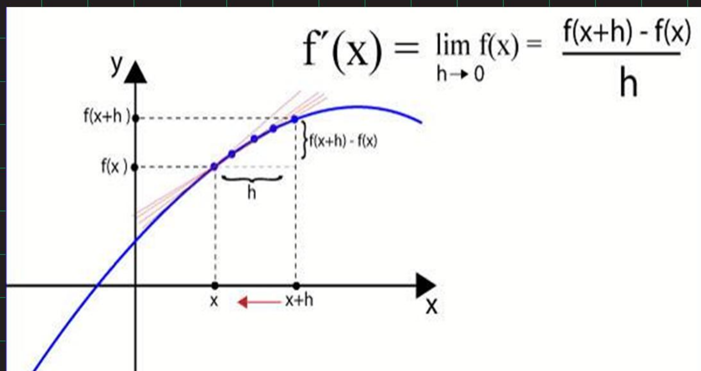
DERIVADAS

Definición Formal

Si $f(x)$ es una función, la derivada de f en un punto x se denota como $f'(x)$ y se define como el límite:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Este límite, si existe, nos proporciona la pendiente de la recta tangente a la curva de f en el punto x.



* NOTACIÓN:

$y' = \frac{dy}{dx}$ $\quad$ $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$

→ diferencial (infinitezimalmente pequeño)

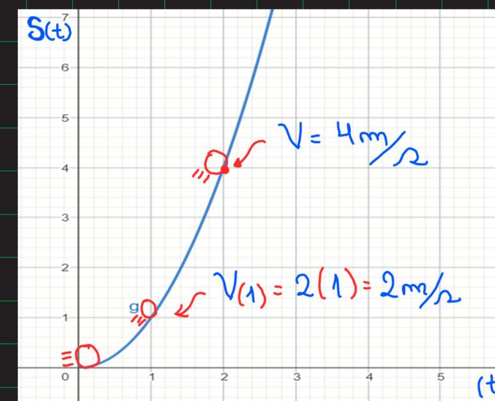
Razón de Cambio Instantánea

La razón de cambio instantánea en un punto específico $x = a$ es lo que llamamos la derivada de la función en ese punto, denotada como $f'(a)$. Se define como el límite de la razón de cambio promedio cuando el intervalo se hace infinitesimalmente pequeño:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Ejemplo:

Consideremos la función $s(t) = t^2$, que podría representar la posición de un objeto en función del tiempo t. La velocidad del objeto es la razón de cambio de su posición respecto al tiempo, es decir, la derivada de $s(t)$:



Hallar la velocidad en $t = 2s$

→ $S(t) = t^2$

→ $V(t) = 2t$

$V(2) = 2(2) = 4\ m/s$

Derivada por definición: "t^2"

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(t+h)^2 - t^2}{h} \Rightarrow \frac{\cancel{t^2} + 2th + h^2 - \cancel{t^2}}{h}$$

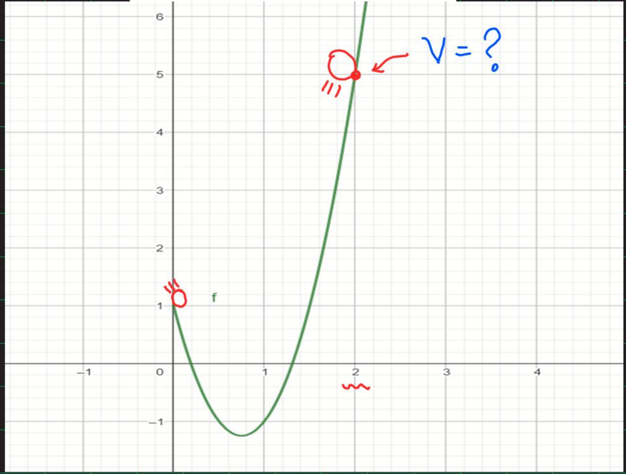
$$\lim_{h \to 0} \frac{2t\cancel{h} + h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} \Rightarrow \lim_{h \to 0} (2t + h)$$

$$\Rightarrow 2t + 0 \Rightarrow 2t$$

EJM:

Sea "S" la ecuación de la posición de una nave (con $t \geq 0$), halle la ecuación de la velocidad y su rapidez en $t = 2$ s.
Si: "t" está en segundos y "S" en kilómetros.

$$S(t) = 4t^2 - 6t + 1$$



• Usaremos:

$\checkmark \ \frac{d}{dx}(Ku) = K \frac{du}{dx}$ $\quad \checkmark \ \frac{d}{dx}(x^n) = n x^{n-1}$

$\checkmark \ \frac{d(K)}{dx} = 0$

$$S(t) = 4t^2 - 6t + 1$$

$V(t) = 8t - 6 + 0$

$V(t) = 8t - 6 \rightsquigarrow V(2) = 8(2) - 6 = 10 \, m/s$

* Teoremas:

1. $\frac{d}{dx}[cu] = cu'$ ✓
2. $\frac{d}{dx}[u \pm v] = u' \pm v'$ ✓
3. $\frac{d}{dx}[uv] = uv' + vu'$
4. $\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{vu' - uv'}{v^2}$
5. $\frac{d}{dx}[c] = 0$ ✓
6. $\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}u'$ ✓
7. $\frac{d}{dx}[x] = 1$ ✓
8. $\frac{d}{dx}[|u|] = \frac{u}{|u|}(u'), \quad u \neq 0$
9. $\frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{u'}{u}$
10. $\frac{d}{dx}[e^u] = e^u u'$
11. $\frac{d}{dx}[\sin u] = (\cos u)u'$ ✓
12. $\frac{d}{dx}[\cos u] = -(\sin u)u'$ ✓
13. $\frac{d}{dx}[\tan u] = (\sec^2 u)u'$ ✓
14. $\frac{d}{dx}[\cot u] = -(\csc^2 u)u'$
15. $\frac{d}{dx}[\sec u] = (\sec u \tan u)u'$
16. $\frac{d}{dx}[\csc u] = -(\csc u \cot u)u'$
17. $\frac{d}{dx}[\arcsin u] = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
18. $\frac{d}{dx}[\arccos u] = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
19. $\frac{d}{dx}[\arctan u] = \frac{u'}{1+u^2}$
20. $\frac{d}{dx}[\text{arccot } u] = \frac{-u'}{1+u^2}$
21. $\frac{d}{dx}[\text{arcsec } u] = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$
22. $\frac{d}{dx}[\text{arccsc } u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

Desarrollo:

- $f(x) = x^4 + \frac{3}{x^2}$

$$f'(x) = \left(x^4 + \frac{3}{x^2}\right)'$$
$$= (x^4)' + \left(\frac{3}{x^2}\right)'$$
$$= 4x^3 + (3x^{-2})'$$
$$= 4x^3 + 3(x^{-2})'$$
$$= 4x^3 + 3(-2x^{-3})$$
$$= 4x^3 - \frac{6}{x^3}$$

$* (a^u)' = a^u . \ln a . u'$

a) $f(x) = x^2 - 2^x + 2$

$$f'(x) = (x^2 - 2^x + 2)'$$
$$= (x^2)' - (2^x)' + (2)'$$
$$= 2x - 2^x . \ln 2 + 0$$
$$= 2x - 2^x . \ln 2$$

- $f(x) = x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 6x + 3$

$$f'(x) = (x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 6x + 3)'$$

$$= (x^4)' + (5x^3)' + (7x^2)' - (6x)' + (3)'$$

$$= 4x^3 + 5(x^3)' + 7(x^2)' - 6(x)' + 0$$

$$= 4x^3 + 5(3x^2) + 7(2x) - 6(1)$$

$$= 4x^3 + 15x^2 + 14x - 6$$

Regla de la cadena:

a) $f(x) = 3\cos(3x) - 4\,\mathrm{sen}(4x) + 5\tan 5x$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$f'(x) = (3\cos 3x - 4\,\mathrm{sen}\,4x + 5\tan 5x)'$$

$$= (3\cos 3x)' - (4\,\mathrm{sen}\,4x)' + (5\tan 5x)'$$

$$= 3(\cos 3x)' - 4(\mathrm{sen}\,4x)' + 5(\tan 5x)'$$

$$= 3(-\mathrm{sen}\,3x \cdot (3x)') - 4(\cos 4x \cdot (4x)')$$

$$+ 5(\sec^2 5x \cdot (5x)')$$

$$= 3(-\mathrm{sen}\,3x \cdot 3) - 4(\cos 4x \cdot 4) + 5(\sec^2 5x \cdot 5)$$

$$= -9\,\mathrm{sen}\,3x - 16\cos 4x + 25\sec^2 5x$$

Derivada de una función compuesta (La regla de la cadena)

Sea la función: $h(x) = f(g(x))$, entonces:

$$h(x)' = \frac{dy}{dx} = (f0g)(x)' = [f(g(x)]' = f(g(x))'g(x)'$$

donde se entienda que $f(g(x))'$ es la derivada de f calculada en $g(x)$

e) $f(x) = 7^{x^4+x^2+5}$

$$*\ (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$$

$$f'(x) = \left(7^{x^4+x^2+5}\right)'$$

$$= 7^{x^4+x^2+5} \cdot \ln 7 \cdot (x^4 + x^2 + 5)'$$

$$= 7^{x^4+x^2+5} \cdot \ln 7 \cdot (4x^3 + 2x + 0)$$

$$= 7^{x^4+x^2+5} \cdot \ln 7 \cdot (4x^3 + 2x)$$

a) $f(x) = x^3 \ln(x)$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$f'(x) = (x^3 \cdot \ln x)'$

$f'(x) = x^3 \cdot (\ln x)' + \ln x \cdot (x^3)'$

$f'(x) = \cancel{x^3} \cdot \dfrac{1}{\cancel{x}} + \ln x \cdot 3x^2$

$f'(x) = x^2 + \ln x \cdot 3x^2$

$f(x) = \dfrac{x^3+x^2+3}{x^2}$

$f'(x) = \dfrac{x^2 \cdot (x^3+x^2+3)' - (x^3+x^2+3) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2}$

$= \dfrac{x^2 \cdot \left((x^3)' + (x^2)' + (3)'\right) - (x^3+x^2+3) \cdot 2x}{x^4}$

$= \dfrac{x^2(3x^2+2x) - 2x(x^3+x^2+3)}{x^4}$

$= \dfrac{3x^4 + \cancel{2x^3} - 2x^4 - \cancel{2x^3} - 6x}{x^4} \Rightarrow \dfrac{x^4 - 6x}{x^4}$

$f(x) = \sqrt{x^3} - \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$

$f(x) = x^{\frac{3}{2}} - \dfrac{3}{x^{\frac{2}{3}}}$

$f(x) = x^{\frac{3}{2}} - 3x^{-\frac{2}{3}}$

$\Rightarrow f'(x) = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' - \left(3x^{-\frac{2}{3}}\right)'$

$= \dfrac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} - \cancel{3} \cdot \dfrac{-2}{\cancel{3}} \cdot x^{-\frac{2}{3}-1}$

$= \dfrac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{5}{3}}$

$= \dfrac{3}{2}\sqrt{x} + \dfrac{2}{x^{\frac{5}{3}}}$

$= \dfrac{3}{2}\sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^5}}$

f) $f(x) = sen(2^{5x} - 3e^{x}) + \frac{e^{x}}{\ln x}$

$$f'(x) = \left(sen(2^{5x} - 3e^{x}) + \frac{e^{x}}{\ln x} \right)'$$

$$f'(x) = \underbrace{\left(sen(2^{5x} - 3e^{x}) \right)'}_{A} + \underbrace{\left(\frac{e^{x}}{\ln x} \right)'}_{B}$$

$$A = \cos(2^{5x} - 3e^{x}) \cdot (2^{5x} - 3e^{x})'$$

$$= \cos(2^{5x} - 3e^{x}) \left((2^{5x})' - (3e^{x})' \right)$$

$$= \cos(2^{5x} - 3e^{x}) (5\ln 2 \cdot 2^{5x} - 3e^{x})$$

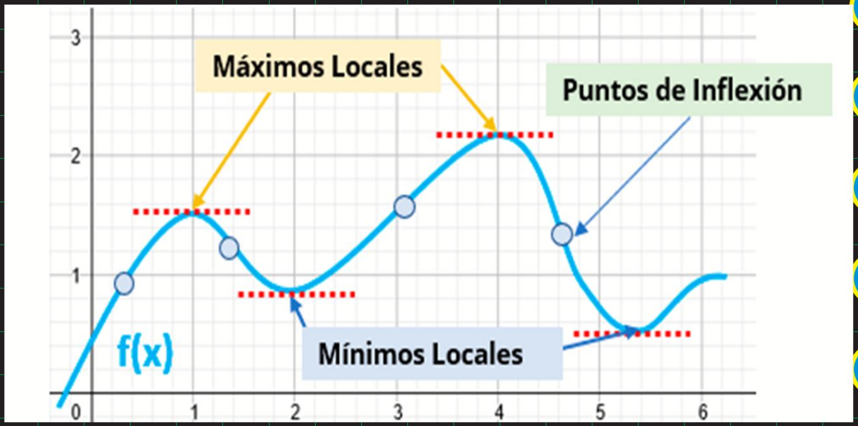
$$B = \left(\frac{e^{x}}{\ln x} \right)'$$

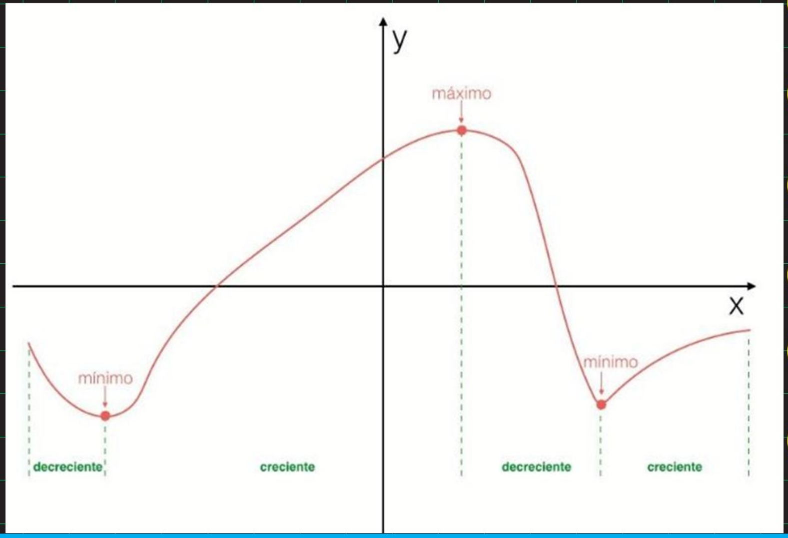
$$= \frac{(e^{x})' \cdot \ln x - (\ln x)' \cdot e^{x}}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{e^{x} \cdot \ln x - \frac{1}{x} \cdot e^{x}}{\ln^2 x}$$

$$\therefore f'(x) = \cos(2^{5x} - 3e^{x})(5\ln 2 \cdot 2^{5x} - 3e^{x}) + \frac{e^{x} \cdot \ln x - \frac{1}{x} \cdot e^{x}}{\ln^2 x}$$

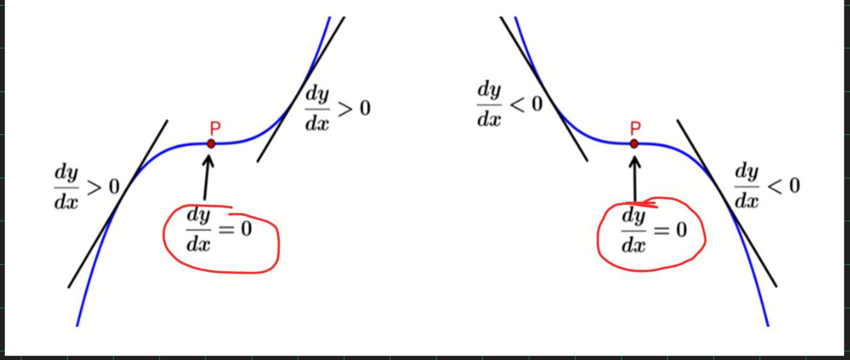
Criterio de la 1era y 2da derivada



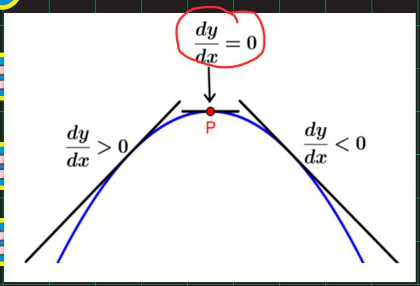


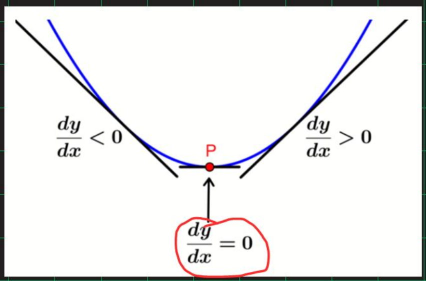
* Punto de inflexión:

En el siguiente diagrama, podemos observar una representación gráfica de ambos casos de los puntos de inflexión de una función:



* Máximos y mínimos:





* Criterio de la 1era derivada:

1. Hallar la derivada de la función.
2. Obtener los valores de x, para los cuales la derivada es cero o no existe. Estos valores se conocen comúnmente como, valores críticos.
3. Investigar el cambio de signo de la derivada al pasar x creciendo por cada valor crítico, deduciendo de ello si se trata de un máximo o de un mínimo.

"En aquellos puntos donde se tiene un máximo o un mínimo, la función derivada es cero o no está definida"

Si al realizar el análisis del punto 3, la derivada no cambia de signo, entonces, la función no tiene máximo ni mínimo, sino que tiene un punto de inflexión.

EJM:

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$$

1) $f'(x) = (x^4 - 2x^2 + 3)'$

$$f'(x) = (x^4)' - (2x^2)' + (3)'$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

2) $f'_{(x)} = 0$

$$\cancel{4}x^3 - \cancel{4}x = \cancel{0}$$

$$x^3 - x = 0$$

$$x(x^2 - 1) = 0$$

$$x(x-1)(x+1) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x - 1 = 0 \quad \vee \quad x + 1 = 0$$

$$x = 1 \qquad\qquad x = -1$$

3) Intervalos donde $f'(x) > 0$ ó $f'(x) < 0$.

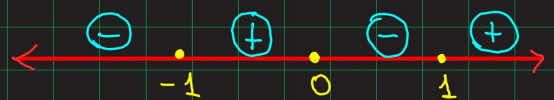
$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$-\infty \quad -2 \quad -1 \quad -\tfrac{1}{2} \quad 0 \quad \tfrac{1}{2} \quad 1 \quad 2 \quad +\infty$$

* En $\langle -\infty ; -1 \rangle \Rightarrow f'(-2) = 4(-2)^3 - 4(-2) = -24 < 0$
* En $\langle -1 ; 0 \rangle \Rightarrow f'\left(\frac{-1}{2}\right) = 4\left(\frac{-1}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{3}{2} > 0$
* En $\langle 0 ; 1 \rangle \Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} < 0$
* En $\langle 1 ; +\infty \rangle \Rightarrow f'(2) = 4(2)^3 - 4(2) = 24 > 0$

Em resumen:

* Em $\langle -\infty ; -1 \rangle$ → Decreciente
* Em $\langle -1 ; 0 \rangle$ → Creciente
* Em $\langle 0 ; 1 \rangle$ → Decreciente
* Em $\langle 1 ; +\infty \rangle$ → Creciente



NOTA:

✓ Si pasa de − a + se trata de un mínimo.

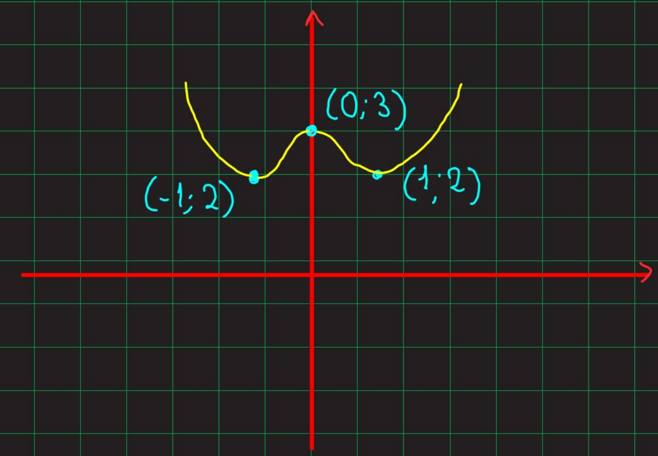
✓ Si pasa de + a − se trata de un máximo.

Entonces: $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

- $X = -1$ (mín.) → $f(-1) = 2$
- $X = 0$ (máx.) → $f(0) = 3$
- $X = 1$ (mín.) → $f(1) = 2$

Puntos: (-1; 2) Mín., (0; 3) Máx., (1; 2) Mín.

Graficar:



* Criterio de la 2da derivada:

1. Obtener la primera y la segunda derivada de la función.
2. Hallar los valores críticos que anulan a la primera derivada.
3. Calcular el valor de la segunda derivada para cada uno de los valores críticos. Si el valor de la segunda derivada es positivo para un valor crítico, entonces se tiene en ese punto un mínimo en la función. Si el valor de la segunda derivada es negativo para un valor crítico, entonces se tiene en ese punto un máximo en la función.

NOTA:

Si hay algún valor de x para el cual la segunda derivada es cero, entonces en la función se tiene un punto de inflexión.

EJM: $f(x) = x^3 - 3x + 2$

1) $f'(x) = (x^3 - 3x + 2)'$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

2) $f'(x) = 0$

$3x^2 - 3 = 0$

$3x^2 = 3$

$x^2 = 1 \rightsquigarrow x = \pm 1$

3) $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f''(x) = (3x^2 - 3)'$

$f''(x) = 6x$

Sustituir valores:

✓ $x = 1 \rightsquigarrow f''(1) = 6(1) = 6 > 0$

(mínimo)

✓ $x = -1 \rightsquigarrow f''(-1) = 6(-1) = -6 < 0$

(máximo)

Hallamos las coordenadas

$f(x) = x^3 - 3x + 2$

✓ $x = 1 \rightsquigarrow f(1) = 1^3 - 3 + 2 = 0$

✓ $x = -1 \rightsquigarrow f(-1) = (-1)^3 + 3 + 2 = 4$

Puntos: $(1;0)$ y $(-1;4)$

mínimo máximo

Punto de inflexión:

$$f''(x) = 0$$

$$6x = 0$$

$$x = 0$$

Coordenadas:

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

$$x = 0 \rightarrow f(0) = 0^3 - 0 + 2 = 2$$

Punto de inflexión: $(0;2)$