Proposition de Corrigé du CdR1 - MP2

Exo 1 : Compréhension du Cours (CdC)

1. Démontrons que : $e\ln\left(\frac{e}{\sqrt{2}}\right)+\pi\ln\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)\geq(e+\pi)\ln\left(\frac{e+\pi}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)$

Considérons la fonct° $x \xmapsto{f} x\ln(x)$, on a :

$D_f=\mathbb{R}_+^*$ et f est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$

on a : $f'(x)=\ln(x)+1$ et $f''(x)=\frac{1}{x}>0$

$\Rightarrow$ f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. $\Leftrightarrow$

$\forall\ \lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$ avec $\lambda_1+\lambda_2=1$ et $\forall\ a,b\in\mathbb{R}_+^*$

$\lambda_1 f(a)+\lambda_2 f(b)\geq f(\lambda_1 a+\lambda_2 a)$.

En particulier pour : $\begin{cases}\lambda_1\longleftarrow\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\\ \lambda_2\longleftarrow\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\\ a\longleftarrow\frac{e}{\sqrt{2}}\\ b\longleftarrow\frac{\pi}{\sqrt{3}}\end{cases}$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} f\left(\frac{e}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} f\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \geq f\left(\frac{\sqrt{2}\cdot e}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}\,\pi}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{3}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \cdot \frac{e}{\cancel{\sqrt{2}}} \ln\left(\frac{e}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \frac{\pi}{\cancel{\sqrt{3}}} \ln\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \geq \left(\frac{e+\pi}{\cancel{\sqrt{2}+\sqrt{3}}}\right) \ln\left(\frac{e+\pi}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)$$

$$\Rightarrow e \ln\left(\frac{e}{\sqrt{2}}\right) + \pi \ln\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \geq (e+\pi) \ln\left(\frac{e+\pi}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)$$

En prenant l'expression conjuguée, on trouve:

$$e \ln\left(\frac{e}{\sqrt{2}}\right) + \pi \ln\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \geq (e+\pi) \ln\left((e+\pi)(\sqrt{3}-\sqrt{2})\right)$$

Scanné avec CamScanner

2) Enoncé et Preuve du Théorème de Carathéodory (1873-1950)

<u>Théorème</u> (de Constantin Carathéodory (1873-1950))

Soient E un e.v. de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et A une partie non vide de E. Alors tout élément de Conv (A) est un barycentre à coefficients positifs de $n+1$ points de A.

<u>Idées de Preuve</u>

. Par définition, on a :

$$\mathrm{Conv}(A) = \bigcap_{\substack{A \subset B \subset E \\ B \text{ est convexe}}} B = \left\{ \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k : m \in \mathbb{N}^*, (\lambda_k)_{k \in [\![1,m]\!]} \subset [0;1] \text{ et } \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1 \text{ et } \forall k\, a_k \in A \right\}$$

$$\underline{\text{obj}} : \mathrm{Conv}(A) = \underbrace{\left\{ \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k a_k : \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in [0;1] \text{ et } \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1, a_k \in A \, \forall k \right\}}_{C}$$

- Par définition, on a : $\underline{C \subset Conv(A)}$ $(*)$
- Réciproque : Soit $X \in Conv(A)$ alors $\exists m \in \mathbb{N}$

$\exists (x_k)_{1 \leq k \leq m} \subset A$, $\exists (\alpha_i)_{1 \leq i \leq m} \subset \mathbb{R}_+$ et $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1$

et $X = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m$ $(**)$

__1^er. Cas__ : si $m \leq n+1$ alors $X \in C$ (quitte a ce que l'on complète avec coefficients nuls de pondération)

__2^em. Cas__ : Si $m > n+1$

- Posons pour $k = 1, \ldots, m-1$, $y_k = x_k - x_m$

Car $m > n+1 \Rightarrow m-1 > n = \dim(E)$

Alors la famille $(y_i)_{1 \leq i \leq m-1}$ est liée d'où

$\exists (\lambda_i)_{1 \leq i \leq m-1} \subset \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0_{\mathbb{R}^{n-1}}\}$ (C-à-d Non tous nul) tq : $\sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k y_k = 0$ $(***)$

• Posons $\lambda_m = -\sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k$ (*iv)

Il vient alors que :

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k x_k + \lambda_m x_m = \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k x_k + \left(-\sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k\right) x_m$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k (x_k - x_m) = \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k y_k = 0$$

(d'après (***))

Il s'ensuit que : $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k = 0$ (v)

En combinant (**) et (v) on obtient que :

$$\forall \gamma \in \mathbb{R}, \quad x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k + \gamma \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (\alpha_k + \gamma \lambda_k) x_k \quad (v*)$$

Scanné avec CamScanner

Par ailleurs, nous avons par construction

$$\sum_{k=1}^{m} h_k = \sum_{k=1}^{m-1} h_k + h_m = \sum_{k=1}^{m-1} h_k - \sum_{k=1}^{m-1} h_k = 0 \quad (V**)$$

Ainsi, les h_k étant non tous nuls alors $\exists\, i_0 \in [\![1,m]\!]$ tel que $h_{i_0} < 0$. D'où nous pouvons considérer

$$\gamma_0 = \min \left\{ -\frac{\alpha_i}{h_i} \;\middle|\; i \in [\![1,m]\!] \text{ et } h_i < 0 \right\}$$

Pour pour $i \in [\![1,m]\!]$, $\mu_i = \alpha_i + \gamma_0 h_i$

$\Rightarrow$ Les μ_i sont positifs ou nul (par def de γ_0)

$\Rightarrow$ De plus $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \mu_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i + \gamma_0 \sum_{i=1}^{m} h_i = 1 + 0 = 1$

(V***)

$\Rightarrow$ Enfin l'un des μ_i est nul.

En effet soit i_1 l'indice pour lequel le minimum γ_0 est atteint. c-à-d $\gamma_0 = -\dfrac{\alpha_{i_1}}{h_{i_1}}$ d'où

$$\mu_{i_1} = \alpha_{i_1} + \gamma_0 h_{i_1} = \alpha_{i_1} - \frac{\alpha_{i_1}}{h_{i_1}} \cdot h_{i_1} = \alpha_{i_1} - \alpha_{i_1} = 0$$

(**)

Scanné avec CamScanner

III Conclusion : Compte tenu de $(V*)$, $(V***)$ et $(**)$, on en déduit que :

$$\begin{cases} X = \sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1}}^{m} \mu_i x_i \\ \text{Avec } 0 \leq \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m \text{ et } \sum_{i=1}^{m} \mu_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1}}^{m} \mu_i = 1 \end{cases}$$

① • Ainsi X est le barycentre à coefficients positifs de $m-1$ points de A. Si $m-1 \leq n+1$ alors c'est OK. Autrement on réitère ce procédé jusqu'à l'obtention du résultat.

②

A_2

Le

A_1, D'où $X \in C \Rightarrow Conv(A) \subset C \subset G$,

Conv

Conv De $(*)$ et (X) on en conclut que $Conv(A) = C$.

3\. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, on définit les I, J, K et B par :

$$I = [-11, -2[\cup]0, a]$$

$$J = \{(-a, 0) ; (a, 0) ; (0, \tfrac{3a}{2})\}$$

$$K = \{X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|X\|_2 = a\}$$

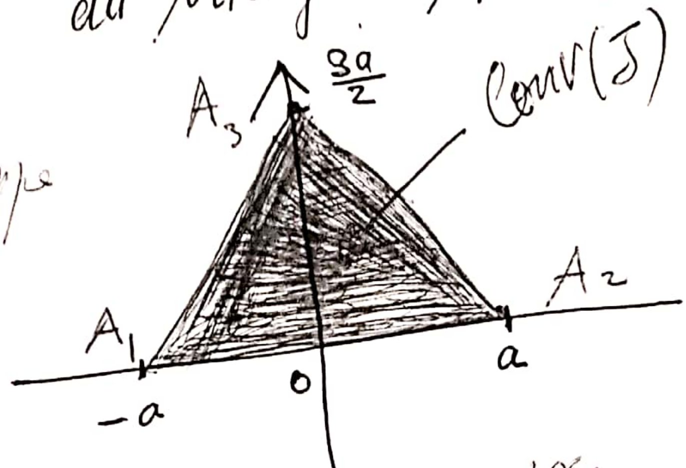
$$B = \{X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|X\|_1 \leq a\}$$

① • Pour I :

▸ I n'est pas convexe et ▸ $\mathrm{Conv}(I) = [-11, a]$

② Pour J : représente les sommets $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ et $A_3(0, \frac{3a}{2})$ du triangle $A_1A_2A_3$

le triangle $A_1A_2A_3$ est l'enveloppe convexe de J.



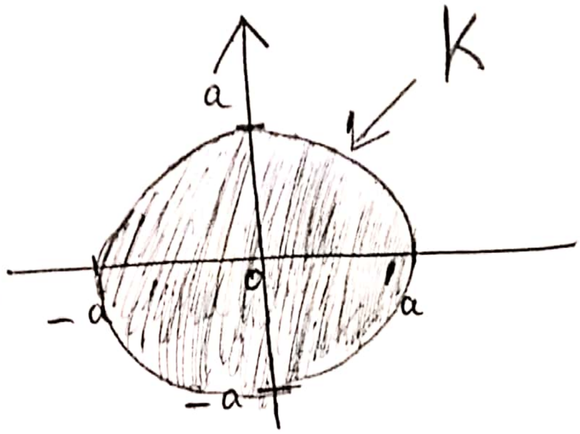
$\mathrm{Conv}(J) = A_1A_2A_3$

J n'est pas convexe.

③ $K = \{ X \in \mathbb{R}^2 : \|X\|_2 = a \} = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = a^2 \}$

K n'est pas convexe.

$\mathrm{Conv}(K) = \{ X \in \mathbb{R}^2 : \|X\|_2 \leq a \}$



④ $B = \{ X \in \mathbb{R}^2 : \|X\|_1 < a \}$

$\forall X, Y \in B$, $\forall \alpha \in [0,1]$, on a :

$\|\alpha X + (1-\alpha) Y\|_1 \leq \alpha \|X\|_1 + (1-\alpha) \|X\|_1 < (\alpha + 1 - \alpha) a = a$

$\Rightarrow \|\alpha X + (1-\alpha) Y\|_1 < a \Rightarrow \alpha X + (1-\alpha) Y \in B$

Conc : B est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Par conséquent $\mathrm{Conv}(B) = B$.

Scanné avec CamScanner

Exo 2 : Continuité & Convexité

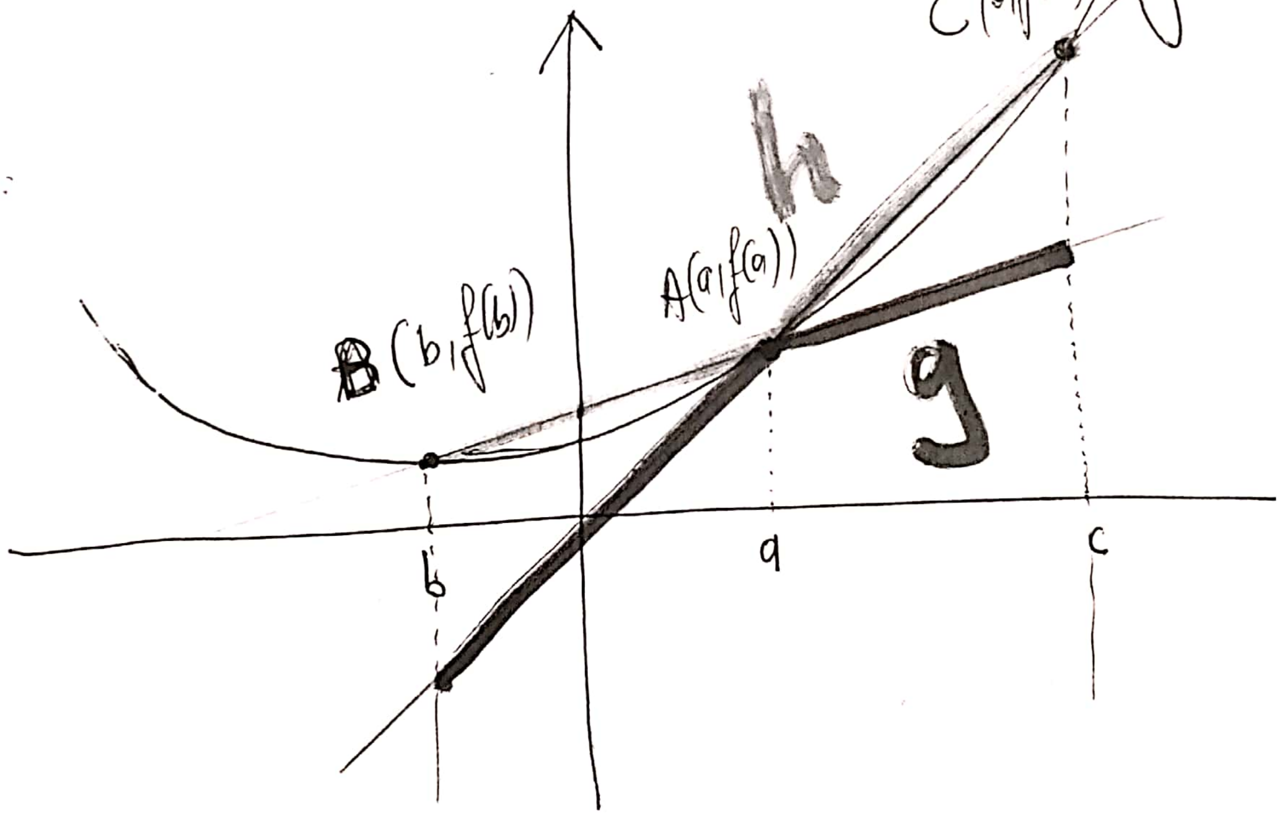
1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

- Montrons que f est cont sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}$, f est cont en a

- soit $a \in \mathbb{R}$.

<u>Obj</u> : Montrons que f est cont en a c-à-d $\lim\limits_{a} f = f(a)$

f étant convexe alors (C_f) est en dessous de chacun de ses cordes (voir figure)



$$(\Delta_1) := (AB) : y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

$$(\Delta_2) := (AC) : y = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}(x - a) + f(a)$$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) & \text{si } x \in [b, a] \\ \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}(x - a) + f(a) & \text{si } x \in]a, c] \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}(x - a) + f(a) & \text{si } x \in [b, a] \\ \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) & \text{si } x \in]a, c] \end{cases}$$

Par définition nous avons : $\forall x \in [b, c]$

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \qquad (I)$$

$$\lim_{x \to a^-} g(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = f(a) \qquad (II)$$

$$\lim_{x \to a^-} h(x) = \lim_{x \to a^+} h(x) = f(a) \qquad (III)$$

__Concl__ : En combinant (II) et (III) à (I), on en déduit d'après le Théorème des Gendarmes

$$f \quad \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

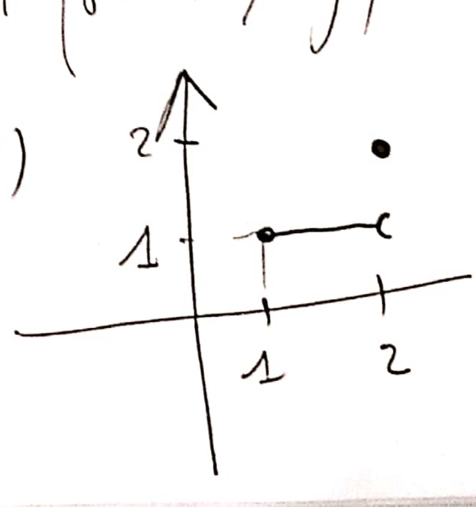
d'où f est cont en a $(\forall a \in \mathbb{R})$ d'où

f est cont sur $\mathbb{R}$.

2) En toute généralité une telle fonction n'est pas continue malgré sa convexité sur le segm $[a;b]$.

__Exemple__ : $g : [1;2] \; x \longmapsto E(x)$

g est convexe et non continue.



Exo 3 : Un Peu de Topologie

Soit E un espace Vectoriel Normé. Soit $C \in \mathcal{P}(E)$ avec $C \neq \emptyset$ et C est convexe.

① a) Montrons que $\overline{C}$ est convexe

Soit $a, b \in \overline{C} \Rightarrow \begin{cases} \exists (a_n)_n \subset C \ / \ a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a \\ \exists (b_n)_n \subset C \ / \ b_n \xrightarrow[n \to \infty]{} b \end{cases}$

$\forall \lambda \in [0,1]$, la suite $(c_n)_n$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \lambda a_n + (1-\lambda) b_n$ est une suite d'élém de C car C est convexe. De plus on a :

$$\lim_{n \to +\infty} c_n = \lim_{n \to +\infty} (\lambda a_n + (1-\lambda) b_n) = \lambda a + (1-\lambda) b$$

D'où $\lambda a + (1-\lambda) b \in \overline{C}$

Concl 1 : $\overline{C}$ est convexe.

(1b) Montrons que : $\mathring{C}$ est convexe

Soient $x, y \in \mathring{C}$ alors par définition

$\exists\, r_x, r_y > 0 \,/\, B(x, r_x) \subset C$ et $B(y, r_y) \subset C$

Posons $r = \min(r_x, r_y)$

$$\begin{cases} B(x,r) \subset B(x, r_x) \subset C \\ B(y,r) \subset B(y, r_y) \subset C \end{cases} \Rightarrow B(x,r), B(y,r) \subset C$$

Soit $\lambda \in [0,1]$ et $z = \lambda x + (1-\lambda) y$

Montrons $B(z, r) \subset C \Rightarrow z \in \mathring{C}$

Soit $a \in B(z, r) \Rightarrow \|z - a\| < r$.

$\exists\, u \in E \,/\, \|u\| < r$ et $a = z + u$

$$a = \lambda x + (1-\lambda) y + u + \lambda u - \lambda u$$
$$= \lambda(x + u) + (1-\lambda)(y + u)$$

• $x+u \in B(x,r) \subset C$ et $y+u \in B(y,r) \subset C$

car $\|u\| < r$

Il vient que $a = \lambda(x+u) + (1-\lambda)(y+u) \in C$

car C est convexe.

D'où $B(z,r) = B(\lambda x + (1-\lambda)y, r) \subset C$

Ainsi, $\lambda x + (1-\lambda) y \in \overset{\circ}{C}$

Concl : $\overset{\circ}{C}$ est une partie convexe de C.

2) On suppose que $O \in \mathring{C}$

(a) Soit $(\lambda, x) \in]0,1[\times C$ et $y = \lambda x$

Montrons que y est l'image de O par $h(x, 1-\lambda)$

Par définition, on a :

$h(x, 1-\lambda) : E \longrightarrow E,\ a \longmapsto a'$ tel que :

$$\underline{a' - x = (1-\lambda)(a-x)} \quad (H)$$

Ainsi pour $a = O$, avec (H) nous obtenons :

$O' - x = (1-\lambda)(-x) \Leftrightarrow O' = x - x + \lambda x = \lambda x = y$

Conc : $O' = \lambda x = y$ c-à-d y est l'image de O par $h(x, 1-\lambda)$

(b) Déduisons que $y \in \mathring{C}$

. Car $y = \lambda x = (1-\lambda).O + \lambda x$ avec $\begin{cases} O \in C \\ x \in C \end{cases}$

Alors $y \in C$ car C est convexe.

. $O \in \mathring{C} \Rightarrow \exists\, r_0 > 0 \,/\, B(0, r_0) \subset C$

. Considérons la boule ouverte $B(y, (1-\lambda) r_0)$

Car $y = h(x, (1-\lambda))(0)$ alors on a :

$B(y, (1-\lambda) r_0)) = h(x, (1-\lambda))(B(0, r_0))$ on en déduit que : $B(y, (1-\lambda) r_0) \subset C \Rightarrow y \in \overset{\circ}{C}$.

Méthode II

Soit $u \in B(y, (1-\lambda) r_0) \Rightarrow \| u - y \| < (1-\lambda) r_0$

D'où $\exists\, v \in B(0, r_0) \,/\, u - y = (1-\lambda) v$

$\Rightarrow u = y + (1-\lambda) v = \lambda x + (1-\lambda) v \in C$

Car C est convexe et $x \in C$ et $B(0, r_0) \subset C$.

Ainsi : $B(y, (1-\lambda) r_0) \subset C \Rightarrow y \in \overset{\circ}{C}$.

③ Montrons que : $\forall \lambda \in]0;1]$, $\lambda \overset{\circ}{C} + (1-\lambda) \overline{C} \subset \overset{\circ}{C}$

$\lambda \overset{\circ}{C} \subset \overset{\circ}{C}$ $\forall \lambda \in]0;1[$

1 si $\lambda = 1$, alors on a

car C est convexe. D'où l'inclusion est vraie.

2 si $\lambda \in]0;1[$. soient $x \in \overset{\circ}{C}$ et $y \in \overline{C}$.

▸ Car $x \in \overset{\circ}{C}$ alors $r > 0 \,/\, B(x, r) \subset C$.

▶ Par ailleurs $y \in \bar{C} \Rightarrow C \cap B(y, \frac{\lambda r}{1-\lambda}) \neq \emptyset$

Soit $z \in C \cap B(y, \frac{\lambda r}{1-\lambda}) \Rightarrow \|z-y\| < \frac{\lambda r}{1-\lambda}$

$\Rightarrow \|(1-\lambda)(z-y)\| < \lambda r \Rightarrow (1-\lambda)(z-y) \in B(0, \lambda r)$

$\Rightarrow (1-\lambda)(z-y) \in \lambda B(0,r)$.

Par suite C étant convexe alors :

$\lambda B(x,r) + (1-\lambda) z$ est un ouvert inclus ds C.

Ainsi, on écrit :

$$
\begin{aligned}
\lambda x + (1-\lambda) y &= \lambda x + (1-\lambda)(y-z) + (1-\lambda) z \\
&\in \lambda x + \lambda B(0,r) + (1-\lambda) z \\
&\in \underbrace{\lambda B(x,r) + (1-\lambda) z}_{\text{ouvert}} \subset C
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in \mathring{C}$

<u>Concl</u> : $\lambda \mathring{C} + (1-\lambda)\bar{C} \subset \mathring{C}$.