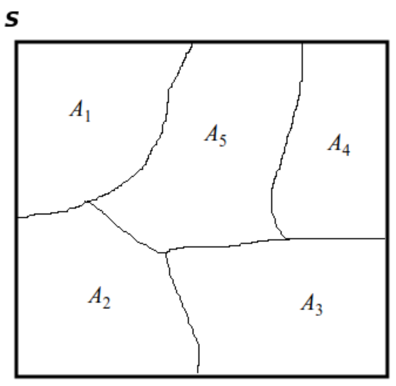
Corolario:

- Si los eventos son <u>mutuamente excluyentes</u> ⇒ $P(A \cap B) = (\emptyset) = 0$
- $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(D) = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$
- Si los eventos pueden ser expresados como la partición del Espacio Muestral *S*, entonces:

  $A_1, A_2, \ldots A_n son\ mutuamente\ excluyentes$

  Si $A_1, A_2, \ldots A_n$ es una partición de *S* entonces:$(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \{\emptyset\}$

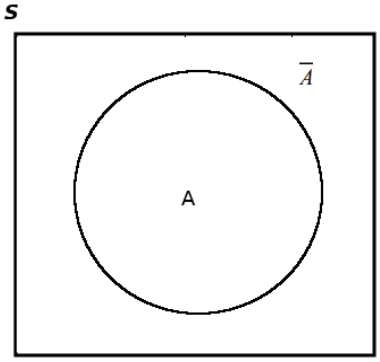
  $$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n) = P(S) = 1$$



$$P(A_4) = P(S) - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_5)$$
$$P(A_4) = 1 - [P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_5)]$$

- Si A y B son eventos complementarios:

$$P(B) = P(\bar{A})$$
$$P(A) + P(\bar{A}) = P(S) = 1$$
$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(B)$$



<u>Probabilidad condicional</u>

Probabilidad de ocurrencia de un evento cuando se sabe que ocurrió otro relacionado con éste.

$$P(B/A): Probabilidad\ del\ evento\ B\ dado\ que\ ocurrió\ A$$

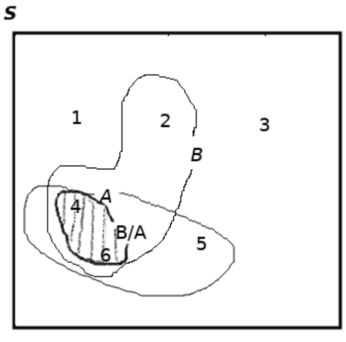
Ejemplo 16: Calcular la probabilidad de que salga un número par al tirar un dado sabiendo que el número es mayor de 3.

$$X: \{N°\ del\ dado\}$$

$B: \{X/X\ es\ par\}$ $\qquad$ $P(B/A) = ?$ $\qquad$ $P(A) = 1/2$
$A: \{X/X > 3\}$ $\qquad$ $A: \{4,5,6\} = P(B/A) = 2/3$

Ahora A es nuestro nuevo espacio muestral porque sabemos (estamos seguros) que se produjo A.

$$P(B/A) = \frac{2}{3}$$



Para el espacio muestral original

$P(A \cap B) = 1/3$ y $P(A) = 1/2$

Por lo tanto $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$ $\quad Si\ P(A) > 0$

Ejemplo 17:
La probabilidad de que un vuelo programado normalmente salga a horario es *P(D) = 0.83*. La probabilidad de que llegue a horario es *P(A) = 0.82* y la probabilidad de que salga y llegue a horario es *P(D∩A) = 0.78*. Encuentre la probabilidad que:

a) Un avión llegue a horario sabiendo que salió a horario.
b) Un avión salió a horario sabiendo que llegó a horario.

Rta a) $P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.78}{0.83} = 0.94$

Rta b) $P(D/A) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)} = \frac{0.78}{0.82} = 0.95$

Eventos Independientes

En probabilidad condicional vemos cómo la ocurrencia de un evento altera la probabilidad de ocurrencia de otro siempre y cuando exista una vinculación entre ambos. Es decir, el conocimiento adicional de la ocurrencia de un evento altera la probabilidad de otro siempre que exista dependencia entre ambos eventos. Justamente cuando no exista esta dependencia no se altera la probabilidad de la ocurrencia de un evento aunque sepamos de la ocurrencia del otro evento.

Por tanto:
P(B/A) = P(B) y *P(A/B) = P(A)*

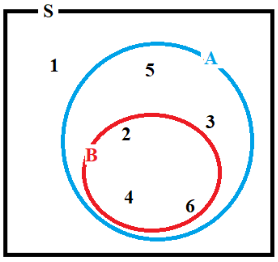
Entonces A y B son eventos *independientes*.

Reglas multiplicativas

Si observamos la fórmula de condicionalidad de eventos decimos que:
$P(B/A).P(A) = P(A \cap B)$ y también $P(A/B).P(B) = P(A \cap B)$

Si los eventos A y B son independientes:
$P(B/A) = P(B)$ y $P(A/B) = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B)$ (Sólo para eventos independientes)

Ejemplo 18: Eventos no independientes y no excluyentes.
$A:\{X/X > 1\}$; $B:\{X/X\ sea\ par\}$ en un tiro de dado.
$P(B/A) = P(B)$; $P(A/B) = P(A)$ $\Rightarrow$ No son independientes
$\frac{3}{5} \neq \frac{1}{2}$ $1 \neq \frac{5}{6}$



Ejemplo 19: Comprobar que los eventos: $A:\{X/X\ es\ par\}$ y $B:\{X/X > 3\}$ no son independientes al tirar un dado.

Por el absurdo:

a) Si fueran independientes entonces:
   P(B/A) = P(B)
   P(A/B) = P(A)

   P(B/A) = ⅔ pero P(B) = ½
   P(A/B) = ⅔ pero P(A) = ½

Por tanto no son independientes **por la regla multiplicativa.**

b) Si lo fueran

$P(A \cap B) = P(B/A) \,.\, P(A)$	Para 2 eventos
$P(A \cap B) = P(A/B) \,.\, P(B)$	

$P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ pero $P(B/A) \,.\, P(A) \; = \frac{2}{3} . \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{3}}$

$$P(A \cap B) \; = \; P(A) \,.\, P(B) = \frac{1}{4}$$

Si son independientes $\quad P(B/A) = P(B) \quad$ y $\quad P(A/B) \,.\, P(B) = \frac{2}{3} . \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

$P(A/B) = P(A) \quad$ y $\quad P(B/A) \,.\, P(A) = \frac{1}{2} . \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Debido a que ⅓ ≠ ¼ **entonces no se cumple.**

Extensión

Si en un experimento pueden ocurrir $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ eventos, entonces:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap \; A_k) \; = \; P(A_1) \,.\, P(A_2/A_1) \,.\, P(A_3/A_1 \cap A_2) \; \ldots.$$

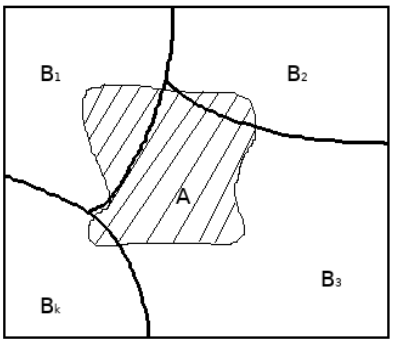
$$\ldots . P(A_k/A_1 \cap A_2 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_{k-1})$$

Teorema de probabilidad total

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A) \; = \sum_{i=1}^{k} [P(B_i) . P(A/B_i)]$$

B_i: Partición del Espacio Muestral $\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} P(B_i) \; = \; 1$

Si quisiéramos encontrar la probabilidad del evento *A* en términos de los eventos B_i donde todos los B_i son mutuamente excluyentes.



Ejemplo 20:

En una planta de montaje existen 3 máquinas B_1, B_2, B_3 que trabajan fabricando el 30%, 45% y 25% de las partes respectivamente. Se sabe por experiencia que el 2%, 3% y 2% de estos productos fabricados respectivamente son defectuosos.

Suponga que se selecciona de forma aleatoria 1 producto terminado.

¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

Eventos:
A: Producto defectuoso.
B_1: Producto fabricado por la máquina 1.
B_2: Producto fabricado por la máquina 2.
B_3: Producto fabricado por la máquina 3.

Las B_1son mutuamente excluyentes (cada producto es fabricado sólo por una máquina)

$$P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + P(B_3 \cap A) =$$
$$= P(B_1).P(A/B_1) + P(B_2).P(A/B_2) + P(B_3).P(A/B_3)$$

$$= (0.3).(0.02) + (0.45).(0.03) + (0.25).(0.02) = 0.0245$$

<u>Regla de Bayes</u> (Probabilidad de las causas)

Si los eventos $B_1, B_2, \ldots, B_k$constituyen una partición del Espacio Muestral S y $P(B_i) \neq 0$ para $i = 1,2,\ldots,k$ entonces cualquier evento $B_r$en S tal que $P(A) \neq 0$ puede expresarse como
$P(B_r/A) = P(B_r \cap A) / P(A)$ [$Probabilidad\ Condicional$].
Como $P(A/B_r) = P(B_r \cap A) / P(B_r) \Rightarrow P(B_r \cap A) = P(B_r).P(A/B_r)$

$$P(B_r/A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r).P(A/B_r)}{\sum_{i=1}^{k}[P(B_i).P(A/B_i)]}$$

Ejemplo 21: (Con respecto al caso anterior del Ejemplo 20):
¿Qué probabilidad existe de que lo haya fabricado la máquina 2 (B_2) sabiendo que el producto elegido al azar es defectuoso?

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2 \cap A)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_2).P(A/B_2)}{\sum_{i=1}^{3}[P(B_i).P(A/B_i)]}$$

$$P(B_2/A) = \frac{(0.45).(0.03)}{(0.3).(0.02) + (0.45).(0.03) + (0.25).(0.02)} = \frac{0.0135}{0.006 + 0.0135 + 0.005} = 0.55$$