



ANNALES

CONCOURS SUR LICENCE AFRIQUE



Table des matières

MATHEMATIQUES 2017	2
MATHEMATIQUES 2016	6
PHYSIQUE 2017	9
PHYSIQUE 2016	17
ANGLAIS 2017	25
ANGLAIS 2016	28

Ecole Centrale Casablanca – Inventons le monde de demain

www centrale-casablanca ma



MATHEMATIQUES 2017

École Centrale Casablanca
Concours d'admission 2017

Épreuve de mathématiques

1 Première partie

Étant donné un entier n strictement positif ($n \geq 1$), soient S_n et I_n les deux réels définis par les relations ci-dessous :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{i+j+1} \right) ; \quad I_n = \int_0^n dx \int_0^n \frac{dy}{x+y+1}.$$

Intégrale I_n

1. Calculer, pour toute valeur de l'entier strictement positif n , l'intégrale I_n .
2. Déterminer les constantes A, B, C et D figurant dans le développement limité de la fonction $n \mapsto I_n$ à l'infini qui s'écrit sous la forme suivante :

$$I_n = A n + B \ln n + C + \frac{D}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Somme S_n

3. En admettant que $I_n = \iint_{[0,n]^2} \frac{1}{x+y+1} dx dy$ ainsi que l'additivité et la positivité de l'intégrale double, établir l'encadrement suivant de S_n à l'aide de I_n : $I_n \leq S_n \leq I_n + 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - 1$.
4. En déduire que la somme S_n est équivalente à l'infini à $2n \ln 2$.

Soit J_n l'intégrale suivante :

$$J_n = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k \right)^2 dx.$$

Intégrale J_n

5. Déterminer la relation qui lie l'intégrale J_n au réel S_n . En déduire, lorsque l'entier n croît indéfiniment, un équivalent de J_n à l'infini.

2 Deuxième partie

Soit E un espace préhilbertien réel (i.e. un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire); soit $(x, y) \mapsto (x | y)$ le produit scalaire de cet espace. La norme d'un vecteur x de E , déduite de ce produit scalaire est notée $\|x\|$.

Étant donné un réel μ supérieur ou égal à 1 ($\mu \geq 1$), une suite de n vecteurs d'un espace euclidien E_n , de dimension finie n , x_1, x_2, \dots, x_n est dite μ -presque orthogonale (en abrégé μ -p.o.) si et seulement si :

- ii. les vecteurs x_1, x_2, \dots, x_n sont de norme unité,

- ii. pour toute suite finie de n réels a_1, a_2, \dots, a_n la norme du vecteur $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ vérifie la double inégalité suivante :

$$\frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n (a_i)^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|^2 \leq \mu \sum_{i=1}^n (a_i)^2.$$

Plus généralement : une suite dénombrable $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel est dite presque orthogonale (p.o.), si et seulement s'il existe un réel $\mu \geq 1$ tel que, pour tout entier n strictement positif, pour toute suite extraite $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}$ de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et pour toute suite finie de n réels a_1, a_2, \dots, a_n , la norme du vecteur $\sum_{i=1}^n a_i x_{k_i}$ vérifie la relation suivante :

$$\frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n (a_i)^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_{k_i} \right\|^2 \leq \mu \sum_{i=1}^n (a_i)^2.$$

Remarque : la suite des indices k_1, k_2, \dots, k_n de la suite extraite $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}$, est une suite monotone strictement croissante $k_1 < k_2 < \dots < k_n$.

Premières propriétés

Soit E_n un espace euclidien de dimension n .

6. Démontrer que, pour qu'une suite de n vecteurs x_1, x_2, \dots, x_n soit une base orthonormée de E_n , il faut et il suffit qu'elle soit une suite 1-presque orthogonale.
7. Démontrer que, si une suite de n vecteurs x_1, x_2, \dots, x_n de E_n est μ -presque orthogonale, la suite est libre.

Un exemple

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur le segment $[0, 1]$; le produit scalaire de deux fonctions f et g de E est défini par la relation suivante :

$$(f | g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des fonctions de E définies par la relation suivante :

$$P_n(x) = \sqrt{2n+1} x^n.$$

8. Démontrer que, bien que la suite des fonctions P_n de norme unité soit libre, la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas presque orthogonale. **Indication** : on pourra introduire le polynôme $R_n = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$ et montrer que la μ -presque orthogonalité implique $J_n \leq \mu \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$.

Soit (V_1, V_2, \dots, V_n) une suite libre de n vecteurs indépendants unitaires d'un espace euclidien E_n de dimension n . Soit M la matrice carrée d'ordre n dont les éléments $m_{i,j}$ sont égaux aux produits scalaires des vecteurs V_i et V_j .

$$M = (m_{i,j}) \quad ; \quad m_{i,j} = (V_i | V_j).$$

Étant donnée une suite de n réels a_1, a_2, \dots, a_n , soit A le vecteur de \mathbb{R}^n de coordonnées a_1, a_2, \dots, a_n et W le vecteur égal à la combinaison linéaire des vecteurs V_1, V_2, \dots, V_n avec les coefficients a_1, a_2, \dots, a_n :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \quad ; \quad W = \sum_{i=1}^n a_i V_i.$$

La suite de vecteurs (V_1, V_2, \dots, V_n) est μ -presque orthogonale

9. Démontrer l'existence d'une matrice carrée P orthogonale et d'une matrice diagonale D dont tous les éléments de la diagonale sont différents de 0, telles que :

$$M = {}^t P D P.$$

Indication : on pourra montrer que $MA = 0 \Rightarrow A = 0$.

10. Établir la relation qui lie la norme du vecteur W au réel ${}^t A M A$; ${}^t A$ désigne la matrice transposée de la matrice colonne A .
11. En déduire que les éléments diagonaux de la matrice D sont strictement positifs, puis en déduire un encadrement de la norme du vecteur W à l'aide des valeurs propres de la matrice M et de la norme du vecteur B égal à l'image par la matrice P du vecteur A ($B = PA$).
12. En déduire que la suite (V_1, V_2, \dots, V_n) est μ -presque orthogonale; préciser des valeurs possibles pour le réel μ .

Soit maintenant $(V_n)_{n \geq 1}$ une suite dénombrable de vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel E .

Une condition suffisante

On suppose qu'il existe un réel α , strictement supérieur à 3 ($\alpha > 3$), tel que le produit scalaire de deux vecteurs V_p et V_q soit majoré en valeur absolue par le réel $\alpha^{-|p-q|}$, c'est-à-dire :

$$|(V_p | V_q)| \leq \frac{1}{\alpha^{|p-q|}}.$$

Soit un entier $n \geq 1$ et $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ une suite d'indices supérieurs ou égaux à 1, on note $N = ((V_{k_i} | V_{k_j}))_{1 \leq i, j \leq n}$.

13. Soit λ une valeur propre de N et (x_1, \dots, x_n) un vecteur propre associé. En choisissant i tel que $|x_i|$ soit maximal, montrer que

$$|\lambda - 1||x_i| \leq |x_i| \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2}{\alpha^p}.$$

14. En déduire un encadrement des valeurs propres de la matrice N .
 15. Montrer que la suite $(V_n)_{n \geq 1}$ est libre.
 16. En déduire que la suite $(V_n)_{n \geq 1}$ est presque orthogonale.

3 Troisième partie

17. Soit f la fonction définie dans le quart de plan $[1, \infty[\times [1, \infty[$ par la relation suivante :

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{2y+1}\sqrt{2xy+1}}{y+xy+1}.$$

Soit G la fonction, définie sur la demi-droite $[1, \infty[$, par la relation suivante :

$$G(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} f(x, y).$$

Étudier les variations des six fonctions définies sur la demi-droite fermée $[1, \infty[$ par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} x &\mapsto f(x, 1) \quad ; \quad y \mapsto f(1, y) \quad ; \quad G: x \mapsto \lim_{y \rightarrow \infty} f(x, y); \\ y &\mapsto \lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y) \quad ; \quad f_y: x \mapsto f(x, y) \quad ; \quad f_x: y \mapsto f(x, y). \end{aligned}$$

18. Soit δ un réel strictement compris entre 0 et 1 ($0 < \delta < 1$). Démontrer l'existence d'une fonction φ_δ , définie sur la demi-droite fermée $[1, \infty[$, telle que, pour tout réel y de la demi-droite $[1, \infty[$, la relation ci-dessous soit vérifiée :

$$f(\varphi_\delta(y), y) = \delta.$$

Démontrer l'existence d'un réel β tel que la fonction G , définie ci-dessus, prenne la valeur δ en ce point : $G(\beta) = \delta$. Démontrer que ce réel β est strictement supérieur à 1 et est un minorant de l'image par φ_δ de la demi-droite fermée $[1, \infty[$.

Soit (P_{k_i}) une suite extraite de la suite des polynômes considérés à la question 8. L'application $i \mapsto k_i$ est une suite strictement croissante. Pour simplifier les notations, soit Q_i le polynôme P_{k_i} :

$$Q_i = P_{k_i}.$$

19. On choisit une suite $(k_i)_{i \geq 0}$ telle que la suite $(Q_i)_{i \geq 0}$ soit presque orthogonale.

Démontrer que le réel μ entrant dans la définition de la presque orthogonalité est strictement supérieur à 1 ($\mu > 1$).

MATHEMATIQUES 2016

École Centrale Casablanca
Concours d'admission 2016

Épreuve de mathématiques

Soit

$$P_n(X) = X(X - 1) \cdots (X - n).$$

On rappelle la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Les parties I et II sont indépendantes.

I. Quelques propriétés des racines de P'_n

- 1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, P'_n admet exactement une racine $x_{n,k}$ dans chacun des intervalles $]k, k+1[$, pour $k = 0, \dots, n-1$.

Notons $\alpha_{n,k} = x_{n,k} - k \in]0,1[$, la partie fractionnaire de $x_{n,k}$.

- 2) Pour $n \geq 1$, en calculant les coefficients de degré $n-1$ et n de P'_n , exprimer $\sum_{k=0}^{n-1} x_{n,k}$, puis $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k}$ en fonction de n .
- 3) En comparant $P_n(X)$ et $P_n(n-X)$, exprimer $x_{n,n-1-k}$ en fonction de $x_{n,k}$, pour tout $n \geq 1$, et pour tout $k = 0, \dots, n-1$.
- 4) Déterminer la valeur de $\alpha_{n,k} + \alpha_{n,n-1-k}$.

Le but des questions suivantes est de montrer que, n étant fixé, la suite des $\alpha_{n,k}$ croît lorsque k croît de 0 à $n-1$.

- 5) Pour tout $n \geq 1$, dresser, en fonction de la parité de n , le tableau de variations de P_n .

- 6) En déduire le signe de $(-1)^{n-k}P_n(x_{n,k})$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$.
- 7) En utilisant la relation $P_n(X) = (X-n)P_{n-1}(X)$, déterminer le signe de $(-1)^{n-k}P'_n(x_{n-1,k})$ pour $k = 0, 1, \dots, n-2$.
- 8) En déduire que pour $k = 0, 1, \dots, n-2$, on a $x_{n-1,k} > x_{n,k}$.
- 9) En utilisant l'identité $P_n(X) = XP_{n-1}(X-1)$, déterminer, en fonction de k et n , le signe de $(-1)^{n-k}P'_n(1+x_{n-1,k-1})$ pour $k = 1, \dots, n-1$.
- 10) En déduire que pour $k = 1, \dots, n-1$, on a $x_{n,k} > 1 + x_{n-1,k-1}$.
- 11) Conclure.

II. Un développement asymptotique

Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère la fonction h_x définie sur \mathbb{R}_+^* par $h_x(t) = t^{x-1}e^{-t}$.

- 12) Déterminer $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R} \mid h_x \text{ est intégrable sur }]0, +\infty[\}$.

Pour $x \in \mathcal{E}$, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt.$$

- 13) Montrer que Γ est strictement positive sur \mathcal{E} .
- 14) Montrer que Γ est deux fois dérivable sur \mathcal{E} .
- 15) Exprimer pour tout $x \in \mathcal{E}$, $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et $\Gamma(x)$.

Donner $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Désormais, on pose, pour tout $x \in \mathcal{E}$,

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

16) Montrer que Ψ est strictement croissante.

17) Établir, que pour tout $x \in \mathcal{E}$,

$$\Psi(x+1) = \Psi(x) + \frac{1}{x}.$$

Le but des questions suivantes est de montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\Psi(x) + \sum_{j=0}^m \frac{1}{x+j} - \ln m \right] = 0.$$

On pose pour tout $x > 0$,

$$\phi(x) = \Psi(x) - \ln(x).$$

18) Montrer que la série de terme général $(\phi(n+1) - \phi(n))$ converge.

19) Montrer que la suite $(\phi(n), n \geq 1)$ converge lorsque l'entier n tend vers l'infini. Soit C sa limite.

20) Établir que l'on a aussi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = C.$$

21) Montrer que si $C \neq 0$,

$$\int_1^x \phi(t) dt \underset{+\infty}{\sim} Cx.$$

22) Montrer que $C = 0$.

23) Conclure en considérant $\Psi(x+m+1)$.

PHYSIQUE 2017

Session 2017

EPREUVE DE PHYSIQUE

NB:

- *L'épreuve comporte trois grandes parties et des sous partie qui peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.*
- *On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. En particulier, il convient d'indiquer clairement les références des questions abordées.*
- *Les applications numériques doivent être données avec un nombre de chiffres significatifs raisonnable sans oublier les unités d'expression.*

Partie A

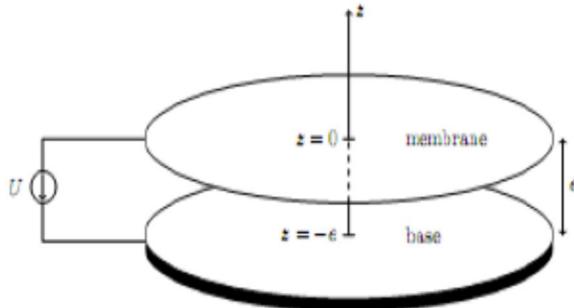
Electrostatique

I. Etude d'un système de transduction électrostatique

Deux disques conducteurs de même rayon, parallèles, sont écartés d'une faible distance ϵ . L'un d'eux est fixe

(« la base »), l'autre constituant la membrane est mobile en translation selon l'axe Oz. La membrane de surface S est rappelée vers la position $z = 0$ par la force de rappel élastique $-kz\ddot{u}_z$. Elle est également soumise, lors de ses déplacements, à la force de frottement fluide $-h\frac{dz}{dt}\dot{u}_z$.

L'air séparant les disques est assimilable, du point de vue électrostatique, au vide. Lorsqu'on établit une différence de potentiel (*ddp*) U entre les disques, il apparaît une charge électrique Q sur la base et une charge opposée $-Q$ sur la membrane. Ces charges sont réparties uniformément sur chaque disque.



1 – Force exercée sur la membrane

La base est assimilée à un plan infini portant la densité surfacique de charge σ uniforme.

- 1.1) En utilisant les propriétés de symétrie et d'invariance de la distribution de charge, préciser, en les justifiant, la direction du champ \vec{E} créé par la base seule et sa dépendance avec les coordonnées spatiales.
- 1.2) Comparer les champs $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$ créés par la base seule en deux points M et M' symétriques par rapport au plan des charges.
- 1.3) En appliquant le théorème de Gauss à un cylindre d'axe Oz traversant le plan de charge, déterminer le champ \vec{E} créé par la base seule dans tout l'espace en fonction de σ puis de la charge Q .
- 1.4) En déduire la force électrique \vec{F}_e subie par la membrane. Est-elle attractive ou répulsive ?
- 1.5) L'ensemble des deux conducteurs constitue un condensateur de capacité C , fonction de z .
 - a) Montrer que $C(z) = \frac{\epsilon_0 S}{\epsilon + z}$.
 - b) Exprimer \vec{F}_e en fonction de U , z et des constantes du problème.

2 – Étude statique

- 2.1) La *ddp* U étant maintenue constante et égale à U_0 . Quelle est l'équation vérifiée par la coordonnée z_0 de la membrane à l'équilibre? Que peut-on dire à priori du nombre de solutions de cette équation ?
- 2.2) On se propose de faire une discussion graphique de l'existence de ces solutions. Mettre l'équation sous la forme $Az_0 = \frac{1}{(\epsilon + z_0)^2}$ où A est une fonction de U_0 . En traçant les graphes des fonctions associées à chacun des deux membres, montrer qu'il existe des valeurs de U_0 pour lesquelles l'équation admet deux solutions z_1 et z_2 telles que : $-\epsilon < z_1 < z_2 < 0$.
- 2.3) Discuter qualitativement de la stabilité de chaque position.
- 2.4) Donner l'équation différentielle reliant $z(t)$ à la tension $U(t)$ en régime variable. On notera m la masse de la membrane.

II. Dipôle électrostatique dans le vide

Pour toutes les applications, on suppose l'espace rapporté à un repère orthonormé galiléen $Oxyz$ dont les vecteurs unitaires des axes Ox , Oy et Oz sont notés respectivement \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z . A un point M quelconque, on associe des coordonnées cartésiennes x , y et z ainsi que le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$, r étant la norme de \vec{r} .

1. Dans le modèle de l'atome de Thomson, un atome d'hydrogène est assimilé à un système matériel constitué d'un noyau, de masse m_p , et d'un électron de masse m_e . La charge électrique $+e$ du noyau est supposée uniformément répartie dans une sphère de rayon a , de centre P . Un électron, considéré comme ponctuel, de charge $-e$, est libre de se déplacer dans cette sphère chargée.

On repère un point N à l'intérieur du noyau par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) relatives au centre P .

1.1) rappeler les lois locales de l'électrostatique.

1.2) Donner l'expression de la densité volumique de charges $\rho(N)$, associée au noyau, en tout point N à l'intérieur de la sphère.

1.3) Exprimer, en utilisant les lois locales, le champ et le potentiel électrostatiques créés par cette distribution de charges en un point N à l'intérieur de la sphère.

1.4) En déduire l'expression de la force électrique ressentie par l'électron situé au point N . Exprimer cette force en faisant apparaître le vecteur \overrightarrow{PN} . Donner aussi l'expression de la force que l'électron exerce sur le noyau.

1.5) Exprimer également le champ et le potentiel électrostatiques créés par le noyau en un point M situé à l'extérieur de la sphère. Commenter.

1.6) Calculer de deux manières différentes l'énergie électrostatique de constitution du noyau.

1.7) analogie avec la loi d'interaction gravitationnelle

a) rappeler l'expression du champ de gravitation $\vec{G}(M)$ créé en M par une masse ponctuelle m placée en P . On notera G la constante de gravitation universelle. En déduire par analogie avec l'électrostatique la loi locale liant $\vec{G}(M)$ et la masse volumique $\rho_m(M)$.

b) Donner les expressions du champ de gravitation créé par une distribution sphérique de masse uniforme de rayon a de densité volumique ρ_m constante, à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.

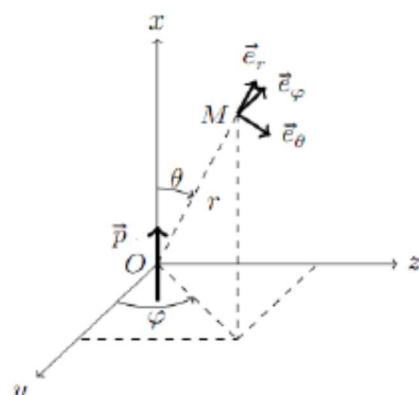
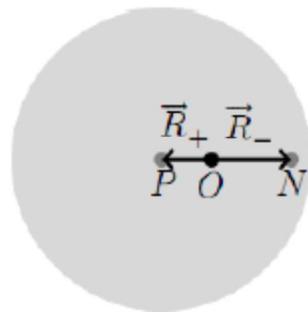
2. Dans un état excité de l'atome, le noyau et l'électron peuvent osciller autour de leur barycentre, sous le seul effet de leur interaction électrique mutuelle. On note $\vec{R}_+(t) = \overrightarrow{OP}(t)$ et $\vec{R}_-(t) = \overrightarrow{ON}(t)$, les déplacements respectifs du noyau et de l'électron par rapport à O . On admet que le noyau garde sa forme sphérique. On pose $\vec{R}(t) = \vec{R}_-(t) - \vec{R}_+(t)$. Le référentiel dans lequel on étudie les mouvements du noyau et de l'électron, est supposé galiléen.

2.1) Appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'électron et au noyau.

2.2) En déduire l'équation différentielle vérifiée par $\vec{R}(t)$.

2.3) Justifier que les mouvements relatifs de l'électron et du noyau se ramènent à celui d'une particule matérielle fictive, de masse μ , soumise à une force de rappel élastique de la forme $-\mu\omega_0^2\vec{R}(t)$. Donner l'expression de μ en fonction de m_e et m_p et l'expression de ω_0 en fonction des différents paramètres du modèle.

2.4) En envisageant le cas d'un atome d'hydrogène, proposer la valeur numérique de μ .



3. De loin, l'atome est vu comme un dipôle électrostatique rigide constitué d'un proton de charge e situé en P et d'un électron de charge $-e$ situé en N , de moment dipolaire $\vec{p} = e\vec{OP} - e\vec{ON}$ parallèle à la direction Ox . On notera $R = NP$.

3.1) exprimer \vec{p} en fonction de \vec{NP} .

3.2) Calculer le potentiel électrostatique créé par ce dipôle en un point M , situé à très grande distance du dipôle ($r \gg R$).

3.3) En déduire les composantes (en coordonnées sphériques) du champ électrostatique créé par ce dipôle. Trouver une relation exprimant le vecteur champ électrostatique \vec{E} en fonction de \vec{r} et \vec{p} .

3.4) Déterminer l'équation des lignes de champ sous la forme d'une relation entre r et l'angle θ .

3.5) Le dipôle (toujours rigide) est maintenant plongé dans un champ électrostatique extérieur.

Quelles sont les actions subies par ce dipôle ? (On pourra donner les expressions sans démonstrations).

3.6) Application :

Une molécule polarisable plongée dans un champ électrique \vec{E}_{ext} acquiert un moment dipolaire induit $\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}_{ext}$.

On considère un dipôle $\vec{p}_1 = p_1 \vec{e}_x$ placé en O et une molécule polarisable placée en M avec $\vec{OM} = x \vec{e}_x$.

Exprimer en fonction de x la force exercée par le dipôle sur la molécule, préciser si cette force est attractive ou répulsive.

4. Mouvement d'une particule chargée plongée dans le champ électrostatique d'un dipôle

On étudie dans le plan $(O, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ le mouvement d'une particule de masse m , de charge Q dans le champ d'un dipôle électrostatique de moment $\vec{p} = p \vec{e}_y$ placé en O , p étant positif.

Cette particule se trouve à l'instant de date t au point M repéré par les coordonnées polaires r, θ . Les conditions initiales sont les suivantes : $r(0) = r_0, \theta(0) = 0, \dot{r}(0) = 0$ et $r(0)\dot{\theta}(0) = v_0 > 0$.

4.1. Ecrire, à partir de la relation fondamentale de la dynamique, deux équations vérifiées par r, θ et leurs dérivées par rapport au temps. On posera $k = \frac{pQ}{4\pi\epsilon_0 m}$.

4.2. Ecrire alors une troisième équation, vérifiée par r, θ et leurs dérivées par rapport au temps, traduisant la conservation de l'énergie mécanique que l'on notera E .

4.3. Déduire des trois équations précédentes une équation ne contenant que r et ses dérivées par rapport aux temps. Intégrer cette équation et donner l'expression de r en fonction de t, m, r_0 et E . Discuter suivant le signe de E .

4.4. On considère alors le cas particulier pour lequel la trajectoire de la particule est circulaire. Quelle est dans ce cas la valeur de E ? Décrire le mouvement de la particule et calculer sa période T en fonction de v_0, r_0 et de l'intégrale définie par : $I = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta}}$.

Partie B

Magnétostatique

I. champs magnétiques créé par des courants filiformes.

1. Etant donné un circuit filiforme (C) orienté, parcouru par un courant permanent d'intensité I , placé dans le vide (ou dans l'air), exprimer la contribution élémentaire $d\vec{B}$ associée à un élément dl du circuit (C) permettant de calculer le champ magnétique \vec{B} créé en un point M de l'espace.

Donner les expressions des composantes de $d\vec{B}$. On utilisera l'angle élémentaire $d\alpha$ sous lequel du point M , on voit cet élément.

2. Déterminer le champ magnétique \vec{B} créé en un point A par la partie rectiligne CD d'un circuit parcouru par un courant I (fig. E1). Exprimer le module $B = |\vec{B}|$ à l'aide des angles α_1 et α_2 et de la distance $a = HA$. Calculer la valeur numérique de B avec $I = 100A$, $a = b = 8,65$ cm et $c = 5$ cm.

3. Préciser la direction et le sens du champ magnétique \vec{B} créé en un point A de son plan par un circuit carré CDEF (fig. E2) parcouru par un courant I . Calculer la valeur numérique du module B si :

$$I = 100 \text{ A}, b = 8,65 \text{ cm} \text{ et } c = 5 \text{ cm.}$$

4. Déterminer le vecteur \vec{B} créé par une spire circulaire (C) de rayon R parcourue par un courant I , en un point A de son axe situé à une distance $OA = h$ de son centre O (fig. E3). Exprimer le module $B = |\vec{B}|$ à l'aide de l'angle γ ; donner sa valeur particulière au centre O de la spire. Calculer numériquement B pour $I = 100 \text{ A}$, $R = 10 \text{ cm}$ et successivement $h = 0$ et $h = 2,5 \text{ cm}$.

5. Une plaque de cuisson par induction utilise une bobine plate de rayon intérieur R_1 , de rayon extérieur R_2 formée d'un conducteur enroulé en spirale à spires jointives. On assimile d'abord cette bobine plate à un ensemble de N spires concentriques parcourues par le même courant I (fig. E4).

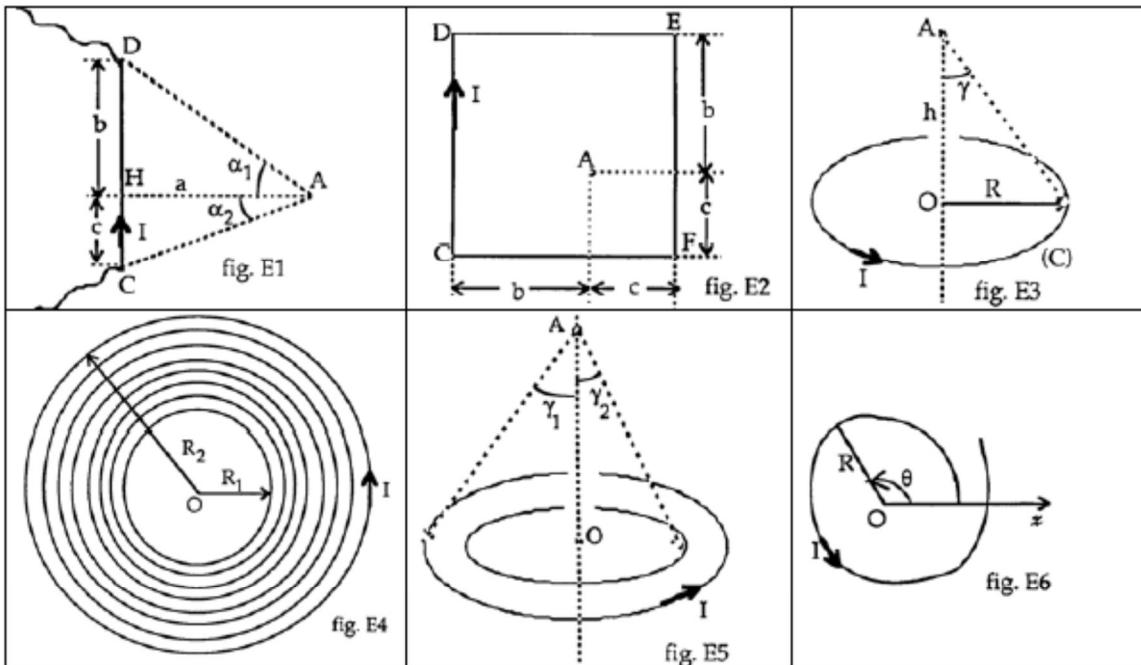
5.1 En admettant l'équivalence avec une répartition continue de spires, exprimer la densité radiale de courant équivalente λ en relation avec I .

5.2 Déterminer le vecteur \vec{B} au centre O de la bobine; donner l'expression du module $B = |\vec{B}|$ et calculer sa valeur numérique avec $R_1 = 2,5 \text{ cm}$, $R_2 = 10 \text{ cm}$, $N = 25$ spires, $I = 24 \text{ A}$.

5.3 Déterminer le vecteur \vec{B} en un point A de l'axe de la bobine à une distance $OA = h$ de son centre O (fig. E5); on exprimera le module $B = |\vec{B}|$ en fonction des valeurs extrêmes γ_1 et γ_2 de γ . On rappelle que :

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|. \text{ Calculer la valeur numérique de } B \text{ avec les valeurs du 1.5.2 et } h = 2,5 \text{ cm.}$$

6. On considère maintenant la bobine plate comme une spirale d'équation $R = R_1 + a\theta$ parcourue par un courant I (fig. E6); déterminer le vecteur \vec{B} au centre O de la bobine. Calculer la valeur numérique du module $B = |\vec{B}|$ au centre O de la spirale avec $I = 24 \text{ A}$ et $R = R_1 = 2,5 \text{ cm}$ pour $\theta = 0$ associé à $R = R_2 = 10 \text{ cm}$ après 25 tours complets.



II. II. Dipôle magnétique dans le champ d'une bobine plate

1. rappeler l'expression du champ magnétique créé en un point A, de cote $z > 0$, de son axe Oz, par une bobine plate constituée de N spires circulaires de centre O de rayon R parcourues par un courant constant d'intensité I.
2. en utilisant la conservation du flux du champ magnétique, trouver une relation permettant de calculer la composante radiale du champ à une distance r au voisinage de l'axe. Calculer cette composante en fonction de r et z .
3. un dipôle magnétique rigide de moment dipolaire \bar{M} est placé à une distance r de l'axe au voisinage de A, exprimer l'angle que fait \bar{M} avec Oz à l'équilibre. Comment varie cet angle avec z ?
4. Placé en A, le dipôle s'oriente parallèlement à l'axe.

 - 4.a) Préciser la configuration la plus stable.
 - 4.b) Montrer que le dipôle va subir une force magnétique dont on précisera l'expression en A, le sens et la direction. Commenter.

Partie C

Un télescope unitaire du VLT

Deux objets ponctuels à l'infini A et B sont observés dans les directions faisant des angles $i_A = 0$ et $i_B \neq 0$ par rapport à l'axe optique. Les deux directions dans lesquelles on observe à travers le télescope leurs images font respectivement les angles $i'_A = 0$ et i'_B avec l'axe optique. Pour simplifier, on supposera que ces deux objets émettent une unique radiation de longueur d'onde $\lambda = 2,00 \mu\text{m}$.

I. Montage de type Cassegrain

Les télescopes unitaires du VLT peuvent être utilisés en configuration dite « Cassegrain » (cf. figure 1). Le télescope est afocal, c'est-à-dire que l'image d'un objet situé à l'infini est à l'infini.

Le miroir primaire est un miroir sphérique concave de sommet S_1 , de diamètre $D = 8,20 \text{ m}$, de rayon de courbure $R_1 = 28,8 \text{ m}$ et le miroir secondaire est un miroir sphérique convexe de sommet S_2 , de rayon de courbure $R_2 = 4,52 \text{ m}$.



Figure 1: Un télescope unitaire du VLT en montage Cassegrain

1. Déterminer numériquement la projection algébrique $\overline{S_1 F_1}$ entre le sommet et le foyer du miroir primaire.
2. Faire de même pour la projection algébrique $\overline{S_2 F_2}$ entre le sommet et le foyer du miroir secondaire.
3. À quelle distance $\overline{S_2 S_1}$ doivent être positionnés ces deux miroirs ? Justifier.
4. En s'appuyant sur une construction géométrique, déterminer la valeur numérique du grossissement : $G = i'_B / i_B$.

II. Résolution limitée par la diffraction

On admet que les phénomènes de diffraction sont dus à la limitation du faisceau lumineux par le miroir primaire de diamètre D .

5. En assimilant, pour simplifier, le premier miroir à une simple lentille convergente de même focale, déterminer l'ordre de grandeur du rayon R de la tâche de diffraction (ou tâche d'Airy) qu'on observerait sur l'image intermédiaire formée par le miroir primaire d'un objet ponctuel à l'infini envoyant une unique radiation de longueur d'onde λ .
6. En déduire l'ordre de grandeur de l'ouverture angulaire $\Delta\theta$ du faisceau image, définie par le fait que les rayons émergent du télescope avec des angles $i'_A \pm \Delta\theta$ et $i'_B \pm \Delta\theta$ par rapport à l'axe optique.
7. En précisant le critère retenu, établir la relation que doivent vérifier les angles $i'_A \pm \Delta\theta$ et $i'_B \pm \Delta\theta$ pour pouvoir discerner les images formées par le télescope.
8. En déduire la valeur numérique de la limite de résolution angulaire i_{\min} du télescope, c'est-à-dire l'angle minimal entre deux étoiles pour que le télescope les discerne.

Fin de l'épreuve

Annexe

Formules d'analyse vectorielle

<u>Expressions en coordonnées cylindriques</u>	<u>Expressions en coordonnées sphériques</u>
$\vec{\nabla}_M f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$	$\vec{\nabla}_M f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$
$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$
$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$	$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$

Identités remarquables :

- 1) $\vec{\nabla}_M \cdot (\vec{\nabla}_M f) = \vec{\nabla}_M^2 f$; 2) $\vec{\nabla}_M \times (\vec{\nabla}_M f) = \vec{0}$
- 3) $\vec{\nabla}_M \cdot (\vec{\nabla}_M \times \vec{A}) = 0$; 4) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$
- 5) $\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$; 6) $\vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) = f\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla}f$
- 7) $\vec{\nabla} \times (f\vec{A}) = f\vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla}f \times \vec{A}$; 8) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B}$
- 9) $\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{A} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$
- 10) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$

Expressions des opérateurs d'analyse vectorielle en fonction de nabla

Gradient d'un champ scalaire : $\overrightarrow{\text{grad}}_M (f(M,t)) = \vec{\nabla}_M f(M,t)$.

Divergence d'un champ vectoriel : $\text{div}_M (\vec{A}(M,t)) = \vec{\nabla}_M \cdot \vec{A}(M,t)$.

Rotationnel d'un champ vectoriel : $\vec{\nabla}_M \times \vec{A}(M,t)$.

Laplacien scalaire : $\Delta f = \vec{\nabla}^2 f$

Partie A

Quelques transformations du corps pur « eau »

Le corps pur étudié est le corps pur eau (H_2O).

Hypothèses de travail et données :

- l'eau gaz (vapeur sèche) et l'eau vapeur (en équilibre avec le liquide) peuvent être considérés comme des gaz parfaits ;
- le volume de la phase liquide est négligé devant le volume de la phase vapeur ;
- $P^*(T)$ est la pression de vapeur saturante du corps pur eau, à la température T : $P^*(H_2O, 373 K) = 1,00 \times 10^5 \text{ Pa}$;
- M est la masse molaire de l'eau : $M = 18,0 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$;
- R est la constante du gaz parfait : $R = 8,31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$;

I. Diagrammes du corps pur

Les diagrammes $P = f(T)$ et $P = f(V)$, représentés respectivement sur les figures 1 et 2, sont les diagrammes simplifiés, et non annotés, du corps pur eau.

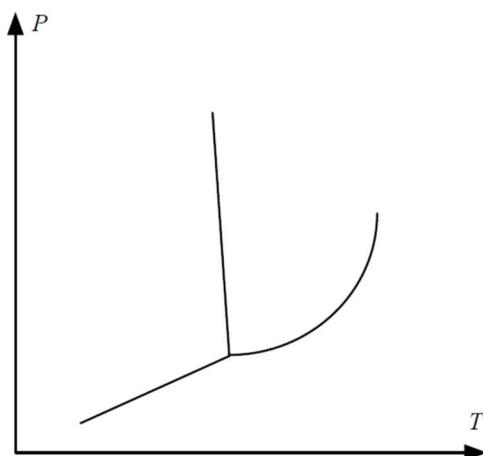


Figure 1

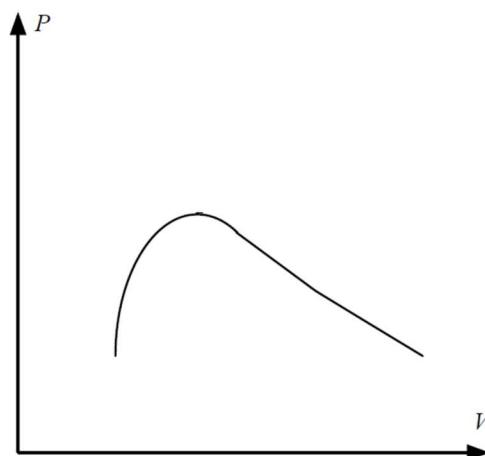


Figure 2

- 1) Recopier et compléter ces deux diagrammes (figure 1 et 2), en précisant la nature des différentes portions de courbes, ainsi que celle des différents domaines délimités.
- 2) La pente p des droites tangentes à l'une des portions de courbe du diagramme $P = f(T)$, est négative et très élevée en valeur absolue : $p = \frac{dP}{dT} \rightarrow -\infty$. Justifier cette propriété.

II. Transformation d'une masse d'eau

Un récipient, de volume intérieur variable V , est constitué d'un cylindre muni d'un piston mobile sans frottement. Toutes les parois diathermanes (non calorifugées) sont au contact d'une source de chaleur, de température constante T_{ext} (atmosphère par exemple).

- 1) Le piston est immobilisé provisoirement dans une position initiale telle que le volume intérieur du cylindre est V_i . Exprimer, en fonction des données de l'énoncé, la masse maximale m_{max} d'eau pure qui peut être injectée dans ce récipient, initialement vide, sans qu'apparaisse la phase liquide du corps pur eau.
- 2) La masse d'eau injectée, dans ce récipient vide, est m (avec $m < m_{max}$).
 - 2.1 Faut-il procéder, à partir du volume V_i , à une augmentation, ou à une diminution du volume du récipient, de manière isotherme, pour faire apparaître la première goutte de liquide (ou goutte de rosée) ?
 - 2.2 Exprimer, en fonction des données de l'énoncé, le volume V_o d'apparition de la phase liquide.
 - 2.3 Le volume V est modifié, toujours à partir de la valeur V_i , de manière quasi-statique (ou mécaniquement réversible), jusqu'à ce que les deux masses d'eau liquide m_ℓ et d'eau vapeur m_v , en équilibre, soient égales : $m_\ell = m_v = m/2$. Exprimer, en fonction de V_o , le volume final V_f .
 - 2.4 Représenter la transformation subie par la masse m de corps pur sur chacun des deux diagrammes précédents $P = f(T)$ et $P = f(V)$.
 - 2.5 Exprimer, en fonction des données de l'énoncé, la grandeur de transfert « travail » W_{eau} reçue (ou mise en jeu) par le corps pur eau, au cours de la transformation.
 - 2.6 Application numérique : $m = 5 \times 10^{-3} \text{ kg}$; $V_i = 20 \times 10^{-3} \text{ m}^3$; $T_{ext} = 373 \text{ K}$. Calculer m_{max} , V_o et W_{eau} .

Partie B

Étude d'un filtre

L'étude expérimentale d'un filtre « R, C » série est réalisée grâce à un oscilloscope. L'exercice considère l'influence du « branchement » à l'appareil de mesure sur la pulsation de coupure, une des caractéristiques du filtre.

I. Étude théorique du filtre « R, C » série

Un groupement R , C série est alimenté avec une tension d'entrée $u_e(t) = U_{e,m} \cos \omega t$. La tension de sortie est notée $u_s(t) = U_{s,m} \cos (\omega t + \varphi)$ (figure 3).

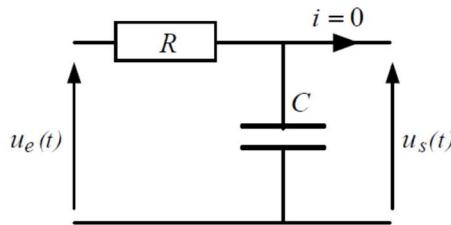


Figure 3

- 1) Étudier, sans calcul, la nature de ce filtre, en envisageant son comportement limite pour $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow +\infty$.
- 2) Déterminer, en fonction de R , C et ω , la fonction de transfert complexe $H(j\omega)$ de ce filtre définie par le rapport des tensions complexes u_s et u_e : $H(j\omega) = \frac{u_s}{u_e}$.

- 3) En déduire :
- 3.1 le gain G , défini par $G = |H(j\omega)|$;
 - 3.2 la phase φ ;
 - 3.3 la pulsation de coupure ω_C , définie par $G(\omega_C) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$.
- 4) Donner l'allure des courbes représentatives des fonctions $G(\omega)$ et $\varphi(\omega)$.
- 5) Application numérique : $R = 10^4 \Omega$ et $C = 10^{-8} F$.
Calculer ω_C .

II. Branchement à l'oscilloscope

La tension de sortie u_s précédente est « appliquée » à l'entrée d'un oscilloscope, par l'intermédiaire d'un câble coaxial supposé idéal. L'impédance d'entrée de l'oscilloscope est caractérisée par le groupement parallèle R_o , C_o . La tension d'entrée u_e est maintenue ($u_e(t) = U_{e,m} \cos \omega t$) et u'_s est la tension de sortie aux bornes du résistor R_o (figure 4).

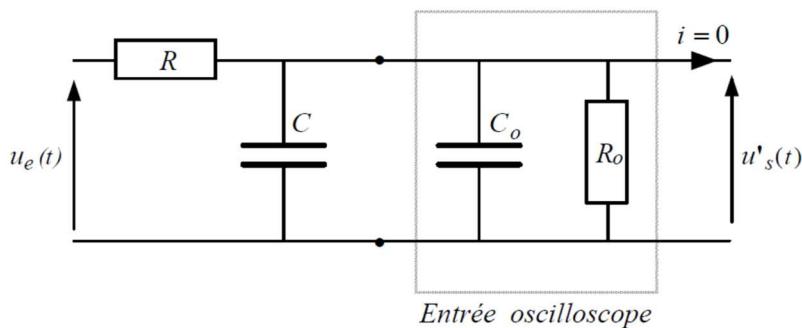


Figure 4

- 1) Montrer que la fonction de transfert $H'(j\omega) = \frac{u'_s}{u_e}$ de ce nouveau filtre se met sous la forme :

$$H'(j\omega) = \frac{A}{1 + jB\omega}$$
, avec A et B constantes. Exprimer A et B à l'aide des données de la figure 4.
- 2) En déduire le nouveau gain G' .
- 3) Exprimer, en fonction de R , R_o , C et C_o , la pulsation de coupure ω'_C correspondante.
- 4) Application numérique : $R = 10^4 \Omega$; $R_o = 5 \times 10^6 \Omega$; $C = 10^{-8} F$; $C_o = 5 \times 10^{-11} F$.
Calculer ω'_C .
- 5) Comparer les pulsations ω_C et ω'_C . Conclure.

Partie C

Transferts thermiques : étude d'un « chauffe-eau »

Un résistor, parcouru par un courant électrique, permet de chauffer, grâce à l'effet Joule, une masse m d'eau contenue dans un ballon calorifugé (chauffe-eau).

Hypothèses de travail et données :

- la masse d'eau contenue dans le ballon est $m = 100 \text{ kg}$;
- le coefficient (ou capacité) thermique massique de l'eau est $c_e = 4,18 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1}$;
- la pression P , à l'intérieur du récipient, est égale à la pression constante du milieu extérieur : ($P = P_{ext} = 1,01 \text{ bar}$) ;

- le changement d'état liquide-vapeur est négligé : l'eau reste liquide ;
- le résistor, lorsqu'il est alimenté, fournit une puissance thermique constante $P_{th} = 1,5 \times 10^3 \text{ W}$;
- les parois du récipient, ainsi que le matériau isolant, sont de capacité thermique négligeable ;
- la température constante du milieu extérieur est $T_{ext} = 290 \text{ K}$.

I. Préliminaires

La masse d'eau est un système fermé (sans échange de matière avec l'extérieur). Ce système, noté (\mathcal{S}), est soumis à la pression extérieure constante P_{ext} .

- 1) Exprimer l'enthalpie H_S du système (\mathcal{S}), en fonction de son énergie interne U_S et de certains de ses paramètres d'état.
- 2) (\mathcal{S}) subit une transformation quelconque, au cours de laquelle il reçoit (ou met en jeu), à pression extérieure P_{ext} constante, la quantité de chaleur Q_{Pext} . Démontrer l'égalité $\Delta H_S = Q_{Pext}$.
- 3) En l'absence de tout changement d'état, (\mathcal{S}) reçoit une quantité élémentaire (ou infinitésimale) de chaleur $\delta Q_{Pext} = dH_S$ et sa température T varie de dT . Relier les grandeurs élémentaires δQ_{Pext} et dT .

II. Le récipient est supposé thermiquement isolé

Les parois du chauffe-eau sont athermanes : le récipient est supposé parfaitement calorifugé. À l'instant initial $t = 0$, la masse d'eau est à la température T_{ext} et le chauffage est mis en œuvre, avec la puissance thermique P_{th} constante.

- 1) Exprimer, en fonction des données de l'énoncé, la quantité de chaleur Q_{Pext} que doit recevoir l'eau pour que sa température T atteigne la valeur T_1 ($> T_{ext}$).
- 2) Quelle sera la durée Δt du transfert thermique ?
- 3) *Application numérique* : $T_1 = 350 \text{ K}$.
Calculer Q_{Pext} et Δt .

III. Le récipient est soumis à des pertes thermiques

En réalité, l'eau, à température T , subit des pertes thermiques dues au fait que le réservoir est imparfaitement isolé du milieu extérieur (température constante T_{ext}). La quantité de chaleur δQ_{Pext} , mise en jeu par (\mathcal{S}) pendant la durée infinitésimale (ou élémentaire) dt , est de la forme : $\delta Q_{Pext} = -k(T - T_{ext}) dt$ (avec k constante).

1) « Marche forcée » du chauffe-eau

Le procédé dit de la « marche forcée » permet d'évaluer les pertes. En régime permanent, par apport continu de la puissance thermique P_{th} , et au bout d'un temps très long, la température T de l'eau atteint une valeur limite T_{lim} . À ce stade, le chauffage permet juste de compenser les pertes thermiques.

1.1 Rappeler le signe de la constante k .

1.2 Exprimer la constante k , en fonction de P_{th} et des températures données.

1.3 *Application numérique* : $T_{lim} = 370 \text{ K}$.
Calculer k .

Partie D

Haut parleur

Il s'agit dans cette partie, d'illustrer l'application de l'induction électromagnétique dans le fonctionnement du haut-parleur électrodynamique.

L'espace est rapporté, en coordonnées cylindriques (r, θ, z) , à un repère de base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. Le haut-parleur est essentiellement un système à symétrie cylindrique, constitué (figure 1) :

- d'un aimant immobile comprenant deux cylindres coaxiaux d'axe $z'z$ horizontal et créant un champ magnétique $\vec{B} = B \vec{e}_r$ radial, et de norme constante et uniforme dans l'« entrefer » ;
- d'une bobine indéformable (solénoïde) \mathcal{B} de même axe $z'z$, comportant N spires circulaires de rayon ρ et insérée dans l'entrefer ;
- d'une membrane souple (pavillon) \mathcal{M} , solidaire de la bobine, et pouvant subir des translations axiales de part et d'autre de sa position d'équilibre définie par $z = 0$.

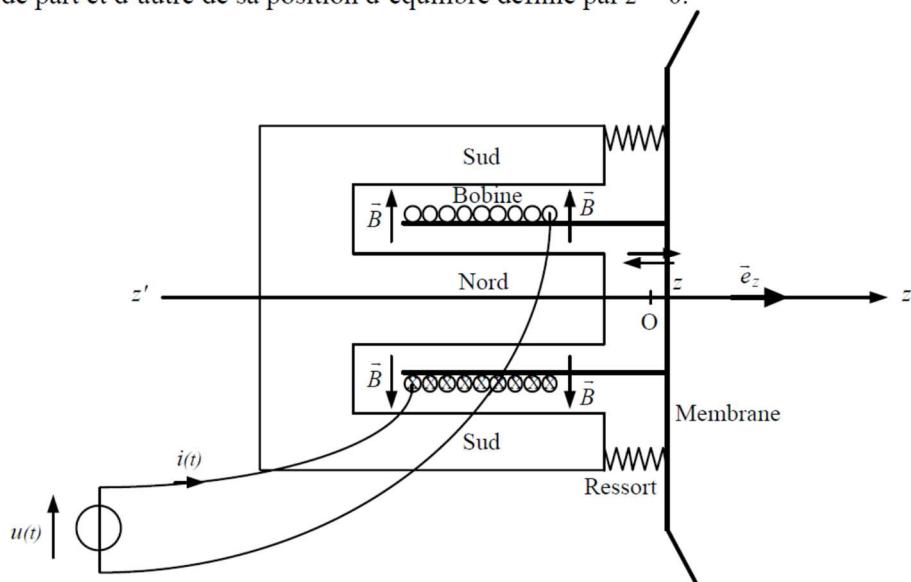


Figure 1

Lorsqu'une source de tension $u(t)$ est branchée aux bornes de la bobine plongée dans le champ magnétique, celle-ci, parcourue par un courant d'intensité $i(t)$, se met en mouvement sous l'effet des forces de Laplace. Ce mouvement entraîne la membrane qui vibre dans l'air, créant ainsi des ondes sonores.

Dans l'air, le mouvement crée une force de frottement fluide $\vec{f}_f = -\alpha \cdot v \vec{e}_z$, opposée (α constante positive) à la vitesse $\vec{v} = v \vec{e}_z$ de la membrane.

L'ensemble $\{\mathcal{M}, \mathcal{B}\}$, de masse m , est élastiquement lié à un support fixe par un dispositif élastique, modélisé par un ressort unique de constante de raideur k et exerçant sur l'ensemble une force de rappel $\vec{f}_r = -k \cdot z \vec{e}_z$.

Il est admis qu'au cours des déplacements, le poids du dispositif et la réaction du support se compensent.

D'un point de vue électrique, la bobine est modélisée par une inductance pure L en série avec une résistance R .

Le problème est considéré dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS).

I. Étude préliminaire

L'espace est, pour cette seule question, rapporté en coordonnées cartésiennes (x, y, z) , à un repère de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Soit un courant d'intensité i positive qui circule dans une portion AD de fil rigide, parallèle à l'axe Ox , de longueur $AD = \ell$, de milieu Ω et plongée dans le champ magnétique $\vec{B} = B \vec{e}_y$ uniforme, avec $B > 0$. Les fils de connexion sont parallèles à l'axe Oy (figure 2).

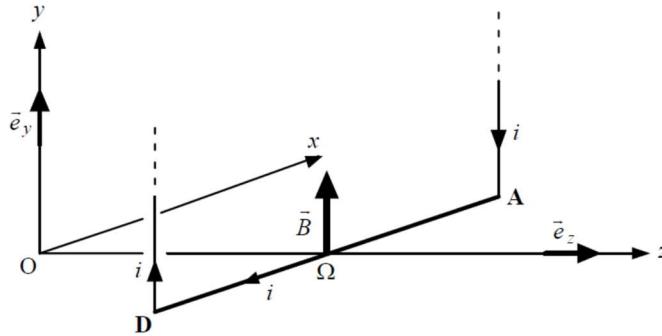
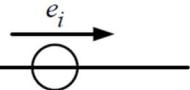


Figure 2

- 1) Recopier sommairement le schéma de la figure 2 et dessiner la résultante \vec{f}_L des forces de Laplace qui s'exercent sur la portion de fil AD.
- 2) Déterminer, en fonction des données de l'énoncé, l'expression vectorielle de cette force \vec{f}_L .
- 3) La portion de fil rigide AD et les fils de connexion sont animés d'un mouvement de translation de vitesse $\vec{v} = v \vec{e}_z$, (avec v algébrique).
 - 3.1 Dessiner, sur le schéma précédent (§ A.I.1), et dans le cas d'une vitesse v positive, le vecteur champ électromoteur $\vec{E}_{m,i}$ induit dans la portion de fil AD.
 - 3.2 Préciser sur cette portion de fil AD (schéma § A.I.1), toujours dans le cas d'une vitesse v positive, l'orientation de la f.e.m. (force électromotrice) induite e_i en utilisant le symbole suivant : 
 - 3.3 Établir l'expression de cette f.e.m. induite e_i .

La suite des questions porte désormais sur le fonctionnement du haut-parleur

II. Comportement mécanique de la partie mobile du haut-parleur

- 1) Écrire, en fonction des données de l'énoncé, l'expression vectorielle de la résultante \vec{f}_L des forces de Laplace qui s'exercent sur la bobine \mathcal{B} , parcourue par le courant d'intensité $i(t)$.
- 2) Par application du théorème de la résultante dynamique appliquée à l'ensemble $\{\mathcal{M}, \mathcal{B}\}$ de masse m , établir une équation différentielle qui relie $z(t)$ et $i(t)$, et qui traduit le comportement mécanique de la partie mobile du haut-parleur. Cette équation, notée (E₁), est de la forme :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + a \frac{dz}{dt} + b z = c i(t) \quad (\text{E}_1)$$

avec a, b et c constantes.

- 3) Exprimer les coefficients a, b et c en fonction des données de l'énoncé.

III. Loi des mailles et comportement électrique

- 1) Montrer que la f.e.m. (force électromotrice) induite $e_i(t)$ dans la maille, constituée par le générateur de tension $u(t)$ et la bobine, s'exprime sous la forme $e_i(t) = h \frac{dz}{dt}$ (avec h constante positive). Exprimer h en fonction des données de l'énoncé.
- 2) Appliquer la loi des mailles à l'ensemble générateur-bobine et écrire l'équation différentielle, vérifiée par le courant $i(t)$, qui traduit le comportement électrique du haut-parleur. Cette équation, notée (E₂), est de la forme :

$$u(t) = a' \frac{di}{dt} + b' i(t) + c' \frac{dz}{dt} \quad (\text{E}_2)$$

avec a' , b' et c' constantes.

- 3) Exprimer les coefficients a' , b' et c' en fonction des données de l'énoncé.

IV. Tension d'alimentation $u(t)$ alternative sinusoïdale

La tension $u(t)$ d'alimentation du haut-parleur est alternative sinusoïdale, de pulsation ω . Aux grandeurs physiques $u(t)$, $i(t)$ et $z(t)$, toutes de pulsation ω , peuvent être associées les fonctions complexes respectives $\underline{u}(t) = \underline{u}_o e^{j\omega t}$, $\underline{i}(t) = \underline{i}_o e^{j\omega t}$ et $\underline{z}(t) = \underline{z}_o e^{j\omega t}$. Il est rappelé que la dérivée temporelle d'une fonction complexe f du type $f(t) = f_0 e^{j\omega t}$ s'écrit : $\frac{df}{dt} = j\omega f$.

En combinant les équations différentielles (E₁) et (E₂), la tension d'alimentation $\underline{u}(t)$ et l'intensité $\underline{i}(t)$ vérifient l'équation $\underline{u}(t) = \underline{Z} \underline{i}(t)$, expression dans laquelle \underline{Z} est une impédance complexe. L'ensemble générateur-haut-parleur peut donc être représenté par le modèle électrique suivant (figure 3) :

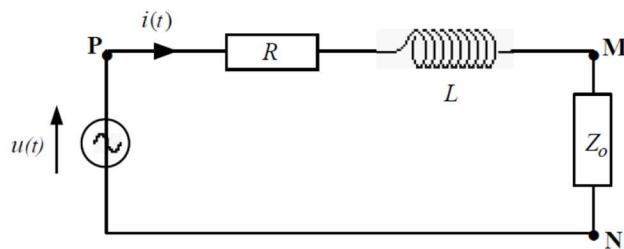


Figure 3

modèle dans lequel le dipôle MN présente l'impédance complexe \underline{Z}_o .

- 1) Donner l'impédance complexe \underline{Z}_{PM} du dipôle PM.
- 2) En posant $\beta = 2\pi\rho NB$ et $\gamma = \left(\frac{k}{\omega} - m\omega\right)$, exprimer, en fonction de α , β et γ , l'impédance complexe \underline{Z}_o .

Partie E

Four à micro-ondes

Une brioche (gâteau) notée **(B)**, considérée comme homogène, isotrope et sphérique (rayon R et centre O), est réchauffée dans un four à micro-ondes.

Hypothèses de travail :

- tout point M de l'espace est repéré notamment par le vecteur $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$, avec \vec{e}_r vecteur « tournant » d'un système de coordonnées sphériques, d'origine O ;
- la sphère **(B)**, constituée d'un matériau de conductivité thermique λ constante, est conductrice de la chaleur ;
- la conduction thermique est unidimensionnelle (variable r) et radiale : les surfaces isothermes sont sphériques, de centre O ;
- à l'intérieur de **(B)**, $\vec{j}_{th}(r)$ (en W m^{-2}) est le vecteur densité de flux thermique, vecteur radial, et $\Phi(r)$ (en W) le flux thermique à travers la sphère de rayon r , de centre O et de surface $S(r)$;
- \vec{j}_{th} est lié à la température par la loi de Fourier : $\vec{j}_{th} = -\lambda \overset{\rightarrow}{\text{grad}} T$, expression qui s'écrit, compte tenu des considérations de symétrie :

$$\vec{j}_{th} = j_{th}(r, t) \vec{e}_r = -\lambda \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \vec{e}_r ;$$

- à l'intérieur du four, l'appareil délivre une puissance thermique totale P_{th} constante, entièrement absorbée par **(B)** (l'air sec enveloppant la brioche est insensible aux micro-ondes) ;
- la puissance volumique p (en W m^{-3}), absorbée à l'intérieur du gâteau, est supposée uniforme et constante ;
- le flux thermique sortant de la brioche s'évacue rapidement, grâce à l'air ventilé, à l'extérieur du four : la paroi externe de **(B)** est ainsi maintenue à la température constante T_o ;
- l'air sec enveloppant la brioche ne présente aucune absorption thermique, et est maintenu à la température constante T_o ;
- le phénomène est envisagé en régime permanent et stationnaire : $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{dT(r)}{dr} \vec{e}_r$.

- 1) Rappeler la relation qui existe entre $\Phi(r)$, $j_{th}(r)$ et $S(r)$.
- 2) Soit le volume élémentaire dV de **(B)**, compris entre les sphères concentriques, de centre O et de rayons respectifs r et $r+dr$. Exprimer, en fonction de la variable r , le volume élémentaire dV .
- 3) En déduire, en fonction de p et de la variable r , la puissance thermique dP_{th} reçue, grâce à l'absorption des micro-ondes, par cet élément de volume dV .
- 4) Présenter, toujours pour cet élément de volume élémentaire dV , un bilan des flux thermiques, c'est-à-dire une relation entre les flux $\Phi(r)$ et $\Phi(r+dr)$.
- 5) En déduire une équation différentielle reliant la fonction $T(r)$ et la variable r , et qui s'écrit sous la forme : $\frac{dT(r)}{dr} = K_1 r + \frac{K_2}{r^2}$, avec K_1 et K_2 constantes.
- 6) Quelles relations existe-t-il, toujours en régime stationnaire, entre $\Phi(R)$ et P_{th} d'une part, et P_{th} et p d'autre part ?
- 7) En déduire la valeur de la constante K_2 .
- 8) Intégrer l'équation différentielle de la question § 5, et déterminer l'expression de la température $T(r)$ à l'intérieur de la brioche, en se rappelant que $T(R) = T_o$.
- 9) Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $T(r)$.
- 10) Localiser la partie la plus « carbonisée » de la brioche, si celle-ci est maintenue trop longtemps dans le four en fonctionnement.

ANGLAIS 2017

CONCOURS 2017

Épreuve d'ANGLAIS

Durée : 2h

L'usage de tout système électronique ou informatique est interdit dans cette épreuve.

Exercice 1 : Synthèse de documents

Rédiger en anglais et en 250 mots environ une synthèse des documents proposés. Vous indiquerez avec précision à la fin de votre synthèse le nombre de mots qu'elle comporte. Un écart de 10% en plus ou en moins sera accepté. Votre synthèse comportera un titre comptabilisé dans le nombre de mots.

Ce sujet propose les 2 documents suivants :

Document 1

We're Seeing a Trend Toward Less Violence in the World

By Emma Ashford 06/09/2016

At an event in May, President Obama noted: "The world is less violent than it has ever been." It might seem difficult to reconcile this sentiment with daily horrors in the Middle East, terrorist attacks and other media-hyped doom and gloom. But he's right: Though violent conflicts still happen around the world, the broad trend lines are all in the right direction.

The number of conflicts, whether between states or within them, has fallen dramatically in recent decades. Between 1990-2014, the overall number of conflicts fell 40 percent. And while there will always be extreme cases like the violence in Syria, today's conflicts in general have lower levels of violence. Perhaps more important, modern wars tend to be small and localized; the most destructive and costly kind of war -- conflict between great power states -- has not occurred for more than 60 years. Even terrorism is far less of a concern than many assume, particularly for those who live outside war zones. For an American, the odds of dying in a terrorist attack is an astronomically unlikely one in 45 million.

To be sure, there are still intractable conflicts in the Middle East, Latin America and elsewhere. Colombia may have reached a tentative peace deal, but diplomats have so far been unable to find peaceful resolution to conflicts in Syria, Yemen, Ukraine and elsewhere. Political science research suggests that some of these will be difficult to resolve: Studies show that the average civil war lasts about 10 years, and can be worsened by the involvement of external states, a fact that goes some way toward explaining the Syrian quagmire. But these contemporary conflicts simply cannot compare to the carnage of the two World Wars, or the Cold War threat of nuclear annihilation.

Over the long-term, the president is right. The world is trending away from violence.

From: The New York Times

Document 2

According to the Numbers, It's Still a Dangerous World

By [John Arquilla](#) 06/09/2016

There are two basic ways to measure whether the world is becoming a less dangerous place: counting the number of deadly quarrels and assessing their degree of lethality. Neither of these approaches offers much room for optimism, given current trends.

Take wars, for example. While the total [number of ongoing conflicts](#) is down about 20 percent from a high of 51 in 1991, the number of wars has increased by a third over just the last six years – from 31 to 41 (with Colombia now excluded from the current count). Even worse, the last two years have seen the highest levels of violently inflicted deaths in armed conflicts since the fall of the Berlin Wall in 1989. Given that many wars – even those that feature relatively small numbers of battle deaths – occur in countries with poor infrastructure and a paucity of resources, the number of “indirect deaths” because of disease and starvation has soared as well.

Then there is terrorism. Simply put, on the cusp of the 15th anniversary of Al Qaeda’s attacks on America, the “global war on terror” that President George W. Bush once proclaimed has morphed into terror’s war on the world. There were just under 2,000 terrorist attacks in 2001 that resulted in 14,000 deaths and injuries. By 2015 that [number had risen](#) to nearly 15,000 attacks and more than 80,000 deaths and injuries. That’s a seven-fold increase in incidents and a quintupling of casualties.

Interestingly, almost a third of the deaths and 40 percent of the injuries due to terrorism in 2015 occurred in Iraq and Afghanistan – the two countries where the United States has been most closely engaged in the post-9/11 era. These results should encourage introspection, in the Pentagon and elsewhere, about the specific manner in which operations against terrorist networks are undertaken – and about the fraught grand strategy of nation-building that has gone so terribly awry, at ruinous cost.

Armed conflict and terrorism in our time hardly begin to approach the carnage of the previous century’s world wars. But that is beside the point. Such general wars are relatively rare in human history. Before the world wars one would have to look back to the Napoleonic era to find a similar level of military mayhem. And before that to the Thirty Years’ War. Today, and for many tomorrows, such grand-scale wars are highly unlikely, given the shared worldwide concern about avoiding escalation of a conflict to the level of nuclear war.

But, as the late, great political theorist [Kenneth Waltz](#) first noted nearly 60 years ago, “the mutual fear of big weapons may produce, instead of peace, a spate of smaller wars.” He was right, as the rising tide of war and terror proves.

From: The New York Times

Exercice 2 : Expression écrite

Rédiger un essai d'environ 200 mots.

Topic: with the advance of phones, tablets, and e-readers, ebooks have become a popular reading standard. Still there's something about the feel of an old-fashioned paper book. Which one in your opinion is better and why?

ANGLAIS

1,5h

L'usage de tout système électronique ou informatique est interdit dans cette épreuve.

Exercice 1 : Synthèse de documents

Rédiger en anglais et en 250 mots environ une synthèse des documents proposés. Vous indiquerez avec précision à la fin de votre synthèse le nombre de mots qu'elle comporte. Un écart de 10% en plus ou en moins sera accepté. Votre synthèse comportera un titre comptabilisé dans le nombre de mots.

Ce sujet propose les 2 documents suivants :

Document1

Can Students Have Too Much Tech?

By SUSAN PINKER, JAN 30 2015

PRESIDENT OBAMA's domestic agenda, which he announced in his State of the Union address this month, has a lot to like: health care, maternity leave, affordable college. But there was one thing he got wrong. As part of his promise to educate American children for an increasingly competitive world, he vowed to "protect a free and open Internet" and "extend its reach to every classroom and every community."

More technology in the classroom has long been a policy-making panacea. But mounting evidence shows that showering students, especially those from struggling families, with networked devices will not shrink the class divide in education. If anything, it will widen it.

In the early 2000s, the Duke University economists Jacob Vigdor and Helen Ladd tracked the academic progress of nearly one million disadvantaged middle-school students against the dates they were given networked computers. The researchers assessed the students' math and reading skills annually for five years, and recorded how they spent their time. The news was not good.

"Students who gain access to a home computer between the 5th and 8th grades tend to witness a persistent decline in reading and math scores," the economists wrote, adding that license to surf the Internet was also linked to lower grades in younger children.

In fact, the students' academic scores dropped and remained depressed for as long as the researchers kept tabs on them. What's worse, the weaker students (boys, African-Americans) were more adversely affected than the rest. When their computers arrived, their reading scores fell off a cliff.

We don't know why this is, but we can speculate. With no adults to supervise them, many kids used their networked devices not for schoolwork, but to play games, troll social media and download entertainment. (And why not? Given their druthers, most adults would do the same.)

The problem is the differential impact on children from poor families. Babies born to low-income parents spend at least 40 percent of their waking hours in front of a screen — more than twice the time spent by middle-class babies. They also get far less cuddling and bantering over family meals than do more privileged children. The give-and-take of these interactions is what predicts robust vocabularies and school success. Apps and videos don't.

If children who spend more time with electronic devices are also more likely to be out of sync with their peers' behavior and learning by the fourth grade, why would adding more viewing and clicking to their school days be considered a good idea? (...)

From: nytimes.com

Document 2

Children should be allowed to use mobiles in class because they help them learn, study says

By LAURA CLARK FOR THE DAILY MAIL, 3 September 2008

Children should be allowed to use their mobile phones in class because they can serve as 'learning aids', a study claims today.

Academics are calling on schools to rethink bans on phone handsets after trials suggested that functions such as calculators, stopwatches and email can be 'educational'.

However, the call is certain to infuriate many teachers and parents, who will be concerned that pupils will be unable to resist the temptation to put the devices to less productive uses, such as cyber-bullying or cheating in tests.

During a nine-month experiment involving classes aged 14 to 16, pupils either used their own mobiles in lessons or the new generation of 'smartphones' which allow internet connection.

They were used to create short films, set homework reminders, record a teacher reading a poem and time experiments with the phones' stopwatches.

The smartphones also allowed pupils to access revision websites, log into the school email system, or transfer electronic files between school and home.

The study by researchers at Nottingham University involved 331 pupils in schools in Cambridgeshire, West Berkshire and Nottingham.

'At the start of the study, even pupils were often surprised at the thought that mobile phones could be used for learning,' Dr Elizabeth Hartnell-Young will tell the annual conference of the British Educational Research Association in Edinburgh later today.

'After their hands-on experience, almost all pupils said they had enjoyed the project and felt more motivated.'

One teacher told researchers that students like mobiles and they know how to use them.

'Using this technology gives them more freedom to express themselves without needing to be constantly supervised,' the teacher said.

From: dailymail.co.uk

Exercice 2 : Expression écrite

Rédiger un essai d'environ 200 mots.

Topic: Some people believe that the Earth is being harmed (damaged) by human activity. Others feel that human activity makes the Earth a better place to live. What is your opinion? Use specific reasons and examples to support your answer.