EPO– CPGE – MPSI   Année académique 2021-2022

Devoir Algèbre 1
Durée: 3h

Exercice 1. *(4 points)*

1. Donner la contraposée et la négation de l'expression suivante:

$$\exists l \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \geq \epsilon.$$

2. Montrer la relation suivante:

$$\forall\ A, B, C \in \mathcal{P}(E), (A \cup B = A \cup C \text{ et } A \cap B = A \cap C) \Rightarrow B \subset C.$$

3. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ par:

$$\forall\ \ z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ \ z_1 \mathcal{R} z_2 \Leftrightarrow \exists\ \theta \in \mathbb{R}; z_2 := \frac{z_1 \cos(\theta) + \sin(\theta)}{-z_1 \sin(\theta) + \cos(\theta)}.$$ rts

Montrer que c'est une relation d'équivalence.

Exercice 2. *(4 points)*

1. Calculer les sommes suivantes:

   (a) $U = \sum\limits_{k=1}^{n+1} (k-1)\binom{n}{k-1}$.

   (b) $V = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} k \binom{n}{k}$.
   Indication: Dévellopper $(1+x)^n$.

2. Soient $(A, +, \times)$ un anneau et a, b des éléments de A.

   (a) On suppose que (ab) est nilpotent. Montrer que $(1 - ab)$ est inversible et déterminer son inverse.

   (b) On suppose que (ab) et (ba) sont nilpotents. Montrer que $(1 - ba)^{-1} = 1 + b(1 - ab)^{-1} a$.

Exercice 3. *(4 points)*

1. Soit $\alpha = \frac{-1+i}{4}$. Ecrire α sous forme exponentielle.

2. Déterminer les racines cubiques de α sous forme exponentielle.

3. Montrer qu'une seule de ses racines cubiques a une puissance quatrième réelle.

4. Déterminer des complexes β, λ et μ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, z^4 + \lambda z^3 + \mu z^2 - (1 - i)z - \frac{1}{4} = (z + \beta)^4$$

On écrira ces trois nombres complexes sous forme algébrique.

Exercice 4. *(8 points)*

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 11 \mid 3^{n+3} - 4^{4n+2}$.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $4^n - 3n$ est congru à 1 modulo 9. En déduire que $2^{2n} + 15n - 1$ est toujours divisible par 9.

3. Soit un entier $n \geq 3$.

   a) Montrer que, pour tout entier x, x^2 et $(n-x)^2$ sont congrus modulo n.

   b) On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0 \ ;\ 1 \ ;\ ... \ ;\ n-1\}$ l'ensemble des restes modulo n, et f l'application définie par

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

   L'application f est-elle injective ? surjective ?

   c) Dresser la table des carrés modulo 7.

   d) Montrer que $\forall (x \ ;\ y) \in \mathbb{Z}^2, x^2 - 6xy + 2y^2 \neq 7003$. (Exprimer le premier membre comme un carré modulo 7).

4. a) Montrer que $\forall (n \ ;\ k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*,\ 2^{2^{n+k}} - 1 = (2^{2^n} - 1) \prod_{i=0}^{k-1} \left(2^{2^{n+i}} + 1\right)$.

   b) On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que pour $n \neq m$, F_n et F_m sont premiers entre eux.

   c) En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers.

EPO–CPGE Année académique 2021-2022

Algèbre 1
Examen S1 MPSI
Durée : 4h

Exercice 1. *(4 points)*

1. Soient E un ensemble et H une partie fixée de E. On note $\overline{H}$ le complémentaire de H dans E. On définit dans $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E, la relation $\leq$ par :
$$\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \leq B \Leftrightarrow (A \cap H \subset B \cap H \quad et \quad B \cap \overline{H} \subset A \cap \overline{H}).$$
Démontrer que $\leq$ est une relation d'ordre. Justifier si l'ordre est total ou partiel.
2. Effectuer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $A = \frac{X^2}{X^4 - 2X^2\cos(2a)+1}$.

Exercice 2. *(7 points)*

Soient a, b, c trois nombres complexes. On considère l' équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. (1)

1. En effectuant un changement de variable du type $y = x - \alpha$; montrer que l'équation (1) se ramène à une équation du type $y^3 + py + q = 0$.
Expliciter α, p, q en fonction de a, b, c.
2. On cherche les solutions de l'équation $y^3+py+q = 0$ sous la forme $y_1 = u+v$; $y_2 = uj+vj^2$; $y_3 = uj^2 + vj$.
Montrer que y_1, y_2, y_3 sont solutions de l'équation $y^3 + py + q = 0$ si et seulement si $p = -3uv$ et $q = -(u^3 + v^3)$.
On rappelle que $j = e^{2i\pi/3}, j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$.
3. On pose $U = u^3, V = v^3$.
Montrer que U et V sont solutions de l'équation $z^2 + qz - \frac{p^3}{27}$.
4. Montrer que parmis les couples (u, v) ci-dessus vérifiant $U = u^3, V = v^3$, au plus 3 couples vérifient l'égalité $p = -3uv$.
5. Montrer que les trois couples obtenus précedemment donnent les mêmes racines (à permutation près) y_1, y_2, y_3.
6. Appliquer la méthode ci-dessus pour résoudre l'équation : $x^3 + 3x^2 + 3(1-2j)x + 2(3j^2 - 1) = 0$.

Exercice 3. *(9 points)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = (1 + X)^n - (1 - X)^n$

1. Calculer P_1, P_2, P_3, P_4.
2. Montrer que P_n est impair.
3. (a) Quel est le coefficient de X^n dans P_n ?
   (b) Même question avec X^{n-1}.
   (c) En déduire que le degré de P_n est égal à n (respectivement $n - 1$) lorsque n est impair (respectivement pair).
4. Montrer que P_n est divisible par X.
5. (a) Montrer que $z \in \mathbb{C}$ est racine de P_n si et seulement si $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = 1$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\mathrm{n}} = 1$, et en déduire les racines complexes de P_n (on distinguera les cas n pair et n impair). Combien de ses racines sont réelles ?
6. Factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ (on distinguera à nouveau les cas n pair et n impair)

EPO–CPGE–MPSI Année académique 2021-2022

Algèbre 2
Devoir S2
Durée : 3h

Exercice 1.

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

1. On suppose que $dimF_1 = dimF_2$. Montrer que F_1 et F_2 ont un supplémentaire commun dans E.
2. On suppose que $dimF_1 \leq dimF_2$. Montrer qu'il existe G_1 un supplémentaire de F_1, G_2 un supplémentaire de F_2 tels que $G_2 \subset G_1$.

Exercice 2.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $u^2 - 3u + 2\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} = 0$.

1. Montrer que $u \in \mathrm{GL(E)}$ et exprimer u^{-1} en fonction de u.
2. On pose $f = u - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ et $g = 2\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - u$. Montrer que $f \circ g = g \circ f = 0$.
3. Vérifier que f et g sont des projecteurs.
4. Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} f$.
5. Montrer que $\mathbf{E} = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker} g$ et $\mathbf{E} = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g$.

Exercice 3.

Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants :

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix}$.

Exercice 4.

1. Soit $f : \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_{n+1}[X] \\ P & \mapsto Q = e^{X^2}\left(Pe^{-X^2}\right)' & \end{array}$
   (a) Vérifier que $f \in (\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}_{n+1}[X]))$.
   (b) Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.
   (c) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{rg}(f)$.
2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ déterminé par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A$. On pose $\varepsilon_1 = e_1 + e_3, \varepsilon_2 = e_1 + e_2$ et $\varepsilon_3 = e_1 + e_2 + e_3$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ forme une base de E et déterminer la matrice de f dans $\mathcal{B}'$. On le notera T.
   (b) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et calculer son inverse.
   (c) Exprimer la relation qui lie A, T, P, P^{-1}.
   (d) Calculer T^n.
   (e) En déduire A^n.

EPO–CPGE **Année académique 2021-2022**

Algèbre 2
Examen S2
Durée : 4h

Exercice 1. *(5 points)*

Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(K)$, non nulles.

1. Démontrer que pour tout p de $\mathbb{N}$, A^p et B^p sont semblables.
2. Démontrer que si h est un polynôme de $K[X]$, $h(A)$ et $h(B)$ sont semblables.
3. (a) Démontrer que pour tout M non nul de $\mathcal{M}_n(K)$, il existe un polynôme unitaire unique P_M de $(K[X])^*$ tel que :
   — $P_M(M) = 0$.
   — $\forall Q \in K[X], Q(M) = 0 \Longrightarrow P_M(X)$ divise $Q(X)$.

   $P_M(X)$ est appelé le polynôme minimal de M.

   (b) Établir que $P_A = P_B$.

   (c) Démontrer qu'un élément non nul M de $\mathcal{M}_n(K)$ est inversible si, et seulement si, le terme constant de P_M est non nul.

   (d) Soit M un élément non nul idempotent (i.e. $M^2 = M$) de $\mathcal{M}_n(K)$. Déterminer P_M.

Exercice 2. *(5 points)*

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \operatorname{tr}\left({}^tAA'\right)$, où $\operatorname{tr}\left({}^tAA'\right)$ désigne la trace du produit de la matrice ${}^tA$ par la matrice A'. On note

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donner la définition de cette notion.
2. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.
4. Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
5. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

Exercice 3. *(10 points)*

Soit n un entier naturel supérieur ou égal a 2. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
Soit I la matrice carrée identité d'ordre n, tel que $I = diag(1, 1, \ldots, 1)$.
Soit O la matrice carrée d'ordre n nulle.
Soit U la matrice carrée d'ordre n constituée uniquement de $<< 1 >>$, tel que $U = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $a_{i,j} = 1$.

Partie I

Soit E le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ engendré par I et U.

1. Montrer que E est un espace vectoriel de dimension deux sur $\mathbb{R}$.

2. Pour p entier naturel non nul donné, calculer U^p.
3. Montrer que E est stable pour la multiplication.
4. Soit $A = \alpha I + \beta U$ un élément de E.
   (a) Calculer A^p en fonction de α, β, p, I, U ; où p désigne un entier naturel non nul.
   (b) Calculer $\det A$.
   (c) A quelle(s) condition(s) portant sur α et β, A est-elle inversible ? Calculer alors l'inverse A^{-1} en fonction de α, β, I et U.

Partie II

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est U. Soit i l'identité de $\mathbb{R}^n$. Soit $p_0 = \frac{1}{n}u$ et $p_1 = i - \frac{1}{n}u$.

1. (a) Montrer que p_0 et p_1 sont des projecteurs.
   (b) Comparer $\ker p_0$ et $\operatorname{Im} p_1$ ainsi que $\ker p_1$ et $\operatorname{Im} p_0$. Donner la dimension de ces espaces.
   (c) Soit $\mathcal{B}'$ une base adaptée à la décomposition $E = \operatorname{Im} p_0 \oplus \ker P_0$. Former les matrices représentatives de p_0 et p_1 dans cette base $\mathcal{B}'$.
2. Soit A_0 la matrice de p_0 dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$, A_1 la matrice de p_1 dans cette même base. Montrer que (A_0, A_1) est une base de $E = \operatorname{Vect}(I, U)$.
3. Soit $A = \alpha I + \beta U$ un élément de E, β étant non nul.
   (a) Donner les composantes λ et μ de A dans la base (A_0, A_1).
   (b) Calculer A^p en fonction de λ, μ, p, A_0 et A_1.

EPO/CPGE/MPSI-1

Année Académique : 2021-2022
Module : Analyse I

Devoir d'Analyse I

: 04 heures

Exercice 1 : Nombres Réels, Fonctions Numériques et Suites Numériques (12 pts)

1 Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall a > 0,\ \exists! k \in \mathbb{Z} \mid ka \leqslant x < (k+1)a.$$

2 On considère les ensembles $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux parties de $\mathbb{R}$ définies par :

$$\mathscr{A} = \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{4}\right) : n \in \mathbb{N}^* \right\}; \qquad \mathscr{B} = \left\{ a + b\sqrt{2} : (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \right\}.$$

(a) Déterminer s'ils existent le **inf**, le **sup** ainsi que le **min**, le **max** de l'ensemble $\mathscr{A}$.

(b) On pose : $u = \displaystyle\sum_{k=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{k + \sqrt{k^2-1}}}$. Montrer que $u \in \mathscr{B}$

(c) On pose : $\theta = \sqrt{2} - 1$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\quad \theta^n \in \mathscr{B}$.

(d) En déduire que $\mathscr{B}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

3 **Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations** suivantes :

$$(E_1) : \left[\frac{x^2+1}{10}\right] + \left[\frac{10}{x^2+1}\right] = 1.$$

$$(E_2) : 2^{4\cos^2(x)+1} + 16 \cdot 2^{4\sin^2(x)-3} = 20.$$

4 **Equations Fonctionnelles & Inéquations Fonctionnelles**

(a) Donner l'exemple de deux fonctions numériques p et q telle que les suites numériques $(p(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q(n))_{n\in\mathbb{N}}$ soient adjacentes (on précisera leur limite). Justifier clairement votre réponse

(b) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifiant la propriété :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x + f(y)) = f(x+y) + f(y).$$

(c) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \geqslant 3f(x+2y+3z).$$

5 Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général u_n donné par :

(a) $u_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

(b) $u_n = \binom{n}{m}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}$ où : $\binom{n}{m} = C_n^m$.

Exercice 2 : Suites Numériques(05 pts)

I) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique vérifiant la relation :

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \text{ avec } m \geqslant n, \qquad u_{m+n} + u_{m-n} = \frac{1}{2}(u_{2m} + u_{2n}).$$

On suppose que $u_1 = 1$. **Calculer u_{2021}.**

II) **Théorème de Cesàro - Stolz**

Soient (x_n) une suite réelle et (y_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$, strictement croissante et non bornée.

(a) Montrer que : si $\dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors $\dfrac{x_n}{y_n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ell$.

(b) En déduire le théorème de la somme de Cesàro.

Rappel : Théorème (de somme/moyenne de Cesàro) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $(u_n)_n$ une suite réelle, et $(s_n)_n$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_n = \dfrac{u_0 + u_2 + \cdots + u_n}{n+1}$. Soit Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λ alors $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers λ.

(c) Que pensez vous de la réciproque du théorème de Cesàro ? Justifier clairement votre réponse !

III) **Une Application des Suites Numériques**

La première année de sa création une société de fabrication automobile a produit $P_1 = 450$ unités. La deuxième année, elle a produit $P_2 = 720$ unités. Soit P_n la production de l'année n. On suppose que la production évolue suivant le modèle suivant : pour tout entier n,

$$P_{n+2} = 3\Delta P_{n+1} + \frac{3}{4}P_n, \quad \text{où : } \Delta P_{n+1} := P_{n+1} - P_n \text{ désigne l'accroissement de la production de l'année } n+1.$$

(a) Déterminer la production annuelle P_n en fonction de n.

(b) En déduire le taux d'accroissement de la production $\dfrac{\Delta P_{n+1}}{\Delta P_n}$ et sa limite lorsque n tends vers $+\infty$.

Problème : Coupure de Richard Dedekind (1831 - 1916) (04 pts)

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x - 1$.

1) (a) Etudier la monotonie de f.

(b) Tracer le graphe de f dans un repère orthonormé du plan.

(c) Montrer que f n'admet pas de racine rationnelle.

2) Soit $A = \{r \in \mathbb{Q} : f(r) > 0\}$, $B = \{r \in \mathbb{Q} : f(r) < 0\}$ et $S = \left\{ r \in \mathbb{R} : \sqrt[3]{13r + 37} - \sqrt[3]{13r - 37} = \sqrt[3]{2} \right\}$.

(a) Montrer que $A \cap S \neq \varnothing$ et $B \cap S \neq \varnothing$.

(b) Montrer que $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = \mathbb{Q}$.

(c) Montrer que $\forall a \in A$ et $\forall b \in B$ $b < a$.

3) Montrer l'existence de $\inf A = \alpha$ et $\sup B = \beta$ dans $\mathbb{R}$ et de plus qu'elles vérifient : $0 < \beta \leqslant \alpha < 1$.

4) (a) Montrer que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$ $\exists b \in B$ tel que $0 < a - b < \varepsilon$. (b) En déduire que : $\alpha = \beta$.

5) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < x < y < 1$. Montrer que : $0 < f(y) - f(x) < 4(y - x)$.

6) Montrer que : $f(\alpha) \geqslant 0$ et $f(\beta) \leqslant 0$, puis Conclure !

..... FIN .....

Date : 21-12-2021.

EPO/CPGE/MPSI

Année Académique : 2021-2022
Module : Analyse I

Examen d'Analyse I

: 03 heures

Exercice 1 : Les Fondamentaux de l'Analyse I (08 pts)

1 Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\ln(x)}$; (b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(2x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin(x)-\cos(x)}$.

2 Fonctions Usuelles

(a) Soient $a, b\in\mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante ,

$$(E) : (\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(x))^{\mathrm{argsh}(x-a)} = (\mathrm{ch}(x)-\mathrm{sh}(x))^{\mathrm{argsh}(x-b)}.$$

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, le système :

$$(S)\begin{cases}\mathrm{argsh}(x)=2\mathrm{argsh}(y)\\ 3\ln(x)=2\ln(y).\end{cases}$$

3 Déterminer toutes les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation suivante : $(E) : 2021^{x^2}-2020^{x}=2022^{x^2}-2021^{x}$.

4 Soit OPE un triangle d'angle aux sommets $\widehat{O},\widehat{P},\widehat{E}\in]0;\pi[$. Montrer que :

$$\sin\left(\frac{\widehat{E}}{2}\right)e^{\cos\left(\frac{\widehat{E}}{2}\right)}+\sin\left(\frac{\widehat{P}}{2}\right)e^{\cos\left(\frac{\widehat{P}}{2}\right)}+\sin\left(\frac{\widehat{O}}{2}\right)e^{\cos\left(\frac{\widehat{O}}{2}\right)}\leq\frac{9}{2}.$$

5 Soit $\theta\in\mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\theta(0)\geqslant 0$; $\theta(1)\geqslant 0$ et $x\in[0,1]$, $\theta''(x)\leqslant 2(\sqrt{\theta(0)}+\sqrt{\theta(1)})^2$.
Montrer que θ est à valeurs positives.

Exercice 2 : Quelques Relations liant une Fonction Numérique et ses Racines (05 pts)

Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, avec $\alpha<\beta$, $n\in\mathbb{N}$, avec $n>1$, et $f:[\alpha,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$. On suppose qu'il existe une famille de réels $(x_i)_{1\leq i\leq n}$, vérifiant : $\alpha\leq x_1<x_2<\ldots<x_n\leq\beta$, tels que : $f(x_i)=0, \forall i\in\{1,\ldots,n\}$.

1. Montrer que : $\forall x\in[\alpha,\beta],\exists\theta\in[\alpha,\beta]$, $\quad f(x)=\frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$.
2. Montrer que : $\exists M\in\mathbb{R}_+^*,\forall x\in[\alpha,\beta]$, $\quad |f(x)|\leq\frac{M}{n!}\prod_{i=1}^{n}|x-x_i|$.
3. Montrer que : $\forall i\in\{1,\ldots,n\}$, $\quad |f'(x_i)|\leq\frac{M}{n!}\prod_{j\neq i}|x_i-x_j|$.
4. En déduire que : $\forall x\in[\alpha,\beta]$, $\quad |f'(x)|\leq\frac{M}{n!}\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j\neq i}|x-x_j|\right)$.
5. **Application** : Ecrire l'inégalité de 4. pour $n=2, x_1=\alpha$. et $x_2=\beta$.

Problème : Etude d'une Fonction Trigonométrique et de Suites Implicites (07 pts)

Soient f et g deux fonctions définies par : $g(x) = \dfrac{\cos(2x)+1}{2\cos(x)-1}$ et $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

$\boxed{\text{A}}$ Etude de la fonction g

(1) Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_g$ de g, puis montrer que g est au moins de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{D}_g$.

(2) Etudier la parité et la périodicité de g sur $\mathscr{D}_g$. En déduire un domaine réduit $\mathscr{R}_g$ pour l'étude de g.

(3) Etudier le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variation sur $\mathscr{R}_g$.

(4) Tracer la courbe $(\mathscr{C}_g)$ de g sur un intervalle de longueur 4π dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(5) Montrer qu'il existe $\delta > 1$ telle que : $\forall x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$, $|g(x)| \leqslant (2-\sqrt{2})|x| + \delta$.

$\boxed{\text{B}}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, le but de cette partie est d'étudier l'équation (E_n) en x sur $\mathbb{R}_+^*$ définie par : $(E_n) : f(x) = \dfrac{1}{n}$.

(1) i) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$; ii) Etudier ses variations ; iii) Déterminer son maximum.

(2) Tracer la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(3) Montrer que, pour $n \geq 3$, (E_n) possède une unique solution sur $[1; e]$ notée α_n.

(4) Dans le même repère que $(\mathscr{C}_f)$, tracer les droites $(D_3) : y = \dfrac{1}{3}$, $(D_4) : y = \dfrac{1}{4}$ et $(D_5) : y = \dfrac{1}{5}$.

(5) En déduire une conjecture sur le sens de variation de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 3}$.

(6) Déterminer le sens de variation de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 3}$.

(7) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ converge, puis déterminer sa limite.

(8) Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, l'équation (E_n) possède une autre solution β_n vérifiant :

$$1 \leq \alpha_n \leq e \leq \beta_n.$$

(9) Donner le sens de variation de la suite $(\beta_n)_{n\geq 3}$.

(10) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant 3 \implies \beta_n \geq n\dfrac{\beta_3}{3}$. En déduire la limite de la suite $(\beta_n)_{n\geq 3}$.

FIN

Date : 14 Février 2022.

Contrôle d'Analyse II

: 04 heures

Exercice 1 : Maniement et Connaissance des Concepts Fondamentaux d'Analyse II (06 pts)

$\boxed{1}$ Soient $a, b \in \mathbb{R}$ (avec $a < b$), $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ et f une fonction réelle continue sur $[a, b]$.

Montrer que il existe une fonction en escalier ξ sur $[a.b]$ telle que : $\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - \xi(x)| \leq \omega$.

$\boxed{2}$ Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (avec $0 < \alpha < \beta$). On pose : $I(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_\alpha^\beta \theta\sqrt{(\theta - \alpha)(\beta - \theta)}d\theta$.

(a) Montrer que : $\dfrac{\alpha(\beta - \alpha)^2\pi}{8} \leqslant I(\alpha, \beta) \leqslant \dfrac{1}{18}(\beta^3 - \alpha^3)(\beta - \alpha)^3$.

(b) Calculer $I(\alpha, \beta)$ *(on pourra commencer par le changement de variable suivant :* $t = \alpha + \beta - \theta$*)*.

$\boxed{3}$ Énoncer, puis démontrer rigoureusement le Théorème de CAUCHY pour les intégrales impropres.

$\boxed{4}$ Étudier la nature des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z\right) e^{\frac{1}{z}}}{\left(\ln(z^2 + z)\right)^2} dz$;

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\arccos(1 - x)} dx$.

$\boxed{5}$ Étudier la nature des séries numériques suivantes et calculer leur somme en cas de convergence :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} 2021^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(\frac{2021}{2022}\right)^k$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(2^{n+1}3^{2-n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right)$.

$\boxed{6}$ Déterminer les fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation :

$$\begin{vmatrix} f' & f'' & f \\ f'' & f & f' \\ f & f' & f'' \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 2 : Restitution Organisée de Connaissances (06 pts)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $g \in \mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$, et $f \in \mathscr{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$. Pour tout $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on considère :

$$a_n = \int_0^1 g(t)t^n dt \qquad \text{et} \qquad b_m(\alpha) = \frac{1}{m^\alpha} \int_0^{\frac{1}{m}} g(t^m)dt.$$

(1) Calculer la limite de la suite de terme générale : $u_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n+1}\right) f'\left(\frac{k+1}{n+1}\right)$;

(2) Pour $0 < \alpha < 1$, on pose $a_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^\alpha g(t)t^n dt$. Montrer que la série $\sum a_n(\alpha)$ converge vers $\displaystyle\int_0^\alpha \frac{g(x)}{1 - x} dx$

(3) On suppose que $g(1) \neq 0$.

a) Montrer que si $g(1) > 0$, alors il existe $\beta \in]0,1[$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n \geqslant a_n(\beta) + \frac{g(1)}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{\beta^n}{n}\right)$.

b) En déduire la nature de la série $\sum a_n$?

(4) Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par : $g(0) = 1, \quad g(1) = 0,$ et $\quad g(x) = \frac{-x}{\ln(1-x)} \quad$ si $x \in]0,1[$.

Montrer que $g \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R}_+)$, puis étudier la nature de la série $\sum a_n$ (associée à cette fonction g).

(5) Montrer que si g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ alors la série $\sum a_n$ converge si et seulement si $g(1) = 0$.

(6) On suppose que $g(0) \neq 0$. Étudier la nature de la série $\sum_{m \in \mathbb{N}^*} b_m(\alpha)$.

Problème : Étude d'une Fonction Intégrale (08+10%(**Bonus**):= 10 pts)

Soient un réel x et p un entier strictement positif, on pose : $M_p(x) = \int_0^x \frac{dt}{\text{ch}^p(t)}$.

1°) Calculer $M_1(x)$ et $M_2(x)$.

2°) Étudier la fonction $M_1 : x \longrightarrow M_1(x)$ (on tracera sa courbe dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$).

3°) (a) Trouver une relation entre $M_{p+2}(x)$ et $M_p(x)$ (on pourra faire des intégrantions par parties).

(b) En déduire $M_3(x)$ et $M_4(x)$.

4°) On considère la fonction $M_p : x \longrightarrow M_p(x)$.

(a) Étudier la parité et la périodicité de la fonction M_p.

(b) Démontrer que M_p est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

5°) Montrer que la dérivée première de M_p est une solution de l'équation différentielle suivante :

$$(E) : \text{ch}^2(x)y'' + \frac{p}{2}\text{sh}(2x)y' + py = 0.$$

6°) Donner le développement limité de M_p d'ordre 3 au voisinage de 0.

7°) Étudier le sens de variation de M_p.

8°) On se propose, pour p fixé, d'étudier la convergence de la suite $(I_n)_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = M_p(n)$.

(a) Démontrer que la suite $(I_n)_n$ est monotone.

(b) Démontrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{\text{ch}(t)} \leq 2e^{-t}$. En déduire la nature de la suite $(I_n)_n$.

9°) On pose, sous réserve d'existence, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $J_n = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{dt}{\text{ch}^n(t)}$. On posera $J_n := \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\text{ch}^n(t)}$.

(a) Démontrer l'existence de J_n.

(b) Calculer : i)J_1 ; ii) J_2 ; et iii) J_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

FIN

Date : 20 Juin 2022.

EPO/CPGE/MPSI

Année académique : 2021-2022
Module : Analyse I

Contrôle de Routine I autour des Éléments de TD1 (CdR1-MPSI1)

Durée : 35 min.

Exercice 1 : Minimum Vital (12 pts)

1. Montrer que $\eta = \sqrt[3]{27+6\sqrt{21}} + \sqrt[3]{27-6\sqrt{21}}$ est un entier naturel.
2. ~~Montrer que l'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.~~
3. Montrer que l'ensemble $\{\sqrt{q}-\sqrt{p} : p, q \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
4. Déterminer **inf**, **sup**, **min**, et **max** de l'ensemble $\mathscr{E} = \{\cos(\theta+\varphi) + \sin(\theta) - \sin(\varphi) : (\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^2\}$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\mathcal{S}(n) = \displaystyle\sum_{m=1}^{n} \frac{2m+1}{(m+m^2)^2}$. Résoudre l'équation : $\mathcal{S}(n) = 0{,}9999$.
6. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système d'équations suivant : $\begin{cases} x+[y]+\{z\} &=& 200; \\ \{x\}+y+[z] &=& 190{,}1; \\ [x]+\{y\}+z &=& 178{,}8. \end{cases}$
7. Soit $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{\xi}{\xi^2+\xi+1} = \theta$. Déterminer en fonction de θ la quantité $\dfrac{\xi^2}{\xi^4+\xi^2+1}$.

Exercice 2 : Quelques Inégalités (02pts)

Soit $n \geqslant 2$ et $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, n réels strictement positifs. Montrer que :

① Si $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\sqrt{x_k} = 1011$ alors $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \geqslant 2^{n-1}2022$.

② $$\left(\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{x_k}\right)^2 \leqslant \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right).$$

Exercice 3 : Sur les fonctions périodiques (06pts)

1. Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$\boxed{1}$ $\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x) = \cos(x) + \cos(x\sqrt{2})$;

a. Montrer que g n'est pas périodique.

$\boxed{2}$ $\forall x \in \mathbb{R},\quad f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + \sqrt{f(x)-f(x)^2}$.

b. Montrer que f est $\pi-$périodique.

Exercice 4 : Pre-test sur les suites numériques (Bonus 10%:=+02pts)

1. Qu'est ce qu'une suite numérique ?
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite numérique définie par : $a_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 1,\quad a_{n+1} = \sqrt{24a_n + 2021}$.
Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, alors quelles sont les valeurs possibles de sa limite ?

Date : 08 Novembre 2021.

EPO/CPGE/MPSI

Année académique : 2021-2022
Module : Analyse I

Contrôle de Routine II (CdR2-MPSI1)

Durée : 40 min.

Exercice 1 : Minimum Vital (12 pts)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists d \in \mathbb{D} \mid |x-d| \leqslant \varepsilon)$. Que peut - on en déduire ?
2. Montrer que l'ensemble $\{a^3 : a \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'ensemble $\{\sqrt{q} - \sqrt{p} : p, q \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
4. Si une suite d'entiers converge, elle est stationnaire à partir d'un certain rang.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $(E) : [\sqrt{x}] = [\sqrt{[x]}]$;
6. Soient $e, p, o \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\left(\frac{e}{2} + \frac{p}{3} + \frac{o}{6}\right)^2 \leqslant \frac{e^2}{2} + \frac{p^2}{3} + \frac{o^2}{6}$.

Exercice 2 : Equation Fonctionnelle & Inéquation Fonctionnelle (03pts)

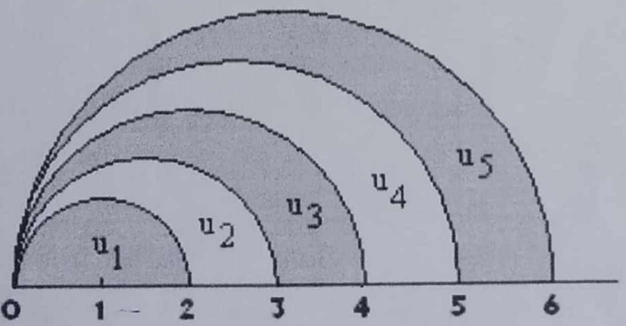
1. Trouver toutes les fonctions bijectives $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la propriété : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x^2) - (\varphi(x))^2 \geqslant \frac{1}{4}$.
2. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, f((x-y)^2) = f(x)^2 - 2xf(y) + y^2$.

Exercice 3 : Suites Numériques (05pts)

$\boxed{\text{A}}$ Calcul la limite de la suite (u_n) de terme générale : (i) $u_n = n\ln(1 + \frac{1}{n})$; (ii) $u_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} E\left(\frac{k}{\sqrt[3]{2}}\right)}{(n+2)^2}$.

$\boxed{\text{B}}$ Maniement des suites des références :

1) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $a_0 = 1,\ a_1 = 2$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$. Calculer a_{2021}.
2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des aires définies par la figure ci-dessous est arithmétique.



 Date : 19 Novembre 2021.

EPO/CPGE/PCSI/1A

Année académique : 2020-2021
Module : Analyse II

Pré-test d'Analyse II (CdR5-PCSI-1C)

Durée : 25 min.

Exercice 1 : Minimum Vital (sur les intégrales)

1. Qu'est-ce qu'une intégrale (en Mathématique) ?
2. Quelles sont techniques d'intégration que vous connaissez ?
3. Quelle est la valeur moyenne de la fonction $\varphi : x \longmapsto x - [x]$ sur le segment $[2020; 2021]$?
4. **Application :** `De très Bon Souvenir des Années du Lycée`
   (a) Calcul l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{1-\frac{1}{e}} (x-1)\ln(1-x)dx$ *(d'après BAC D 2020 (Burkina Faso))*
   (b) Pour tout $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on définie la fonction $f_m : x \longmapsto \dfrac{2(1-m)e^x - m - 1}{(m-1)e^{2x}}$, $(\mathcal{C}_m)$ sa courbe dans un repère orthonormé du plan.
   Calcul la limite suivante : $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$, où $A(\lambda)$ est l'aire du domaine plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_{-2})$, l'axe des ordonnées, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ (d'après BAC C 2020 2nd Tour (Burkina Faso)).

Exercice 2 : Intégrale, inégalité et suite numérique

On considère la suite numérique $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[n]{\sin(t)}dt.$

Déterminer la limite de la $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 3 : Equation Différentielle Linéaire d'ordre 1 (CIAM TSM : Chap 15, page-323, exo 1.a)b))

Résoudre sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ l'équation différentielle suivante : $x^3y' + x^2 + 1 = 0$.

Pré-test d'Analyse II (CdR4-MPCSI-)

Durée : 20 min.

Exercice 1 : Minimum Vital

1. Calculer les Intégrales suivantes :

   (a) $I_1 = \int_{-1}^{0} t\sqrt{|t|}dt\,;$ (b) $I_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}}d\theta\,;$ (c) $I_3 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx.$

2. **Application du Calcul Intégral**

   Calculer l'aire du domaine plan délimité par les droites d'équation $x = 0$, $x = 2$ et les courbes d'équation $y = 2^x$ et $y = 2x - x^2$.

Date : 02 Mars 2021.

Contrôle de Routine VI (CdR6-MPCSI-1A)

Durée : 40 min.

Exercice 1 : Questions de Cours (06 pt)

1. Énoncé clairement et rigoureusement le Théorème d'Abel pour les intégrales impropres. (1 pt)
2. Donner la forme générale d'une équation différentielle de type Riccati, et donner la procédure de résolution. (1,5 pt)
3. Donner l'exemple d'une série numérique absolument convergente vers $\sqrt{\pi}$. (0,5 pt)
4. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)$. (1,5 pt)
5. Étudier la nature de la série : $\sum_{n\geqslant 1}^{n} \frac{1}{\operatorname{ppcm}(1,\cdots,n)}$. (1,5 pt)

Exercice 2 : Sur les Intégrales (08 pts)

1. Calculer la primitive : $F(x) = \int \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}\,dx$, pour $x \in]0;1[$. (2 pts)
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Étudier la nature des intégrales impropres :

$$\int_0^1 \frac{dz}{\arccos(1-z)}, \quad \text{(2pts)} \qquad \int_1^{+\infty} \left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} - a - \frac{b}{x}\right) dx. \quad \text{(2pts)}$$

3. Soit $\varepsilon \in]-1,1[$. Étudier la nature des intégrales et calculer leur valeur en cas de convergence :

Poser $t = \frac{1}{u}$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{u^2-1}{(1+u^2)\sqrt{1+u^4}}du\,, \quad \text{(2pts)} \qquad \delta(\varepsilon) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1-\varepsilon\cos(t)}. \quad \text{(2pts)}$$

Poser $t = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$

Exercice 3 : Équation différentielle (07 pts)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $(E_1) : y'' + 2y' + y = 4xe^x$; (3pt)

b) $(E_2) : (y'-y)\cos(x) + y(2\cos^2(x) + \sin(x)) = \cos^3(x)$. (4pt)

Bonne Chance!

Date : 04 Mai 2022.

Ecole Polytechnique de Ouagadougou (**EPO**) Année universitaire 2021-2022
(CPGE Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles)
Epreuve d'anglais du S 1 Durée : 2 heures

Read the following text very carefully and then answer the questions that follow:

Turn on television news and there is a fifty-fifty chance the programme will be presented by a woman. Off screen, however, the picture is less egalitarian. (en dehors) hors de l'écran, l'image est moins égalitaire

A survey of broadcasting institutions throughout the European Community has revealed that seventy per cent of employees are men and that three out of five women who do work in television and radio hold secretarial or clerical jobs.

Fewer than one in ten senior production staff are women and all but a tiny minority of policy-making posts are held by men. "Of forty-five organizations monitored in 1988 only sixteen had any women at this level," said Ms Gallagher, coordinator of the European Community's committee for equal opportunities in broadcasting.

"The increased presence of women on the screen should not blind us to the fact that, behind the scenes, it is proving hard to break down the entrenched barriers that still confront women hoping for a successful career." For example, although women account for a third of all TV journalists, they make up just thirteen per cent of editors and eight per cent of correspondents.

But Ms Gallagher pointed out that British television companies were to be counted among "the progressives." The BBC, regarded throughout much of Europe as a standard setter, has been influential with its recent high-profile commitment to equal opportunities.

And a review of employment policies amongst European broadcasters carried out this year has revealed a "dramatic" change of attitude.

The numbers of established companies were no demonstrating "much greater understanding of the concrete, positive steps needed to implement equal opportunities policies," Ms Gallagher said in *Airwaves*, the IBA journal.

In contrast, however, the "new" channels are giving little or no priority to equal opportunities. Thirteen newly launched stations in eight countries have so far responded to the EC's 1990 equal opportunities survey.

Ms Gallagher admits there may be no need since they are not "saddled with archaic employment practices." But she said: "If we look at the output of most of these newer companies, the change now taking place in European broadcasting does not augur well for women."

The "commercial television ethic" and the drive for raw profit had produced time programmes such as "Sexy Follies" (TF1) and "Pin-Up-Club" (RTL). Whatever they do for women on the screen, such programmes are unlikely to be helpful to women backstage.

Adapted from The Guardian

I. Comprehension (7 pts)

Answer the following questions:

1. Find an appropriate title for the text, and justify your choice (2 points)
2. What does the text say about new and old broadcasting companies on the issue of employing women? (2 points)
3. According to you, why are programmes like "Sexy Follies" and "Pin-Up-Club" unlikely to be helpful to women backstage? (1 point)
4. Use your own words to explain the following words or expressions (2 points):

a) the entrenched barriers; b) progressives; c) standard setter; d) Off screen, the picture is less egalitarian.

II. Language practice

A) Use the correct form of the verbs in brackets (6 pts):

- He (lose) his new knife shortly after he (buy) it; will lose , bought
- The patient (die) by the time the doctor (arrive); died / arrives.
- He (begin) to read as soon as he (find) the appropriate page; has begun to read as soon as he has found the
- When he (leave) the house, he (forget) to take his wallet; left / forgot
- What you (do) when I (knock) at the door; wer you doing knocked
- We (not to play football) yesterday. The match (cancel)?

didn't play had been canceled

B) Copy the following paragraph choosing the appropriate verbs underlined (4 pts):

It's June. Nice weather arrived/has arrived, and along with it, thoughts of barbecues. Are you thinking/Do you think of having one? Have you ever wondered about the origin of the term? According to Jeff Smith, the term *barbecue* is not strictly an American one, but only Americans "…barbecue/are barbecuing. The rest of the world simply cooks/is cooking meals over a fire." People dispute / are disputing the origin of the name. Smith continues / is continuing: "some researchers claim / are claiming that the word comes / is coming from Spanish and Haitian origin…"

III. Translation (3 points)

- A survey of broadcasting institutions throughout the European Community has revealed that seventy per cent of employees are men and that three out of five women who do work in television and radio hold secretarial or clerical jobs.
- Fewer than one in ten senior production staff are women and all but a tiny minority of policy-making posts are held by men.

Ecole Polytechnique de Ouagadougou (EPO)
(CPGE Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles)

Année universitaire 2021-2022

Epreuve d'anglais du S 1

Durée : 2 heures

The New Masters of Management

Thirty years ago, the bosses of America's car industry were shocked to learn that Japan had overtaken America to become the world's leading car producer. They were even more shocked when they visited Japan to find out what was going on. They found that the secret of Japan's success did not lie in cheap labor or Japanese government subsidies, but in what was rapidly called "lean or small manufacturing". While America slept, Japan had transformed itself from a low-wage economy into a main center of business innovation.

secret of Japanese's car industry

Management executives are always proclaiming revolutions. What happened in Japan is similar to the advent of mass production in American a century ago. Now something comparable is taking place in the developing world.

It is now common to say that the world's center of economic gravity is shifting toward emerging markets. Buy a mobile phone and it will almost certainly have been made in China. Use it to phone a customer helpline and your call may well be answered by an Indian. Over the past five years China's annual growth rate has been more than 10%, and India's more than 8%. Yet these figures do not say much about the change that is taking place. Emerging countries are no longer satisfied to be sources of cheap labor hands and low-cost brains. Instead, they too are becoming main centers of innovation, producing new technologies in everything from telecoms, to car-making, to health care. They are redesigning products to reduce cost not just by 10%, but by up to 90%. They are redesigning entire business processes to do things better and faster than their rivals in the West. The world of business is turning upside down.

The rich world is losing its leadership in the sort of innovative ideas that transformed industries. This is partly because rich-world companies are doing more research and development in emerging markets… Even more striking is the emerging world's growing ability to make established products even at dramatically lower costs: $3,000 cars and $300 laptops that promise to change far more people's lives. This sort of advance, called "frugal innovation" by some, is not just a matter of exploiting cheap labor. It is a matter of redesigning products and processes to cut out unnecessary costs. In India, Tata created the world's cheapest car, the Nano, by combining dozens of cost saving tricks. Bharti Airtel slashed the cost of providing mobile-phone services by radically rethinking its relationship with its competitors and suppliers.

Entrepreneurs in the developing world are applying the classic principles of division of labor and economies of scale to surprising areas such as heart-operations and cataract surgery, reducing price without sacrificing quality. They are using new technologies such as mobile phones to bring sophisticated services, in everything from health care to banking, to rural communities. And they are combining technological and business-model innovation to produce entirely new categories of services.

Adapted from *The Economist*, April 17th 2010

labor : main-d'œuvre

cheap : moins cher

I) Guided Commentary

A) Say whether each of the following statements is true or false, according to the text: (2 pts)

1. America's car industries were pleased to be overtaken by Japan's car industries; F
2. Innovation is one of the strengths of America's car industry; F
3. The developing world is against the advent of mass production; F
4. Emerging markets are becoming less and less important. F

B) Answer the following questions:

1. According to the text, what is at the basis of the success of Japan's car industry? (2 pts);
2. What shows in the text that economic gravity is shifting? (3 pts);
3. How does the text explain the growing ability of the emerging world (3 pts).

II) Vocabulary (3 pts)

Complete the following sentences using the correct form of the given expressions:

interview	vacancies	job descriptions	Curriculum Vitae	references
apply	application	applicant	application form	interview

Many people looking for work read the .... pasted by the companies and also..... (references) in newspapers or on the Internet. To reply to a job advertisement is to apply. for a job. You become an.applicant... for that job. You either write an.appli.. or fill out the company's.appl. form...... and send it along with your. C.V.....You often have to give the names of two persons who are willing to act as....... (Vacancies) for you. If your qualifications match the...... (job descript.) you might be called for an. interview.

III) Language practice (2 pts)

Use the correct form of the verbs in brackets:

1. They (not to see) a newspaper since they got out of prison; have not seen
2. We (to make up our minds) when the time (to come); I'll make will be come
3. If you (to tell) them where to place the key we (to find) it by now; had told should have found it
4. We (to wait) for you for two hours yesterday evening. have been waiting

IV) Translation the following sentences into French

-Developing world entrepreneurs are using new technologies such as mobile phone to bring sophisticated services to rural communities (1 pt.);

-Even more striking is the emerging world's growing ability to make established products at far dramatically lower costs (1 pt.);

-It is now common to say that the world's center of economic gravity is shifting toward emerging markets (1 pt.).

Ecole Polytechnique de Ouagadougou (**EPO**) Année universitaire 2021-2022
(CPGE Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles)

Epreuve d'anglais du S 2 Durée : 2 heures

Read the text very carefully and then write a précis of it, providing it with a title and indicating the number of words at the end; a margin of 10% is allowed:

Loneliness affects people of all ages, young as much as old. It's now seen as so serious it's classified as a public health problem. It's presented as an "epidemic" causing a wide range of health problems that threaten to cripple health services.

In response to this perceived crisis the UK government has even created a minister for loneliness to roll out its loneliness strategy. This proposes a range of approaches that usually involve encouraging people to become more involved in their families and communities.

But researchers from the US are working on a more radical solution to the perceived contemporary problem of loneliness: a pill. The rationale for this work is that loneliness negatively affects how our brains and other systems in the body work and that drug treatments could help prevent or reduce this effect. The researchers argue that this might not solve the underlying problem, but at least it would help limit its effects. In the meantime, we can look for deeper solutions that address the fundamental issue for lonely people, which is their lack of meaningful relationships.

In this way, loneliness is being equated with medical conditions such as depression and anxiety by suggesting a similar pharmacological treatment. The problem is that the analogy is clearly limited and, ultimately, this approach seeks to unnecessarily medicalize a normal part of the human experience.

Anxiety and depression are mental health disorders that can have a variety of emotional and physiological causes. Loneliness, on the other hand, is caused by social problems related to our (lack of) interactions with other people.

Depression and anxiety also have clear clinical and diagnostic signs and symptoms, with established ways to screen for and diagnose it. But there is no established process to clinically identify lonely individuals. Even working out how you define what counts as being so lonely that it becomes a medical problem is difficult.

Because loneliness isn't a medical condition, we should be wary of such well-intentioned developments that over-simplify the complex nature of loneliness. Going straight to a pill with inevitable side effects seems premature when we still need to deepen the evidence base on the link between loneliness and brain health. And by only tackling the physical and physiological aspects of loneliness, we ignore other negative effects such as low wellbeing and quality of life. [...]

The other thing to consider is that we only ever describe loneliness as a negative experience, something to fear, and rarely ask if there might be a positive side to it. Evidence from the BBC Loneliness Experiment, which surveyed 55,000 people, suggests that loneliness can prompt people to improve their relationships and seek out new ones.

The solution to loneliness lies not in doling out a pill and turning an important human experience into something needing medical treatment, but in creating communities and opportunities that enable people to build positive social relationships.

To date, we don't know how best to do this. Many ways have been proposed for tackling loneliness including using robots or animals such as chickens as companions, or taking up physical activity. Intervening to help someone feel less lonely can be done online or face-to-face, in groups or on an individual basis. What unites these different interventions is that they are all focused on developing meaningful social relations. This seems a more humane and appropriate way to intervene to combat loneliness than resorting to pills. (565 words)

x loneliness : solitude

Ecole Polytechnique de Ouagadougou (EPO) Année Académique 2021 - 2022

Classes Préparatoires d'entrée dans les Grandes Ecoles (CPGE) Classe : MPSI

Niveau L1, Semestre S1 ; Durée : 2 heures 00 minute

DEVOIR DE CHIMIF : Atomistique

Exercice. 1

On considère deux éléments X et Y de la quatrième période de la classification périodique dont la couche de valence comporte cinq électrons avec trois célibataires.

1. Représenter par les cases quantiques les configurations électroniques possibles de X et Y à l'état fondamental. Déterminer leurs numéros atomiques.
2. Sachant que Y possède le numéro atomique le plus petit des deux, déterminer à quel groupe appartient ces éléments.
3. Donner la configuration électronique du gaz rare le plus proche de X et en déduire, la charge que doit porter X pour qu'il soit iso-électronique avec ce gaz rare.
4. L'élément Y peut donner deux cations Y^{2+} et Y^{5+}.
   i. Ecrire la configuration électronique de ces cations
   ii. En justifiant votre réponse, déterminer l'ion le plus stable.
5. Les valeurs 0,92, 1,08 et 1,39 correspondent aux rayons atomiques (en Å) des éléments N (Z=7), X (Z= ?) et P (Z=15). Attribuer à chaque atome, la valeur de son rayon atomique.

Exercice 2.

1) Donner la notation de Lewis des molécules ou ions moléculaires suivants puis prévoir leur géométrie à partir de leur notation VSEPR de type AX_mE_n : ClF_3, SO_2Cl_2, NO_3^-, $AlCl_4^-$, PO_4^{3-}

2) Identifier les molécules ou ions qui ne respectent pas la règle de l'octet et justifier le cas échéant.

3) Expliquer en utilisant le formalisme des cases quantiques, pourquoi il existe les composés PCl_3 et PCl_5 alors qu'il n'existe que le composé NCl_3.

4) Expliquer le mécanisme de formation de l'ion $AlCl_4^-$ en précisant le type de liaison en jeu.

4) De la notation de Lewis de NO_3^-, déduire celle de la molécule HNO_3 en mettant en évidence le type de liaison chimique mis en jeu.

On donne F (Z=9), O (Z=8), N (Z=7), P (Z=15), S (Z=16), Cl (Z=17) Al (Z=13)

Exercice 3

On étudie la molécule mononucléaire S_2 présente dans sa valeur de soufre.

1) Écrire en utilisant les cases quantiques, la configuration électronique du soufre $_{16}S$

2) Quelles orbitales moléculaires dans la molécule S_2, peut-on former en combinant les orbitales atomiques décrivant les électrons de valence des deux atomes de soufre?

3) Préciser, à l'aide d'un diagramme les niveaux d'énergie ces orbitales moléculaires et la configuration électronique de S_2 sachant que dans la molécule de disoufre S_2, l'ordre des niveaux d'énergie est : $\sigma_{3s} < \sigma_{3s}^* < \sigma_{3px} < \pi_{3pz} = \pi_{3py} < \pi_{3pz}^* = \pi_{3py}^* < \sigma_{3px}^*$

4) Quelles propriétés physiques ou chimiques de cette molécule pouvez- vous en déduire ?

5) Calculer l'indice de la liaison dans la molécule de disoufre.

6) On considère l'ion S_2^{2-}, comparer les indices de liaison et les longueurs de liaisons de cet ion et de la molécule de S_2. Pourquoi l'ion S_2^{2-} et la molécule S_2 n'ont pas les mêmes propriétés magnétiques ?

N.B : Le tableau de classification périodique n'est pas autorisé

Bon courage !

UNIVERSITE Joseph ZI-ZERBO Année Académique 2019- 2020

UNITE DE FORMATION ET DE RECHERCHE Durée : 2 heures

EN SCIENCES DE LA VIE ET DE LA TERRE

Niveau L1, Semestre S1 ; 2ème Session

DEVOIR DE CHIMIE [redacted]

Exercice 1. (5 pts)

Choisir la bonne réponse

1) La notation VSEPR de la molécule d'ammoniac est

a) AX_2E_4 b) AX_3E_1 c) AX_1E_3 d) AX_4

2) Le nombre d'électrons du fer sur sa couche de valence est :

a) 4 b) 6 c) 8 d) 26

3) Dans l'espace, l'ion ammonium a une forme :

a) Triangulaire b) tétraédrique c) Plane d) Pyramidale

4) Le pourcentage ionique de LiH dont le moment dipolaire est $1,96 .10^{-29}$ C. m et la distance interatomique dans cette molécule est de 1,596 Å, est :

a) 20,25% b) 67,67% c) 76,76% d) 75%

5) Le caractère covalent de la liaison Li-H est :

a) 25% b) 23,23% c) 32,33 % d) 79,75%

Exercice. 2 (4 pts)

Le ^{32}P est utilisé dans les études biochimiques pour déterminer le chemin suivi par l'atome de phosphore dans les organismes vivants. Sa présence est détectée par l'émission de particules β^- avec une demi- vie de 14,5 jours.

a) Quelle est la constante radioactive du ^{32}P (en s^{-1}) ?

b) Quelle est l'activité d'un échantillon de 1,00 mg de ^{32}P ?

c) Quelle masse de ^{32}P se trouve dans l'échantillon au bout de 57 jours ?

d) Quel est le taux de dégénérescence radioactive après 57 jours ?

Exercice 3. (4 pts)

L'étude du spectre d'émission de rayon X d'un métal a permis de déterminer la différence d'énergie des niveaux K et L de ses électrons égale à 62062 eV.

a)Quelle est la valeur de la longueur d'onde de la raie Kα ?

b) La constante d'écran σ=1 pour la série des raies K. Quelle est la valeur du numéro atomique ?

On donne $R_H = 1,1.10^7\ m^{-1}$ et $e = 1,6.10^{-19}$ C

Exercice 4 (7 pts)

1) Tracer le diagramme d'énergie de la molécule de O_2 sachant que (OX) est l'axe internucléaire et l'orbitale σ_{2px} a une énergie plus grande que les orbitales π_y et π_z .

2) Donner la configuration électronique de la molécule de O_2 et son indice de liaison

3) En déduire la configuration électronique et l'indice de liaison de chacun des ions moléculaire suivants : O_2^+, O_2^- et O_2^{2-}. Comparer les indices de liaison.

On donne O (Z=8)

N.B : Le tableau de classification périodique n'est pas autorisé

Bon courage !

Ecole Polytechnique de Ouagadougou (EPO) Année Académique 2021 - 2022

Classes Préparatoires d'entrée dans les Grandes Ecoles (CPGE) Classe : MPSI

Niveau L1, Semestre S1 ; Durée : 2 heures

EXAMEN DE THERMOCHIMIE

Questions de Cours (6 pts)

1) Enoncer le premier principe de la thermodynamique et donner ses trois (03) conséquences.
2) Enoncer la Loi de LECHATELIER
3) Enoncer le troisième principe de la thermodynamique et donner sa conséquence
4) Donner la relation de KIRCHOFF dans le cas où il n'y a pas de changement d'état
5) Indiquer la ou les fonctions d'état parmi les grandeurs suivantes :

a) Longitude de Ouaga b) Consommation d'un motocycle

c) Distance Ouaga-Bobo par la route d) Age du président du Faso

Exercice 1 (4 pts)

L'éthanol est le constituant de base du gel hydro alcoolique utilisé pour la désinfection des mains comme un des gestes barrières dans la lutte contre la COVID-19. La réaction de sa formation est :

$$C_2H_4\,(g) + H_2O\,(g) \longrightarrow C_2H_5OH\,(g)$$

Calculer l'enthalpie standard de cette réaction :

a) A partir des enthalpies molaires standards de formation
b) A partir des énergies de liaison
c) Donner une explication aux résultats trouvés

On donne :

Enthalpie de formation à 298 K: $\Delta H^o_f\,(C_2H_4, g) = 33{,}6\ kJ.mol^{-1}$ $\Delta H^o_f\,(H_2O, g) = -242{,}4\ kJ.mol^{-1}$

$\Delta H^o_f\,(C_2H_5OH, g) = -275{,}9\ kJ.mol^{-1}$

Energie de liaisons : $E_{H\text{-}H} = 434{,}7\ kJ.mol^{-1}$ $E_{C\text{-}H} = 413{,}8\ kJ.mol^{-1}$ $E_{C\text{-}C} = 263{,}3\ kJ.mol^{-1}$

$E_{O\text{-}H} = 459{,}8\ kJ.mol^{-1}$ $E_{C\text{-}O} = 313{,}5\ kJ.mol^{-1}$ $E_{C=C} = 611{,}8\ kJ.mol^{-1}$

Exercice 2. (6 pts)

A température fixée et P = 1 atm, on réalise l'équilibre suivant :

$$4\,HCl\,(g) + O_2\,(g) \rightleftharpoons 2\,H_2O\,(g) + 2\,Cl_2\,(g)$$

a)Calculer les pressions partielles à l'équilibre de chaque constituant de la réaction et la constante Kp sachant que, en mélangeant initialement 4 volumes d'air à 1 volume de HCl, on obtient à l'équilibre une pression partielle d'oxygène $P_{O2} = 2\,P_{Cl2}$ (l'air contient 4/5 d'azote)

b) Prédire qualitativement le déplacement de l'équilibre pour 4 volumes de O_2 au lieu d'air

c) Dans quel sens se déplace l'équilibre si à T et P constantes, on ajoute à l'équilibre de l'argon dans le récipient ?

Exercice 3 (4 pts)

Calculer la variation d'entropie de la réaction d'hydrogénation de l'acétylène en éthane selon la réaction :

$$C_2H_2(g) + 2H_2(g) \rightarrow C_2H_6(g)$$

a. A 298 K
b. A 350 K

On donne :

	C_2H_2 (g)	C_2H_6 (g)	H_2 (g)
S° ($J.K^{-1}.mol^{-1}$)	200,8	229,5	130,6
Cp ($J.K^{-1}.mol^{-1}$)	46,6	57,2	29,0

Bon courage !

EPO/CPGE

Année académique 2021-2022
Session normale

MPSI

EPREUVE de l'équilibre en solution

Durée : 02 heures

Exercice1 : (5 points)

Définir la notion de diagramme de prédominance à partir d'un couple acide faible, base faible conjugués AH/A^- caractérisé par son pk_a. A quelle condition sur le pH, une des deux formes est-elle négligeable devant l'autre ?

Exercice 2 : (5 points)

Certains hydroxydes tels que $Zn(OH)_{2(s)}$ sont amphotères, expliquer cette appellation. A une solution de chlorure de zinc $ZnCl_2$ (sel soluble) de concentration $C=10^{-2}$ mol. L^{-1} on ajoute de la potasse solide KOH. Déterminer le pH d'apparition du précipité. Si le pH de la solution continue d'augmenter le précipité disparait. Interpréter. Calculer le pH de disparition du précipité pK_s ($Zn(OH)_{2(s)}$) =17 et $\log\beta_4([Zn(OH)_4]^{2-})$ = 15,5.

Exercice 3 : (6 points)

Donner les représentations schématiques les piles correspondants aux réactions ci-dessous, indiquer la polarité des électrodes et le sens du courant extérieur.

1- $Cu + 2\,Ag^+ \longrightarrow 2\,Ag + Cu^{2+}$
2- $MnO_4^- + 5\,Fe^{2+} + 8H^+ \longrightarrow Mn^{2+} + 5\,Fe^{3+} + 4\,H_2O$

Calculer la f.e.m de ces piles dans les conditions standards.

$E°(Cu^{2+}/Cu)$ = 0,34 V $E°(Ag^+/Ag)$ = 0,80 V ; $E°(MnO_4^-/ Mn^{2+})$ = 1,50 V ; $E°(Fe^{3+}/Fe^{2+})$= 0,77V.

Exercice 4 : (4 points)

On oxyde du cuivre par de l'acide nitrique HNO_3 : la réaction est violente et s'accompagne d'un dégagement de vapeurs rousses. Ecrire la réaction qui se produit, calculer sa constante. A quel gaz sont dues les vapeurs rousses ? A quelle espèce attribue-t-on la couleur bleue de la solution ?

$E°(NO_3^-/ NO_{(g)})$ = 0,96 V ; $E°(Cu^{2+}/ Cu)$ = 0,34 V.

École Polytechnique de Ouagadougou — Année académique 2021-2022
Classes préparatoires aux Grandes Ecoles
MPSI et PCSI - Semestre 1

DEVOIR
Épreuve de français
Date : 8 janvier 2022

SUJET (20 points)

Exercice 1 : Faites accorder le verbe entre parenthèses dans les phrases suivantes (Le choix du temps du verbe est libre) (5 points)

1. La dizaine de régimes qui (se succéder) (ne pas réussir) à éradiquer la pauvreté.
2. Plus d'une personne (se rappeler) ce qui s'est passé ce jour-là.
3. Ni vous ni lui ne (s'expliquer) la situation.
4. Nous sommes cinq étudiants qui (décider) de partir à l'École spéciale militaire de Saint-Cyr.
5. La plupart (s'inscrire) sur la plateforme de notre université en octobre.
6. Il (se raconter) d'étranges histoires sur la présence des réfugiés en ce lieu.
7. La moitié des membres de l'association (voter) pour lui.
8. Peu de raisons (pouvoir) justifier une telle décision.
9. Nous soutiendrons les déplacés internes en détresse, (ne fût-ce que) quelques instants.
10. Moins de deux semaines (suffire) pour faire ce travail.

Exercice 2 : Résumé de texte (15 points)

Texte : Descartes et les préjugés de l'enfance

1 Si nous envisageons maintenant la philosophie de Descartes, nous allons découvrir dans les soubassements de cette conception philosophique une tout autre conception de l'enfance. Ce qui sous-tend une grande partie de l'édifice philosophique de Descartes, c'est aussi une certaine conception de l'enfance, mais une conception très différente de celle de Platon. En effet, pour Descartes, l'enfance n'est pas ce qu'il faut retrouver mais ce dont il faut se défaire. L'entrée en philosophie se fait en sortant de l'enfance. Pourquoi cela ?

2 L'entreprise cartésienne est une entreprise de recherche de la vérité. Descartes se demande comment atteindre et découvrir la vérité. Il commence alors par relever les principaux obstacles à cette quête de vérité. Et le premier obstacle qui nous retient de chercher la vérité, c'est de croire qu'on la possède déjà. Le premier obstacle à la vérité, ce sont donc nos préjugés, dans notre esprit, qui nous donnent l'illusion de savoir. On tient pour évident non pas ce qui est tel mais ce dont on n'a jamais douté. C'est pourquoi, en toute logique, la première étape dans la recherche de la vérité est donc de nous libérer de tous ces préjugés, nombreux et puissants, qui peuplent notre esprit. Pourquoi sont-ils si nombreux ? Pourquoi sont-ils si puissants ? Pourquoi est-il si difficile de se défaire de nos préjugés ? À toutes ces questions, la réponse est toujours la même sous la plume de Descartes et tient en une formule célèbre du *Discours de la méthode* : parce que « nous avons tous été enfant avant que d'être homme. »

Cette formule semble énoncer une sorte d'évidence immédiate, dont on ne saisit pas bien l'enjeu ou l'importance. Pourquoi est-il essentiel de souligner cela ? Que faut-il comprendre dans cette évidence, accessible à tous, que, avant d'être homme, il faut bien avoir été enfant ? Descartes fait de l'enfance la source première et presque unique de tous nos préjugés. Si nous avons des préjugés qui encombrent notre esprit et nous donnent cette illusion de savoir, c'est parce que nous sommes passés par l'enfance, et que, dans l'enfance, les préjugés sont inévitables. L'enfant naît démuni de tout, entièrement dépendant des autres. Il doit s'approcher à la vie et survivre avant de penser à chercher la vérité. La vie passe naturellement avant la pensée. Cela entraîne plusieurs conséquences.

D'une part, l'être humain, enfant, va chercher ce qui est utile. Il adhère à une idée non pas parce qu'elle est vraie mais parce que cela lui est utile. Et dans cette logique utilitariste, il est normal de faire immédiatement confiance aux sens. L'enfant fait confiance à ce qu'il voit. Il est persuadé que le monde est bien tel qu'il lui apparaît. Pourquoi en douter ? Cette confiance dans le témoignage des sens se retrouve, selon Descartes, dans l'idée unanimement répandue chez les enfants selon laquelle les animaux pensent, et même qu'ils parlent. Simplement ils parlent leur langue à eux, que
3 nous, êtres humains, par définition, ne pouvons pas comprendre : « Mais le plus grand de tous les préjugés que nous ayons retenus de notre enfance, est celui de croire que les bêtes pensent. » Pourquoi les enfants semblent-ils si unanimes sur cette question du langage ou de la pensée animale ? C'est peut-être, estime Descartes, parce qu'ils ont une vision du monde égocentrée. Ils comprennent tout leur environnement en le ramenant à eux et donc en le comparant à eux. Ce qui les amène donc à penser que les animaux pensent et poussent des cris avec l'intention de signifier quelque chose, c'est d'abord qu'eux-mêmes le font. À l'origine de cette vision égocentrée du monde se trouve l'expérience à la fois banale et puissante du caprice : l'enfant s'imagine que le monde tourne autour de lui parce qu'il a constaté qu'en pleurant, il finissait pas obtenir ce qu'il voulait : « Nous avons tant de fois éprouvé dès notre enfance, qu'en pleurant ou commandant […] nous nous sommes fait obéir par nos nourrices, et avons obtenu les choses que nous désirions, que nous nous sommes insensiblement persuadés que le monde n'était fait que pour nous, et que toutes choses nous étaient dues. » Le préjugé est donc la structure centrale d'une représentation du monde égocentrée.

Laurent Bachler (2016),
« Trois conceptions philosophiques de l'enfance », p. 51-53

Question sur le texte

Vous ferez un résumé de ce texte. Il devra comporter 150 mots avec une marge de 10 % en plus ou en moins. Vous indiquerez impérativement le nombre total de mots utilisés et vous aurez soin d'en faciliter la vérification en mettant un trait vertical tous les vingt mots (15 pts).

École Polytechnique de Ouagadougou
Classes préparatoires aux Grandes Ecoles
MPSI et PCSI - Semestre 1

Année académique 2021-2022

Examen de français
Date : février 2022
Durée : 2 heures

SUJET (20 points)

Texte : De l'éducation

1 « Je reviens à la pratique. J'ai déjà dit que votre enfant ne doit rien obtenir parce qu'il le demande, mais parce qu'il en a besoin, ni rien faire par obéissance, mais seulement par nécessité. Ainsi les mots d'obéir et de commander seront proscrits de son dictionnaire, encore plus ceux de devoir et d'obligation ; mais ceux de force, de nécessité, d'impuissance et de contrainte y doivent tenir une grande place.

2 Avant l'âge de raison, l'on ne saurait avoir aucune idée des êtres moraux ni des relations sociales ; il faut donc éviter, autant qu'il se peut, d'employer des mots qui les expriment, de peur que l'enfant n'attache d'abord à ces mots de fausses idées qu'on ne saura point ou qu'on ne pourra plus détruire. La première fausse idée qui entre dans sa tête est en lui le germe de l'erreur et du vice ; c'est à ce premier pas qu'il faut surtout faire attention. Faites que tant qu'il n'est frappé que des choses sensibles, toutes ses idées s'arrêtent aux sensations ; faites que de toutes parts il n'aperçoive de lui que le monde physique : sans quoi soyez sûrs qu'il ne vous écoutera point du tout, ou qu'il se fera du monde moral, dont vous lui parlez, des notions fantastiques que vous n'effacerez de la vie.

3 Raisonner avec les enfants était la grande maxime de Locke ; c'est la plus en vogue aujourd'hui ; son succès ne me paraît pourtant pas fort propre à la mettre en crédit ; et pour moi je ne vois rien de plus sot que ces enfants avec qui l'on a tant raisonné. De toutes les facultés de l'homme, la raison, qui n'est, pour ainsi dire, qu'un composé de toutes les autres, est celle qui se développe le plus difficilement et le plus tard ; et c'est de celle-là qu'on veut se servir pour développer les premières ! Le chef-d'œuvre d'une bonne éducation est de faire un homme raisonnable : et l'on prétend élever un enfant par la raison! C'est commencer par la fin, c'est vouloir faire l'instrument de l'ouvrage. Si les enfants entendaient raison, ils n'auraient pas besoin d'être élevés ; mais en leur parlant dès leur bas âge une langue qu'ils n'entendent point, on les accoutume à se payer de mots, à contrôler tout ce qu'on leur dit, à se croire aussi sages que leurs maîtres, à devenir disputeurs et mutins ; et tout ce qu'on pense obtenir d'eux par des motifs raisonnables, on ne l'obtient que par ceux de convoitise, ou de crainte, ou de vanité, qu'on est toujours forcé d'y joindre.

4 On doit sentir que, comme la peine est souvent une nécessité, le plaisir est quelquefois un besoin. Il n'y a donc qu'un seul désir des enfants auquel on ne doive jamais complaire: c'est celui de se faire obéir. D'où il suit que, dans tout ce qu'ils demandent, c'est surtout au motif qui les porte à demander qu'il faut faire attention. Accordez-leur, tant qu'il est possible, tout ce qui peut leur faire un plaisir réel ; refusez-leur toujours ce qu'ils ne demandent que par fantaisie ou pour faire un acte d'autorité. »

Rousseau J.J., *Emile ou De l'éducation, livre II,*
Œuvres complètes, t. 3, Ed. du Seuil, 1971, pp. 61-62

Questions

1. Résumez chaque paragraphe du texte en une phrase ? (8 points)

2. Rousseau soutient que l'enfant : « ne doit rien obtenir parce qu'il le demande, mais parce qu'il en a besoin ». Est-ce votre avis ? Argumentez votre point de vue. Vous utiliserez un raisonnement concessif ou déductif que vous prendrez soin de mentionner. (12 points)

École Polytechnique de Ouagadougou
Classes préparatoires aux Grandes Ecoles
PCSI et MPSI - Semestre 2

Année académique 2021-2022

DEVOIR

Épreuve de français

Date : juin 2022

Durée : 4 heures

SUJET (6 points)

Exercice 1 : Faites accorder les participes passés entre parenthèses

1. (Arrivé) tôt, ces personnes nous ont (aidé) à enregistrer nos bagages. arrivées aidés
2. La question que vous avez (posé) demeure sans réponse. posée
3. Les vieux immeubles ont (disparu) car on ne les a pas (entretenu). disparu entretenus
4. Les dégâts qu'a (causé) la tempête s'élèvent à plusieurs milliards de francs. causé
5. Les paroles qu'ils se sont (dit) étaient vraiment aimables. dites
6. La jeune fille s'est (évanoui) en le voyant. évanouie
7. Aline s'est (cassé) la hanche en glissant sur une peau de banane. cassée
8. Ils se sont (apporté)une aide mutuelle. apporté
9. Je les ai (vu) venir à l'heure mais vite, ils se sont (laissé) entrainer par les autres. vus laissé

Exercice 2 : Dissertation (14 points)

Sujet :

> « La grande faute où l'on tombe d'ordinaire dans l'éducation des enfants, c'est qu'on ne prend pas soin d'eux au moment voulu - c'est qu'on ne sait pas former leurs esprits à la discipline, les habituer à plier devant la raison, à l'âge où ils sont le plus dociles, le plus en état de recevoir un pli. » John LOCKE (1693), *Quelques pensées sur l'éducation*, p. 30, http://bibliotheque.uqac.uquebec.ca/index.htm.

Dans une réflexion ordonnée, expliquez et discutez ce propos de Locke en vous inspirant de l'essai philosophique de Rousseau, *Émile ou de l'éducation,* ainsi que de vos propres lectures.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE OUAGADOUGOU: 2021-2022

CLASSES PREPARATOIRES D'ENTREE DANS LES GRANDES ECOLES

MPSI-PCSI

Durée : deux heures

DEVOIR DE PROGRAMMATION

Exercice 1

Écrivez un algorithme et le programme correspondant en python qui permet de savoir si un nombre compris entre 0 et 50 est premier.

Exercice 2

Écrivez un algorithme et le programme correspondant en python qui permet de résoudre une équation du second degré et afficher à l'écran selon les conditions nécessaires :

- Si l'équation a une solution
- Si l'équation n'a pas de solution
- Si l'équation a deux solutions

NB : une équation du second degré s'écrit sous la forme $AX^2 + BX + C$

Exercice 3

On se propose d'écrire un algorithme qui permet calculer d'indice de masse corporelle (IMC). L'**IMC** $= masse\ /\ taille^2$ où la masse est exprimée en kilogrammes et la taille en mètre. On considère qu'une personne est de corpulence "normale" si elle a un IMC entre 18,5 et 25. Si elle est au-dessus de 25, elle est en surpoids et en dessous de 18,5, elle est considérée comme maigre.

1. Définir les termes : Algorithme, Programme
2. Écrire un algorithme qui demande la taille et le poids d'une personne et calcule son IMCet dit si la personne est en surpoids ou pas
3. Traduire cet algorithme en langage Python.

Exercice 4

Écrivez un algorithme qui calcule l'aire d'un disque. Traduire cet algorithme en Python. Le rayon devra être fourni par l'utilisateur.

NB : $A = \pi \times r^2$. On considéra $\pi = 3,14$

BON COURAGE !!!

MPSI-PCSI

Examen de programmation Python

(2h)

Exercices 1

Ecrire un programme en python qui lit deux (02) valeurs entières (nb1 et nb2) et donne le signe du produit de la multiplication sans faire le calcul.

NB : Vous devez juste afficher le signe du produit mais vous ne devriez pas afficher le résultat du calcul.

Exercices 2

Ce jeu se joue à deux joueurs. On dispose, au départ, d'un tas de 21 allumettes duquel chacun des deux joueurs peut à tour de rôle, ôter entre 1 et 4 allumettes. Celui qui prend la dernière allumette du tas à perdu. Ecrivez le programme qui donne à l'ordinateur le rôle du deuxième joueur en lui faisant appliquer la stratégie gagnante.
IL faut penser à détecter les tricheries éventuelles du premier joueur

Exercices 3

Écrire un programme python qui retourne le produit de deux nombres saisis au clavier en utilisant que l'opération de sommation.

NB : On suppose que ces nombres sont des entiers naturels

Exercices 4

Utilisez l'instruction « `pass` » pour modifier une boucle `for` d'affichage de tous les caractères de la chaine « `string` » lorsque la variable de boucle vaut `'i'`.

ECOLE POLYTECHNIQUE DE OUAGADOUGOU *L'excellence au service de la Nation*	Année Académique : 20021-2022 Classe : MPSI INF1121 : Algorithmique et Programmation Heuress : 2h Epreuve de M. BAYALA Thierry Roger

Exercice 1 (4 points):

1. **Python est un langage _______?**

a. interprété
b. machine
c. compilé
d. binaire

2. **En python 3, que fait l'opérateur // ?**

a. division entière
b. retourne le reste
c. division du float par zéro
d. idem a ** b

3. **En Python, laquelle des fonctions suivantes vérifie dans une chaîne de caractères que tous les caractères sont des chiffres ?**

a. isdigit()
b. isalnum()
c. capitalize()
d. shuffle(lst)

4. **Quel est le type de données pour un caractère en python ?**

a. chr
b. char
c. character
d. python ne possède aucun type de données pour les caractères, ils sont traités comme des chaînes de caractères (string).

5. **Quelle est la fonction qui compare les éléments des deux listes ?**

a. cmp(list1, list2)
b. eq(list1, list2)
c. len(list1, list2)
d. max(list1, list2)

6. **Quelle fonction est utilisée pour ouvrir le fichier en lecture en Python ?**

a. fopen(file_name, mode)

b. open(file_name, mode)
c. openfile(file_name, mode)
d. open_file(file_name, mode)

7. En python, quel mot clé est utilisé pour commencer une fonction ?

a. function
b. fun
c. def
d. import

8. Lequel des opérateurs suivants en python est évalué à « true » s'il ne trouve pas de variable dans la séquence spécifiée sinon « false » ?

a. **
b. is
c. not in
d. //

Exercice 2 (6pt) :

(a) (1 point) Deux nombres sont **opposés** si leur **somme** est égale à **0**. Deux nombres sont **inverses** si leur **produit** est égal à 1. Écrire un algorithme ***sontInvOuOpp(a,b)*** où a et b sont deux nombres, qui retourne **Vrai** si a et b sont inverses ou opposés, **Faux** sinon. **(2points)**

(b) Écrire un algorithme ***existeInvOuOppConsecutifs***(T) où T est un tableau de nombres,qui retourne **Vrai** si T contient deux nombres consécutifs opposés ou inverses, **Faux**sinon. **(2points)**

(c) Écrire un algorithme ***existeInvOuOpp(T)*** où T est un tableau de nombres, qui retourne**Vrai** si T contient deux nombres, ayant des indices différents, opposés ou inverses, **Faux** sinon. (2point)

Exercice 3 (5 points) :

Le pgcd de deux nombres par soustractions successives.

— pgcd(a,b)=pgcd(a-b,a)sia>b
— pgcd(a,b)=pgcd(a,b-a)sib>a
— pgcd(a,b)=asia=b

On suppose que les opérandes sont des entiers positifs, écrire un programme qui permet de calculer lePGCD de deux nombres a et b.

Exercice 4 (5 points):

Écrivez un programme Python qui demande à l'utilisateur de saisir un entier naturel n et affiche tousses diviseurs.
NB : Effectuer les contrôles de saisie nécessaire pour éviter que le programme ne se plante.

ECOLE POLYTECHNIQUE DE OUAGADOUGOU
L'excellence au service de la Nation

Devoir de Mécanique du point

Consignes

Durée de l'épreuve 2h
Documents non autorisés
Ordinateurs/tablettes/téléphones interdits

MPSI 2021-2022

Exercice 1

Convertir le vecteur suivant des coordonnées cartésiennes $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ en coordonnées cylindriques $(\vec{u_r}, \vec{u_\varphi}, \vec{u_z})$: $\vec{V} = X\,\vec{\imath} + Y\,\vec{\jmath} + Z\,\vec{k}$

Exercice 2

Dans un repère cartésien (O, x, y), muni de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, un point M en mouvement tel que :

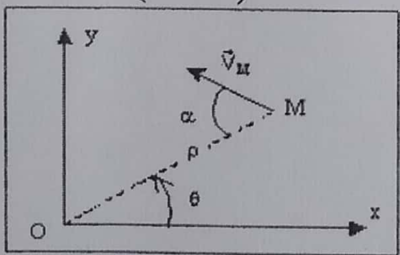
$$\overrightarrow{OM} = [1 + \cos(t)]\vec{\imath} + \sin(t)\vec{\jmath}$$

1. Déterminer la nature de la trajectoire de M ?
2. Exprimer le vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et déterminer son module
3. En déduire la nature du mouvement et déterminer la vitesse angulaire ω
4. Exprimer le vecteur accélération en coordonnées cartésiennes et déterminer son module. Que représente cette accélération dans le repère de Frenet et pourquoi ?
5. Déterminer l'angle α que fait l'accélération avec la vitesse
6. Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur accélération en coordonnées polaires ?

Exercice 3

Un insecte assimilé à un point mobile M en mouvement plan dans le plan xOy, vole à une vitesse de norme constante $\|\overrightarrow{V_M}\| = V_0$, de sorte que l'angle α entre $\overrightarrow{V_M}$ et la visée d'un point lumineux O (visée de l'insecte définie par $\overrightarrow{MO}$) soit constant ;

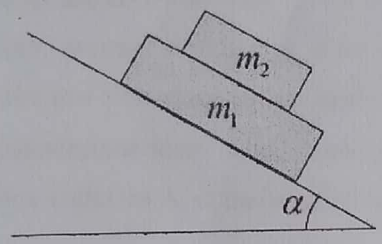
On suppose $\left(\overrightarrow{V_M}, \overrightarrow{MO}\right) = \alpha > 0$ (voir la figure ci-dessous)



1. Exprimer, en fonction de V_0 et α, les composantes polaires du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_M}$ de l'insecte :
Sachant qu'à l'instant initial $t = 0$, la distance ρ séparant l'insecte de son point de visée vaut ρ_0 et que l'on choisit l'axe polaire $\overrightarrow{Ox}$ passant par la position initiale de l'insecte c'est-à-dire que l'angle polaire de l'insecte vaut $\theta_0 = 0$
2. Déduire, de l'expression de la vitesse radiale, la loi horaire $\rho = \rho(t)$ en fonction de v_0, ρ_0, α et t.
3. Déterminer l'expression de θ

Exercice 4

Deux masses m_1 et m_2 sont superposées sur un plan incliné d'angle α par rapport à l'horizontal.
Le coefficient de frottement cinétique entre m_1 et m_2 est h_2 et entre m_1 et la surface inclinée est h_1 .



Calculer les accélérations de chacune des masses pour les valeurs suivantes :

$h_1 = 2h_2 = 0{,}3$; $m_2 = 6kg$; $m_1 = 3\,kg$; $\alpha = 60°$; $g = 9{,}8\,m\,s^{-2}$

$k_d = \frac{\|R_t\|}{\|R_n\|}$

Ecole Polytechnique de Ouagadougou

Année académique 2021 – 2022

Classes Préparatoires d'entrée dans les Grandes Ecoles

Niveau : 1re année MPSI

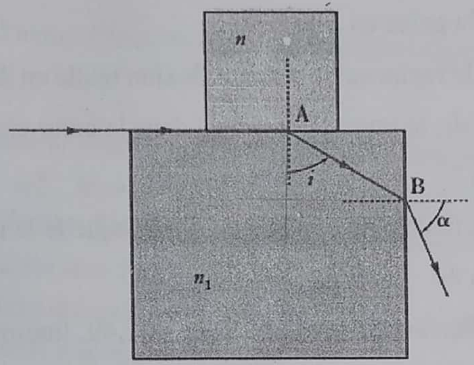
Enseignant : Dr H. GUENGANE

Durée : 03 heures

Examen de Physique 1 : Optique Géométrique

Exercice 1 : (04 points)

Pour mesurer l'indice n d'un milieu solide transparent, on taille dans ce matériau un cube que l'on place sur un autre cube en verre d'indice n_1. On envoie un pinceau de lumière monochromatique sous incidence rasante sur la surface de séparation entre les deux cubes en A, et on mesure l'angle d'émergence α dans l'air en B (**figure ci-dessous**).



1. Écrire les lois de Descartes pour les réfractions en A et B
2. À partir des relations précédentes, donner l'expression de n^2 en fonction de n_1 et α.
   Sachant que $n_1 = 1{,}7321$ et que $\alpha = 60°$, calculer la valeur de n.
3. Donner l'expression de l'erreur Δn sur n en fonction des erreurs Δn_1 sur n_1 et $\Delta\alpha$ sur α.
   Calculer la valeur de Δn sachant que $\Delta n_1 = 10^{-5}$ et que $\Delta\alpha = 1'$ ($1' = 5\ 10^{-6}$ rad)

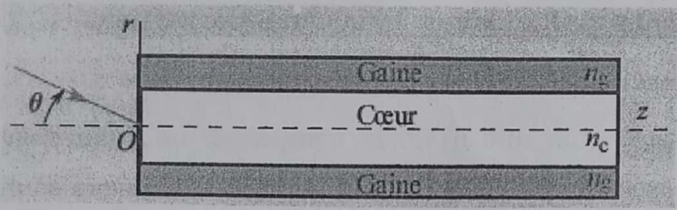
Exercice 2 (Miroir plan) : *04 points*

Un adulte de hauteur $H = 1{,}80$ m se regarde dans un miroir vertical. Ses yeux sont à une hauteur $h = 1{,}70$ m.

1. Quelles doivent être la dimension et la position de ce miroir pour que l'adulte puisse se voir en entier ?
2. Un enfant de hauteur $H' = 1{,}40$ m, ses yeux étant situés à la hauteur $h' = 1{,}30$ m du sol se regarde dans le miroir ainsi fixé, que voit-il ?

Exercice 3 : Fibre optique à saut d'indice (06 points)

Une fibre optique est un guide de lumière (dispositif capable de guider des rayons dans un trajet non rectiligne). Le modèle de la figure ci-dessous est le cas simple de la fibre à saut d'indice : le milieu de la fibre, appelé *cœur*, est un milieu cylindrique et d'indice n_C, et le matériau l'entourant, appelé *gaine*, est un milieu d'indice n_g avec $n_C > n_g$. La fibre est étudiée dans l'air, milieu d'indice unité.



1. Considérons un rayon lumineux arrivant en O sur le cœur avec un angle d'incidence θ. La normale au dioptre en O est repérée comme l'axe Oz. Ce rayon est réfracté avec un angle de réfraction θ' et vient frapper la gaine en M_1.

a) Pour quelles valeurs de θ' le rayon subit-il une réflexion totale en M_1 ?

b) Après réflexion totale en M_1, le rayon se propage dans le cœur et vient frapper la gaine en M_2. Que se passe-t-il alors ?

2. a) Exprimez la valeur maximale de θ, notée θ_{max}, pour laquelle le rayon subit une réflexion totale une fois arrivé en M_1.

b) Calculez numériquement θ_{max} avec $n_C = 1{,}53$ et $n_g = 1{,}49$. Interprétation ?

3. Quel est l'intérêt de ce dispositif ?

Exercice 4 : Instrument optique (06 points)

Une loupe est modélisée par une lentille mince de focale $f' = 20$ cm. La position d'un objet observée est notée AB, celle de son image par la lentille $A'B'$, et celle de l'œil de l'observateur C.

Posons $a = \overline{F'C}$ et $\delta = \overline{A'C}$. Selon la position de A', δ varie pour l'observateur entre une valeur minimale δ_m et un maximum infini. L'angle sous lequel l'observateur voit $A'B'$ est noté α'. L'angle sous lequel il verra l'objet AB en l'absence de la loupe est noté α.

1. Calculez le grandissement γ de la loupe en fonction de δ, a et f'.

2. Montrez que le grossissement G s'écrit :

$$G = \frac{(2f' + a)(\delta - a) - f'^2}{\delta f'}$$

Vous supposerez les angles suffisamment petits pour utiliser les approximations $\sin x \approx x$ et $\tan x \approx x$ avec x en radians.

3. L'œil étant placé au foyer image de la loupe, quelle est la valeur de δ donnant un grossissement maximal ?

4. L'œil étant placé à $d = 30$ cm de la loupe, quelle est la valeur maximale du grossissement ?

Devoir d'électromagnétisme

CPGE : MPSI

Date : 20 Mai 2022

Durée : 2H00

Exercice 1 :

Une sphère métallique de rayon a, non chargée, est placée dans un champ électrostatique uniforme $\vec{E}_0 = E_0\vec{e}_x$.

1) Quel est l'effet de $\vec{E}_0$ sur cette sphère ?
2) À l'intérieur de la sphère, quel est le champ induit $\vec{E}_i$ et le champ résultant $\vec{E}_r$.

Soit V_0 le potentiel en O avant l'introduction de la sphère. Quel est le potentiel à l'intérieur et sur la sphère ?

3) On se propose de calculer le potentiel en tout point extérieur à la sphère.
On désigne par $\vec{P} = \alpha\vec{E}_0$ le moment dipolaire équivalent à la sphère, placé en O. quel est le potentiel résultant V(M) ? (On déterminera le coefficient α en exprimant la continuité de V sur la surface.)
4) En déduire les composantes radiale et ortho radiale du champ à l'extérieur de la sphère.
5) Quelle est la densité surfacique de charge σ ?
6) On suppose maintenant que $\vec{E}_0 = E_0(x)\vec{e}_x$; $E_0(x)$ étant une fonction lentement variable à l'échelle de a. calculer la force qui s'exerce sur la sphère en fonction de a et de la densité volumique d'énergie $\omega = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$.

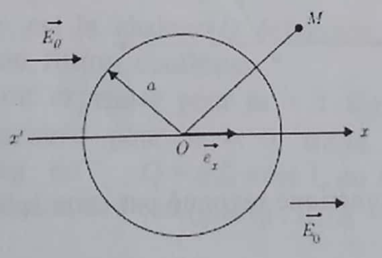


Figure 1 : représentation de la sphère.

Exercice 2 :

Le cortège électronique d'un atome se représente d'une manière très simplifiée par une densité volumique de charge :

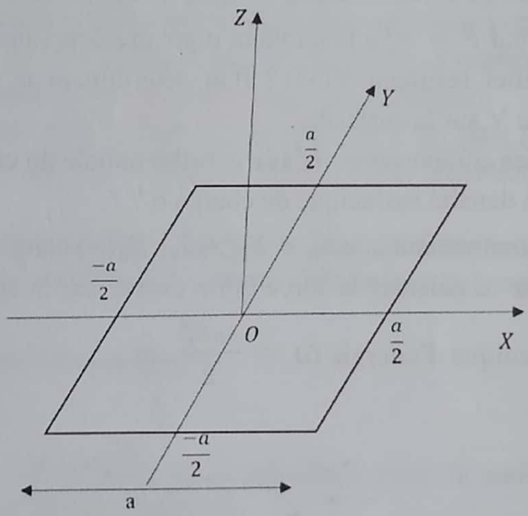
$$\rho(r) = \frac{A}{r^n} \quad \text{pour} \quad r \geqslant a$$
$$\rho(r) = 0 \quad \text{pour} \quad r < a$$

r étant la distance au centre O de cet atome, n, A et α sont des constantes. Le noyau, placé en O, porte la charge Z_e (Z : le numéro atomique de l'atome, e : valeur absolue de la charge de l'électron).

1) Calculer la charge totale q du cortège électronique.
2) Montrer que n doit être supérieur à une valeur que l'on déterminera.
3) L'atome étant neutre, exprimer la constante A.
4) En appliquant le théorème de Gauss, déterminer le champ électrique et le potentiel en tout point de l'espace.
5) Retrouver l'expression du champ électrique en utilisant le théorème de Gauss sous sa forme locale.

Exercice 3 :

Considérons une spire carrée de côté a parcouru par un courant I constant, illustré par la figure suivante :



1) Déterminez le champ magnétique rayonné par cette spire sur son axe OZ, le point O étant au centre carré.
2) Application numérique en O avec a = 10cm et I = 1A.

Examen de Thermodynamique

CPGE : MPSI **Durée : 2H00**

Exercice1 : **déjà vu !**

Un gaz parfait est enfermé dans un cylindre vertical <u>thermiquement isolé</u> muni d'un piston mobile sans frottement. Au départ, le gaz est en équilibre et son état est décrit par les paramètres (ou variables) $V_1 = 12{,}5\ 10^{-2}\ m^3$, $P_1 = 2{,}5\ 10^5$ Pa et $T_1 = 300$ K. Le rapport des capacités calorifiques du gaz est $\gamma = 7/5$. On donne R = 8,32 J/mole.K.

1) Partant de l'état d'équilibre 1 (état initial), on ajoute une à une, des petites masses jusqu'à ce que sa pression soit $P_2 = 7{,}5\ 10^5$ Pa. Suite à cette opération, le gaz atteint donc un état d'équilibre 2 décrit par les paramètres V_2, P_2 et T_2.

1.1. Quelle est la nature de la transformation subie par le gaz ? Justifier votre réponse.

1.2. Calculer le volume V_2, la température T_2, la variation d'énergie interne du gaz et le travail échangé par le gaz (le calcul direct du travail n'est pas demandé).

2) Le gaz étant en équilibre dans l'état 2, <u>le cylindre n'est plus isolé thermiquement</u>. La température du milieu extérieur est $T_0 = 300$ K. Suite à cette opération, le gaz évolue vers un nouvel état d'équilibre 3.

2.1. Quelle est la nature de la transformation subie par le gaz ? Justifier votre réponse

2.2. A l'état final on a $P_3 = P_2$. Justifier cette égalité. Déterminer la température T_3 et le volume V_3.

2.3. Calculer la variation d'énergie interne du gaz.

Notion de chaleur latente

Définition : la chaleur latente est la chaleur Q échangée avec le milieu extérieur lors d'un changement d'état : solidification, fusion, ébullition.

Elle est notée L. Lorsqu'elle est exprimée pour m = 1 Kg de matière, c'est la chaleur latente massique, lorsqu'elle est exprimée pour n = 1 mole, c'est la chaleur latente molaire.

On écrit : Q = m.L avec L en J/kg ou Q = n.L avec L en J/mol.

Exemple : la chaleur latente de fusion de l'eau (glace) : $L_{fus} = 335$ k.J/kg.

Exercice 2 : **standard !**

Une masse constante de gaz parfait, dont le rapport des capacités thermiques à pression et volume constants est $\gamma = 1{,}4$ décrit le cycle ci-dessous.

Le gaz initialement dans l'état d'équilibre A (P_A=105P_a, $V_A = 4{,}14.10^{-4} m^3$, T_A=144,4 K) subit une compression isentropique qui l'amène à latempérature TB = 278,8K.

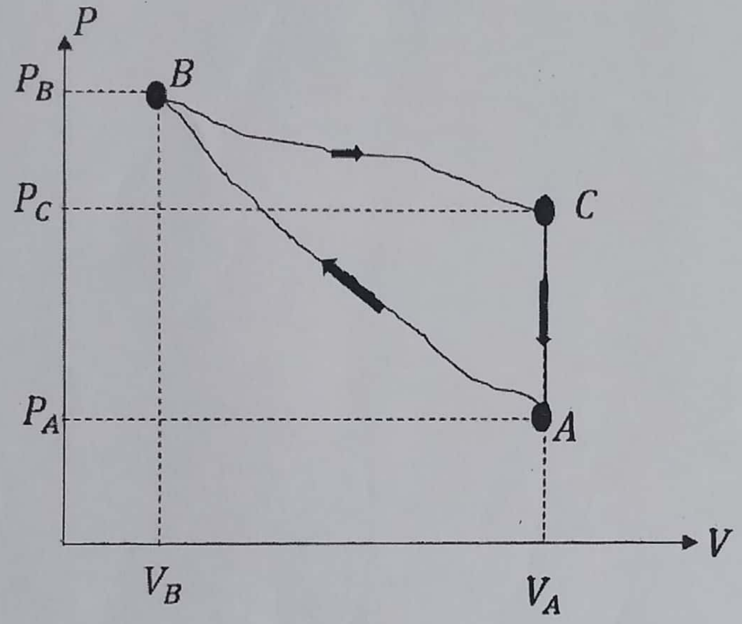
1) Calculer la pression P_B et le volume V_B de l'état d'équilibre B.

2) Le gaz est mis en contact avec une source à la température T_B il subit une détente isotherme réversible, qui ramène son volume à la valeur initiale V_A. Calculer P_C et la variation de l'entropie ΔS_{BC}.

3) Le gaz dans l'état d'équilibre C est mis en contact avec un thermostat de température TA tandisque son volume est maintenu constant à la valeur VA. Calculer la variation de l'entropie ΔS_{CA} et le transfert thermique Q_{CA}.

4) En déduire l'entropie créée au cours de la transformation isochore CA. Conclure.

5) Représenter le cycle sur un diagramme entropique (T, S)



Exercice 3 : **cadeau !**

Une masse d'eau de 10 g sous la forme d'un cube de glace dont la température est de -10 °C est placée dans un lac d'eau dont la température est de 15°C. On considèrera le système formé par le cube de glace et le lac comme un système isolé. L'échange de chaleur à lieu donc uniquement entre les deux composantes du système. Déterminer :

1) La variation d'entropie du cube de glace ΔS_{cub}.
2) La variation d'entropie du lac ΔS_{lac}.
3) la variation d'entropie de l'univers ΔS_{uni}. Commenter.

On donne : Chaleur spécifique de la glace $c_g = 2220\ J/kg.K$. Chaleur spécifique de l'eau liquide $c_\ell = 4180\ J/kg.K$. Chaleur latente de fusion de la glace $L_f = 334.10^3\ J/kg$.

MPSI/PCSI - 2022

EPREUVE DE MECANIQUE DU SOLIDE 1 CPGE EPO 2022 S2

Enseignant : **Dr TOUGRI Inoussa** **Durée :** **2h30mn**

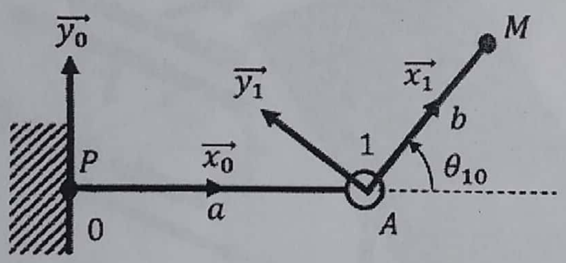
Exercice 1

Soit une pièce (1) en rotation par rapport à la pièce fixe (0) au point A. Le point P appartient à la pièce (0). On exprime le vecteur position de M dans le repère $R(P, x_0, y_0, z_0)$ par $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{x_0} + b\overrightarrow{x_1}$ où a et b sont des constantes.

On définit également le vecteur vitesse angulaire (rotation) de la pièce 1 par rapport à la pièce 0 par $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{z_0} = \dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{z_1}$.

1) Etablir le graphe (la boucle) associé(e) au mécanisme
2) Calculer la vitesse du point M appartenant à la pièce (1) par rapport à la pièce (0) par deux méthodes différentes.

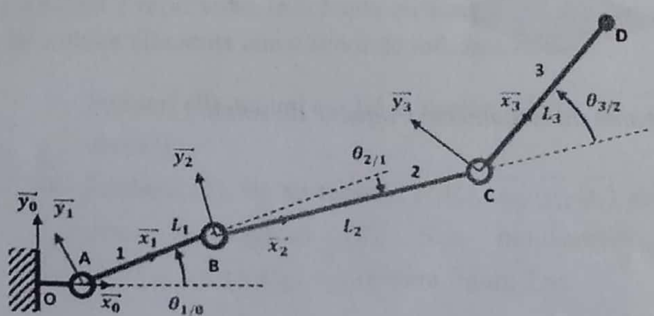
Schéma cinématique paramétré du mécanisme



Exercice 2

Calculer la vitesse $\overrightarrow{V_{D3/0}}$ du mécanisme représenté par le schéma cinématique paramétré ci-dessous.

a) Méthode de Chasles puis changement de base de dérivation
b) Méthode de Composition de mouvement puis Varignon



Exercice 3

Pour augmenter le rendement des centrales solaires thermodynamiques, on utilise le traqueur de soleil qui permet d'orienter des panneaux solaires à l'aide d'un vérin électromécanique. Une étude mécanique porte sur le mécanisme traqueur du soleil dans une phase d'élévation croissante. Ce mécanisme est composé d'un panneau articulé à un support vertical. Il est mis en mouvement à l'aide d'un vérin électromécanique. L'oscillation de la tige entre les positions extrêmes (complètement sortie et complètement rentrée) permet de varier l'élévation du panneau en fonction de celle du soleil dans le ciel (voir **figure 1**)

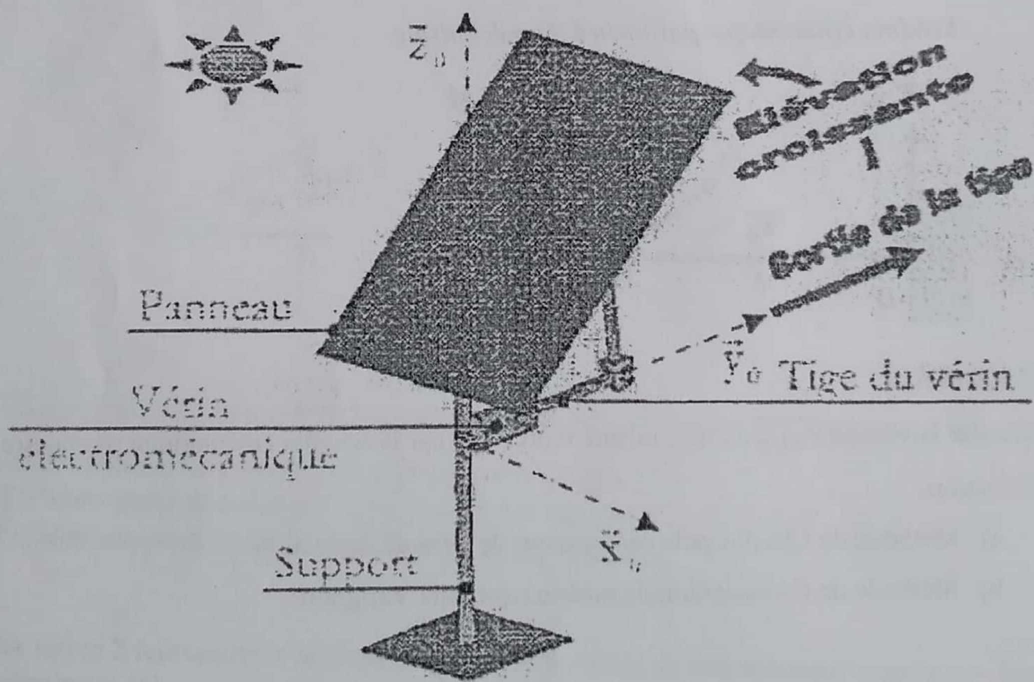


***Figure 1** : Phase d'élévation croissante du mécanisme traqueur du soleil.*

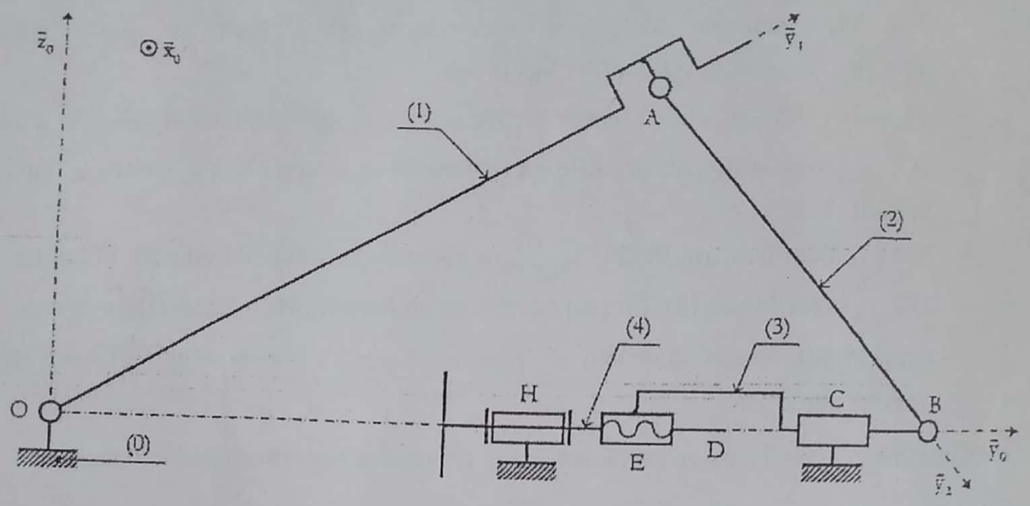


Figure 2 : Schéma cinématique minimal du mécanisme.

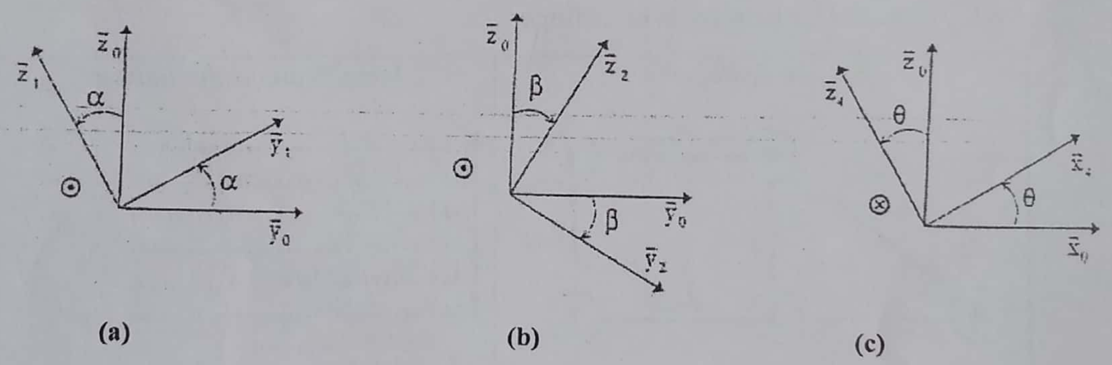


Figure 3 : *Orientation des bases mobiles par rapport à la base liée au support (0).*

(a) Mouvement du panneau (1) par rapport au support (0)
(b) Mouvement de la bielle (2) par rapport au support (0)
(c) Mouvement de la vis (4) par rapport au support (0)

La figure 2 représente le schéma cinématique minimal du mécanisme d'orientation. Les principaux éléments constituant ce mécanisme sont :

- Support (0) auquel est lié le repère $\Re_0(O,\ \overrightarrow{x_0},\ \overrightarrow{y_0},\ \overrightarrow{z_0})$ supposé galiléen (fixe ou absolu).
- Panneau (1), lié au repère $\Re_1(O,\ \overrightarrow{x_0},\ \overrightarrow{y_1},\ \overrightarrow{z_1})$ est en liaison pivot d'axe $(O,\ \overrightarrow{x_0})$ avec le support (0). Son mouvement est paramétré par l'angle $\alpha = (\overrightarrow{y_0},\ \overrightarrow{y_1}) = (\overrightarrow{z_0},\ \overrightarrow{z_1})$ confère figure 3.a.

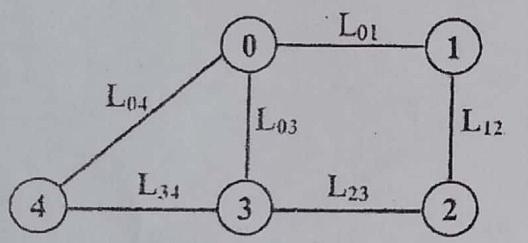
- Bielle (2), liée au repère $\Re_2(A, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$, est en liaison pivot d'axe $(A, \overrightarrow{x_0})$ avec le panneau (1). Son mouvement est paramétré par l'angle $\beta = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_2}) = (\overrightarrow{z_0}, \overrightarrow{z_2})$ confère figure 3.b.
- Tige du vérin (3), liée au repère $\Re_3(B, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$, est en liaison glissière d'axe $(C, \overrightarrow{y_0})$ avec le support (0). Elle est également en liaison pivot d'axe $(B, \overrightarrow{x_0})$ avec la bielle (2).
- Vis (4), liée au repère $\Re_4(D, \overrightarrow{x_4}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_4})$, est en liaison hélicoïdale à droite d'axe $(E, \overrightarrow{y_0})$ avec la tige (3). Elle est également en liaison pivot d'axe $(H, \overrightarrow{y_0})$ avec le support (0). Son mouvement est paramétré par l'angle $\theta = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_4}) = (\overrightarrow{z_0}, \overrightarrow{z_4})$ confère figure 3.c.

Les données géométriques du mécanisme sont exprimées par les relations vectorielles :

$\overrightarrow{OA} = L\overrightarrow{y_1}$; $\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{y_2}$; $\overrightarrow{EB} = b\overrightarrow{y_0}$; $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{CB} = \lambda\overrightarrow{y_0}$

Les variables λ, α, β, et θ sont les paramètres du mécanisme. Les constantes *a, b,* et *L* sont des caractéristiques géométriques du mécanisme. Les représentations planes des rotations sont définies dans la figure 3.

1. Identifier les liaisons du mécanisme

Graphe de liaisons	***Identifications des liaisons***
	**L_{01} :** ...Pivot... **L_{12} :** ...Pivot... **L_{23} :** ...Pivot... **L_{03} :** ...Glissière... **L_{34} :** ...hélicoïdale... **L_{04} :** ...pivot...

2. Déterminer le torseur cinématique au point A, du panneau dans son mouvement par rapport au support (0)
3. En déduire le vecteur vitesse du point B de la bielle (2), dans son mouvement par rapport au support (0)
4. Exprimer le torseur cinématique, au point E, de la tige (3) dans son mouvement par rapport à la vis (4) en fonction de $\dot{\theta}$ et du pas réduit de l'hélice p [en (mm/rad)]
5. Déterminer le vecteur vitesse du point E de la tige (3) dans son mouvement par rapport au support (0)
6. Déterminer le vecteur vitesse du point B de la tige (3) dans son mouvement par rapport au support (0)