Pierre-Jean Hormière

Exercices corrigés sur les séries numériques

« Il me faut beaucoup travailler pour rester médiocre. »
Woody Allen

De Cauchy à nos jours, les séries restent au cœur du cours de taupe et fournissent, année après année, leur lot d'exercices et de problèmes de concours. Les exercices ici présentés ont été posés récemment, et sont résolus dans un style moderne.

Il y a deux façons de traiter les exercices portant sur la convergence et le calcul d'une série : soit on montre la convergence avant de calculer la somme, soit on mène les deux de front, mais cela oblige à manipuler avce soin les sommes partielles. J'ai privilégié ici la première démarche.

Depuis le déclin des critères de convergence, aujourd'hui relégués au grenier des exercices, de nombreux exercices sur la nature d'une série ne sont qu'un prétexte pour demander un équivalent, ou un développement asymptotique, du terme général.

Dans les solutions proposées, les encadrement intégraux de sommes du type $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ ou $\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$, lorsque f est monotone, sont invoqués sommairement. Il est demandé au lecteur de les justifier avec soin, car ils ne donnent pas toujours d'équivalent.

Il s'agit d'un document de synthèse, certains exercices se référant à des chapitres vus après les séries numériques : séries entières, séries de Fourier, etc.

Aussi souvent que possible, j'ai donné plusieurs méthodes, plusieurs voies d'approche, car nombreux sont les chemins qui conduisent au Vrai et au Beau. Aussi curieux que cela paraisse, ce sont parfois les solutions les plus simples qui se sont imposées à mon esprit le plus tard.

Louis Augustin Cauchy (1789-1857)

Niels Henryk Abel (1802-1829)

Enoncés

Exercice 1 : Natures des séries $\sum_{n=2}^{+\infty}(\frac{1}{n}+\ln\frac{n-1}{n})$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(e-(1+\frac{1}{n})^n)$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\exp(-\sqrt{n^2-1})$, $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$

$\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-1})$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n.\sin^2 n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n^{3/2}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ où $u_n = \sqrt{\ln(2n+1)} - \sqrt{\ln(2n)}$.

$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ où $u_n = \int_n^{+\infty}\frac{dx}{x^3+x+1}$, $u_n = \frac{1}{n^a}\int_n^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[6]{x^7+1}}$, $u_n = \frac{1}{n^a}\int_{-\infty}^{n}\frac{dx}{x^2+x+1}$,

$$u_n = \int_0^{\pi/n}\frac{\sin^3 x}{1+x}.dx \quad , \quad u_n = \int_{1-1/n^a}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^5}} \quad (a > 0) .$$

Exercice 2 : Discuter la nature de $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n^a.\ln^b n.\ln\ln^c n}$. Généraliser.

Exercice 3 : Discuter selon les valeurs des réels *a*, *b* et *c* la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$, où :

$$u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^3+an^2+bn+c} .$$

Exercice 4 : Discuter selon les valeurs des complexes *a*, *b* et *c* la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$, où :

$$u_n = a.\ln(n + 3) + b.\ln(n + 2) + c.\ln(n + 1) .$$ Calcul éventuel.

Exercice 5 : Discuter la nature des séries $\sum_{n=n_0}^{+\infty}u_n$ et $\sum_{n=n_0}^{+\infty}v_n$, où n_0 est assez grand et :

$$u_n = \sin(2\pi\sqrt{n^2+an+b}\,) \quad , \quad v_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+an+b}\,) .$$

Exercice 6 : Discuter selon les valeurs de *a* la nature de la série $\sum_{n=2}^{+\infty}u_n$, où

$$u_n = \frac{1}{\sum_{1\le k\le n}k^a} \quad , \quad \text{resp.} \quad u_n = \frac{n^a}{\sum_{1\le k\le n}\ln^2 k} .$$

Exercice 7 : Soient P et Q deux polynômes complexes, Q ≠ 0.
Discuter la nature des séries $\sum_{n=a}^{+\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}$ et $\sum_{n=a}^{+\infty}(-1)^n.\frac{P(n)}{Q(n)}$, où *a* est assez grand.

Exercice 8 : Convergence et calcul de $\sum_{n=2}^{+\infty}\ln(\frac{\ln^2(n+1)}{\ln n.\ln(n+2)})$.

Exercice 9 : Convergence et calcul de $S(p) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)...(n+p)}$, *p* entier ≥ 1.

Exercice 10 : Convergence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)}$.

Exercice 11 : Convergence et calcul de

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+2+...+n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+2+...+n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1^2+2^2+...+n^2} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1^2+2^2+...+n^2} .$$

Exercice 12 : Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(k+n)}$.

Existence de cette suite. Equivalent quand $n \to +\infty$.

Exercice 13 : Soit (f_n) la suite de Fibonacci $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_{n-1}}{f_n f_{n+1}}$.

Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$ $f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^n$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*$ $\frac{(-1)^n}{f_n f_{n+1}} = \frac{f_{n+1}}{f_n} - \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}$.

Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{f_n f_{n+1}}$.

Exercice 14 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 1$, $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$. Existence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$.

Exercice 15 : Convergence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[(n-1)/2]}}{n}$.

Exercice 16 : Convergence et calcul de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2}{(3+(-1)^k)^k}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2}{3^{k+(-1)^k}}$.

Exercice 17 : Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} n \sum_{p=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{1}{p(2p+1)(2p+2)}$.

Exercice 18 : Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\ldots(1+\sqrt{n})}$.

Exercice 18 bis : Soient (a_n) une suite à termes > 0, et $u_n = \frac{a_n}{(1+a_0)(1+a_1)\ldots(1+a_n)}$.

1) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge. Exemple : $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

2) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge, et que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n < 1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

Exercice 19 : Montrer, pour tout entier naturel k, la convergence de la série $S(k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$.

Calculer $S(k)$ pour $0 \le k \le 5$. Montrer que pour tout k, $S(k)$ est irrationnel.

Exercice 20 : Convergence et somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n(3n+2)}$.

Exercice 21 : Soient m un entier ≥ 2, x un complexe,

$$S(x) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m-1} - \frac{x}{m} + \frac{1}{m+1} + \ldots + \frac{1}{2m-1} - \frac{x}{2m} + \ldots$$

Montrer qu'il y a une seule valeur de x pour laquelle la série converge. Calculer alors $S(x)$.

Exercice 22 : Soit $(p_n)_{n\ge1}$ une suite complexe T-périodique ($T \in \mathbf{N}^*$).

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p_n}{n}$ converge si et seulement si $\sum_{k=1}^{T} p_k = 0$.

Exercice 23 : Convergence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} ([\sqrt{n+1}] - [\sqrt{n}])$.

Exercice 24 : Soit a un entier fixé ≥ 2. Convergence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n - aE(n/a)}{n(n+1)}$.

Exercice 25 : On note $s(n)$ le nombre de chiffres dans le développement binaire de n, et $b(n)$ le nombre de 1 dans ce développement. Convergence et calcul des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s(n)}{n(n+1)}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b(n)}{n(n+1)}$.

Exercice 26 : Convergence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{9n^2-1}$. [On pourra utiliser $\int_0^1 t^a.dt = \frac{1}{a+1}$ pour $a > -1$]

Exercice 27 : Pour $p \in \mathbf{N}^*$, soit $S(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{16^k(8k+p)}$.
Ecrire $S(p)$ sous forme intégrale, puis calculer $4\,S(1) - 2\,S(4) - S(5) - S(6)$.

Exercice 28 : Soient q et x deux complexes, $|q| \neq 1$. Convergence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^n x}{(1+q^n x)(1+q^{n+1}x)}$.

Exercice 29 : Natures des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$, où $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = \left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right).\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$.

Exercice 30 : Nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\sqrt{n}}$. Equivalent du reste.

Exercice 31 : Nature de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$, où $u_n = \frac{1}{\ln^2 1 + \ln^2 2 + ... + \ln^2 n}$. Equivalent du reste.

Exercice 32 : Nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln n}}$. Equivalent de la somme partielle.

Exercice 33 : Nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)$. Equivalent de la somme partielle.

Exercice 34 : Nature de la série de terme général $u_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{n^2 \ln n}.dx$.

Exercice 35 : 1) Développement à deux termes de la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$.

2) Convergence et calcul de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

Exercice 36 : 1) Limite et équivalent de la suite $\sin(n!e\pi)$.

2) Nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, où $u_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right).\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) - 1$.

Exercice 37 : Soient x et $y > 0$. Discuter la nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)(2x+1)...(nx+1)}{(y+1)(2y+1)...(ny+1)}$.

Exercice 38 : 1) Equivalent de la suite $P_n = (a+1)(a+2)\dots(a+n)$, pour $a \geq 0$.
2) Soient a et $b > 0$. Discuter la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(a+1)...(a+n)}{b(b+1)...(b+n)}$. Somme éventuelle.

Exercice 39 : Soient a et $b > 0$. Trouver $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \prod_{k=1}^{n} (a+bk)^{1/n}$.

Application : Soient A_n et G_n les moyennes arithmétique et géométrique de $a + b$, $a + 2b$, …, $a + nb$. Trouver la limite de la suite (G_n/A_n) quand $n \to +\infty$.

Exercice 40 : Equivalents et développements à deux termes des suites :

$$A_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad , \quad B_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad C_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2} .$$

Exercice 41 : Limite de la suite $S_n = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{\sqrt{ij}}$.

Exercice 42 : Equivalent de la suite $S_n = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \frac{pq}{p+q}$.

Exercice 43 : 1) On admet que, si (p_k) est la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant, $p_k \sim k.\ln k$. Nature de la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_k}$. Equivalent de $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}$.

2) On admet que $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ quand $x \to +\infty$, où $\pi(x)$ est le nombre des nombres premiers $\leq x$.

Démontrer que $p_k \sim k.\ln k$.

Exercice 44 : Nature de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, où $u_n = \int_{+1}^{+\infty} e^{-x^n}.dx$.

Exercice 45 : Natures des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{0!+1!+2!+...+n!}{(n+1)!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{0!-1!+2!+...+(-1)^n n!}{(n+1)!}$.

Exercice 46 : Nature de $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$, où $u_n = \prod_{k=2}^{n} (1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}})$.

Exercice 47 : Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (2-e^{\alpha})(2-e^{\alpha/2})...(2-e^{\alpha/n})$ converge-t-elle ?

Exercice 48 : Soit $f \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$. On suppose que

$$\forall k \quad \exists (a_0, a_1, \dots, a_k) \in \mathbf{R}^{k+1} \quad f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_k}{x^k} + o(\frac{1}{x^{k+1}}) \text{ quand } x \to +\infty.$$

A quelles conditions : a) La série $\sum_{n \geq 1} f(n)$ converge ? b) Le produit infini $\prod_{n \geq 1} f(n)$ converge ?

c) La série de terme général $u_n = \prod_{1 \leq k \leq n} f(k)$ converge ? Retrouver l'ex. précédent.

Exercice 49 : Soit (u_n) une suite de réels ≥ 0. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum \ln(1+u_n)$ sont de même nature. Montrer qu'il n'en est plus de même si (u_n) n'est plus à termes ≥ 0.

[Considérer $u_1 = 0$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour $n \geq 2$, puis $u_n = -1 + \exp \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour $n \geq 1$.]

Exercice 50 : Prouver que :

i) $\ln n! = \sum_{1 \leq k \leq n} \ln k = (n + \frac{1}{2}) \ln n - n + C + o(1)$

ii) $\sum_{1 \leq k \leq n} k.\ln k = (n^2 + n + \frac{1}{6}) \frac{\ln n}{2} - \frac{1}{4} n^2 + C_1 + o(1)$

iii) $\sum_{1 \leq k \leq n} \ln(k!) = (n^2 + 2n + \frac{1}{2}) \frac{\ln n}{2} - \frac{3}{4} n^2 + (C-1) n + C_2 + o(1)$

Exercice 51 : Equivalent de la suite $u_n = (1^1 \times 2^2 \times 3^3 \times \ldots \times n^n)^{1/n}$.

Exercice 52 : Equivalent de la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k \ln k$.

Exercice 53 : Etude des suites

$A_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ $\qquad B_n = 1 + \frac{1}{2^a} + \ldots + \frac{1}{n^a} - \frac{n^{1-a}}{1-a}$ $(0 < a < 1)$

$S_n = \text{th } 1 + \text{th } 2 + \ldots + \text{th } n - \ln \text{ch } n$ $\qquad T_n = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \ldots + \frac{1}{n\ln n} - \ln(\ln n)$.

Exercice 54 : constantes de Stieltjes.

Montrer que pour tout entier $p \in \mathbf{N}$, la suite $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln^p k}{k} - \frac{\ln^{p+1} n}{p+1}$ converge. Sa limite est dite constante de Stieltjes d'indice p, et notée γ_p. Équivalent de $U_n - \gamma_p$? Cas où $p = 0$?

Exercice 55 : **suites récurrentes linéaires**. Soit (a_n) une suite à termes > 0, tendant vers $+\infty$.

Montrer que les suites récurrentes vérifiant $(\forall n)$ $u_{n+2} = \frac{u_n + a_n . u_{n+1}}{1 + a_n}$ forment un plan vectoriel, et sont toutes convergentes.

Exercice 56 : règles de d'Alembert et de Cauchy.

1) Complément à la règle de d'Alembert.

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ une série à termes > 0 . Soient $\Lambda = \limsup_n \frac{u_{n+1}}{u_n}$, $\lambda = \liminf_n \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Montrer qu'alors : i) Si $\Lambda < 1$, la série converge ;
ii) Si $\lambda > 1$, la série diverge ;
iii) Si $\Lambda \geq 1$, on ne peut conclure.

2) Règle de Cauchy. Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ une série à termes ≥ 0. On suppose que $\sqrt[n]{u_n} \to \lambda \in [0, +\infty]$.

Montrer qu'alors : i) Si $\lambda < 1$, la série converge ;
ii) Si $\lambda > 1$, la série converge ;
iii) Si $\lambda = 1$, on ne peut conclure.

3) Comparaison Cauchy-d'Alembert. Montrer que si $u_n > 0$ et si $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ tend vers $\lambda \in [0, +\infty]$, alors $(\sqrt[n]{u_n})$ converge vers λ, la réciproque étant fausse.

4) Règle de Cauchy (énoncé savant). Soient $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ une série à termes ≥ 0, $L = \limsup_n \sqrt[n]{u_n}$.

Montrer qu'alors : i) Si $L < 1$, la série converge ;
ii) Si $L > 1$, la série converge ;
iii) Si $L = 1$, on ne peut conclure.

Exercice 57 : **règles de Gauss et Raabe-Duhamel**. Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ une série à termes > 0.

1) On suppose $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2})$, pour α réel. Montrer que $\exists A > 0$ $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$.

En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge si $\alpha \leq 1$, converge si $\alpha > 1$.

2) On suppose $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + o(\dfrac{1}{n})$, pour α réel.

Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge si $\alpha < 1$, converge si $\alpha > 1$, et qu'on ne peut conclure si $\alpha = 1$.

3) Application : Soient a et $b > 0$. Discuter la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a(a+1)...(a+n)}{b(b+1)...(b+n)}$.

Exercice 58 : Natures des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2.4.6...(2n)}{1.3.5...(2n+1)}$.

Exercice 59 : Soit $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ une série à termes > 0. On pose $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{a_n}{n \ln n}$.

Montrer que si $a_n \to a > 1$, $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ converge, et si $a_n \to a < 1$, $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ diverge.

Exercice 60 : critère de condensation de Cauchy. Soit (u_n) une suite décroissante à termes ≥ 0. Montrer que les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k u_{2^k}$ sont de même nature.

Applications : à l'aide de ce critère, discuter la nature des séries :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha > 0) \quad , \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n.\ln^\beta n} \quad (\beta > 0) \quad , \quad \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n.\ln n.\ln\ln^\gamma n} \quad (\gamma > 0).$$

Donner un exemple de suite (u_n) à termes ≥ 0 telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k u_{2^k}$ diverge.

Donner un exemple de suite (u_n) à termes ≥ 0 telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diverge et $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k u_{2^k}$ converge.

Exercice 61 : 1) Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ une série divergente à termes > 0. Montrer qu'il existe une suite $a_n \downarrow 0$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.u_n$ diverge (Considérer $a_n = 1/U_{n-1}$ ou $a_n = 1/U_n$). Application à la série harmonique.

2) Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ une série convergente à termes > 0. Montrer qu'il existe une suite $a_n \uparrow +\infty$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.u_n$ converge. (Considérer $a_n = 1/(R_{n-1})^\alpha$, pour $0 < \alpha < 1$).

Application aux séries de Riemann convergentes.

Exercice 62 : En 1827, L. Olivier a énoncé un critère général de convergence des séries :

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge $\Leftrightarrow$ la suite (nu_n) tend vers 0. »

1) Montrer que l'implication $\Leftarrow$ est erronée.

2) Montrer que l'implication $\Rightarrow$ est aussi erronée, mais est vraie si la suite (u_n) est décroissante.

[Considérer les sommes $u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{2n}$.]

Exercice 63 : contre-exemples.

1) Indiquer une série convergente, mais non absolument convergente.

2) Indiquer une série alternée divergente, dont le terme général tend vers 0.

3) Donner deux suites (u_n) et (v_n) équivalentes, telles que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne sont pas de même nature.

4) Donner deux suites (u_n) et (v_n) telles que $(\forall n)$ $|u_n| < |v_n|$, $\sum v_n$ converge et $\sum u_n$ diverge.

5) Donner deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n = o(v_n)$, $\sum v_n$ converge et $\sum u_n$ diverge.

6) Donner deux suites (u_n) et (v_n) équivalentes, telles que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, les suites des sommes partielles de $\sum u_n$ et de $\sum v_n$ n'étant pas équivalentes.

7) Donner deux suites (u_n) et (v_n) équivalentes, telles que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, les restes des deux séries n'étant pas équivalents.

8) Indiquer une série convergente $\sum u_n$ telle que, pour tout $p \geq 2$, $\sum (u_n)^p$ diverge.

<u>Exercice 64</u> : <u>exemples</u>.

1) Exemple de suite de carré sommable et non sommable.
2) Exemple de suite sommable, non de carré sommable.
3) Exemple de série divergente, dont le terme général tend vers zéro et dont les sommes partielles sont bornées.

<u>Exercice 65</u> : Convergence de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^2}$ si n n'est pas un carré, $u_n = \frac{1}{n}$ si n est un carré.

<u>Exercice 66</u> : Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ une série convergente à termes positifs. Soit $E_k = \{ n \in \mathbf{N}^* \,;\, k.a_n \geq 1 \}$.

Montrer que card $E_k = o(k)$ quand $k \to +\infty$.

<u>Exercice 67</u> : Soit $S = \{ u = (u_n) \,;\, (\forall n)\ u_n \geq 0,\ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1,\ u_0 = 0 \}$.

Calculer $\inf_{u \in S} \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n \sum_{k=0}^{n} u_k)$ et $\inf_{u \in S} \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n)^2$.

<u>Exercice 68</u> : Soient $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ deux séries convergentes. Leur produit de Cauchy $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$, où $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$ est-elle convergente ? Considérer $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

<u>Exercice 69</u> : Soient $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ deux séries convergentes à termes complexes.

On pose $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$. Etudier la suite $P_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k$.

<u>Exercice 70</u> : Soit $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $b_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$. Convergence et somme de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} b_n$.

<u>Exercice 71</u> : Montrer que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k(k+1)/2}}$ converge et que sa somme est irrationnelle.

<u>Exercice 72</u> : Montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n.n!}$ et que $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right| < \frac{1}{n.n!}$.

En déduire que e n'est pas solution d'une équation du second degré à coefficients rationnels.

<u>Exercice 73</u> : Montrer que $\cos 2 < 0$, et que $\cos 1 \notin \mathbf{Q}$.

<u>Exercice 74</u> : Discuter la nature de la série : $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln^b n}{n^a}$.

Exercice 75 : Nature et calcul des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Exercice 76 : Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ une fonction convexe tendant vers 0 en $+\infty$.

Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(n)$ converge, et que $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k f(k) \right| \leq \frac{f(n)}{2}$.

Exercice 77 : Natures des séries $\sum_{n=2}^{+\infty}\ln(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$, $\sum_{n=2}^{+\infty}\ln(1+\frac{(-1)^n}{n})$; calcul ? $\sum_{n=2}^{+\infty}\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^a})$ ($a > 0$)

$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^a+(-1)^n}$ ($a > 0$) , $\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+a}}$ ($a > 0$) , $\sum_{n=0}^{+\infty}\sin(n!e\pi)$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n.\ln n}$; équivalent du reste ?

Exercice 78 : Dans le plan euclidien $\mathbf{R}^2$, soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $x^2 = 2py$ ($p > 0$).

Soit M_0 un point de $\mathcal{P} - \{O\}$, M_{n+1} la seconde intersection de $\mathcal{P}$ avec la normale en M_n à $\mathcal{P}$.

Si $M_n(x_n, y_n)$, étudier la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{x_n}$.

Exercice 79 : **transformation d'Abel**.

1) Soit $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.v_n$ une série à termes complexes. On pose $V_n = \sum_{k=0}^{n}v_k$ et $V_{p,q} = \sum_{k=p}^{q}v_k$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n}a_k.v_k = a_n.V_n - \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k).V_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{q}a_k.v_k = a_q.V_{p,q} - \sum_{k=p}^{q-1}(a_{k+1}-a_k).V_{p,k} .$$

2) Soit $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.v_n$ une série à termes complexes. On suppose que :

(A I) La suite V_n est bornée et la suite (a_n) est réelle,et tend vers 0 de manière monotone.

(A II) La suite V_n est bornée. La suite (a_n) tend vers 0 et la série $\sum_{k=0}^{+\infty}|a_{k+1}-a_k|$ converge.

(A III) La série $\sum_{k=0}^{+\infty}v_k$ converge, et la suite (a_n) est réelle, monotone et bornée ;

(A IV) La série $\sum_{k=0}^{+\infty}v_k$ converge et la série $\sum_{k=0}^{+\infty}|a_{k+1}-a_k|$ converge ;

Montrer que, sous chacun de ces jeux d'hypothèses, la série $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.v_n$ converge.

Les quatre exercices suivants reposent sur cet exercice.

Exercice 80 : **application à des séries trigonométriques**.

1) Si $a_n \downarrow 0$, la série $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}a_n.\cos(n\theta)$ converge pour tout $\theta \in \mathbf{R}-2\pi\mathbf{Z}$.

2) Si $b_n \downarrow 0$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n.\cos(n\theta)$ converge pour tout $\theta \in \mathbf{R}$.

3) Montrer que 1) et 2) subsistent sous les hypothèses plus générales :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}|a_{k+1}-a_k| < +\infty \text{ et } a_n \to 0 \text{ , resp. } \sum_{k=1}^{+\infty}|b_{k+1}-b_k| < +\infty \text{ et } b_n \to 0 .$$

Exercice 81 : Montrer que la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ implique celles de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{v_n}{n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{v_n}{\ln n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} v_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} v_n.\sqrt[n]{n} .$$

Exercice 82 : Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ une série convergente à termes ≥ 0 , de restes $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Montrer l'équivalence : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n.\ln n$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{R_n}{n}$ converge.

Exercice 83 : Natures des séries : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin n.\sin\frac{1}{n}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\exp(ina)}{\sqrt{n}+\exp(inb)}$ $(a, b \in \mathbf{R})$.

Exercice 84 : Développement asymptotique de $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Exercice 85 : Convergence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$.

Exercice 86 : Soit $S_n = -\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + (-1)^n\sqrt{n}$.

Montrer que $S_n \sim \frac{(-1)^n}{2}\sqrt{n}$, et plus précisément que $S_n = \frac{(-1)^n}{2}\sqrt{n} + C + o(1)$.

Exercice 87 : Soit $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ une série convergente, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ la suite de ses restes.

Etudier sous différentes hypothèses la nature et la valeur de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$.

Nature et calcul des séries $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Exercice 88 : Soit $I_n = \int_0^{\pi}\frac{\sin((2n+1)t)}{1+\cos^2 t}.dt$. Convergence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n I_n$.

Exercice 89 : Nature de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, où $u_n = \int_0^{\pi/2}\cos^n x.\sin(nx).dx$.

Exercice 90 : **critère de Hardy**.

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbf{C}$ une fonction de classe C^1, telle que f' soit intégrable sur $[0, +\infty[$. Montrer que la série de terme général $w_n = \int_{n-1}^{n} f(t).dt - f(n)$ est absolument convergente.

Exercice 91 : Natures des séries $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(\ln n)}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\ln n)}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$.

Exercice 92 : 1) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbf{C}$ une fonction de classe C^2, telle que :

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$; b) f'' est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Montrer que la série de terme général $w_n = \int_{n-1}^{n} f(t).dt - f(n)$ est absolument convergente.

[Indication : observer que $w_n = -\frac{1}{2}\int_{n-1}^{n}(t-n+1).(n-t).f''(t).dt - \frac{1}{2}\left(f(n) - f(n-1)\right)$.]

2) Application : Discuter selon les valeurs de $a > 0$ la nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{n}}{n^a}$.

Exercice 93 : Soit (q_j) la suite des naturels dont l'écriture décimale ne contient pas le chiffre 9. Montrer que la série $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{q_j}$ converge.

Exercice 94 : Soit $s(n)$ le nombre de 1 dans l'écriture binaire de n.
Convergence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{s(n)}}{n(n+1)}$.

Exercice 95 : Discuter la nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^a}$, a réel.

Exercice 96 : On rappelle que $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \ln 2$.
1) Montrer que la série $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \dots$ converge et calculer sa somme.
Même question pour $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \dots$.
2) Plus généralement, on réordonne la série harmonique alternée en prenant alternativement p termes > 0 et q termes < 0. Montrer que la nouvelle série converge et a pour somme $\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.
3) Montrer comment réarranger les termes afin d'obtenir une série divergente.

Exercice 97 : Soit σ une permutation de $\mathbf{N}^*$. Nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma(n)}{n^2}$.

Exercice 98 : Natures des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\pi(1+\sqrt{2})^n)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(\pi(2+\sqrt{5})^n)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \tan(\pi(7+4\sqrt{3})^n)$.

Exercice 99 : Soit r_n le nombre de points $M(x, y)$ du plan à coordonnées entières tels que $x^2 + y^2 \le n$.
Equivalents de r_n et de $\sum_{k=0}^{n} r_k$.

Exercice 100 : Soit (z_n) une suite de complexes non nuls vérifiant $\forall (i, j)\ i \neq j \Rightarrow |z_i - z_j| \ge 1$.
Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z_n^\alpha}$ est absolument convergente pour $\alpha > 2$, mais qu'elle peut converger ou diverger si $\alpha = 2$.

Exercice 101 : Montrer l'identité : $\forall (x, a) \in \mathbf{C}^2$, $|x| < 1$, $|a| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{a^n}{1+x^2.a^{2n}} = \exp a - x^2 \exp a^3 + x^4 \exp a^5 - \dots$$

Exercice 102 : Montrer les identités $\forall z \in \mathbf{C}$, $|z| < 1$, $\forall\ a, b, c \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{bn}}{1-z^{an+c}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{cn}}{1-z^{an+b}} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{bn}}{1+z^{an+c}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n.z^{cn}}{1-z^{an+b}} .$$

Exercice 103 : Montrer l'identité $\forall x \in \mathbf{C} - \{ 0, -1, -2, -3, \dots \}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} = e.\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{1!}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2!}\frac{1}{x+2} - \dots \right].$$

Exercice 104 : Convergence et calcul de $\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2n+mn^2+2mn}$.

Exercice 105 : 1) Soit $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ une série convergente.

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$, où $v_n = \frac{u_1+2u_2+...+nu_n}{n(n+1)}$, est convergente et a même somme.

2) Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ une suite à valeurs dans $\{-1, 0, +1\}$. On pose $\pi_n = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+...+\varepsilon_n}{n}$. Montrer que les séries $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon_n}{n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi_n}{n+1}$ sont de même nature. Si elles convergent, elles ont même somme.

Exercice 106 : Montrer que l'équation $x^3 - x - 1 = 0$ a une unique racine réelle α.
Natures des séries $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\alpha^n\pi/2)}{n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(\alpha^n\pi/2)}{n}$.

Exercice 107 : Convergence et calcul de $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\varphi(k)}{2^k-1}$, où φ est l'indicateur d'Euler.

Exercice 108 : Soit $B = \{ (p, q) \in \mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^* ; p \wedge q = 1 \}$. Existence et calcul de $\sum_{(p,q)\in B}\frac{1}{p^2q^2}$.

Exercice 109 : 1) Nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{ppcm(1,2,...,n)}$.

2) Soit (u_n) une suite strictement croissante d'entiers ≥ 1. On pose $a_n = \text{ppcm}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.
Nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$.

Exercice 110 : Pour tout entier $n \geq 2$, soit q_n le plus grand nombre premier divisant n.
Nature de la série $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n.q_n}$.

Exercice 111 : Etudier les suites $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{i}{k})$ et $|P_n|$.

Exercice 112 : Nature et calcul des produits infinis :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \ ,\ \prod_{n=2}^{+\infty}(1-\frac{1}{n^2}) \ ,\ \prod_{n=2}^{+\infty}(1-\frac{2}{n(n+1)}) \ ,\ \prod_{n=2}^{+\infty}(\frac{n^3-1}{n^3+1}) \ ,\ \prod_{n=1}^{+\infty}(1-\frac{1}{4n^2}) .$$

Exercice 113 : Nature et calcul éventuel des produits infinis :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}) \ ,\ \prod_{n=2}^{+\infty}(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}) \ ,\ \prod_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{(-1)^n.\ln n}{\sqrt{n}}) .$$

Exercice 114 : formule d'Euler. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n! = \prod_{k=1}^{+\infty}(\frac{k+1}{k})^n.\frac{k}{n+k}$.

Exercice 115 : formule de Jacobi. Montrer, pour tout $0 < q < 1$:

$$\frac{1-q}{1+q}\ (\frac{1-q^2}{1+q^2})^{1/2}\,(\frac{1-q^4}{1+q^4})^{1/4}\,(\frac{1-q^8}{1+q^8})^{1/8} \ldots \ = \ (1-q)^2 .$$

Exercice 116 : Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite sommable.

On suppose que, pour tout $k \geq 1$, $\sum_{p=1}^{+\infty} a_{kp} = 0$. Montrer que $(\forall n)\ a_n = 0$.

Exercice 117 : Soit (λ_n) une suite réelle ou complexe.
Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

i) La suite (λ_n) est « à variation bornée » en ce sens que $\sum_{i=1}^{+\infty} |\lambda_i - \lambda_{i+1}| < +\infty$;

ii) Pour toute série convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ réelle ou complexe, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n u_n$ converge.

Exercice 118 : Soit (λ_n) une suite réelle ou complexe.
Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

i) La suite (λ_n) est « à variation bornée » et $\lim \lambda_n = 0$;

ii) Pour toute série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ dont les sommes partielles sont bornées, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n u_n$ converge.

Exercice 119 : Deux trains distants de 200 km se dirigent l'un vers l'autre à la vitesse de 100 km/h. A l'instant 0 une mouche part d'un train et va vers l'autre à la vitesse de 200 km/h. Lorsqu'elle l'atteint, elle rebousse chemin et revient vers le premier train à la même vitesse, et ainsi de suite. Quelle distance la mouche aura-t-elle parcourue au moment où les deux trains se croisent ?

Exercice 120 : Soient $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ deux vecteurs orthogonaux et de même norme dans le plan. On abaisse de O la perpendiculaire OA_2 sur BA, de A_2 la perpendiculaire A_2A_3 sur OA_1, de A_3 la perpendiculaire A_3A_4 sur A_1A_2, etc. Trouver la limite de la suite (A_n).

Exercice 121 : On pose des dominos l'un sur l'autre en créant à chaque nouveau domino un décalage vers la droite, de façon que l'édifice soit en équilibre. Montrer que l'on peut obtenir un décalage arbitrairement grand entre le premier et de dernier domino.

Solutions

Dans les solutions proposées, « T.S.R.C. » signifie théorème de sommation de relations de comparaison, « T.I.R.C. » théorème d'intégration de relations de comparaison.

Exercice 1 : Natures des séries $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}+\ln\frac{n-1}{n}\right)$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\exp(-\sqrt{n^2-1})$, $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-1}\right)$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n.\sin^2 n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n^{3/2}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \sqrt{\ln(2n+1)} - \sqrt{\ln(2n)}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \int_n^{+\infty}\frac{dx}{x^3+x+1}$, $u_n = \frac{1}{n^a}\int_n^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[6]{x^7+1}}$, $u_n = \frac{1}{n^a}\int_{-\infty}^{n}\frac{dx}{x^2+x+1}$,

$u_n = \int_0^{\pi/n}\frac{\sin^3 x}{1+x}.dx$, $u_n = \int_{1-1/n^a}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^5}}$ $(a > 0)$.

Solution :

1) $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$, où $u_n = \frac{1}{n}+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}$, suite de signe constant.

La règle de l'équivalent s'applique et montre que la série converge.

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, où $u_n = e - (1 + \frac{1}{n})^n = e - \exp(n.\ln(1 + \frac{1}{n})) = e - \exp(1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})) \sim \frac{e}{2n}$, suite de signe constant. La règle de l'équivalent s'applique et montre que la série diverge.

3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-\sqrt{n^2-1})$ est une série à termes > 0.

Je dis que $0 < u_n \le \frac{1}{n^2}$ àpcr, car $0 < n^2 e^{-\sqrt{n^2-1}} \le 1$ àpcr, car cela s'écrit $2 \ln n \le \sqrt{n^2-1}$.

Aussi $u_n = \exp(-n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}) = \exp(-n+\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})) \sim e^{-n}$, terme gal de série géom. convergente.

4) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ est une série de terme général $u_n = e^{\ln^2 n - n\ln\ln n} > 0$; pas d'équivalent simple.

Je dis que $0 < u_n \le \frac{1}{n^2}$ àpcr, car $-n \ln\ln n + \ln^2 n + 2\ln n \sim -n\ln\ln n \le 0$ àpcr.

Variante : $0 < u_n \le e^{-n}$ àpcr, car $-n\ln\ln n + n + \ln^2 n \sim -n\ln\ln n \le 0$ àpcr.

5) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n-1})$ est une série à termes > 0, divergente car :

$0 < u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n-1} = \frac{2}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+n-1}} \sim \frac{1}{n}$, terme gal d'une série divergente.

6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n.\sin^2 n}$ est série à termes positifs ; pour tout n, $u_n \ge \frac{1}{n}$. Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n.\sin^2 n}$ diverge en vertu de la règle de la minoration.

7) On peut montrer la convergence à l'aide du critère de Cauchy. Mais mieux vaut noter que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^{3/2}}$ est absolument convergente, car $|u_n| \le \frac{1}{n^{3/2}}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge.

8) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, où $0 < u_n = \sqrt{\ln(2n+1)} - \sqrt{\ln(2n)} = \frac{\ln(1+\frac{1}{2n})}{\sqrt{\ln(2n+1)}+\sqrt{\ln(2n)}} \sim \frac{1}{2n\sqrt{\ln(n)}}$, terme général d'une série de Bertrand divergente. Attention ! $\sqrt{\ln(2n+1)} + \sqrt{\ln(2n)} \sim 2\sqrt{\ln(2n)} \sim 2\sqrt{\ln n}$, tandis que $\sqrt{\ln(2n+1)} - \sqrt{\ln(2n)}$ n'est pas équivalente à 0. On peut parfois additionner des équivalents, mais pas toujours.

9) La série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, où $u_n = \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^3+x+1}$ est bien défini car l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+x+1}$ converge.

Et la série converge en vertu du T.I.R.C. : $0 < u_n \sim \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2n^2}$.

10) Comme en 9), $0 < u_n = \frac{1}{n^a} \int_n^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[6]{x^7+1}} \sim \frac{1}{n^a} \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^{7/6}} = \frac{1}{6.n^{a+1/6}}$; la série converge ssi $a > -\frac{5}{6}$.

11) $0 < u_n = \frac{1}{n^a} \int_{-\infty}^{n} \frac{dx}{x^2+x+1}$ peut se calculer élémentairement, mais peu importe :

$u_n \sim \frac{J}{n^a}$, où $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$ est une constante > 0. La série converge ssi $a > 1$.

12) $0 < u_n = \int_0^{\pi/n} \frac{\sin^3 x}{1+x}.dx \sim \int_0^{\pi/n} x^3.dx = \frac{\pi^4}{4n^4}$ (intégration d'un développement limité usuel).

<u>Variante</u> : Il suffit de noter que sur l'intervalle considéré, $0 < \frac{\sin^3 x}{1+x} \le \sin^3 x \le x^3$.

13) Si $a > 0$. Au V(1–0) : $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^5}} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-t)(1+t+t^2+t^3+t^4)}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{5(1-t)}}$.

Par intégration de relations de comparaison :

$0 < u_n = \int_{1-1/n^a}^{1} \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^5}} \sim \int_{1-1/n^a}^{1} \dfrac{dt}{\sqrt{5(1-t)}} = \int_0^{1/n^a} \dfrac{du}{\sqrt{5u}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \dfrac{1}{n^{a/2}}$. La série converge ssi $a > 2$.

Exercice 2 : Discuter la nature de $\sum_{n=3}^{+\infty} \dfrac{1}{n^a.\ln^b n.\ln\ln^c n}$. Généraliser.

Solution : La série $\sum_{n=3}^{+\infty} \dfrac{1}{n^a.\ln^b n.\ln\ln^c n}$ converge ssi $a > 1$ ou ($a = 1$ et $b > 1$) ou ($a = b = 1$ et $c > 1$), autrement dit ssi $(a, b, c) > (1, 1, 1)$ pour l'ordre lexicographique.

Le cas $a > 1$ se traite aisément car $0 < \dfrac{1}{n^a.\ln^b n.\ln\ln^c n} < \dfrac{1}{n^{a'}}$ àpcr, où $a' = \dfrac{a+1}{2}$.

Le cas $a < 1$ également car $\dfrac{1}{n^a.\ln^b n.\ln\ln^c n} > \dfrac{1}{n^{a'}}$ àpcr, où $a' = \dfrac{a+1}{2}$.

Reste le cas $a = 1$. L'étude des variations de $f(x) = \dfrac{1}{x.\ln^b x.\ln\ln^c x}$ montre qu'elle décroit pour $x > x_0$.

Le chgt de variable $t = \ln x$ ramène $\int_3^{+\infty} f(x).dx$ à $\int_{\ln 3}^{+\infty} \dfrac{dt}{t^b \ln^c t}$, qui converge ssi $b > 1$ ou $b = 1$ et $c > 1$.

Exercice 3 : Discuter selon les valeurs des réels a, b et c la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, où

$$u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^3+an^2+bn+c} .$$

Solution : Faisons avec Maple un d. a. de u_n à la précision $O(1/n^2)$:

```
> u:=n->sqrt(n^2+n+1)-(n^3+a*n^2+b*n+c)^(1/3);
```

$$u := n \to \sqrt{n^2+n+1} - (n^3 + a\,n^2 + b\,n + c)^{(1/3)}$$

```
> asympt(u(n),n,2);
```

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3}a + \frac{\frac{3}{8} - \frac{1}{3}b + \frac{1}{9}a^2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

• Si $a \neq \dfrac{3}{2}$, (u_n) ne tend pas vers 0 ; il y a divergence grossière.

• Si $a = \dfrac{3}{2}$ et $b \neq \dfrac{15}{8}$, alors $u_n = \dfrac{A}{n} + O(\dfrac{1}{n^2})$, où $A \neq 0$. La série diverge comme somme de la série alternée et d'une série absolument convergente.

• Si $a = \dfrac{3}{2}$ et $b = \dfrac{15}{8}$, alors $u_n = O(\dfrac{1}{n^2})$. La série est absolument convergente.

Conclusion : La série converge ssi $a = \dfrac{3}{2}$ et $b = \dfrac{15}{8}$.

Exercice 4 : Discuter selon les valeurs des complexes a, b et c la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, où :

$$u_n = a.\ln(n + 3) + b.\ln(n + 2) + c.\ln(n + 1).$$

Solution : On obtient aussitôt un d. a. de u_n à la précision $O(1/n^2)$:

$$u_n = (a + b + c).\ln n + \frac{3a+2b+c}{n} + O(\frac{1}{n^2}),$$

• Si $a + b + c \neq 0$, (u_n) est non bornée, la série diverge grossièrement.
• Si $a + b + c = 0$ et $3a + 2b + c \neq 0$, la série est somme d'une série divergente et d'une série absolument convergente, donc elle diverge.
• Si $a + b + c = 3a + 2b + c = 0$, autrement dit si $a = c$ et $b = -2a$, elle est absolument convergente.

La somme se calcule alors : elle est télescopique. Posant $v_n = \ln(n + 1) - \ln(n + 2)$, il vient

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = a\sum_{n=0}^{N}(\ln(n+1) - 2\ln(n+2) + \ln(n+3)) = a\sum_{n=0}^{N}(v_n - v_{n+1}) = a\,(v_0 - v_{N+1}) \to a\, v_0 = -\,a \ln 2.$$

Conclusion : la série converge ssi $a = c$ et $b = -\,2a$. Elle vaut alors $-\,a \ln 2$.

Exercice 5 : Discuter la nature des séries $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$, où n_0 est assez grand et :

$$u_n = \sin(2\pi\sqrt{n^2+an+b}\,) \quad , \quad v_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+an+b}\,) .$$

Solution : $\sqrt{n^2+an+b} = n + \frac{a}{2} + (\frac{b}{2} - \frac{a^2}{8})\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})$

• $u_n = \sin(2\pi\sqrt{n^2+an+b}\,) = \sin(2\pi n + a\pi + (\frac{b}{2} - \frac{a^2}{8})\frac{2\pi}{n} + O(\frac{1}{n^2}))$

$= \sin(a\pi + (\frac{b}{2} - \frac{a^2}{8})\frac{2\pi}{n} + O(\frac{1}{n^2}))$ par périodicité.

Si $a \notin \mathbf{Z}$, (u_n) ne tend pas vers 0, il y a divergence grossière.
Si $a \in \mathbf{Z}$, $u_n = (-1)^a \sin((\frac{b}{2} - \frac{a^2}{8})\frac{2\pi}{n} + O(\frac{1}{n^2})) = (-1)^a ((\frac{b}{2} - \frac{a^2}{8})\frac{2\pi}{n} + O(\frac{1}{n^2}))$

– Si $b = a^2/4$, il y a absolue convergence.
– Sinon, la série est somme d'une série divergente et d'une série absolument convergente.

• $v_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+an+b}\,) = \sin(\pi n + \frac{a\pi}{2} + (\frac{b}{2} - \frac{a^2}{8})\frac{\pi}{n} + O(\frac{1}{n^2}))$

$= (-1)^n.\sin(\frac{a\pi}{2} + (\frac{b}{2} - \frac{a^2}{8})\frac{\pi}{n} + O(\frac{1}{n^2}))$ par anti-périodicité.

Si $a \notin 2\mathbf{Z}$, (v_n) ne tend pas vers 0, il y a divergence grossière.
Si $a \in 2\mathbf{Z}$, $v_n = (-1)^{n+a/2} \sin((\frac{b}{2} - \frac{a^2}{8})\frac{\pi}{n} + O(\frac{1}{n^2})) = (-1)^{n+a/2} ((\frac{b}{2} - \frac{a^2}{8})\frac{\pi}{n} + O(\frac{1}{n^2}))$.

La série est combinaison linéaire de la série hamonique alternée et d'une série absolument convergente. Elle est donc convergente.

Exercice 6 : Discuter selon les valeurs de a la nature de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$, où

$$u_n = \frac{1}{\sum_{1\le k\le n} k^a} \quad , \quad \text{resp.} \quad u_n = \frac{n^a}{\sum_{1\le k\le n} \ln^2 k} .$$

Solution : Séries à termes > 0. La règle de l'équivalent fait merveille.

La croissance de t $\to \ln^2$ t fournit l'encadrement intégral $\int_1^n \ln^2 t.dt \leq \sum_{k=1}^{n} \ln^2 k \leq \int_1^n \ln^2 t.dt + \ln^2 n$,

d'où l'on déduit, après calculs, l'équivalent $\sum_{k=1}^{n} \ln^2 k \sim n \ln^2 n$, puis $u_n \sim \frac{1}{n^{1-a}\ln^2 n}$.

La règle de Bertrand conclut : la série converge ssi $a \leq 0$.

Exercice 7 : Soient P et Q deux polynômes complexes, Q ≠ 0.

Discuter la nature des séries $\sum_{n=a}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$ et $\sum_{n=a}^{+\infty} (-1)^n.\frac{P(n)}{Q(n)}$, où a est assez grand.

Solution : Soient p = dep P , q = deg Q , $P(x) = a_p.x^p + \dots$, $Q(x) = b_q.x^q + \dots$.

P et Q sont supposés non nuls, et a est assez grand pour que $Q(n) \neq 0$ pour tout $n \geq a$.

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_p}{b_q}.\frac{1}{n^{q-p}} + O\left(\frac{1}{n^{q-p+1}}\right).$$

♣ Si $p \geq q$, les deux séries divergent grossièrement.

♦ Si $q - p \geq 2$, $\frac{P(n)}{Q(n)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et les deux séries sont absolument convergentes.

♥ Reste le cas $q = p + 1$: $\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_p}{b_q}.\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $(-1)^n.\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_p}{b_q}.\frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

$\sum_{n=a}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$ diverge, comme somme d'une série divergente et d'une série absolument convergente.

$\sum_{n=a}^{+\infty} (-1)^n.\frac{P(n)}{Q(n)}$ converge, comme somme d'une série obéissant au critère des séries alternées et d'une série absolument convergente.

Conclusion : $\sum_{n=a}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$ converge ssi $q - p \geq 2$, $\sum_{n=a}^{+\infty} (-1)^n.\frac{P(n)}{Q(n)}$ converge ssi $q - p \geq 1$.

Remarque : pour étudier la nature de la première série, on pourrait aussi invoquer le critère de l'équivalent pour les séries vectorielles, mais je n'enseigne pas ce critère, qui n'est pas indispenable et dont la preuve est technique.

Exercice 8 : Convergence et calcul de $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{\ln^2(n+1)}{\ln n.\ln(n+2)}\right)$.

Solution : $\sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{\ln^2(n+1)}{\ln n.\ln(n+2)}\right) = \sum_{n=2}^{N} \left(\ln\frac{\ln(n+1)}{\ln n} - \ln\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}\right) = \ln\frac{\ln 3}{\ln 2} - \ln\frac{\ln(N+2)}{\ln(N+1)} \to \ln\frac{\ln 3}{\ln 2}$.

Il s'agit d'une série télescopique : $\sum_{n=0}^{N} (u_n - 2u_{n+1} + u_{n+2}) = u_0 - u_1 - (u_{N+1} - u_{N+2})$, etc. [cf. ex. 2.]

Exercice 9 : Convergence et calcul de $S(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}$, p entier ≥ 1.

Solution : Série à termes positifs convergente car $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^{p+1}}$.

Plutôt que de décomposer en éléments simples le terme général, mieux vaut noter que

$$\frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)} = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{n(n+1)\dots(n+p-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)}\right].$$

D'où $\sum_{n=1}^{N} u_n = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{1.2\ldots p} - \frac{1}{(N+1)(N+2)\ldots(N+p)}\right] \to \frac{1}{p.p!}$ quand N → +∞.

Exercice 10 : Convergence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)}$.

Solution : Série de terme général positif, équivalent à, et majoré par, $1/(4n)^3$.

Une décomposition en éléments simples donne : $u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{4n+3}\right)$.

Formellement, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2}\left(1 - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{5} + \frac{1}{11} + \ldots\right) = 0$, puisque tous les termes se simplifient deux à deux, alors qu'il est clair que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n > 0$. Ceci illustre les considérations du cours sur la convergence commutative et le réarrangement des termes (§ E.2).

Le calcul de la somme peut se faire au moyen de la fonction eulérienne $\psi(x)$.

On trouve $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -\frac{\Psi(1/4)}{8} - \frac{\gamma}{4} - \frac{\ln 2}{2} - \frac{\Psi(3/4)}{8}$.

Une autre solution passe par la série entière $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

C'est une fonction hypergéométrique que l'on peut calculer élémentairement si l'on note que :

$$F(x) = \frac{1}{2x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n+2}}{4n+2} + \frac{1}{2x^3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n+3}}{4n+3} = \frac{1}{2x}A(x) - \frac{1}{2}B(x^2) + \frac{1}{2x^3}C(x).$$

Or $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$ se calculent élémentairement via leurs dérivées. Il reste à faire $x \to 1-0$.

Avec Maple :

```
> u:=n->1/((4*n+1)*(4*n+2)*(4*n+3));convert(u(n),parfrac,n);
sum(u(n),n=0..infinity);
```

$$u := n \to \frac{1}{(4\,n+1)\,(4\,n+2)\,(4\,n+3)} \qquad \frac{1}{2}\,\frac{1}{4\,n+1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{2\,n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{4\,n+3} \qquad \frac{1}{4}\ln(2)$$

```
> sum(u(n)*x^n,n=0..infinity);
```

$$\frac{1}{6}\,\mathrm{hypergeom}\left(\left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right], x\right)$$

```
> A:=x->int(1/(1-t^4),t=0..x):A(x);B:=x->int(1/(1-t^2),t=0..x):B(x);C:=x-
>int(t^2/(1-t^4),t=0..x):C(x);
```

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{arctanh}(x) + \frac{1}{2}\,\arctan(x)$$

$$\mathrm{arctanh}(x)$$

$$-\frac{1}{4}\ln(x-1) + \frac{1}{4}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{4}\,I\,\pi$$

```
> F:=expand(1/(2*x)*A(x)-1/2*B(x^2)+1/(2*x^3)*C(x));limit(F,x=1,left);
```

$$\frac{1}{4}\ln(2)$$

Exercice 11 : Convergence et calcul de

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+2+\ldots+n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+2+\ldots+n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1^2+2^2+\ldots+n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1^2+2^2+\ldots+n^2}.$$

Solution : Traitons les séries 3 et 4.

1) Nature. La première série est à termes positifs, la seconde est alternée.

On a la majoration $0 < u_n = \dfrac{1}{1^2+2^2+...+n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$, ou l'équivalent $u_n \sim \dfrac{3}{n^3}$, qui découle de

$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 \sim \int_0^n x^2 dx = \dfrac{n^3}{3}$ par encadrement intégral. Donc la première série converge, et la seconde converge absolument (elle obéit aussi au critère des séries alternées).

2) Calcul. On a $u_n = \dfrac{6}{n(n+1)(2n+1)} = \dfrac{6}{n} + \dfrac{6}{n+1} - \dfrac{24}{2n+1}$ par décomposition en éléments simples.

$S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n = 24\, H_N - 24\,(H_{2N} + \dfrac{1}{2N+1}) + 18 + \dfrac{6}{N+1}$, où $H_N = \sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n} = \ln N + \gamma + o(1)$.

On en déduit que $S_N \to 18 - 24 \ln 2$.

3) Calcul de la seconde série. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n = 6 \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1} - 24 \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$

$= -6 \ln 2 + 6 (\ln 2 - 1) - 24 (\dfrac{\pi}{4} - 1) = 18 - 6\pi.$

4) Maple confirme :

```
> sum(1/sum(k^2,k=1..n),n=1..infinity);
```

$18 - 24 \ln(2)$

```
> sum((-1)^n/sum(k^2,k=1..n),n=1..infinity);
```

$-\mathrm{hypergeom}\left(\left[1, 1, \frac{3}{2}\right], \left[3, \frac{5}{2}\right], -1\right)$

Exercice 12 : Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k(k+n)}$.

Existence de cette suite. Equivalent quand $n \to +\infty$.

Solution : La série $\sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k(k+n)}$ à termes positifs, converge en vertu du critère de l'équivalent.

Sa somme a_n se calcule, car pour $N + 1 \geq 2n$,

$$\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k(k+n)} = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{N} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n}\right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{N+k}\right) \to \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} (H_{2n-1} - H_{n-1})$$

formule encore vraie pour $n = 1$ avec la convention $H_0 = 0$. Du coup

$$a_n = \frac{1}{n} (H_{2n-1} - H_{n-1}) = \frac{1}{n} \left(\ln \frac{2n-1}{n-1} + \gamma - \gamma + o(1)\right) = \frac{1}{n} \left(\ln \frac{2n-1}{n-1} + o(1)\right) = \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Conclusion : $a_n = \dfrac{1}{n} (H_{2n-1} - H_{n-1}) = \dfrac{\ln 2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Autre solution : encadrement intégral. La décroissance de $t \to \dfrac{1}{t(t+n)}$ donne :

$$\frac{\ln 2}{n} = \frac{1}{n} \ln \frac{x}{x+n} \Big|_n^{+\infty} = \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x(x+n)} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(k+n)} \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dx}{x(x+n)} = \frac{1}{n} \ln \frac{x}{x+n} \Big|_{n-1}^{+\infty} = \frac{1}{n} \ln \frac{2n-1}{n-1}, \text{ etc.}$$

Exercice 13 : Soit (f_n) la suite de Fibonacci $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

1) Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{f_{n-1}}{f_n\, f_{n+1}}$.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$ $f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^n$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*$ $\dfrac{(-1)^n}{f_n\, f_{n+1}} = \dfrac{f_{n+1}}{f_n} - \dfrac{f_{n+2}}{f_{n+1}}$.

Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{f_n\, f_{n+1}}$.

3) Montrer l'identité $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n . z^n = \frac{z}{1-z-z^2}$ pour des nombres complexes z à préciser.

Solution : 1) La série est télescopique, car $\frac{f_{n-1}}{f_n\, f_{n+1}} = \frac{f_{n+1}-f_n}{f_n\, f_{n+1}} = \frac{1}{f_n} - \frac{1}{f_{n+1}}$.

Donc $\sum_{n=1}^{N} \frac{f_{n-1}}{f_n\, f_{n+1}} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_{N+1}} \to \frac{1}{f_1} = 1$, car ($f_n$) tend vers $+\infty$.

2) La 1ère formule se montre par récurrence sur n, la 2ème s'en déduit aussitôt.

$\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{f_n\, f_{n+1}} = \frac{f_2}{f_1} - \frac{f_{N+2}}{f_{N+1}} = 1 - \frac{f_{N+2}}{f_{N+1}} \to 1 - \omega = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, où $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or.

Cela découle de ce que $f_n = \frac{\omega^n - \varpi^n}{\omega - \varpi} \sim \frac{\omega^n}{\sqrt{5}}$ (suite récurrente linéaire).

Conclusion : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_{n-1}}{f_n\, f_{n+1}} = 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{f_n\, f_{n+1}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Remarque : La 1ère série obéit à la règle de d'Alembert, la 2ème obéit au critère des séries alternées, et est absolument convergente.

3) La série (entière) $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n . z^n$ converge ssi $|z| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. En effet :

a) pour $0 < |z| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\left|\frac{f_{n+1}.z^{n+1}}{f_n . z^n}\right| \to |\omega z| < 1$; b) pour $|z| > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\left|\frac{f_{n+1}.z^{n+1}}{f_n . z^n}\right| \to |\omega z| > 1$.

c) pour $|z| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $| f_n . z^n |$ ne tend pas vers 0. Soit $\Phi(z)$ sa somme.

$\Phi(z) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} f_n . z^n = z + \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+2} . z^{n+2} = z + \sum_{n=0}^{+\infty} (f_{n+1} + f_n) . z^{n+2} = z + z.\Phi(z) + z^2.\Phi(z)$, donc

Conclusion : Pour $|z| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n . z^n = \frac{z}{1-z-z^2}$.

Exercice 14 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 1$, $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_0 - 1}$.

Solution : 1) La fonction $f(x) = x^2 - x + 1$ vérifie $x > 1 \Rightarrow f(x) > x > 1$.

Donc (u_n) est à valeurs > 1, et croissante.

Si elle convergeait, sa limite L vérifierait $L = L^2 - L + 1$ et $L > 1$: impossible. Donc $u_n \uparrow +\infty$.

2) On peut trouver un équivalent de u_n, ou un minorant assurant la convergence de la série : cf. mon chapitre sur les suites récurrentes.

3) On a le télescopage $\frac{1}{u_{n+1}-1} = \frac{1}{(u_n - 1).u_n} = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n}$, donc $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_0 - 1} - \frac{1}{u_{N+1} - 1} \to \frac{1}{u_0 - 1}$.

Ainsi, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$ converge et a pour somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_0 - 1}$.

Exercice 15 : Convergence et calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{[(n-1)/2]}}{n}$.

Solution : Il s'agit de la série $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\dots$

qui est en quelque sorte la « panachée » des séries $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\dots$ et $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\dots$,

qui ont pour sommes respectives $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\ln 2}{2}$.

Si les séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}b_n$ convergent, la série « panachée » $a_0+b_0+a_1+b_1+\dots$ converge et a pour somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n+\sum_{n=0}^{+\infty}b_n$. En effet, les sommes partielles d'indice pair de la panachée sont de la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)$, et les sommes partielles d'indice impair de la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)+a_{n+1}$. Comme (a_n) tend vers 0, ces sommes partielles ont même limite.

En conclusion, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{[(n-1)/2]}}{n}$ converge et a pour somme $\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}$.

Exercice 16 : Convergence et calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^2}{(3+(-1)^k)^k}$ et de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^2}{3^{k+(-1)^k}}$. [Oral Mines 2008]

Solution : Ce sont deux séries à terme général positif mais « claudicant ».
La règle de d'Alembert ne conclut pas directement, mais indirectement.

1ère série. $0\le u_k\le v_k=\frac{k^2}{2^k}$; or $\frac{v_{k+1}}{v_k}\to\frac{1}{2}$. Calculons séparément $\sum u_{2m}$ et $\sum u_{2m+1}$.

$$\sum u_{2m}=\sum\frac{4m^2}{4^{2m}}=4\sum\frac{m^2}{16^m}\ ,\quad \sum u_{2m+1}=\sum\frac{(2m+1)^2}{2^{2m+1}}=2\sum\frac{m^2}{4^m}+2\sum\frac{m}{4^m}+\frac{1}{2}\sum\frac{1}{4^m}.$$

```
> u:=k->k^2/(3+(-1)^k)^k;sum(u(k),k=0..infinity);
```

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{(3+(-1)^k)^k}$$

```
> A:=sum((2*m)^2/4^(2*m),m=0..infinity);
B:=sum((2*m+1)^2/2^(2*m+1),m=0..infinity);A+B;
```

$$A:=\frac{1088}{3375}\qquad B:=\frac{82}{27}\qquad \frac{11338}{3375}$$

2ème série. $0\le u_k\le v_k=\frac{k^2}{3^{k-1}}$. Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}v_k$ converge en vertu de la règle de d'Alembert.

Ecrivons $\displaystyle S=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k=\sum_{q=0}^{+\infty}u_{2q}+\sum_{q=0}^{+\infty}u_{2q+1}=\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{(2q)^2}{3^{2q+1}}+\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{(2q+1)^2}{3^{2q}}$

$$=\frac{4}{3}\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{q^2}{9^q}+4\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{q^2}{9^q}+4\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{q}{9^q}+\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{9^q}=\frac{16}{3}\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{q^2}{9^q}+4\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{q}{9^q}+\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{9^q}.$$

Ces trois séries se calculent en substituant $x=\frac{1}{9}$ dans $\displaystyle\frac{1}{1-x}=\sum_{q=0}^{+\infty}x^q$ et ses dérivées.

$$\frac{16}{3}X^2 + 4X + 1 = \frac{16}{3}(X+2)(X+1) - 12(X+1) + \frac{7}{3}.$$

$$S = \frac{16}{3}\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{(q+2)(q+1)}{9^q} - 12\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{q+1}{9^q} + \frac{7}{3}\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{9^q} = \frac{16}{3}\frac{2}{(1-1/9)^3} - 12\frac{1}{(1-1/9)^2} + \frac{7}{3}\frac{1}{1-1/9} = \frac{21}{8}.$$

```
> sum(k^2/(3^(k+(-1)^k)),k=0..infinity);
```

$$S := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{3^{(k+(-1)^k)}}$$

```
> A:=sum((2*q)^2/(3^(2*q+1)),q=0..infinity);
> B:=sum((2*q+1)^2/(3^(2*q)),q=0..infinity);
> S:=A+B;
```

$$A := \frac{15}{64} \qquad B := \frac{153}{64} \qquad S := \frac{21}{8}$$

Exercice 17 : Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} n\sum_{p=2^{n-1}}^{2^n-1}\frac{1}{p(2p+1)(2p+2)}$. [Oral X 1995]

Solution :

Convergence. $B_n = \sum_{p=2^{n-1}}^{2^n-1}\frac{1}{p(2p+1)(2p+2)} \le \frac{2^n-2^{n-1}}{2^{n-1}(2^n+1)(2^n+2)} = \frac{1}{(2^n+1)(2^n+2)}$, donc $0 \le u_n \le \frac{n}{4^n}$.

Calcul. $\frac{1}{X(2X+1)(2X+2)} = \frac{1}{2X} - \frac{2}{2X+1} + \frac{1}{2(X+1)}$,

donc $S_n = \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(2p+1)(2p+2)} = 2H_{n+1} - 2H_{2n+2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2(n+1)}$.

D'où $B_n = \frac{1}{2^{n+1}} - 2(H_{2^{n+1}} - 2H_{2^n} + H_{2^{n-1}})$, et $\sum_{n=1}^{+\infty} nB_n = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^{n-1}} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} n(H_{2^{n+1}} - 2H_{2^n} + H_{2^{n-1}})$

D'une part, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^{n-1}} = 4$ (dériver $\frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$, puis faire $x = ½$).

D'autre part, $\sum_{n=1}^{N} n(a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1}) = N.a_{N+1} - (N+1).a_N + a_0$. Ici $a_n = H_{2^n} = n.\ln 2 + \gamma + O(\frac{1}{2^n})$.

Conclusion : $S = 2\gamma - 1$.

Remarque : On en déduit que $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{[\log_2 p]+1}{p(2p+1)(2p+2)} = 2\gamma - 1$.

Exercice 18 : Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\dots(1+\sqrt{n})}$. [Oral Mines 1995]

Solution :

1) Convergence. On a $(\forall n \ge 1)\ 1 + \sqrt{n} \ge \sqrt{n+3}$, donc $0 \le u_n \le \frac{\sqrt{2.3}}{\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}} \le \frac{\sqrt{6}}{n^2}$.

On aurait pu aussi chercher un équivalent de u_n, via $u_n = \frac{1}{\sqrt{n.P_n}}$, où $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{\sqrt{k}})$.

2) Calcul. L'idée est de faire apparaître un télescopage.

Pour $n \geq 2$, $u_n = \dfrac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})\dots(1+\sqrt{n-1})} - \dfrac{\sqrt{n!}}{(1+\sqrt{1})\dots(1+\sqrt{n})}$.

D'où $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{n!}}{(1+\sqrt{1})\dots(1+\sqrt{n})} \to 1$. On trouve finalement S = 1.

En réalité, cet exercice est un cas particulier du suivant :

<u>Exercice 18 bis</u> : Soient (a_n) une suite à termes > 0, et $u_n = \dfrac{a_n}{(1+a_0)(1+a_1)\dots(1+a_n)}$.

1) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge. Exemple : $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

2) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge, et que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n < 1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

<u>Exercice 19</u> : Montrer, pour tout entier naturel k, la convergence de la série $S(k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^k}{n!}$.

Calculer $S(k)$ pour $0 \leq k \leq 5$. Montrer que pour tout k, $S(k)$ est irrationnel.

<u>Solution</u> :

1) <u>Convergence</u>. La règle de d'Alembert fait ici merveille. Mais les adeptes du $0 \leq u_n \leq 1/n^2$ peuvent aussi trouver leur compte. Bien entendu, $S(0) = e$.

2) <u>Calculons plus généralement</u> $S(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{P(n)}{n!}$, où $P \in \mathbf{C}[X]$.

Par linéarité, il suffit de calculer S(P) sur une base de $\mathbf{C}[X]$, et la plus adaptée n'est pas la base canonique, mais la base de Newton $N_0(X) = 1$, $N_k(X) = \dfrac{1}{k!} X(X-1)\dots(X-k+1)$.

Or $S(N_k) = \dfrac{1}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n!} = \dfrac{1}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n!} = \dfrac{1}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \dfrac{1}{(n-k)!} = \dfrac{1}{k!} \sum_{m=0}^{+\infty} \dfrac{1}{m!} = \dfrac{e}{k!}$.

Dès lors, si $P(X) = \sum_k a_k N_k(X)$, $S(P) = e \sum_k \dfrac{a_k}{k!}$.

Il y a même une formule, due à Gregory : $P(X) = \sum_k (\Delta^k P)(0).N_k(X)$, où Δ est l'opérateur aux différences finies $\Delta P(X) = P(X+1) - P(X)$. Ainsi, $S(P) = e \sum_k \dfrac{(\Delta^k P)(0)}{k!}$.

3) <u>Revenant à l'exercice</u>, $S(k) = S(X^k) = e \sum_{p=1}^{k} \dfrac{\sigma(k;p)}{k!}$, où $X^k = \sum_{p=1}^{k} \sigma(k,p).N_k(X)$.

4) <u>Formule de récurrence liant les $S(k)$</u>.

$S(k+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^{k+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^k}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(n+1)^k}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} \sum_{p=0}^{k} C_k^p n^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k.S(p)$.

Cette formule fournit un calcul récurrent des $S(k)$, et montre que $S(k)/e \in \mathbf{N}^*$.
On en déduit que $S(k)$ est irrationnel, et même transcendant.

<u>Remarque</u> : $S(k) = \varpi(k)e$, où $\varpi(k)$ est le k-ème nombre de Bell.

```
> S:=k->sum(n^k/n!,n=0..infinity);
array([S(0),S(1),S(2),S(3),S(4),S(5),S(6),S(7),S(8),S(9)]);
```

$$S := k \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!} \qquad [\mathbf{e}, \mathbf{e}, 2\,\mathbf{e}, 5\,\mathbf{e}, 15\,\mathbf{e}, 52\,\mathbf{e}, 203\,\mathbf{e}, 877\,\mathbf{e}, 4140\,\mathbf{e}, 21147\,\mathbf{e}]$$

Exercice 20 : Convergence et somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n(3n+2)}$.

Solution : Pour la convergence, d'Alembert marche bien, ou $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2.3^n}$.

Le calcul de la somme passe par l'évaluation d'une certaine série entière.

La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{3n+2}$ a un rayon de convergence égal à 1. Soit F sa somme sur]−1, 1[.

On a F(0) = 0 et $F'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n+1} = \frac{x}{1-x^3}$, donc $F(x) = \int_0^x \frac{t}{1-t^3}.dt$. Terminons avec Maple :

```
> int(t/(1-t^3),t=0..x);
```

$$-\frac{1}{3}\ln(x-1)+\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{3}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{3}\right)+\frac{1}{3}I\pi+\frac{1}{18}\sqrt{3}\pi$$

```
> S:=simplify(3^(2/3)*int(t/(1-t^3),t=0..1/3^(1/3)));evalf(S);
```

$$S := \frac{1}{18}3^{(2/3)}\left(3\ln(3)-6\ln(-3^{(2/3)}+3)+3\ln(3+3^{(1/3)}+3^{(2/3)})\right.$$
$$\left.-6\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{9}(2\,3^{(2/3)}+3)\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}\pi\right)$$

$$.5851433084$$

```
> T:=sum(3^(-n)/(3*n+2),n=0..infinity);evalf(T);
```

$$T := \frac{1}{3}\text{LerchPhi}\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}\right)$$

$$.5851433089$$

```
> sum(x^(3*n+2)/(3*n+2),n=0..infinity);
```

$$\frac{1}{3}x^2\,\text{LerchPhi}\left(x^3, 1, \frac{2}{3}\right)$$

Exercice 21 : Soient m un entier ≥ 2, x un complexe,

$$S(x) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m-1} - \frac{x}{m} + \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{2m-1} - \frac{x}{2m} + \dots$$

Montrer qu'il y a une seule valeur de x pour laquelle la série converge. Calculer alors S(x).

Solution : Rappelons que $H_N = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} = \ln N + \gamma + o(1)$.

Calculons la somme des km premiers termes :

$$S_{km}(x) = H_{km} - (x+1)\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{2m} + \dots + \frac{1}{km}\right) = H_{km} - \frac{x+1}{m}H_k$$

$$= \ln(km) + \gamma + o(1) - \frac{x+1}{m}(\ln k + \gamma + o(1)) = \left(1 - \frac{x+1}{m}\right)\ln k + \ln m + \left(1 - \frac{x+1}{m}\right)\gamma + o(1).$$

Cette suite converge ssi $x + 1 = m$ et elle tend vers $\ln m$.

Il reste à montrer que si N tend vers +∞ et si $km \leq N < (k+1)m$, alors $S_N(x) - S_{km}(x) \to 0$.

Cela découle de ce que $0 \leq S_N(x) - S_{km}(x) \leq \frac{1}{km+1} + \frac{1}{km+2} + \dots + \frac{1}{(k+1)m-1} \to 0$

(somme de $m - 1$ suites tendant vers 0).

Conclusion : La série S(x) converge ssi $x = m - 1$, et sa somme vaut alors $\ln m$.
Si $m = 2$, on retrouve le développement en série classique de ln 2.

Remarque : l'exercice suivant généralise celui-ci.

Exercice 22 : Soit $(p_n)_{n\geq 1}$ une suite complexe T-périodique (T ∈ $\mathbf{N}^*$) .

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p_n}{n}$ converge si et seulement si $\sum_{k=1}^{T} p_k = 0$.
Applications : i) retrouver l'exercice précédent ; ii) cas où $p_n = i^n$.

Solution : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p_n}{n} = \frac{p_1}{1} + \frac{p_2}{2} + \dots + \frac{p_T}{T} + \dots + \frac{p_1}{qT+1} + \frac{p_2}{qT+2} + \dots + \frac{p_T}{qT+T-1} + \dots$

Formons, par groupement des termes, la série de terme général :

$$v_q = \frac{p_1}{qT+1} + \frac{p_2}{qT+2} + \dots + \frac{p_T}{qT+T} = \Big(\sum_{k=1}^{T} p_k\Big)\frac{1}{qT} + O\Big(\frac{1}{q^2}\Big).$$

• Si $\sum_{k=1}^{T} p_k \neq 0$, $\sum_{q=0}^{+\infty} v_q$ diverge, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p_n}{n}$ diverge, puisque les sommes partielles de $\sum_{q=0}^{+\infty} v_q$ sont des sommes partielles particulières de $\sum_{q=0}^{+\infty} v_q$.

• Si $\sum_{k=1}^{T} p_k = 0$, $\sum_{q=0}^{+\infty} v_q$ est absolument convergente.

Si N = qT + r , 1 ≤ r ≤ T, $\Big|\sum_{n=1}^{N} \frac{p_n}{n} - \sum_{k=0}^{q} v_k\Big| \leq \frac{|p_1|}{qT+1} + \frac{|p_2|}{qT+2} + \dots + \frac{|p_T|}{qT+T} \to 0$ quand $N \to +\infty$.

Du coup, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p_n}{n}$ converge et a même somme que $\sum_{q=0}^{+\infty} v_q$.

Exemples :
i) L'exercice précédent rentre dans ce cadre.
ii) La suite $p_n = i^n$ est 4-périodique de moyenne nulle, et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p_n}{n} = \frac{i}{1} - \frac{1}{2} - \frac{i}{3} + \frac{1}{4} + \frac{i}{5} - \frac{1}{6} - \frac{i}{7} + \frac{1}{8} + \dots = i.\text{Arctan } 1 - \frac{1}{2}\ln 2 = -\frac{1}{2}\ln 2 + i.\frac{\pi}{4}.$$

Remarque : la fonction ψ permet de calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p_n}{n}$ lorsque $\sum_{k=1}^{T} p_k = 0$, dans tous les cas.

Référence : Problème Mines-Ponts 1995.

Exercice 23 : Convergence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}([\sqrt{n+1}] - [\sqrt{n}])$.

Solution : C'est une série à termes ≥ 0, lacunaire en ce sens que presque tous ses termes sont nuls.
Plus précisément, $u_n = \frac{1}{n}$ si n est de la forme $K_p = p^2 + 2p$, $u_n = 0$ sinon.

En effet u_n est non nul ssi $(\exists p)\ p \leq \sqrt{n} < p + 1 \leq \sqrt{n+1}$, i.e. $n < (p+1)^2 \leq n + 1$.

Formellement $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}([\sqrt{n+1}] - [\sqrt{n}]) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2+2p} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+2}\Big) = \frac{3}{4}$.

Plus précisément si $K_p \leq N < K_{p+1}$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}([\sqrt{n+1}] - [\sqrt{n}]) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2+2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}\Big) \to \frac{3}{4}.$$

Exercice 24 : Soit a un entier fixé ≥ 2. Convergence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n - aE(n/a)}{n(n+1)}$.

Solution : 1) Convergence.

On a $u_n = \dfrac{r(n)}{n(n+1)}$, où r($n$) est le reste de la division euclidienne de n par a.

Du coup $0 \le u_n \le \dfrac{a-1}{n(n+1)}$. Comme $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ converge, la série converge.

2) <u>Calcul de la somme</u>.

Exploitant la périodicité de r(n), calculons $S_{qa} = \sum_{n=1}^{qa}\dfrac{r(n)}{n(n+1)} = \sum_{k=0}^{q-1} T_k$, où

$$T_k = \sum_{n=ka+1}^{(k+1)a}\frac{r(n)}{n(n+1)} = \sum_{n=ka+1}^{(k+1)a} r(n)\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big) = \sum_{r=1}^{a-1} r\Big(\frac{1}{ka+r}-\frac{1}{ka+r+1}\Big)$$

$$= \frac{1}{ka+1} + \frac{1}{ka+2} + \dots + \frac{1}{ka+a-1} - \frac{a-1}{(k+1)a} \text{ , par développement et regroupement}$$

$$= \frac{1}{ka+1} + \frac{1}{ka+2} + \dots + \frac{1}{ka+a-1} + \frac{1}{(k+1)a} - \frac{1}{k+1}.$$

$S_{qa} = H_{qa} - H_q = \ln(qa) + \gamma + o(1) - \ln q - \gamma + o(1) = \ln a + o(1) \to \ln a$ quand $q \to +\infty$.

Comme la série converge, $S_n \to \ln a$, et finalement $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n-aE(n/a)}{n(n+1)} = \ln a$.

3) <u>La convergence de la série</u> peut aussi se déduire de 2), par encadrement

En effet, pour tout $n \in [qa, (q+1)a]$, $S_{qa} \le S_n \le S_{(q+1)a}$.

4) <u>Conséquence</u>. Regroupant les termes selon les restes modulo a, il vient :

$$\ln a = \sum_{r=1}^{a-1} r \sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{(aq+r)(aq+r+1)}.$$

<u>Exercice 25</u> : On note s(n) le nombre de chiffres dans le développement binaire de n, b(n) le nombre de 1 dans ce développement binaire. Convergence et calcul des séries $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{s(n)}{n(n+1)}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{b(n)}{n(n+1)}$.

<u>Solution</u> : 1) <u>Nature</u>. On a, pour tout $n \ge 1$: $0 < b(n) \le s(n) = 1 + E(\log_2 n)$.

Donc $\dfrac{s(n)}{n(n+1)} = O\Big(\dfrac{\ln n}{n^2}\Big) \subset O\Big(\dfrac{1}{n^{3/2}}\Big)$. Les deux séries convergent.

2) La fonction s est lentement croissante. Par sommabilité par paquets :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{s(n)}{n(n+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n;s(n)=k+1}\frac{k+1}{n(n+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}\frac{1+k}{n(n+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\Big(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k+1}}\Big) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{2^k}.$$

Or $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \dfrac{d}{dx}\Big(\dfrac{1}{1-x}\Big) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ pour $|x| < 1$, par dérivation des séries entières.

Faisant $x = ½$, il vient S = 2.

3) est plus subtil. La fonction b est irrégulière, mais obéit aux formules récurrentes :

$$b(0) = 1 \text{ , } b(2n) = b(n) \text{ , } b(2n+1) = b(n) + 1.$$

$$B = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b(n)}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b(2n)}{2n(2n+1)} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b(n)}{2n(2n+1)} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b(n)+1}{(2n+1)(2n+2)} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} b(n)\Big(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\Big) + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\Big)$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} b(n)\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big) = \ln 2 + \frac{B}{2}.$$ Par suite $B = 2.\ln 2$.

Exercice 26 : Convergence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{9n^2-1}$. [On pourra utiliser $\int_0^1 t^a.dt = \frac{1}{a+1}$ pour $a > -1$]

Solution : La convergence ne pose pas de problème.

$u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 (t^{3n-2}-t^{3n}).dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{3n-2}(1-t^2).dt$.

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 t^{3n-2}(1-t^2).dt = \frac{1}{2}\int_0^1\sum_{n=1}^{+\infty} t^{3n-2}(1-t^2).dt$ (justification plus bas)

$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t}{1-t^3}(1-t^2).dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t+t^2}{1+t+t^2}.dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+t+t^2}\right).dt = \frac{1-J}{2}$, où $J = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2}$.

Laissons conclure et vérifier Maple :

```
> int(1/(1+t+t^2),t);J:=int(1/(1+t+t^2),t=0..1);(1-J)/2;
```

$$\frac{2}{3}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{3}(2t+1)\sqrt{3}\right) \qquad J := \frac{1}{9}\pi\sqrt{3} \qquad \frac{1}{2}-\frac{1}{18}\pi\sqrt{3}$$

```
> sum(1/(9*n^2-1),n=1..infinity);
```

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{18}\pi\sqrt{3}$$

Justification de $\sum\int = \int\sum$, soit via le théorème d'intégration terme à terme des séries, soit via les sommes partielles et une majoration du reste.

Exercice 27 : Pour $p \in \mathbf{N}^*$, soit $S(p) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{16^k(8k+p)}$.

Ecrire $S(p)$ sous forme intégrale, puis calculer $4S(1) - 2S(4) - S(5) - S(6)$.

Solution : Les séries convergent par d'Alembert.

Ecrivons $\frac{1}{16^k(8k+p)} = 2^{p/2}\left[\frac{x^{8k+p}}{8k+p}\right]_0^{1/\sqrt{2}} = 2^{p/2}\int_0^{1/\sqrt{2}} x^{8k+p-1}.dx$.

Par convergence normale, on a $S(p) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{16^k(8k+p)} = 2^{p/2}\int_0^{1/\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{+\infty} x^{8k+p-1}.dx = 2^{p/2}\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{x^{p-1}}{1-x^8}.dx$.

D'où : $4S(1) - 2S(4) - S(5) - S(6) = \int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{4\sqrt{2}-8x^3-4\sqrt{2}x^4-8x^5}{1-x^8}.dx$.

Poursuivons les calculs avec Maple :

```
> P:=Int((4*sqrt(2)-8*x^3-4*sqrt(2)*x^4-8*x^5)/(1-x^8),x=0..1/sqrt(2));
```

$$P := \int_0^{1/2\sqrt{2}}\frac{4\sqrt{2}-8x^3-4\sqrt{2}x^4-8x^5}{1-x^8}dx$$

```
> with(student):
> Q:=simplify(changevar(y=x*sqrt(2),P,y));
> R:=convert(16*integrand(Q),parfrac,y);
```

$$Q := 16\int_0^1\frac{y-1}{y^4-2y^3+4y-4}dy \qquad R := -4\frac{-2+y}{y^2-2y+2}+\frac{4y}{y^2-2}$$

```
> int(R,y);
```

$$-2\ln(y^2-2y+2)+4\arctan(y-1)+2\ln(y^2-2)$$

```
> int(R,y=0..1);
```

π

Conclusion : On obtient la **formule de Bailey-Borwein-Plouffe** (1995)

$$\pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right).$$

Cette formule permet le calcul de la nème décimale de π en base 2, sans calculer les précédentes.

Exercice 28 : Soient q et x deux complexes, $|q| \neq 1$. Convergence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^n x}{(1+q^n x)(1+q^{n+1}x)}$.

Solution : On suppose bien entendu $q^n x + 1 \neq 0$ pour tout entier n.

Si $|q| < 1$, $u_n \sim q^n x$; si $|q| > 1$, $u_n \sim \frac{1}{q^{n+1}x}$. Dans les deux cas, il y a absolue convergence.

Le terme général se présente de façon télescopique : $u_n = \frac{1}{q-1}\left(\frac{1}{1+q^n x} - \frac{1}{1+q^{n+1}x}\right)$.

D'où la somme partielle d'indice N : $S_N = \frac{1}{q-1}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+q^{N+1}x}\right)$.

Si $|q| < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^n x}{(1+q^n x)(1+q^{n+1}x)} = \frac{1}{(q-1)(1+x)}$; si $|q| > 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^n x}{(1+q^n x)(1+q^{n+1}x)} = \frac{x}{(q-1)(1+x)}$

Ces formules relèvent du « q-calcul ».

Exercice 29 : Natures des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$, où $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = \left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right).\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$.

Solution : La série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, donc u_n et v_n sont bien définis. Deux séries à termes positifs.

Un encadrement intégral donne $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{n}$. Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diverge.

De plus $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$. Donc $v_n \sim \frac{1}{n}\exp(-\ln n - \gamma + o(1)) \sim \frac{e^{-\gamma}}{n^2}$. Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ converge.

Remarque : une autre méthode pour étudier $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ consiste à passer par les séries doubles :

$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$. Détails laissés au lecteur.

Exercice 30 : Nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\sqrt{n}}$. Equivalent du reste.

Solution :

1) Série à termes positifs, convergente, car $e^{-\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2}$ àpcr, car $n^2 e^{-\sqrt{n}} \leq 1$, i.e. $2.\ln n - \sqrt{n} \leq 0$ àpcr.

2) Soit $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-\sqrt{k}}$. Un encadrement intégral fondé sur la décroissance de $x \to e^{-\sqrt{x}}$ donne :

$\int_{n+1}^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}.dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}.dt$. Or $\int_n^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}.dt = \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} 2ue^{-u}.du = (2\sqrt{n} + 1)\, e^{-\sqrt{n}}$.

Conclusion : $R_n \sim 2\sqrt{n}\, e^{-\sqrt{n}}$.

Exercice 31 : Nature de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$, où $u_n = \dfrac{1}{\ln^2 1+\ln^2 2+\dots+\ln^2 n}$. Equivalent du reste.

Solution succincte : Sértie à termes positifs.

Un encadrement intégral donne $\sum_{k=1}^{n} \ln^2 k \sim n.\ln^2 n$, donc $u_n \sim \dfrac{1}{n.\ln^2 n}$.

La règle de Bertrand (due en réalité à Abel) permet de conclure que $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ converge.

Le théorème de sommation de relations de comparaison et un nouvel encadrement intégral donnent :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k.\ln^2 k} \sim \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t.\ln^2 t} = \frac{1}{\ln n}.$$

Exercice 32 : Nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln n}}$. Equivalent de la somme partielle.

Solution :

1) <u>Nature</u>. C'est une série à termes positifs. Je dis que $\dfrac{1}{n} \leq e^{-\sqrt{\ln n}}$ à partir d'un certain rang.

En effet $f(x) = x\,e^{-\sqrt{\ln x}} \to +\infty$ quand $x \to +\infty$ (passer au log).

La règle de la minoration assure la divergence.

2) <u>Equivalent de</u> $S_n = \sum_{k=1}^{n} e^{-\sqrt{\ln k}}$. $h(x) = e^{-\sqrt{\ln x}} \downarrow 0$, d'où l'encadrement intégral :

$\int_1^n e^{-\sqrt{\ln x}}.dx \leq S_n \leq 1 + \int_1^n e^{-\sqrt{\ln x}}.dx$. Ainsi $S_n = T_n + O(1) \sim T_n$, où $T_n = \int_1^n e^{-\sqrt{\ln x}}.dx$.

Le changement de variables $y = -\sqrt{\ln x}$ donne $T_n = \int_0^{\sqrt{\ln n}} 2ye^{y^2-y}.dy$.

Cette intégrale ne se calcule pas, mais le théorème d'intégration de relations de comparaison donne

$$T_n = \int_0^{\sqrt{\ln n}} 2ye^{y^2-y}.dy \sim \int_0^{\sqrt{\ln n}} (2y-1)e^{y^2-y}.dy = \left[e^{y^2-y}\right]_0^{\sqrt{\ln n}} = n\,e^{-\sqrt{\ln n}} - 1 \sim n\,e^{-\sqrt{\ln n}}.$$

<u>Conclusion</u> : $S_n \sim n\,e^{-\sqrt{\ln n}}$.

Des variantes existent, par intégration par parties ou changement de variables.

Exercice 33 : Nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{n}-1)$. Equivalent de la somme partielle. [Oral Mines 1993]

Solution :

1) <u>Nature</u>. C'est une série à termes positifs.

$$u_n = \sqrt[n]{n} - 1 = \exp\frac{\ln n}{n} - 1 = \frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right) \sim \frac{\ln n}{n}.$$

Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln n}{n}$ diverge,, la série diverge.

2) <u>Equivalent de</u> $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. En vertu du TRSC, puis d'un encadrement intégral dont la justification précise est laissée au lecteur, $S_n \sim \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\ln k}{k} \sim \int_1^n \dfrac{\ln t}{t}.dt = \dfrac{1}{2}\ln^2 n$.

3) <u>On peut aussi transformer</u> $S_n - \dfrac{1}{2}\ln^2 n$ <u>en série</u> : $S_n - \dfrac{1}{2}\ln^2 n = \sum_{k=1}^{n} v_k$,

où $v_n = \exp\frac{\ln n}{n} - 1 - \frac{1}{2}\ln^2 n + \frac{1}{2}\ln^2(n-1)$. Or on s'aperçoit que $v_n = O(\frac{\ln^2 n}{n^2}) \subset O(\frac{1}{n^{3/2}})$.

$\sum_{k=1}^{n} v_k$ est somme partielle d'une série absolument convergente, donc :

$$\boxed{S_n = \frac{1}{2}\ln^2 n + C + o(1)\ .}$$

Les réactions de Maple trahissent son embarras:

```
> u:=n->n^(1/n)-1;S:=n->sum(u(k),k=1..n);asympt(S(n),n);
Error, (in asympt) unable to compute series
```

```
> T:=n->sum(ln(k)/k,k=1..n);asympt(T(n),n);
```

$$-\frac{583}{7560} - O\left(\frac{-363}{140}\right) + \frac{1}{2}\ln(n)^2 + \frac{\frac{1}{2}\ln(n)}{n} + \frac{-\frac{1}{12}\ln(n) + \frac{1}{12}}{n^2} + \frac{\frac{1}{120}\ln(n) - \frac{11}{720}}{n^4} + O\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

```
> v:=n->u(n)-1/2*ln(n)^2+1/2*ln(n-1)^2;asympt(v(n),n);
```

$$\frac{\frac{1}{2}\ln(n)^2 - \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{1}{2}}{n^2} + \frac{\frac{1}{6}\ln(n)^3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\ln(n)}{n^3} + \frac{\frac{1}{24}\ln(n)^4 - \frac{1}{4}\ln(n) + \frac{11}{24}}{n^4} + \frac{\frac{1}{120}\ln(n)^5 - \frac{1}{5}\ln(n) + \frac{5}{12}}{n^5} + O\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

<u>Exercice 34</u> : 1) Développement à deux termes de la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}$.

2) Convergence et calcul de la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$.

<u>Solution</u> :

0) Notons d'emblée que <u>Maple ne sait résoudre ni la première, ni la deuxième question</u> :

```
> sum((-1)^n*ln(n)/n,n=1..infinity);
```

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln(n)}{n}$$

```
> S:=n->sum(ln(k)/k,k=1..n);asympt(S(n),n);
```

$$-\frac{583}{7560} - O\left(\frac{-363}{140}\right) + \frac{1}{2}\ln(n)^2 + \frac{\frac{1}{2}\ln(n)}{n} + \frac{-\frac{1}{12}\ln(n) + \frac{1}{12}}{n^2} + \frac{\frac{1}{120}\ln(n) - \frac{11}{720}}{n^4} + O\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

1) La fonction $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ décroît sur $[e, +\infty[$, d'où l'encadrement intégral :

$$\frac{\ln 2}{2} + \int_3^n \frac{\ln t}{t}.dt + \frac{\ln n}{n} \leq S_n \leq \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \int_3^n \frac{\ln t}{t}.dt\ .$$

On en déduit aussitôt que $\quad S_n = \frac{1}{2}\ln^2 n + O(\frac{\ln n}{n})$.

Pour avoir le terme d'après, formons la suite $T_n = S_n - \frac{1}{2}\ln^2 n$ et transformons-là en série :

$T_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, où $u_n = \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}\ln^2 n + \frac{1}{2}\ln^2(n-1)$. Or $u_n = O(\frac{\ln n}{n^2}) \subset O(\frac{1}{n^{3/2}})$.

Donc T_n est somme partielle d'une série absolument convergente, et :

$$\boxed{S_n = \frac{1}{2}\ln^2 n + C + o(1)\ .}$$

2) La série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ obéit au critère des séries alternées à partir du rang 3.

Pour calculer sa somme, il suffit d'étudier la limite des sommes partielles d'indices pairs 2N :

$$A_{2N} = \sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = -S_{2N} + \ln 2 + \frac{\ln 4}{2} + \dots + \frac{\ln(2N)}{N}$$

$$= -S_{2N} + \ln 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N}\right) + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \dots + \frac{\ln N}{N}$$

$$= S_N - S_{2N} + \ln 2 . H_N .$$

Un calcul facile montre que (A_{2N}) tend vers $\frac{\ln 2}{2}(2\gamma - \ln 2)$. D'où :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln 2}{2}(2\gamma - \ln 2).}$$

<u>Remarque</u> : Une variante de 1) consiste à abéliser, via la suite (H_n).

On trouve $S_n = H_n . \ln n - \sum_{k=1}^{n-1} H_k . \ln(1+\frac{1}{k}) =$ etc.

```
> u:=n->ln(n)/n-1/2*ln(n)^2+1/2*ln(n-1)^2;asympt(u(n),n);
```

$$\frac{-\frac{1}{2}\ln(n)+\frac{1}{2}}{n^2} + \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\ln(n)}{n^3} + \frac{-\frac{1}{4}\ln(n)+\frac{11}{24}}{n^4} + \frac{-\frac{1}{5}\ln(n)+\frac{5}{12}}{n^5} + O\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

<u>Exercice 35</u> : 1) Limite et équivalent de la suite $\sin(n!e\pi)$.

2) Nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, où $u_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right).\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) - 1$.

<u>Solution</u> : Ce sont deux exercices indépendants, mais gouvernés par le même lemme.

Rappelons que $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. Je dis que $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sim \frac{1}{(n+1)!}$.

En effet, $\frac{1}{(n+1)!} \le R_n \le \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots\right) = \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1}$.

Autre solution par Taylor-intégral : $R_n = \frac{1}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t . dt = \frac{1}{(n+1)!} + O\left(\frac{e}{(n+2)!}\right)$.

1) $\sin(n!\, e\, \pi) = \sin\left(\left(\frac{n!}{0!} + \frac{n!}{1!} + \dots + \frac{n!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{n!} + n!\, R_n\right)\pi\right)$

$= \sin(2k\pi + (n+1)\pi + n!\, R_n\, \pi)$ car $\frac{n!}{0!} + \frac{n!}{1!} + \dots + \frac{n!}{(n-2)!}$ est un entier pair

$= (-1)^{n+1} \sin(n!\, R_n\, \pi) \sim (-1)^{n+1} . n!\, R_n\, \pi \sim (-1)^{n+1} \frac{\pi}{n+1}$.

2) Tout d'abord $u_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right).\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) - 1 \to e\, e^{-1} - 1 = 0$. Plus précisément,

$u_n = (e - R_n)(e^{-1} - R'_n) - 1 = \left(e + O\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)\right)\left(e^{-1} + O\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)\right) - 1 = O\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)$

car $R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$ vérifie $|R'_n| \le R_n$. La règle de la domination conclut à la convergence.

<u>Exercice 36</u> : Soient x et $y > 0$. Discuter la nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)(2x+1)\dots(nx+1)}{(y+1)(2y+1)\dots(ny+1)}$.

<u>Solution</u> : C'est une série à termes > 0.

La règle de d'Alembert est indiquée ici : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)x+1}{(n+1)y+1} \to \frac{x}{y}$.

Si $x < y$ la série converge. Si $x > y$, elle diverge. Si $x = y$, $u_n = 1$ pour tout n, donc la série diverge.

Remarque : L'exercice suivant fournit un équivalent de u_n.

Exercice 37 : 1) Equivalent de la suite $P_n = (a + 1)(a + 2) \dots (a + n)$, pour $a \geq 0$.

2) Soient a et $b > 0$. Discuter la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n)}{b(b+1)\dots(b+n)}$. Somme éventuelle.

Solution : 1) Le passage au log nous ramène à l'étude des sommes partielles d'une série divergente :

$$\ln P_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(a+k) = \sum_{k=1}^{n} \ln k + \ln(1+\frac{a}{k}) = \ln n! + \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{k} + O(\frac{1}{k^2})$$

$$= \ln n! + a\, H_n + \sum_{k=1}^{n} O(\frac{1}{k^2}) = \ln n! + a\,(\ln n + \gamma + o(1)) + \text{SPSAC}$$

(somme partielle de série absolument convergente). Finalement $\ln P_n = \ln n! + a \ln n + S + o(1)$, et

$$\boxed{P_n = n!\, n^a . K(a) \text{ , où } K(a) \text{ est une constante } > 0 \text{ dépendant de A.}}$$

Remarques : i) En fait on peut supposer $a > -1$.

ii) Si a est un entier, on trouve aussitôt $K(a) = \frac{1}{a!}$

iii) La fonction K vérifie : $\forall a > -1 \quad (a + 1)K(a + 1) = K(a)$.

Elle est liée à la fonction Γ par la formule $K(a) = 1/\Gamma(a+1)$.

2) Il résulte de ce qui précède que $\frac{a(a+1)\dots(a+n)}{b(b+1)\dots(b+n)} \sim \frac{K}{n^{b-a}}$, où $K > 0$.

Donc la série converge ssi $b > a + 1$.

Calcul de la somme : $(b + n).u_n = (a + n).u_{n-1}$, donc $n.u_n - (n - 1).u_{n-1} = (a + 1).u_{n-1} - b.u_n$.

Sommons pour $1 \leq n \leq N$. Il vient : $N.S_N = (a + 1)\, S_{N-1} - b\, S_N$, donc $S = \frac{a}{b-a-1}$.

Exercice 38 : Soient a et $b > 0$. Trouver $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \prod_{k=1}^{n} (a+bk)^{1/n}$.

Application : Soient A_n et G_n les moyennes arithmétique et géométrique de $a + b, a + 2b, \dots, a + nb$.

Trouver $\lim_{n\to+\infty} \frac{G_n}{A_n}$.

Solution : Plusieurs solutions possibles. Notons P_n la suite considérée.

1ère idée : $\ln P_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(a+bk) - \ln n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln k + \ln b + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{a}{bk}) - \ln n$

$$= \frac{1}{n} \ln n! + \ln b + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\frac{a}{bk} + O(\frac{1}{k^2})) - \ln n$$

$$= \frac{1}{n} \ln \left[(\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}\, (1 + o(1)) \right] + \ln b + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\frac{a}{bk} + O(\frac{1}{k^2})) - \ln n$$

$$= \ln n - 1 + \frac{1}{2n} \ln(2\pi n) + o(\frac{1}{n}) + \ln b + \frac{a}{b}(\frac{\ln n}{n} + \frac{A}{n} + o(\frac{1}{n})) - \ln n$$

$$= \ln b - 1 + o(1). \text{ Donc } P_n \to \frac{b}{e}.$$

Plus précisément, $\ln P_n = \ln b - 1 + (\frac{a}{b} + \frac{1}{2})\frac{\ln n}{n} + \frac{C}{n} + o(\frac{1}{n})$.

$$\boxed{P_n = \frac{b}{e}\Big(1 + (\frac{a}{b} + \frac{1}{2})\frac{\ln n}{n} + O(\frac{1}{n})\Big) .}$$

Variante : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{a}{bk})$ rend vers 0 par Cesàro.

2ème idée : Cesàro-Cauchy-d'Alembert.

On sait que si (a_n) est une suite à termes > 0 telle que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \lambda$, alors $\sqrt[n]{a_n} \to \lambda$.

Ce lemme, utile pour comparer les règles de Cauchy et d'Alembert, découle de Cesàro.

Or $P_n = \sqrt[n]{a_n}$, où $a_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{a+bk}{n}$. Or $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a+(n+1)b}{n+1}(1+\frac{1}{n})^{-n} \to \frac{b}{e}$ …

3ème solution : sommes de Riemann modifiées.

$$\ln P_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(\frac{a+kb}{n}) , \text{ où } 0 < \frac{a+b}{n} < \frac{a+2b}{n} < \dots < \frac{a+nb}{n} = b + \frac{a}{n} .$$

C'est presque une somme de Riemann de log sur]0, b], à deux détails près : d'une part, la subdivision déborde l'intervalle]0, b], d'autre part l'intégrale est impropre en 0. On peut néanmoins s'en tirer par un encadrement intégral sur]0, b], laissé au lecteur. Et l'on conclut alors que :

$$\ln P_n \to \frac{1}{b-0}.\int_0^b \ln x.dx = \ln b - 1 .$$

Application : $\frac{G_n}{A_n} = \frac{nP_n}{a+\frac{n+1}{2}b} \sim \frac{2}{b}P_n \sim \frac{2}{e}$. On remarque que cette limite ne dépend ni de a ni de b.

Références : Oral Mines 1989, 1990, etc., Polya-Szegö, t. 1 n° 50, p. 58.

Exercice 39 : Equivalents et développements à deux termes des suites :

$$A_n = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}} \quad , \quad B_n = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} \quad \text{et} \quad C_n = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^2} .$$

Solution :

0) Ces 3 suites sont des tranches de Cauchy particulières de séries de Riemann, les deux premières divergentes, la dernière convergente (donc (C_n) tend vers 0). Différentes méthodes peuvent être utilisées : encadrements intégraux, transformation en série, sommes de Riemann.

1) Encadrement intégral.

Si f est décroissante sur $[1, +\infty[$ $\int_{n+1}^{2n+1} f(t).dt \le S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} f(k) \le \int_n^{2n} f(t).dt$.

$\int_{n+1}^{2n+1}\frac{dt}{\sqrt{t}} \le A_n \le \int_n^{2n}\frac{dt}{\sqrt{t}}$ donne $2\sqrt{2n+1} - 2\sqrt{n+1} \le A_n \le 2\sqrt{2n} - 2\sqrt{n}$.

$\int_{n+1}^{2n+1}\frac{dt}{t} \le B_n \le \int_n^{2n}\frac{dt}{t}$ donne $2\ln(2n+1) - 2\ln(n+1) \le B_n \le 2\ln(2n) - 2\ln n$.

$\int_{n+1}^{2n+1}\frac{dt}{t^2} \le C_n \le \int_n^{2n}\frac{dt}{t^2}$ donne $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} \le C_n \le \frac{1}{n} - \frac{1}{2n}$.

$$\boxed{A_n \sim 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n} \quad , \quad B_n \sim \ln 2 \quad , \quad C_n \sim \frac{1}{2n} .}$$

Remarque : les encadrements donnent même :

$$A_n = 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n} = O(1) \quad , \quad B_n = \ln 2 + O(\frac{1}{n}) \quad \text{et} \quad C_n = \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2}) .$$

2) Le terme suivant…

$$A_n - \int_n^{2n}\frac{dt}{\sqrt{t}} = \sum_{k=n+1}^{2n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{\sqrt{t}}\right) = \sum_{k=n+1}^{2n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})\right) = \sum_{k=n+1}^{2n}a_k$$

Un calcul asymptotique montre que $a_k \sim -\frac{1}{4}\frac{1}{k^{3/2}}$.

Par sommation de relations de comparaison et encadrement intégral, il vient :

$$\sum_{k=n+1}^{2n}a_k \sim -\frac{1}{4}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^{3/2}} \sim -\frac{1}{4}\int_n^{2n}\frac{dt}{t^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}-2}{4\sqrt{n}}.$$

$$\boxed{A_n = 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n} + \frac{\sqrt{2}-2}{4\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).}$$

$$B_n - \int_n^{2n}\frac{dt}{t} = \sum_{k=n+1}^{2n}\left(\frac{1}{k}-\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t}\right) = \sum_{k=n+1}^{2n}\left(\frac{1}{k}+\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right) = \sum_{k=n+1}^{2n}b_k$$

Un calcul asymptotique montre que $b_k \sim -\frac{1}{2}\frac{1}{k^2}$.

Par sommation de relations de comparaison et encadrement intégral, il vient :

$$\sum_{k=n+1}^{2n}b_k \sim -\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^2} \sim -\frac{1}{2}\int_n^{2n}\frac{dt}{t^2} = \frac{-1}{4n}.$$

$$\boxed{B_n = \ln 2 - \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right).}$$

$$C_n - \int_n^{2n}\frac{dt}{t^2} = \sum_{k=n+1}^{2n}\left(\frac{1}{k^2}-\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^2}\right) = \sum_{k=n+1}^{2n}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=n+1}^{2n}c_k$$

Un calcul asymptotique montre que $c_k \sim -\frac{1}{k^3}$.

Par sommation de relations de comparaison et encadrement intégral, il vient :

$$\sum_{k=n+1}^{2n}c_k \sim -\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^3} \sim -\int_n^{2n}\frac{dt}{t^3} = -\frac{3}{8n^2}.$$

$$\boxed{C_n = \frac{1}{2n} - \frac{3}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

3) <u>Sommes de Riemann</u>.

$\frac{A_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$, où $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$. Donc $\frac{A_n}{\sqrt{n}} \to \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x}} = 2(\sqrt{2}-1)$.

$B_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$, où $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Donc $B_n \to \int_0^1\frac{dx}{x+1} = \ln 2$.

$n.C_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$, où $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$. Donc $n.C_n \to \int_0^1\frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}$.

<u>Remarque</u> : Si l'on approfondit la théorie des sommes de Riemann, on obtient, pour f de classe C^1, la relation $\int_0^1 f(x).dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{f(0)-f(1)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, qui permet de retrouver les résultats de 2).

4) Maple sait ces choses-là, liées au prolongement de la fonction ζ :

```
> A:=n->sum(1/sqrt(k),k=n+1..2*n):B:=n->sum(1/k,k=n+1..2*n):
C:=n->sum(1/k^2,k=n+1..2*n):
> asympt(A(n),n);asympt(B(n),n);asympt(C(n),n);
```

$$\frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{\frac{1}{n}}}+\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{n}}+\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{96}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^{(3/2)}+\left(-\frac{1}{384}+\frac{1}{6144}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^{(7/2)}$$
$$+\left(-\frac{1}{65536}\sqrt{2}+\frac{1}{1024}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^{(11/2)}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

$$\ln(2)-\frac{1}{4}\frac{1}{n}+\frac{\frac{1}{16}}{n^2}-\frac{1}{128}\frac{1}{n^4}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{n}-\frac{3}{8}\frac{1}{n^2}+\frac{\frac{7}{48}}{n^3}-\frac{31}{960}\frac{1}{n^5}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

5) Tout cela se généralise sans peine aux sommes $\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^\alpha}$, $\alpha > 0$.

Références : Oral X 1983, Oral Centrale 1986, etc.

Exercice 40 : Limite de la suite $S_n = \frac{1}{n}\sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{\sqrt{ij}}$. [Oral Mines 1989]

Solution : Par symétrie et pliage : $2\,S_n + \frac{1}{n}\sum_{1\le i\le n}\frac{1}{i} = \frac{1}{n}\sum_{1\le i\,\&\,j\le n}\frac{1}{\sqrt{ij}} = \frac{1}{n}\big(\sum_{1\le i\le n}\frac{1}{\sqrt{i}}\big)^2$.

Donc $S_n = \frac{1}{2n}\big(\sum_{1\le i\le n}\frac{1}{\sqrt{i}}\big)^2 - \frac{1}{2n}\sum_{1\le i\le n}\frac{1}{i}$.

Or par encadrement intégral $\sum_{1\le i\le n}\frac{1}{\sqrt{i}} \sim \int_0^n\frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{n}$, tandis que $\sum_{1\le i\le n}\frac{1}{i} \sim \ln n$. Donc $S_n \to 2$.

Maple affirme bien plus :

```
> S:=n->1/(2*n)*(sum(1/sqrt(k),k=1..n)^2-sum(1/k,k=1..n));
> asympt(S(n),n,4);
```

$$2+2\,\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{n}}+\frac{1+\frac{1}{2}\zeta\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\ln(n)-\frac{1}{2}\gamma}{n}+\frac{1}{2}\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^{(3/2)}-\frac{5}{24}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{24}\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^{(5/2)}+\frac{\frac{1}{48}}{n^3}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Exercice 41 : Equivalent de la suite $S_n = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\frac{pq}{p+q}$.

Solution : Plusieurs méthodes sont possibles.

1ère méthode : calcul de S_n. Groupons les termes selon la somme s = p + q :

$$S_n = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\frac{pq}{p+q} = \sum_{s=2}^{n}\frac{1}{s}\Big(\sum_{p=1}^{s-1}p(s-p)\Big) + \sum_{s=n+1}^{2n}\frac{1}{s}\Big(\sum_{p=s-n}^{n}p(s-p)\Big) \;\ldots\; \text{Tout cela se calcule}$$

$$S_n = \sum_{s=2}^{n}\Big(\frac{s^2}{6}-\frac{1}{6}\Big) + \sum_{s=n+1}^{2n}\Big(-\frac{2n^3}{3s}+\frac{1}{6}\frac{n}{3s}-\frac{n^2}{s}+n^2+n-\frac{s^2}{6}\Big)$$

$$= \sum_{s=1}^{n}\Big(\frac{s^2}{6}-\frac{1}{6}\Big) + n\,\Big(n^2+n+\frac{1}{6}\Big) - \frac{1}{6}\sum_{s=n+1}^{2n}s^2 + \Big(-\frac{2n^3}{3}-n^2-\frac{n}{3}\Big)\sum_{s=n+1}^{2n}\frac{1}{s}$$

$$= \frac{2}{3}n^3+\frac{5}{6}n^2-\Big(\frac{2n^3}{3}+n^2+\frac{n}{3}\Big).\big(H_{2n}-H_n\big).$$

Comme $H_{2n}-H_n \to \ln 2$, on a $S_n \sim \frac{2}{3}(1-\ln 2).n^3$.

Un développent asymptotique à tous ordres est possible, car « on sait tout » de la suite (H_n).

```
> H:=n->sum(1/k,k=1..n);S:=n->2/3*n^3+5/6*n^2-(2/3*n^3+n^2+n/3)*(H(2*n)-
H(n)); asympt(S(n),n,8);
```

$$\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\ln(2)\right)n^3+(1-\ln(2))\,n^2+\left(\frac{5}{24}-\frac{1}{3}\ln(2)\right)n+\frac{1}{48}-\frac{1}{64}\,\frac{1}{n}+\frac{\frac{1}{128}}{n^2}-\frac{1}{256}\,\frac{1}{n^4}$$
$$+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^5}\right)$$

2ème méthode : transformation suite-série.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \ , \text{ où } u_1 = \frac{1}{2} \text{ et } u_n = S_n - S_{n-1} = 2n\left(\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+2}+\dots+\frac{n-1}{2n-1}\right)+\frac{n}{2}\ .$$

$$u_n = 2n\left(1-\frac{n}{n+1}+1-\frac{n}{n+2}+\dots+1-\frac{n}{2n-1}\right)+\frac{n}{2} = 2n(n-1)-2n^2\left(H_{2n}-H_n-\frac{1}{2n}\right)+\frac{n}{2}$$

Donc $u_n \sim 2(1-\ln 2)\,n^2$. En vertu du TSRC et d'un encadrement intégral (par exemple) :

$$S_n \sim 2(1-\ln 2)\sum_{k=1}^{n} k^2 \sim 2(1-\ln 2)\int_0^n t^2.dt = \frac{2}{3}(1-\ln 2).n^3\ .$$

Remarque : plus précisément, $u_n = 2(1-\ln 2).n^2 - \frac{1}{8} + \frac{1}{64n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$, donc :

$$\boxed{S_n = 2(1-\ln 2)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n}{8} + A + o(1)\ .}$$

Mais cette méthode ne fournit pas la valeur de A.

3ème méthode : sommes de Riemann.

$$S_n = n^3\,\frac{1}{n^2}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\frac{\frac{p}{n}\frac{q}{n}}{\frac{p}{n}+\frac{q}{n}}\ .\ \text{Or}\ \frac{1}{n^2}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\frac{\frac{p}{n}\frac{q}{n}}{\frac{p}{n}+\frac{q}{n}} \to \iint_{[0,1]^2}\frac{xy}{x+y}.dxdy = \frac{2}{3}(1-\ln 2).$$

La fonction $f(x, y) = \frac{xy}{x+y}$ est définie et continue sur $[0, 1]^2$, car $0 \le f(x, y) \le \max(x, y)$.

```
> f:=(x,y)->x*y/(x+y);int(int(f(x,y),x=0..1),y=0..1);
```

$$\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\ln(2)$$

Donc $S_n \sim \frac{2}{3}(1-\ln 2).n^3$.

Exercice 42 : 1) On admet que, si (p_k) est la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant, $p_k \sim k.\ln k$. Nature de $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{p_k}$. Equivalent de $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}$.

2) On admet que $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ quand $x \to +\infty$, où $\pi(x)$ est le nombre des nombres premiers $\le x$.

Démontrer que $p_k \sim k.\ln k$.

Solution :

1) La série à termes > 0 $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{p_k}$ diverge en vertu des critères de l'équivalent et de Bertrand.

$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i} \sim \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i.\ln i} \sim \int_2^n\frac{dt}{t.\ln t} \sim \ln\ln n$. Cela découle du théorème de sommation de relations de comparaison et d'un encadrement intégral laissé au lecteur.

2) Il est clair que $k = \pi(p_k) \sim \dfrac{p_k}{\ln p_k}$. Des infimiments grands équivalents ont des logarithmes équivalents, donc $\ln k \sim \ln p_k - \ln\ln p_k \sim \ln p_k$. Finalement $p_k \sim k.\ln p_k \sim k.\ln k$.

<u>Exercice 43</u> : Nature de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \int_{+1}^{+\infty} e^{-x^n}.dx$.

<u>Solution</u> : 1) Tout d'abord, chacune des intégrales $\int_{+1}^{+\infty} e^{-x^n}.dx$, $n \geq 1$, converge, car $0 \leq e^{-x^n} \leq e^{-x}$, majorante intégrable.

2) $u_n \downarrow 0$ car $e^{-x^n} \to e^{-1}$ si x = 1, 0 si x > 0, par convergence dominée (cf. 1)

3) Cherchons un équivalent de u_n. Le changement de variable $y = x^n$ donne :

$$u_n = \frac{1}{n}\int_{+1}^{+\infty} e^{-y} y^{\frac{1}{n}-1} dy \sim \frac{1}{n}\int_{+1}^{+\infty} e^{-y} y^{-1} dy ,$$

par convergence dominée derechef, car $e^{-y} y^{\frac{1}{n}-1} \to e^{-y} y^{-1}$ et $0 < e^{-y} y^{\frac{1}{n}-1} \leq e^{-y}$.

<u>Conclusion</u> : la série diverge.

<u>Remarque</u> : $n\, u_n$ est une fonction Gamma incomplète.

<u>Exercice 44</u> : Natures des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{0!+1!+2!+...+n!}{(n+1)!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{0!-1!+2!+...+(-1)^n n!}{(n+1)!}$.

<u>Solution</u> : 1) Notons $S_n = 0! + 1! + 2! + \dots + n!$. Je dis que $S_n \sim n!$.

En effet, $n! \leq S_n \leq n! + (n-1)! + (n-1).(n-2)! = n! + 2\,(n-1)!$

Du coup, $\dfrac{S_n}{(n+1)!} \sim \dfrac{1}{n+1}$, et la première série diverge.

2) Je dis que $T_n = 0! - 1! + 2! + \dots + (-1)^n n! \sim (-1)^n n!$.

En effet , $| T_n - (-1)^n n! | \leq S_{n-1} \sim (n-1)! = o(n!)$.

Du coup, $\dfrac{T_n}{(n+1)!} \sim \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, ***ce qui ne conclut pas car la règle de l'équivalent ne s'applique pas***,

mais $\dfrac{T_n}{(n+1)!} = \dfrac{(-1)^n}{n+1} + \dfrac{T_{n-1}}{(n+1)!} = \dfrac{(-1)^n}{n+1} + O(\dfrac{1}{n^2})$.

La deuxième série est somme de la série harmonique alternée et d'une série absolument convergente, donc elle est (semi-) convergente.

<u>Exercice 45</u> : Nature de $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$, où $u_n = \prod_{k=2}^{n}(1+\dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}})$.

<u>Solution</u> : Série à termes positifs. La règle de d'Alembert ne conclut pas.

$$\ln u_n = \sum_{k=2}^{n} \ln(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}) = \sum_{k=2}^{n}(\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2k} + O(\frac{1}{k^{3/2}})) = S_n - \frac{1}{2} H_n + U_n .$$

S_n est somme partielle d'une série qui obéit au CSA. H_n est somme partielle de la série harmonique. U_n est somme partielle d'une série absolument convergente.

Finalement $\ln u_n = S - \frac{1}{2}(\ln n + \gamma) + U + o(1) = -\frac{1}{2}\ln n + A + o(1)$ et $u_n \sim \dfrac{e^A}{\sqrt{n}}$. Série divergente.

Exercice 46 : Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(2-e^{\alpha})(2-e^{\alpha/2})\dots(2-e^{\alpha/n})$ converge-t-elle ?

Solution : Lorsque $\alpha \in \{\ln 2, \ln 4, \ln 8, \dots\}$, la somme est à support fini. Excluons ces cas désormais. α étant fixé, $e^{\alpha/n} < 2$ àpcr, disons pour $n \geq k_0$, donc le terme général u_n est de signe constant àpcr.
Posons $v_n = (2 - e^{\alpha/k_0}) \dots (2 - e^{\alpha/n})$.

$\ln v_n = \sum_{k=k_0}^{n}\ln(2-e^{\alpha/k}) = \sum_{k=k_0}^{n}\ln(1-\frac{\alpha}{k}+O(\frac{1}{k^2})) = -\alpha\sum_{k=k_0}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=k_0}^{n}O(\frac{1}{k^2}) = -\alpha.(\ln n + \gamma' + o(1)) + C + o(1)$,

car $\sum_{k=k_0}^{n}O(\frac{1}{k^2})$ est somme partielle d'une série absolument convergente.

Finalement, $v_n \sim \frac{e^K}{n^{\alpha}}$, et u_n itou à coefficient près. Il a y convergence ssi $\alpha > 1$.

Comme $\ln 4 > 1$, il y a convergence ssi $\alpha = \ln 2$ ou $\alpha > 1$. L'exercice suivant généralise ceci.

Exercice 47 : Soit $f \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$. On suppose que

$$\forall k \quad \exists(a_0, a_1, \dots, a_k) \in \mathbf{R}^{k+1} \quad f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_k}{x^k} + o(\frac{1}{x^{k+1}}) \text{ quand } x \to +\infty.$$

A quelles condition a) la série $\sum_{n\geq 1} f(n)$ converge ? b) le produit infini $\prod_{n\geq 1} f(n)$ converge ?

c) A quelle condition la série de terme général $u_n = \prod_{1\leq k\leq n} f(k)$ converge ? Retrouver l'ex. 46.

Solution : [Oral Polytechnique PSI 2010, RMS n° 267]

Exercice 48 : Soit (u_n) une suite de réels ≥ 0. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum \ln(1+u_n)$ sont de même nature. Montrer qu'il n'en est plus de même si (u_n) n'est plus à termes ≥ 0.
[Considérer $u_1 = 0$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour $n \geq 2$, puis $u_n = -1 + \exp \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour $n \geq 1$.]

Solution :
1) Si $\sum u_n$ converge, $\sum \ln(1+u_n)$ aussi en vertu de $0 \leq \ln(1 + u_n) \leq u_n$, ou aussi en vertu de la règle de l'équivalent, car (u_n) tend vers 0.
Si $\sum \ln(1+u_n)$ converge, son terme général tend vers 0, donc (u_n) tend vers 0. Alors $\sum u_n$ converge en vertu de la règle de l'équivalent.
2) Les contre-exemples sont laissés en exercice.

Exercice 49 : Prouver que :

i) $\ln n! = \sum_{1\leq k\leq n}\ln k = (n + \frac{1}{2}) \ln n - n + C + o(1)$

ii) $\sum_{1\leq k\leq n} k.\ln k = (n^2 + n + \frac{1}{6}) \frac{\ln n}{2} - \frac{1}{4}n^2 + C_1 + o(1)$

iii) $\sum_{1\leq k\leq n}\ln(k!) = (n^2 + 2n + \frac{1}{2}) \frac{\ln n}{2} - \frac{3}{4}n^2 + (C - 1)\, n + C_2 + o(1)$

Solution : [Makarov, etc., chap. 2, ex. II.9, II. 13]

Bien entendu, la règle du jeu interdit d'utiliser la formule de Stirling !
Dans les trois cas, l'idée est simple : il s'agit de montrer que les trois suites :

$$A_n = \sum_{1\le k\le n} \ln k - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n + n \quad , \quad B_n = \sum_{1\le k\le n} k.\ln k - \left(n^2 + n + \frac{1}{6}\right)\frac{\ln n}{2} + \frac{1}{4}n^2$$

et $C_n = \sum_{1\le k\le n} \ln(k!) - \left(n^2 + 2n + \frac{1}{2}\right)\frac{\ln n}{2} + \frac{3}{4}n^2 - (C-1)\,n$ sont convergentes.

Pour cela, il suffit de les transformer en sommes partielles de séries, et de vérifier que ces séries sont absolument convergentes. Maple fait très bien cela.

Remarque : Le fait que $C = \dfrac{\ln(2\pi)}{2}$ découle de Wallis, mais n'est pas indispensable ici.

Exercice 50 : Equivalent de la suite $u_n = (1^1.2^2.3^3\dots n^n)^{1/n}$.

Solution : $\ln u_n = \frac{1}{n} S_n$, où $S_n = \sum_{k=1}^{n} k\ln k$.

Reste à faire un développement asymptotique de S_n à la précision $o(n)$.
Deux méthodes sont possibles : l'encadrement intégral, ou des méthodes purement discrètes.
Choisissons ici ces dernières.
Plutôt que de comparer S_n à des intégrales que l'on calcule par parties, on peut abéliser S_n afin d'obtenir sa partie principale, puis son da de proche en proche, via le TSRC.
Notons $V_n = 1 + 2 + \dots + n$, $V_0 = 0$.

Alors $S_n = \sum_{k=1}^{n}(V_k - V_{k-1}).\ln k = V_n.\ln n - \sum_{k=1}^{n-1} V_k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{n(n+1)}{2}\ln n - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(k+1)}{2}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

Or $\frac{k(k+1)}{2}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \sim \frac{k}{2}$, donc (TSRC) $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(k+1)}{2}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \sim \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2} \sim \frac{n^2}{2} = o\left(\frac{n(n+1)}{2}\ln n\right)$.

Finalement $S_n \sim \frac{n^2}{2}\ln n$. Cela ne suffit pas pour conclure. Mais reprenons !

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}\ln n - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(k+1)}{2}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{n(n+1)}{2}\ln n - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(k+1)}{2}.\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k+1)} + o\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)\right)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\ln n - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k+1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{4} + o(1)\right) = \frac{n(n+1)}{2}\ln n - \frac{n(n+1)}{4} + \frac{1}{2} + \frac{n}{4} + o(n),$$

toujours en vertu du TSRC. Finalement :

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)}{2}\ln n - \frac{n^2}{4} + o(n) \quad \text{et} \quad u_n \sim n^{\frac{n+1}{2}} e^{-\frac{n}{4}}.}$$

Maple confirme :

```
> u:=n->product(k^k,k=1..n)^(1/n);asympt(u(n),n);
> S:=n->sum(k*ln(k),k=1..n);DA:=asympt(S(n),n,2);
simplify(asympt(exp(1/n*DA),n));DL:=asympt(S(n),n,4);
```

$$S := n \to \sum_{k=1}^{n} k\ln(k) \qquad DA := \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln(n)\right)n^2 + \frac{1}{2}\ln(n)\,n + O(1) \qquad \frac{1 + O\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right)\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n}}\,(\mathbf{e}^n)^{(1/4)}\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^n}}$$

$$DL := \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln(n)\right)n^2 + \frac{1}{2}\ln(n)\,n + \frac{1}{12} - \zeta(1,-1) + \frac{1}{12}\ln(n) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 51 : Equivalent de la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k \ln k$. [Oral ENS 1979]

Solution :

1) S_n est somme partielle d'une série rapidement divergente. Maple s'avoue incapable d'en trouver un équivalent. La méthode classique d'encadrement intégral ne conclut pas car les deux intégrales encadrant S_n ne sont pas équivalentes : pour faire aboutir cette méthode, il faudrait retravailler la différence. Une méthode d'encadrement par découpe variable est également possible.

2) La méthode la plus efficace est d'abéliser S_n :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(2^{k+1}-2^k).\ln k = \sum_{k=2}^{n+1}2^k.\ln(k-1) - \sum_{k=1}^{n}2^k.\ln k = 2^{n+1}\ln n + \sum_{k=2}^{n}2^k.\ln(1-\frac{1}{k})$$

Comme $2^k \ln(1-\frac{1}{k}) \sim -\frac{2^k}{k} = o(2^k \ln k)$, le théorème de sommation de relations de comparaison s'applique et montre que $\sum_{k=2}^{n}2^k.\ln(1-\frac{1}{k}) = o(S_n)$. Finalement $S_n \sim 2^{n+1}\ln n$.

Remarque : des abélisations répétées fournissent un développement à tous ordres :

$$S_n = 2^{n+1}\left(\ln n - \frac{1}{n} - \frac{3}{2}\frac{1}{n^2} - \frac{13}{3}\frac{1}{n^3} - \frac{75}{4}\frac{1}{n^4} - \frac{541}{5}\frac{1}{n^5} + O(\frac{1}{n^6})\right).$$

3) Méthode par découpe variable : Soit $p < n$. Encadrons grossièrement :

$$(2^{n+1} - 2^{n-p})\ln(n-p) = \ln(n-p)\sum_{k=n-p}^{n}2^k \le \sum_{k=n-p}^{n}2^k\ln k \le S_n = \sum_{k=1}^{n}2^k\ln k \le (\ln n)\sum_{k=1}^{n}2^k = (2^{n+1}-1)\ln n.$$

$$2^{n+1}(1-2^{-p-1})\left(\ln n + \ln(1-\frac{p}{n})\right) \le S_n \le 2^{n+1}\ln n.$$

Choisissons $p = [\sqrt{n}\,]$, par exemple. Il vient $S_n \sim 2^{n+1}\ln n$.

4) Généralisations et commentaires : La transformation d'Abel, recommandée pour les séries non absolument convergentes, est donc parfois utile pour les séries à termes positifs. Elle permet de travailler $S_n = \sum_{k=1}^{n}2^k P(k)$, où P est un polynôme, une somme de puissances, ou de puissances-log.

Références : Jean Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, p. 105 et Oral ENS 1979.

Exercice 52 : Etude des suites

$A_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ $\qquad B_n = 1 + \frac{1}{2^a} + \dots + \frac{1}{n^a} - \frac{n^{1-a}}{1-a}$ $(0 < a < 1)$

$S_n = \text{th } 1 + \text{th } 2 + \dots + \text{th } n - \ln \text{ch } n$ $\qquad T_n = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \dots + \frac{1}{n\ln n} - \ln(\ln n)$.

Solution : Deux méthodes, l'une directe, l'autre par transformation en série.

Exemple 1 : 1ère méthode : la suite (A_n) est décroissante minorée, donc convergente.

• décroissante car $A_{n+1} - A_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \int_n^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right).dx < 0.$

• minorée car $A_n \ge \int_1^{n+1}\frac{dx}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{n} = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} - 2 > -2.$

NB : on peut aussi montrer que les suites A_n et $A'_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1}$ sont adjacentes.

2ème méthode : A_n est la suite des sommes partielles d'une série : $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, où

$$a_n = A_n - A_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} + 2\sqrt{n-1} = -\frac{1}{4n^{3/2}} + o(\frac{1}{n^{3/2}}) = O(\frac{1}{n^{3/2}}).$$

On conclut que la série converge, soit par la règle de l'équivalent (qui s'applique car le signe est constant àpcr), soit par absolue convergence.

```
> A:=n->sum(1/sqrt(k),k=1..n)-2*sqrt(n);asympt(A(n),n);
```

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}}-\frac{1}{24}\left(\frac{1}{n}\right)^{(3/2)}+\frac{1}{384}\left(\frac{1}{n}\right)^{(7/2)}-\frac{1}{1024}\left(\frac{1}{n}\right)^{(11/2)}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

Exemple 2 : il généralise l'exemple 1 et se traite par les mêmes méthodes.

La suite $B_n = 1 + \frac{1}{2^a} + \dots + \frac{1}{n^a} - \frac{n^{1-a}}{1-a}$ $(0 < a < 1)$, est notée $\zeta(a)$.

En effet lorsque $a > 1$, n^{1-a} tend vers 0 et la suite $1 + \frac{1}{2^a} + \dots + \frac{1}{n^a} - \frac{n^{1-a}}{1-a}$ tend vers $\zeta(a)$.

On obtient ainsi un prolongement naturel de ζ à $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Exemple 3 : 1ère méthode : la suite (S_n) est croissante majorée, donc convergente.

- croissante car $S_{n+1} - S_n = \mathrm{th}(n+1) - (\ln \mathrm{ch}(n+1) - \ln \mathrm{ch}\, n) = \int_n^{n+1} (th(n+1)-th(x)).dx > 0$.
- majorée car $S_{n+1} - S_n = \int_n^{n+1} (th(n+1)-th(x)).dx \le \mathrm{th}(n+1) - \mathrm{th}\, n$, donc $S_n - S_1 \le \mathrm{th}\, n - \mathrm{th}\, 1$.

2ème méthode : S_n est la suite des sommes partielles d'une série : $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, où

$$u_n = S_n - S_{n-1} = \mathrm{th}\, n - (\ln \mathrm{ch}\, n - \ln \mathrm{ch}(n-1)) = \frac{1-e^{-2n}}{1+e^{-2n}} - \ln \frac{e^n+e^{-n}}{e^{n-1}+e^{-(n-1)}} \sim (e^2 - 3)\, e^{-2n} .$$

On conclut que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est absolument convergente, donc la suite (S_n) converge.

Exemple 4 : Traitons-le par la seconde méthode, avec Maple :

$$T_n = \sum_{k=2}^{n} u_k \ , \text{ où } \ u_n = \frac{1}{n\ln n} - \ln\frac{\ln(n-1)}{\ln n} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right) ,$$

donc T_n est somme partielle d'une série absolument convergente.

```
> u:=n->1/(n*ln(n))-ln(ln(n))+ln(ln(n-1));asympt(u(n),n,4);
```

$$\frac{-\frac{1}{2}\frac{1}{\ln(n)}-\frac{1}{2}\frac{1}{\ln(n)^2}}{n^2}+\frac{-\frac{1}{2}\frac{1}{\ln(n)^2}-\frac{1}{3}\frac{1}{\ln(n)}-\frac{1}{3}\frac{1}{\ln(n)^3}}{n^3}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Exercice 53 : constantes de Stieltjes.

Montrer que pour tout entier $p\in\mathbf{N}$, la suite $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln^p k}{k} - \frac{\ln^{p+1} n}{p+1}$ converge vers une constante, dite constante de Stieltjes d'indice p, et notée γ_p . Équivalent de $U_n - \gamma_p$? Cas où $p = 0$?

Solution : U_n est la suite des sommes partielles d'une série : $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, où

$$u_n = U_n - U_{n-1} = \frac{\ln^p n}{n} - \frac{\ln^{p+1} n}{p+1} + \frac{\ln^{p+1}(n-1)}{p+1} = \frac{\ln^p n}{n} - \frac{\ln^{p+1} n}{p+1} + \frac{1}{p+1}\left(\ln n - \frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{p+1}$$

$$= \mathrm{O}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \subset \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$: U_n est la somme partielle d'une série absolument convergente.

Pour obtenir un équivalent de $U_n - \gamma_p$, le transformer en reste de série, et utiliser le TSRC et un encadrement intégral.

Remarque : Les constantes de Stieltjes servent à étudier le comportement de la fonction ζ de Riemann au voisinage de 1.

Exercice 54 : **suites récurrentes linéaires**. Soit (a_n) une suite à termes > 0, tendant vers $0 < a \leq +\infty$. Montrer que les suites récurrentes vérifiant $(\forall n)$ $u_{n+2} = \dfrac{u_n + a_n.u_{n+1}}{1+a_n}$ forment un plan vectoriel, et sont toutes convergentes.

Solution :

Ces suites forment un sous-espace vectoriel E de $\mathcal{F}(\mathbf{N}, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, de dimension 2 car $\Phi : u \to (u_0, u_1)$ est une bijection linéaire de E sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$. Pour montrer la convergence, transformons suite en série :

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{u_n - u_{n+1}}{1+a_n} \text{ , donc } \left|\frac{u_{n+2}-u_{n+1}}{u_{n+1}-u_n}\right| = \frac{1}{1+a_n} \to \frac{1}{1+a} < 1.$$

La série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ est absolument convergente en vertu de la règle de d'Alembert.

Donc la suite (u_n) est convergente.

Exercice 55 : **règles de d'Alembert et de Cauchy**.

1) Complément à la règle de d'Alembert.

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ une série à termes > 0 . Soient $\Lambda = \limsup_n \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, $\lambda = \liminf_n \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Montrer qu'alors : i) Si $\Lambda < 1$, la série converge ;

ii) Si $\lambda > 1$, la série diverge ;

iii) Si $\Lambda \geq 1$, on ne peut conclure.

2) Règle de Cauchy. Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ une série à termes ≥ 0. On suppose que $\sqrt[n]{u_n} \to \lambda \in [0, +\infty]$.

Montrer qu'alors : i) Si $\lambda < 1$, la série converge ;

ii) Si $\lambda > 1$, la série converge ;

iii) Si $\lambda = 1$, on ne peut conclure.

3) Comparaison Cauchy-d'Alembert. Montrer que si $u_n > 0$ et si $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers $\lambda \in [0, +\infty]$, alors $(\sqrt[n]{u_n})$ converge vers λ, la réciproque étant fausse.

4) Règle de Cauchy (énoncé savant). Soient $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ une série à termes ≥ 0, $L = \limsup_n \sqrt[n]{u_n}$.

Montrer qu'alors : i) Si $L < 1$, la série converge ;

ii) Si $L > 1$, la série converge ;

iii) Si $L = 1$, on ne peut conclure.

Solution : 1) Complément à la règle de d'Alembert.

Contrairement aux apparences, le cas $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ n'est pas le seul cas douteux de la règle de d'Alembert. Celle-ci suppose que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge. Quid si elle diverge ?

i) noter que $\Lambda < 1 \Leftrightarrow \exists r \in [0, 1[\;\; \exists n_0 \;\; \forall p \geq n_0 \;\; \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq r \ldots$

ii) noter que $\lambda > 1 \Leftrightarrow \exists r \in]1, +\infty[\;\; \exists n_0 \;\; \forall p \geq n_0 \;\; \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq r \ldots$

iii) si $\Lambda \geq 1$, on ne peut conclure : penser aux séries de Riemann.

2) Règle de Cauchy. Supposons que $\sqrt[n]{u_n} \to \lambda \in [0, +\infty]$.

i) Si $\lambda < 1$, alors $\sqrt[n]{u_n} \leq \frac{1+\lambda}{2} < 1$ à partir d'un certain rang…

ii) Si $\lambda > 1$, alors $\sqrt[n]{u_n} \geq \frac{1+\lambda}{2} > 1$ à partir d'un certain rang : divergence grossière !

iii) Si $\lambda = 1$, penser aux séries de Riemann.

3) Cauchy est plus forte que d'Alembert.

En effet si $u_n > 0$ et si $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ converge vers $\lambda \in [0, +\infty]$, alors $(\sqrt[n]{u_n})$ converge vers λ.

Cela découle du théorème de Cesàro, par passage au log.

Soient $0 < a < 1 < b$ tels que $ab < 1$. Considérons la série $a + ab + a^2b + a^2b^2 + a^3b^2 + a^3b^3 + \dots$ où l'on passe de u_n à u_{n+1} en le multiplitant alternativement par a et b.

Cette série converge et a pour somme $\frac{1+a}{1-ab}$.

Alors $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ est sans limite, tandis que $\sqrt[n]{u_n} \to \sqrt{ab} < 1$.

4) Cauchy, énoncé savant. Cet énoncé ne porte que sur L.

i) $L < 1$ implique que $\sqrt[n]{u_n} \leq \frac{1+L}{2}$ à partir d'un certain rang …

ii) $L > 1$ implique que $\sqrt[n]{u_n} \geq \frac{1+L}{2}$ pour une infinité d'indices n …

Exercice 56 : **règles de Gauss et Raabe-Duhamel**. Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ une série à termes > 0.

1) On suppose $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2})$, pour α réel. Montrer que $\exists A > 0 \;\; u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$.

En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge si $\alpha \leq 1$, converge si $\alpha > 1$.

2) On suppose $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$, pour α réel.

Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge si $\alpha < 1$, converge si $\alpha > 1$, et qu'on ne peut conclure si $\alpha = 1$.

3) Application : Soient a et $b > 0$. Discuter la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(a+1)...(a+n)}{b(b+1)...(b+n)}$.

Solution : Les critères précédents précisent les cas douteux de la règle de d'Alembert.

1) Passons au log : $\ln u_{n+1} - \ln u_n = -\frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2})$ donc :

$$\ln u_{n+1} - \ln u_1 = -\alpha H_n + \sum_{k=1}^{n} O(\frac{1}{k^2}) = -\alpha.(\ln n + \gamma + o(1)) + \text{SPSAC} = -\alpha \ln n + K' + o(1).$$

Finalement $\ln u_{n+1} = -\alpha \ln n + K + o(1)$, et $u_{n+1} \sim \frac{A}{n^\alpha}$, avec $A = \exp K$. Conclusion aisée.

2) Améliorons le 1). Supposons $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$, pour α réel.

Si $\alpha < 0$, (u_n) est croissante à partir d'un certain rang : il y a divergence grossière.

Si $0 \leq \alpha$, passons au log : $\ln u_{n+1} - \ln u_n = -\frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$. En vertu du TSRC :

$\ln u_{n+1} - \ln u_1 = -\alpha H_n + \sum_{k=1}^{n} o(\frac{1}{k}) = -\alpha.(\ln n + \gamma + o(1)) + o(\ln n) \sim -\alpha \ln n$, donc $\frac{\ln u_n}{\ln n} \to -\alpha$.

Si $\alpha < 1$, àpcr $\frac{\ln u_n}{\ln n} \geq -\frac{1+\alpha}{2}$, donc $u_n \geq \frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}$: comme $\frac{1+\alpha}{2} < 1$ il y a divergence par minoration.

Si $\alpha > 1$, àpcr $\frac{\ln u_n}{\ln n} \leq -\frac{1+\alpha}{2}$, i.e. $u_n \leq \frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}$: comme $\frac{1+\alpha}{2} > 1$ il y a convergence par majoration.

3) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a+n+1}{b+n+1} = 1 - \frac{b-a}{n} + O(\frac{1}{n^2})$, donc la série converge ssi $b > a + 1$.

<u>Remarque</u> : Ces critères ne règlent pas tous les cas, mais seulement les situations classiques.

Par exemple, la série de Bertrand $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^a \ln^b n}$ vérifie $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} - \frac{b}{n \ln n} + O(\frac{1}{n^2})$.

Elle n'obéit pas aux hypothèses de la question 1), et n'obéit à celles de 2) que si $a \neq 1$.

<u>Exercice 57</u> : Natures des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2.4.6...(2n)}{1.3.5...(2n+1)}$.

<u>Solution</u> : Ce sont deux séries à termes positifs.

<u>1ère méthode : équivalent par Stirling</u>.

$u_n = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)} = \frac{(2n)!}{2^{2n}.(n!)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ et $v_n = \frac{2.4.6...(2n)}{1.3.5...(2n+1)} = \frac{1}{(2n+1).u_n} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

Les deux séries divergent.

<u>2ème méthode : équivalent plus grossier</u>, à l'instar de l'exercice précédent.

Je dis que, si $a > -2$, $\frac{(a+2)(a+4)...(a+2n)}{2.4...(2n)} \sim n^{a/2} K(a)$, où $K(a) > 0$.

En effet, $\ln \frac{(a+2)(a+4)...(a+2n)}{2.4...(2n)} = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{a}{2k}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{2k} + O(\frac{1}{k^2}) = \frac{a}{2}(\ln n + \gamma + o(1)) + S + o(1)$.

Du coup, $u_n = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)} \sim n^{-1/2} K(-1)$, etc.

<u>3ème méthode : règles</u>.

La règle de d'Alembert ne s'applique pas, mais celles de Gauss et Raabe-Duhamel oui.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} = 1 - \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$, et de même $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2n+2}{2n+3} = 1 - \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$.

Ici $\alpha = ½ < 1$, il y a divergence en vertu de l'exercice précédent (la question 1 suffit).

<u>Exercice 58</u> : Soit $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ une série à termes > 0. On pose $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{a_n}{n \ln n}$.

Montrer que si $a_n \to a > 1$, $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ converge, et si $a_n \to a < 1$, $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ diverge.

<u>Solution</u> : Il s'agit encore d'explorer le cas douteux de la règle de d'Alembert. Dans les deux cas,

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{a}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$, d'où $\ln u_{n+1} - \ln u_n = -\frac{1}{n} - \frac{a}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$.

Sommons via le TSRC !

$\ln u_N - \ln u_2 = \sum_{n=2}^{N-1}(\ln u_{n+1} - \ln u_n) = -\sum_{n=2}^{N-1}\frac{1}{n} - a\sum_{n=2}^{N-1}\frac{1}{n\ln n} + o\left(\sum_{n=2}^{N-1}\frac{1}{n\ln n}\right) = -\ln N - a\ln\ln N + o(\ln\ln N)$

• Si $a > 1$, àpcr $\ln u_N \leq -\ln N - \frac{a+1}{2}\ln\ln N$, donc $u_N \leq \frac{1}{N.\ln^{\frac{a+1}{2}} N}$: convergence via Bertrand.

• Si $a < 1$, àpcr $\ln u_N \geq -\ln N - \frac{a+1}{2}\ln\ln N$, donc $u_N \geq \frac{1}{N.\ln^{\frac{a+1}{2}} N}$: divergence via Bertrand.

<u>Remarques</u> : Plus généralement, si liminf $a_n > 1$, $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ converge, si limsup $a_n < 1$, $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ diverge.

Bien entendu le cas $a = 1$ est indéterminé : penser à $u_n = \frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^b}$.

<u>Exercice 58</u> : **<u>critère de condensation de Cauchy</u>**. Soit (u_n) une suite décroissante à termes ≥ 0. Montrer que les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k u_{2^k}$ sont de même nature.

Applications : à l'aide de ce critère, discuter la nature des séries $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ ($\alpha > 0$) et $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n.\ln^\beta n}$ ($\beta > 0$).

Donner un exemple de suite (u_n) à termes ≥ 0 telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k u_{2^k}$ diverge.

Donner un exemple de suite (u_n) à termes ≥ 0 telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diverge et $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k u_{2^k}$ converge.

<u>Solution</u> : 1) Encadrons les sommes partielles de la première série à l'aide de celles de la seconde.
Commençons sur un exemple :

$$u_2 + 2u_4 + 4u_8 \leq u_1 + 2u_3 + 4u_7 \leq S_7 = u_1 + (u_2 + u_3) + (u_4 + u_5 + u_6 + u_7) \leq u_1 + 2u_2 + 4u_4 .$$

Plus généralement : $\quad 2^k u_{2^{k+1}} \leq (2^{k+1} - 2^k)\, u_{2^{k+1}} \leq \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} u_n \leq (2^{k+1} - 2^k)\, u_{2^k} = 2^k u_{2^k}$.

Additionnons : $\quad \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m} 2^{k+1}u_{2^{k+1}} \leq \sum_{k=0}^{m}\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} u_n = \sum_{n=1}^{2^{m+1}-1} u_n \leq \sum_{k=0}^{m} 2^k u_{2^k}$.

• Si $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k u_{2^k}$ converge, la suite $m \to \sum_{k=0}^{m} 2^k u_{2^k}$ est croissante majorée, et a fortiori $m \to \sum_{n=1}^{2^{m+1}-1} u_n$, et $N \to \sum_{n=1}^{N} u_n$ aussi. Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge.

• Si $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge, $m \to \sum_{n=1}^{2^{m+1}-1} u_n$ est croissante majorée, et a fortiori, $m \to \sum_{k=0}^{m} 2^{k+1}u_{2^{k+1}} = \sum_{k=1}^{m+1} 2^k u_{2^k}$.
Donc $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k u_{2^k}$ converge.

2) <u>Application aux séries de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ ($\alpha > 0$)</u>.

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ est de même nature que $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k}{2^{\alpha k}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{(\alpha-1)k}}$, série géométrique qui converge ssi $\alpha > 1$.

Application aux séries de Bertrand $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n.\ln^{\beta}n}$ (β > 0).

$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln^{\beta}n}$ est de même nature que $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^k}{2^k\ln^{\beta}(2^k)} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{\beta}\ln^{\beta}2}$, série de Riemann qui converge ssi β > 1.
Plus généralement cela s'applique aux log itérés.

3) Contre-exemples. Si la suite (u_n) n'est pas décroissante, ce critère tombe en défaut :

Soit $u_n = \frac{1}{n}$ si n est une puissance de 2, 0 sinon. Alors $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty}2^k u_{2^k}$ diverge.

Soit $u_n = 0$ si n est une puissance de 2, $\frac{1}{n}$ sinon. Alors $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ diverge et $\sum_{k=0}^{+\infty}2^k u_{2^k}$ converge.

Exercice 59 : 1) Soit $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ une série divergente à termes > 0. Montrer qu'il existe une suite $a_n\downarrow 0$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.u_n$ diverge (Considérer $a_n = 1/U_{n-1}$ ou $a_n = 1/U_n$). Application à la série harmonique.

2) Soit $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ une série convergente à termes > 0. Montrer qu'il existe une suite $a_n\uparrow+\infty$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.u_n$ converge. (Considérer $a_n= 1/(R_{n-1})^{\alpha}$, pour $0 < \alpha < 1$).
Application aux séries de Riemann convergentes.

Solution : Cet exercice, important philosophiquement, montre qu'il n'y a pas de frontière bien nette entre séries convergentes et séries divergentes. Pour toute série divergente, il y a une série plus rapidement divergente ; pour toute série convergente, il y a une série plus lentement convergente. Tous ces résultats sont dus à Niels Abel.

1) Séries divergentes.

1ère idée. On a $\frac{u_n}{u_1+\dots+u_{n-1}} = \frac{u_n}{U_{n-1}} = \frac{U_n-U_{n-1}}{U_{n-1}} \geq \int_{U_{n-1}}^{U_n}\frac{dt}{t} = \ln U_n - \ln U_{n-1}$.

Donc $\sum_{n=2}^{N}\frac{u_n}{U_{n-1}} \geq \ln U_N - \ln U_1 \to 0$.

2ème idée, légèrement différente. Montrons que la série de terme général $v_n = \frac{u_n}{U_n}$ diverge.

- Si la suite (v_n) ne tend pas vers 0, la série $\sum v_n$ diverge.
- Sinon, alors $1 - v_n = \frac{U_{n-1}}{U_n}$, et la série $\sum_{n=2}^{+\infty}\ln(1-v_n)$ diverge, car $\sum_{k=2}^{n}\ln(1-v_k) = \ln u_1 - \ln U_n$.

Comme $-v_n \sim \ln(1-v_n) < 0$, la série $\sum v_n$ diverge.

3ème idée. Définissons par récurrence la suite T(p) par T(0) = 0, $T(p) = \min\{q > T(p-1) ;\ \sum_{n=T(p-1)}^{q-1}u_n \geq p\}$, et posons $a_n = \frac{1}{p}$ pour $T(p-1) \leq n < T(p)$. Alors $\sum_{n=T(p-1)}^{T(p)-1}a_n u_n = \frac{1}{p}\sum_{n=T(p-1)}^{q-1}u_n \geq 1$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.u_n$ diverge.

Remarque : Si on applique la 2ème idée à la série harmonique, on retrouve que $\sum\frac{1}{n\ln n}$ diverge.

2) Séries convergentes.

Soit $0 < \alpha < 1$. Montrons que la série de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{(R_{n-1})^\alpha}$ converge.

Alors $0 < v_n = \dfrac{u_n}{(R_{n-1})^\alpha} = \dfrac{R_{n-1}-R_n}{(R_{n-1})^\alpha} \leq \int_{R_n}^{R_{n-1}} \dfrac{dt}{t^\alpha}$,

terme général d'une série convergente, ayant pour somme l'intégrale impropre convergente $\int_0^{R_0} \dfrac{dt}{t^\alpha}$.

Exercice 60 : contre-vérités.
En 1827, L. Olivier a énoncé un critère général de convergence des séries :

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge $\Leftrightarrow$ la suite $(n.u_n)$ tend vers 0. »

1) Montrer que l'implication $\Leftarrow$ est erronée.
2) Montrer que l'implication $\Rightarrow$ est aussi erronée, mais est vraie si la suite (u_n) est décroissante.

[Considérer les sommes $u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{2n}$.]

Solution :
Si l'on disposait d'un critère de convergence aussi simple, le chapitre sur les séries serait bien plus court, et les profs de taupe réduits au chômage ! Niels Abel a réfuté aussitôt ce critère d'Olivier.

1) La série $\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n.\ln n}$ diverge. 2) cf. exercice 55.

Si (u_n) décroit et si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge, alors $u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{2n} \to 0$.

Or $u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{2n} \geq n u_{2n}$. Donc $n u_{2n} \to 0$ et $(2n u_{2n})$ aussi. De plus $(2n+1)u_{2n+1} \leq (2n+1)u_{2n}$.

Exercice 62 : contre-exemples.
1) Indiquer une série convergente, mais non absolument convergente.
2) Indiquer une série alternée divergente, dont le terme général tend vers 0.
3) Donner deux suites (u_n) et (v_n) équivalentes, telles que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne sont pas de même nature.
4) Donner deux suites (u_n) et (v_n) telles que $(\forall n)$ $|u_n| < |v_n|$, $\sum v_n$ converge et $\sum u_n$ diverge.
5) Donner deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n = o(v_n)$, $\sum v_n$ converge et $\sum u_n$ diverge.
6) Donner deux suites (u_n) et (v_n) équivalentes, telles que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, les suites des sommes partielles de $\sum u_n$ et de $\sum v_n$ n'étant pas équivalentes.
7) Donner deux suites (u_n) et (v_n) équivalentes, telles que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, les restes des deux séries n'étant pas équivalents.
8) Indiquer une série convergente $\sum u_n$ telle que, pour tout $p \geq 2$, $\sum (u_n)^p$ diverge.

Solution : Une traditionnelle leçon d'oral d'agrégation porte le titre « exemples et contre-exemples en théorie des séries ». Sont ici groupés les contre-exemples aux règles de l'équivalent. A quoi il faudrait ajouter les contre-exemples aux différents critères de convergence : Cauchy, d'Alembert, Gauss, Raabe-Duhamel, condensation, comparaison à une intégrale, etc.

1) La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente, mais non absolument convergente.

2) La série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$, avec $a_n = \frac{1}{n}$ si n est pair, $\frac{1}{n^2}$ si n est impair,

De même, $\sum_{n=2}^{+\infty}\ln(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$ est alternée, son terme général tend vers 0 mais elle diverge.

3) Soient $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ ou $\ln(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$.

On a $u_n \sim v_n$, $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge.

4) Soient $u_n = \frac{1}{n+1}$, $v_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. On a $(\forall n)$ $|u_n| < |v_n|$, $\sum v_n$ converge et $\sum u_n$ diverge.

5) Soient $u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$. On a $(\forall n)$ $u_n = o(v_n)$, $\sum v_n$ converge et $\sum u_n$ diverge.

6) Soient $u_n = (-1)^n$, $v_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

On a $u_n \sim v_n$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent grossièrement, (U_n) est bornée et $(V_n) \to +\infty$.

7) Soient $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $v_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}}$. On a $u_n \sim v_n$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.

Le lecteur montrera que $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \frac{(-1)^n}{2n}$ et que $S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \sim \frac{2}{\sqrt{n}}$.

8) La série cherchée ne peut être à termes positifs. En voici une : $u_n = \frac{1}{\ln n}.\cos\frac{2n\pi}{3}$ pour $n \geq 2$.

Autrement dit : $-\frac{1}{2.\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{2.\ln 4} - \frac{1}{2.\ln 5} + \frac{1}{\ln 6} - \dots$ On montre que :

- $\sum u_n$ converge (par tranches ou par critère d'Abel)
- $\sum (u_n)^{2p}$ diverge pour $p \geq 1$, car $(u_n)^{2p} \geq \frac{1}{2^{2p}} . \frac{1}{\ln^{2p} n}$.
- $\sum (u_n)^{2p+1}$ diverge pour $p \geq 1$, car $(u_{3n})^{2p+1} + (u_{3n+1})^{2p+1} + (u_{3n+2})^{2p+1} \geq (1 - \frac{1}{2^{2p}}) \frac{1}{\ln^{2p+1}(3n)}$.

<u>Exercice 63</u> : <u>exemples</u>.
1) Exemple de suite de carré sommable et non sommable.
2) Exemple de suite sommable, non de carré sommable.
3) Exemple de série divergente, dont le terme général tend vers zéro et dont les sommes partielles sont bornées.

<u>Solution</u> :

1) La suite $(1/n)$ est de carré sommable, mais non sommable.

2) Toute suite sommable (u_n) est de carré sommable. En effet, (u_n) tend vers 0, donc $u_n^2 = o(u_n)$.

3) Notant (S_n) la suite des sommes partielles, il s'agit de trouver une suite (S_n) divergente, bornée, telle que $(S_{n+1} - S_n)$ tend vers 0. On peut prendre la suite
(1 –1, 0, 1, ½, 0, –1/2, –1, –2/3, –1/3, 0, 1/3, 2/3, 1, ¾, ½, ¼, 0, –1/4, –1/2, –3/4, –1, …)
ou la suite $(\cos(\ln n))$.

<u>Exercice 64</u> : Convergence de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^2}$ si n n'est pas un carré, $u_n = \frac{1}{n}$ si n est un carré.

<u>Solution</u> :

Il s'agit d'une série à termes positifs, de terme général « oscillant », donc n'ayant pas d'équivalent.

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{1\le n\le N, n \text{ non carré}} \frac{1}{n^2} + \sum_{1\le n\le N, n \text{ carré}} \frac{1}{n} = \sum_{1\le n\le N} \frac{1}{n^2} - \sum_{1\le m\le\sqrt{N}} \frac{1}{m^4} + \sum_{1\le m\le\sqrt{N}} \frac{1}{m^2} \to 2\zeta(2) - \zeta(4) = \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 65 : Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ une série convergente à termes positifs. Soit $E_k = \{ n \in \mathbf{N}^* \,;\, k.a_n \ge 1 \}$.

Montrer que card $E_k = o(k)$ quand $k \to +\infty$.

Solution :

(E_k) est une suite croissante pour l'inclusion d'ensembles finis, de réunion $\{ n \in \mathbf{N}^* \,;\, a_n > 0 \}$.

Il est clair que $\frac{card(E_k)}{k} \le \sum_{n\in E_k} a_n \le \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S$, donc N_k = card $E_k = O(k)$ quand $k \to +\infty$.

Plus précisément $S = \sum_{n\in E_1} a_n + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n\in E_{k+1}-E_k} a_n \ge N_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{N_{k+1}-N_k}{k+1}$.

Or (transformation d'Abel) $N_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{N_{k+1}-N_k}{k+1} = \frac{N_{n+1}}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{N_k}{k(k+1)} \le S$.

Conséquences : 1) $\sum_{k=1}^{n} \frac{N_{k+1}-N_k}{k+1}$ est croissante majorée, donc convergente.

2) $\sum_{k=1}^{n} \frac{N_k}{k(k+1)}$ est croissante majorée, donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{N_k}{k(k+1)}$ converge.

3) Par différence, la suite $\left(\frac{N_{n+1}}{n+1}\right)$ converge, donc $\frac{N_n}{n} \to L$.

4) Si l'on avait $L > 0$, alors $\frac{N_k}{k(k+1)} \sim \frac{L}{k+1}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{N_k}{k(k+1)}$ divergerait.

Conclusion : $L = 0$ et $N_n = o(n)$.

Exercice 66 : Soit $S = \{ u = (u_n) \,;\, (\forall n)\ u_n \ge 0 ,\ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1 ,\ u_0 = 0 \}$.

Calculer $\inf_{u\in S} \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n \sum_{k=0}^{n} u_k)$ et $\inf_{u\in S} \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n)^2$.

Solution : 1) Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. D'abord, si $u \in S$, les deux séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n S_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n)^2$ convergent, car $0 \le u_n S_n \le u_n$ et $0 \le u_n^2 \le u_n$.

2) Les deux problèmes posés sont liés en vertu d'un argument de pliage :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n \sum_{k=0}^{n} u_k) = \sum_{k\le n} u_n.u_k = \frac{1}{2} [\sum_{k,n} u_n.u_k + \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n)^2] = \frac{1}{2} [(\sum_{k} u_k)(\sum_{n} u_n) + \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n)^2] = \frac{1}{2} [1 + \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n)^2]$$

3) Or, lorsque u décrit S, $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n)^2$ est > 0, et aussi petit qu'on veut.

Prenons en effet $u_0 = 0$, $u_n = a\rho^n$ $(0 < \rho < 1, n \ge 1)$; on voit aussitôt que $u \in S \Leftrightarrow a = \frac{1-\rho}{\rho}$.

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n)^2 = \frac{1-\rho}{1+\rho}$ est aussi petit qu'on veut : prendre ρ aussi voisin qu'on veut de 1.

Autre idée : prendre $u_1 = \dots = u_n = \frac{1}{n}$, $u_k = 0$ sinon. Alors $\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k)^2 = \frac{1}{n}$ est aussi petit qu'on veut.

Conclusion : $\inf_{u\in S} \sum_{n=0}^{+\infty}(u_n)^2 = 0$ et $\inf_{u\in S} \sum_{n=0}^{+\infty}(u_n\sum_{k=0}^{n}u_k) = \frac{1}{2}$, ces inf étant non atteints.

Remarques : 1) Si u décrit S, je dis que $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n)^2$ décrit l'intervalle]0, 1].

Tout d'abord $0 \le u_n^2 \le u_n$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n)^2 \le 1$. De plus il y a égalité pour $u_1 = 1$, $u_n = 0$ sinon.

Par ailleurs, lorsque ρ décrit]0, 1[, $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n)^2 = \frac{1-\rho}{1+\rho}$ décrit]0, 1[.

2) Version continue de l'exercice, laissée au lecteur :

Soit S l'ensemble des fonctions continues ≥ 0 sur $\mathbf{R}_+$ telles que $f(0) = 0$ et $\int_0^{+\infty} f(x).dx = 1$.

Trouver inf { $\int_0^{+\infty} f(x)(\int_0^x f(y).dy)$; $f \in$ S } et inf { $\int_0^{+\infty} f(x)^2$; $f \in$ S } .

Exercice 67 : Soient $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}v_n$ deux séries convergentes. Leur produit de Cauchy $\sum_{n=0}^{+\infty}w_n$, où $w_n = \sum_{p+q=n}u_p v_q$ est-elle convergente ? Considérer $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

Solution : 1) La réponse est oui si les deux séries sont absolument convergentes (th. de Cauchy).
2) La réponse est encore oui si l'une des séries est absolument convergente (théorème de Mertens).
3) La réponse est non dans le cas général. Traitons l'exemple proposé.

$$w_n = (-1)^n \sum_{p+q=n}\frac{1}{\sqrt{p+1}\sqrt{q+1}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k(n+2-k)}} .$$

1ère idée : (w_n) ne tend pas vers 0, donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty}w_n$ diverge grossièrement.

En effet $\forall x \in [0, n+2]$ $x.(n + 2 - x) \le (\frac{n+2}{2})^2$.

On en déduit que $| w_n | = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k(n+2-k)}} \ge \sum_{k=1}^{n+1}\frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2} \to 2$.

2ème idée : équivalent de (w_n) par sommes de Riemann :

$$| w_{n-2} | = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}} \to \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^1\frac{2dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi.$$

¶ Attention toutefois à une difficulté ! La convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale est attestée pour les fonctions classiques (continues, réglées, Riemann–intégrables) sur les segments. Ici, il s'agit d'une intégrale impropre sur un intervalle ouvert borné, qui nécessite un lemme additionnel :

Proposition : Soit f :]0, 1[$\to \mathbf{R}_+$ une fonction réglée, monotone sur]0, c[et sur [c, 1[($0 < c < 1$), et intégrable. Alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f(\frac{k}{n}) \to \int_0^1 f(x).dx$ quand $n \to +\infty$.

Ce résultat, laissé au lecteur, se montre par encadrement et lemme des gendarmes.

4) Ajoutons un dernier résultat, dû à Abel :

Si les trois séries $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty}v_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}w_n$ convergent, alors : $\sum_{n=0}^{+\infty}w_n = (\sum_{n=0}^{+\infty}u_n)(\sum_{n=0}^{+\infty}v_n)$.

En effet les séries entières associées $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$ ont un rayon de convergence ≥ 1.

Notant $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ leurs sommes respectives, on a $h(x) = f(x).g(x)$ pour $|x| < 1$, par théorème de Cauchy. Il reste à faire tendre x vers 1−0 et à invoquer le théorème de la limite radiale d'Abel.

Exercice 68 : Soient $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ deux séries convergentes à termes complexes.

On pose $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$. Etudier la suite $P_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k$.

Solution : On montrera que $P_n \to AB$, où $A = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $B = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Pour cela, il suffit de noter que $P_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}$, et de raisonner à la Cesàro.

A noter qu'on retrouve ainsi le point 4) de l'exercice précédent.

Exercice 69 : Soit $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $b_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$. Convergence et somme de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} b_n$.

Solution : 1) Nature de la série.

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) = \frac{(-1)^n}{n} 2H_{n-1} = \frac{(-1)^n}{n} 2\left(\ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) .$$

La série de terme général b_n converge comme somme de deux séries semi-convergentes et d'une série absolument convergente.

2) Montrons que $\sum_{n=2}^{+\infty} b_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)^2 = \ln^2 2$.

Notons $a_0 = 0$, A_n et B_n les sommes partielles des séries. Le lecteur montrera que

$| B_n - A_n.A | \le \frac{2H_n}{n} \to 0$.

3) Autre solution, via la limite radiale d'Abel.

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ a pour rayon de convergence 1 et pour somme $\ln(1 + x)$ lorsque $|x| < 1$.

On a $\sum_{n=2}^{+\infty} b_n x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n\right)^2 = \ln^2(1 + x)$ pour $|x| < 1$.

Comme $\sum_{n=2}^{+\infty} b_n$ converge, $\sum_{n=2}^{+\infty} b_n = \lim_{x\to 1-0} \sum_{n=2}^{+\infty} b_n x^n = \ln^2 2$ en vertu de la limite radiale d'Abel.

4) Autre solution : utiliser l'exercice précédent.

Exercice 70 : Montrer que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k(k+1)/2}}$ converge et que sa somme est irrationnelle.

Solution : [Bourbaki Topologie générale 2, p. 15]
La série converge pour mille raisons, d'Alembert, Cauchy, etc.
1ère solution, directe. Notons S_n la somme partielle.

2ème solution, plus savante. En base 2, la somme de la série s'écrit : S = 1,101001000100001…
Ce développement n'est pas périodique à partir d'un certain rang, donc S est irrationnel.

Exercice 71 : Montrer que : $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!} < \frac{1}{n.n!}$, puis que : $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\right| < \frac{1}{n.n!}$.
En déduire que e n'est pas solution d'une équation du second degré à coefficients rationnels.

Solution : Laissons la question 1) au lecteur.
Supposons que $a.e^2 + b.e + c = 0$, où a, b, c sont rationnels. Après réduction au même dénominateur, on peut supposer a, b, c entiers relatifs. Alors $a.e + c.e^{-1} = -b$.

Autrement dit, la suite $a.\mathrm{A_n} + c.\mathrm{B_n} = a\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + c\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} = \frac{N_n}{n!}$ tend vers $-b \in \mathbf{Z}$.

$\frac{N_n}{n!} + b = a\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!} + c\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}$ tend vers 0, et même $\left|\frac{N_n}{n!} + b\right| \le \frac{|a|+|c|}{n.n!}$, donc $|\,\mathrm{N_n} + b.n\,!\,| \le \frac{1}{n}$.

Comme $\mathrm{N_n} + b.n\,! \in \mathbf{Z}$, $\mathrm{N_n} + b.n\,! = 0$ àpcr, donc $a.\mathrm{A_n} + c.\mathrm{B_n} = -b$ àpcr.
Il suffit d'écrire cela pour deux valeurs consécutives de n, pour trouver une contradiction.
Ce résultat est dû à Joseph Liouville (1840) ; en 1873, Hermite a montré que e est transcendant.

Exercice 71 : Montrer que $\cos 2 < 0$, et que $\cos 1 \notin \mathbf{Q}$.

Solution :

1) Bien entendu, $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$, mais on attend ici une preuve directe, basée sur $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$,
et permettant d'affirmer que le cosinus s'annule entre 0 et 2…
Or, pour tout réel x, cette série est alternée, mais elle n'obéit au critère des séries alternées qu'à partir d'un cerain rang, car $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} \le 1$ àpcr. Si $x = 2$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{2}{(2n+1)(n+1)} \le 1$ si $n \ge 1$.

$\cos 2 = 1 - 2 + \frac{2}{3} - \frac{4^3}{6!} + \ldots = -1 + \frac{2}{3} - \frac{4^3}{6!} + \ldots$ après regroupement des deux premiers termes.

C'est alors un série qui obéit au critère des séries alternées dès le premier terme, donc $\cos 2 < 0$.

2) $\cos 1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$. Ici, la série obéit au critère des séries alternées. La majoration du reste donne :

$\left|\cos 1 - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\right| \le \frac{1}{(2n+2)!}$. Supposons $\cos 1 = \frac{a}{b}$ où $(a, b) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{N}^*$.

Il vient $\left|\frac{a}{b} - \frac{A_n}{(2n)!}\right| \le \frac{1}{(2n+2)!}$, donc $|\,a.(2n)! - b.\mathrm{A_n}\,| \le \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \to 0$.

Comme $a.(2n)! - b.\mathrm{A_n} \in \mathbf{Z}$, on a $a.(2n)! = b.\mathrm{A_n}$ à partir d'un certain rang, ce qui est impossible : la suite des sommes partielles de la série n'est pas stationnaire !

Exercice 72 : Discuter la nature de la série : $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln^b n}{n^a}$.

Solution :

♣ Si $a < 0$, il y a divergence grossière.
♦ Si $a > 1$, il y a absolue convergence.
♥ Si $a = 0$, il y a divergence grossière si $b \ge 0$. La série obéit au critère des séries alternées si $b < 0$.

♠ Si $0 < a$, la série obéit au critère des séries alternées à partir d'un certain rang, car l'étude des variations de la fonction $f(x) = \dfrac{\ln^b x}{x^a}$ montre qu'elle tend en décroissant vers 0 pour x assez grand.

En conclusion, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{\ln^b n}{n^a}$ converge ssi $a > 0$ ou $a = 0$ et $b < 0$.

<u>Exercice 73</u> : Nature et calcul des séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

<u>Solution</u> :

Ces trois séries, de difficulté croissante, peuvent être étudiées par des méthodes discrètes ou intégrales. Commençons par les méthodes discrètes.

1) <u>Première série</u>.

<u>Nature</u>. La série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3}$ est absolument convergente et obéit au critère des séries alternées.

$R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3}$ est du signe de $(-1)^{n-1}$ et vérifie $|R_n| \le \dfrac{1}{n^3}$. Donc la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3}$ est à la fois absolument convergente et obéit au critère des séries alternées.

<u>Calcul</u>. Formellement, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3} = \sum_{k=1}^{+\infty}k\frac{(-1)^{k-1}}{k^3} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\zeta(2)}{2} = \frac{\pi^2}{12}$

Nous sommes sous le parapluie du théorème de Fubini du programme, car la suite double

$u_{n,k} = \dfrac{(-1)^{k-1}}{k^3}$ si $1 \le k \le n$, $u_{n,k} = 0$ sinon, obéit aux hypothèses de ce théorème.

En effet, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{k}|u_{n,k}| = \sum_{k=1}^{+\infty}k\frac{1}{k^3} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} < +\infty$.

2) <u>Deuxième série</u>.

<u>Nature</u>. La série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ est absolument convergente et obéit au critère des séries alternées.

$R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ est du signe de $(-1)^{n-1}$ et vérifie $|R_n| \le \dfrac{1}{n^2}$. Donc la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ est à la fois absolument convergente et obéit au critère des séries alternées.

<u>Calcul</u>. Formellement, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}k\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$.

Nous ne sommes pas sous le parapluie du théorème de Fubini du programme, car la suite double

$u_{n,k} = \dfrac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ si $1 \le k \le n$, $u_{n,k} = 0$ sinon, n'obéit pas aux hypothèses de ce théorème.

Cependant, passons par les sommes partielles :

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=n}^{N-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} + \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=N}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} + \mathrm{N}\sum_{k=N}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{N}k\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} + \mathrm{N}\sum_{k=N}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k} + \mathrm{N}\sum_{k=N}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \to \ln 2.$$

La deuxième somme tend vers 0 par majoration du reste dans les séries alternées.

3) <u>Troisième série</u>.

Nature. La série $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ obéit au critère des séries alternées.

$R_n = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est du signe de $(-1)^{n-1}$ et vérifie $R_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$.

Ce dernier résultat peut se montrer ainsi :

• Il suffit de montrer que $R_{2m+1} = \frac{1}{4m} + O(\frac{1}{m^2})$, R_{2m} s'en déduira.

• Dans R_{2m+1}, regrouper les termes par deux et faire des encadrements intégraux.

Donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est somme de la série harmonique alternée et d'une série absolument convergente : elle est semi-convergente.

NB : Un exercice ultérieur donne un développement asymptotique de la suite (R_n).

Calcul. Formellement $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty}k\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1} = \dots\ \frac{1}{2}$ au sens de Leibniz ! Passons par les sommes partielles :

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=n}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k} + \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k} + N\sum_{k=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{N}k\frac{(-1)^{k-1}}{k} + N\sum_{k=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{N}(-1)^{k-1} + N\left(\frac{(-1)^{N}}{2(N+1)} + O(\frac{1}{N^2})\right).$$

Si l'on choisit $N = 2m$, il vient $S_{2m} = \frac{1}{2} + O(\frac{1}{m})$. Donc (S_n) tend vers $\frac{1}{2}$.

Méthodes intégrales. En voici le schéma, les justifications étant laissées au lecteur :

$$\frac{2}{k^3} = \int_0^{+\infty}t^2e^{-kt}.dt\ ,\ \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3} = \frac{(-1)^{n-1}}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-nt}}{1+e^{-t}}.dt\ ,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3} = \int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-t}}{2(1+e^{-t})^2}.dt = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\frac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty}te^{-kt}.dt\ ,\ \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = (-1)^{n-1}\int_0^{+\infty}\frac{te^{-nt}}{1+e^{-t}}.dt\ ,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \int_0^{+\infty}\frac{te^{-t}}{(1+e^{-t})^2}.dt = \ln 2\,.$$

$$\frac{1}{k} = \int_0^{+\infty}e^{-kt}.dt\ ,\ \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = (-1)^{n-1}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-nt}}{1+e^{-t}}.dt\ ,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}.dt = \frac{1}{2}.$$

Exercice 74 : Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ une fonction convexe tendant vers 0 en $+\infty$.

Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(n)$ converge, et que $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k f(k)\right| \le \frac{f(n)}{2}$.

Application : équivalents de $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{\ln k}{k}$.

Solution :

1) Convergence.

La convexité implique $(\forall n)\ f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) \ge 0$, i.e. $f(n) - f(n+1) \ge f(n+1) - f(n+2)$.

La suite $(f(n) - f(n+1))$ est croissante et tend vers 0. Elle est donc négative. Donc la suite $(f(n))$ tend en décroissant vers 0, et la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(n)$ obéit au critère des séries alternées.

2) Majoration du reste.

On a $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k f(k)$ et $|R_n| = (-1)^{n+1}R_n = f(n+1) - f(n+2) + f(n+3) - f(n+4) + \dots$

$|R_{n-1}| = f(n) - f(n+1) + f(n+2) - f(n+3) + \ldots \geq |R_n| = f(n+1) - f(n+2) + f(n+3) - f(n+4) + \ldots$

Il en découle que $2\,|R_n| \leq |R_{n-1}| + |R_n| = (-1)^n (R_{n-1} - R_n) = f(n) \leq 2\,|R_{n-1}|$. cqfd.

3) <u>Application</u> : on a l'équivalent $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sim \frac{(-1)^n}{2n}$.

En effet, $x \to 1/x$ est convexe et tend vers 0, et $f(n) \sim f(n-1)$,

Donc $2\,|R_n| \leq f(n) \leq 2\,|R_{n-1}| \leq f(n-1)$ implique ici $f(n) \sim 2\,|R_{n-1}|$. cf. un exercice ultérieur.

De même $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \sim \frac{(-1)^n}{2n^2}$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\ln k}{k} \sim (-1)^n \frac{\ln n}{2n}$.

<u>Exercice 75</u> : Natures des séries $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln(1+\frac{(-1)^n}{n})$; calcul ? $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln(1+\frac{(-1)^n}{n^a})$ $(a > 0)$

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^a+(-1)^n}$ $(a > 0)$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+a}}$ $(a > 0)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n!e\pi)$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n.\ln n}$; équivalent du reste ? $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin n}$.

<u>Solution</u> :

1) La série $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$ est alternée. On a l'équivalent $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, terme général d'une série qui converge en vertu du critère des séries alternées... ***mais la règle de l'équivalent ne s'applique pas !***

Contournons cet obstacle, en notant que : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^{3/2}})$.

Dès lors, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est somme de la série harmonique alternée, de la série harmonique, et d'une série absolument convergente. Elle est donc divergente (SSC + SD + SAC = SD + SC = SD).
On en déduit au passage que la série n'obéit pas au critère des séries alternées.

2) La série $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln(1+\frac{(-1)^n}{n})$ est alternée. Mêmes remarques. Ici $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + O(\frac{1}{n^2})$.

Du coup, la série est somme de la série harmonique alternée et d'une séire absolument convergente. Elle converge.

3) La série $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln(1+\frac{(-1)^n}{n^a})$, $a > 0$, est alternée. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^a} + v_n$, où $v_n \sim -\frac{1}{n^{2a}}$.

La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^a}$ est semi-convergente (Riemann alternée).

La série de terme général v_n converge ssi $a > ½$. Idem donc pour la série proposée.

4) La série $S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ est alternée. S = SSC + SD + SAC = SC + SD = SD, car:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O(\frac{1}{n})) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^{3/2}}).$$

5) En améliorant l'exercice 25, on voit que $\sin(n!\,e\,\pi) = (-1)^n \frac{\pi}{n+1} + O(\frac{1}{n^2})$.

Du coup, la série converge comme somme d'une semi et d'une absolument convergentes.

6) [Mines 1991] La série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$ est alternée. L'équivalent de Stirling $n\,! \sim (\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}$ donne

$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}(2\pi n)^{1/2n} \sim \frac{n}{e}$ … si on le justifie avec soin, car on ne compose pas des équivalents !

Ecrivons $n! = (\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}\,(1+\varepsilon_n)$ où $\varepsilon_n \to 0$, donc $\sqrt[n]{n!} = \frac{n}{e}(2\pi n)^{1/2n}(1+\varepsilon_n)^{1/n}$, et là, ça marche.

Cela montre que le terme général tend vers 0 : $u_n \sim (-1)^n\frac{e}{n}$.

Il suffit, pour conclure, de montrer que $\sqrt[n]{n!} \le \sqrt[n+1]{(n+1)!}$. Cela s'écrit $(n!)^{n+1} \le (n+1)!^n$, ou encore $n! \le (n+1)^n$: c'est OK. Le critère des séries alternées s'applique.

Autre méthode : développement asymptotique de u_n.

$u_n = (-1)^n\frac{e}{n}.\exp(-\frac{1}{2n}\ln(2\pi n) - \frac{1}{n}\ln(1+\varepsilon_n)) = (-1)^n\frac{e}{n}(1 - \frac{1}{2n}\ln(2\pi n) + o(\frac{1}{n}))$

$= (-1)^n\frac{e}{n} + O(\frac{\ln n}{n^2})$: somme d'une série semi-convergente et d'une absolument convergente.

Remarque : Maple confirme :

```
> asympt(1/(n!)^(1/n),n,3);
```

$$\frac{1}{e^{(-1)}n} + \frac{-\ln(\sqrt{2}\sqrt{\pi}) - \frac{1}{2}\ln(n)}{e^{(-1)}n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

6) La série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\ln n}$ est alternée, et la conclusion est la même, car :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}(1 + O(\frac{\ln n}{n})) = \frac{(-1)^n}{n} + O(\frac{\ln n}{n^2}) = \frac{(-1)^n}{n} + O(\frac{1}{n^{3/2}}).$$

7) Ecrire $\frac{(-1)^n}{n+\sin n} = \frac{(-1)^n}{n}\frac{1}{1+\frac{\sin n}{n}} = \frac{(-1)^n}{n}(1 + O(\frac{\sin n}{n})) = \frac{(-1)^n}{n} + O(\frac{1}{n^2})$, etc.

Exercice 76 : Dans le plan euclidien $\mathbf{R}^2$, soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $x^2 = 2py$ ($p > 0$).
Soit M_0 un point de $\mathcal{P} - \{O\}$, M_{n+1} la seconde intersection de $\mathcal{P}$ avec la normale en M_n à $\mathcal{P}$.
Si $M_n(x_n, y_n)$, étudier la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{x_n}$.

Solution : 1) La suite (x_n) obéit à la récurrence : $x_{n+1} = -x_n - \frac{2p^2}{x_n}$.

C'est ce qu'on obtient en écrivant que $\overrightarrow{M_nM_{n+1}}.\overrightarrow{T_n} = 0$, où $M_n(x_n, \frac{x_n^2}{2p})$ et $\overrightarrow{T_n}(1, \frac{x_n}{p})$.

2) Notons $u_n = \frac{1}{x_n}$. Alors $u_{n+1} = \frac{-u_n}{1+2p^2u_n^2}$. La série $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ est alternée, et obéit au critère des séries alternées, car $|u_{n+1}| \le |u_n|$, donc $|u_n| \downarrow L$, et $L = \frac{L}{1+2p^2L^2}$, donc $L = 0$.

Références : Chambadal-Ovaert, Analyse t. 2, ex. n° 60 p. 650.

Exercice 77 : **transformation d'Abel.**

1) Soit $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.v_n$ une série à termes complexes. On pose $V_n = \sum_{k=0}^{n}v_k$ et $V_{p,q} = \sum_{k=p}^{q}v_k$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k.v_k = a_n.V_n - \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k).V_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{q} a_k.v_k = a_q.V_{p,q} - \sum_{k=p}^{q-1}(a_{k+1}-a_k).V_{p,k} .$$

2) Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.v_n$ une série à termes complexes. On suppose que :

(A I) La suite V_n est bornée et la suite (a_n) est réelle et tend vers 0 de manière monotone.

(A II) La suite V_n est bornée. La suite (a_n) tend vers 0 et la série $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_{k+1}-a_k|$ converge.

(A III) La série $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ converge, et la suite (a_n) est réelle, monotone et bornée ;

(A IV) La série $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ converge et la série $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_{k+1}-a_k|$ converge ;

Montrer que, sous chacun de ces jeux d'hypothèses, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.v_n$ converge.

Solution : 1) est facile à vérifier.

2) Montrons que (A I) $\Rightarrow$ (A II) $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.v_n$ converge.

(A I) $\Rightarrow$ (A II), car si (a_n) décroît, $\sum_{k=0}^{K} |a_{k+1}-a_k| = \sum_{k=0}^{K}(a_k-a_{k+1}) = a_0 - a_{K+1}$ converge ; et si (a_n) croît, $\sum_{k=0}^{K} |a_{k+1}-a_k| = \sum_{k=0}^{K}(a_{k+1}-a_k) = a_{K+1} - a_0$ converge itou.

Supposons (A II). On a : $\sum_{k=0}^{n} a_k.v_k = a_n.V_n - \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k).V_k$.

Or $(a_n.V_n)$ tend vers 0, et $\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k).V_k$ est somme partielle d'une série absolument convergente.

En conclusion , $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.v_n$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k.v_k = -\sum_{k=0}^{+\infty}(a_{k+1}-a_k).V_k$.

3) Montrons que (A III) $\Rightarrow$ (A IV) $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.v_n$ converge.

(A III) $\Rightarrow$ (A IV), car si (a_n) est décroissante minorée, $\sum_{k=0}^{K} |a_{k+1}-a_k| = \sum_{k=0}^{K}(a_k-a_{k+1}) = a_0 - a_{K+1}$ converge ; et si (a_n) est croissante majorée, $\sum_{k=0}^{K} |a_{k+1}-a_k| = \sum_{k=0}^{K}(a_{k+1}-a_k) = a_{K+1} - a_0$ converge itou.

(A IV) implique d'abord que la suite (a_n) converge, car la série $\sum_{k=0}^{+\infty}(a_{k+1}-a_k)$ converge.

De plus : $\sum_{k=0}^{n} a_k.v_k = a_n.V_n - \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k).V_k$.

$(a_n.V_n)$ converge, et $\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k).V_k$ est somme partielle d'une série absolument convergente.

En conclusion , $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.v_n$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k.v_k = \lim_{n\to\infty} a_n.V_n - \sum_{k=0}^{+\infty}(a_{k+1}-a_k).V_k$.

On aurait pu aussi abéliser via les restes de la série.
Les quatre exercices suivants reposent sur ces résultats.

<u>Exercice 78</u> : **<u>application à des séries trigonométriques</u>**.

1) Si $a_n \downarrow 0$, la série $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.\cos(n\theta)$ converge pour tout $\theta \in \mathbf{R}-2\pi\mathbf{Z}$.

2) Si $b_n \downarrow 0$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n.\cos(n\theta)$ converge pour tout $\theta \in \mathbf{R}$.

3) Montrer que 1) et 2) subsistent sous les hypothèses plus générales :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_{k+1}-a_k| < +\infty \text{ et } a_n \to 0 \text{ , resp. } \sum_{k=1}^{+\infty} |b_{k+1}-b_k| < +\infty \text{ et } b_n \to 0 .$$

<u>Solution</u> : laissée en exercice.

<u>Exercice 79</u> : Montrer que la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ implique celles des séries :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{v_n}{n} \ , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{v_n}{\ln n} \ , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} v_n.\sqrt[n]{n} \ .$$

<u>Solution</u> : Traitons le premier exercice. Notons d'abord que le résultat est évident si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ est à termes positifs, ou absolument convergente.

Dans le cas général, notons $V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$, $V_0 = 0$. Il vient :

$\sum_{n=1}^{N} \frac{v_n}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{V_n - V_{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{V_n}{n} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{V_n}{n+1} = \frac{V_N}{N} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{V_n}{n(n+1)}$. La suite (V_N) est convergente donc bornée, donc $\frac{V_N}{N}$ tend vers 0 et $\sum_{n=1}^{N-1} \frac{V_n}{n(n+1)}$ est somme partielle d'une série absolument convergente.

On aurait aussi pu abéliser via les restes, ou appliquer l'ex. 74 : les 4 hypothèses sont satisfaites !

Observons que l'hypothèse faite sur la série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ est trop précise : le résultat subsiste si les sommes partielles de cette série sont bornées.

<u>Exercice 80</u> : Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ une série convergente à termes ≥ 0 , de restes $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Montrer l'équivalence : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n.\ln n$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{R_n}{n}$ converge.

<u>Solution</u> : laissée en exercice.

<u>Exercice 81</u> : Natures des séries : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin n.\sin\frac{1}{n}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\exp(ina)}{\sqrt{n}+\exp(inb)}$ (a , $b \in \mathbf{R}$)

<u>Solution</u> : Combinons un développement asymptotique avec un recours à la transformation d'Abel.

• $\sin n.\ \sin\frac{1}{n} = \frac{\sin n}{n} + O(\frac{1}{n^3})$. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$ converge par les règles d'Abel, la seconde est absolument convergente. Au bilan, $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin n.\sin\frac{1}{n}$ converge.

• $\dfrac{\exp(ina)}{\sqrt{n}+\exp(inb)} = \dfrac{e^{ina}}{\sqrt{n}}\dfrac{1}{1+\dfrac{e^{inb}}{\sqrt{n}}} = \dfrac{e^{ina}}{\sqrt{n}}(1 - \dfrac{e^{inb}}{\sqrt{n}} + O(\dfrac{1}{n})) = \dfrac{e^{ina}}{\sqrt{n}} - \dfrac{e^{in(a+b)}}{n} + O(\dfrac{1}{n^{3/2}})$, etc.

Exercice 82 : Développement asymptotique de $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Solution : 1) S_n est la somme partielle de la série harmonique alternée. Elle tend vers ln 2 en spirale.

$S_n = \ln 2 - R_n$, où $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. En vertu du CSA, $S_n = \ln 2 + O(\frac{1}{n})$.

Pour préciser les choses, plusieurs méthodes entrent en concurrence :

2) On peut se ramener à la série harmonique.

On a : $S_{2m} = H_{2m} - H_m$ et $S_{2m+1} = S_{2m} + \frac{1}{2m+1}$, formules qui s'unifient en $S_n = H_n - H_{[n/2]}$.

Or « on sait tout » de la suite (H_n). Avec Maple, il faut distinguer les cas n pair, n impair :

```
> H:=n->sum(1/k,k=1..n);asympt(H(n),n);T:=m->H(2*m)-H(m);U:=m->H(2*m+1)-
H(m);subs(m=n/2,asympt(T(m),m,11));asympt(subs(m=(n-
1)/2,asympt(U(m),m,11)),n,11);
```

$$H := n \to \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \ln(n) + \gamma + \frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{1}{12}\frac{1}{n^2} + \frac{\frac{1}{120}}{n^4} + O\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

$$T := m \to H(2\,m) - H(m) \qquad U := m \to H(2\,m+1) - H(m)$$

$$\ln(2) - \frac{1}{2}\frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{4}}{n^2} - \frac{1}{8}\frac{1}{n^4} + \frac{\frac{1}{4}}{n^6} - \frac{17}{16}\frac{1}{n^8} + \frac{\frac{31}{4}}{n^{10}} + O\left(2048\frac{1}{n^{11}}\right)$$

$$\ln(2) + \frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{1}{4}\frac{1}{n^2} + \frac{\frac{1}{8}}{n^4} - \frac{1}{4}\frac{1}{n^6} + \frac{\frac{17}{16}}{n^8} - \frac{31}{4}\frac{1}{n^{10}} + O\left(\frac{1}{n^{11}}\right)$$

3) Expressions intégrales.

$R_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}.dt$. Or les $\mu_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}.dt$ sont les moments d'une fonction continue sur [0, 1].

Des intégrations par parties répétées fournissent le développement asymptotique à tous ordres.

Au reste $\mu_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ns}}{1+e^s}.ds$ relève de la méthode de Laplace.

```
> with(inttrans):f:=s-
>1/(exp(s)+1);ds:=series(f(s),s=0,12);L:=laplace(ds,s,n);ln(2)+(-
1)^(n+1)*L;
```

$$f := s \to \frac{1}{e^s + 1}$$

$$ds := \frac{1}{2} - \frac{1}{4}s + \frac{1}{48}s^3 - \frac{1}{480}s^5 + \frac{17}{80640}s^7 - \frac{31}{1451520}s^9 + \frac{691}{319334400}s^{11} + O(s^{12})$$

$$\ln(2) + (-1)^{(n+1)}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{n} - \frac{1}{4}\frac{1}{n^2} + \frac{\frac{1}{8}}{n^4} - \frac{1}{4}\frac{1}{n^6} + \frac{\frac{17}{16}}{n^8} - \frac{31}{4}\frac{1}{n^{10}} + \frac{\frac{691}{8}}{n^{12}}\right)$$

Remarque : Maple a recours à la fonction eulérienne ψ.

```
> S:=n->sum((-1)^(k-1)/k,k=1..n);S(n);
```

$$S := n \to \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{(k-1)}}{k} \qquad \ln(2) + \frac{1}{2}(-1)^{(n+1)}\left(\Psi\left(1+\frac{1}{2}n\right) - \Psi\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\right)\right)$$

```
> map(simplify,asympt(S(n),n,9));
```

$$\ln(2)+\frac{\frac{1}{2}(-1)^{(n+1)}}{n}+\frac{\frac{1}{4}(-1)^{n}}{n^2}+\frac{\frac{1}{8}(-1)^{(n+1)}}{n^4}+\frac{\frac{1}{4}(-1)^{n}}{n^6}+\frac{\frac{17}{16}(-1)^{(n+1)}}{n^8}+O\left(\frac{1}{n^9}\right)$$

Exercice 83 : Convergence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$.

Solution : 1) Convergence.

Notons $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, et $v_n = u_n S_n$, où S_n est somme partielle de la série harmonique alternée.

Plus précisément $S_n = \ln 2 - R_n$, où $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est du signe de $(-1)^n$ et $|R_n|\le\frac{1}{n+1}$

Donc $v_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\ln 2)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. La série $\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$ est convergente comme somme d'une série obéissant au CSA et d'une série absolument convergente, à termes positifs d'ailleurs.

2) Calcul de la somme.

Un simple argument de pliage va permettre de mener à terme ce calcul.

$$\left(\sum_{n=1}^{N}u_n\right)^2=\sum_{1\le n,k\le N}u_n.u_k=\sum_{1\le n<k\le N}u_n.u_k+\sum_{1\le k<n\le N}u_n.u_k+\sum_{1\le n\le N}(u_n)^2$$

$$=2\sum_{1\le n<k\le N}u_n.u_k+\sum_{1\le n\le N}(u_n)^2=2\sum_{1\le k\le n\le N}u_n.u_k-\sum_{1\le n\le N}(u_n)^2$$

$$=2\sum_{1\le n\le N}v_n-\sum_{1\le n\le N}(u_n)^2.$$ Passer à la limite…

Variante : $\sum_{n=1}^{N}u_n.S_n=\sum_{n=1}^{N}(S_n-S_{n-1}).S_n=\sum_{n=1}^{N}S_n^2-\sum_{n=1}^{N}S_{n-1}.S_n=\sum_{n=1}^{N}S_n^2-\sum_{n=1}^{N-1}S_n.S_{n+1}$

$$=\sum_{n=1}^{N}S_n^2-\sum_{n=1}^{N-1}S_n.(S_n+u_{n+1})=S_N^2-\sum_{n=1}^{N-1}S_n.u_{n+1}=S_N^2-\sum_{n=1}^{N-1}(S_{n+1}-u_{n+1}).u_{n+1}=$$

$$=S_N^2+\sum_{n=1}^{N-1}u_{n+1}^2-\sum_{n=1}^{N}v_n+u_1.S_1.$$

Donc $2\sum_{n=1}^{N}v_n\to(\ln 2)^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}+1=\frac{\pi^2}{6}+(\ln 2)^2$. Finalement $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}v_n=\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{2}(\ln 2)^2}$

Remarque : autres variantes possibles, via le calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Exercice 84 : Soit $S_n=\sqrt{1}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\dots+(-1)^{n-1}\sqrt{n}$.

Montrer que $S_n\sim\frac{(-1)^{n-1}}{2}\sqrt{n}$, et plus précisément que $S_n=\frac{(-1)^{n-1}}{2}\sqrt{n}+C+o(1)$.

Solution : Plusieurs méthodes possibles.

1ère méthode : Etudions séparément (S_{2m}) et (S_{2m+1}).

Notons $V_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$. Alors $S_{2m}=V_{2m}-2\sqrt{2}\,V_m$ et $S_{2m+1}=V_{2m}-2\sqrt{2}\,V_m+\sqrt{2m+1}$.

On peut obtenir un développement asymptotique à tous ordres de V_n, et on en déduit ceux de S_{2m} et S_{2m+1}. Regroupant les cas, on constate que $S_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2}\sqrt{n} + C + o(1)$.

Maple précise $C = -2\sqrt{2}\,\zeta(-\frac{1}{2})$, faisant allusion au prolongement de la fonction ζ.

```
> V:=n->sum(sqrt(k),k=1..n);V(n);asympt(V(n),n);
```

$$\frac{2}{3}\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^{(3/2)}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} + \zeta\left(\frac{-1}{2}\right) + \frac{1}{24}\sqrt{\frac{1}{n}} - \frac{1}{1920}\left(\frac{1}{n}\right)^{(5/2)} + \frac{1}{9216}\left(\frac{1}{n}\right)^{(9/2)} + O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{(13/2)}\right)$$

```
> S:=m->V(2*m)-2*sqrt(2)*V(m);T:=m->S(m)+sqrt(2*m+1);
asympt(S(m),m,3);asympt(T(m),m,2);
```

$$-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{m}}} - 2\sqrt{2}\,\zeta\left(\frac{-1}{2}\right) + \zeta\left(\frac{-1}{2}\right) - \frac{1}{16}\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{m}} + \frac{1}{1024}\sqrt{2}\left(\frac{1}{m}\right)^{(5/2)} + O\left(\frac{1}{m^3}\right)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{m}}} - 2\sqrt{2}\,\zeta\left(\frac{-1}{2}\right) + \zeta\left(\frac{-1}{2}\right) + \frac{3}{16}\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{m}} - \frac{1}{32}\sqrt{2}\left(\frac{1}{m}\right)^{(3/2)} + O\left(\left(\frac{1}{m}\right)^{(5/2)}\right)$$

<u>$2^{\text{ème}}$ méthode</u>. Formons la suite $T_n = S_n - \frac{(-1)^{n-1}}{2}\sqrt{n}$, et transformons-la en série :

$$u_n = T_n - T_{n-1} = (-1)^{n-1}\sqrt{n} - \frac{(-1)^{n-1}}{2}\sqrt{n} + \frac{(-1)^n}{2}\sqrt{n-1}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{2}\sqrt{n}\,[1 - \sqrt{1-\frac{1}{n}}\,] = \frac{(-1)^{n-1}}{4\sqrt{n}} + O(\frac{1}{n^{3/2}}).$$

La série de terme général u_n est somme d'une série semi-convegrente et d'une série absolument convergente. Donc la suite (T_n) converge.

<u>Exercice 85</u> : Soit $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ une série convergente, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ la suite de ses restes.

Etudier sous différentes hypothèses la nature et la valeur de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$.

Nature et calcul des séries $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

<u>Solution</u> : 1) Formellement $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{k-1} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k$.

Si l'on note $u_{nk} = a_k$ si $n < k$, $u_{nk} = 0$ si $n \geq k$, il s'agit d'un échange de $\sum$ dans une série double.

2) Si la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ est à termes positifs, je dis que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k \text{ converge, et alors } \sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k.$$

Même conclusion si $\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k$ est absolument convergente.

Cela découle de la théorie des séries doubles (familles sommables).

3) En toute généralité, $\sum_{n=0}^{N} R_n = \sum_{k=1}^{N+1} k a_k$ + (N + 1)R_{N+1} . Par conséquent :

• Si $NR_N \to 0$, les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k$ sont de même nature, et si elles convergent, elles ont même somme.

• Si $NR_N \to L$, les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k$ sont de même nature, et si elles convergent, leurs sommes diffèrent de L.

Mais il peut arriver que $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$ converge sans que $\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k$ ne converge.

<u>Exercice 86</u> : Soit $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin((2n+1)t)}{1+\cos^2 t}.dt$. Convergence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_n$.

<u>Solution</u> : 1) Une ipp montre que $I_n = \frac{1}{2n+1} + O(\frac{1}{n^2})$. La série est la somme d'une série obéissant au CSA et d'une série absolument convergente.
2) Il est naturel ici de développer en série de Fourier la fonction impaire 2π-périodique définie par $f(x) = \frac{1}{1+\cos^2 x}$ sur]0, π[. Cette fonction est C^1 par morceaux et obéit au théorème de Dirichlet. Il reste à faire $x = \frac{\pi}{2}$ dans le développement obtenu. Il vient $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_n = \frac{1}{2}$.
3) <u>Autre solution : calcul des sommes partielles</u>.
$\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \sin(2n+1)t = \frac{\sin(2Nt)}{2.\cos t}$, après calculs, d'où $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(2Nt)}{2\cos t(1+\cos^2 t)}.dt$,
intégrale faussement impropre en π/2. On peut se ramener en 0 et utiliser Riemann-Lebesgue.

<u>Remarque</u> : Séries de Fourier et séries trigonométriques fournissent de nombreux calculs de séries, par simple évaluation en un point de formules connues, ou via Parseval (tels les ζ(2n)).

<u>Exercice 87</u> : Nature de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, où $u_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x.\sin(nx).dx$.

<u>Solution</u> : Cet exercice, posé aux Mines 1992 (RMS n° 190), m'a donné du fil à retordre, car la forme intégrale proposée relève à la fois de Riemann-Lebesgue et de Laplace. Voici deux approches.
<u>1ère approche</u>.
1) Commençons par « linéariser » :
$u_n = \mathrm{Im} \int_0^{\pi/2} \cos^n x.e^{inx}.dx = \frac{1}{2^n} \mathrm{Im} \int_0^{\pi/2} (e^{2ix}+1)^n.dx$. Après développement binomial, il vient:

$$u_n = \frac{1}{2^n} \left(C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^3 + \frac{1}{5} C_n^5 + \dots \right) \qquad (1)$$

Cela permet déjà de conclure, car si l'on minore ainsi : $\frac{1}{k} C_n^k \geq \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{k+1}$, il vient :

$$u_n \geq \frac{1}{2^n} \frac{1}{n+1} \left(C_{n+1}^2 + C_{n+1}^4 + C_{n+1}^6 + \dots \right) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{n+1} \frac{2^{n+1}-1}{2} \sim \frac{1}{n}.$$ La série diverge.

2) On peut aussi continuer à transformer u_n , afin d'en faire une étude plus approfondie.
Tout d'abord : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} C_n^k x^k = \int_0^{x} \frac{(1+t)^n - 1}{t}.dt$.

Changeant x en – x et additionnant, il vient : $\sum_{k impair} \frac{1}{k} C_n^k x^k = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{(1+t)^n-(1-t)^n}{t}.dt$, d'où :

$$u_n = \frac{1}{2^{n+1}}\int_0^1 \frac{(1+t)^n-(1-t)^n}{t}.dt . \qquad (2)$$

3) Revenons à une forme sommatoire

$u_n = \frac{1}{2^{n+1}}\left[\int_0^1 \frac{(1+t)^n-1}{t}.dt + \int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t}.dt\right] = \frac{1}{2^{n+1}}\left[\int_1^2 \frac{u^n-1}{u-1}.dt + \int_0^1 \frac{1-u^n}{1-u}.du\right] = \frac{1}{2^{n+1}}\int_0^2 \frac{u^n-1}{u-1}.dt$, et

$$u_n = \frac{1}{2^{n+1}}\left[2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \dots + \frac{2^n}{n}\right] = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k} \qquad (3)$$

4) Une transformation d'Abel laissée au lecteur (cf. ex. 38) donne pour finir $u_n \sim \frac{1}{n}$.

On peut d'ailleurs la poursuivre à tous ordres afin d'obtenir un développement asymptotique de u_n.

2ème approche : on s'intéresse à la série.

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = \text{Im} \int_0^{\pi/2}\sum_{n=0}^{N}\cos^n x e^{inx}.dx = \text{Im}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos^{N+1}x.e^{i(N+1)x}}{1-\cos x.e^{ix}}.dx = \dots$$

$$= \int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sin x}(1-\cos^N x.\cos Nx).dx \geq \int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sin x}(1-\cos^N x).dx \uparrow \int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sin x}.dx = +\infty$$

par convergence monotone, car, sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, $f_N(x) = \frac{\cos x}{\sin x}(1-\cos^N x)$ tend simplement, et en croissant, vers $\frac{\cos x}{\sin x}$, qui n'est pas intégrable.

Exercice 88 : **critère de Hardy**.

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbf{C}$ une fonction de classe C^1, telle que f' soit intégrable sur $[0, +\infty[$.

Montrer que la série de terme général $w_n = \int_{n-1}^{n} f(t).dt - f(n)$ est absolument convergente.

Solution : Une intégration par parties donne : $w_n = -\int_{n-1}^{n}(t-n+1).f'(t).dt \qquad (1)$

On en déduit que : $|w_n| \leq \int_{n-1}^{n}(t-n+1).|f'(t)|.dt \leq \int_{n-1}^{n}|f'(t)|.dt$.

L'intégrabilité de f' implique la convergence de la série de terme général $\int_{n-1}^{n}|f'(t)|.dt$, qui implique à son tour l'absolue convergence de ladite série.

Exercice 89 : Natures des séries $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(\ln n)}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\ln n)}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$.

Solution : La divergence de la première série peut s'établir par deux méthodes fort distinctes.

1ère méthode : tranches de Cauchy.

Les tranches correspondant aux intervalles dans lesquels $\cos(\ln n) \geq 1/2$ ne tendent pas vers 0.

En effet $\cos(\ln n) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \exp(2k\pi - \frac{\pi}{3}) \leq n \leq \exp(2k\pi + \frac{\pi}{3})$.

Notons $[a_k, b_k] = \mathbf{N}^* \cap [\exp(2k\pi - \frac{\pi}{3}), \exp(2k\pi + \frac{\pi}{3})]$.

Alors $T_k = \sum_{a_k \leq n \leq b_k}\frac{\cos(\ln n)}{n} \geq \frac{1}{2}\sum_{a_k \leq n \leq b_k}\frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}\frac{b_k-a_k+1}{b_k} \to \frac{1}{2}\left(1-\exp(-\frac{2\pi}{3})\right) \neq 0$

2ème méthode : comparaison série-intégrale reposant sur le critère de Hardy (ex. précédent).

Ici, $f(x) = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$ est C^1 sur $[1, +\infty[$, et $f'(x) = \dfrac{-\sin(\ln x)-\cos(\ln x)}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Or $\int_1^n \frac{\cos(\ln t)}{t}.dt = \int_0^{\ln n} \cos(u).du = \sin(\ln n)$ n'a pas de limite quand $n \to +\infty$, parce qu'elle a pour valeurs d'adhérence tous les réels $\in [-1, +1]$ (détails laissés au lecteur). Du coup, la série diverge.

Exercice 90 : 1) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbf{C}$ une fonction de classe C^2, telle que :

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$; b) f'' est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Montrer que la série de terme général $w_n = \int_{n-1}^n f(t).dt - f(n)$ est absolument convergente.

[Indication : observer que $w_n = -\frac{1}{2}\int_{n-1}^n (t-n+1).(n-t).f''(t).dt - \frac{1}{2}(f(n) - f(n-1))$.]

2) Application : Discuter selon les valeurs de $a > 0$ la nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{n}}{n^a}$.

Solution laissée au lecteur. Il montrera que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{n}}{n^a}$ converge ssi $a > ½$.

Exercice 93 : Soit (q_j) la suite des naturels dont l'écriture décimale ne contient pas le chiffre 9. Montrer que la série $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{q_j}$ converge.

Solution : Notons A l'ensemble des entiers ≥ 1 dont l'écriture décimale ne contient pas le chiffre 9, et $A_k = A \cap [10^k, 10^{k+1}[$. Les entiers de A sont de la forme

$$n = a_0 + a_1.10 + a_2.10^2 + \dots + a_k.10^k ,$$

où $(a_0, a_1, \dots, a_{k-1}) \in \{0, 1, \dots, 8\}^k$ et $a_k \in \{ 1, 2, \dots, 8 \}$. Ainsi, card $A_k = 8.9^k$.

$$\sum_{n\in A_k} \frac{1}{n} \leq \frac{card(A_k)}{10^k} \leq \frac{8.9^k}{10^k} = 8\left(\frac{9}{10}\right)^k.$$

Soit alors $N < 10^{k+1}$; $S_N = \sum_{n\leq N, n\in A} \frac{1}{n} \leq \sum_{p=0}^{k} \sum_{n\in A_p} \frac{1}{n} \leq \sum_{p=0}^{k} 8\left(\frac{9}{10}\right)^p < \frac{8}{1-\frac{9}{10}} = 80.$

La suite (S_N) est croissante majorée par 80, donc $\sum_{n\in A} \frac{1}{n}$ converge.

Remarques : 1) On aurait pu remplacer le chiffre 9 par n'importe quel autre chiffre (mais pour le 0 les calculs sont à modifier légèrement). Même résultat dans toute base de numération.
2) Pour des éclairages complémentaires, cf. mon problème sur la densité naturelle. On y montre que le résultat précédent implique que l'ensemble des entiers ne contenant pas le chiffre 9 est de densité naturelle nulle.

Exercice 94 : Soit $s(n)$ le nombre de 1 dans l'écriture binaire de n.
Convergence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{s(n)}}{n(n+1)}$.

Solution : Cette série est absolument convergente. Pour calculer sa somme S, on peut sommer la série par tranches de signes constant.

$$S = -\frac{1}{1.2} + \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4}\right) - \left(\frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8}\right) + \left(\frac{1}{8.9} + \dots + \frac{1}{15.16}\right) - \dots$$

$= \left(-1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\right)-\dots$, après télescopage ,

$= -\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\dots = -\frac{1}{3}$ (série géométrique).

Exercice 95 : Nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^a}$, a réel.

Solution : Si $a \le 0$ il y a divergence grossière. Si $a > 1$ il y a absolue convergence.
Supposons donc $0 < a \le 1$. L'idée est de sommer par tranches de signe constant.

En vertu du cours, la série est de même nature que la série alternée $\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p b_p$, où $b_p = \sum_{n=p^2}^{p^2+2p}\frac{1}{n^a}$.

Or l'encadrement grossier $\frac{2p+1}{(p+1)^{2a}} \le b_p \le \frac{2p+1}{p^{2a}}$ va permettre de conclure.

Du coup, si $0 < a \le ½$, b_p ne tend pas vers 0 et $\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p b_p$ est grossièrement divergente.

Si $½ < a \le 1$, $\frac{2p+1}{(p+1)^{2a}} = \frac{2}{p^{2a-1}} + O(\frac{1}{p^{2a}})$ et $\frac{2p+1}{p^{2a}} = \frac{2}{p^{2a-1}} + O(\frac{1}{p^{2a}})$, donc $b_p = \frac{2}{p^{2a-1}} + O(\frac{1}{p^{2a}})$.

Du coup, $\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p b_p = \sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\frac{2}{p^{2a-1}} + \sum_{p=1}^{+\infty}O(\frac{1}{p^{2a}})$ est somme d'une série obéissant au critère des séries alternées et d'une série absolument convergente. C'est donc une série convergente.

Conclusion : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^a}$ est absolument convergente pour $a > 1$, semi-convergente pour $½ < a \le 1$, divergente pour $a \le ½$.

Remarque : On peut montrer que si $½ < a \le 1$, (b_p) tend en décroissant vers 0. Donc $\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p b_p$ obéit au critère des séries alternées. Mais pour cela il faut utiliser un encadrement intégral de b_p.

Exercice 96 : On rappelle que $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\dots = \ln 2$.

1) Montrer que la série $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\dots$ converge et calculer sa somme.

Même question pour $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\dots$.

2) Plus généralement, on réordonne la série harmonique alternée en prenant alternativement p termes > 0 et q termes < 0. Montrer que la nouvelle série converge et a pour somme $\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

3) Montrer comment réarranger les termes afin d'obtenir une série divergente.

Solution : cet exercice illustre les paradoxes de la convergence commutative.

1) Notons T_n la somme partielle d'indice n de la nouvelle série.

$$T_{3k+3} = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(2k+1)}-\frac{1}{2(2k+2)}$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2(2k+1)}-\frac{1}{2(2k+2)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\dots+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right) \to \frac{\ln 2}{2}.$$

Les suites T_{3k+4} et T_{3k+5} ont même limite, car leur différence avec T_{3k+3} tend vers 0.
(T_n) converge comme panachée de trois suites de même limite.

2) $T_{h(p+q)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2ph-1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2qh} \right)$

$$= H_{2ph} - \frac{1}{2}(H_{ph} + H_{qh}) \to \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q} .$$

Reste à montrer que (T_n) a même limite. Cela vient de ce que toutes les suites $T_{h(p+q)+r}$, $0 \le r < p + q$, ont même limite : leur différence avec $T_{h(p+q)}$ tend vers 0. Cela découle aussi, plus généralement, des propriétés de la sommation par tranches de signe constant.

3) Réarrangeons les termes de façon à obtenir une série divergente.
Choisissons $1 = k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ de façon que :

$$A_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2k_2-1} > 1 \ , \ A_2 = \frac{1}{2k_2+1} + \frac{1}{2k_2+3} + \dots + \frac{1}{2k_3-1} > 1 \ , \text{ etc.}$$

Formons la série $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2k_2-1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2k_2+1} + \frac{1}{2k_2+3} + \dots + \frac{1}{2k_3-1} - \frac{1}{6} + \text{etc.}$

Considérons les sommes partielles d'indices convenables :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2k_2-1} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k_n+1} + \frac{1}{2k_n+3} + \dots + \frac{1}{2k_n-1} - \frac{1}{2n}$$

$$\ge 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} + \dots + 1 - \frac{1}{2n} = n - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \to +\infty.$$

La série est donc divergente. Mieux même, toutes les sommes partielles tendent vers $+\infty$.

Remarque : Le théorème de réarrangement de Riemann (1851) améliore encore cela.

Exercice 97 : Soit σ une permutation de $\mathbf{N}^*$. Nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma(n)}{n^2}$.

Solutions : 1ère preuve : Observons que $\sigma(n+1) + \sigma(n+2) + \dots + \sigma(2n) \ge 1 + 2 + \dots + n$.
En effet, si l'on réordonne les $\sigma(k)$, $n < k \le 2n$, dans l'ordre croissant, le plus petit est ≥ 1, le second est ≥ 2, etc. Minorons les tranches de Cauchy :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \ge \frac{1}{4n^2} [\sigma(n+1) + \sigma(n+2) + \dots + \sigma(2n)] \ge \frac{1}{4n^2} [1 + 2 + \dots + n] = \frac{n(n+1)}{8n^2} \ge \frac{1}{8} .$$

Les tranches de Cauchy ne tendent pas vers 0, donc la série diverge.

Remarque : Le même résultat vaut si σ est seulement injective.

2ème preuve, plus profonde, reposant sur l'inégalité de réordonnement :

Théorème : Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ des nombres réels. Lorsque σ décrit l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$, la somme $S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} a_i . b_{\sigma(i)}$ prend au plus n! valeurs ; $S(\sigma)$ est maximum lorsque les suites $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_{\sigma(1)}, b_{\sigma(2)}, \dots, b_{\sigma(n)}$ sont rangées dans le même ordre, au sens large. $S(\sigma)$ est minimum lorsque les suites $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_{\sigma(1)}, b_{\sigma(2)}, \dots, b_{\sigma(n)}$ sont rangées dans l'ordre inverse.

Pour une preuve, cf. mon chapitre sur les inégalités.
Il découle de ce théorème que, pour toute permutation τ de $\{1, 2, \dots, n\}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\tau(k)}{k^2} \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n \ , \text{ suite qui, on le sait, tend vers l'infini.}$$

Soit maintenant σ une permutation de $\mathbf{N}^*$. σ n'aucune raison de laisser stable {1, 2, …, n}, mais, pour tout n, il existe une permutation τ de {1, 2, …, n} qui range les éléments dans le même ordre que σ. Visiblement $\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma(k)}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{\tau(k)}{k^2}$, donc $\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma(k)}{k^2} \geq H_n$. Cqfd.

Exercice 98 : Natures des séries $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(\pi(1+\sqrt{2})^n)$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\sin(\pi(2+\sqrt{5})^n)$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\tan(\pi(7+4\sqrt{3})^n)$.

Solution : Traitons le premier exemple.
Ecrivons, dans l'anneau $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$: $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$, où $(a_n, b_n) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$.
En conjuguant dans $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$, il vient : $(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$.
Donc $(1+\sqrt{2})^n = 2a_n - (1-\sqrt{2})^n$.
Du coup, $\sin(\pi(1+\sqrt{2})^n) = -\sin(\pi(1-\sqrt{2})^n) \sim (-1)^{n+1}\pi(\sqrt{2}-1)^n$.
Par suite, la série est absolument convergente.

Exercice 99 : Soit r_n le nombre de points M(x, y) du plan à coordonnées entières tels que $x^2 + y^2 \leq n$.
Equivalents de r_n et de $\sum_{k=0}^{n} r_k$.

Solution : r_n est une importante fonction arithmétique, au confluent de l'analyse et de la géométrie.
Pour trouver un équivalent de r_n, voici deux méthodes :
<u>L'une, géométrique, procède par des calculs d'aires</u>.
• Associons à tout point M(x, y) de $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ le carré dont il est le coin nord-est, c'est-à-dire le carré plein C(M) de sommets (x−1, y−1), (x−1, y), (x, y−1), (x, y). Soit $R_n = \{ (x, y) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z} ; x^2 + y^2 \leq n \}$.
La réunion $\bigcup_{M\in R_n} C(M)$ est incluse dans le disque fermé de centre O et de rayon $\sqrt{n}+\sqrt{2}$.
Passant aux aires, il vient : $r_n \leq \pi(\sqrt{n}+\sqrt{2})^2$.
• A tout point $(x, y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}$ appartenant au disque fermé de centre O et de rayon $\sqrt{n}-\sqrt{2}$ associons son point nord-est ([x] + 1, [y] + 1), et le carré qu'il définit. Ce point est élément de R_n, et l'on obtient un recouvrement du disque.
Passant aux aires, il vient : $\pi(\sqrt{n}-\sqrt{2})^2 \leq r_n$.
Finalement, $\pi(\sqrt{n}-\sqrt{2})^2 \leq r_n \leq \pi(\sqrt{n}+\sqrt{2})^2$, donc $r_n \sim \pi\, n$.
En vertu du théorème de sommation des relations de comparaison, $\sum_{k=0}^{n} r_k \sim \sum_{k=0}^{n} \pi k \sim \frac{\pi}{2}n^2$.
<u>Une autre solution passe par calcul et sommes de Riemann</u>.
Commençons par évaluer $R(n) = \text{card}\, \{ (x, y) \in \mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^* ; x^2 + y^2 \leq n^2 \}$.

$$\sum_{x=1}^{n}\sqrt{n^2-x^2} - n \leq R(n) = \sum_{x=1}^{n}\left[\sqrt{n^2-x^2}\right] \leq \sum_{x=1}^{n}\sqrt{n^2-x^2} .$$

Par sommes de Riemann $\frac{R(n)}{n^2} \to \int_0^1\sqrt{1-t^2}.dt = \frac{\pi}{4}$. Donc $R(n^2) \sim \frac{\pi}{4}n^2$.
Les points situés sur les axes x = 0, y = 0 sont au nombre de 4n + 1, donc $o(n^2)$.
On en déduit que $r_{n^2} \sim 4R(n) \sim \pi n^2$, et un encadrement simple montre que $r_n \sim \pi\, n$.

Exercice 100 : Soit (z_n) une suite de complexes non nuls vérifiant $\forall(i, j)\ i \neq j \Rightarrow |z_i - z_j| \geq 1$.

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z_n^{\alpha}}$ est absolument convergente pour $\alpha > 2$, mais qu'elle peut converger ou diverger si $\alpha = 2$.

Solution : Comme le précédent, cet exercice se trouve au confluent de l'analyse et de la géométrie.

1) Je dis que la suite (z_n) tend vers l'infini en module.

En effet, associons à chaque z_i le disque ouvert D_i de centre z_i et de rayon ½. Ces disques sont deux à deux disjoints. Si $|z_i| \le R$, la réunion de ces disques est incluse dans D(O, R + ½). Passant aux aires, on voit que $\frac{\pi}{4}$card $\{ z_i ; |z_i| \le R \} \le \pi (R + ½)^2$.

Du coup, le nombre de z_i tels que $|z_i| \le R$ est fini, et à partir d'un certain rang, $|z_i| > R$. cqfd.

2) Montrons que si $\alpha > 2$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z_n^{\alpha}}$ est absolument convergente.

Découpons le plan complexe en couronnes $C_N = \{ z ; N \le |z| < N + 1 \}$.

$$\bigcup_{z_i \in C_N} D_i \subset \{ z ; N - ½ < |z| < N + 3/2 \} .$$

Passant aux aires, il vient $\frac{\pi}{4}$card $\{ z_i ; z_i \in C_N \} \le \pi (N + 3/2)^2 - \pi (N - ½)^2 = 4\pi N + 2\pi$.

Donc card $\{ z_i ; z_i \in C_N \} \le 16 N + 8$. Cela, si $N > 0$.

(Si $N = 0$, card $\{ z_i ; z_i \in C_0 \} \le 9$; dans tous les cas, card $\{ z_i ; z_i \in C_N \} \le 16 N + 9$)

Par suite, pour $N > 0$, $\sum_{z_i \in C_N}\frac{1}{|z_i|^{\alpha}} \le \frac{16N+8}{N^{\alpha}} = O(\frac{1}{N^{\alpha-1}})$. Donc $\sum_{N>0}\ \sum_{z_i \in C_N}\frac{1}{|z_i|^{\alpha}} < +\infty$. Cqfd.

3) Nous allons montrer que si $\alpha = 2$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z_n^2}$ peut converger ou diverger.

• Fabriquer une série convergente est facile : il suffit de prendre $z_n = n$.

D'une façon générale, si les z_n sont réels, la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z_n^2}$ est nécessairement convergente.

En effet, pour des raisons de longueur, chaque intervalle $[k, k+1[$ contient au plus deux z_i .

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{|z_n|^2} = S + \sum_{k \in N^*}\ \sum_{k \le |z_i| < k+1}\frac{1}{|z_i|^2} \le S + \sum_{k \in N^*}\frac{4}{k^2} < +\infty$, où $S = \sum_{|z_i|<1}\frac{1}{|z_i|^2}$.

• Placer les points z_n de façon que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z_n^2}$ converge absolument peut se faire de bien des façons.

Soit $A = \{ z = x + yj ; (x, y) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z} \}$. Si $z \in A$, $|z|^2 = x^2 + y^2 - xy \ge 1$, donc, A étant un groupe additif, $\forall (z, z') \in A\times A\ \ z \ne z' \Rightarrow | z - z'| \ge 1$. Soit $n \to z_n$ une bijection de $\mathbf{N}^*$ sur $A' = A-\{0\}$.

Montrons que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{|z_n|^2} = +\infty$, *i.e.* que $\sum_{(x,y)\in Z^2-\{(0,0)\}}\frac{1}{x^2+y^2-xy} = +\infty$. Comme $-xy \le \frac{x^2+y^2}{2}$, il suffit de montrer que $\sum_{(x,y)\in Z^2-\{(0,0)\}}\frac{2}{x^2+y^2} = +\infty$, ou encore que $\sum_{x=1}^{+\infty}\sum_{y=1}^{+\infty}\frac{1}{x^2+y^2} = +\infty$.

Or ce dernier point est facile à établir : pour tout $x \ge 1$, $\sum_{y=1}^{+\infty}\frac{1}{x^2+y^2}$ converge. Or, un encadrement intégral de la fonction $t \to \frac{1}{x^2+t^2}$ donne $\sum_{y=1}^{+\infty}\frac{1}{x^2+y^2} \sim \frac{\pi}{2x}$ quand $x \to +\infty$. Cqfd.

On aurait aussi pu prendre A = { z = x + yi ; (x, y) $\in$ **Z**×**Z** }, et une bijection $n \to z_n$ de **N*** sur A' = A−{0}. Les calculs sont les mêmes.

Exercice 101 : Montrer l'identité :

$\forall(x, a) \in \mathbf{C}^2$, $|x| < 1$, $|a| < 1$ $\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{a^n}{1+x^2.a^{2n}} = \exp a - x^2 \exp a^3 + x^4 \exp a^5 - \dots$

Solution : 1) Formellement,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{a^n}{1+x^2.a^{2n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p x^{2p} a^{2np} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p x^{2p} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{(2p+1)n}}{n!}$$
$$= \exp a - x^2 \exp a^3 + x^4 \exp a^5 - \dots$$

2) Justification :

La famille $(u_{n,p}) = (-1)^p x^{2p} \frac{a^{(2p+1)n}}{n!}$ obéit au théorème « de Fubini » relatif aux séries doubles.

En effet $|u_{n,p}| = |x|^{2p} \frac{|a|^{(2p+1)n}}{n!}$; $S_p = \sum_n |u_{n,p}| = |x|^{2p} \exp|a|^{2p+1} \le |x|^{2p} \exp(1)$, et $\sum_p S_p < +\infty$.

Exercice 102 : Montrer les identités $\forall z \in \mathbf{C}$, $|z| < 1$, $\forall\, a, b, c \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{bn}}{1-z^{an+c}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{cn}}{1-z^{an+b}} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{bn}}{1+z^{an+c}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n.z^{cn}}{1-z^{an+b}} .$$

Solution : Montrons la première relation. Formellement,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{bn}}{1-z^{an+c}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{bn+k(an+c)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} z^{bn+kan+kc} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{kc} \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n(b+ka)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{ck}}{1-z^{ak+b}} .$$

Justification : la famille $(u_{n,k}) = (z^{bn+kan+kc})$ obéit au théorème « de Fubini » relatif aux séries doubles. En effet $S_k = \sum_n |u_{n,k}| = \frac{|z|^{kc}}{1-|z|^{b+ka}} \sim |z|^{kc}$, et du coup $\sum_k S_k < +\infty$ (séries géométriques).

Exercice 103 : Montrer l'identité $\forall x \in \mathbf{C} - \{ 0, -1, -2, -3, \dots \}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} = e \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{1!} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2!} \frac{1}{x+2} - \dots \right] .$$

Solution : Formellement, par décomposition en éléments simples, il vient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \frac{1}{x+k} \right)$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \frac{1}{x+k} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{(n-k)!} \right) . \frac{(-1)^k}{k!(x+k)} = e \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(x+k)} .$$

Il est facile de vérifier que l'on est sous le parapluie du théorème « de Fubini ».

Exercice 104 : Convergence et calcul de $\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2n+mn^2+2mn}$.

Solution : C'est une série double à termes positifs $u_{mn} = \frac{1}{m^2n+mn^2+2mn} = \frac{1}{mn(m+n+2)}$.

Deux approches sont possibles :

1) Fixer m, montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{m,n}$ converge et la calculer, puis s'occuper de $\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{m,n}$.

On a $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{m,n} = \dfrac{H_{m+2}}{m(m+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{H_{m+2}}{m} - \dfrac{H_{m+2}}{m+2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{H_m}{m} - \dfrac{H_{m+2}}{m+2} + \dfrac{1}{m(m+1)} + \dfrac{1}{m(m+2)}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{H_m}{m} - \frac{H_{m+2}}{m+2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+2}\right).$$

Puis $\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{m,n} = \dfrac{7}{4}$, après télescopage.

2) Sommer par diagonales $m + n = s$, autrement dit considérer $\sum_{s=2}^{+\infty}\sum_{m+n=s} u_{m,n}$.

$$\sum_{m+n=s} u_{m,n} = \frac{1}{s+2}\sum_{m+n=s}\frac{1}{mn} = \frac{1}{s+2}\sum_{m=1}^{s-1}\frac{1}{m(s-m)} = \frac{1}{s(s+2)}\sum_{m=1}^{s-1}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{s-m}\right) = \frac{2H_{s-1}}{s(s+2)} \sim \frac{2\ln s}{s(s+2)} = O\left(\frac{1}{s^{3/2}}\right).$$

Cela assure la convergence de $\sum_{s=2}^{+\infty}\sum_{m+n=s} u_{m,n}$. Reste à calculer la somme S :

$$S = \sum_{s=2}^{+\infty}\frac{2H_{s-1}}{s(s+2)} = \sum_{s=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}\right)H_{s-1} = \sum_{s=2}^{+\infty}\left(\frac{H_s}{s} - \frac{H_{s+2}}{s+2} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)(s+1)} + \frac{1}{(s+2)s}\right) = \frac{7}{4},$$

après un bref calcul.

Exercice 105 : 1) Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ une série convergente.

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$, où $v_n = \dfrac{u_1+2u_2+\dots+nu_n}{n(n+1)}$, est convergente et a même somme.

2) Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ une suite à valeurs dans $\{-1, 0, +1\}$. On pose $\pi_n = \dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_n}{n}$. Montrer que les séries $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\varepsilon_n}{n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\pi_n}{n+1}$ sont de même nature. Si elles convergent, elles ont même somme.

Solution : Cet exercice rentre dans le thème des procédés sommatoires, qui est approfondi dans les problèmes sur les séries et dans le chapitre sur les séries divergentes.

1) Formellement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{ku_k}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{ku_k}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} ku_k\left(\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{ku_k}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k .$$

Encore faut-il trouver un parapluie convenable… Reprenons les choses plus élémentairement :

2) Notons U_n et V_n les sommes partielles des deux séries.

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{nu_1+\dots+2u_{n-1}+u_n}{n+1} = \frac{(n+1)(u_1+\dots+u_n)-(u_1+2u_2+\dots+nu_n)}{n+1} = U_n - nv_n .$$

$$nv_n = \frac{u_1+2u_2+\dots+nu_n}{n+1} = \frac{U_1+2(U_2-U_1)+\dots+n(U_n-U_{n-1})}{n+1} = \frac{n}{n+1}\left[U_n - \frac{U_1+U_2+\dots+U_{n-1}}{n}\right].$$

Si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge, la suite (U_n) converge, et (nv_n) vers 0 par Cesàro. Cqfd.

3) C'est un théorème réciproque (ou « taubérien »). Si l'on pose $u_n = \dfrac{\varepsilon_n}{n}$, alors $v_n = \dfrac{\pi_n}{n+1}$.

Il découle de 1) que si la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\varepsilon_n}{n}$ converge, la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\pi_n}{n+1}$ converge et a même somme.

Alors par ce qui précède, $V_n = U_n - \frac{n\pi_n}{n+1}$ (*).

Supposons que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi_n}{n+1}$ converge, et montrons par absurde que $\pi_n \to 0$; (*) conclura.

Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k = n\pi_n$. Si (π_n) ne tend pas vers 0, il existe $0 < a < 2$ et une suite extraite telles que $(\forall p)\ |\pi_{n(p)}| \ge a$, *i.e.* $|S_{n(p)}| \ge a.n(p)$. Soit n un indice de la forme $n(p)$.

Pour tout k tel que $n - \frac{an}{2} \le k \le n + \frac{an}{2}$, $|S_k - S_n| \le |k - n| \le \frac{an}{2}$.

Du coup, $|S_k| \ge \frac{an}{2}$, et les S_k sont de même signe, car $|S_{k+1} - S_k| \le 1$.

Par suite, $$\Big|\sum_{k=n-\frac{an}{2}}^{n+\frac{an}{2}}\frac{\pi_k}{k+1}\Big| = \sum_{k=n-\frac{an}{2}}^{n+\frac{an}{2}}\frac{|\pi_k|}{k+1} \ge \sum_{k=n-\frac{an}{2}}^{n+\frac{an}{2}}\frac{|S_k|}{k(k+1)} \ge \frac{an}{2}\Big(\frac{1}{n-\frac{an}{2}} - \frac{1}{n+\frac{an}{2}}\Big) \to \frac{a^2}{2(1-a^2/4)} .$$

Or quand $p \to +\infty$, $n = n(p) \to +\infty$. Cela nie le critère de Cauchy.

Exercice 106 : Montrer que l'équation $x^3 - x - 1 = 0$ a une unique racine réelle α.

Natures des séries $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\alpha^n\pi/2)}{n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(\alpha^n\pi/2)}{n}$.

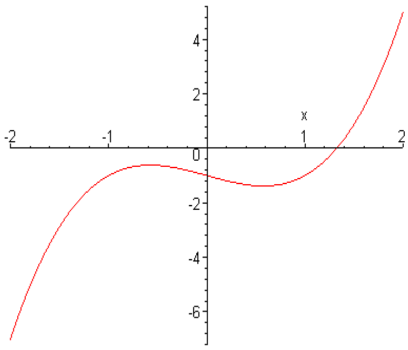
Solution : 1) Le premier point est laissé à Maple et au lecteur.

```
> p:=x^3-x-1;irreduc(p);plot(p,x=-2..2);fsolve(p=0,x);evalf(solve(p=0,x));
```

$$p := x^3 - x - 1 \qquad\qquad true$$

$$1.324717957$$

$$1.324717958, -.6623589786 + .5622795125 I, -.6623589786 - .5622795125 I$$



2) Soient α, β et $\overline{\beta}$ les racines de $P(X) = X^3 - X - 1$.

Je dis que $u_n = \alpha^n + \beta^n + \overline{\beta}^n \in \mathbf{Z}$ pour tout n.

C'est vrai pour $n = 0$, 1 et 2 : $u_0 = 3$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$.

Ensuite $u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$.

De plus $1 < \alpha < 2$ et $\alpha\beta\overline{\beta} = 1$, donc $|\beta| < 1$.

3) Je dis que les séries $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\alpha^n\pi/2)}{n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(u_n\pi/2)}{n}$ sont de même nature. Cela découle de ce que la série différence est absolument convergente, en vertu de : $\frac{1}{n}\,|\sin(u_n\frac{\pi}{2}) - \sin(\alpha^n\frac{\pi}{2})| \le \frac{\pi}{2n}|\beta^n + \overline{\beta}^n| \le \frac{\pi}{n}|\beta|^n$.

4) Notons $p_n = \sin(u_n\frac{\pi}{2})$. On constate que la suite (u_n) est de période 14 modulo 4, donc la suite (p_n) est 14-périodique.

Lemme : Si la suite (p_n) est T-périodique, la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{p_n}{n}$ converge si et seulement si $\sum_{n=1}^{T}p_n = 0$.

Comme ici $\sum_{n=1}^{14}p_n = 0$, on conclut que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(u_n\pi/2)}{n}$ converge, donc $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\alpha^n\pi/2)}{n}$ aussi.

Idem bien sûr pour les cosinus.

Exercice 107 : Convergence et calcul de $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\varphi(k)}{2^k - 1}$, où φ est l'indicateur d'Euler.

Solution : L'encadrement $0 \le \varphi(k) \le k-1$ assure la convergence de la série.

Formellement :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\varphi(k)}{2^k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\varphi(k)}{2^k}\frac{1}{1-(1/2)^k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\varphi(k)}{2^k}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{km}} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\varphi(k)}{2^{k(m+1)}} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\varphi(k)}{2^{km}}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k|n}\frac{\varphi(k)}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k|n}\varphi(k) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n} = 2$$, si l'on fait $x = ½$ dans l'identité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{+\infty}x^n = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$$ pour $|x| < 1$ (dérivation des séries entières).

On a utilisé au passage la formule de Gauss $\sum_{d|n}\varphi(d) = n$.

Justification : La famille $\left(\frac{\varphi(k)}{2^{km}}\right)_{k,m\ge 1}$ est sommable, en vertu de la 2ème partie du calcul précédent, ou de la première, comme on veut. Il reste à conclure en vertu de la propriété d'associativité générale de la somme des familles sommables.

Remarque : 1) Cette associativité générale a été au programme de taupe entre 1996 et 2004. Celui-ci ne contient plus que l'interversion des sommations dans les séries doubles. L'exercice a été posé à l'ENS Paris en 1989, c'est-à-dire avant 1996…

2) Dans la RMS mai 2008 (p. 175) on montre que $\sum_n \frac{1}{\varphi(n)^a}$ converge ssi $a > 1$ et que, si a, b et c sont des réels > 0, $\sum_n \frac{d(n)^b}{\varphi(n)^a n^c}$ converge ssi $a + c > 1$.

Exercice 108 : Soit $B = \{ (p, q) \in \mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^* \,;\, p \wedge q = 1 \}$. Existence et calcul de $\sum_{(p,q)\in B}\frac{1}{p^2q^2}$.

Solution : La famille $\left(\frac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in B}$ est sommable comme sous-famille de $\left(\frac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in \mathbf{N}^{*2}}$

Pour calculer la somme, partons justement de cette famille.

D'une part, $\sum_{(p,q)\in N^{*2}}\frac{1}{p^2q^2} = \sum_{p\in N^*}\frac{1}{p^2}\sum_{q\in N^*}\frac{1}{q^2} = \zeta(2)^2$.

D'autre part, si l'on classe les couples (p, q) selon leur pgcd d,

$$\sum_{(p,q)\in N^{*2}}\frac{1}{p^2q^2} = \sum_{d=1}^{+\infty}\sum_{(p,q);\,p\wedge q=d}\frac{1}{p^2q^2} = \sum_{d=1}^{+\infty}\sum_{(a,b);\,a\wedge b=1}\frac{1}{d^4a^2b^2} = \sum_{d=1}^{+\infty}\frac{1}{d^4}\sum_{(a,b);\,a\wedge b=1}\frac{1}{a^2b^2} = \zeta(4).S ,$$

où S est la somme cherchée. Donc

$$S = \frac{\zeta(2)^2}{\zeta(4)} = \frac{\pi^4/36}{\pi^4/90} = \frac{5}{2}.$$

Exercice 109 : 1) Nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{ppcm(1,2,...,n)}$.

2) Soit (u_n) une suite strictement croissante d'entiers ≥ 1. On pose $a_n = \text{ppcm}(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$.

Solution : 1) peut être traité de deux manières :

a) On observe que pour $n \ge 2$, $n-1$ et n sont premiers entre eux.

Du coup $(n-1)n$ divise ppcm(1, 2, …, n), et $0 < \dfrac{1}{ppcm(1,2,...,n)} \leq \dfrac{1}{(n-1)n}$ pour $n \geq 2$.

Donc la série converge.

b) Une solution plus longue consiste à étudier plus en détail la fonction a_n = ppcm(1, 2, …, n). Cette importante fonction arithmétique est liée à la distribution des nombres premiers.
On peut montrer qu'elle tend vers l'infini beaucoup moins vite que la factorielle, à une vitesse grosso modo exponentielle.

En effet, p désignant un nombre premier, on a la formule $a_n = \prod_{p\leq n} p^{\left[\frac{\ln n}{\ln p}\right]}$.

Du coup, $\ln a_n = \sum_{p\leq n}\left[\dfrac{\ln n}{\ln p}\right]\ln p = \sum_{k\leq n}\Lambda(k) = \psi(n)$, où $\Lambda(n) = \ln p$ si $n = p^k$, 0 sinon.

Or le théorème des nombres premiers stipule que $\pi(n) \sim \dfrac{n}{\ln n}$ et que $\psi(n) \sim n$.

D'où $\ln a_n \geq n/2$ à partir d'un certain rang, donc $1/a_n \leq e^{-n/2}$. On retrouve la convergence.

Remarque : La fonction ppcm(1, 2, …, n) est étudiée plus en détail, et plus élémentairement, dans le pb ENS P' 1996 sur le nombre d'Apéry, et dans le pb Mines-Ponts MP 2000, 2ème composition. On peut montrer que $\forall n \geq 1$ ppcm(1, 2, …, n) $\leq 3^n$.

2) La suite (a_n) vérifie : $a_1 \mid a_2 \mid a_3 \mid \dots$, mais elle augmente par paliers au sein du monoïde multiplicatif engendré par les u_k.
Soit φ l'extractrice associée : $\varphi(0) = 1$ et $\dots < a_{\varphi(n)} = a_{\varphi(n)+1} = \dots = a_{\varphi(n+1)-1} < a_{\varphi(n+1)} = \dots$
Comme $a_{\varphi(n)} < a_{\varphi(n+1)}$ et $a_{\varphi(n)} \mid a_{\varphi(n+1)}$, on a $2\, a_{\varphi(n)} \leq a_{\varphi(n+1)}$, donc $a_{\varphi(n)} \geq 2^n a_1$.

Groupons les termes par paquets : $\displaystyle\sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1}\frac{1}{a_k} = \frac{\varphi(n+1)-\varphi(n)}{a_{\varphi(n)}} = T_n$.

Or $a_p = a_{p+1} \Leftrightarrow u_{p+1} \mid a_p$.
Comme les u_k sont distincts, $\varphi(n+1) - \varphi(n) \leq d(a_{\varphi(n)})$, nombre de diviseurs de $a_{\varphi(n)}$.
Par ailleurs pour tout m, $d(m) \leq 2\,[\sqrt{m}\,] \leq 2\sqrt{m}$ (pourquoi ?)

Finalement $T_n = \dfrac{\varphi(n+1)-\varphi(n)}{a_{\varphi(n)}} \leq \dfrac{2}{\sqrt{a_{\varphi(n)}}} \leq \dfrac{2}{\sqrt{a_1}\,.2^{n/2}}$.

Donc $\sum T_n < +\infty$, et la série converge.

Exercice 110 : Pour tout entier $n \geq 2$, soit q_n le plus grand nombre premier divisant n.
Nature de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n.q_n}$.

Solution : 0) La fonction arithmétique $n \to q_n$ est très irrégulière. Pas de solution simple, donc.

1) Notons $p_1 = 2 < p_2 = 3 < p_3 = 5 < \dots$ la liste des nombres premiers.
On définit une partition de $\mathbf{N}' = \mathbf{N} - \{0, 1\}$ en ensembles $A_k = \{ n \in \mathbf{N}' \,;\, q_n = p_k \}$.
Dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$, en vertu de la théorie des familles sommables à termes positifs, il vient :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n.q_n} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n\in A_k}\frac{1}{n.q_n} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{p_k}\sum_{n\in A_k}\frac{1}{n}.$$

$\sum_{n\in A_k}\frac{1}{n} = \frac{1}{p_k}\sum_{m\in B_k}\frac{1}{m}$, où B_k est l'ensemble des entiers $m \geq 1$ dont les seuls facteurs premiers éventuels sont $p_1, p_2, \dots, p_k$. Or $\sum_{m\in B_k}\frac{1}{m} = \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}\frac{1}{p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}} = \prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1-\frac{1}{p_i}} = E_k$.

<u>Conclusion</u> : $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n.q_n} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{E_k}{(p_k)^2}$.

2) Admettons le théorème des nombres premiers, qui affirme que $\pi(x) = \sum_{p\leq x}1 \sim \frac{x}{\ln x}$ et $p_k \sim k.\ln k$.

$$\ln E_k = \sum_{i=1}^{k}-\ln(1-\frac{1}{p_i}) \sim \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p_i} \sim \sum_{i=2}^{k}\frac{1}{i\ln i} \sim \int_2^k\frac{dx}{x\ln x} \sim \ln\ln k.$$

en vertu du théorème de sommation de relations de comparaisons et d'un encadrement intégral.
Donc $\ln E_k \leq C.\ln\ln k$ pour une certaine constante $C > 0$.

Finalement $\frac{E_k}{(p_k)^2} \leq A\frac{(\ln k)^C}{k^2(\ln k)^2}$ et $\frac{E_k}{(p_k)^2} = O(\frac{1}{k^{3/2}})$.

<u>Conclusion</u> : la série converge.

3) <u>Autre solution</u>, sans utiliser le théorème des nombres premiers, en majorant E_k élémentairement.
Je dis que $(\forall k)$ $p_k \geq 2k-1$, par récurrence.
En vertu de $\ln(1+u) \leq u$ et d'une majoration intégrale classique :

$$\ln\frac{E_k}{2} = \sum_{i=2}^{k}-\ln(1-\frac{1}{p_i}) = \sum_{i=2}^{k}\ln\frac{p_i}{p_i-1} \leq \sum_{i=2}^{k}(\frac{p_i}{p_i-1}-1) = \sum_{i=2}^{k}\frac{1}{p_i-1} \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{j} \leq \frac{\ln(k-1)+1}{2}$$

D'où $E_k \leq 2\sqrt{e}\sqrt{k-1}$ et $\frac{E_k}{(p_k)^2} \leq \frac{2\sqrt{e}\sqrt{k-1}}{(2k-1)^2} = O(\frac{1}{k^{3/2}})$ derechef.

<u>Remarque</u> : pour une généralisation, cf. RMS 113/4, mai 2003, p. 442.

<u>Exercice 111</u> : Etudier les suites $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{i}{k})$ et $|P_n|$.

<u>Solution</u> : On a $1+\frac{i}{k} = r_k.\exp(i\theta_k)$, où $r_k = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$ et $\theta_k = \text{Arctan}\frac{1}{k}$.

$|P_n| = \prod_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$, $\ln|P_n| = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{k^2})$ est somme partielle d'une série à termes positifs et convergente (règles de l'équivalent ou de la majoration).

Ainsi, la suite $|P_n|$ tend en croissant vers $L = \exp(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\ln(1+\frac{1}{k^2}))$.

$S_n = \sum_{k=1}^{n}\theta_k = \sum_{k=1}^{n}Arc\tan\frac{1}{k}$, somme partielle d'une série à termes > 0 divergente, tend vers $+\infty$, de sorte que $\sum_{k=1}^{n}\theta_k = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}+O(\frac{1}{k^3})) = \ln n + S + o(1)$.

La suite (P_n) est bornée, divergente, et a pour valeurs d'adhérence tous les points du cercle $|z| = L$.
En effet, soit α réel. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ il existe un unique entier n_k tel que $S_{n_k} \leq \alpha + 2k\pi < S_{n_k+1}$.

La suite $(S_{n_k+1} - S_{n_k})$ tend vers 0, donc la suite P_{n_k} tend vers $L.\exp(i\alpha)$.

<u>Références</u> : Titchmarsh, *The theory of functions*, p. 17, Bourbaki, *Top. Gén.*, VIII 26.

Exercice 112 : Nature et calcul des produits infinis :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \ , \ \prod_{n=2}^{+\infty}(1-\frac{1}{n^2}) \ , \ \prod_{n=2}^{+\infty}(1-\frac{2}{n(n+1)}) \ , \ \prod_{n=2}^{+\infty}(\frac{n^3-1}{n^3+1}) \ , \ \prod_{n=1}^{+\infty}(1-\frac{1}{4n^2}) .$$

Solution :

$P_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^2}{k(k+2)} = 2\frac{n+1}{n+2} \to 2$; $\qquad P_n = \prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2}) = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2}$;

$P_n = \prod_{k=2}^{n}(1-\frac{2}{k(k+1)}) = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} = \frac{n+2}{3n} \to \frac{1}{3}$;

$P_n = \prod_{k=2}^{n}(\frac{k^3-1}{k^3+1}) = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)} = \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1} = \frac{2}{n(n+1)}\,\frac{n^2+n+1}{3} \to \frac{2}{3}$;

$P_n = \prod_{k=1}^{n}(1-\frac{1}{4k^2}) = \prod_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)(2k+1)}{4k^2} = \frac{(2n+1).(2n!)^2}{4^{2n}(n!)^4} \to \frac{2}{\pi}$ par Stirling (mais Wallis suffit).

Exercice 113 : Nature et calcul éventuel des produits infinis :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}) \ , \ \prod_{n=2}^{+\infty}(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}) \ , \ \prod_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{(-1)^n.\ln n}{\sqrt{n}}) .$$

Solution :

Exercice 114 : formule d'Euler. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\quad n! = \prod_{k=1}^{+\infty}(\frac{k+1}{k})^n.\frac{k}{n+k}$.

Solution : Il suffit de montrer que :

Il reste à faire tendre N vers l'infini. La limite est finie non nulle, donc le produit infini converge.

Remarque : Cette formule est mentionnée par Euler dans une lettre à Goldbach du 13 octobre 1729. Elle lui permet de prolonger la fonction factorielle à tous les réels $x \notin \{-1, -2, -3, \dots\}$ en posant :

$x! = \prod_{k=1}^{+\infty}(\frac{k+1}{k})^x.\frac{k}{x+k}$. Euler ne se préocuppe pas de la convergence de ce produit infini. Peu après, le 8 janvier 1730, dans une nouvelle lettre à Goldbach, Euler propose de prolonger la factorielle grâce à la formule intégrale : $x! = \int_0^1(-\ln t)^x.dt$.

Exercice 115 : formule de Jacobi. Montrer, pour tout $0 < q < 1$:

$$\frac{1-q}{1+q}\left(\frac{1-q^2}{1+q^2}\right)^{1/2}\left(\frac{1-q^4}{1+q^4}\right)^{1/4}\left(\frac{1-q^8}{1+q^8}\right)^{1/8}\dots = (1-q)^2 .$$

à Lou Andreas Salomé et Jo Martynciow

Solution : 1) Convergence. Il s'agit de montrer que la suite $P_n = \prod_{k=0}^{n}(\frac{1-q^{2^k}}{1+q^{2^k}})^{1/2^k}$ tend vers $(1-q)^2$.

Passons au logarithme. En vertu de la règle de l'équivalent,

$\ln P_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}(\ln(1-q^{2^k})-\ln(1+q^{2^k}))$ est somme partielle d'une série convergente.

2) Calcul. Notons P le produit infini.

$$\ln P = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}(\ln(1-q^{2^k})-\ln(1+q^{2^k})) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\ln(1-q^{2^k}) - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\ln(1+q^{2^k})$$

$$= \ln(1-q) + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\ln(1-q^{2^k}) - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\ln(1+q^{2^k})$$

$$= \ln(1-q) + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}}\ln(1-q^{2^{k+1}}) - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\ln(1+q^{2^k})$$

$$= \ln(1-q) + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}}\ln(1-q^{2^k}) + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}}\ln(1+q^{2^k}) - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\ln(1+q^{2^k})$$

$$= \ln(1-q) + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}}\ln(1-q^{2^k}) - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}}\ln(1+q^{2^k})$$

$$= \ln(1-q) + \frac{1}{2}\ln P \ , \quad \text{donc } \ln P = 2\ln(1-q) .$$

3) Voici une variante directe. Reposant sur l'identité $\frac{1-a}{1+a} = \frac{(1-a)^2}{1-a^2}$ appliquée à chaque terme de P_n, elle crée un télescopage naturel.

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}\left(\frac{1-q^{2^k}}{1+q^{2^k}}\right)^{1/2^k} = \prod_{k=0}^{n}\frac{(1-q^{2^k})^{1/2^{k-1}}}{(1-q^{2^{k+1}})^{1/2^k}} = \frac{(1-q)^2}{(1-q^{2^{n+1}})^{1/2^n}} \to (1-q)^2 .$$

Remarque : Nombreuses variantes possibles.

Exercice 116 : Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite sommable.

On suppose que, pour tout $k \geq 1$, $\sum_{p=1}^{+\infty} a_{kp} = 0$. Montrer que $(\forall n)\ a_n = 0$.

Solution :

[Oral X 2008, RMS n° 263, Polya-Szegö, Problems and theorems in analysis, t. 1, ex. 129, chap 1]

1) Généralités. Notons L^1 l'espace vectoriel des suites sommables.

Il s'agit de montrer que le « système linéaire infini »

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \dots = 0 \\ a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \dots = 0 \\ a_3 + a_6 + \\ a_4 + a_8 + \dots = 0 \\ \end{cases}$$

a pour unique solution dans L^1 la suite nulle.

Formellement il s'agit d'un système de Cramer, mais attention, on est en dimension infinie et les choses ne sont pas si simples !

A toute suite sommable $a = (a_n) \in L^1$ associons la suite $r = (r_n)$ définie par $r_n = \sum_{h=1}^{+\infty} a_{hn}$.

Cette suite est bien définie et elle tend vers 0, car $(\forall n)\ |r_n| \leq \sum_{k=n}^{+\infty}|a_k|$. (*)

Il s'agit de montrer que l'application linéaire $R : a = (a_n) \in L^1 \to r = (r_n) \in C^0$ est injective, où C^0 est l'espace des suites tendant vers 0.

Munissons L^1 de la norme $\| a \|_1 = \sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$, et C^0 de la norme $\| b \|_\infty = \sup_n |b_n|$.

Ce sont tous deux espaces de Banach, et il découle de (*) que $\| R(a) \|_\infty \leq \| a \|_1$, avec égalité pour les séries à termes positifs convergentes. Ainsi, R est continue de norme triple égale à 1.

2) Solution.

Notons qu'il suffit de prouver que $a_1 = 0$. Appliquant alors le résultat à la suite (a_{kn}), on aura $a_k = 0$.

$r_1 = 0$ implique $a_1 = -(a_2 + a_3 + \dots)$

$r_1 - r_2 = 0$ implique $a_1 = -(a_3 + a_5 + a_7 + \dots)$

$r_1 - r_2 - r_3 + r_6 = 0$ implique $a_1 = -(a_5 + a_7 + a_{11} + \dots)$

Introduisons la fonction de Mobius $\mu : \mathbf{N}^* \to \{ -1, 0, +1 \}$ définie par :

$$\begin{cases} \mu(1) = 1, & \\ \mu(n) = (-1)^r & \text{si } n = p_1 \times \dots \times p_r \text{ est produit de r nombres premiers distincts} \\ \mu(n) = 0 & \text{si } n \text{ est divisible par un carré.} \end{cases}$$

On sait que $\sum_{d|n} \mu(d) = 1$ si $n = 1$, 0 sinon.

Fixons n et calculons $\sum_{d|n} \mu(d)\, r(d) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{d|k} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sum_{d|pgcd((n,k)} \mu(d) = \sum_{pgcd(n,k)=1} a_k$.

Il s'agit d'une somme finie de séries convergentes, non d'une série double !

Du coup $a_1 = -\sum_{pgcd(n,k)=1,k>1} a_k$, et, par suite $|a_1| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k|$.

Il reste à faire tendre n vers $+\infty$.

Remarques : 1) Polya-Szegö attribue ce résultat à Alfred Haar, et montre la nécessité de l'hypothèse de sommabilité, en invoquant la fonction de Liouville.

2) On peut multiplier entre elles les matrices triangulaires supérieures infinies.
Introduisons la « matrice infinie » du système A = (ε(i, j)), où ε(i, j) = 1 si i divise j, ε(i, j) = 0 sinon.
Le système $R(a) = 0$ s'écrit matriciellement $A.a = 0$.
Considérons la « matrice infinie » B définie par

$$B = (m(i, j)) , \text{ où } m(i, j) = \mu(\frac{j}{i}) \text{ si i divise j , } m(i, j) = 0 \text{ sinon.}$$

Je dis que A.B = B.A = I, où I désigne la matrice unité infinie. En effet si C = A.B,

$c_{ik} = \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon(i,j).m(j,k) = 0$ si i ne divise pas k et

$c_{ik} = \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon(i,j).m(j,k) = \sum_{j;idvisejetjdivisek} \varepsilon(i,j).m(j,k) = \sum_{h|(j/i)} \mu(h) = 1$ si i = j , 0 sinon.

De même B.A = I. On dispose donc d'une inverse formelle de A.

A toute suite sommable $x = (x_n) \in L^1$ associons la suite $y = (y_n)$ définie par

$$y_n = \sum_{j=1}^{+\infty} m(n,j).x_j = \sum_{h=1}^{+\infty} \mu(h).x_{hn} .$$

Cette suite est bien définie, car la série $\sum_{h=1}^{+\infty} \mu(h).x_{hn}$ est absolument convergente, et elle tend vers 0, car $(\forall n)$ $|y_n| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} |x_k|$. Soit S l'application linéaire : $x = (x_n) \in L^1 \to y = (y_n) \in C^0$ ainsi définie.

On a envie de dire que S est l'inverse de R. Hélas, ce ne sont pas des endomorphismes

Si $\sum_{n=1}^{+\infty} n|a_n| < +\infty$. Je dis que la suite $r = (r_n)$ est sommable, et que, pour tout n : $a_n = \sum_{h=1}^{+\infty} \mu(h).r_{hn}$.

En effet, $\sum_{h=1}^{+\infty} \mu(h).r_{hn} = \sum_{h=1}^{+\infty} \mu(h).\sum_{k=1}^{+\infty} a_{hkn} = \sum_{h=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(h).a_{hkn}$. Or la famille $(\mu(h).a_{hkn})$ est sommable.

Autrement dit, si E désigne le sous-espace de L^1 formé des suites $a = (a_n)$ telles que $\sum_{n=1}^{+\infty} n|a_n| < +\infty$,

alors $R(E) \subset L^1$ et $S \circ R\Big|_E^{L^1}$ est l'identité de E.

Il en résulte que, si $\sum_{n=1}^{+\infty} n|a_n| < +\infty$ et si la suite $r = (r_n)$ est nulle, alors la suite $a = (a_n)$ est nulle.

Mais c'est un résultat plus faible que celui annoncé, car on manie des séries doubles.

Exercice 117 : Soit (λ_n) une suite réelle ou complexe.
Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

i) La suite (λ_n) est « à variation bornée » en ce sens que $\sum_{i=1}^{+\infty} |\lambda_i - \lambda_{i+1}| < +\infty$;

ii) Pour toute série convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ réelle ou complexe, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n u_n$ converge.

Solution : Le sens i) $\Rightarrow$ ii) repose sur la transformation d'Abel. La réciproque va se montrer par contraposition, mais elle peut aussi se déduire du puissant théorème de Banach-Steinhaus.

i) $\Rightarrow$ ii) Effectuons une transformation d'Abel via les restes $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n &= \lambda_1 (R_0 - R_1) + \lambda_2 (R_1 - R_2) + \dots + \lambda_n (R_{n-1} - R_n) \\ &= \lambda_1 R_0 + R_1 (\lambda_2 - \lambda_1) + R_2 (\lambda_3 - \lambda_2) + \dots + R_{n-1} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) - \lambda_n R_n . \end{aligned}$$

Or $\lambda_n R_n \to 0$ car $R_n \to 0$ et (λ_n) est bornée (et même convergente).

Et $\sum_{i=1}^{+\infty} R_i (\lambda_{i+1} - \lambda_i)$ est absolument convergente. Donc la suite $n \to \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$ est convergente.

Donc $\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i u_i$ convergente, et $\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i u_i = \lambda_1 \sum_{i=1}^{+\infty} u_i + \sum_{i=1}^{+\infty} R_i (\lambda_{i+1} - \lambda_i)$.

ii) $\Rightarrow$ i) par contraposition.

Supposons $\sum_{i=1}^{+\infty} |\lambda_i - \lambda_{i+1}| = +\infty$, et construisons une série convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n u_n$ diverge.

Notons $\lambda_j - \lambda_{j+1} = r_j e^{i\theta_j}$, $r_j = |\lambda_j - \lambda_{j+1}|$, $0 \le \theta_j < 2\pi$ ($\theta_j = 0$ si $\lambda_j = \lambda_{j+1}$).

$$v_j = \frac{\exp(-i\theta_j)}{1 + r_1 + \dots + r_{j-1}} \quad , \quad u_1 = 0 \quad , \quad u_j = v_j - v_{j-1} .$$

• D'une part, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge, car $\sum_{j=1}^{n} u_j = v_n \to 0$.

• D'autre part, $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j = \lambda_n v_n - \lambda_2 v_1 + S_n$, où $S_n = \sum_{k=2}^{n-1} v_k (\lambda_k - \lambda_{k+1})$.

Or $S_n = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{r_k}{1 + r_1 + \dots + r_{k-1}} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{R_k - R_{k-1}}{R_{k-1}} \ge \int_{R_1}^{R_{n-1}} \frac{dx}{x} = \ln R_{n-1} - \ln R_1$.

Donc (S_n) tend vers l'infini. De plus, la suite $(\lambda_n v_n)$ est bornée, car $|\lambda_n v_n| \le \frac{|\lambda_1| + r_1 + \dots + r_{n-1}}{1 + r_1 + \dots + r_{n-1}} \to 1$.

<u>Conclusion</u> : La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n u_n$ diverge. Cqfd.

Exercice 118 : Soit (λ_n) une suite réelle ou complexe.
Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
i) La suite (λ_n) est « à variation bornée » et $\lim \lambda_n = 0$;
ii) Pour toute série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ dont les sommes partielles sont bornées, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n u_n$ converge.

Solution : Mêmes commentaires que dans l'exercice précédent.

i) $\Rightarrow$ ii) Effectuons une transformation d'Abel via les sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = \lambda_1 S_1 + \lambda_2 (S_2 - S_1) + \dots + \lambda_n (S_n - S_{n-1})$$
$$= S_1 (\lambda_1 - \lambda_2) + S_2 (\lambda_2 - \lambda_3) + \dots + S_{n-1} (\lambda_{n-1} - \lambda_n) + \lambda_n S_n .$$

Or $\lambda_n S_n \to 0$ et $\sum_{i=1}^{+\infty} S_i (\lambda_i - \lambda_{i+1})$ est absolument convergente, car (S_n) est bornée et (λ_n) est à variation bornée et tend vers 0. Finalement la suite $n \to \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$ est convergente.

Donc $\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i u_i$ convergente, et $\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{+\infty} S_i (\lambda_i - \lambda_{i+1})$.

ii) $\Rightarrow$ i) La partie ii) $\Rightarrow$ i) de l'ex. précédent reste valable, et montre que la suite (λ_n) est à variation bornée. Supposons que (λ_n) ne tende pas vers 0.
Alors, il existe un réel $\alpha > 0$ et une suite extraite $(\lambda_{n(k)})$ tels que $(\forall k)\ |\lambda_{n(k)}| > \alpha$.
Définissons la suite (S_n) par : $S_{n(k)} = \dfrac{1}{\lambda_{n(k)}}$, $S_n = 0$ si $n \notin \{ n(k) ; k \}$.

On a $(\forall n)\ 0 \le | S_n | < \dfrac{1}{\alpha}$ et $(\lambda_n S_n)$ diverge, car $\lambda_n . S_n = 1$ si $n = n(k)$, 0 sinon.

Soit (u_n) la suite telle que $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Alors $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (\lambda_k - \lambda_{k+1}) + \lambda_n S_n$ diverge, comme somme d'une suite convergente (somme partielle d'une série absolument convergente), et d'une suite divergente.

Exercice 119 : Deux trains distants de 200 km se dirigent l'un vers l'autre à la vitesse de 100 km/h. A l'instant 0 une mouche part d'un train et va vers l'autre à la vitesse de 200 km/h. Lorsqu'elle l'atteint, elle rebrousse chemin et revient vers le premier train à la même vitesse, et ainsi de suite. Quelle distance la mouche aura-t-elle parcourue au moment où les deux trains se croisent ?

Solution : Le lecteur est prié de faire un dessin.
Notons D la distance initiale des deux trains (ici D = 200 km, mais peu importe).
A l'instant 0, la vaillante mouche part du premier train et rencontre le deuxième à la distance $\frac{2}{3} D$.

A ce même instant le premier train a parcouru la distance $\dfrac{D}{3}$.

Lorsqu'elle effectue un virage sur l'aile, la mouche repart en direction du premier train situé à une distance de $\dfrac{D}{3}$; elle l'atteint après avoir parcouru la distance $\dfrac{2}{3} \dfrac{D}{3}$.

Lorsqu'elle effectue un virage sur l'aile, la mouche repart en direction du second train situé à une distance de $\dfrac{D}{9}$; elle l'atteint après avoir parcouru la distance $\dfrac{2}{3} \dfrac{D}{9}$, etc.

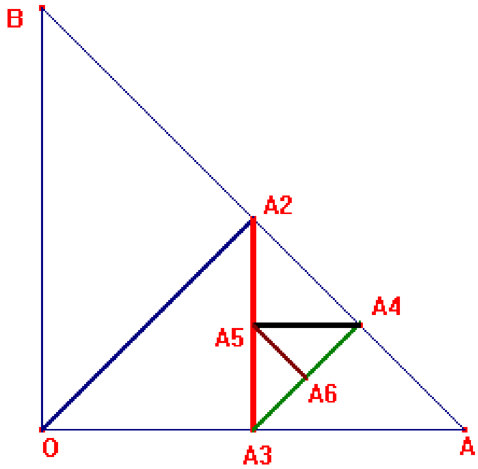
Au total la mouche parcourra la distance $\dfrac{2}{3} D + \dfrac{2}{3} \dfrac{D}{3} + \dfrac{2}{3} \dfrac{D}{9} + \dots = \dfrac{2}{3} \dfrac{D}{1-1/3} = D$.

C'est logique, parce que, si l'on échange les deux trains au moment d'éviter les virages sur l'aile, tout ses passe comme si le train à atteindre ne bouge pas ; la mouche doit toujours parcourir le tiers de la distance restante.

Exercice 120 : Soient $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ deux vecteurs orthogonaux et de même norme dans le plan. On abaisse de O la perpendiculaire OA_2 sur BA, de A_2 la perpendiculaire A_2A_3 sur OA_1 = OA de A_3 la perpendiculaire A_3A_4 sur A_1A_2, etc. Trouver la limite de la suite (A_n).

Solution : Le plan P est supposé affine euclidien orienté.

Posons A_0 = O, A_1 = A. Je dis que le triangle $A_{n-1}A_nA_{n+1}$ est rectangle isocèle de sommet A_{n+1} et de sens direct. Cela se montre par récurrence sur n.



Identifions P au corps **C** des complexes. Soit (z_n) l'affixe de A_n.

Soient i , 0 et 1 les affixes resp. de B, O et A.

On a, pour tout n : $z_n - z_{n-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\exp(-\frac{i\pi}{4}).(z_{n-2} - z_{n-1}) = \frac{-1+i}{2}.(z_{n-1} - z_{n-2})$.

Donc $z_n - z_{n-1} = \alpha^{n-1}.(z_1 - z_0) = \alpha^{n-1}$, où $\alpha = \frac{-1+i}{2}$.

La série de terme général $z_n - z_{n-1}$ est géométrique convergente, de somme $\frac{1}{1-\alpha} = \frac{3+i}{5}$.

Donc la suite (z_n) tend vers $\frac{3+i}{5}$.

Remarque : bien d'autres solutions sont possibles : coordonnées barycentriques, etc.

Exercice 121 : On pose des dominos l'un sur l'autre en créant à chaque nouveau domino un décalage vers la droite, de façon que l'édifice soit en équilibre. Montrer que l'on peut obtenir un décalage arbitrairement grand entre le premier et le dernier domino.

Solution : Supposons chaque domino de longueur 2 et de hauteur h.

Notons $D_0, D_1, \dots, D_n$ les dominos en commençant par celui du bas, $G_0, G_1, \dots, G_n$ leurs centres de gravité, et $a_1, \dots, a_n$ les décalages. Choisissons un repère d'origine O = G_0.

$$G_0(0, 0)\ ,\ G_1(a_1, h)\ ,\ G_2(a_1 + a_2, 2h)\ ,\ \dots\ ,\ G_n(a_1 + a_2 + \dots + a_n, nh)\ .$$

Le centre de gravité de l'édifice est alors $G\left(X = \frac{na_1+(n-1)a_2+\dots+a_n}{n+1}, Y = \frac{nh}{2}\right)$.

Il est en équilibre ssi X < 1. Il s'agit donc de montrer que :

$\forall A > 0\ \ \exists n \geq 1\ \ \exists\, a_1, a_2, \dots, a_n > 0\ \ a_1 + a_2 + \dots + a_n = A$ et $na_1 + (n-1)a_2 + \dots + a_n < n + 1$.

Considérons la suite harmonique $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

Comme $H_n \uparrow +\infty$, $\exists n \geq 1 \quad H_n - 1 \leq H_{n-1} < A \leq H_n$.

n étant ainsi choisi, posons $a_1 = \frac{1}{n}$, $a_2 = \frac{1}{n-1}$, …, $a_{n-1} = \frac{1}{2}$, $a_n = A - (\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{2})$.

Les a_i sont bien > 0, de somme A, et

et $n.a_1 + (n-1).a_2 + \dots + a_n = n - 1 + A - (H_n - 1) = n + A - H_n < n + 1$, car $A < H_n + 1$.

NB : on ne peut espérer que la pile soit infinie, car, par Cesàro, si $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \uparrow +\infty$,

$\frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n+1}$ aussi.