

## P6.1 Grundpraktikum I

### M2 - Trägheitsmoment

Ben J. F.

04.05.2021

#### **Zusammenfassung**

Wir wollen experimentel das Trägheitsmoment eines Drehtisches und die Trägheitsmomente zweier Hauptträgheitsachsen eines verstellbaren Zylinders ermitteln. Für das Trägheitsmoment des Tisches haben wir folgendes Ergebnis:  $J_{Tisch} = (5.8 \pm 0.2)10^{-4} \text{ } mkg^2$ . Die Ergebnisse für die beiden Hauptträgheitsmomente des Zylinders sind nicht vertrauenswürdig.

## Inhaltsverzeichnis

|  |          |
|--|----------|
| <b>1. Versuchsbeschreibung</b>                           | <b>3</b> |
| 1.1. Bestimmung des Trägheitsmoments von einem Drehtisch | 3        |
| 1.2. Bestimmung des Trägheitsmoments von einem Zylinder  | 4        |
| <b>2. Versuchdurchführung und Versuchsauswertung</b>     | <b>5</b> |
| 2.1. Bestimmung des Trägheitsmoments von einem Drehtisch | 5        |
| 2.2. Überprüfung des Trägheitsellipsoids eines Zylinders | 6        |
| <b>3. Diskussion</b>                                     | <b>7</b> |
| 3.1. Trägheitsmoment des Tisches                         | 7        |
| 3.2. Trägheitsmoment des verstellbaren Zylinders         | 7        |
| <b>A. Anhang</b>   | <b>8</b> |
| A.1. Abbildungen   | 8        |
| <b>B. Quellenverzeichnis</b>                             | <b>9</b> |

## Abbildungsverzeichnis

|  |   |
|--|---|
| 1. Drehtisch: F= verstellbare Schraube, A=Drehachse, s=Symmetrieachse, Sp=Schneckenfeder, Sch=Scheibe  | 3 |
| 2. verstellbarer Zylinder: $\vec{n}$ =Drehachse; x,y,z=Hauptträgheitsmomente, wobei $J_x = 0$ gesetzt wird; $\gamma$ ist der Winkel, mit dem der Zylinder gedreht wird.  | 4 |
| 3. Linearität zwischen quadrierter Periodendauer $T^2$ und Trägheitsmoment $J_Z$ . Fehlerbalken sind durch Fehlerfortpflanzung entstanden. Abbildung zeigt gemittelte Werte für $T^2$ aus der Tabelle (1). $R^2 = 0.999$ , $\chi^2 = 2.50$ | 8 |
| 4. Linearität zwischen $J_\gamma$ und $\sin^2(\gamma)$ . Abbildung zeigt gemittelte Werte von $T^2$ aus der Tabelle (2). $R^2 = 0.992$ , $\chi^2 = 6164.4$   | 8 |

## Tabellenverzeichnis

|                         |   |
|-------------------------|---|
| 1. Versuch mit Scheibe  | 5 |
| 2. Versuch mit Zylinder | 6 |

# 1. Versuchsbeschreibung

## 1.1. Bestimmung des Trägheitsmoments von einem Drehtisch

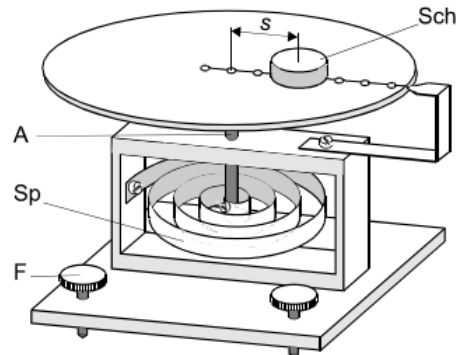


Abbildung 1: Drehtisch: F= verstellbare Schraube, A=Drehachse, s=Symmetrieachse, Sp=Schneckenfeder, Sch=Scheibe

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} (J_Z + J_T) \quad (1)$$

In diesem Teilversuch ist es das Ziel, das Trägheitsmoment des Drehtisches<sup>1</sup> ( $J_T$ ) über eine lineare Regression zwischen der quadrierten Periodendauer  $T^2$  und dem zusätzlichen Trägheitsmoment  $J_Z$  zu bestimmen.<sup>1</sup> Dabei werden die beiden Regessionsparameter das Richtmoment der Feder  $D$  und  $J_{Tisch}$  sein. Dazu lenken wir den Tisch mehrmals aus. Dabei ist der Tisch in der ersten Messreihe leer. Danach setzen wir eine Scheibe<sup>2</sup> auf den Teller und setzen diese vom Zentrum des Tellers in 6 Schritten an den Rand des Tellers. Bei jedem der 7 eben benannten Schritten messen wir jeweils zweimal die Periodendauer  $T$  über 10 Schwingungen mit einer Stoppuhr.

Das zusätzliche Trägheitmoment  $J_Z$  ist über den Steinerschen Satz wie folgt definiert:

$$J_Z = \frac{1}{2}mR^2 + ms^2 \quad (2)$$

In  $J_Z$  ist auch das Trägheitsmoment der Scheibe enthalten:

$$J_{Sch} = \frac{1}{2}mR^2 \quad (3)$$

Für die Unsicherheiten von  $T^2$ ,  $J_Z$  und  $J_{Tisch}$  verwenden wir die Fehlerfortpflanzung<sup>3</sup>, die allgemein definiert als:

$$u_z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)^2 u_a^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)^2 u_b^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)^2 u_c^2 + \dots} \quad (4)$$

Für  $T^2$  sieht die Fehlerfortpflanzung folgendermaßen aus:

$$u_{T^2} = 2 \frac{T}{100} u_{\text{Fehler der Stoppuhr}} \quad (5)$$

<sup>1</sup>Abb. 1 1

<sup>2</sup>Radius:  $(2405 \pm 2.5) \cdot 10^{-5}$  m, Masse:  $(2453 \pm 1) \cdot 10^{-4}$  kg

<sup>3</sup>vgl EKS16, S. 8.

Wir teilen  $T$  durch 100, weil wir über 10 Schwingungen gemessen haben und diese in der Fehlerfortpflanzung quadriert wird. Den Fehler der Stoppuhr, welche in der Glg. (5) steht ist wie folgt definiert<sup>4</sup>:

$$u_{\text{Fehler der Stoppuhr}} = 0.01 + 5 \cdot 10^{-4} \cdot T \quad (6)$$

Fehlerfortpflanzung für  $J_Z$ :

$$u_{J_Z} = \sqrt{\frac{r^2}{4}(u_m^2 r^2 + (2m u_r)^2) + u_m^2 s^4 + 4(m s)^2 u_s^2} \quad (7)$$

Für die Fehlerfortpflanzung von  $J_{Tisch}$  gilt:

$$u_{J_{Tisch}} = \frac{1}{4\pi^2} \sqrt{u_D^2 T_{\text{leer}}^4 + 2DT_{\text{leer}}^2 u_{T_{\text{leer}}}^2} \quad (8)$$

## 1.2. Bestimmung des Trägheitsmoments von einem Zylinder

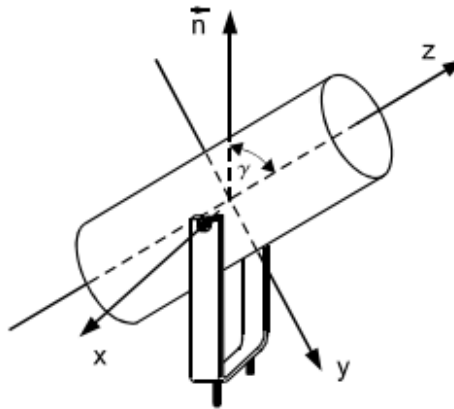


Abbildung 2: verstellbarer Zylinder:  $\vec{n}$ =Drehachse; x,y,z=Hauptträgheitsmomente, wobei  $J_x = 0$  gesetzt wird;  $\gamma$  ist der Winkel, mit dem der Zylinder gedreht wird.

Ziel in diesem zweiten Teilversuch ist, das Trägheitsellipsoid zu überprüfen. Dies tun wir, indem wir die Linearität zwischen  $J_\gamma$  und  $\sin^2(\gamma)$  zeigen. Der Versuch mit dem Zylinder funktioniert ähnlich, wie der erste Teilversuch. Als erstes messen wir die Periodendauer der Halterung des Zylinders, wie sie in Abbildung (2) gezeigt wird, zweimal à 10 Perioden. Danach Setzen wir den Zylinder auf die Halterung, stellen  $\gamma \in [0^\circ, 90^\circ]$  in  $15^\circ$ -Schritten ein und messen die Periodendauer über 10 Perioden zweimal. Um  $J_\gamma$  zu bestimmen nutzen wir die Glg. (1) und stellen diese nach  $J_Z$  um:

$$J_Z = \frac{D}{4\pi^2} T^2 - J_{Tisch} \quad (9)$$

Um aus  $J_Z$   $J_\gamma$  zu bestimmen, nutzen wir folgende Gleichung:

$$J_\gamma = J_Z - J_{\text{Halterung}} \quad (10)$$

Für die Fehler von  $J_Z$  und  $J_\gamma$  nutzen wir wieder die Fehlerfortpflanzung, wie wir sie bereits in Glg. (4) gezeigt haben.

<sup>4</sup>Wir verwenden hier den Eichfehler einer Digital-Stoppuhr aus [vgl Mül20, S. 18]

Damit ergibt sich für  $J_Z$  ein Fehler von:

$$u_{J_Z} = \sqrt{\frac{u_D^2}{16\pi^4} T^4 + 2 \frac{D^2}{16\pi^4} T^2 u_T^2 + u_{Tisch}^2} \quad (11)$$

Der Fehler für  $J_\gamma$  setzt sich wie folgt zusammen:

$$u_{J_\gamma} = \sqrt{u_{J_Z}^2 + u_{J_{Halterung}}^2} \quad (12)$$

## 2. Versuchsdurchführung und Versuchsauswertung

### 2.1. Bestimmung des Trägheitsmoments von einem Drehtisch

Tabelle 1: Versuch mit Scheibe

$s$  ist der Abstand zwischen Drehachse A und Schwerpunkt,  $u_s = 5 \cdot 10^{-5}$  m,  $T_1$  ist die erste Periodendauer über 10 Schwingungen und  $T_2$  ist die zweite Periodendauer über 10 Schwingungen

| $s$ [m] | $T_1$ [s]       | $T_2$ [s]       |
|---------|-----------------|-----------------|
| –       | $4.66 \pm 0.01$ | $4.55 \pm 0.01$ |
| 0       | $4.96 \pm 0.01$ | $4.98 \pm 0.01$ |
| 0.0112  | $5.02 \pm 0.01$ | $5.08 \pm 0.01$ |
| 0.0281  | $5.53 \pm 0.01$ | $5.70 \pm 0.01$ |
| 0.0417  | $6.48 \pm 0.01$ | $6.50 \pm 0.01$ |
| 0.0566  | $7.51 \pm 0.01$ | $7.32 \pm 0.01$ |
| 0.0714  | $8.47 \pm 0.01$ | $8.44 \pm 0.01$ |

Für den ersten Teilversuch bekommen wir die Ergebnisse in Tabelle (1), wobei wir aus der Messreihe für  $s$  mithilfe der weiter oben in der Fußnote 2 erwähnten Radius und Masse der Scheibe mit dem steinerschen Satz (2)  $J_Z$  errechnen können.

Die Regressionsparameter  $D$  und  $J_{Tisch}$  können wir dann mithilfe von *scipy*, einem Python-Modul, bestimmen und kommen auf folgende Ergebnisse:

$$D = (0.1036 \pm 0.0025) \text{ mkg}^2 \text{ s}^{-2} \quad (13)$$

$$J_{Tisch} = (5.8 \pm 0.2) 10^{-4} \text{ mkg}^2 \quad (14)$$

Weiterhin kommen wir für die lineare Regression<sup>3</sup> auf ein

$$R^2 = 0.999 \quad (15)$$

und auf ein

$$\chi^2 = 2.5. \quad (16)$$

Die lineare Regression zwischen  $T^2$  und  $J_Z$  befindet sich in Abb. (3).

Wir können mit großer Wahrscheinlichkeit sagen, dass zwischen  $J_Z$  und  $T^2$  ein lineare Beziehung existiert.

## 2.2. Überprüfung des Trägheitsellipsoids eines Zylinders

Tabelle 2: Versuch mit Zylinder

$\gamma$  ist der Auslenkwinkel des Zylinders,  $T_1$  ist die erste Periodendauer über 10 Schwingungen und  $T_2$  ist die zweite Periodendauer über 10 Schwingungen

| $\gamma$ [Grad] | $T_1$ [s]       | $T_2$ [s]       |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| 0               | $5.81 \pm 0.01$ | $5.76 \pm 0.01$ |
| 15              | $6.24 \pm 0.01$ | $6.28 \pm 0.01$ |
| 30              | $6.50 \pm 0.01$ | $6.46 \pm 0.01$ |
| 45              | $7.11 \pm 0.01$ | $7.06 \pm 0.01$ |
| 60              | $7.66 \pm 0.01$ | $7.63 \pm 0.01$ |
| 75              | $8.04 \pm 0.01$ | $8.02 \pm 0.01$ |
| 90              | $8.13 \pm 0.01$ | $8.11 \pm 0.01$ |

Die Messergebnisse der zweiten Teilversuch sind in der neben dran. Für die Regressionsgeraden in Abb. (4) haben wir die folgende Form verwendet:

$$J_\gamma = a \cdot \sin^2(\gamma) + b. \quad (17)$$

Diese ist mit der folgenden Gleichung aus dem verlinkten Skript **M2 Trägheitsmomente** äquivalent:

$$J_\gamma = J_z + (J_y - J_z) \sin^2(\gamma). \quad (18)$$

Für Fitparamter  $a$  und  $b$  haben wir folgende Ergebnisse:

$$a = (-2.7 \pm 0.2)10^{-4} \text{ m(kg)}^2 \quad (19)$$

$$b = (8.2 \pm 0.4)10^{-4} \text{ m(kg)}^2 \quad (20)$$

Daraus lassen sich nach Glg. (18) für

$$J_z = (8.2 \pm 0.4)10^{-4} \text{ m(kg)}^2 \quad (21)$$

$$J_y = (-10.9 \pm 0.4)10^{-4} \text{ m(kg)}^2 \quad (22)$$

errechnen. Dabei ist  $J_z$  das Trägheitsmoment des Zylinders mit einer Auslenkung von  $0^\circ$  und  $J_y$  ist das Trägheitsmoment des Zylinders bei  $90^\circ$ .

Betrachten wir nun die theoretischen Werte von  $J_z$  und  $J_y$ . Diese errechnen wir mit den geometrischen Werten und der Masse des Zylinders.<sup>5</sup> Die Ergebnisse lauten wie folgt:

$$J_z = (2.841 \pm 0.007)10^{-4} \text{ m(kg)}^2 \quad (23)$$

$$J_y = (12.914 \pm 0.012)10^{-4} \text{ m(kg)}^2 \quad (24)$$

Vergleichen wir die theoretischen Werte mit den Werten aus der Regression, so passen diese nicht überein und wir können keine Aussage darüber geben, ob das Modell der Linearität zwischen  $J_\gamma$  und  $\sin^2(\gamma)$  richtig ist oder nicht.

<sup>5</sup>Radius:  $R = (205.00 \pm 0.25)10^{-4} \text{ m}$ , Höhe:  $h = (1010.00 \pm 0.5)10^{-4} \text{ m}$ , Masse:  $m = (1352.0 \pm 0.1)10^{-3} \text{ kg}$

### 3. Diskussion

#### 3.1. Trägheitsmoment des Tisches

Wir konnten im ersten Teilversuch einen linearen Zusammenhang zwischen  $T^2$  und  $J_Z$  feststellen. Diesen zeigt die lineare Regression in der Abb. (3). Eine differenzierte Fehleranalyse ist nicht möglich, da wir beispielsweise die Reaktionszeit des Experimentators nicht gemessen haben und konnte dieser Fehler auch nicht mit einfließen. Trotzdem können wir davon ausgehen, dass wir den Daten vertrauen können.

#### 3.2. Trägheitsmoment des verstellbaren Zylinders

Der Fit in der Abb. (2) passt nicht mit den Datenpunkten überein. Dies sieht man auch an dem  $\chi^2$ , welches wir in der Beschreibung angegeben haben, sieht, da dieses extrem groß ist. Vergleicht man in diesem Zuge die theoretischen Trägheitsmomente mit denen die aus der Regression errechnet wurden, so stimmen diese nicht über ein. Dies lässt darauf schließen, dass wir einen groben Messfehler begangen haben. Nach einigen Überlegungen, wo der grobe Messfehler begangen wurde, sind wir zu dem Schluss gekommen, dass dieser wohl in dem Ablesen der Winkel liegt. Hierzu gibt es zwei wichtige Einflüsse: Zum einen hatte der Experimentator eine etwas niedrige Konzentration aufgrund der Tageszeit (Zeitraum: 16.30-17.00 Uhr) und zum anderen ist die leichte Sehschwäche des Experimentators zu erwähnen. Dieser trug seine Brille nicht, mit der Begründung, dass die Brille mit der Maske, die wir aufgrund der Corona-Pandemie tragen müssen, dafür gesorgt hätte, dass die Brille beschlagen wäre und ein korrektes Ablesen der Winkel deutlich erschwert hätte. Zudem können wir uns nicht sicher sein, dass die Winkel in den oben genannten Winkel (Tabelle (2)) mit denen übereinstimmen, die wir abgelesen haben, da wir diese nicht persönlich gemessen haben und die Winkel waren auch nicht angegeben.

Wir kommen zu dem Schluss, dass den Daten aus dem zweiten Teilversuch aus genannten Gründen nicht zu vertrauen ist.

## A. Anhang

### A.1. Abbildungen

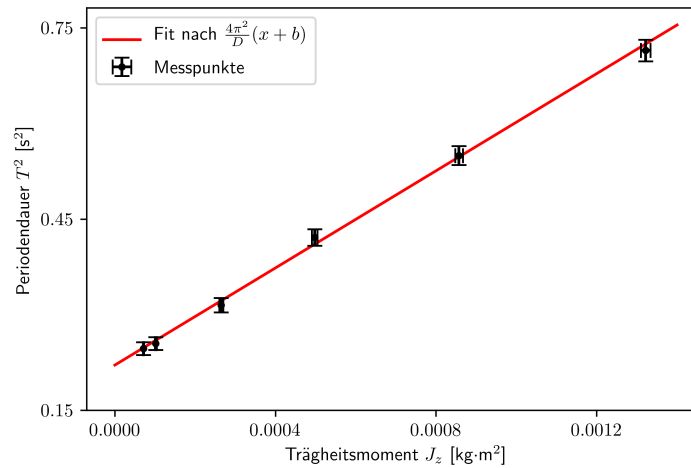


Abbildung 3: Linearität zwischen quadrierter Periodendauer  $T^2$  und Trägheitsmoment  $J_z$ . Fehlerbalken sind durch Fehlerfortpflanzung entstanden. Abbildung zeigt gemittelte Werte für  $T^2$  aus der Tabelle (1).  $R^2 = 0.999$ ,  $\chi^2 = 2.50$

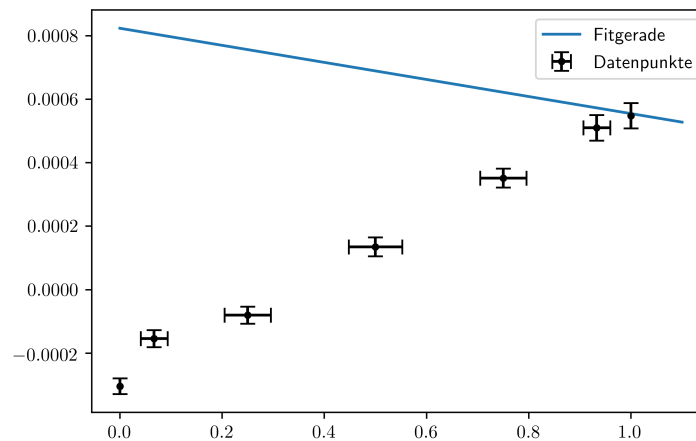


Abbildung 4: Linearität zwischen  $J_\gamma$  und  $\sin^2(\gamma)$ . Abbildung zeigt gemittelte Werte von  $T^2$  aus der Tabelle (2).  $R^2 = 0.992$ ,  $\chi^2 = 6164.4$



## B. Quellenverzeichnis

- [EKS16] Hans-Joachim Eichler, Heinz-Detlef Kronfeldt und Jürgen Sahm. Das neue Physikalische Grundpraktikum. ger. 3., ergänzte und aktualisierte Auflage 2016. Springer-Lehrbuch. Eichler, Hans-Joachim (VerfasserIn) Kronfeldt, Heinz-Detlef (VerfasserIn) Sahm, Jürgen (VerfasserIn) Eichler, Hans-Joachim (VerfasserIn) Kronfeldt, Heinz-Detlef (VerfasserIn) Sahm, Jürgen (VerfasserIn). Berlin und Heidelberg: Springer Spektrum, 2016. 470 S. ISBN: 9783662490228. DOI: [10.1007/978-3-662-49023-5](https://doi.org/10.1007/978-3-662-49023-5).
- [Mül20] Müller, Dr., Uwe. Physikalisches Grundpraktikum. Einführung. 6.03.2020.