# Contrôle de Routine II & Éléments de TD (CdR2-MP2)

*Durée : 40 min.*

**Exercice 1 : Minimum Vital (10 pts)**

1. Soient $E$ espace vectoriel normé et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.
   Montrer que : $f$ est convexe si seulement si l'épigraphe de $f$ est convexe. 1
2. Donner l'exemple d'une fonction $h$ concave dont l'épigraphe est convexe. 1
3. Montrer que l'application déterminant det : $M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, A \longmapsto \det(A)$ est continue. 1
4. Montrer que l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$ est un connexe de $\mathbb{R}^2$. 1
5. Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. On munit $E \times F$ de la norme produit. Soit $A$ et $B$ deux partie de $E$ et $F$ respectivement. Déterminer la frontière de l'ensemble $A \times B$ notée par $Fr(A \times B)$. 1
6. Donner la définition et l'exemple d'une famille sommable. 1
7. **Définition :** Soient $E$ un ensemble non vide et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de $E$. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelé *suite exhaustive de parties finies* si :
   (i) $\forall n \in \mathbb{N}$, la partie $I_n$ est finie ; (ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \subseteq I_{n+1}$ ; (iii) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = E$.
   **Question :** Donner un exemple de suite exhaustive de parties finies de l'ensemble des entiers $\mathbb{Z}$. 2
8. **Exo-DM1-MPSI-1 (2021- 2022)** Soient $e, p, o \in \mathbb{R}_+^*$, on suppose que : $epo = 1$. Montrer que : 2

$$\frac{1}{e^3(p+o)} + \frac{1}{p^3(o+e)} + \frac{1}{o^3(e+p)} \geqslant \frac{1}{2}(ep + po + oe)$$

**Exercice 2 : Familles Sommables (04 pts)**

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer qu'il existe au moins un réel n'appartenant pas à $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$. 1
2. Soit $E$ un ensemble. Montrer qu'il n'existe aucune surjection de $E$ sur $\mathcal{P}(E)$. 1
3. Les familles $\left(\frac{2^{n+1}}{3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont - elles sommables ? Justifier votre réponse.
   0,5 0,5
4. On donne $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ; Calculer les sommes suivantes : $(a)$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $(b)$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.
   0,5 0,5

**Exercice 3 : Etude de projections sur des ouverts et sur des fermés (06 pts)**

On désigne par $p_1$ et $p_2$ les deux fonctions coordonnées (projecteurs) de $\mathbb{R}^2$ définies par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad p_1(x, y) = x \quad \text{et} \quad p_2(x, y) = y.$$

1. Monter que si $O$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $p_1(O)$ et $p_2(O)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$. 1
2. Soit $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$.
   (a) $H$ est - il un convexe de $\mathbb{R}^2$ ? Justifier clairement votre réponse. 1
   (b) Montrer que $H$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ mais que $p_1(H)$ et $p_2(H)$ ne sont pas des fermés de $\mathbb{R}$. 1
   ~~(c) Montrer que : $\forall a \in \mathbb{R}^2$, $a \in H \iff (p_1(a) + p_2(a))^2 - (p_1(a) - p_2(a))^2 = 4$.~~ 1
   (d) Montrer que si $F$ est un fermé et que $p_2(F)$ est une partie Bornée de $\mathbb{R}^2$, alors $p_1(F)$ est fermée. 2

 Date : 24 Novembre 2021.

# Contrôle de Routine II

01/19

## Exo 1 : Minimum Vital

1. Soient $E$ un e.v.n et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

Montrons que : $f$ convexe $\Longleftrightarrow$ $Epi(f)$ convexe.

$\Rightarrow$) Supposons que $f$ est convexe.

Montrons que $Epi(f) := \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq y\}$

est convexe.

Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in Epi(f)$, $\forall \lambda \in [0;1]$

On a:

$$\begin{cases} f(x_1) \leq y_1 \\ f(x_2) \leq y_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda f(x_1) \leq \lambda y_1 & (1) \\ (1-\lambda) f(x_2) \leq (1-\lambda) y_2 & (2) \end{cases}$$

$(1) + (2) \Rightarrow \quad \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \leq \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 \quad (3)$

Comme $f$ est convexe alors on:

$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \quad (4)$

En combinant (3) et (4), on trouve:

$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$. D'où on a:

$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \in Epi(f)$ c-à-d

$\lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2) \in Epi(f)$, $\forall \lambda \in [0,1]$

Conclusion: $Epi(f)$ est une partie convexe.

($\Leftarrow$) Supposons que $Epi(f)$ est convexe.

Montrons que $f$ est convexe.

$\forall x_1, x_2 \in E$, $\forall \theta \in [0,1]$ on a: par définition

$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \in Epi(f) \Rightarrow$ Par convexité de $Epi(f)$, on a: $\theta(x_1, f(x_1)) + (1-\theta)(x_2, f(x_2)) \in Epi(f)$

soit $(\theta x_1 + (1-\theta)x_2, \theta f(x_1) + (1-\theta)f(x_2)) \in Epi(f)$

D'où $f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \leq \theta f(x_1) + (1-\theta)f(x_2)$

Conclusion: $\forall x_1, x_2 \in E, \forall \theta \in [0,1]$, on a:

$f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \leq \theta f(x_1) + (1-\theta)f(x_2) \Rightarrow f$ est convexe.

Scanné avec CamScanner

2) Donnons l'exemple d'une fonction h concave dont l'épigraphe est convexe. $\frac{03}{19}$

Considérons la fonction : $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto 2x+1$

h est concave (car affine) et son épigraphe est convexe (car elle est aussi convexe).

3) Montrons que $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue
$A \longmapsto \det(A)$

$$\forall A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i}$$

où $S_n$ est l'ensemble des permutation de $\{1, -, n\}$ et
$\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation $\sigma$.

Ainsi nous pouvons dire que det est un polynôme en les coef de la matrice A. Donc c'est une application continue. En effet $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$.

~~Rmq : Une deuxième méthode existe et plus basé~~ sur la différentiabilité de det.

Montrons l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$ est un ensemble convexe de $\mathbb{R}^2$.

01/19

Vérifions si A est convexe

. $A \neq \emptyset$ car $(2,1) \in A$

. Soient $(a,b) \in A$, $(u,v) \in A$, $\forall \alpha \in ]0,1[$, on a :

$$\begin{cases} a > b \\ u > v \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha a > \alpha b \\ (1-\alpha)u > (1-\alpha)v \end{cases} \Rightarrow \alpha a + (1-\alpha)u > \alpha b + (1-\alpha)v$$

$$\Rightarrow (\alpha a + (1-\alpha)u, \alpha b + (1-\alpha)v) = \alpha(a,b) + (1-\alpha)(u,v) \in A$$

. si $\alpha = 0$, $\forall (a,b), (u,v) \in A$, on a :

$$\alpha(a,b) + (1-\alpha)(u,v) = (u,v) \in A$$

. si $\alpha = 1$, $\forall (a,b), (u,v) \in A$, on a :

$$\alpha(a,b) + (1-\alpha)(u,v) = (a,b) \in A$$

Concl : En résumé, on a : $\forall (a,b), (u,v) \in A$, $\forall \alpha \in [0,1]$ on a : $\alpha(a,b) + (1-\alpha)(u,v) \in A \Rightarrow A$ ~~est convexe~~ $\Longrightarrow$ A est convexe.

5) Déterminons la frontière de $A \times B$ (05/19)

On a : $Fr(A \times B) = \overline{A \times B} \setminus \overset{\circ}{\widehat{A \times B}}$

$= [(\bar{A} \setminus \mathring{A}) \times \bar{B}] \cup [\bar{A} \times (\bar{B} \setminus \mathring{B})]$

$= (Fr(A) \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times Fr(B))$

Concl : $Fr(A \times B) = (Fr(A) \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times Fr(B))$

) Famille sommable

Déf : Une famille $(a_i)_{i \in I}$ de réels positifs est SOMMABLE si l'ensemble :

$\left\{ \sum_{i \in J} a_i : J \subset I, J \text{ fini} \right\}$ est MAJORÉ.

Dans ce cas, sa borne supérieure s'appelle alors SOMME DE LA FAMILLE et se note $\sum_{i \in I} a_i$.

Exple : La famille $\left(\frac{1}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable

En effet : $\forall N_0 \subset \mathbb{N}$ avec $N_0$ : finie $\sum_{n \in N_0} \frac{1}{n!} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} = e < +\infty$

1. Exemple de suite enhaustive de parties finies de $\mathbb{Z}$.

16/19

Considérons la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des partie de $\mathbb{Z}$ définie par: $\forall n\in\mathbb{N}$, $Z_n = \{k\in\mathbb{Z} : |k|\leq n\}$

$\forall n\in\mathbb{N}$: $Z_n = \{k\in\mathbb{Z}, -n\leq k\leq n\} = \{-n, -(n-1), \dots 0, 1, \dots n\}$

i) $Z_n$ est une partie finie de $\mathbb{Z}$ ($\forall n\in\mathbb{N}$).

En fait: $\forall n\in\mathbb{N}$: $\underline{\mathrm{Card}(Z_n) = 2n+1 < \infty}$

(ii) Soit $n\in\mathbb{N}$, on a:

$\forall k\in\mathbb{Z}$ on a: $|k|\leq n \Rightarrow |k|\leq n+1$. D'où

$\underline{\forall n\in\mathbb{N}, \quad Z_n \subset Z_{n+1}}$

(iii) $\forall n\in\mathbb{N}$, $Z_n\subset\mathbb{Z} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n \subset \mathbb{Z}$ $(*)$

Soit $m\in\mathbb{Z}$. Posons $n_0 = |m|\in\mathbb{N}$. Il vient alors

que $m\in Z_{n_0} := \{k\in\mathbb{Z} : |k|\leq n_0 = |m|\}\subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n$

$\mathbb{Z}\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ $(**)$

On en déduit $(*)$ et $(**)$ $\Rightarrow$ $\mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n$

Concl: (i), (ii) et (iii) $\Rightarrow$ $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite enhaustive de parties finies de $\mathbb{Z}$.

5. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux familles $(\sqrt{y+z}, \sqrt{x+z}, \sqrt{x+y})$ et $\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}; \frac{y}{\sqrt{x+z}}, \frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)$ on obtient

$$(x+y+z)^2 \leq 2(x+y+z)\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\right)$$

$\frac{07}{10}$

$\Rightarrow$ Comme $x+y+z>0$ alors, on trouve :

$$\frac{1}{2}(x+y+z) \leq \frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y} \quad (R1)$$

. En particulier pour $x=\frac{1}{e}$ ; $y=\frac{1}{p}$ et $z=\frac{1}{\sigma}$

on a : avec $ep\sigma = 1$ on obtient

$$x+y+z = \frac{1}{e}+\frac{1}{p}+\frac{1}{\sigma} = \frac{p\sigma+\sigma e+ep}{ep\sigma} = \frac{ep+p\sigma+\sigma e}{1} \quad (R2)$$

$$\frac{x^2}{y+z} = \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^2}{\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{\sigma}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^2}{\left(\frac{p+\sigma}{p\sigma}\right)} = \frac{p\sigma}{e^2(p+\sigma)} = \frac{\frac{1}{e}}{e^2(p+\sigma)}$$

Soit alors : $\frac{x^2}{y+z} = \frac{1}{e^3(p+\sigma)}$ (R3)

---

De manière analogue, on trouve $\begin{cases} \frac{y^2}{x+z} = \frac{1}{p^3(e+\sigma)} & (R4) \\ \frac{z^2}{x+y} = \frac{1}{\sigma^3(e+p)} \end{cases}$

Scanné avec CamScanner

Conclusion : En combinant les relations (R1), (R2), (R3) et (R4) on trouve : (8)

$$\frac{1}{2}\left(ep+p\sigma+\sigma e\right) \leq \frac{1}{e^3(p+\sigma)}+\frac{1}{p^3(e+\sigma)}+\frac{1}{\sigma^3(e+p)}$$

Exo 2 : Familles sommables

1. Soit $(U_n)_n$ une suite réelle. Montrons qu'il existe au moins un réel n'appartenant pas à $\{U_n : n\in\mathbb{N}\}$

Méthode 1 (utilisant la non-dénombrabilité de $\mathbb{R}$)

Pour cela procédons par absurde.

Supposons que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\exists n_0\in\mathbb{N} / U_{n_0}=x$. $\Leftrightarrow x\in\{U_n : n\in\mathbb{N}\}$

Considérons l'applicat° : $U : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$
$n \longmapsto U(n)=U_n$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $\exists n_0\in\mathbb{N} / x=U_{n_0}=U(n_0)$ $\Leftrightarrow U$ est une surjection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$. D'où. mais

$U(\mathbb{N})=\{U_n : n\in\mathbb{N}\}=\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ est un ensemble au plus dénombrable car l'image d'un tel ensemble par une applicat° ce qui est absurde car $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

Dénombrable -

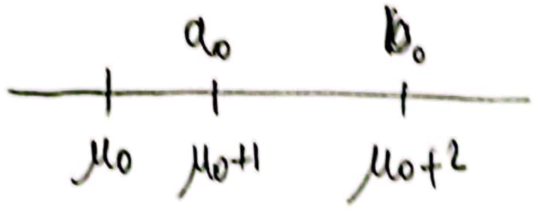
Méthode 2 (utilisant la notion de suites adjacentes)

On construit par récurrence 2 suites adjacentes $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin [a_n ; b_n]$

09/19

• Posons $a_0 = u_0 + 1$ et $b_0 = u_0 + 2$.

Ainsi, on a :



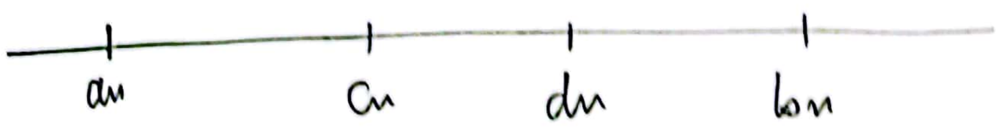

: $\begin{cases} u_0 \notin [a_0 ; b_0] \\ a_0 < b_0 \end{cases}$

• Supposons construits $a_n < b_n$ tel que $u_n \notin [a_n ; b_n]$ (HR)

• Vérifions à l'ordre $n+1$

Posons $c_n = \dfrac{2a_n + b_n}{3}$ et $d_n = \dfrac{a_n + 2b_n}{3}$

avec (HR) on a : $a_n < b_n \Rightarrow c_n < d_n$.




Ainsi au moins l'un des 3 segm $[a_n, c_n]$, $[c_n ; d_n]$ et $[d_n ; b_n]$ ne contient $u_{n+1}$ car ils sont d'intérieurs 2 à 2 disjoints. Disons $u_{n+1} \notin [c_n, d_n]$

Dans ce cas, on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = d_n$.

Donc la propriété au rang $n+1$.

suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ ainsi construites vérifient :

$\forall n \in \mathbb{N}$ : $u_n \notin [a_n, b_n]$ et $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$

$\Rightarrow (a_n)_n \nearrow$ et $(b_n)_n \searrow$.

$\frac{10}{19}$

Par ailleurs, avec les relations $a_{n+1} = c_n = \frac{2a_n + b_n}{3}$

et $b_{n+1} = d_n = \frac{a_n + 2b_n}{3}$, on obtient :

$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n - 2a_n - b_n) = \frac{1}{3}(b_n - a_n)$

D'où $b_n - a_n = \frac{1}{3}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \frac{1}{3^2}(b_{n-2} - a_{n-2})$

De manière récurrente on trouve que :

$b_n - a_n = \frac{1}{3^n}(b_0 - a_0) \xrightarrow[n\infty]{} 0$

Donc les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes

Par conséquent, elles convergent vers la même limite $l$

qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$ : $a_n \leq l \leq b_n \Leftrightarrow l \in [a_n, b_n]$

~~Donc~~ $\exists\, l \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq l$ car $u_n \notin [a_n, b_n]$

Conc : $\exists\, l \in \mathbb{R}$ avec $l \notin \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Scanné avec CamScanner

. Soit $E$ un ensemble. Montrons qu'il n'existe aucune surjection de $E$ sur $\mathcal{P}(E)$.

11/15

Procédons par absurde.

Soit $f : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ une application surjective.

Posons $A = \{ a \in E : a \notin f(a) \}$

On a $A \in \mathcal{P}(E) \Longrightarrow \exists y \in E \,/\, f(y) = A$ car $f$ est surjective.

- si $y \in A \Rightarrow y \notin f(y) = A$ ce qui est absurde
- si $y \notin A \Rightarrow y \in f(y) = A$ ce qui est aussi une contradiction.

Concl : Dans tous les cas, on aboutit à une absurdité. Donc il n'est pas de surject° de $E$ vers $\mathcal{P}(E)$.

# Sommabilité des familles

12/19

<u>Ingrédient</u> : soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de réels. Alors elle est sommable si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ converge.

(i) La famille $\left(\frac{2^{n+1}}{3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ici $U_n = \frac{2^{n+1}}{3^n}$, $n\in\mathbb{N}^*$

Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k = \sum_{k=1}^{n} 2\left(\frac{2}{3}\right)^k = 2\times\frac{2}{3}\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}$

$$= \frac{4}{3}\times 3\times\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = 4\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

$$S_n \xrightarrow[n\infty]{} 4$$

<u>Conc</u> : $\sum_{n\geq 1}\frac{2^{n+1}}{3^n} = \lim S_n = 4 \Rightarrow \left(\frac{2^{n+1}}{3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable.

(ii) La famille $\left(\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$\forall x,y\in\mathbb{R}$, on a :

$\tan(\arctan(x) - \arctan(y)) = \frac{x-y}{1+xy}$

$\Rightarrow \arctan(x) - \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$

$n \in \mathbb{N}$, on pose $x = n+1$ et $y = n$, on obtient :

$$\arctan(n+1) - \arctan(n) = \arctan\left(\frac{n+1-n}{1+n(n+1)}\right)$$

Soit alors : $\arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right) = \arctan(n+1) - \arctan(n)$

$$\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\arctan(n+1) - \arctan(n)\right)$$

13/19

$$= \arctan(n+1) - \arctan(0)$$

$$= \arctan(n+1)$$

Somme Telescopique

Par passage à la limite, on trouve :

$$\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right) = \arctan(n+1) \xrightarrow[n\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

Concl : La famille $\left(\arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)\right)_n$ est sommable

est sa somme vaut $\frac{\pi}{2}$.

On donne : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

14/19

(a) Calculons : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \iff \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\iff \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\iff \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\iff \frac{\pi^2}{24} + 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\iff \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} - 1 = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

Cnl. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$

Calculons : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ 

$\frac{15}{19}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

D'après les calculs effectués en (a), on trouve :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{24} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Conl : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

$\underline{\text{Exo 3}}$ : Etude de la projection sur des Ouverts et sur des fermés. $\frac{16}{15}$

on a : $P_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $P_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto x$ $\qquad$ $(x,y) \longmapsto y$

1. Soit $O$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Montrons que $P_1(O)$ et $P_2(O)$ st des ouverts de $\mathbb{R}$.

. Pour $P_1(O)$

soit $u \in P_1(O) \Rightarrow \exists v \in \mathbb{R} \,/\, (u,v) \in O$.

Comme $O$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ alors $\exists r > 0 \,/$

$B_1((u,v), r) \subset O \Leftrightarrow \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |u-x| + |v-y| < r\} \subset O$

$$\Rightarrow \begin{cases} |u-x| < r \\ |v-y| < r \end{cases} \Rightarrow \, ]u-r, u+r[ \subset P_1(O)$$

D'où $P_1(O)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

De manière analogue, on montre que $P_2(O)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

a) H est-il un convexe de $\mathbb{R}^2$

$\frac{17}{19}$

- $a = (2, \frac{1}{2}) \in H$ car $2 \times \frac{1}{2} = 1$.
- $b = (1, 1) \in H$ car $1 \times 1 = 1$.
- $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = (1, \frac{1}{4}) + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$ et $\frac{3}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{8} \neq 1$.

D'où $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \notin H \Rightarrow$ H n'est pas convexe.

(b) - Montrons que H est un fermé de $\mathbb{R}^2$

La fonction $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x,y) \longmapsto xy$ est cont car polynomiale. De plus, on a : $H = g^{-1}(\{1\}) \Rightarrow$ H est un fermé car image réciproque d'un fermé par une application continue.

Rmq : On pouvait aussi utiliser une caractérisation séquentielle.

- Montrons que $P_1(H)$ et $P_2(H)$ ne sont pas des fermés.

En remarquant que $\forall (x,y) \in H$ on a : $x \neq 0$ et $y \neq 0$ et que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\exists y = \frac{1}{x}$ / $(x,y) \in H$, on ~~déduit que :~~

en

$P_1(H) = P_2(H) = \mathbb{R}^* = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$ : non fermé.

Montrons que : $\forall a \in \mathbb{R}^2$, on a :

$a \in H \Leftrightarrow (P_1(a) + P_2(a))^2 - (P_1(a) - P_2(a))^2 = 4$ 18/19

$\forall\, a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, on a : $P_1(a) = a_1$ et $P_2(a) = a_2$.

$a = (a_1, a_2) \in H \Leftrightarrow a_1 a_2 = 1$ et $\begin{cases} (P_1(a) + P_2(a))^2 = a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 \\ (P_1(a) - P_2(a))^2 = a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 a_2 = 1 \\ (P_1(a) + P_2(a))^2 - (P_1(a) - P_2(a))^2 = 4 a_1 a_2 = 4 \times 1 = 4. \end{cases}$

(d) Montrons que si F est un fermé et que $P_2(F)$ est une partie bornée, alors $P_1(F)$ est fermée.

- Supposons que $(h_1)$ : F est un fermé de $\mathbb{R}^2$
  $(h_2)$ : $P_2(F)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$.

<u>objectif</u> : Montrons que $P_1(F)$ est fermée.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'élt de $P_1(F)$

telle que $x_n \xrightarrow[M\phi]{} x$. $(*)$

Par définition : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\exists\, y_n \in \mathbb{R}$ / le couple $(x_n, y_n) \in F$.

Par conséquent $P_2((x_n, y_n)) = y_n \in P_2(F)$.

..., on construit une suite d'élément de $P_2(F)$ $(y_n)$ associée à la suite $(x_n)_n$.

19/19

D'après $(h_2)$, $P_2(F)$ est borné $\Rightarrow$ $(y_n)_n$ est aussi borné.

Ainsi, d'après le Théorème de Bolzano-Weierstrass on peut extraire une sous-suite convergente de $(y_n)_n$ c-à-d $\exists$ une extractrice $\varphi$ et $y \in \mathbb{R}$ tq la suite $(y_{\varphi(n)})_n$ converge vers $y$.

Il vient alors que la suite $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})$ converge vers $(x,y)$. D'où $(x,y) \in F$ car F est fermé. (**)

Concl : (*) et (**) $\Rightarrow$ $x_n \xrightarrow[n\infty]{} x = P_1((x,y)) \in P_1(F)$

car $(x,y) \in F$ $\Rightarrow$ $P_1(F)$ est un fermé