

Examen unique d'algèbre IV

**Exercice 1 : 5 points**

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  ${}^t A A = A {}^t A$ . On suppose qu'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^p = 0$ .
  - a. Montrer que  ${}^t A A = 0$ .
  - b. En déduire que  $A = 0$ .
2. Si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est symétrique et vérifie  $M^p = I_n$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$ . Calculer  $M^2$ .
3. Calculer le minimum de  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b, c) \mapsto \int_0^{+\infty} (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 e^{-2x} dx \end{cases}$

**Exercice 2 : 5 points**

On note  $S$  l'ensemble des matrices symétriques réelles d'ordre  $n$ . On pose, pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,

$$\|M\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n M_{ij}^2}.$$

1. Quel est le produit scalaire associé ?
2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Calculer

$$d(A, S) = \inf_{M \in S} \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |A_{ij} - M_{ij}|^2}.$$

**Exercice 3 : 5 points**

Soit  $E$  un espace euclidien. On note  $\mathcal{B}_0 = (u_1, \dots, u_n)$  une base orthonormée de  $E$ . On note  $H$  l'hyperplan d'équation  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$  dans la base  $\mathcal{B}_0$ . Enfin, on note  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n-1})$  définie par  $e_i = u_1 - u_{i+1}$  pour  $i = 1, \dots, n-1$ .

1. Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $H$ .
2. Construire orthonormée de  $H$ .
3. Calculer le projeté orthogonal de  $u_n$  sur  $H$ .

**Exercice 4 : 5 points**

1. Soit  $(u_1, \dots, u_n)$  une famille de  $n$  réels tels que  $\sum_{k=1}^n u_k^2 = 1$ . On note  $A$  la matrice de coefficients  $a_{ij} = u_i u_j$ .
  - a. Montrer que  $M = 2A - I_n$  est orthogonale.
  - b. On note  $f$  l'endomorphisme représenté par la matrice  $M$  dans la base canonique. Donner une représentation géométrique de  $f$ .
2. Dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ , quel est l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base canonique est  $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$  ?

## Devoir d'Analyse IV

:04 heures

Ø Les Documents, les Calculatrices, les Téléphones et les Ordinateurs sont strictement interdits.

### Exercice 1 : Maniement des concepts dédiés aux Fonctions de Plusieurs Variables (11pts)

- | 1 | Enoncer clairement avec précision les quatre grands théorèmes (du calcul différentiel).
- | 2 | Donner l'exemple d'une fonction  $\mathcal{H}$  qui est Gâteau-différentiable et non Fréchet-différentiable. Justifier clairement votre réponse !
- | 3 | Montrer que l'arc paramétré  $\gamma : t \in [0; 1] \rightarrow (\cos(2\pi t^2), \sin(2\pi t^2))$  est de classe  $C^\infty$  et équivalent à l'arc  $\delta : t \in [0; 2\pi] \rightarrow (\cos(t), \sin(t))$ .
- | 4 | On considère les fonctions  $f : (x, y) \mapsto x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$ ,  $g : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)e^{-x}$ , et  $h : (x, y, z) \mapsto \left( f(x, y), g(x, y), \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+y}{\sqrt{z}}\right) \right)$ .
- Déterminer le développement de Taylor d'ordre 2 de  $f$  en  $(1, -1)$ .
  - Déterminer les extrema locaux et les extrema globaux des fonctions  $f$  et  $g$ .
  - Etudier la différentiabilité de  $h$  sur son domaine de définition  $D_h$ , puis déterminer sa différentielle.
  - Calculer la divergence et le rotationnel de  $h$  au point  $(0, 1, 1)$ .
  - $h$  est-elle inversible au voisinage de  $(0, 1, 1)$  ?

| 5 | Calcul d'intégrales Multiples

- (a) Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2021x^2 + 2022xy + 2023y^2 \leq 2024\}$ . Calculer  $I = \iint_D e^{-(2021x^2 + 2022xy + 2023y^2)} dx dy$
- (b) Déterminer le centre de gravité d'une demi-boule homogène.

### Exercice 2 : Restitution Organisée de Connaissances (Intégrale dépendant d'un paramètre) (04pts)

Soit  $f$  la fonction définie par,  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2(\theta) + x \sin^2(\theta)}}$ .

1. Justifier que  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ , puis étudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

2. Montrer que :  $\forall x > 0, f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + 1)(t^2 + x)}} = 2 \int_0^{x^{\frac{1}{4}}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + 1)(t^2 + x)}}$ .

3. En utilisant un encadrement de  $t \mapsto t^2 + 1$  sur  $[0, x^{\frac{1}{4}}]$ , montrer que :  $f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{2} \ln(x)$ .

4. Pour tout  $x > 0$ , on pose :  $g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta) d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta) + x \cos^2(\theta)}}$ .

(a) Calculer :  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta$ , puis montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta) + x \cos^2(\theta)}}$ .

(b) En déduire que :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) - g(x) - \ln(2)) = 0$ .

(c) Déterminer une expression explicite de  $g$  sur  $]0, 1[$  et retrouver le résultat de la question 3.

(d) A l'aide de ceux qui précédent, montrer qu'il existe un réel  $A$  à préciser tel que :  $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{A \ln(x)}{\sqrt{x}}$ .

(e) Montrer que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ .

**Exercice 3 : Intégrale Dépendant d'un Paramètre & Série Entière, Calcul de valeur d'intégrale Impropre (06pts)**

Soient  $h$  la fonction  $(x, t) \mapsto h(x, t) = \frac{xt \sin(t)}{x^2 - 2x \cos(t) + 1}$  et  $I = \int_0^\pi \frac{t \sin(t) dt}{1 - x \cos(t)}$ .

1. Montrer que  $I$  est convergente. *Dans ce qui suit, nous présenterons deux méthodes de calcul  $I$ .*

2. Montrer que l'application  $H : x \mapsto H(x) = \int_0^\pi \frac{xt \sin(t) dt}{x^2 - 2x \cos(t) + 1} dt$  est continue sur  $[0, 1]$ .

3. Déterminer les suites  $(s_n)$  vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad s_{n+2} = 2 \cos(t) s_{n+1} + s_n = 0, \quad \text{pour } t \in ]0, \pi[.$$

4. Montrer que l'application  $x \mapsto h(x, t)$  (pour  $t \in [0, \pi]$ ) est développable en série entière au voisinage de 0.

Soit alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t) x^n$  ce développement en série entière et  $R$  son rayon de convergence.

5. Déterminer l'expression des coefficients  $a_n(t)$ . Que peut-on dire de  $R$ ?

6. Soit  $x \in ]0, 1]$  fixé.

(a) Montrer que la série  $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t) x^n$  converge normalement sur  $[0, \pi]$ .

(b) En déduire que  $H$  est développable en série entière au voisinage de 0.

(c) Exprimer  $H(x)$  à l'aide de fonctions élémentaires pour tout  $x \in [0, 1]$ .

(d) En déduire la valeur de  $I$ .

7. On considère l'équation différentielle,  $(E) : xy'(x) + y(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{x(1+x)}$ . Résoudre  $(E)$  sur  $[0, 1]$ .

8. Existe-t-il une solution de  $(E)$  se prolongeant par continuité sur  $[0, 1]$ ?

9. Soit  $\phi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{t \sin(t) dt}{1 - x \cos(t)}$ .

(a) Montrer que  $\phi$  est une application continue sur  $[0, 1]$ , dérivable sur  $]0, 1[$ .

(b) Montrer que  $\phi$  est une solution de  $(E)$  sur  $]0, 1[$ .

(c) Retrouver la valeur de  $I$ .

**FIN**

Bonne Chance !

Date : 17 JUIN 2023.

**Part I: Reading – Comprehension.** Read the following text and answer the questions about it.  
**Reports on COVID origin reignite conspiracy theories about virus**

COVID-19's origins remain hazy. Three years after the start of the pandemic, it is still unclear whether the coronavirus that causes the disease leaked from a lab or spread to humans from an animal. This much is known: When it comes to COVID-19 misinformation, any new report on the virus's origin quickly triggers a relapse and a return of misleading claims about the virus, vaccines and masks that have reverberated since the pandemic began. It happened again this week after the US Department of Energy confirmed that a classified report determined, with low confidence that the virus escaped from a lab. Within hours, online mentions of conspiracy theories involving COVID-19 began to rise, with many commenters saying the classified report was proof they were right all along. Far from definitive, the Energy Department's report is the latest of many attempts by scientists and officials to identify the origin of the virus, which has now killed nearly seven million people after being first detected in the central Chinese city of Wuhan in late 2019.

Nevertheless, others in the US intelligence community disagree, and there is no consensus. Many scientists believe the likeliest explanation is that the coronavirus that causes COVID-19 jumped from animals to humans, possibly at Wuhan's Huanan market, a scenario backed up by multiple studies and reports. The World Health Organization has said that while an animal origin remains most likely, the possibility of a lab leak must be investigated further before it can be ruled out. People should be open-minded about the evidence used in the Energy Department's assessment, according to virologist Angela Rasmussen. However, she said that without evaluating the evidence contained in the classified report, there is no reason to challenge the conclusion that the virus spread naturally. "We can and do know what the scientific evidence shows," Rasmussen tweeted Tuesday. "The available evidence still shows zoonotic emergence at Huanan market."

Many of those citing the report as proof, however, seemed uninterested in the evidence. They seized on the report and said it suggests the experts were wrong when it came to masks and vaccines, too. "School closures were a failed and catastrophic policy. Masks are ineffective. And harmful," said a tweet that has been read nearly 300,000 times since Sunday. "COVID came from a lab. Everything we skeptics said was true." Many of the conspiracy theories contradict each other and the findings in the Energy Department report. (402 words)

Adapted from Aljazeera <https://www.aljazeera.com/news/2023/3/1/reports-on-covid-origin-reignite-conspiracy-theories-about-virus>

**Exercise 1:** Write T (true), F (false) or NG (not given) in front of the following statements (3 pts)

1. Nobody knows the origin of COVID-19 for sure.  T
2. The pandemic claimed the lives of millions of people.  T
3. The virus was detected for the first time in Asia.  T
4. COVID-19 came from a Chinese dog.  NG
5. Conspiracy theory does not value scientific evidence.  NG
6. According to conspiracy theory, governments did well in closing public places.  FG

**Exercise 2:** Answer the following questions about the text. Use your own words

1. Does new information reduce conspiracy theories? Why? or Why not? (1 pt) (2 lines max.)
2. Was the spread of the COVID-19 virus caused by voluntary human action? Justify your answer. (1 pt) (2 lines max.)
3. What is a conspiracy theory you have personally heard of? (2 pt) (3 lines max.)

### Exercise 3: Writing

In your opinion, what is the best strategy to convince people that COVID-19 is real? (6 to 10 lines; 3 pts)

### **Part II – Precis Writing**

Write a precis of the text. (to 20%; 5 pts)

### **Part III – Grammar**

Write the number of the sentence and the letter corresponding to the correct answer. Examples: 1-A; 2-B; 3-C; 4-D (5 pts)

1. The house ... I live in is very beautiful.  
A) \*    B) who    C) where    D) whom
2. Mary... go out last weekend.  
A) did not    B) do not    C) not    D) never
3. This is the house ... I was born.  
A) in    B) where    C) when    D) why
4. Would you like ... water?  
A) a    B) some<sup>x</sup>    C) an    D) no
5. I know ... I want to do in the future.  
A) that    B) this    C) which    D) what<sup>x</sup>
6. She knows ... you are a liar.  
A) what do/do    B) that<sup>x</sup>    C) which    D) where
7. I'm ... class ... eight other students.  
A) in/for    B) at/of    C) in/with<sup>x</sup>    D) at/off
8. Where ... you going tonight?  
A) do    B) is    C) does    D) are<sup>x</sup>
9. ... summer, I play tennis ... Sundays.  
A) In/in    B) At/on<sup>x</sup>    C) In/on<sup>x</sup>    D) At/in
10. Malia ... French and German.  
<sup>x</sup>A) speaks    B) are speaking C) speak D) to speak

## Equilibres Physiques

Durée : 2 heures

### Exercice 1 (8pts)

Soit un corps pur B en équilibre, à T et à p, sous deux phases α et β. Soient respectivement  $S_m(\alpha)$ ,  $S_m(\beta)$ ,  $V_m(\alpha)$  et  $V_m(\beta)$  les entropies et les volumes molaires de B dans ces deux phases à l'équilibre.

1. Exprimer  $d\mu_\alpha$  et  $d\mu_\beta$  en fonction des variables p et T.
2. Écrire la condition, portant sur les potentiels chimiques, traduisant l'équilibre entre les deux phases α et β :
  - a) à la température T et sous la pression p ;
  - b) à la température  $T + dT$  et sous la pression  $p + dp$ .

En déduire une expression donnant  $\frac{dp}{dT}$  en fonction de  $S_m(\alpha)$ ,  $S_m(\beta)$ ,  $V_m(\alpha)$  et  $V_m(\beta)$ , puis en fonction de  $\Delta H_m(\alpha \rightarrow \beta)$  et de T ( $\alpha \rightarrow \beta$ ) ; cette relation constitue la troisième relation de Clapeyron.

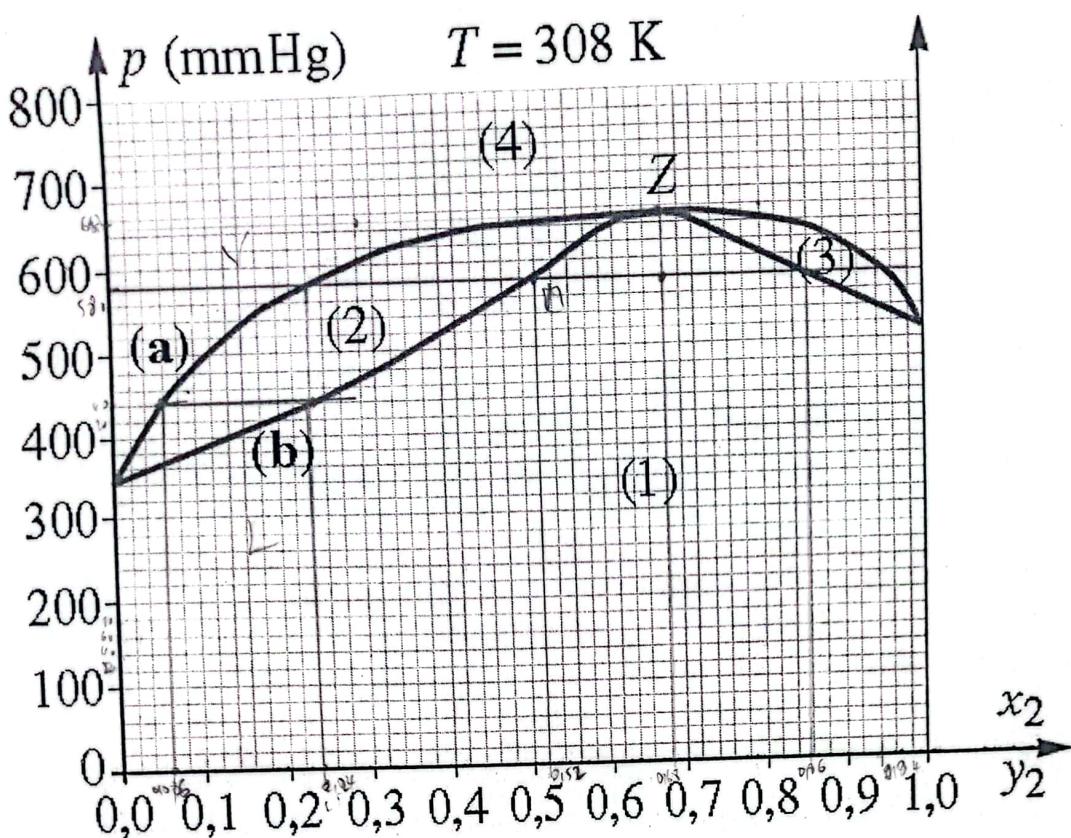
3. Déterminer la température de solidification de l'eau sous une pression  $p_f = 100,0$  bar.

Données supposées indépendantes de p et de T dans cette question :

$$\begin{aligned}\rho(H_2O(l)) &= 1 \text{ g.cm}^{-3}; \\ \rho(H_2O(s)) &= 0,9168 \text{ g.cm}^{-3}; \\ \Delta_{fus}H^\circ(H_2O) &= 6 \cdot 10^3 \text{ J.mol}^{-1}.\end{aligned}$$

### Exercice 2 (12 pts)

Le diagramme binaire isotherme liquide-vapeur de la propanone (notée 1) et du sulfure de carbone (noté 2) est donné ci-après. La composition est exprimée en fraction molaire en  $CS_2$ , on note  $x_2$  la fraction molaire en  $CS_2$  dans la phase liquide et  $y_2$  celle dans la phase vapeur.

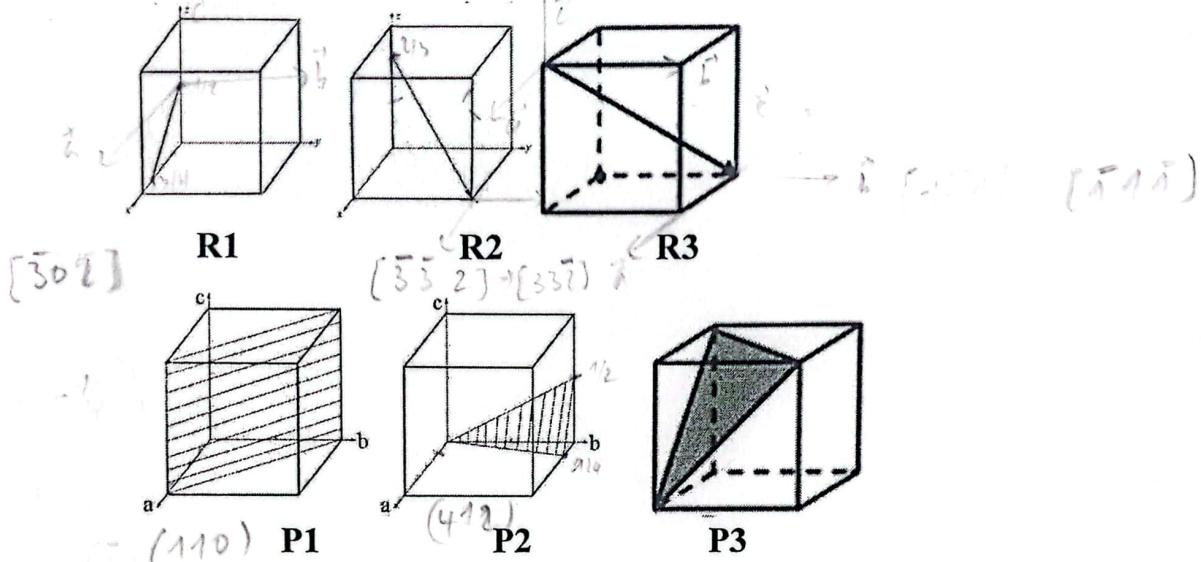


1. a) Indiquer le nombre et la nature des phases présentes dans les domaines numérotés (1), (2), (3), et (4) sur la figure. Nommer les courbes (a) et (b).  
 b) Quel est le nom donné au mélange liquide de composition égale à celle du maximum Z ? Quelles sont les propriétés de ce mélange ?
- azéohape*
2. À  $T = 308\text{ K}$ , un mélange liquide de propanone et de sulfure de carbone commence à bouillir sous une pression de  $440\text{ mmHg}$ . En déduire :
    - a) la composition du mélange liquide et celle de la première bulle de vapeur qui apparaît ;
    - b) la composition de la dernière goutte de liquide qui disparaît.
  3. À  $T = 308\text{ K}$ , on considère un mélange obtenu en mélangeant 4,0 mol de  $\text{CS}_2$  et 6,0 mol de  $\text{CH}_3\text{COCH}_3$ .
    - a) Calculer les quantités de matière  $n^l$  et  $n^v$  de liquide et de vapeur en équilibre sous la pression  $p = 580\text{ mmHg}$ .
    - b) Calculer la quantité de matière n° 1 de propanone liquide présente dans ce système.
  4. a) Indiquer lequel des deux constituants possède la température d'ébullition la plus élevée. Justifier très brièvement la réponse.  
 b) Représenter l'allure du diagramme binaire isobare ( $p = p_z = 658\text{ mmHg}$ ) liquide - vapeur du système binaire propanone - sulfure de carbone.  
 c) On réalise, sous la pression  $p = p_z = 658\text{ mmHg}$ , la distillation fractionnée d'un mélange contenant de la propanone et du sulfure de carbone. Indiquer la nature du distillat et la nature du résidu de distillation dans les deux cas suivants :  $x_2 = 0,3$  et  $x_2 = 0,8$ .

Épreuve de Cristallographie**Exercice 1 : (6 pts)**

On considère un réseau cubique simple de vecteurs de bases ( $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ) dont l'origine se trouve au croisement des arêtes en pointillés (ou indiqué).

- 1- Donner les indices de la rangée R1, R2, R3
- 2- Donner les indices de Miller du plan P1, P2, P3

**Exercice 2 (4 pts)**

- 1) Représenter la molécule de dibromométhane  $\text{CH}_2\text{Br}_2$ . Dénombrer les différents éléments de symétrie de cette molécule (la molécule possède la même géométrie que le méthane  $\text{CH}_4$ )
- 2) Donner les points équivalents obtenus par les opérateurs de symétrie suivants :
  - 2' ( $2 \parallel oz$  et  $m$  dans le plan  $xoy$ )  $X(x y z) \rightarrow$
  - 4 ( $4 \parallel oz$ )  $X(x y z) \rightarrow$

**Exercice 3 (3,5pts)**

On étudie un cristal NaCl avec un faisceau de rayons X de longueur d'onde  $\lambda = 0,568 \text{ \AA}$ . La première diffraction de Bragg se produit à  $\theta = 5^{\circ}58'$ . Elle est causée par les plans d'ions qui sont parallèles à une face du réseau cubique à faces centrées.

- a) Donner les indices de Miller de ces plans.
- b) Calculer la distance interréticulaire  $d_{hkl}$ .
- c) Calculer le paramètre de maille  $a$ .

**Exercice 4 (6,5pts)**

Le platine cristallise dans la structure cubique centrée.

- 1) Calculer le paramètre de maille, la masse volumique et la compacité
- 2) Calculer le rayon atomique maximal pour un élément pouvant s'insérer dans les différents sites cristallographiques
- 3) Représenter les motifs et les sites cristallographiques dans les plans (100) et (110)  
Données : masse molaire Pt : 195,08 g/mol ; rayon atomique Pt : 139 pm

**Français – Contrôle des connaissances**

Durée de l'épreuve : 2 heures

Exercice 1 : Questionnaire à choix multiple / 5 points

Choisissez la bonne réponse parmi celles qui vous sont proposées.

N°	Questions
1	On dit et on écrit ✗a. Je ne suis pas la personne qui a demandé le rendez-vous. b. Je ne suis pas la personne qui ai demandé le rendez-vous. c. (a ou b, au choix) d. (a ou b, avec une nuance de sens)
2	On dit et on écrit a. La douzaine de cahiers que j'ai achetés ont coûtés mille francs. b. La douzaine de cahiers que j'ai achetés ont coûté mille francs. c. La douzaine de cahiers que j'ai acheté ont coûté mille francs. ✗d. La douzaine de cahiers que j'ai acheté a coûté mille francs.
3	On écrit a. Nous mettrons soient les enseignants, soient les étudiants dans cette salle. ✗b. Nous mettrons soit les enseignants, soit les étudiants dans cette salle. c. Nous mettrons soi les enseignants, soi les étudiants dans cette salle. d. (a, b ou c, selon le sens)
4	On écrit ✗a. Une espèce d'idiot très excité s'est précipité sur la scène. b. Une espèce d'idiot très excitée s'est précipitée sur la scène. c. Une espèce d'idiot très excitée s'est précipité sur la scène. d. Une espèce d'idiot très excité s'est précipitée sur la scène.
5	On écrit a. Des bons livres que nous avons lu nous avons retiré un grand profit. b. Des bons livres que nous avons lus nous avons retirés un grand profit. ✗c. Des bons livres que nous avons lus nous avons retiré un grand profit. d. Des bons livres que nous avons lu nous avons retirés un grand profit.
6	On écrit a. Ils se sont donné de la peine ; ils se sont donné tout entiers à leur travail. b. Ils se sont donnés de la peine ; ils se sont donnés tout entiers à leur travail. c. Ils se sont donné de la peine ; ils se sont donnés tout entiers à leur travail. ✗d. Ils se sont donnés de la peine ; ils se sont donné tout entiers à leur travail.
7	On écrit a. Cette année se disait-il j'ai une chance de réussir b. Cette année se disait-il, j'ai une chance de réussir. c. Cette année, se disait-il j'ai une chance de réussir ✗d. Cette année, se disait-il, j'ai une chance de réussir.

	On écrit
8	<p><input checked="" type="checkbox"/> a. Quelles que soient ces dames et quels que soient leurs statuts, elles seront traitées comme tout le monde.</p> <p>b. Quelque soient ces dames et quelque soient leurs statuts, elles seront traitées comme tout le monde.</p> <p>c. Quelques soient ces dames et quelques soient leurs statuts, elles seront traitées comme tout le monde.</p> <p>d. Quels que soient ces dames et quels que soient leurs statuts, elles seront traitées comme tout le monde.</p>
9	<p>On dit et on écrit</p> <p>a. Moins de deux décennies s'est écoulé depuis la tragédie.</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> b. Moins de deux décennies se sont écoulées depuis la tragédie.</p> <p>c. (a ou b, au choix)</p> <p>d. (a ou b, selon le contexte)</p>
10	<p>On écrit</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> a. En deux mil vingt et un, il a fêté ses quatre-vingts ans.</p> <p>b. En deux mil vingt-un, il a fêté ses quatre-vingts ans.</p> <p>c. En deux mil vingt et un, il a fêté ses quatre-vingt ans.</p> <p>d. En deux mil vingt un, il a fêté ses quatre-vingt ans.</p>

### Exercice 2 : Résumé de texte (/ 15 points)

#### Texte d'étude

La démocratie, au sens étymologique du mot, désigne le gouvernement par le peuple. Une réflexion sur ses nouvelles formes passe naturellement par l'examen de la place des citoyens dans l'organisation et la direction des affaires publiques. Elle passe également par l'étude de la persistance de l'oligarchie et de l'autocratie dans nos sociétés, puisque l'idéal démocratique est né du rejet de la loi du plus fort et de la hiérarchie sociale au profit des principes d'égalité et de liberté.

Mesurer la participation citoyenne implique de jeter un regard attentif sur divers aspects de la vie politique comme le taux de participation aux processus électoraux, le niveau de l'engagement social et de l'action militante, l'efficacité des différentes méthodes de participation publique, la compétence civique ainsi que le niveau de l'éthique sociale des citoyens. On doit également considérer l'influence qu'exercent les principaux acteurs de la scène publique que sont les politiciens et les médias puis se demander si l'espace décisionnel accordé aux citoyens est suffisant ou s'il n'y a pas lieu de l'élargir et de l'augmenter de façon significative. Enfin, il importe de jeter un regard attentif aux nouvelles formes de participation citoyenne élaborées et expérimentées depuis un certain nombre d'années déjà.

Il n'est pas sans intérêt de rappeler au préalable qu'être citoyen signifie justement posséder le droit, sinon le privilège de participer librement à la vie de la communauté politique à laquelle on appartient. Cette participation se fait d'abord par la discussion avec les autres membres de la collectivité pour déterminer les paramètres du bien commun parce que le dialogue fondé sur la tolérance, le respect et l'empathie permet de concilier davantage les intérêts individuels et l'intérêt général dans l'esprit d'une coexistence harmonieuse et pacifique. Incidemment, plusieurs études contemporaines ont démontré que la participation des citoyens dans l'élaboration des solutions aux problèmes de leur communauté comporte d'énormes avantages. Cela permet d'éveiller les consciences et de développer la compétence civique en faisant reculer les frontières de l'ignorance.

Cela favorise également l'esprit communautaire lequel exige confiance, coopération et compromis entre les individus. Cela améliore enfin la prise de décision, la rendant plus juste, plus rationnelle, plus adéquate, plus acceptable et mieux acceptée. (...)

Si la démocratie est une forme très ancienne de gouvernement, la réalité montre qu'elle est en même temps très jeune et même, à bien des égards, relativement embryonnaire. Dans l'histoire moderne, elle a, presque partout, à peine un siècle. Auparavant, la majorité des citoyens, principalement les femmes, n'avaient même pas droit de vote. Et on considérait en général qu'une fois leur bulletin dans l'urne, les gens n'avaient plus rien à dire. Le Parlement, institution fondatrice de la démocratie moderne, était lui-même un pouvoir oligarchique détenant le monopole de l'expression démocratique et refusant d'inviter les citoyens à l'accompagner dans l'exercice de ses responsabilités. Cette façon de voir a été remise en question dans la foulée de la démocratisation de l'instruction, de l'accès au savoir et de l'entrée en scène des médias de masse. Il a fallu l'émergence d'une véritable opinion publique pour que les représentants du peuple et les dirigeants « élus » lèvent progressivement les restrictions au droit de vote et à la création d'associations citoyennes, puis qu'ils comprennent qu'il leur était désormais indispensable non seulement de prendre le pouls de la population, mais également de négocier leurs interventions avec elle, sinon de partager le pouvoir avec elle. De la « démocratie sans le peuple », on a cherché à passer à la « démocratie avec le peuple » pour donner naissance à la *participation publique*, processus par lequel ceux qui ont la mission de décider et d'édicter les règles sociales invitent les citoyens concernés à s'exprimer et à commenter les choix envisagés.

Après quelques décennies d'usage, la question est aujourd'hui de savoir ce qu'a donné et donne toujours cette participation citoyenne. Pour tous ceux qui s'y sont intéressés, la participation publique présente un bulletin équivoque. Dans la colonne positive, on ne peut pas nier que plusieurs décisions gouvernementales et parlementaires ont pu être modifiées et même abandonnées en faveur du point de vue citoyen. Les autorités ont été éveillées à de nouvelles réalités et de nombreux citoyens ont pu à maintes reprises exprimer craintes et oppositions autant qu'avis et accords. Au fil du temps, plusieurs ont pu établir un contact régulier et un dialogue fructueux avec la classe politique au point où certains citoyens se sont vu confier des responsabilités de gestionnaires locaux de différents services défrayés par les fonds publics. D'autres, les dirigeants des grandes organisations socioéconomiques, ont même été invités à assumer des responsabilités politiques réelles dans le contexte de l'entrée en scène de la *démocratie sociale*, produit des exercices de concertation des grands acteurs sociaux.

Jean-Pierre Charbonneau, « De la démocratie sans le peuple à la démocratie avec le peuple », *Ethique publique*, 2005

Résumez ce texte en 210 mots. Une marge de 10% en plus ou en moins sera tolérée. Vous indiquerez à la fin de votre résumé le nombre exact de mots qu'il comporte.

### Devoir de Mécanique quantique

Durée : 2H00

#### Exercice 1 :

On considère une particule libre de masse  $m$  que l'on décrit par un paquet d'ondes (à une dimension) défini par :

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k_x) e^{i[k_x \cdot x - \omega(k_x) \cdot t]} dk_x$$

1) Montrer que  $\Psi(x, t)$  est solution de l'équation de Schrödinger.

2) On suppose que  $g(k_x)$  est une gaussienne centrée sur  $k_{x_0}$  ; soit :

$$g(k_x) = A \cdot \exp[a^2(k_x - k_{x_0})^2/4] \quad \text{avec } A = \frac{\sqrt{a}}{(2m)^{3/2}} \quad \text{et } a \text{ est homogène à une distance.}$$

a) Montrer que la probabilité de présence de la particule est indépendant du temps.

b) En utilisant la forme ci-dessus de  $g(k_x)$ , on obtient après intégration, l'expression suivante pour  $\Psi(x)$  (à un facteur de phase près) :

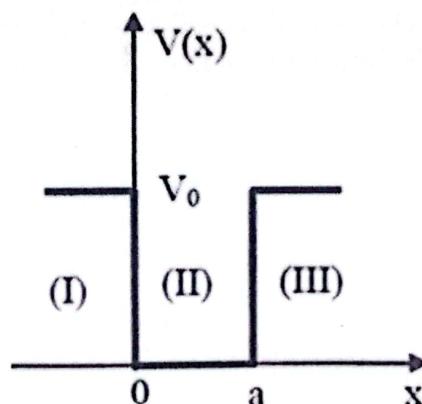
$$\Psi(x, t) = \left[ \frac{2a^2}{\pi\alpha(t)} \right]^{\frac{1}{4}} \exp\left( \frac{\phi^2(x, t)}{Z(t)} \right)$$

$$\text{avec } \alpha(t) = a^4 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2} \quad ; \quad \phi(x, t) = x - \frac{\hbar k_{x_0} t}{m} \quad \text{et} \quad Z(t) = a^2 + i \frac{2\hbar t}{m}$$

i) Calculer la densité de probabilité. ii) En déduire la vitesse du groupe  $v_g$ .

3) Retrouver  $v_g$  en considérant la relation de dispersion  $\omega(k_x)$ . Comparer  $v_g$  à la vitesse de phase  $v_\phi$  et à la vitesse  $v$  de la particule. Conclure.

#### Exercice 2 :



Soit une particule de masse  $m$  d'énergie  $E$  se trouve piégée dans un puits de potentiel carré de la figure ci-contre tel que  $0 < E < V_0$

### 1) $V_0$ fini

- a) Résoudre l'équation de Schrödinger stationnaire dans les trois régions.
- b) Donner la signification physique de chaque terme.
- c) Expliciter les conditions de continuités aux points  $x=0$  et  $x=a$ .
- d) Déduire la condition à laquelle doivent satisfaire les quantités  $k$ ,  $\rho$  et  $a$ , où  $k$  et  $\rho$  sont définies comme suit :  $k^2 = 2mE/\hbar^2$  et  $\rho^2 = 2m(V_0-E)/\hbar^2$ .

### 2) $V_0$ infini

Si  $V_0$  tend vers l'infini :

- a) Que deviennent les solutions de l'équation de Schrödinger dans les régions (I) et (III)?
- b) En écrivant les conditions de continuité aux points  $x=0$  et  $x=a$ , déduire les valeurs possibles de l'énergie  $E$  de la particule dans le puits. Conclure.
- c) Généraliser à trois dimensions et retrouver les énergies de la particule et les fonctions d'onde associées. Donner la dégénérescence des 5 premiers niveaux d'énergie.

## Exercice 3 :

- 1) a-** Interpréter la relation qui régit l'effet Compton :

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{mc} (1 - \cos\theta)$$

- b-** Montrer que la relation entre l'angle de diffusion du photon et l'angle de diffusion de l'électron est telle que :

$$\cotg \phi = \left( 1 + \frac{h\nu_0}{mc^2} \right) \tg \frac{\theta}{2}$$

- c-** Montrer que l'énergie cinétique maximale transférée à l'électron après diffusion est :

$$E_c^{\max} = \frac{h\nu_0}{1 + \frac{mc^2}{2h\nu_0}}$$

- 2) a-** Un rayon X de longueur d'onde  $0.300\text{\AA}$  subit une diffusion Compton à  $60^\circ$ . Quelles sont, après diffusion, la longueur d'onde du photon et l'énergie cinétique de l'électron.

- b-** Un électron frappé par un Rayon X de  $0.5 \text{ MeV}$  acquiert une énergie de  $0.1 \text{ MeV}$ .

- i)** Calculer la longueur d'onde du photon diffusé sachant que l'électron était initialement au repos.

- ii)** Calculer l'angle que fait le photon diffusé avec le photon incident.

On donne :  $h/mc = 0.024\text{\AA}$  ( $= \lambda_c$  dite longueur d'onde de Compton).

**Devoir de TRANSFERTS THERMIQUES****Durée : 03 heures****Exercice 1 (07 points)**

Un compresseur aspire en régime permanent un débit d'air aux conditions de pression  $P_1$  et de température  $T_1$  et rejette aux conditions  $P_2$  et  $T_2$ . L'air est considéré comme un gaz parfait de coefficient  $\gamma = 1,4$  et de masse molaire 29 g/mol, sa vitesse est négligeable ainsi que l'effet de la pesanteur. On réalisera les applications numériques avec  $T_1 = 300$  K,  $P_1 = 10^5$  Pa et  $T_2 = 500$  K,  $P_2 = 5 \cdot 10^5$  Pa,  $R = 8,315 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ .

Dans le carter du compresseur, l'air est brassé par un moteur électrique de travail indiqué massique  $w_i$ . La transformation est adiabatique.

- 1) calculer le travail indiqué en fonction des données.
- 2) On appelle compression polytropique, une transformation non adiabatique, sans frottements qui a la même représentation dans le diagramme (T, s) que la transformation réelle.
  - a) Que représente la variation d'entropie  $\Delta S_{pol}$  entre les états A( $T_1, P_1$ ) et B( $T_2, P_2$ ) ?
  - b) Exprimer le travail indiqué élémentaire  $\delta w_{i,pol}$  dans cette transformation en fonction de T et de P.
- 3) a) On appelle rendement polytropique du compresseur le rapport  $\eta_{pol} = \frac{\delta w_{i,pol}}{\delta w_i}$ . Donner son expression en fonction de  $\gamma$ , T et P.
- b) On admet que ce rendement est constant tout le long de la compression. Montrer que T et P sont reliés par une relation de la forme  $T^n P^{1-n} = \text{cte}$  et exprimer  $\eta_{pol}$  en fonction de n et de  $\gamma$ .

Calculer n pour  $\eta_{pol} = 1$ . Commenter.

- 4) a) Calculer n et  $\eta_{pol}$  dans les hypothèses de 3) avec les valeurs numériques proposées.
- b) Calculer l'entropie créée par unité de masse d'air comprimé.
- c) Déterminer l'équation de l'isobare  $P = P_2$  et de l'isenthalpe  $h = h_A$  dans le diagramme entropique (T, s) de l'air. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection C.
- d) Représenter ces deux courbes ainsi que la courbe correspondant à la compression.
- e) Déterminer graphiquement  $w_{i,pol}$  et  $w_i$ .

En donner une valeur approchée et les comparer aux valeurs exactes.

### **Exercice 2 (06 points)**

1) A la frontière d'un solide, les échanges de chaleur dans l'environnement se produisent par convection et rayonnement.

Expliquer qualitativement ces deux modes d'échanges.

2) En conduction de la chaleur, on linéarise les lois d'échanges de la chaleur par convection et rayonnement thermiques si bien que les densités de flux de chaleur  $\varphi_{cv}$  et  $\varphi_r$  sont respectivement égales à :

$\varphi_{cv} = h_{cv}(T_p - T_{cv})$  et  $\varphi_r = h_r(T_p - T_r)$ , où  $h_{cv}$  et  $h_r$  sont les coefficients d'échanges respectivement de convection et de rayonnement,  $T_p$  est la température de la paroi du corps échangeant,  $T_{cv}$  et  $T_r$  sont les températures de référence du milieu environnant.

Sous quelles conditions peut-on linéariser la loi d'échange par rayonnement ? Exprimer  $h_r$  en fonction du facteur de forme, de la constante de Boltzmann dont on rappellera la valeur et d'une température que l'on définira.

Montrer que dans les conditions ordinaires de température,  $h_r \approx 6Wm^{-2}K^{-1}$  si le facteur de forme est voisin de 1.

### **EXERCICE 3 (07 points)**

La croûte continentale terrestre a une épaisseur  $L$  d'environ 35 km. On peut la considérer comme équivalente à une couche homogène de conductivité  $\lambda=23$  W/m K. Au niveau du sol, la température est  $T_0 = 273$  K, et à la profondeur  $L$ , elle vaut  $T_L = 873$  K.

1. Exprimer la densité de flux  $\varphi_{th}$  (puissance géothermique par unité de surface) issue de la croûte continentale, en fonction du rayon terrestre  $R$  et de l'épaisseur  $L$  de cette croûte (ainsi que  $\lambda$ ,  $T_0$  et  $T_L$ ).
2. En considérant que l'épaisseur  $L$  est très petite devant le rayon  $R$  ( $L \ll R$ ), exprimer  $\varphi_{th}$  en fonction de  $L$  (ainsi que  $\lambda$ ,  $T_0$  et  $T_L$ ). En déduire que le problème pourra être traité en géométrie plane.
3. En fait, il faut tenir compte du caractère radioactif des éléments de la croûte continentale terrestre qui dissipent une puissance interne volumique supposée uniformément répartie  $q_{ra}= 2,25 \cdot 10^{-5}$  W/m<sup>3</sup>. Déterminer le profil de la température de la croûte.
4. Représenter graphiquement ce profil.
5. Calculer la température  $T_5$  à la profondeur de 5 km.
6. En déduire  $\varphi_{ra}$  puissance géothermique par unité de surface au niveau du sol, quand on tient compte des éléments radioactifs.

La table de la loi normale et les calculatrices non programmables sont autorisées

**[Exercice 1 :]** Soit  $X$  une variable aléatoire distribuée selon une loi  $N(1; \sigma^2)$  où  $\sigma$  est un paramètre inconnu. L'objectif est dans un premier temps d'estimer ce paramètre puis d'en donner un intervalle de confiance à 95%. Dans ce but, soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un n-échantillon de loi  $N(1; \sigma^2)$ . On pose  $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - 1)^2$ .

1. Calculer l'espérance de la variable aléatoire  $S_n^2$ .
2. Déterminer pour chaque  $1 \leq i \leq n$  la loi de la variable aléatoire  $\frac{X_i - 1}{\sigma}$ .
3. En déduire la loi de la variable aléatoire  $\sum_{i=1}^n (\frac{X_i - 1}{\sigma})^2$ . Soit  $Z$  une variable aléatoire distribuée selon une loi  $\chi^2_{20}$ . Déterminer les constantes  $\chi^2_{\alpha/2}$  et  $\chi^2_{1-\alpha/2}$  solutions de l'équation  $P(\chi^2_{\alpha/2} < Z < \chi^2_{1-\alpha/2})$ , pour  $\alpha = 0,05$ .
4. En faisant usage des questions précédentes, donner un intervalle de confiance pour la paramètre  $\sigma^2$  (au niveau 95%) dans le cas où sur un échantillon de taille 20, on a  $S_n^2 = 0,5$ .
5. En déduire un intervalle de confiance pour le paramètre  $\sigma$ .

**[Exercice 2 :]**

Pour  $\theta > 0$ , on définit la fonction

$$f_\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \begin{cases} e^{\theta-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'objet de ce problème est de construire des estimations de  $\theta$ .

1. Montrer que  $f_\theta$  est une densité de probabilité.
2. Soit  $X$  une variable aléatoire admettant  $f_\theta$  pour densité de probabilité. Démontrer que la variable  $X$  admet une espérance et une variance et que

$$E(X) = \theta + 1, \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = 1.$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère des variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  indépendantes admettant  $f_\theta$  pour densité de probabilité.

3. On pose  $U_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - 1)$ .
  - 3.1. Calculer l'espérance et la variance de  $U_n$ .
  - 3.2. Que peut-on en déduire ?
4. Justifier que, si  $n$  est assez grand, la variable aléatoire

$$T_n := \sqrt{n}(U_n - \theta)$$

suit approximativement la loi normale centrée réduite.

5. On suppose que  $n = 100$  et  $x = 2,0706$ . À l'aide de la question précédente, déterminer un intervalle de confiance pour  $\theta$  au niveau de confiance 95%.

6. Enoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev
- 6.1 En appliquant ce théorème à la variable aléatoire  $X$ , déterminer un intervalle de confiance aléatoire pour  $\theta$  avec un niveau de confiance supérieur ou égal à 1 -  $\alpha = 95\%$ .
- 6.2 Donner l'intervalle réel ainsi obtenu lorsque  $n = 100$  et  $x = 2,0706$ .
7. Comparer les intervalles de confiance obtenus aux questions 6.2 et 5. Quel serait le niveau de confiance permettant d'obtenir l'intervalle de confiance de la question 6.2 avec la méthode de la question 5 ?

**Exercice 3 :**

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  :  $X \sim P(\lambda)$ .

1. Calculer  $E[X]$ ,  $E[X^2]$  et la variance de  $X$  ?
2. On suppose que  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes et telles que  $X_1 \sim P(\lambda_1)$  et  $X_2 \sim P(\lambda_2)$ . Montrer que  $X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$ .
3. On considère une suite  $X_n, n = 0, 1, 2, \dots$ , de variables aléatoires indépendantes, qui suivent des lois de Poisson de paramètre unité : pour tout  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $X_n \sim P(1)$ . On pose  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ .
  - (a) Quelle est la loi de  $S_n$ ? Soit  $F_n$  la fonction de répartition de la variable aléatoire  $S_n$ . Montrer que  $F_n(n) = e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$ .
  - (b) Montrer que  $Z_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$  converge en loi vers la loi normale unitaire centrée.
  - (c) Déduire des questions précédentes que  $\lim_n e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$ .

**DEVOIR DE MECANIQUE DU SOLIDE 3**

**CPGE – MP/PC**

**Durée :** 2h

**Année :** 2022/2023

**EXERCICE**

Soit  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  un repère orthonormé fixe lié au bati d'une éolienne constitué d'une girouette et d'une hélice. La girouette ( $S_1$ ) lié au repère  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , a une liaison pivot avec le bati fixe de manière à tourner dans le plan horizontal autour de l'axe  $(O, \vec{z}_0)$ , avec  $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$ ,  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$  et  $\overrightarrow{OG} = a \vec{x}_1$  où  $a$  : est une constante positive.

L'hélice ( $S_2$ ) est lié au repère  $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  et ayant un rayon  $\overrightarrow{GP} = b \vec{z}_2$ , tourne autour de l'axe  $\vec{x}_1 \equiv \vec{x}_2$  tel que :  $\beta = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ .

La girouette a un moment d'inertie par rapport à l'axe  $(O, \vec{z}_0)$  qui est égal à :  $I$

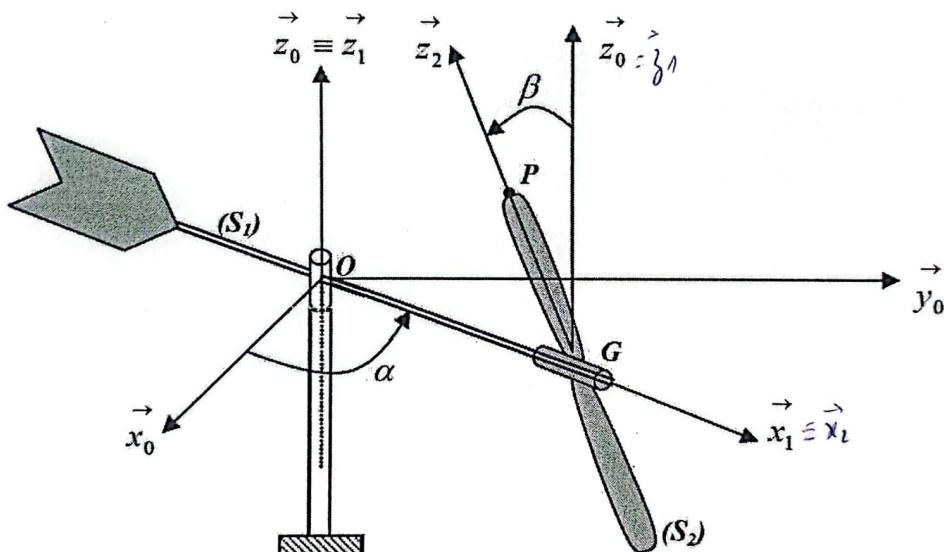
Le tenseur d'inertie de hélice de masse  $M$  et de centre d'inertie  $G$  dans le repère  $R_2$  est donné

$$\text{par : } I_G(S_2)_{R_2} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_2}$$

Un balourd représenté par une masse ponctuelle  $m$  située à l'extrémité de l'hélice au point  $P$  sur l'axe  $(G, \vec{z}_2)$ .

Déterminer :

1. Le moment cinétique de la giroquette dans son mouvement par rapport à l'axe  $(O, \vec{z}_0)$ ;
2. Le moment cinétique  $\vec{\sigma}^0(S_2 / R_0)$  de l'hélice au point  $O$  exprimé dans le repère  $R_2$ ;
3. Le moment dynamique de l'hélice par rapport à l'axe  $(O, \vec{z}_0)$ :  $\vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}^0(S_2 / R_0)$ , exprimé dans le repère  $R_2$ ;
4. Le moment cinétique du balourd par rapport au repère  $R_0$  et exprimé dans le repère  $R_2$ ;
5. L'énergie cinétique totale du système par rapport au repère  $R_0$ .



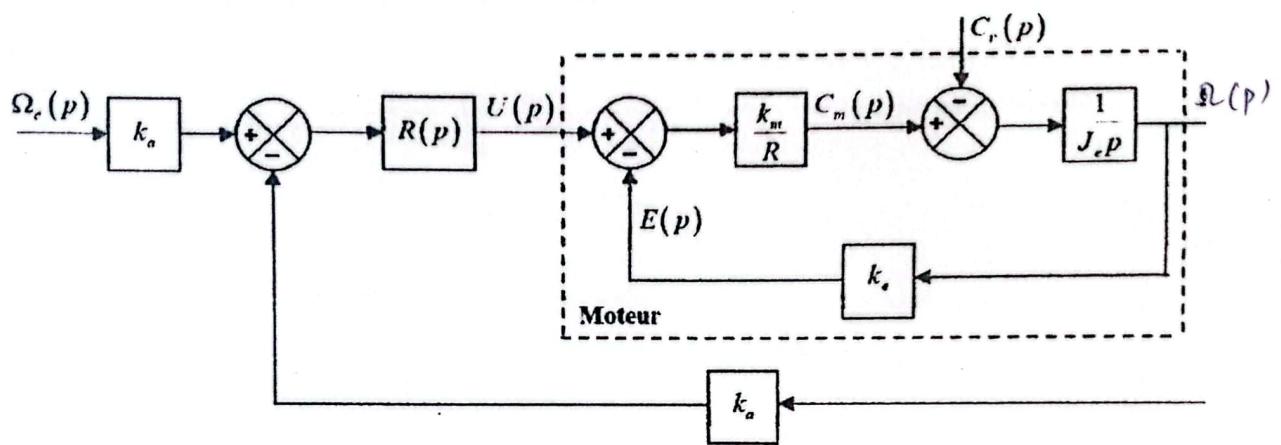
**Devoir d'Automatique 3 – Semestre 4**

Documents non autorisés, calculatrice autorisée

Durée : 2h

**Asservissement de vitesse d'un moteur**

On s'intéressera ici à l'asservissement de vitesse d'un moteur électrique à courant continu. La structure d'asservissement est donnée par la figure 1.

**Fig.1 – Schéma fonctionnel d'asservissement de vitesse du moteur**

Les paramètres du système sont regroupés dans le tableau ci-dessous où  $L(*)$  est l'opérateur de la transformée de Laplace :

$\omega_c(t)$ : la vitesse de consigne ( $\text{rad.s}^{-1}$ ) ; $L(\omega_c(t)) = \Omega_c(p)$	$R(p)$ : la fonction de transfert du correcteur.
$\omega(t)$ : la vitesse de rotation ( $\text{rad.s}^{-1}$ ) ; $L(\omega(t)) = \Omega(p)$	$k_a$ : la constante de couple ( $\text{N.m/A}$ ) .
$c_m(t)$ : le couple moteur ( $\text{N.m}$ ) ; $L(c_m(t)) = C_m(p)$	$k_e$ : la constante de f.c.e.m ( $V/\text{rad.s}^{-1}$ ) .
$c_r(t)$ : le couple résistant ( $\text{N.m}$ ) ; $L(c_r(t)) = C_r(p)$ .	$R$ : la résistance de l'induit ( $\Omega$ ) .
$u(t)$ : la tension aux bornes du moteur ( $V$ ) ; $L(u(t)) = U(p)$ .	$k_a$ : le gain du capteur de vitesse ( $V/\text{rad.s}^{-1}$ ) .
$e(t)$ : la force contre électromotrice ( $V$ ) ; $L(e(t)) = E(p)$ .	$J_e$ : l'inertie équivalente ( $\text{kg.m}^2$ ) .

## 1. Modélisation du moteur

1.1. A partir du schéma bloc du moteur, l'expression de la vitesse angulaire  $\Omega(p)$  peut se mettre sous la forme  $\Omega(p) = H_1(p)U(p) - H_2(p)C_r(p)$ . Montrer que  $H_1(p)$  et  $H_2(p)$  peuvent se mettre sous la forme canonique :  $H_1(p) = \frac{K_1}{1 + \tau_1 p}$  ;  $H_2(p) = \frac{K_2}{1 + \tau_1 p}$ . Exprimer  $K_1$ ,  $K_2$  et  $\tau_1$  en fonction des paramètres du moteur  $k_m$ ,  $k_e$ ,  $R$  et  $J_e$ .

1.2. Pour  $C_r(t) = 0 \text{ N.m}$ , on donne sur la figure 2 le relevé de la réponse indicielle du moteur pour un échelon en tension d'amplitude 10 V. Identifier les valeurs de  $K_1$  et  $\tau_1$  de la fonction de transfert  $H_1(p)$ .

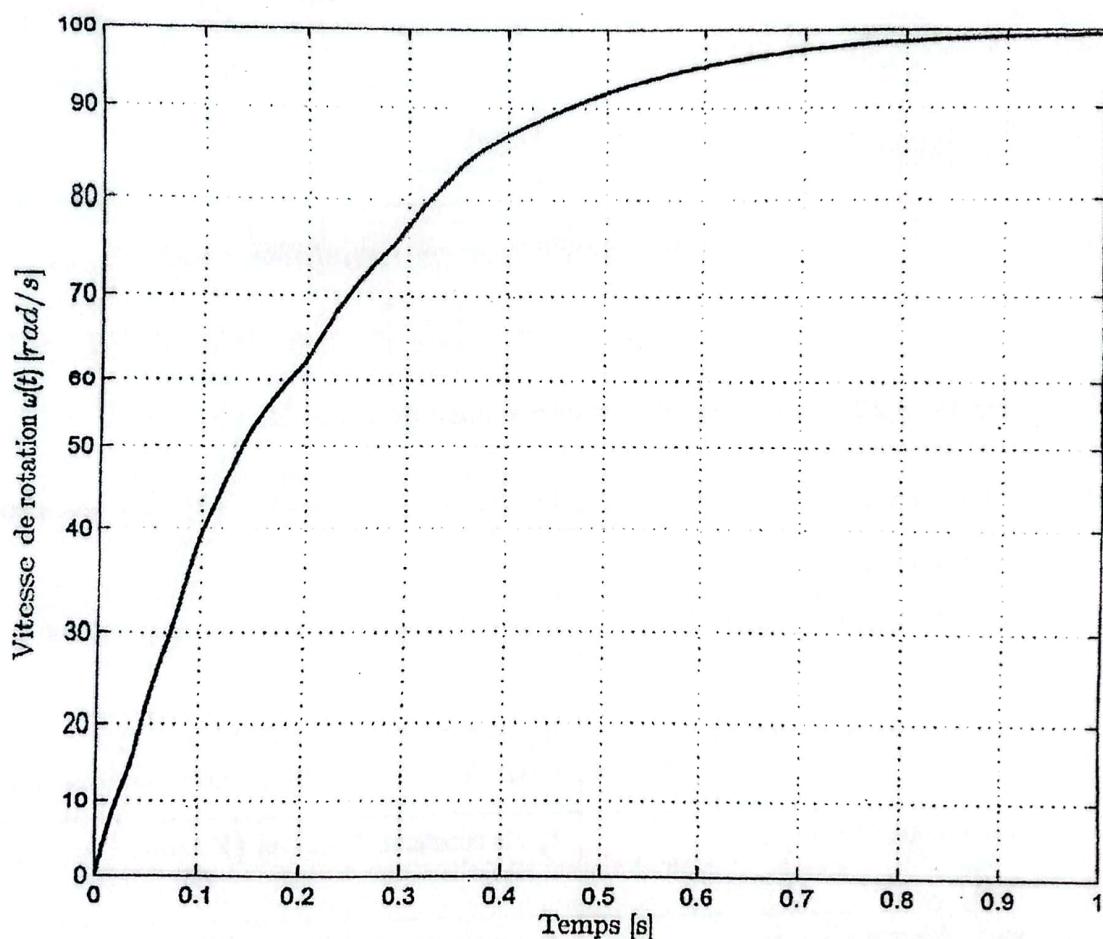
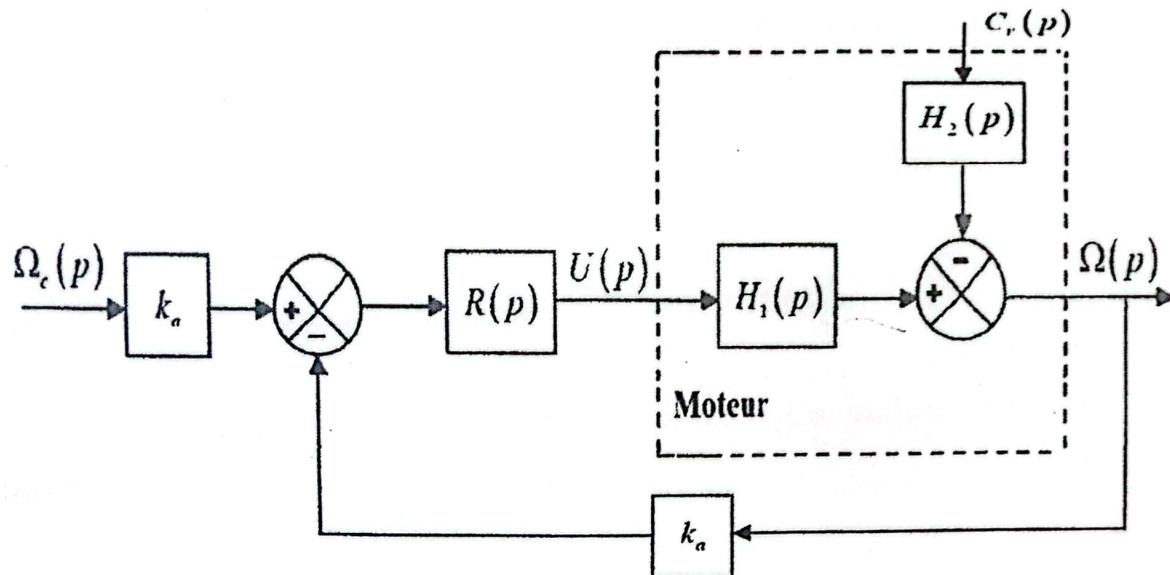


Fig.2—Réponse indicielle du moteur à un échelon de tension d'amplitude 10V ( $C_r(t)=0$ )

1.3. On considère que  $R=1 \Omega$  et  $k_m=k_e$ . Déduire alors les valeurs numériques des paramètres  $k_e$ ,  $J_e$  et  $K_2$ .

## 2. Asservissement du moteur

Le schéma bloc de l'asservissement de la figure 1 est mis sous la forme suivante en tenant compte des résultats de la question 1.1.



**Fig.3 – Schéma fonctionnel d'asservissement de vitesse du moteur**

Dans la suite, on prendra :  $C_r(p) = 0$  ;  $K_1 = 10 \text{ rad/s.V}$  ;  $K_2 = 100 \text{ rad/s.V}$  ;  $\tau_1 = 0.2 \text{ s}$  ;  $k_a = 0.25 \text{ V/rad.s}^{-1}$ . L'asservissement du moteur doit respecter les performances suivantes :

Performances	Valeurs souhaitées
Dépassemement	Sans dépassemement.
Précision	Erreur statique nulle pour une entrée en échelon.
Rapidité	Temps de réponse à $\pm 5\%$ inférieur à $2.5 \text{ s}$ .

On considère un correcteur de type Proportionnel (P) :  $R(p) = k_c$

**2.1.** Montrer que la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p) = \frac{\Omega(p)}{\Omega_c(p)}$  peut se mettre

sous la forme canonique  $H_{BF}(p) = \frac{K_{11}}{1 + \tau p}$ . Exprimer  $K_{11}$  et  $\tau$  en fonction seulement de  $k_c$

(les autres paramètres sont à remplacer par leurs valeurs numériques).

**2.2.** Calculer le gain  $k_c$  permettant d'assurer en boucle fermée un temps de réponse à  $\pm 5\%$   $t_{r\pm 5\%} = 0.3 \text{ s}$ .

2.3. Déterminer l'expression de l'erreur statique  $\varepsilon(\infty) = \omega_c(\infty) - \omega(\infty)$  en fonction de  $k_i$  pour une consigne en vitesse  $\omega_c(t) = 200 \text{ rad.s}^{-1}$ .

2.4. Ce correcteur proportionnel permet-il de satisfaire les performances souhaitées? Justifier.

On considère maintenant un correcteur de type Intégral (I) :  $R(p) = \frac{k_i}{p}$

2.5. Calculer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p) = \frac{\Omega(p)}{\Omega_c(p)}$ . Donner les expressions du gain statique  $K$ , de la pulsation propre non amortie  $\omega_n$  et du coefficient d'amortissement  $\xi$  en fonction seulement de  $k_i$  (les autres paramètres sont à remplacer par leurs valeurs numériques).

2.6. Etablir la valeur de  $k_i$  permettant d'obtenir la réponse la plus rapide sans dépassement.

2.7. Pour cette valeur de  $k_i$ , déterminer le temps de réponse à  $\pm 5\%$  du système en boucle fermée ( $t_{r,\pm 5\%}$ ) à partir de l'abaque de la figure 4.

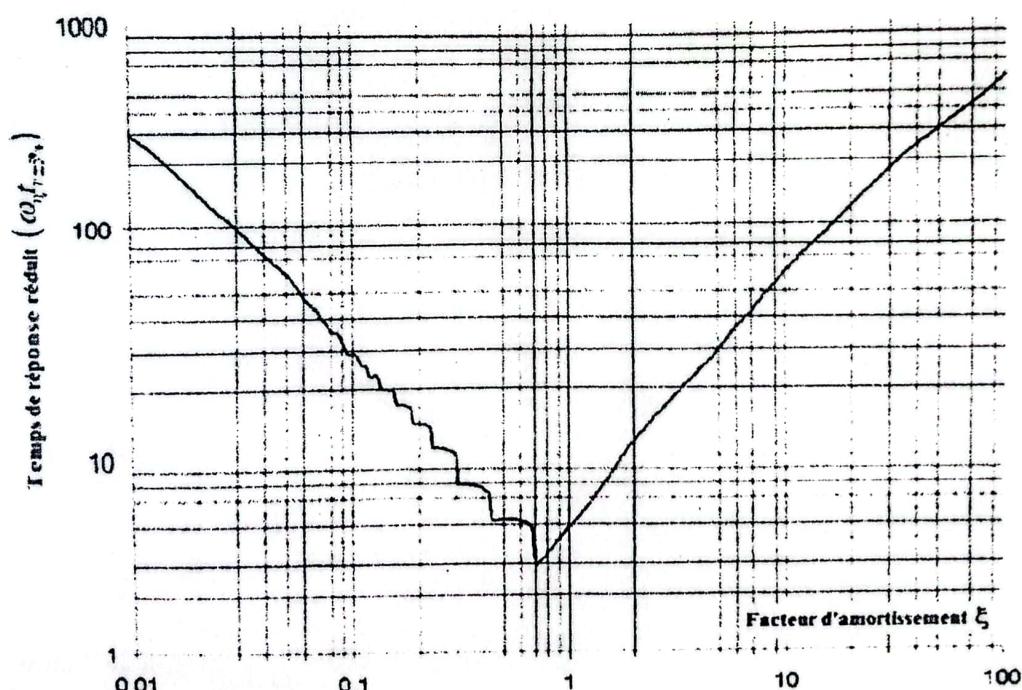


Fig. 4 – Abaque du temps de réponse réduit ( $\omega_n t_{r,\pm 5\%}$ ) en fonction de  $\xi$ .

2.8. Calculer l'erreur statique  $\varepsilon(\infty) = \omega_c(\infty) - \omega(\infty)$  pour une consigne en vitesse  $\omega_c(t) = 200 \text{ rad/s}$ .

$\delta = 2$        $h_{p_1, w_1} = 5$   
 $f_1 = 2$ ,  $h_{p_2, w_2} = 3$

2.9. Ce correcteur intégral permet-il de satisfaire les performances souhaitées ?