

Grundpraktikum

M10 - Gyroskop

Ben J. F.

03.08.2021

Zusammenfassung

In der Natur und in der Technik kommen starre rotierende Körper vor, welche man allgemein als Kreisel bezeichnet. Für den Versuch führen wir den Trägheitstensor ein, der mit den Elementen der Hauptdiagonalen, auch Hauptträgheitsmomente genannt, die Bewegung eines symmetrischen Kreisels beschreibt. Um die Hauptträgheitsmomente experimentell zu bestimmen, wurden drei verschiedene Methoden verwendet:

| Methode | Experimentatorin | Experimentator |
|--|-----------------------------------|-----------------------------------|
| Präzision (gewichtet gemittelt) J_x [kg m ²] | $(2.477 \pm 0.029) \cdot 10^{-3}$ | $(2.37 \pm 0.11) \cdot 10^{-3}$ |
| Nutation J_s [kg m ²] | $(8.7 \pm 0.3) \cdot 10^{-3}$ | $(10.3 \pm 1.2) \cdot 10^{-3}$ |
| Berechnung J_x [kg m ²] | $(3.097 \pm 0.009) \cdot 10^{-3}$ | $(2.671 \pm 0.009) \cdot 10^{-3}$ |

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| 1. Motivation und theoretische Vorbetrachtungen | 4 |
| 1.1. In Abhängigkeit zur Masse | 4 |
| 1.2. In Abhängigkeit zu Kreisdrehzahl | 4 |
| 1.3. Nutationsbewegung | 4 |
| 2. Präzision in Abhängigkeit zur Masse | 5 |
| 2.1. Datenauswertung | 5 |
| 2.2. Berechnung von J_x | 6 |
| 3. Präzision (Kreisdrehzahl) | 7 |
| 3.1. Datenauswertung | 7 |
| 3.2. J_x Berechnung | 8 |
| 4. Nutationbewegung | 8 |
| 4.1. Datenauswertung | 8 |
| 4.2. J_y Berechnung | 9 |
| 5. Berechnung von J_x | 10 |
| 6. Vergleich | 10 |
| 7. Chi Quadrat | 11 |
| 8. Fehlereinschätzung | 11 |
| 8.1. Fehlerfreie Werte | 11 |
| 8.2. Kleinwinkelnäherung | 11 |
| 8.3. Nicht konstante Kreisdrehzahl | 11 |
| 8.4. Zeitmessung | 12 |
| 8.5. Reibung | 12 |
| 9. Schlussfolgerungen | 12 |
| A. Anhang | 13 |
| A.1. zusätzliche Skizzen | 13 |
| A.2. Versuchsaufzeichnungen | 14 |
| B. Quellenverzeichnis | 15 |

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|----|--|----|
| 1. | Präzession in Abhängigkeit vom Drehmoment | 5 |
| 2. | Präzession in Abhängigkeit vom Drehmoment | 6 |
| 3. | Präzession in Abhängigkeit der Kreisdrehzahl | 7 |
| 4. | Präzession in Abhängigkeit der Kreisdrehzahl | 7 |
| 5. | Nutation in Abhängigkeit der Kreisdrehzahl | 8 |
| 6. | Präzession in Abhängigkeit der Kreisdrehzahl | 9 |
| 7. | Längenskizze Gyroskop, P4 | 13 |
| 8. | Längenskizze Gyroskop, P2 | 13 |

Tabellenverzeichnis

| | | |
|----|--|----|
| 1. | Trägheitsmoment aus Drehmoment | 6 |
| 2. | Trägheitsmoment | 8 |
| 3. | Mittelung von J_x | 9 |
| 4. | Ergebnisse zu J_s | 9 |
| 5. | Ergebnisse | 10 |
| 6. | Vergleich | 10 |
| 7. | reduzierte χ^2 | 11 |
| 8. | Versuchsaufzeichnungen | 14 |

1. Motivation und theoretische Vorbetrachtungen

Ziel des Experimentes war es die Bestimmung der Hauptträgheitsmomente. Dafür wird am Ende eines Wagenbalken ein Kreisel angebracht, so dass deren Achsen zusammen fällt, somit waagrecht bleibt durch Gleichgewicht. Der Kreisel wird mittels eines Motors zum Drehen gebracht mit einer Kreiseldrehzahl n . Für den Versuch wird nun auf der anderem Ende zum Kreisel ein Gewicht, wodurch ein zusätzliches ein Drehmoment erzeugt wird. Diese Konstruktion entspricht dem Aufbau eines Gyroskops. Allgemein gilt für das Hauptträgheitsmoment entlang der Achse die von dem Kreis zu der Masse zeigt (hier J_x benannt) mit der Präzisionsperiodendauer (der Zeit die der Kreisel für eine Drehung der x -Achse um 90° braucht.) und dem Drehmoment M .

$$T_p = \frac{4\pi^2 J_x n}{M} \quad (1)$$

Da $M = rmg \cos(\varphi)$ gilt, mit r dem Radius des Schwepunktes zu dem Aufhängepunkt und φ den Winkel zwischen der x Achse vor und nach dem Anbringen der Masse. Durch Kleinwinkelnäherung kann man $M = rmg$ annehmen.

Zum Messen der Trägheitsmomente gibt es mehrere Möglichkeiten.

1.1. In Abhängigkeit zur Masse

In diesem Aufbau nutzt man beim konstanten Kreiseldrehzahl mehrere Massen die man anbringt und misst die Periodendauer der Präzisionsdrehung, also der die durch das zusätzlichen Drehmoment entsteht.

Hier misst man T_p/n , da eine konstante Drehzahl schwierig zu erhalten ist.

Dann bringt man verschiedene Massen in 50g Schritten von 50g bis hin zu 500g.

1.2. In Abhängigkeit zu Kreisdrehzahl

Für die Masse 200g wird der Kreisel mit verschiedenen Kreisdrehzahlen von 7Hz bis 16Hz. Dann wird die Periodendauer der Präzisionsdrehung gemessen.

1.3. Nutationsbewegung

Bei der dritten Messung misst man die Periodendauer der Nutationsbewegung für verschiedene Kreisdrehzahlen im Bereich von 4Hz bis 12 Hz. Für die Nutationsperiodendauer gilt mit den beiden Hauptträgheitsmomenten zur x Achse und das Hauptträgheitsmoment senkrecht dazu:

$$T_n = \frac{J_s}{J_x} \frac{1}{n} \quad (2)$$

Daraus lässt sich dann das zweite Hauptträgheitsmoment errechnen. Herleitungen und der weitere Aufbau ist im Versuchsskript¹ zu lesen.

¹Mül21.

2. Präzision in Abhängigkeit zur Masse

2.1. Datenauswertung

Die Datensätze werden mittels lineare Regression gemäß allgemeinem Praktikumsskript² der Form $y = mx + b$ graphisch ausgewertet.

Daraus ergibt sich:

$$y = \frac{T_m}{n} = \frac{T_M}{n} = \frac{a}{rgm} + b = \frac{a}{M} + b \quad (3)$$

Mit a der Anstieg des Graphen und b die Periodendauer bei einer unendlichen Masse.

Die r -Werte bezeichnen den Radius zwischen Drehachse und Massenschwerpunkt. Sie werden folgendermaßen berechnet:

$$r = l - \frac{h}{2} \quad (4)$$

Wobei l die Länge des Hebelarms ist und $h = 2.5\text{cm}$ die Höhe der Massestücke ist. Die Werte für l können im Kapitel A.1 nachgelesen werden.

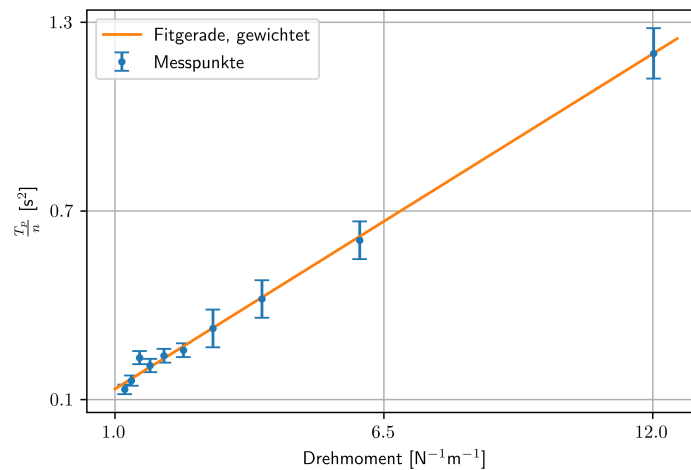


Abbildung 1: Präzision in Abhängigkeit vom Drehmoment, Ben F.; $a = 0.101 \pm 0.007$ sei die Steigung, $b = 0.036 \pm 0.014$ der Achsenabschnitt, $\chi^2/dof = 0.39$ Qualität des Fits

²Mül20.

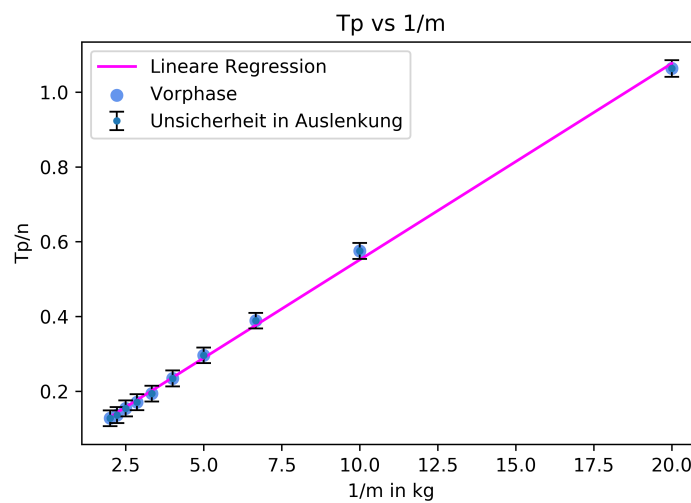


Abbildung 2: Präzision in Abhängigkeit vom Drehmoment; $a = (52.5 \pm 0.7) \cdot 10^{-3}$ sei die Steigung,
 $b = 0.52 \pm 0.11$ der Achsenabschnitt,
 $\chi^2/dof = 0.46$ Qualität des Fits

Der lineare Zusammenhang scheint so mit bestätigt.

2.2. Berechnung von J_x

Der J_x -Wert ergibt sich aus folgender Gleichung:

$$J_x = \frac{arg}{4\pi^2} = \frac{a}{4\pi^2} \quad (5)$$

Der Zähler arg gilt für die Experimentatorin und der Zähler a gilt für den Experimentator.
 Somit haben wir folgende Ergebnisse:

Tabelle 1: Trägheitsmoment aus Drehmoment

| | Experimentatorin | Experimentator |
|----------------------------|-------------------|-------------------|
| J_x [kg m ²] | (2.21 ± 0.03) | (2.56 ± 0.17) |

3. Präzision (Kreisdrehzahl)

3.1. Datenauswertung

Bezüglich des Radius r siehe im Kapitel 2.1 nach.

Damit wird die lineare Regression gemäß Material 2 der Form $y = mx + b$. Daraus ergibt sich:

$$T_p = \frac{4\pi^2 J_x n}{M} + b = a \cdot n + b \quad (6)$$

Mit a der Anstieg des Graphen und b die Periodendauer die ohne Kreisdrehzahl durch die Nutationsbewegung entsteht.

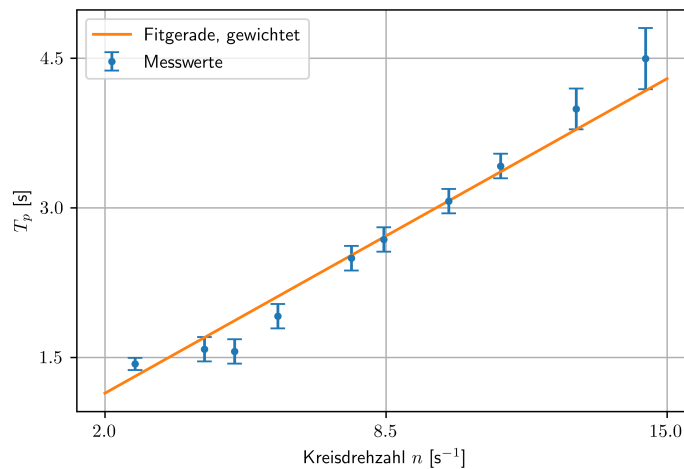


Abbildung 3: Präzision in Abhängigkeit vom Drehmoment, Ben F.; $a = 0.243 \pm 0.016$ sei die Steigung, $b = 0.65 \pm 0.11$ der Achsenabschnitt, $\chi^2/dof = 0.49$ Qualität des Fits

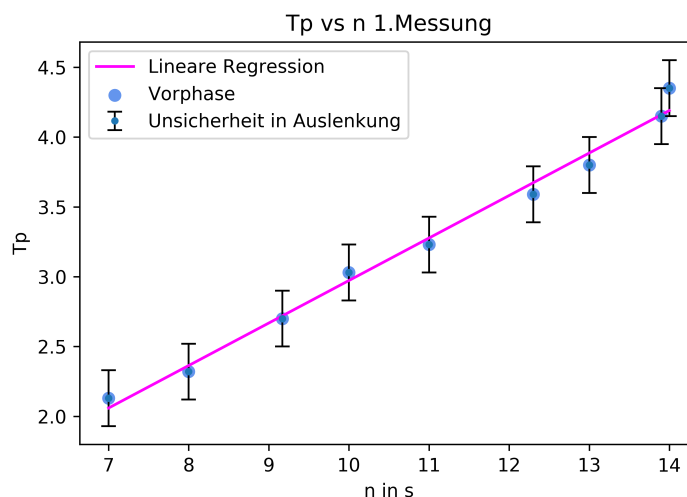


Abbildung 4: Präzision in Abhängigkeit vom Drehmoment; $a = 0.304 \pm 0.012$ sei die Steigung, $b = -0.2 \pm 0.4$ der Achsenabschnitt, $\chi^2/dof = 0.75$ Qualität des Fits

Der lineare Zusammenhang wurde somit bestätigt

3.2. J_x Berechnung

Aus der Steigung ergibt sich die Formel für den J_x -Wert:

$$J_x = \frac{a \cdot M}{4\pi^2} \quad (7)$$

Damit ergeben sich folgende J_x -Werte

Tabelle 2: J_x aus der Gleichung (7)

| | Experimentatorin | Experimentator |
|----------------------------|---------------------|-------------------|
| J_x [kg m ²] | (2.477 ± 0.027) | (2.42 ± 0.11) |

4. Nutationbewegung

4.1. Datenauswertung

Für den Radius siehe Kapitel 2.1.

Damit wird die lineare Regression gemäß Material 2 der Form $y = mx + b$. Daraus ergibt sich:

$$T_n = \frac{J_s}{J_x} \frac{1}{n} = \frac{a}{n} + b \quad (8)$$

Mit a der Anstieg des Graphen und b die Periodendauer bei einer unendlich Kreiseldrehzahl durch die Nutationsbewegung entsteht.

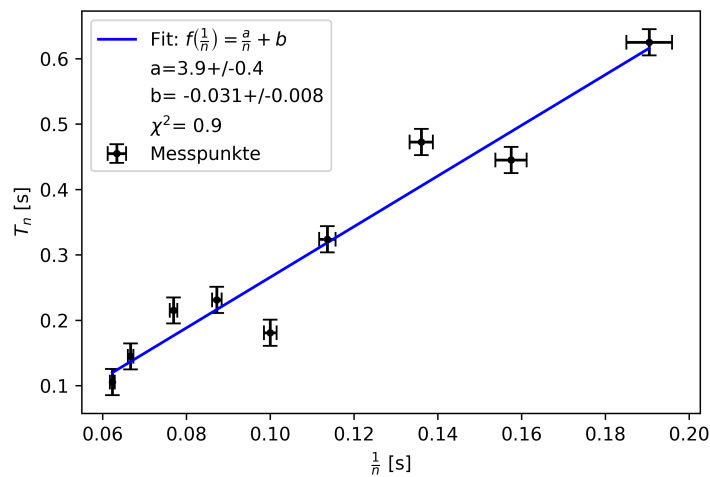


Abbildung 5: Nutation in Abhängigkeit vom Drehmoment, Ben F.; a sei die Steigung, b der Achsenabschnitt, reduziertes χ^2 : Qualität des Fits

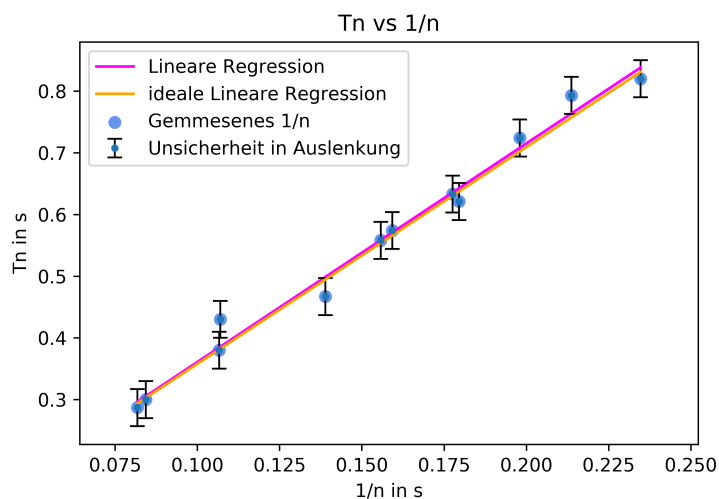


Abbildung 6: Präzision in Abhängigkeit vom Drehmoment; $a = 3.45 \pm 0.13$ sei die Steigung, $b = 0.002 \pm 0.006$ der Achsenabschnitt, $\chi^2/dof = 0.56$ Qualität des Fits

Der lineare Zusammenhang wurde somit bestätigt.

4.2. J_s Berechnung

Aus der Steigung ergibt sich der J_s -Wert wie folgt:

$$J_s = J_x a \quad (9)$$

Dabei nehmen wir als J_x -Wert das gewichtete Mittel:

Tabelle 3: gewichtetes Mittel von J_x

| | Experimentatorin | Experimentator |
|--|-----------------------------------|---------------------------------|
| Mittelung von J_x [kg m ²] | $(2.477 \pm 0.029) \cdot 10^{-3}$ | $(2.37 \pm 0.11) \cdot 10^{-3}$ |

Aus der Gleichung (9) ergeben sich folgende Werte:

Tabelle 4: Ergebnisse zu J_s

| | Experimentatorin | Experimentator |
|---------------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| Ergebnisse J_s [kg m ²] | $(8.7 \pm 0.3) \cdot 10^{-3}$ | $(10.3 \pm 1.2) \cdot 10^{-3}$ |

5. Berechnung von J_x

Das Trägheitsmoment des Kreisels ergibt sich durch Unterteilung des Kreisels in Hohlzylinder. Das Trägheitsmoment des Gyroskops ergibt sich unter der Betrachtung des Gyroskops als Zusammensetzung verschiedener Hohlzylinder. Die Abmessungen sind aus den Skizzen (8) und (7) zu entnehmen. Zu beachten ist, dass das Tariergewicht und die Schraube ebenfalls einen Beitrag leisten. Als Fehler der Abmessungen nehmen wir den Wert 0.05mm. Die einzelnen Hohlzylinder werden mit der folgenden Formel berechnet:

$$J = \frac{1}{2} \rho \pi h (r_2^4 - r_1^4) \quad (10)$$

Bei der Dichte ρ muss beachtet werden, dass der Eisenträger eine andere Dichte aufweist als die anderen Teile des Gyroskops aus Messing. Die Dichten sind im Versuchsskript³ nach zu lesen.

Nach der Addition der Trägheitsmomente der einzelnen Trägheitsmomente der Hohlzylinder bekommen wir folgende Werte für J_x :

Tabelle 5: Ergebnisse der Berechnung von J_x

| | Experimentatorin | Experimentator |
|----------------------------|-------------------|-------------------|
| J_x [kg m ²] | 3.097 ± 0.009 | 2.671 ± 0.009 |

6. Vergleich

Im Experiment wurden folgende Werte für die Hauptträgheitsachsen gemessen oder als theoriwert angegeben/errechnet.

Tabelle 6: Vergleich der Theoretischen und experimentellen J_s

| | Experimentatorin | Experimentator |
|--|-------------------------------|--------------------------------|
| Theoriwert J_s [kg m ²] | (8.7 ± 0.5) | 9.7 ± 0.5 |
| Experimentaler Wert J_s [kg m ²] | $(8.7 \pm 0.3) \cdot 10^{-3}$ | $(10.3 \pm 1.2) \cdot 10^{-3}$ |

Das gewichtete Mittel und der theoretisch berechnete J_x Wert decken sich in ihren Unsicherheitsbereichen. Was auffällt, dass bei der ersten Messreihe der Wert geringer ist und sich nicht mit dem Unsicherheitsbereich des Theoriwertes überschneiden. Der J_s Wert hingegen scheinen genau übereinzustimmen, der gemessene Wert scheint sogar genauer zu sein.

³Mül21.

7. Chi Quadrat

Zur Einschätzung der Genauigkeit der Messung kann man Chi Quadrat verwenden. Die Formeln dazu findet man im Skript *Physikalische Grundlagen*⁴.

Tabelle 7: reduzierte χ^2

| Messung | | Experimentatorin | Experimentator |
|---------------------------|--------------|------------------|----------------|
| Präzision (Drehmoment) | χ^2/dof | 0.69 | 0.39 |
| Präzision (Kreisdrehzahl) | χ^2/dof | 0.35 | 0.49 |
| Nutation | χ^2/dof | 0.56 | 0.9 |

Beim χ^2 wird für eine reelle Messung innerhalb des Praktikums ein Wert von 1 erwartet. Bei den Experimenten liegen die χ^2 'te nahe dem Erwartungswert, da diese für 10 Datenpunkte im Bereich einer guten Messung sind. Aufgrunddessen wurden die Fehler als niedrig eingeschätzt, trotz ihrer Größe. Bei dem ersten Versuch ergab sich ein niedriger Wert auf Grund genauer Messungen, da die Messpunkte nahe des Fits sind.

Beim Experimentator waren die Werte der ersten beiden Messungen ähnlich wie bei der Experimentatorin niedrig aber verhältnismäßig gegenüber den Anzahl der Messdaten. Bei der dritten Messung ist das χ^2 etwas unter 1, aber im guten Bereich, was bedeutet, dass die Fehler gut abgeschätzt sind. Trotz Streuung sind die Messdaten im statistischen erwarteten Bereich und ziehen die Ergebnisse nicht runter.

8. Fehlereinschätzung

8.1. Fehlerfreie Werte

Es wurde angenommen, dass Werte wie die Dichte oder die Gravitationskonstante fehlerfrei sind, die sind jedoch ebenso fehlerbehaftet. Jedoch sind die Fehler so klein, dass diese bei der Rundung vernachlässigt werden wären, somit vernachlässigt werden können.

8.2. Kleinwinkelnäherung

Einer der größten Fehlerquellen war mitunter die Kleinwinkelnäherung. Dabei haben wir angenommen, dass es keinen, oder vernachlässigbar kleinen Winkel, zur ursprünglichen x -Achse gibt. Bei kleinen Massen war dies leicht zu erreichen, wenn auch mit Augenmaß, somit dort vernachlässigbar. Bei größeren Massen hingegen war es sehr schwer zu erreichen und nur durch Anstupsen zu erreichen, was jedoch die Werte ebenso verfälschen kann. So konnte auch nur ca. 1 Periode gemessen werden, da sich der Kreisel immer mehr zu neigen begann mit der Zeit und bei höheren Masse. Dies würde den J_x Wert vergrößern.

8.3. Nicht konstante Kreisdrehzahl

Besonders am Platz 2 gab es anfänglich starke Schwankungen der Kreiseldrehzahl, was es sehr schwierig machte diese zu messen. So konnte nur die Zeit für eine Periode gemessen werden, da sonst die Schwankungen zu groß waren. Nach mehreren Malen wurden die Werte genommen wo es nur eine Schwankung von höchstens 0.5 Hz gab, um zu große Abweichungen zu vermeiden, da diese sonst stark ins Gewicht fielen. So wurde auch die größte Abweichung von dem gemessenen n Wert genommen und der n Wert, als der aufgeführt, in dessen Bereich während des Experimentes die Kreisdrehzahl am meisten war.

⁴Mül20.

8.4. Zeitmessung

Bei der Messung der Periodendauer der Präzisionsbewegung wurde eine digitale Stoppuhr genutzt. Dort muss man neben den Gerätefehler noch zweimal die Reaktionszeit von ca. 0.25s als Unsicherheit genommen. Die sind bei den kleinen Zeiten die man gemessen hatte so groß, dass kaum der Geräte beachtet werden musste.

Bei der Nutationsbewegung wurde ein Video aufgenommen und über ein Videobearbeitungsprogramm die Periodendauer gemessen. Dies sorgt dafür, dass man die Reaktionszeit nicht braucht und die Werte genauer werden. Generell scheint dieses Verfahren sehr vorteilhaft, wenn man sehr kleine Periodendauern zu messen hat. So wurde die Unsicherheit hier auf 0.02s ca. geschätzt da in diesen Bereich das Video ausgewertet wurde.

Der Experimentator hat bei der Nutationsbewegung sowohl die Zeit über die Stoppuhr als auch die Nutationsbewegung mit dem Smartphone⁵ auf Video aufgenommen. Danach wurde das Video mit Hilfe eines Videobearbeitungsprogramm um das fünffache verlangsamt und die Zeit abgelesen. Die Reaktionszeit lässt sich dann wie folgt berechnen: $u_{\text{Reaktionszeit}} = 1.2/2 \text{ [s]} = 0.6 \text{ [s]}$

8.5. Reibung

Wie im jeden realen Versuch gibt es Reibung. Da jedoch der Motor den Kreisel auf eine bestimmte Drehzahl brachte und man nur kleine Periodendauern gemessen hatte, hatte die Reibung kaum einen Effekt und konnte vernachlässigt werden.

9. Schlussfolgerungen

Generell kann man das Experiment als gelungen betrachten werden, da trotz der hohen Anfälligkeit von Unsicherheiten durch dem ungenauem einstellen der Kreiseldrehzahl, wurden die Theoriewerte nahezu erreicht. Nur bei der ersten Messung war der Wert niedriger, was von vorzeitigen Stoppen zusammen mit den schwankenden n Werten verursacht worden sein konnte. Außerdem wurden die linearen zusammenhänge bestätigt.

Durch bessere Motoren und erzeugen eines genaueren Kreiseldrehzahlen würden die Messungen ebenso genauer werden. Außerdem würde eine Masse bis zu 400 g vorteilhaft sein, da bei 500g und 450 g es einen zu großen Winkel für die Kleinwinkelnäherung gibt und man erst diesen anstupsen musste, was zu einer Verfälschung der Werte führen könnte.

Ebenso hat sich die Methode mit der Videobearbeitung als sehr hilfreich erwiesen und scheint eine sehr effektive Methode zur Messung von kleinen Periodenzeiten zu sein. Dies wäre eine besser alternative als Lichtschranken, da sich durch das Gewicht der Masse die Achse zu neigen beginnt bei der Präzision und bei der Nutation der Radius der Drehung immer kleiner wird, wodurch sich eine Lichtschranke nicht zu eigenen scheint, um die Reaktionszeit auszugleichen.

⁵ mit Android-Betriebssystem

A. Anhang

A.1. zusätzliche Skizzen

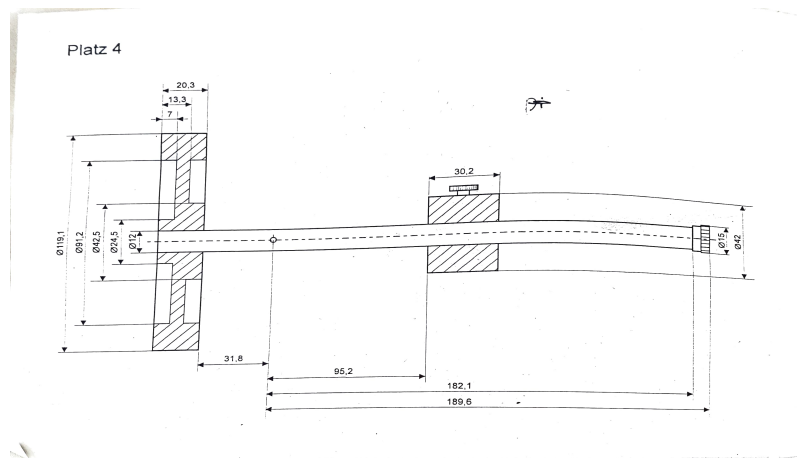


Abbildung 7: Längenskizze des Gyroskops, wichtig für das Drehmoment des Gyroskops bzgl. r , Messplatz 4

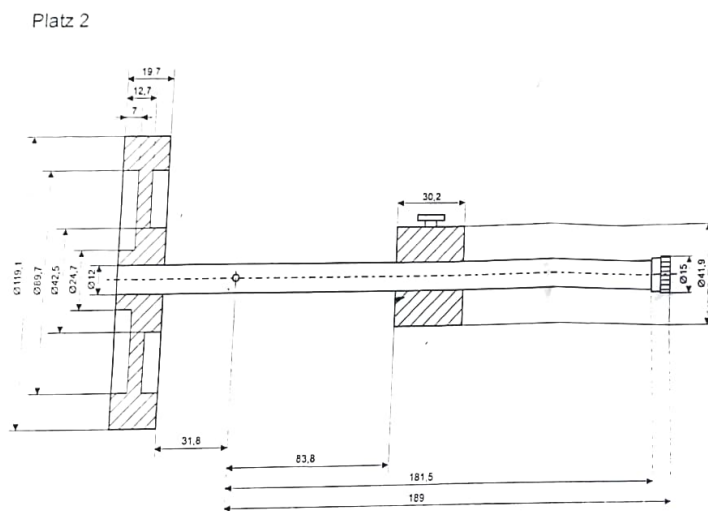


Abbildung 8: Längenskizze des Gyroskops, wichtig für das Drehmoment des Gyroskops bzgl. r , Messplatz 2

A.2. Versuchsaufzeichnungen

Tabelle 8: Versuchsaufzeichnungen
der Nutationsmessreihe

| n | T |
|----------|-------|
| 0.234742 | 0.820 |
| 0.213675 | 0.793 |
| 0.198020 | 0.724 |
| 0.179533 | 0.621 |
| 0.177620 | 0.633 |
| 0.155763 | 0.558 |
| 0.159236 | 0.574 |
| 0.138889 | 0.467 |
| 0.106952 | 0.430 |
| 0.106610 | 0.380 |
| 0.084317 | 0.300 |
| 0.081766 | 0.287 |

B. Quellenverzeichnis

[Mül20] Müller, Dr., Uwe. Physikalisches Grundpraktikum. Einführung. 6.03.2020.

[Mül21] Müller, Dr., Uwe. M10 Gyroskop. de; 23.06.2021.