CPGE Niveau : MP2 Année universitaire 2020 – 2021

Partie Transferts thermiques

EPO-MP 2 Année 2020- 2021

Devoir de Transferts thermiques

(durée : 1h30 ; aucun document autorisé)

Exercice 1

On peut trouver sur le marché des casseroles en aluminium et d'autres en cuivre.
Pour déterminer lequel de ces deux matériaux est celui qui transfère l'énergie thermique le plus rapidement, Marc utilise deux plaques de mêmes dimensions, l'une en cuivre et l'autre en aluminium.
Il maintient un écart de température constant et égal à 5.0 °C entre les deux faces planes et parallèles de la plaque de cuivre. Le transfert thermique, pendant une durée de 15 min, entre les deux faces est $Q_{Cu} = 4,4 \times 10^{6}$ J. Ensuite, il procède de même avec la plaque d'aluminium dont la résistance thermique est $R_{th\,Al} = 1,7 \times 10^{-2}$ K.W^{-1}.

1. Quel est le flux thermique qui traverse :
   a. la plaque de cuivre ?
   b. la plaque d'aluminium ?
2. Pour des dimensions identiques, quel est le matériau qui transfère le plus rapidement l'énergie thermique ?

Exercice 2

La fenêtre d'une chambre est constituée d'un simple vitrage.
La température de la chambre est $T_i = 19$ °C et la température extérieure $T_e = -1$ °C. Ces températures sont considérées constantes.
1. Schématiser la situation en précisant le sens du transfert thermique à travers la vitre.
2. Calculer la valeur du flux thermique à travers la vitre.
3. Quelle est l'énergie thermique transférée en 1,25 h?

La résistance thermique de cette vitre est : $R_{th} = 5,0 \times 10^{-3}$ K.W^{1}.

Exercice 3

La paroi d'un four est constituée de trois matériaux isolants en série :

- Une couche intérieure de 18 cm d'épaisseur est en briques réfractaires ($\lambda = 1,175$ W/m.°C);
- Une couche de *briques isolantes* de 15 cm d'épaisseur ($\lambda = 0,259$ W/m.°C);
- Et une épaisseur suffisante de briques ($\lambda = 0,693$ W/m.°C).

1. Quelle épaisseur de briques doit-on utiliser pour réduire la perte de chaleur à 721 W/m^2 lorsque les surfaces extérieures et intérieures sont res-pectivement à 38°C et 820°C ?
2. Lors de la construction on maintient un espace libre de 0,32 cm, ($\lambda = 0,0317$ W/m.°C) entre les *briques isolantes* et les briques. Quelle épais-seur de briques est alors nécessaire ?
3. La température ambiante étant de 25°C, calculer le coefficient de trans-fert convectif h_C à l'extérieur de la paroi.

SUJET DE PHYSIQUE

(Durée : 2 heures 30 minutes)

Partie mécanique quantique *(10 points)*

Questions de cours (04 points)

I. Chaque question comporte une réponse juste. Il vous est demandé de choisir la réponse juste de chaque question. Pour certaines questions, il sera nécessaire de faire un calcul numérique avant de trouver la bonne réponse.

1) Dans l'effet Compton, le photon incident cède une partie de son énergie à l'électron si :
   a) l'énergie du photon incident est inférieure à l'énergie du photon diffusé ;
   b) la fréquence du photon incident est inférieure à la fréquence du photon diffusé ;
   c) la longueur d'onde du photon incident est inférieure à la longueur d'onde du photon diffusé ;
   d) aucune réponse ne convient.
2) Quelle est la condition entre les fréquences ν et ν_s de la lumière monochromatique et de la photocathode respectivement pour qu'il ait effet photoélectrique ?
   a) $\nu > \nu_s$; b) $\nu < \nu_s$; c) ν différent de ν_s ; d) aucune réponse ne convient.
3) Quelle est la condition entre les longueurs d'onde λ et λ_s de la lumière monochromatique et de la photocathode respectivement pour qu'il ait effet photoélectrique ?
   a) $\lambda > \lambda_s$; b) $\lambda < \lambda_s$; c) λ différent de λ_s ; d) aucune réponse ne convient.
4) Lors de la diffusion Compton d'un photon par un électron au repos de masse m0, la relation entre la longueur initiale λ_i du photon, sa longueur d'onde finale λ_f et l'angle de diffusion θ est :
   a) $\lambda_f = \lambda_i + \lambda_c(1-\cos\theta)$ avec $\lambda_c = hc/m_0$; b) $\lambda_f = \lambda_i + \lambda_c(1-\cos\theta)$ avec $\lambda_c = \hbar/(m_0c)$;
   c) $\lambda_f = \lambda_i \lambda_c + (1-\cos\theta)$ avec $\lambda_c = h/(m_0c)$; d) aucune réponse ne convient.
5) De la lumière de longueur d'onde $\lambda = 2000$ °A tombe sur une surface d'aluminium. L'énergie des photons incidents est :
   a) $w = 1\,eV$; b) $w = 0\,eV$; c) $w = 6{,}1985\,eV$; d) aucune réponse ne convient.
6) De la lumière de longueur d'onde $\lambda = 2000$ °A tombe sur une surface d'aluminium. Sachant que le travail de sortie de l'aluminium est W = 4,2 eV, la vitesse (Vmax) des électrons les plus rapides est :
   a) $V_{max} = 8{,}39105$ m/s ; b) $V_{max} = 8{,}39$ m/s ; c) V_{max} est nulle ; d) aucune réponse.

II. Rappeler les hypothèses de Borh utilisées pour expliquer le spectre de l'atome d'hydrogène.

Exercice : (06 points)

On considère une particule de masse m et d'énergie E en mouvement le long de l'axe XX' d'une barrière de potentiel $V(x)$ défini par :

- $V(x) = V_0 \ pour\ |x| \leq l$
- $V(x) = 0 \ pour\ |x| \succ l$

1) Représenter le potentiel $V(x)$.
2) Ecrire l'équation de Schrödinger qui donne l'évolution de la fonction d'onde $\varphi(x)$ de la particule.

On considère le cas $E \prec V_0$

3) Résoudre l'équation de Schrödinger dans les différentes régions du potentiel.
4) Ecrire les conditions de raccordement des fonctions en imposant leurs continuités et celles de leurs dérivées premières aux points de discontinuité dans le cas d'un franchissement.
5) Montrer que le coefficient de transmission s'écrit :

$$T = \frac{4(E-V_0)}{4E(V_0-E) + V_0 S\hbar^2 \sqrt{2m(V_0-E)}.\frac{2l}{\hbar}}$$

Que peut-on conclure (faire une comparaison avec une particule classique soumise à cette barrière de potentiel) ?

6) De quel phénomène s'agit-il ?

On considère le cas $E \succ V_0$.

7) Déduire sans faire de calcul à partir de la question 4, le coefficient de transmission de la particule.
8) En déduire les valeurs de l qui correspondent à la résonance ainsi que l'énergie correspondante.

Ecole Polytechnique de Ouagadougou (EPO)

CPGE MP2

Année Académique 2020-2021

Examen d'Analyse 4, Durée: 03 heures

L'énoncé comporte 2 pages, documents et calculatrices interdits

Exercice 1 (6 pts)

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^p y^q}{x^2 - xy + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$

où p et q sont des entiers naturels non nuls.

1. Démontrer que, pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| \leq x^2 - xy + y^2$.
2. Pour quelles valeurs de p et q cette fonction est-elle continue?
3. Montrer que si $p + q = 2$, alors f n'est pas différentiable.
4. On suppose que $p + q = 3$ et que f est différentiable en $(0,0)$.
   (a) Justifier qu'alors il existe deux constantes a et b telles que $f(x,y) = ax + by + o(||(x,y)||)$.
   (b) En étudiant les applications partielles $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$, Justifier que $a = b = 0$.
   (c) Conclure, à l'aide de $x \mapsto f(x,x)$, que f n'est pas différentiable en $(0,0)$

Exercice 2 (4 pts)
Soit l'équation aux dérivées partielles :

$$(E)\ \ x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^2.$$

1. Résoudre (E) dans $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) | x \leq 0\}$.
2. Résoudre (E) dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 (5 pts)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On s'intéresse au système différentiel :

$$(S): \quad X' = AX.$$

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re(\lambda) < 0$ et $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente.
   (a) Montrer que $\exp\big(t(\lambda I_p + N)\big) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$.
   (b) Montrer que si chaque valeur propre de A est de partie rélle strictement négative, alors toute solution du système S tend vers 0 en $+\infty$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les solutions du système S soient bornées sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (5 pts)
Soient $\mathcal{D} = \Big\{(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 / 1 \leq x+y \leq 3, x-3y \geq 0, x-5y \leq 0\Big\}$ et ω un nombre réel. On pose $F: \omega \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_{1/5}^{1/3} \frac{\sin(\omega t)}{t+1} dt$ et $I = \displaystyle\int_{1/5}^{1/3} (1-t)) \sin(\omega t) dt$

1. Exprimer $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{x+y} \sin\left(\omega\left(\frac{y}{x}\right)\right) \frac{dxdy}{x}$ en fonction de F.
2. La fonction F est -elle de classe C^2? Justifier. Exprimer $F''(\omega)$ en fonction de F et I.
3. Former l'équation différentielle linéaire du second ordre dont F est solution en calculant explicitement I.
4. Exprimer en fonction de F et des paramètres nécessaires la solution générale générale de l'équation différentielle obtenue à la question 3.

École polytechnique de Ouagadougou
Classes préparatoires aux grandes écoles

MP2E, MP2F - Semestre 4

Année académique 2020-2021

Devoir du semestre 4
Épreuve de français
Durée : 4 heures

Sujet (20 points)

Texte : La démocratie au banc des accusés

Dans *Les Cavaliers*, le dramaturge peint un système menacé par les agissements d'un seul homme (le Paphlagonien, alias Cléon), tandis que dans *L'Assemblée des femmes*, il représente le système fragilisé dans son ensemble, au point que la démocratie devient une gynécocratie – ce qui, aux yeux d'Aristophane, n'est pas le signe d'un progrès. Dans les deux pièces, il dénonce la toute-puissance de certains chefs qui, au nom du peuple, s'arrogent des avantages personnels et tirent profit de leur pouvoir. Stratèges (chefs militaires), bouleutes (responsables de la préparation des lois), magistrats sont certes élus ou tirés au sort, mais cela ne garantit en rien leur efficience politique. Leur action peut même avoir des effets pernicieux sur la vie de la cité. Tout l'objet des *Cavaliers* est de montrer la faiblesse de la démocratie quand l'un de ses dirigeants agit pour le compte de ses ambitions personnelles, se laisse corrompre et devient tyrannique. Dans cette comédie, ce n'est pas la démocratie en tant que système qui est visée, mais les perversions de son fonctionnement. Cléon, sous les traits du Paphlagonien, incarne les défaillances du système démocratique en temps de crise. À travers lui, Aristophane pointe l'admiration excessive que les citoyens vouent aux beaux parleurs, aux meilleurs orateurs. Cet argument est également présent dans *L'Assemblée des femmes*, puisque c'est grâce à de belles paroles (imitée de la façon masculine) que les femmes ont imposé leurs vues. Dans un régime démocratique fondé sur l'art de bien s'exprimer en public, le pouvoir revient aux plus habiles rhéteurs, qui ne veulent pas toujours le bien commun, en particulier la paix. La déliquescence où est parvenue la démocratie motive l'invention d'une utopie, grâce à laquelle Aristophane renverse les codes. Dans les deux pièces, la démocratie est en péril, parce que les gouvernants sont des sots, des fats ou des hommes corrompus.

P. Crignon *et al. (2020)*

Consigne

1. Résumez ce texte en 70 à 80 mots. Vous indiquerez à la fin de votre résumé le nombre exact de mots employés. (10 points)
2. Selon le texte, « … ce n'est pas la démocratie en tant que système qui est visée, mais les perversions de son fonctionnement ». Expliquez. Illustrez vos propos à l'aide d'exemples tirés des œuvres du programme. (10 points)

Ecole Polytechnique de Ouagadougou **2020/2021**

Classes Préparatoire des Grandes Ecoles

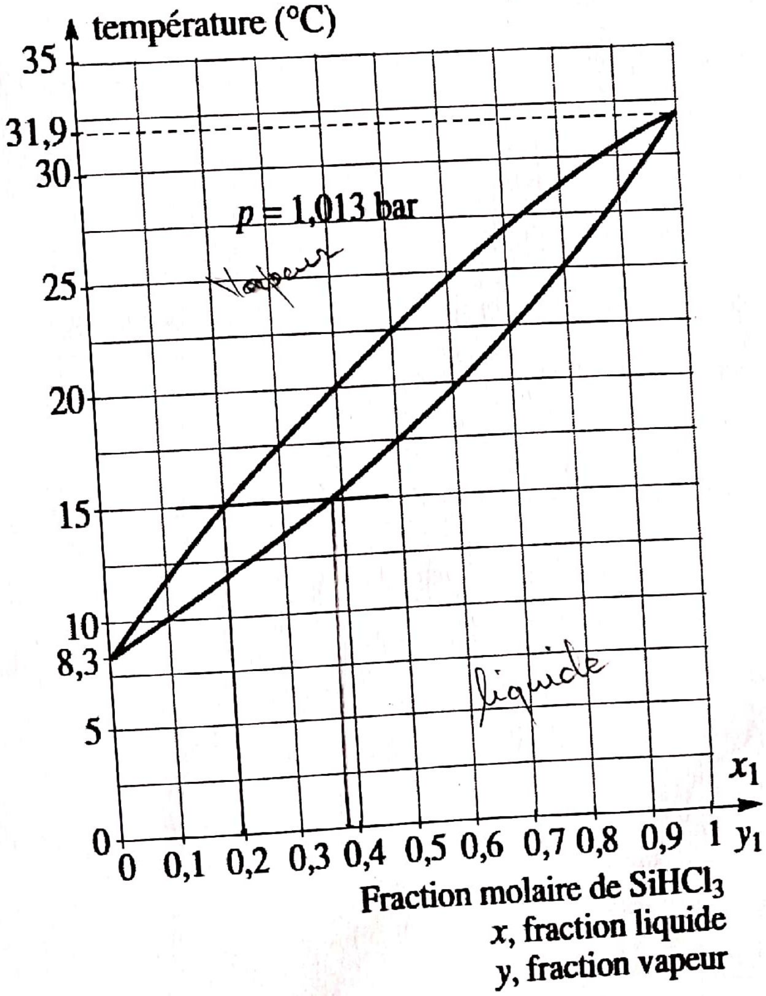
MP 2E & MP 2F

Devoir d'Equilibre Physiques

Durée : 2 heures

Exercice 1 : (10 pts)

Le silicium technique, chauffé à 300 °C, traité par du chlorure d'hydrogène gazeux HCl. Des chlorosilanes se forment, notamment le trichlorosilane $SiHCl_3$, présent majoritairement et le dichlorosilane SiH_2Cl_2. Après refroidissement à 15 °C, on obtient un mélange liquide de $SiHCl_3$, SiH_2Cl_2 de composition molaire 80 % en $SiHCl_3$. Une distillation fractionnée permet alors de purifier le trichlorosilane. Le diagramme binaire $SiHCl_3$ (1) – SiH_2Cl_2 (2) est représenté ci-après.



1. Pour un mélange $SiHCl_3 - SiH_2Cl_2$, de composition molaire 80 % en $SiHCl_3$, indiquer les différents états physiques lorsque la température évolue de 15 à 30 °C.
2. L'objectif est de produire du $SiHCl_3$ pur. L'obtient-on au résidu ou au distillat ? À quelle température doit-on maintenir le bouilleur ?
3. La tête de colonne ainsi que le condenseur sont maintenus à 15 °C. Quelle est la composition du distillat ?
4. Déterminer graphiquement le nombre de plateaux de la colonne entre l'alimentation et la tête de colonne puis entre l'alimentation et le pied de colonne.

Exercice 2 : (10 pts)

Soit un corps pur B en équilibre, à T et à p, sous deux phases α et β. Soient respectivement $S_m(\alpha)$, $S_m(\beta)$, $V_m(\alpha)$ et $V_m(\beta)$ les entropies et les volumes molaires de B dans ces deux phases à l'équilibre.

1. Exprimer $d\mu_\alpha$ et $d\mu_\beta$ en fonction des variables p et T.
2. Écrire la condition, portant sur les potentiels chimiques, traduisant l'équilibre entre les deux phases α et β :
   a) à la température T et sous la pression p ;
   b) à la température T + dT et sous la pression p + dp.

   En déduire une expression donnant $\frac{dp}{dT}$ en fonction de $S_m(\alpha)$, $S_m(\beta)$, $V_m(\alpha)$ et $V_m(\beta)$, puis en fonction de $\Delta H_m(\alpha \rightarrow \beta)$ et de $T(\alpha \rightarrow \beta)$; cette relation constitue la troisième relation de Clapeyron.
3. Déterminer la température de solidification de l'eau sous une pression $p_f = 100{,}0$ bar.

   Données supposées indépendantes de p et de T dans cette question :

   $\rho(H_2O(\ell)) = 1{,}000\ g.cm^{-3}$;

   $\rho(H_2O(s)) = 0{,}9168\ g.cm^{-3}$;

   $\Delta_{fus}H°(H_2O) = 6{,}00 .10^3\ J.mol^{-1}$.

4. Pour le sulfure de carbone CS_2, $\theta°_{éb} = 46{,}0$ °C et $\Delta_{vap}H°(CS_2) = 34\ 780 - 25{,}0\ T$ en $J.mol^{-1}$, cette dernière valeur étant supposée indépendante de p. En négligeant le volume molaire du sulfure de carbone liquide devant celui de sa vapeur et en assimilant la vapeur à un gaz parfait, établir l'expression $p_{vap} = f(T_{vap})$; en déduire T_{vap} pour $p_{vap} = 0{,}50$ bar.

EPO

CPGE

Année universitaire 2020-2021

MP

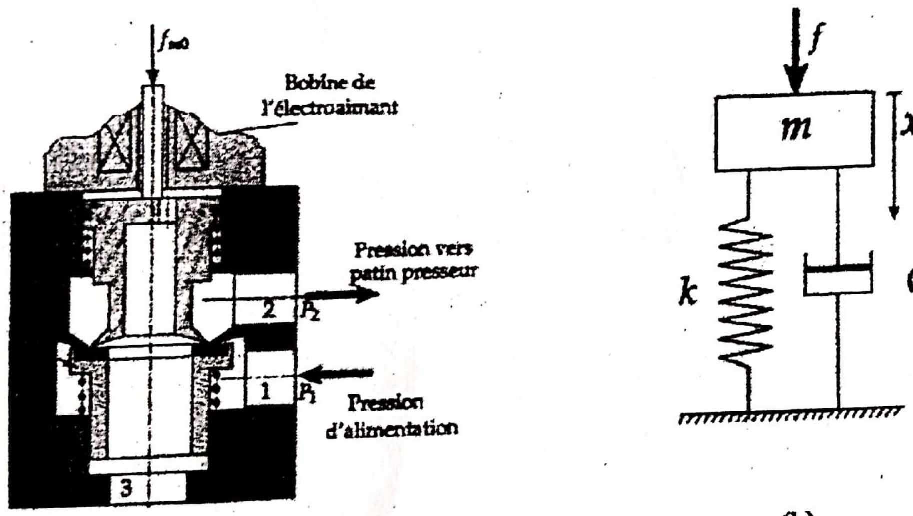
Examen d'Automatique II

Durée : 2h

Documents non autorisés, calculatrice autorisée

Système modulateur de pression

On considère le système modulateur électropneumatique pour réguler la pression des patins. Le schéma du modulateur et le modèle adopté sont illustrés sur la figure 1.



(a) (b)

Fig. 1 – a) Schéma du modulateur ; b) Modèle adopté

Avec c : coefficient de frottement visqueux ; m : masse des éléments mobiles et k : raideur équivalente du système.

Le fonctionnement du modulateur est décrit par les cinq équations suivantes :

Le comportement de l'ensemble mobile est exprimé par :

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=\Delta f(t)-c\frac{dx(t)}{dt}-kx(t) \qquad (1)$$

Le comportement de l'air comprimé situé au niveau de la sortie 2 du modulateur lorsque celle-ci est obturée est exprimé par :

$$p_2(t)=K_3\,x(t) \text{ avec : } K_3=0.4\ bar/cm \qquad (2)$$

L'électroaimant est modélisé par un gain, se traduisant par :

$$f_m(t) = K_2\, i(t) \text{ avec : } K_2 = 10\ bar/A \qquad (3)$$

Un gain K_1 adapte la pression consigne p_c au courant nécessaire au pilotage de l'électroaimant se présentant sous la forme :

$$i(t) = K_1\, p_c(t) \text{ avec : } K_1 = 1\ A/bar \qquad (4)$$

La force f_r développée par le piston 2 de section S en fonction de la pression p_2 est donnée par :

$$f_r(t) = S\, p_2(t) \text{ avec : } S = 1.25\ cm^2 \qquad (5)$$

I. Modélisation et identification du modulateur de pression

1. A partir de l'équation (1), exprimer la fonction de transfert $T(p) = X(p)/\Delta F(p)$ lorsque les conditions initiales sont nulles.

2. Quelle condition doit-on imposer aux paramètres pour que le modulateur se comporte comme un système hyper-amorti (apériodique) ?

3. Ecrire dans le domaine de Laplace les équations du système de (2) à (5).

4. Compléter le schéma fonctionnel ci-dessous :

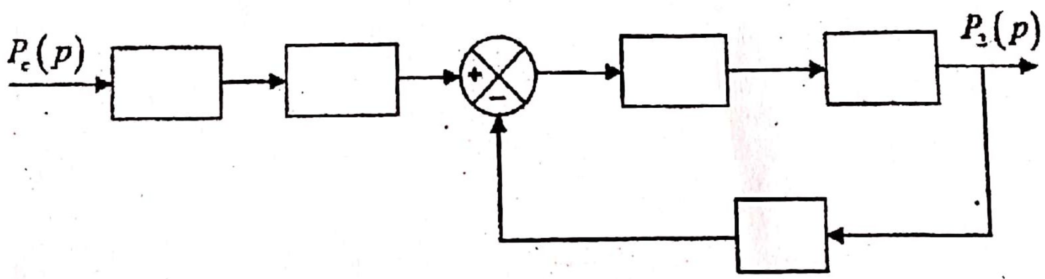


Fig. 2 – Schéma fonctionnel du modulateur

5. Monter que la fonction de transfert globale du modulateur $G(p) = P_2(p)/P_c(p)$ admet pour expression : $G(p) = \dfrac{P_2(p)}{P_c(p)} = \dfrac{A}{\dfrac{p^2}{\omega_0^2} + \dfrac{2\xi}{\omega_0}p + 1}$

6. **En déduire les expressions de A, ξ et ω_0 en fonction de m, k et c ; les autres paramètres (K_1, K_2, K_3 et S) sont à remplacer par leurs valeurs numériques.**

Des essais harmoniques ont été conduits afin d'identifier les éléments de la fonction de transfert $G(p)$ du modulateur. Ils ont donné le diagramme de Bode suivant :

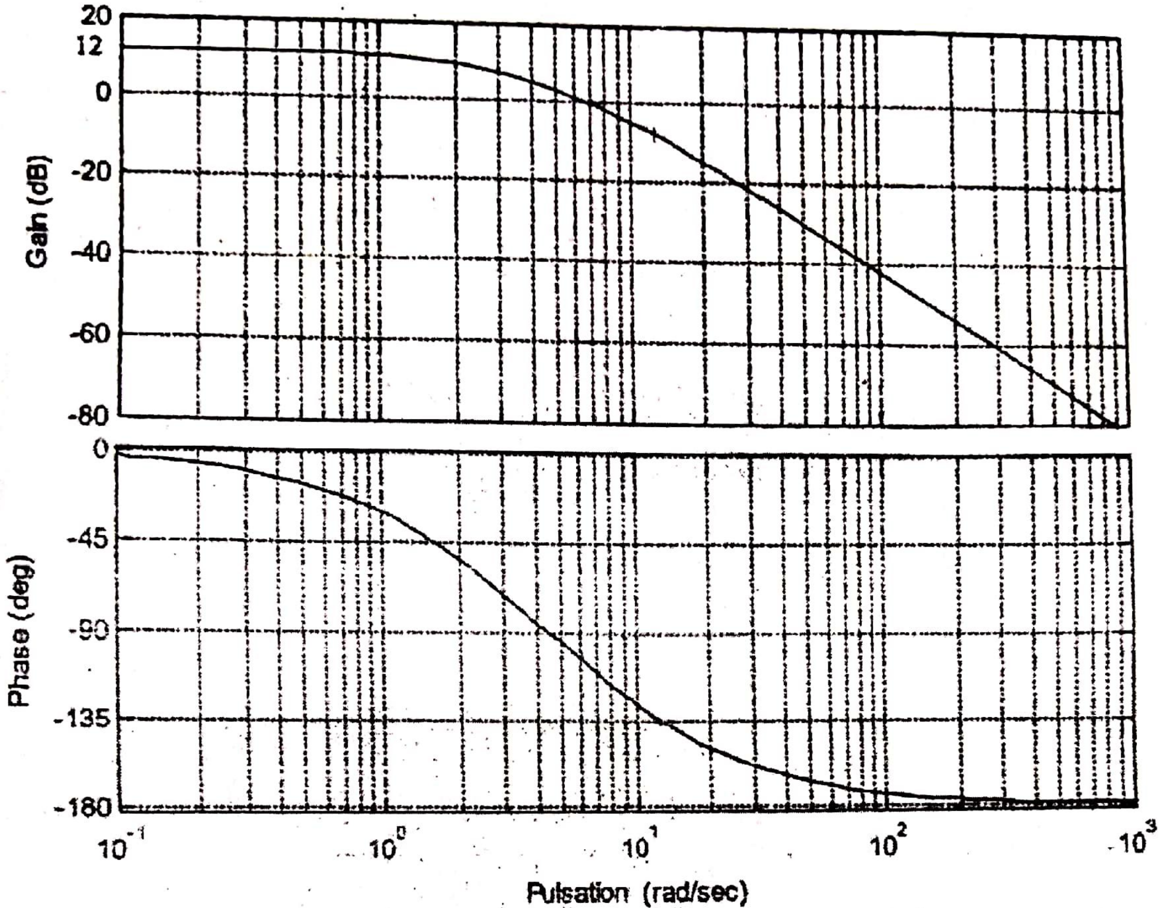


Fig. 3 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert $G(p)$ du modulateur

7. A partir de cette réponse harmonique, identifier A, ω_0 et ξ.

8. En déduire les paramètres caractéristiques du modèle du modulateur c, k et m.

II. Régulation de pression

Dans l'objectif d'assurer une bonne régulation de la pression P_2, le modulateur est inséré dans la chaine d'asservissement suivante :

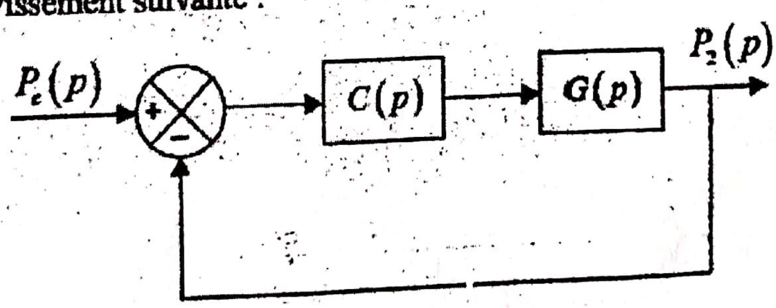


Fig. 4 – Schéma fonctionnel de l'asservissement de pression

Pour la suite, on prend $G(p) = \dfrac{80}{(2+p)(10+p)}$.

Les exigences du cahier des charges sont données dans le tableau suivant.

Exigence	Critères	Niveau
Régulation de la pression	Stabilité	Marge de phase : $M\varphi = 45°$
	Rapidité	Temps de réponse à 5% < 0.7s
	Précision	Ecart statique de position nul.

9. En se référant à la figure 3, pour $C(p) = 1$ déterminer la marge de phase.

10. Pour $C(p) = 1$, déterminer l'erreur statique de position unitaire.

On donne sur la figure 5 la réponse indicielle unitaire du système non corrigé.

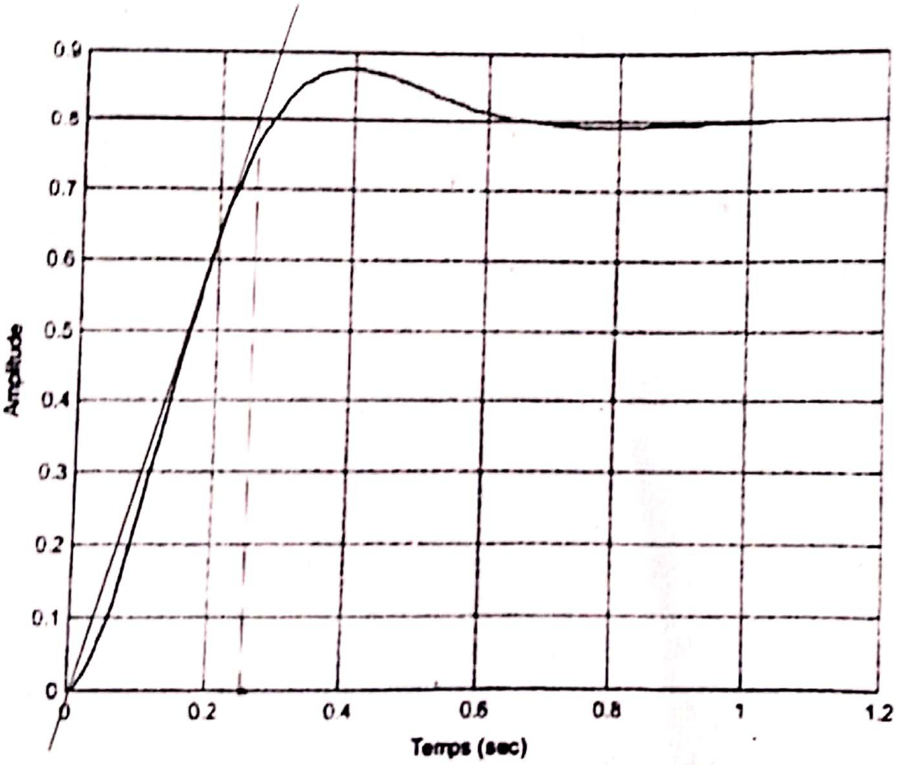


Fig. 5 – Réponse indicielle du système sans correction

11. Déterminer graphiquement le temps de réponse à 5%.

12. Justifier pourquoi la régulation sans correction ne permet pas de satisfaire les critères du cahier des charges.

Afin d'améliorer les performances du système, on envisage de placer un correcteur de type intégral (I) : $C(p)=\frac{K_i}{p}$ avec : $K_i>0$.

13. Déterminer K_i permettant de satisfaire la condition $M\varphi=45°$.

14. Calculer l'erreur statique de position unitaire.

On donne sur la figure 6 la réponse indicielle unitaire du système corrigé pour K_i trouvé précédemment.

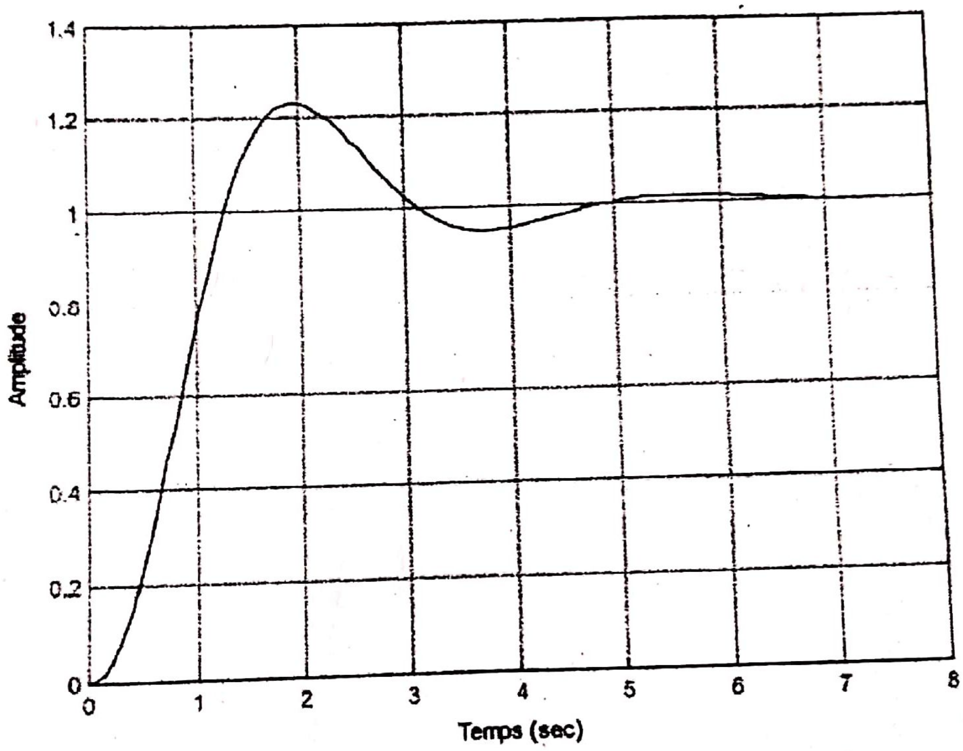


Fig. 6 – Réponse indicielle du système avec correction intégrale

15. Déterminer graphiquement le temps de réponse à 5%.

16. Justifier pourquoi la régulation de type intégrale ne permet pas de satisfaire les critères du cahier des charges.

Afin d'améliorer les performances du système, on envisage de placer un correcteur de type Proportionnel-Intégral (PI) : $C(p)=K_p\frac{1+T_ip}{T_ip}$ avec $T_i>0,\ K_p>1$

17. Déterminer T_i pour compenser le pôle dominant du modulateur.

18. Déterminer K_p pour avoir une marge de phase $M\varphi=45°$.

19. Déterminer l'erreur statique de position unitaire.

On donne sur la figure 7 la réponse indicielle unnitaire du système corrigé pour les paramètres K_p et T_i trouvés précédemment.

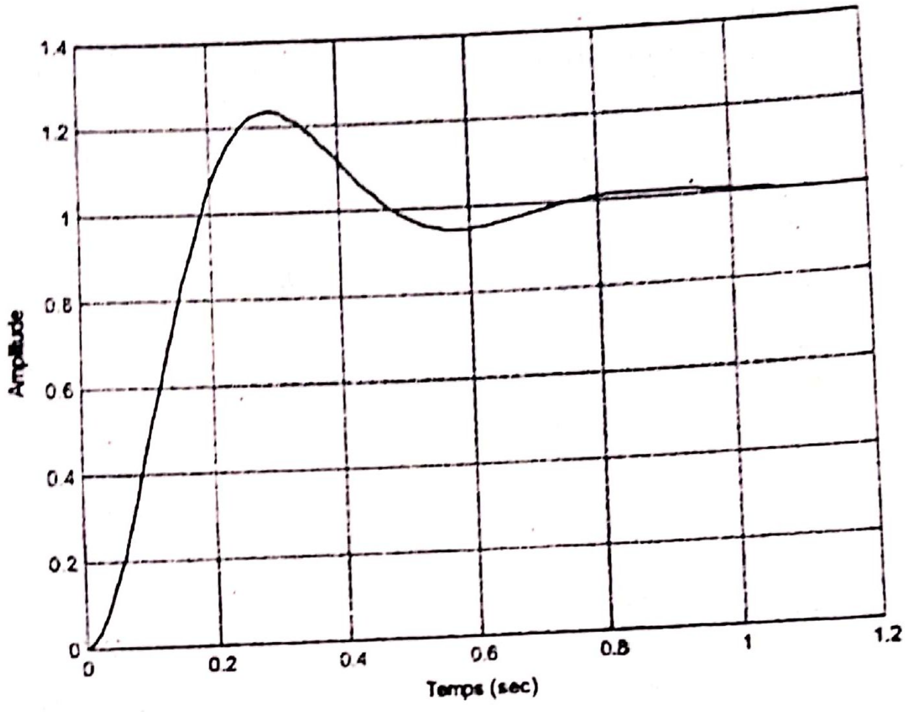


Fig. 7 – Réponse indicielle du système avec correcteur PI

20. Donner le temps de réponse à 5%.

21. Conclure quant à la capacité de ce correcteur à satisfaire l'ensemble des critères du cahier des charges.

TP Programmation Orientée Objet

Documents et appareils (téléphones portables, tablettes, ordinateurs) : autorisés

Calculettes non programmables : autorisées pour les calculs numériques

Durée : 2.5 heures

On souhaiterait développer un programme permettant non seulement de résoudre les équations du second degré mais aussi de déterminer leur minimum (ou maximum) global.

Une équation du 2nd degré s'écrit sous la forme : $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ où a, b et c sont des nombres réels et $x \in C$ $(ensemble\ des\ nombres\ complexes)$.

Rappelons qu'un nombre complexe z s'écrit sous la forme : $z = a + i\ b$, où r est la partie réelle et « Im » la partie imaginaire. De plus, un nombre complexe est réel ssi sa partie imaginaire est nulle et il est imaginaire pur si la partie réelle est nulle.

Soit z' un complexe tel que $z' = a' + ib'$

- $\boldsymbol{z + z' = (a + a') + i(b + b')}$
- $\boldsymbol{z * z' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i}$
- Le module de z est : . $|\boldsymbol{z}| = \sqrt{\boldsymbol{a^2 + b^2}}$
- L'argument de z est : $\mathbf{arg}(z) = \mathbf{arctan}(\frac{b}{a})$

Pour déterminer l'optimum (minimum ou maximal) global de la fonction f, on calcule la dérive puis on cherche la valeur α tel que $f'(\alpha) = 0$

Indication : Le TP est divisé en 3 parties. Les 2 premières parties seront implémentées dans un module nommé « equation.py ». Quant à la 3ème elle correspond au programme principal.

EPO
CPGE

Contrôle en Informatique

MP
Année scolaire : 2020-2021

TP Programmation Orientée Objet

---

1. Gestion des nombres complexes

Ecrire la classe « Complexe » permettant de gérer un nombre complexe. Ses attributs sont :

- **re** : partie réelle (public)
- **im** : partie imaginaire (public)

1.a. Implémenter le constructeur prenant les paramètres permettant d'initialiser les attributs de la classe. Ses paramètres (le constructeur) seront initialisés par défaut à 0

1.b Implémenter les fonctions spéciales suivantes :

- **__str__(self)** : elle retourne sous forme de chaine de caractère « z = re + i Im »
- **__add__**(self, z) : elle retourne un objet complexe correspondant à la somme de la classe courante et l'objet z.
- **__sub__(self, z) :** elle retourne un objet complexe correspondant à la différence entre la classe courante et l'objet z
- **__mul__(self, z) :** elle retourne le produit de la classe courante et l'objet z.

1.c. Implémenter les méthodes suivantes :

- **module(self)** : elle retourne le module du nombre complexe.
- **argument(self) :** elle retourne l'argument du nombre complexe
- **est_imaginaire_pur(self) :** elle retourne True si le nombre est imaginaire pur sinon False
- **est_reel(self) :** elle retourne True si le nombre complexe est un réel

2. Résolution d'équation du 2^nd^ degré

2.a. Ecrire la classe « Equation2D » ayant comme attribut :

- **a** : coefficient de x^2 (public)
- **b** : coefficient de x (public)
- **c** : constante (public)
- **s1** : 1^ère^ solution de l'équation (objet de type complexe) (Initialiser à None)
- **s2** : 2^ème^ solution (objet de type complexe) (Initialiser à None)

Le constructeur doit prendre les paramètres initialisant les attributs de la classe

2.b. Ecrire les fonctions suivantes :

- **__calcul_delta(self)** : (méthode privée) elle retourne le delta de l'équation. On rappelle que $\Delta = b^2 - 4ac$
- **resoudre(self)** : elle résout l'équation comme suit :
  - Si $\Delta >$ 0 alors :
    - ✓ $s1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ (nombre réel)
    - ✓ $s2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ (nombre réel)
  - Si $\Delta == 0$:
    - ✓ $s1 = s2 = \frac{-b}{2a}$ (nombre réel)
  - Si $\Delta < 0$:
    - ✓ $s1 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ (nombre complexe)
    - ✓ $s2 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ (nombre complexe)
- **afficher_solution(self)** : elle affiche les solutions de l'équation
- **find_optimum(self)** : elle recherche et retourne l'optimum de l'équation

3. Programme Principal

Créer un module nommé « main.py ». Donner les racines et les optimums des équations suivantes :

- $x^2 - 2x + 1 = 0$
- $x^2 + x + 1 = 0$

EPO

CPGE

Année universitaire 2020-2021

MP

Devoir d'Automatique II

Durée : 2h

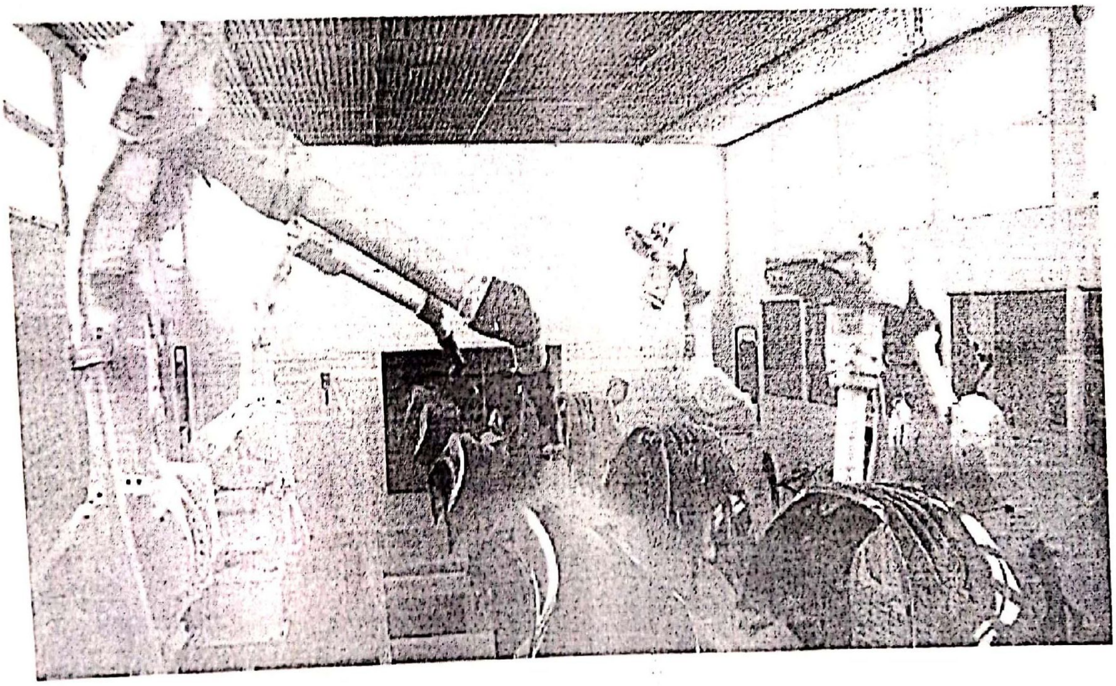
Documents non autorisés, calculatrice autorisée

Question de cours

1) Citer les trois (03) principaux critères de performance d'un système dynamique et indiquer comment chaque critère peut être mesuré.
2) Indiquer dans un tableau les effets attendus pour les correcteurs Proportionnel (P), Intégral (I) et Dérivé (D)

Problème : Robot de peinture industriel

On s'intéresse à l'asservissement en vitesse d'un robot dans le cadre d'une opération de mise en peinture d'un véhicule. Le robot suit une trajectoire prédéfinie autour de la carrosserie. La vitesse de déplacement est calibrée pour assurer une répartition correcte de la peinture sur la surface.



Robot de peinture sur une chaîne d'assemblage automobile

L'asservissement en vitesse de chaque actionneur du robot doit satisfaire un cahier des charges exigeant, dont un extrait est donné ci-dessous :

Exigence	Critère	Niveau
Ex1 : mettre le robot en mouvement	Erreur relative en régime permanent vis-à-vis d'une consigne de vitesse angulaire en échelon	< 1%
	Sensibilité aux perturbations constantes	aucune
	Temps de réponse à 5%	< 0,5 s
	Stabilité	stable

Dans le cas du modèle de l'asservissement en vitesse d'un seul axe (bras), les éléments à prendre en compte sont les suivants :

– l'amplificateur, dont la fonction est d'amplifier pour alimenter $\varepsilon(t)$ le moteur en tension $u(t)$. Il est modélisé par un gain $K_A = 80$;

– le moteur électrique, modélisé par une fonction de transfert du premier ordre $\frac{K_M}{1+\tau p}$ où $K_M = 0.3\ rad/s/v$ et $\tau = 0.2\ s$;

– le réducteur, modélisé par un gain $K_R = 10^{-2}$, diminue la vitesse angulaire du moteur $\omega_M(t)$ pour actionner le bras en rotation ;

– le capteur, modélisé par un gain $K_C = 15\ V.s/rad$, mesure la vitesse angulaire du bras $\omega_b(t)$, et délivre une tension $u_m(t)$ proportionnelle à cette vitesse angulaire ;

– les frottements secs dans les liaisons perturbent le système. Ces frottements sont modélisés par la soustraction d'une vitesse $\omega_{frott}(t) = 0.01\ rad/s$ à la vitesse du $\omega_R(t)$ réducteur ;

– l'interface Homme-Machine, traduit la vitesse angulaire $\omega_c(t)$ de consigne en une tension $u_c(t)$.). Il est modélisé par un gain $K_C = 15\ V.s/rad$;

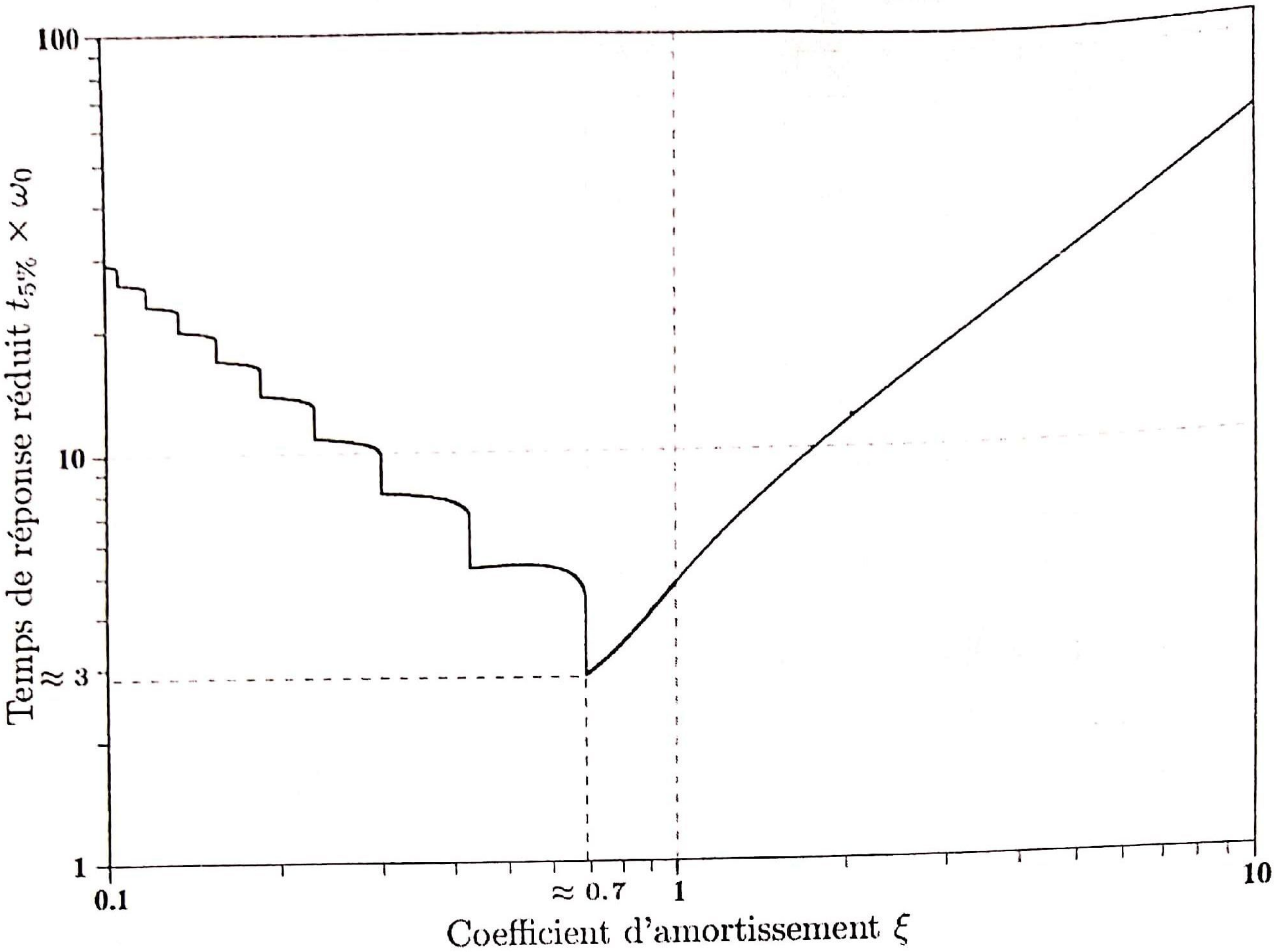
Objectif :

- modéliser l'asservissement en vitesse d'un axe du robot de peinture ;
- évaluer les performances de cet asservissement.

1. Proposer un schéma-bloc représentant l'asservissement étudié. Préciser les grandeurs physiques entre les blocs et leurs unités.
2. Déterminer, dans le cas où les frottements sont négligés, la fonction de transfert en poursuite $\frac{\Omega_b(p)}{\Omega_c(p)}$ et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme caractéristique d'un premier ordre dont on donnera les paramètres caractéristiques. Faire les applications numériques.
3. Évaluer la stabilité et la comparer à celle imposée par le cahier des charges.
4. Évaluer la rapidité et la comparer à celle imposée par le cahier des charges.
5. Évaluer la précision pour une consigne en échelon et la comparer à celle imposée par le cahier des charges.
6. Indiquer l'influence de la valeur de K_A sur les performances du système.
7. Le système est-il sensible aux perturbations lorsque $\omega_{frott} \neq 0$

Afin d'améliorer les performances de l'asservissement en vitesse, on ajoute un correcteur intégral $\frac{1}{p}$entre le comparateur et l'amplificateur. ω_{frott} est supposée nulle dans un premier temps.

8. Déterminer l'ordre ainsi que l'expression de la fonction de transfert en poursuite.
9. Évaluer la stabilité et la comparer à celle imposée par le cahier des charges.
10. Évaluer la précision pour une consigne en échelon et la comparer à celle imposée par le cahier des charges.
11. Évaluer la rapidité et la comparer à celle imposée par le cahier des charges.
12. Le système est-il sensible aux perturbations lorsque $\omega_{frott} \neq 0$?
13. Conclure.


100
10
≈ 3
1
Temps de réponse réduit $t_{5\%} \times \omega_0$
0.1
≈ 0.7
1
10
Coefficient d'amortissement ξ

Ecole Polytechnique de Ouagadougou (EPO)

CPGE MP2

Année Académique 2020-2021

Devoir d'Analyse 4, Durée: 03 heures

L'énoncé comporte 2 pages, documents et calculatrices interdits

Exercice 1 (5 pts)
Soit E un espace vectoriel non nul de dimension finie et U un ouvert de E. On considère F une algèbre de dimension finie et f une application de U dans F. On suppose que $f(x)$ est inversible dans F pour tout $x \in U$ et que f est différentiable au point $a \in U$.

1. Démontrer que l'ensemble V des inversibles de F est un ouvert.
2. Démontrer que l'application $y \mapsto y^{-1}$ définie sur V est différentiable.
3. Montrer que la fonction $g : U \to F, x \mapsto f(x)^{-1}$ est différentiable en a et calculer $dg(a).h$, $\forall\, h \in E$

Exercice 2 (5 pts)
On dit qu'une partie C de $\mathbb{R}^n$ est un cône positif si pour tout $x \in C$ et $t > 0$ on a $tx \in C$.
Soit C un cône positif de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une fonction $f : C \to \mathbb{R}$ est homogène de degré α si :

$$\forall (x,t) \in E \times \mathbb{R}_+^* \ f(tx) = t^\alpha f(x).$$

On suppose dans la suite que C est également un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(C, \mathbb{R})$.

1. Démontrer que si la fonction f est homogène de degré α, alors les dérivées partielles de f sont homogènes de degré $\alpha - 1$.
2. Démontrer que la fonction f est homogène de degré α si, et seulement si :

$$\forall x \in U, \ \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \alpha f(x).$$

Exercice 3 (5 pts)
Soit

$$f(x,y) = arccos\frac{1-xy}{\sqrt{(1+x^2)(1-y^2)}}$$

1. Déterminer les ensembles de définition, de continuité et de dérivabilité de f.

2. Calculer les dérivées partielles de f et en déduire une expression plus simple de $f(x,y)$.

Exercice 4 (5 pts)
Calculer

1. $I = \int\int_{\mathcal{D}} \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)dxdy;\ \mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/1 \leq x \leq 4; \sqrt{x} \leq y \leq \min\{2,x\}\right\}$

2. $J = \int\int\int_{\mathcal{D}} xyzdxdydz;\ \mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE ET DE L'INNOVATION

Ecole Polytechnique de Ouagadougou

....

Classes Préparatoires d'Entrée dans les Grandes Ecoles (CPGE)

BURKINA FASO

....

Unité - Progrès - Justice

MP

Durée : 2h

Année universitaire 2020/2021.

Devoir d'anglais

I. Thème (10 points)

L'histoire commune de l'humanité n'offre aucun exemple de nations faibles ayant obtenu des réparations de guerre en se contentant de gémir. L'Afrique doit intégrer rapidement cette vérité historique : les indemnités de guerre versées aux nations impuissantes à recouvrer leurs droits sont des mythes. L'Afrique doit se souvenir qu'il a fallu la force d'une coalition européenne puissante pour obliger l'Allemagne vaincue à payer des dommages au titre de reparations. (...). En cas de guerre, le vaincu peut prétendre récupérer son bien par le biais d'une autre guerre ou par le recours à une menace objectivement inquiétante. Cela suppose que l'on soit capable d'en imposer par les faits, et non pas seulement par le verbe ; que l'on soit de taille à affronter le voleur ; ce qui, faut-il souligner, est loin d'être le cas de l'Afrique des "Etats nains" face à l'Europe des nations, *a fortiori* au regard de l'Europe unifiée. (...). Le drame de la pensée africaine actuelle réside dans l'existence d'écarts vertigineux entre les prétentions et les moyens d'action.

Extrait et adapté de *Et si l'Afrique refusait le développement* de Axelle Kabou, page 106

II. Version (10 points)

Workers' View of Education

Education is currently viewed by all workers, without exception, as being the only avenue for social upward mobility and, therefore, they exhibit enormous concern that their children not be deprived of it — and this concern extends to their daughters as well. The most frequently mentioned occupation aspired to be for sons was that of engineer and for daughters, that of doctor. Although education is free at all levels, the poor are generally weeded out (owning to poor academic performance not necessarily reflective of aptitude and intelligence) by the end of the primary school cycle and, at the latest, by the end of the preparatory school cycle. Secondary school attendance is generally monopolized by those intending to pursue their education at the university level — the curriculum, itself, being oriented in that direction. When students in public schools fail at any one stage in the primary school cycle, parents who desire to continue their child's schooling have only one alternative : to send their child to private schools.

Adapted from *One is not a woman, one becomes... by Daphne Williams Ntiri*

CPGE – EPO_MP-S4 Année universitaire 2020-2021

1ère Session Durée : 2 heures

Épreuve de Cristallographie

Exercice 1 : (6pts)

À température ordinaire, le titane métallique cristallise, comme de nombreux métaux, dans le système hexagonal.

1- Quelles sont les différents types de liaisons que l'on peut trouver dans les cristaux solides ? **(1,5pt)**
2- Dessiner la maille élémentaire correspondant à un empilement strictement compact de sphères de type ABA. **(1pt)**
3- Calculer la compacité théorique d'un tel empilement, en détaillant la méthode de calcul. **(1,5pt)**
4- Calculer la compacité réelle du titane en utilisant le rayon R_{Ti} et les paramètres de maille fournis dans les données et discuter de l'appellation de « pseudo-compacte » généralement utilisée pour cette variété allotropique de titane. **(2pts)**

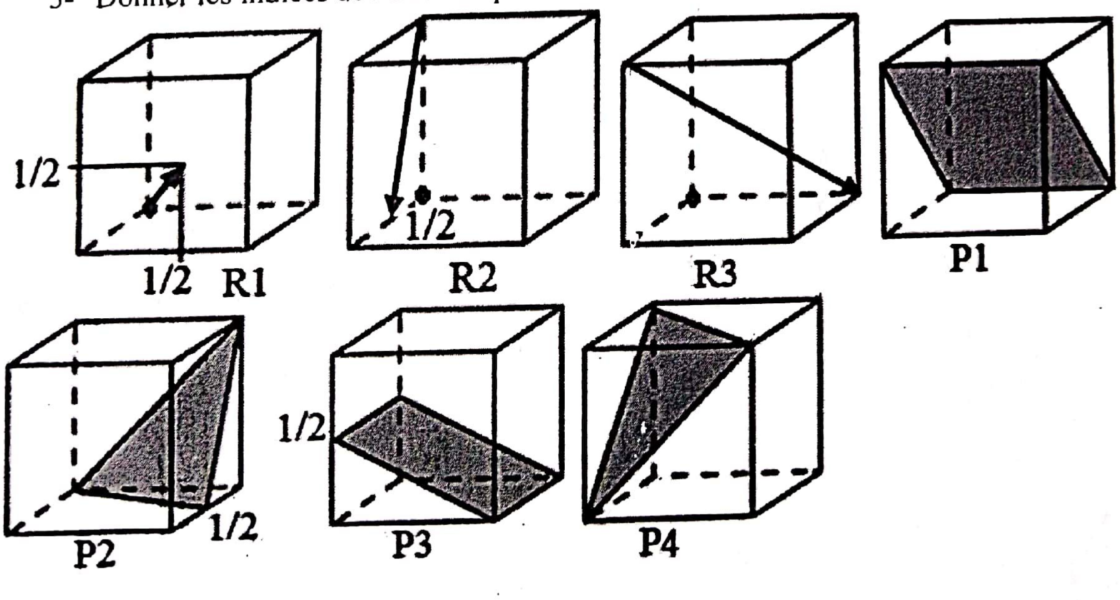
Données concernant le titane :

Masse molaire atomique : M = 47,9g/mol^{-1}
Rayon atomique : R_{Ti} = 144,8 pm
Paramètres de maille du réseau hexagonal : a =295,0 pm, c = 468,6 pm

Exercice 2 : (7pts)

On considère un réseau cubique simple de vecteurs de bases ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$) dont l'origine se trouve au croisement des arêtes en pointillés.

1- Donner les indices de la rangée R1, R2 **(2pts)**
2- Déterminer la distance qui sépare deux nœuds consécutifs de la rangée R3. **(1pt)**
3- Donner les indices de Miller du plan P1, P2, P3 et P4 **(4pts)**



Exercice 3 : (7pts)

1. Donner les positions équivalentes à une position atomique (x,y,z) si celle-ci subit l'action de l'un des axes de symétrie 2, 3, 4, $\bar{1}$, $\bar{2}$ et $\bar{4}$ (ces derniers sont orientés suivant l'axe Oz). Faire les schémas montrant ces images dans le plan xoy. **(3pts)**

2. Démontrer le propos suivant : l'intersection de deux miroirs perpendiculaires est un axe d'ordre 2. **(1pt)**

3. Tous les axes de réflexion rotatoire sont équivalents à un axe de symétrie directe ou inverse ou à une combinaison de ces axes. A quoi correspond donc les axes 2', 3'et 4'. **(3pts)**

N.B. : Aucun document n'est autorisé.

CPGE

MP

Devoir de thermo statistique — Dr ZAIDA

2h 30 min

EXERCICE 1 10 points

De l'hexafluorure d'uranium gazeux, à la température T, est contenu dans un récipient cylindrique, de rayon extérieur Re, de rayon intérieur Re/2 et de hauteur l, tournant autour de son axe de révolution vertical, à la vitesse angulaire Ω. Le champ de pesanteur est négligeable devant le champ centrifuge.

1) Etablir la distribution de la densité particulaire n(r) des molécules, de masse m, en fonction de leur distance r à l'axe.

2) Sachant que le nombre total de molécules est N, quelle est cette densité sur l'axe?

3) Quelle est l'expression de n(r)/N la densité particulaire en fonction de r/Re dans le cas où T=400K, $\Omega \times Re = 500$ m/s et l=3 m?
On donne la masse molaire de UF6: M=352 g

Exercice 2 10 points

En 20 lignes maximum, dites ce que vous savez de la théorie cinétique des gaz parfaits de Maxwell.

Bon courage

École polytechnique de Ouagadougou
Classes préparatoires aux grandes écoles

Année universitaire 2020-2021

MP2E, MP2F - Semestre 4

Devoir du semestre 4
Épreuve de français
Durée : 2 heures

Sujet de dissertation (20 points)

La démocratie peut-elle échapper à la démagogie ?

À travers une réflexion ordonnée, répondez à cette question en vous appuyant sur les œuvres du programme.

Ecole Polytechnique de Ouagadougou **2020-2021**

CPGE

Semestre 4 *05 Juin 2021*

Algèbre 4
Examen
4 heures

Cette épreuve comporte trois (03) exercices indépendants à traiter dans un ordre de votre choix.

Exercice 1 *: Adjoint d'un endomorphisme*

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $\langle ./. \rangle$. On note $\|x\| = \sqrt{\langle x/x \rangle}$.

1⁰) Un endomorphisme u de E vérifiant, pour tout vecteur x de E, $\langle u(x)/x \rangle = 0$, est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?

2⁰) Étant donné un endomorphisme u de E, on admet qu'il existe un unique endomorphisme v de E vérifiant : $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle u(x)/y \rangle = \langle x/v(y) \rangle$. L'endomorphisme v est appelé l'adjoint de u.

Démontrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

(a) $u \circ v = v \circ u$;

(b) $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle u(x)/u(y) \rangle = \langle v(x)/v(y) \rangle$;

(c) $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|v(x)\|$.

On pourra, par exemple, successivement prouver les implications : $(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (c)$ et $(c) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (a)$.

Exercice 2 *: Déterminant de Gram*

Soit E un espace euclidien de dimension non nulle n. Pour p vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ de E, on définit le déterminant de Gram par :

$$Gram(x_1, \cdots, x_p) = \begin{vmatrix} \langle x_1/x_1 \rangle & \langle x_1/x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1/x_p \rangle \\ \langle x_2/x_1 \rangle & \langle x_2/x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2/x_p \rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle x_p/x_1 \rangle & \langle x_p/x_2 \rangle & \cdots & \langle x_p/x_p \rangle \end{vmatrix}.$$

1^0) Soient $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E. Calculer $Gram(e_1, \cdots, e_n)$.

2^0) Montrer que $(x_1, \cdots, x_p)$ est liée si, et seulement si, $Gram(x_1, \cdots, x_p) = 0$.

3^0) Soit F un sous-espace vectoriel de E, de base $(e_1, \cdots, e_p)$, non nécessairement orthonormée. Si on note, pour $x \in E$, $q(x)$ le projeté orthogonal de x sur F, montrer que :

$$\|x - q(x)\|^2 = \frac{Gram(x, e_1, \cdots, e_p)}{Gram(e_1, \cdots, e_p)}.$$

4^0) En déduire que $\forall (x_1, \cdots, x_p) \in E^p$, $Gram(x_1, \cdots, x_p) \geq 0$.

5^0) Soit $(a_1, \cdots, a_n)$ une base orthonormée de E, soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des vecteurs de E. On note u l'endomorphisme de E tel que $u(a_i) = x_i$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Montrer que l'application φ, définie sur E^2 par $\varphi(x, y) = \langle u(x)/u(y) \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique positive. Quelle est la matrice de φ dans la base $(a_1, \cdots, a_n)$?

Montrer que $Gram(x_1, \cdots, x_n) = (det(u))^2$.

Exercice 3 : *Endomorphismes anti-symétriques*

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit antisymétrique si

$$\forall x, y \in E, \ \langle u(x)/y \rangle = -\langle x/u(y) \rangle.$$

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés des endomorphismes antisymétriques.

Partie I : Un exemple

Ici E est un espace vectoriel euclidien de dimension 3. Soit $\mathcal{B} = (i, j, k)$ une base orthonormée de E et $a = a_1.i + a_2.j + a_3.k$ un vecteur non nul de E. On considère ici $u : E \longrightarrow E$ l'application définie par : $\forall x \in E$,

$$u(x) = (a_2x_3 - a_3x_2).i - (a_1x_3 - a_3x_1).j + (a_1x_2 - a_2x_1).k$$

où $x = x_1.i + x_2.j + x_3.k$.

1^0) Montrer que u est un endomorphisme antisymétrique.

2^0) Décrire $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$.

3^0) Former la matrice représentative de u dans $\mathcal{B}$.

4^0) Quelle particularité présente cette matrice ?

Partie II : Etude générale

1^0) Montrer que u est antisymétrique si et seulement si, pour tout $x \in E$, $\langle x/u(x) \rangle = 0$.

2⁰) Montrer que u est antisymétrique si et seulement si sa matrice dans toute base orthonormée est antisymétrique.

3⁰) Démontrer que si u est un endomorphisme antisymétrique de E alors $det(u) = (-1)^n det(u)$. En déduire $det(u)$ si n est impair.

4⁰) On fixe pour la suite de l'exercice un endomorphisme antisymétrique $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que $\operatorname{Im}(u) = (\ker u)^{\perp}$.

5⁰) Montrer que la restriction de u à $\operatorname{Im}(u)$ est un endomorphisme antisymétrique injectif de $\operatorname{Im}(u)$. En déduire que le rang de u est pair.

6⁰) Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}(E)$ des endomorphismes antisymétriques de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Quelle est la dimension de $\mathcal{A}(E)$?

7⁰) Soit F un sous-espace de E stable par u. Démontrer que $F^{\perp}$ est stable par u.

8⁰) Montrer que $\ker(u) = \ker(u^2)$.

9⁰) Démontrer que le spectre de u est soit vide, soit restreint à $\{0\}$.

10⁰) Montrer que u^2 est diagonalisable et que ses valeurs propres sont négatives.

11⁰) Soit F un espace euclidien, $v \in \mathcal{L}(F)$ antisymétrique tel que $v^2 = -\alpha^2 Id_F$, où $\alpha > 0$.

(a) Montrer que la dimension de F est un entier pair.

(b) Démontrer qu'il existe une base orthonormée de F telle que la matrice de v dans cette base soit de la forme

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} J(\alpha) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\alpha) & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & J(\alpha) \end{pmatrix}$$

où

$$J(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

12⁰) En déduire qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u a pour forme

$$\left(\begin{array}{ccccc} A(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A(\alpha_2) & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & A(\alpha_r) & \vdots \\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{array}\right).$$

Ecole Polytechnique de Ouagadougou (EPO)
Classes Préparatoires d'entrée
dans les Grandes Ecoles (CPGE)
Niveau d'études : 2e année MP
Enseignant : Dr P. KAFANDO

Année universitaire 2020 – 2021

DEVOIR D'OPTIQUE PHYSIQUE – Semestre 3

Documents non autorisés, calculatrice autorisée

Durée : 01h30

Exercice 1 :

La surface convexe (de très grand rayon de courbure R) d'une lentille plan-convexe d'indice $n_1 = 1,50$ est au contact dans l'air avec une lame de verre d'indice $n_2 = 1,68$. Le système est éclairé en incidence normale par un faisceau de lumière monochromatique de longueur d'onde λ (figure 1).

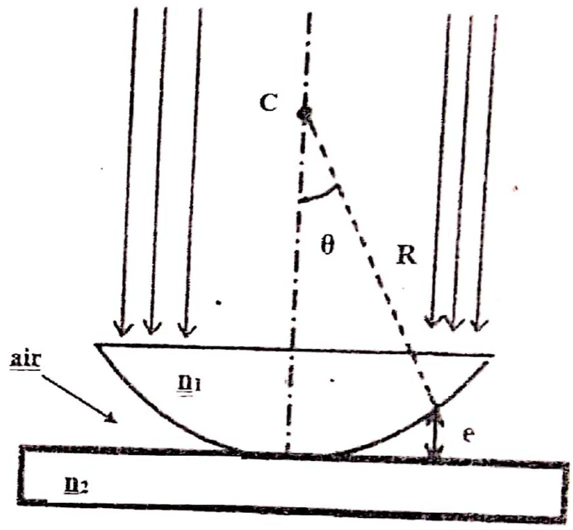


Figure 1

1) Quelle est la forme des franges d'interférence ? Où sont localisées les franges d'interférence ? Quel est l'aspect du centre de la figure d'interférence ?
2) Donner l'expression $r_{k\text{-Brillant}}$ du rayon du k-ième anneau brillant en fonction de k, R et λ ; Déduire celle des rayons $r_{k\text{-Noir}}$ des anneaux noirs ;
3) La mesure des rayons des anneaux se fait à partir de l'image de la figure d'interférence obtenue sur un écran ou sur une plaque photographique à l'aide d'une lentille convergente auxiliaire. Lorsqu'on utilise une radiation bleue de longueur d'onde λ=450nm, on mesure un rayon de 1,5mm pour le deuxième anneau noir. Calculer le rayon R de la lentille plan-convexe ; (on considèrera que le premier anneau sombre a un rayon nul) ;
4) On remplace la source bleue par une source rouge et on trouve un rayon de 2,7mm pour le cinquième anneau brillant. Quelle est la longueur d'onde de la radiation rouge ?
5) Le coin d'air entre la lentille plan-convexe et la lame de verre est maintenant rempli de disulfure de carbone d'indice $n_3 = 1.63$:
   a- Que devient l'aspect du centre de la figure d'interférence ?
   b- Donner la valeur du rayon du troisième anneau noir obtenu avec la radiation bleue puis avec la radiation rouge ;
6) On enlève le disulfure de carbone et on rempli l'interstice avec de l'air. Expliquer ce qu'on observe lorsqu'on déplace progressivement la lentille plan-convexe vers le haut tout en gardant la lame de verre fixe.

Exercice 2 - Application des réseaux à la spectroscopie : Mesure de longueur d'onde

Un réseau de 100 traits/mm est éclairé par une lampe à vapeur de Hg sous incidence normale par un faisceau de lumière parallèle. On observe la lumière transmise par le réseau sur un écran placé dans le plan focal image d'une lentille convergente de distance focale f '=30cm.

1) Etablir la relation donnant la direction des maxima d'intensité repérée par l'angle θ_m en fonction de l'ordre d'interférence m, du pas « a » du réseau et de la longueur d'onde λ de la lumière ;
2) On note x la position du premier ordre (m = 1) observé sur l'écran, repérée par rapport à celle de l'ordre central (m = 0). Faire un schéma et donner la relation entre la position x et l'angle θ_1 (ne pas faire l'approximation des petits angles) ;
3) En déduire l'expression suivante donnant la position du premier ordre x : $x = \frac{\lambda f'}{\sqrt{a^2-\lambda^2}}$
4) Comment ce système peut-il constituer un spectromètre ?
5) On observe dans l'ordre 1 une tache distante de x = 16,5mm de l'ordre 0. En déduire la longueur d'onde λ de la lumière qui crée cette tâche ;
6) Calculer l'incertitude de la mesure de λ en supposant qu'elle est limitée par la mesure de la position x, réalisée avec une incertitude de 0,1mm (pour ce calcul, utiliser l'approximation x << f '). Commenter.

Bon courage à tous !

Ecole Polytechnique de Ouagadougou

CPGE

MP

2020/2021

Devoir d'électrochimie

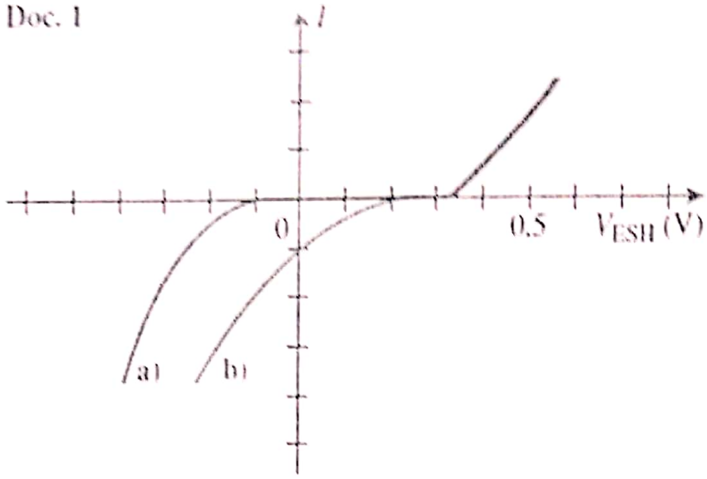
Durée : 2 heures

Exercice 1 (8 pts)

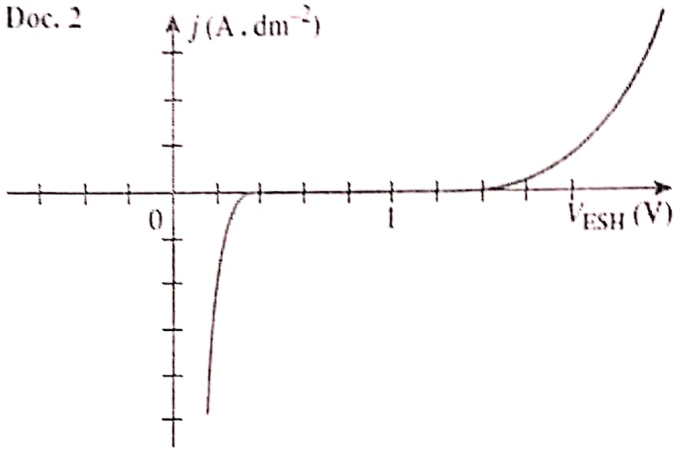
La solution de sulfate de cuivre $CuSO_4$ et d'acide sulfurique, obtenue par lessivage du minerai, subit, après purification, une électrolyse pour laquelle les anodes sont en plomb et les cathodes en cuivre.

1) Le **document 1** ci-après représente la courbe intensité-potentiel obtenue avec une électrode de cuivre comme électrode de travail et une solution molaire d'acide sulfurique comme électrolyte (courbe a), et celle obtenue avec la même électrode et une solution molaire de sulfate de cuivre (courbe b). Identifier les réactions électrochimiques mises en jeu.
2) Le **document 2** représente une courbe intensité-potentiel enregistrée au cours de l'électrolyse d'une solution de sulfate de cuivre à 1 $mol.L^{-1}$ et d'acide sulfurique (pH = 0), avec une cathode en cuivre et une anode en plomb passivé. Commenter brièvement cette figure et l'utiliser pour prévoir les résultats de l'électrolyse.
3) Déterminer la valeur théorique de $(Va - Vc)_{I=0}$. Pour une densité de courant de130 $A.m^{-2}$, les surtensions anodique et cathodique sont respectivement de 0,60 V et de – 0,05 V tandis que la chute ohmique aux bornes de la cellule est de 0,90 V. Sachant que le rendement faradique est voisin de 0,85, déterminer la consommation massique d'énergie, c'est-à-dire l'énergie nécessaire pour déposer 1 kg de cuivre.

Doc. 1



Doc. 2



Exercice 2 :

La figure 1, page 4, présente un diagramme simplifié potentiel-pH du chrome à 298 K. La concentration des espèces dissoutes étant de 1 mol.L^{-1}, ce dernier fait intervenir 6 espèces : $Cr_{(s)}$, $Cr^{2+}{}_{(aq.)}$, $Cr^{3+}{}_{(aq.)}$, $Cr_2O_{3(s)}$, $Cr_2O_7{}^{2-}{}_{(aq.)}$ et $CrO_4{}^{2-}{}_{(aq.)}$.

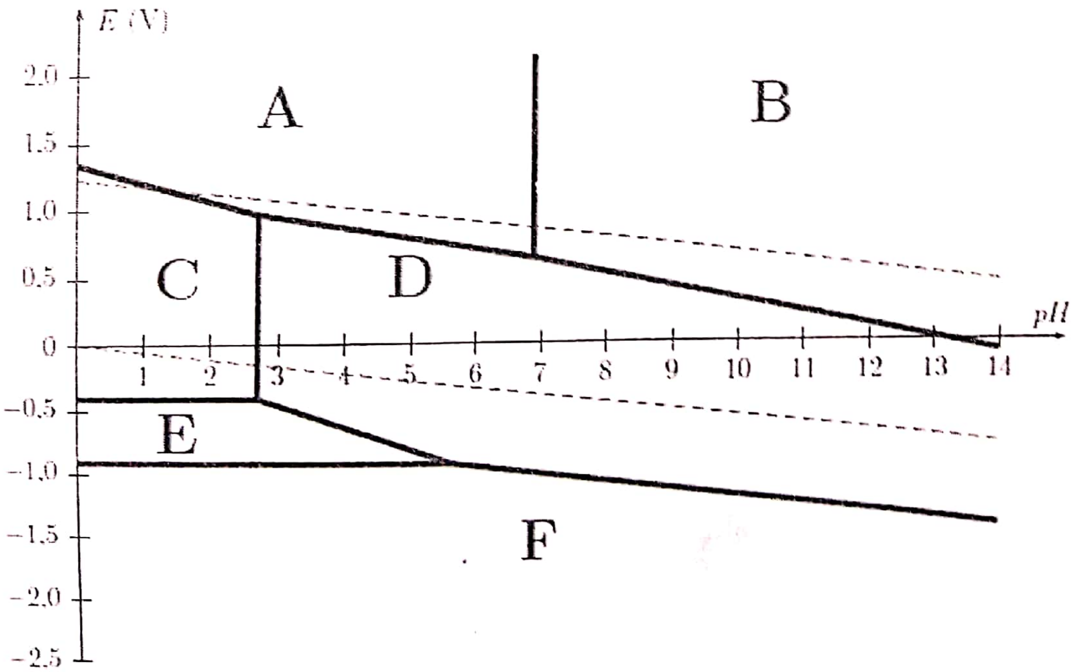


Figure 1: Diagramme simplifié potentiel - pH du chrome à 298 K.

1. Indiquer pour chacun des domaines (A, B, C, D, E, F) du diagramme l'espèce chimique correspondante.
2. Sur ce diagramme ont été portées deux droites en pointillés délimitant le domaine de stabilité thermodynamique de l'eau. Rappeler les équations de ces deux droites en utilisant les conventions habituelles.
3. Discuter du comportement du chrome métallique dans une eau désaérée et dans une eau aérée.

Une couche de passivation dite native se forme toujours à la surface d'un acier inoxydable. Lorsque celui-ci est en présence d'une solution dont la valeur du pH est égale à 6, l'acier inoxydable résiste toujours très bien à l'oxydation.

4. Quel oxyde de chrome est responsable de la passivation ? Quelle est la conséquence pour l'acier inoxydable étudié ?

Pour étudier le comportement de cet acier, on plonge un échantillon de matériau dans une solution aqueuse acide et on fait varier lentement le potentiel tout en mesurant l'intensité du courant électrique issue des réactions électrochimiques qui se produisent. On obtient le tracé de la courbe intensité-potentiel $j_a = f(E)$ (voir figure 2) sur laquelle 3 zones se distinguent nettement : une zone de corrosion, une zone de passivation et une zone dite transpassive.

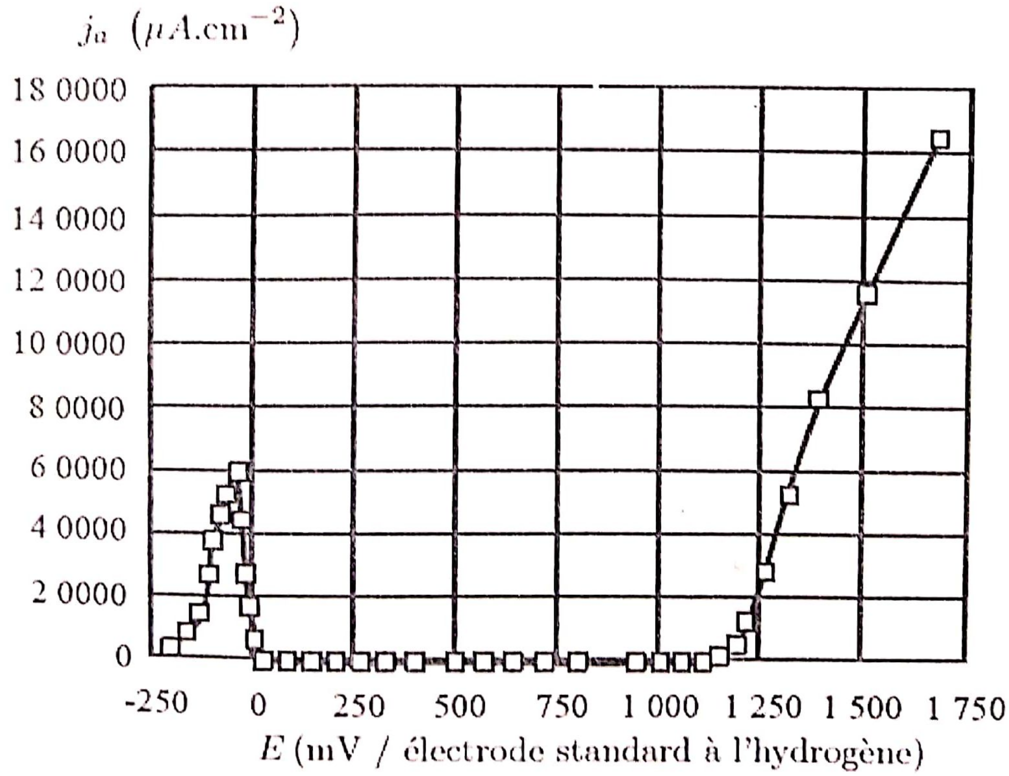


Figure 2 : Courbe intensité-potentiel $j_a = f(E)$ de l'acier inoxydable étudié en milieu acide. La teneur massique en chrome est de 16,1 %.

5. Faire un schéma du dispositif expérimental permettant de réaliser le tracé de la figure 2. On précisera notamment le rôle de chacune des électrodes utilisées.
6. Pour quelle(s) valeur(s) de potentiel cet acier est-il passivé ? Ecrire la demi-équation électronique correspondante à la formation de la couche de passivation.
7. Dans la zone transpassive, la couche de passivation commence à se dissoudre et un dégagement gazeux peut également être observé. Interpréter ces faits expérimentaux.

École polytechnique de Ouagadougou
C.P.G.E. - MP-PC-Semestre 3

Année universitaire 2020-2021

Examen du semestre 3
Épreuve de français
Date : mars 2021
Durée : 2 heures

Sujet (20 pts)

Faut-il aimer la démocratie ?
À travers une réflexion ordonnée, argumentez votre point de vue en vous inspirant des œuvres au programme.

Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles | Année Universitaire 2020-2021

(CPGE) MPSI&MP_EPO | Deuxième Semestre (1e Session)

Devoir de Cinétique chimique (Durée 2H 15 min)

Exercice N° 1

Pour la réaction $CH_3I + C_2H_5ONa \rightarrow CH_3OC_2H_5 + NaI$, on a établi les résultats suivants :

Température (°C)	0	6	12	18	24	30
$k(mol^{-1}.l.s^{-1})$	$5{,}6.10^{-5}$	$11{,}8.10^{-5}$	$24{,}5.10^{-5}$	$48{,}8.10^{-5}$	100.10^{-5}	208.10^{-5}

1. La réaction obéit-elle à la loi de d'Arrhenius ?
2. Quelle est la valeur de l'énergie d'activation Ea ?
3. Quelle est la valeur du facteur de fréquence A ?

Exercice N°2

Soit l'équation-bilan de la réaction suivante :

$C_2H_6 \rightarrow C_2H_4 + H_2$

On peut l'interpréter par le mécanisme réactionnel ci-contre :

$$C_2H_6 \xrightarrow{k_1} 2CH^\bullet_3$$

$$C_2H_6 + CH^\bullet_3 \xrightarrow{k_2} C_2H^\bullet_5 + CH_4$$

$$C_2H^\bullet_5 \xrightarrow{k_3} C_2H_4 + H^\bullet$$

$$C_2H_6 + H^\bullet \xrightarrow{k_4} H_2 + C_2H^\bullet_5$$

$$2\,C_2H^\bullet_5 \xrightarrow{k_5} C_4H_{10}$$

En appliquant le principe de Bodenstein aux espèces radicalaires (*instables*), exprimer les vitesses de ***consommation*** des réactifs et de ***formation*** des produits

Exercice N°3

On introduit 10^{-2} moles de soude et 10^{-2} moles d'acétate d'isoamyle (arôme de banane) dans un litre d'un mélange eau/alcool à 27° C.

$$RCO_2R' + NaOH \longrightarrow RCO_2Na + R'OH$$

La réaction de saponification est d'ordre 1 par rapport à l'ester, ainsi que par rapport à la soude.

1) Au bout de 2 heures, les 3/4 de l'ester sont saponifiés. Calculer la constante de vitesse k et le temps de demi réaction (exprimer les temps en secondes dans le calcul de k)

2) Les boissons aromatisées à la banane sont généralement neutres ou légèrement acides, pourquoi ?

Bonne Inspiration !

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE ET DE L'INNOVATION

Ecole Polytechnique de Ouagadougou

....

Classes Préparatoires d'Entrée dans les Grandes Ecoles (CPGE)

BURKINA FASO

....

Unité - Progrès - Justice

Année universitaire 2020/2021.

Epreuve d'anglais :
MP
Durée : 2h

I. Write a precis of 150 words of the following text, providing it with a title. (9 points)

Text :

There is something perverse about placing cities in a "lievability" list and then doling out winners and losers. Nevertheless, the Economist Intelligence Unit's 2016 Gobal Liveability Report makes for fascinating reading. Presumably the former residents of Damascus, currently sat in muddy slum conditions on the Macedonian borders, have already figured out that a life in the list's winner Melbourne, Australia might be a lot lovelier than either staying put or "going home". (...).However, whether residents of London ranked number 53 in the index, expected to find themselves 52 places behind Melbourne is highly debatable. To set up a life here in London and to be consumed by it, as I have done for 20 years, forces a person to become numb, or even cheerfully fond, of inhospitality.

Yet here are Melbourne, Adelaide and Perth all wiping the floor with our capital city on factors related to safety, healthcare, educational resources, infrastructure and environmental matters. If I'm honest, the clues about Australia have been plastered all over Facebook for years, as multiple friends and ex-colleagues have sidled off on Qantas Airlines to "see how things work out", never to return. Ben Swain from *The Thick Of* It may well have written off Australia as "full of people in khaki squinting" and "just the world's largest collection of poisonous things", but the reality is that Australia's distinct livability is borne out in those photos of our emigrated friends, steepedin Vitamin D, playing some sort of sport by floodlight and jovially wrestling enormous spiders out of their utility room". (...).

Interestingly, it's not just London doing badly in the livability list, but other European cities such as Zurich, Geneva, Frankfurt, Berlin, Oslo, Luxembourg, Brussels, Paris, Rome and Lisbon. All of the cities have seen declines in appeal, said to be "mostly stemming from heightened fears of terrorism in the wake of attacks in Paris and Brussels". (...).

But perhaps the Economist Intelligence report is being rather defeatist by admitting this. I've heard many times that altering one's life in any way due to terrorism is "letting the terrorists win". And in that case, they've certainly gained some ground because number 2 in the 2016 global livability list is frankly surprising Vienna in Austria. Who dreams of moving to Vienna? Clearly everybody, in the fullness of time.

Less surprising to me about Economist Intelligence's finding were Vancouver, Toronto and Calgary at places 3, 4 and 5. My relatives over the past century, have fled to Vancouver in droves from Cumbria and never returned, falling in love with scenery, the simplicity of life and well, the unabashedly masculine men, if I'm honest. But a recent work trip to Toronto made me reassess everything I felt to be true about my salary-sapping London life of black snot, random stabbings and blaring police sirens. Life in Toronto was slyer - not backwards, but certainly a less stressful affair fueled by Tim Horton's double-double coffee boxes of Tidbits donuts and new reports made up mostly of"threats of humidity".

One Canadian college wanted quite genuinely to know why people in London and Manchester - which also does badly in the livability list - are so fond of beating each other up. He felt, as a traveller, that he'd seen dozens of fights in bars, the street and on public transport : "And the thing is, in Toronto, we'd stop and stare ! We'd film it ! But in Britain, it's just, well, normal."

After several attempts to explain to Canadians our intricate modern British dissatisfaction with our healthcare, politics, educational ressources, infrastructure, and the way we treat the environment, I had to conclude , "We also just really love fighting." On another telling occasion, I failed dismally to convince a bunch of Toronto-dwellers that Britain really does have a thriving republican movement composed of people who loathe the Queen and Prince Charles and would have them all turfed out and stripped of their assets. "But....why?" they cried, shaking their heads, refusing to believe that anyone could really be against such nice harmless things such as street parties, horse-drawn carriages and Cattle Middleton shaking hands in a lovely frock.

Canada is far from a wonderland, but it does seem in 2016 to have a distinct dearth, in relative terms of angry, embittered, dissatisfied headbangers - and I count myself among them - who could start a fight in an empty room. Let(s move to Canada. They've had it too good for far too long.

Adapted from *the Independent*
September 19, 2016

II. VOCABULARY (6points)

1. "Doling out" means
a) calling
b) comparing
c) publishing
d) rewarding

2. "Numb" means
a) desperate
b) insensible
c) surprised
d) accustomed

3. "Sidled off"
a) flew away
b) took off
c) moved furtively
d) fell down

4. "Steep in" means
a) lost in
b) absorbed by
c) fixed into
d) dipped in

5. "Wrestling" means
a) struggling
b) looking at
c) looking for
d) contemplating

6. "Unabashed" means
a) unashamed
b) incompletely
c) imperfectly
d) inadequately

7. "dismally" means
a) successfully
b) joyfully
c) lamentably
d) instantaneously

8. "thriving" means
a) agressive
b) powerful
c) very small
d) growing

9. "loathe" means
a) love
b) hate
c) fight
d) admire

10."turfed out" means
a) decorated
b) ejected
c) adored
d) criticized

11. "dearth" means
a) number
b) account
c) increase
d) lack

12. "embittered" means
a) involved
b) informed
c) resentful
d) surprised

III. Grammar (5points)
Choose the right answer

1.

(A) They ought not to travel to those countries
(B) They ought to not travel to those countries
(C) They ought travel not to those countries
(D) They don't ought to travel to those countries

2. The situation has become…
(A) the worse and the worse
(B) worse and worse
(C) more worse and worse
(D) the more and more worse

3.
(A) The movement is said to be successful
(B) The movement is told to be successful
(C) The movement is said being successful
(D) The movement is told being successful

4.
(A) He was told not to reveal the truth
(B) He was told not reveal the truth
(C) He was told not revealing the truth
(D) He was told to not revealing the truth

5. We are used…this kind of event.
(A) to attending
(B) attending
(C) attend
(D) to attend

6. If he… here, he … help us.
(A) was/ will
(B) were/ would
(C) had been/ would
(D) has been/ would

7. …they complain…they will be satisfied.
(A) moer/less
(B) the more/ the less
(C) most/ least
(D) the most/ the least

8. The citizens would rather…again
(A) to not vote
(B) not to vote
(C) not voting
(D) not vote

9. When…the results ?
(A) have they got
(B) have they been getting
(C) did they get
(D) were they getting

10. They… a long time.
(A) are trying since
(B) are trying for
(C) have been trying for
(D) have tried since

Ecole Polytechnique de Ouagadougou
CPGE
Année académique 2020-2021
Niveau d'études: 2ème année MP

Enseignants : **Pr I. ZERBO, Dr B. OUEDRAOGO, Dr J. KOURAOGO, Dr D. U. COMBARI**
Durée : **4 heures**

EXAMEN DE PHYSIQUE 3 – Semestre 3

NB : Cette épreuve comporte deux parties indépendantes. Chaque partie doit être traitée sur une feuille séparée.

Partie I : Eléments de traitement du signal (durée approximative1h30)

Documents non autorisés, calculatrice autorisée.

Exercice 1

On considère un filtre représenté par la figure 1

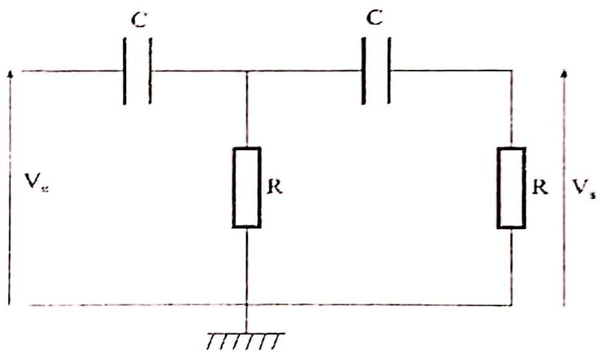


Figure 1

1) Déterminer la fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e}$

2) Prévoir la nature du filtre en étudiant le comportement limite de H puis en utilisant les modèles équivalents haute et basse fréquences des composants.
Conclure quant à la nature du filtre.

3) Tracer l'allure de diagramme de Bode en gain correspondant sur trois décades.
On prendra $R = 10\ k\Omega$ et $C = 10\ nF$.

Exercice 2 :

Soit le signal $s(t) = a_1\cos(2\pi f_1 t) + a_2\cos(2\pi 3 f_1 t)$

Soit $s_e(t)$, le signal issu de l'échantillonnage de $s(t)$ avec une fréquence d'échantillonnage f_e

1) Le signal $s(t)$ est-il périodique ? Si oui donner sa période.

2) On choisit $f_1 = 20\ Hz$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ et $f_e = 130\ Hz$

a) Pour cette valeur de f_e, la condition de Shannon est-elle respectée ? Justifier votre réponse

b) Représenter sur une figure le spectre du signal $s(t)$

c) Représenter sur une autre figure le spectre du signal $s_e(t)$

3) Expliquer les différences entre le spectre de $s(t)$ et celui de $s_e(t)$.

4) Quel est l'effet de l'échantillonnage sur le spectre du signal $s(t)$?

Exercice 3

On considère un signal carré d'amplitude $E = 2\ V$ et de fréquence $f_0 = 100\ Hz$. Sa décomposition en série de Fourier s'écrit :

$$e(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4E}{(2n-1)\pi} \sin\left(2\pi(2n-1)\frac{t}{T_0}\right)$$

1) Représenter le spectre du signal ainsi que l'allure de $e(t)$ en fonction du temps.

2) On le fait passer dans un filtre passe-bas d'ordre deux (non inverseur) de fréquence de coupure $f_c = 150\ Hz$, de gain statique 2 et de facteur de qualité $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Rappeler la forme de la fonction de transfert de ce filtre.

3) Donner la forme de la décomposition en série de Fourier associée au signal de sortie du filtre $s(t)$, ainsi que son spectre. On déterminera numériquement les amplitudes et avances de phase des 5 premières fréquences présentes.

4) Tracer l'allure de $s(t)$ sur le même graphe que celui de $e(t)$. Commenter.

Partie II : Electromagnétisme

Documents non autorisés, calculatrice autorisée

Exercice 1 Force électromotrice de Lorentz et actions de Laplace

Soit la situation décrite sur la **figure 1**. La tige conductrice $PQ = a$, de masse m, qui glisse sur deux rails conducteurs horizontaux en leur restant perpendiculaire, est soumise à un champ permanent et vertical $\vec{B}_0 = B_0\vec{e}_z$ supposé uniforme. Le circuit est alimenté par un générateur de tension constante E et de résistance interne R grande devant celle des fils. Un opérateur extérieur exerce une force qui maintient la vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_x$ constante.

1. Si le phénomène d'induction n'existait pas, quelles seraient alors :

1.1 l'équation traduisant la loi d'Ohm :

1.2 la puissance des forces de Laplace en fonction de a, B_0, v, E et R ;

1.3 la puissance dissipée par effet Joule en fonction de E et R ;

1.4 la puissance fournie par le générateur en fonction de E et R ?

2. Le bilan de puissance est-il vérifié ? Que faut-il faire ?

3. Montrer qu'en ajoutant une f.e.m. e_L dans le circuit le bilan de puissance devient satisfaisant. Calculer cette f.e.m. Conclure.

4. Montrer que lorsqu'un circuit se déplace dans un champ magnétique extérieur permanent, on peut toujours affirmer les deux propositions suivantes :

4.1 si la résultante des actions extérieures de Laplace s'exerçant sur une portion de circuit en mouvement à la vitesse v s'écrit : $F = k \cdot i(t)$, alors la f.e.m. de Lorentz correspondante est donnée par $e_L(t) = -k \cdot v(t)$;

4.2 si le moment de ces actions par rapport à un axe Δ s'exerçant sur une portion de circuit en rotation à la vitesse angulaire ω autour de l'axe Δ s'écrit $\Gamma_\Delta = \Phi_0 \cdot i(t)$, alors la f.e.m. est donnée par $e_L(t) = -\Phi_0 \cdot \omega(t)$

Exercice 2 Onde de courant, puissance transportée par un câble

Un câble coaxial (**figure 2**) est constitué d'un conducteur cylindrique intérieur de rayon a, et d'une enveloppe métallique mince cylindrique de rayon intérieur b. On désigne par r la distance d'un point de l'espace à l'axe commun des deux cylindres. Une section de ce câble est repérée par sa cote z.

Le conducteur intérieur est parcouru par un courant $\underline{I}(z,t) = I(z)exp(i\omega t)$ où $I(z)$ est une certaine fonction de z que nous allons préciser. Dans un plan $z = Cte$, les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, qui sont fonction de z, r et t, sont respectivement radial et orthoradial ; on désigne par E et B respectivement la seule composante non nulle de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en coordonnées cylindriques. On se limite à l'espace compris entre $r = a$ et $r = b$.

1. Calculer $\underline{B}(r,z,t)$ en fonction de $\underline{I}(z,t)$ et de r, en intégrant l'équation de Maxwell-Ampère (forme intégrale).

2. Relier $\partial B/\partial z$ et $\partial E/\partial t$ en utilisant la forme différentielle de l'équation de Maxwell-Ampère pour r compris entre a et b. En déduire $\underline{E}(r,z,t)$ pour le régime variable considéré.

3. A partir de l'équation de Maxwell-Faraday, montrer que $I(z)$ satisfait à une équation différentielle dont la solution est :

$\underline{I}(z) = I_0 exp(-ikz)$ et donner l'expression de k, interpréter $\underline{I}(z,t)$ en terme d'onde.

4. Déduire des résultats précédents l'expression des champs électrique et magnétique dans le câble

5. Calculer le vecteur de Poynting et en déduire l'expression de la puissance moyenne transportée par le câble.

6. En déduire l'impédance caractéristique du câble coaxial

On donne le rotationnel en coordonnées cylindriques (r, θ, z)

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\vec{e}_z$$

Exercice 3 Transparence ultraviolette des métaux

Dans un métal comportant n_0 électrons libres par mètre cube, ceux-ci (de masse m et de charge $-e$) subissent l'action mécanique d'une onde électromagnétique $\left(\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t)\right)$, une force de frottement $-\frac{m}{\tau}\vec{v}$ et leur poids. On suppose que le métal reste neutre.

1.1 Écrire la loi de la quantité de mouvement pour un électron de vitesse $\vec{v}$ en prenant en compte toutes les forces appliquées à l'électron du métal.

1.2 Montrer que certains termes peuvent être négligés et réécrire la nouvelle équation différentielle qui régit le mouvement d'un électron du métal.

2. Déterminer l'expression de la vitesse complexe $\underline{\vec{v}}$ d'un électron du métal en régime forcé imposé par l'onde. En déduire l'expression complexe de la densité volumique de courant associée à ce déplacement d'électrons sachant que $\vec{j} = -n_0 e\vec{v}$.

3. Ecrire les équations de Maxwell dans le métal, en notation complexe sachant que les champs électrique et magnétique de l'onde sont de la forme $\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}}_0\, exp\, i\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)$ et $\underline{\vec{B}}(M,t) = \underline{\vec{B}}_0\, exp\, i\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)$

4. Établir l'équation de dispersion vérifiée par le vecteur d'onde complexe

5.1Montrer que, pour $\tau\omega >> 1$, cette onde électromagnétique ne peut se propager que si la pulsation ω est supérieure à une certaine valeur ω_c que l'on déterminera.

5.2 Déterminer la longueur d'onde correspondant à la pulsation ω_c et expliquer le titre de l'exercice, sachant que $n_0 \approx 10^{29}\ m^{-3}$, $\varepsilon_0 \approx 10^{-11}\ F{\cdot}m^{-1}$, $m \approx 10^{-30}\ kg$ et $e \approx 10^{-19}\ C$.

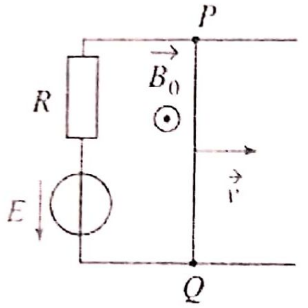


Figure 1

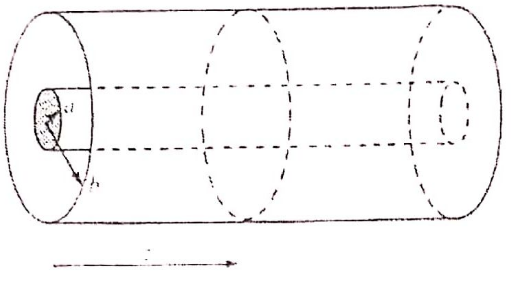


Figure 2

EPO **Année universitaire 2020-2021**

CPGE, MP

Examen de STI

Durée : 2h

Documents non autorisés, Calcul autorisée

Cette épreuve comporte deux (02) partie indépendantes. Chaque partie doit être traitée sur une feuille séparée.

Partie I : Automatique (durée approximative : 45 min)

Partie II : Mécanique du solide (durée approximative : 1h15 min)

Partie I : Automatique

Exercice 1

On considère le signal $e(t)$ défini par :

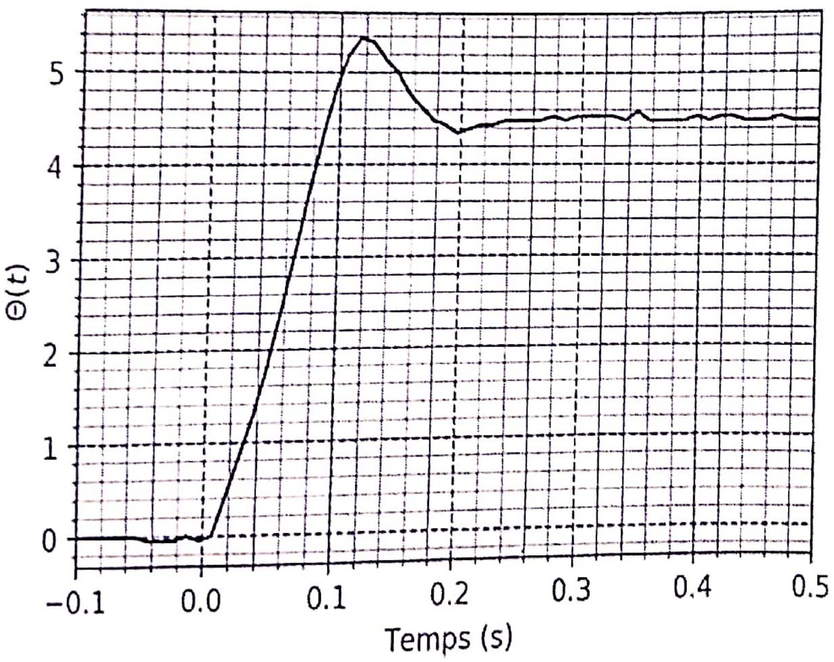
$$e(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ -1 & si\ 0 \leq t \leq 3 \\ 2+t & si\ t \geq 3 \end{cases}$$

1) Déterminer la transformée de Laplace du signal $e(t)$
2) En supposant que toutes les conditions initiales sont nulles, Calculer la fonction de transfert $H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$ correspondant à la relation dynamique suivante :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 9y(t) = x(t)$$

3) Déterminer la réponse $y(t)$ du système pour l'entrée $x(t) = r(t)$ où $r(t)$ est le signal rampe.

Exercice 2 : Positionnement angulaire d'un axe d'un robot



Un axe d'un robot est soumis à une consigne $\theta_c(t)$ en échelon d'amplitude +5° à l'instant $t = 0$ s.

La réponse $\theta(t)$, mesurée par le capteur de position angulaire de l'axe est tracée ci-contre.

1. Indiquer l'ordre du modèle auquel cet axe peut être identifié. Justifier.
2. Proposer un modèle de comportement de cet axe.

NB : Le modèle de comportement correspond à la fonction de transfert d'un système

Partie II : Mécanique du solide (1H15)

EPO-MP

Année 2020- 2021

Devoir EC DE MECANIQUE DU SOLIDE INDEFORMABLE

(durée : 1h15 ; aucun document autorisé)

Exercice 1

Considérons les vecteurs $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{j}$, liés respectivement aux points A (1, 0, 0) et B (1, 1, 0) et les torseurs $[G_1]$ et $[G_2]$ associés aux moments de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, respectivement.

1- montrer que $[G_1]$ et $[G_2]$ sont des glisseurs.

2- On pose $[G] = [G_1] + [G_2]$.

a- Calculer la résultante $\vec{R}$ de [G] et son moment en A. En déduire la nature de [G].

b- Déterminer l'équation cartésienne de l'axe central de [G].

Exercice 2

Dans un repère $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, on considère les trois glisseurs définis par les trois vecteurs :

$\vec{V}_1=(1,0,-1)$ d'origine $A=(1,0,0)$
$\vec{V}_2=(1,2,2)$ d'origine $B=(0,1,0)$
$\vec{V}_3=(\lambda,\mu,\nu)$ d'origine $C=(0,0,1)$
Soit [T] la somme des trois glisseurs.
1- Déterminer (λ,μ,ν) pour que [T] soit un couple et trouver son moment.
2- Déterminer la relation que doit lier λ, μ et ν pour que [T] soit un glisseur ?
3- Dans le cas où $(\lambda,\mu,\nu)=(-2,0,-1)$, trouver les équations de l'axe central de [T]. Que peut-on dire de la direction de l'axe central ?

Exercice 3

Dans un repère $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé et direct, on considère les torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ dont les éléments de réduction au point O sont respectivement $\left[\vec{M}_1(O), \vec{R}_1\right]$ et $\left[\vec{M}_2(O), \vec{R}_2\right]$ définis par $\begin{cases}\vec{M}_1(O) = -a\sin\alpha\,\vec{i} - a\cos\alpha\,\vec{j} \\ \vec{R}_1 = \cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j}\end{cases}$ et $\begin{cases}\vec{M}_2(O) = -a\sin\alpha\,\vec{i} + a\cos\alpha\,\vec{j} \\ \vec{R}_2 = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}\end{cases}$

Où a et α sont des constantes non nulles.

1- Calculer les invariants scalaires des torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ et déduire leur(s) nature(s).

2- Calculer $\vec{M}_1(O')$ pour un point O' de coordonnées (0, 1, 1).

3- Déterminer l'équation de l'axe central de $[T_2]$ et calculer le moment $\vec{M}_2(P)$ en un point P de cet axe.

4- Déterminer les valeurs de α pour lesquelles le torseur $[T_3] = [T_1] + [T_2]$ est un glisseur.

EPO
CPGE

Contrôle en Informatique

Année scolaire : 2020-2021

Structures de données en Python

Documents et appareils (téléphones portables, tablettes, ordinateurs) : non autorisés

Calculettes non programmables : autorisées pour les calculs numériques

Durée : 3 heures

Exercice 1: (5 points)

On souhaiterait déterminer l'indice du plus petit élément d'un tableau. Ecrire la fonction « indiceDuMin » prenant ne paramètre un tableau puis retourne l'indice de la case contenant le minimum. Dans le programme principal, demander à l'utilisateur remplit un tableau de 100 entiers avec des entiers aléatoires dans un intervalle [a, b] que l'utilisateur spécifiera.

Exercice 2 : (7 points)

On souhaiterait déterminer la fréquence des mots contenus dans le texte. Autrement dit, il s'agira d'obtenir un dictionnaire dont la clé correspond au mot et sa fréquence (nombre d'apparition de mot dans le texte), la valeur associée. (Ex. d ={"je" : 10, "qui" : 5, ...})

1. Ecrire une fonction « splitText » prenant en paramètre un texte (variable « texte ») puis le convertit en minuscule puis retourne un tableau de mot
2. Ecrire la fonction « frequence_mots » prenant en paramètre une liste de mots « L » puis retourne un dictionnaire associant à chaque mot sa fréquence.
   Indication : Pour obtenir ce dictionnaire (mot et fréquence associée), on procédera comme suit :
   - On parcourt la liste des mots. Pour chaque mot, on vérifiera les éléments suivants :
     - Si le mot n'existe pas dans le dictionnaire, on lui associera la valeur 1
     - S'il existe, alors on incrémentera sa valeur (+1)
3. Ecrire la fonction « mot_frequent » prenant en paramètre un dictionnaire « d » et un entier n puis retournant les mots ayant une fréquence supérieure ou égale à n

Exercice 3 : (8 points)

Vous allez écrire des fonctions manipulant des listes d'entiers. Attention, vous ne devez pas utiliser les fonctions prédéfinies pour la recherche d'éléments dans une liste.

1. Ecrire une fonction « *est_present* » prenant en argument une liste de L et un entier x puis retourne « True » si x est présent dans L et False sinon
2. Ecrire une fonction « *compte_sup* » qui prend en argument une liste L et un entier x et qui retourne le nombre d'éléments de L qui sont supérieurs ou égaux à x. Ecrire également une fonction « *compte_inf* » qui prend en argument L et x et qui retourne le nombre d'éléments de L qui sont inférieurs ou égaux à x.

3. On souhaiterait déterminer la médiane d'une liste. On suppose que la liste est triée. Par conséquent la médiane correspond à la valeur se trouvant au milieu de la liste.

$$0 \quad 0 \quad 1 \quad \underset{\uparrow}{1} \quad 2 \quad 2 \quad 3.$$

On distingue 2 cas en fonction de la taille de L (que nous allons noter « n » :

- Si n est impair, alors la médiane se trouve à l'indice (n+1)/2
- Sinon la médiane se calcule comme suit :

$$mediane = \frac{1}{2}\left(L\left[\frac{n}{2}\right] + L\left[\frac{n}{2}+1\right]\right)$$

Ecrire une fonction « *mediane* » prenant en paramètres une liste L puis retourne la valeur médiane de L

4. Etant donné un vecteur $\vec{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ la norme 2 de $\vec{x}$ s'écrit comme suit :

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} |x_i|^2}$$

Ecrire la fonction « *norme2* » prenant en paramètre une liste L puis retournant la norme du vecteur x représenté par L

Année Universitaire 200-2021

EPO
CPGE: L2 Mathématiques Physique

Examen d'Analyse 3
Durée 4 heures.
Notes de cours non autorisées.

N.B: C'est dans le calme et la confiance que trouve ta force

Exercice 1 *:Séries vectorielles*
Soit θ un nombre réel non nul donné. On rappelle que les nombres $\cos\theta$ et $\sin\theta$ s'expriment sous la forme de séries de fonctions par:

$$\cos\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(\theta)^{2n}}{(2n)!} \quad \sin\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer A^n et B^n. En déduire l'expression* $\exp(A)\exp(B)$
2. *De la même façon, calculer $(A+B)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Calculer à présent* $\exp(A+B)$.
3. *Que vient-on de montrer? Quelle est, selon vous l'explication?*

Exercice 2 *:Norme de Frobenius*
On rappelle que la trace d'une matrice est la somme de ses coefficients diagonaux et que ce nombre est indépendant de la base dans laquelle la matrice est exprimée. Soit n, un entier naturel supérieur à 2 fixé. On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et n colonnes à coefficients réels. Un élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se note $(a_{ij})_{1\leq i,i\leq n}$. On appelle $\langle .,. \rangle$, la fonction définie par:

$$\begin{aligned} \langle .,. \rangle : (\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (A,B) &\longmapsto Tr({}^tAB) \end{aligned} \tag{1}$$

où $Tr({}^tAB)$ désigne la trace de la matrice ${}^tAB$.

1. *Montrer que $\langle .,. \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour régler la question de la positivité, on pensera à expliciter le produit matriciel ${}^tAA$ en fonction des a_{ij}. On appelle $\|.\|_F$ la norme induite par le produit scalaire $\langle .,. \rangle$ définie par $\|A\|_F = \sqrt{\langle A, A\rangle}$. $\|.\|_F$ est appelée* **norme de Frobenius.**
2. *Démontrer que si A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors:*

$$|Tr(A)| \leq \sqrt{n}\|A\|_F.$$

Dans quels cas cette inégalité est-elle une égalité?

Exercice 3 ***Probabilité***

Soit $a \in]0, \frac{1}{2}[$. Dans une bourse de valeurs, un titre donné peut monter, rester stable, ou baisser. Le premier jour, le titre est stable. Si un jour n, le titre monte, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité $1-2a$, restera stable avec la probabilité a et baissera avec la probabilité a. Si un jour n, le titre est stable, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité a, restera stable avec la probabilité $1-2a$ et baissera avec la probabilité a. Si un jour n, le titre baisse, le jour $n+1$ il montera avec la probabilité a, restera stable avec la probabilité a et baissera avec la probabilité $1-2a$. On note M_n (resp. S_n, resp. B_n) l'évènement "le titre monte (resp. reste stable, resp. baisse) le jour n".
On pose $p_n = \mathbb{P}(M_n)$, $q_n = \mathbb{P}(S_n)$, $r_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. *Expliciter p_{n+1} et q_{n+1} en fonction de p_n, q_n et r_n.*

2. *Quel est l'état du titre boursier dans deux ans.*

3. *Que vaut $p_n + q_n + r_n$? En déduire r_n en fonction de p_n et q_n.*

4. *Montrer que les suites p et q sont arithmético-géometrique.*

5. *En déduire p_n, q_n et r_n en fonction de n.*

6. *Quel est l'état du titre boursier à long terme.*

Exercice 4 ***Séries doubles***

Justifier l'existence et déterminer la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^p, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=n}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)!} \quad \text{et de} \quad \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{i+j}i^j}{i!j!}.$$

MP: Algèbre 3
Examen semestre 1
Durée: 4h

Exercice 1. *(3 points)*

On considère $\mathbb{R}[X]$, l'anneau des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{R}$:

1. Montrer que l'idéal engendré par un polynôme $P(X)$ de $\mathbb{R}[X]$ est maximal si, et seulement si le polynôme $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
2. On donne l'anneau quotient $A = \mathbb{R}[X]/(X^4 - 1)$.
   (a) L'anneau A est-il intègre?
   (b) Donner les idéaux maximaux de A.

Exercice 2. *(6 points)*

Les questions 1) et 2) sont indépendants

1. On considère la matrice réelle: A $= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 4 & 12 & 5 \end{pmatrix}$. On désigne par f l'endomorphisme associé canoniquement à la matrice A.
   (a) Déterminer le spectre de f.
   (b) Trouver les sous espaces stables par f.
   (c) Montrer qu'il existe une matrice réelle inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit égale à $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ avec λ_1, λ_2 et λ_3 des réels vérifiant $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$.
   (d) Calculer A^n, pour tout entier naturel non nul n.
2. On considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est
   B $= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme g est $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, où α, β et γ sont des réels à déterminer.

Problème(11 points)

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2, E un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ et $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E. On note par 0 l'endomorphisme nul et par id l'application identité. Pour tout endomorphisme f, $\ker(f)$ désigne le noyau de f et $Im(f)$ l'image de f. Le spectre de f(l'ensemble des valeurs propres de f) est noté $Sp(f)$. $\mathbb{R}[X]$ désigne l'anneau des polynômes à coefficients réels.

Partie I

Soient f et j deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives dans la base canonique sont:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\forall m \geq 1$, on a $J^m = 3^{m-1}J$.

2. En déduire que $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = Id + \frac{1}{3}(4^m - 1)j$. Cette relation est-elle encore valable pour $m = 0$?

3. Montrer que f admet deux valeurs propres que l'on déterminera. On note par λ et β les deux valeurs propres de f.

4. Montrer qu'il existe un unique couple (p, q) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $m > 0$, $f^m = \lambda^m p + \beta^m q$ et montrer que ces endomorphismes sont linéairement indépendants.

5. Vérifier que $p^2 = p, q^2 = q, p \circ q = 0$ et $q \circ p = 0$. En déduire tous les endomorphismes h, combinaisons linéaires de p et q qui vérifient $h^2 = f$.

6. Montrer que f est diagonalisable et trouver une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de f.

7. Ecrire les matrices des endomorphismes f, p, et q dans cette nouvelle base $\mathcal{B}$.

8. Montrer que tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ sont diagonalisables.

Partie II

Soit f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq \beta$ et deux endomorphismes non nuls p et q de E tels que:

$$id = p + q, \quad f = \lambda p + \beta q, \quad f^2 = \lambda^2 p + \beta^2 q.$$

1. Calculer $(f - \lambda id) \circ (f - \beta id)$. En déduire que f est diagonalisable; $p \circ q = q \circ p = 0$, $p^2 = p$ et $q^2 = q$

2. Montrer que λ et β sont les seules valeurs propres de f.

3. On suppose maintenant $\lambda\beta \neq 0$.

   a) Montrer que f est un isomorphisme et écrire f^{-1} comme combinaison linéaire de p et q.

   b) Montrer que $\forall m \in \mathbb{Z}$:
   $$f^m = \lambda^m p + \beta^m q.$$

   c) Soit F le sous espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par p et q. Déterminer la dimension de F.

Partie III

Soient $p_1, \cdots, p_m$ des endomorphismes non nuls de E, et $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ des nombres réels distincts.
Soit f un endomorphisme de E tel que $\forall k \in \mathbb{N}; f^k = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i$.
Soit l un entier, $1 \leq l \leq m$. On pose

$$L_l(X) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ l \neq i}} \frac{(X - \lambda_i)}{(\lambda_l - \lambda_i)}$$

1. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, on a: $P(f) = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i)p_i$.

2. En déduire que $\prod_{i=1}^{m}(f - \lambda_i id) = 0$, puis que f est diagonalisable.

3. En utilisant la question 1), montrer que $\forall 1 \leq l \leq m$, on a $p_l = L_l(f)$.

4. En déduire que $Im(p_l) \subset \ker(f - \lambda_l id)$ puis que le spectre de f est donné par $Sp(f) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}$.

CLASSES PREPARATOIRES D'ENTREE DANS LES GRANDES ECOLES

Parcours : Mathématiques-Physique (MP)

Durée : 2 heures

Devoir d'anglais

I-Writing (12 points)

Text : Goodbye - Good guidance - to livestock farming

What will future generations, looking back on your age, see as its monstrosities ? They are plenty to choose from. But one of them will be the mass incarceration of animals to enable us to eat their flesh or eggs or drink their milk. While we call ourselves animal lovers, or lavish kindness on our dogs or cats, we inflict brutal deprivations on billions of animals that are just as capable of suffering.

The shift will occur with the advent of cheap artificial meat. Technological change has often helped to catalyse ethical change. The $300m deal China signed last month to buy lab-grown meat marks the beginning of the end of livestock farming. But, it won't happen quickly : the great suffering is likely to continue for many years.

The answers we are told by celebrity chefs and food writers, is to keep livestock outdoors : eat free-range beef or lamb but not battery pork. But all this does it to swap one disaster - mass cruelty - for another : mass destruction. Almost all forms of animal farming cause environmental damage, but none more so than keeping animals outdoors. The reason is inefficiency. Grazing is not just slightly inefficient, it is stupendously wasteful. Roughly twice as much of the world's surface is used for grazing as for growing crops, yet animals fed entirely on pasture produce just one gram out of the 81g of protein consumed per person per day.

A paper in Science of the *Total Environment* reports that "livestock production is the single largest driver of habitat loss." Grass-eating livestock are a fully automated system for ecological destruction : you need only release them on the land and they do the rest, eating tree seedlings, simplifying complex ecosystems. Their keepers augment this assault by slaughtering large predators.

One study suggests that if we were all to switch to a plant-based diet, 15m of land in Britain currently used for farming could be returned to nature. Alternatively, this country could feed 200 million people. An end to animal farming would be the salvation of the world's wildlife, our natural wonders and magnificent habitats.

Adapted from www.guardian.co.uk, 4 October 2017

Question 1: According to the journalist, why should livestock farming be stopped ? answer the question in your own words (80 words, more or less 10%). (4points)

Question 2 : In your opinion, are our eating habits likely to change over the coming decades ? (180 words, more or less 10%). Illustrate your answer with pertinent examples. (8points).

II- Thème (8points)

Il s'empara du téléphone et commença une série d'appels destinés à des gens dont j'ignorais l'identité. Tout en buvant mon café noir, je décidai de me passer de son approbation et de continuer à aller sur la plage pour profiter au mieux de cette parenthèse.
Nager longtemps dans une mer pure et fraîche, apaisa momentanément mes craintes. Je remontai à la maison à l'heure du déjeuner et les retrouvai à l'ombre sur la terrasse. Ils avaient l'air tous les quatre de tenir un conseil de guerre. Quand je le leur dis, Jean Luc me lança un regard noir.

C'est pas le moment de plaisanter, dit-il. Cournot me sourit gentiment.

Rosier et Bambam me firent un résumé de leurs démarches matinales.
Ils étaient allés voir le chauffeur de taxi attitré d'Hélène Lazareff, Emile, qui se disait prêt à nous conduire jusqu'à Paris, s'il se procurait suffisamment d'essence. Selon lui, c'était possible, mais pas avant deux, trois jours. Jean Luc en fulminait d'impatience.

D'après Anne Wiazemsky, Un an après, 2015

CLASSES PREPARATOIRES D'ENTREE DANS LES GRANDES ECOLES

ANNEE SCOLAIRE 2020-2021

Filière: MP

Date: 06 février 2021

Durée: 4 heures

DEVOIR D'ANALYSE 3

Exercice N°1

On considère l'espace vectoriel E des fonctions $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classes $\mathcal{C}^1$ telles que $f(0) = 0$.

On définit deux normes en posant, pour $f \in E$:

$$N_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \,; \qquad N_2(f) = \|f + f'\|_\infty$$

où $\|g\|_\infty$ désigne la borne supérieure de $|g|$ sur $[0;1]$. On rappelle que $\|.\|_\infty$ est une norme sur E.

1. Démontrer que N_1 et N_2 sont bien des normes sur E.
2. Démontrer que ni N_1 ni N_2 ne sont équivalentes à $\|.\|_\infty$.
3. Démontrer qu'elle sont équivalentes.

Exercice N°2

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que pour $(x, y, z) \in I^3$ tel que $x < y < z$, on a:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

2. Pour $a \in I$, on définit $\tau(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

   Montrer que τ admet des limites finies à gauche et à droite en a.
3. En déduire que f est continue.

Exercice N°3

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère l'ensemble D des matrices diagonalisables.
Démontrer que D est une partie dense de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice N°4

Soit $E = \mathcal{C}([0;1]\,;\ \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,dt$ et $c \in [0;1]$.

Montrer que l'application Φ de E dans $\mathbb{R} : f \mapsto f(c)$ n'est pas continue.

École polytechnique de Ouagadougou
CPGE – Semestre 1

Année universitaire 2020-2021

Examen du semestre 1
Épreuve de français
Durée : 2 heures

<u>Sujet</u>

Selon Tocqueville, « l'égalité nuit à la liberté, qui pourtant en est le seul fondement[…] ; la démocratie s'auto-corrompt, elle porte en elle le germe de sa propre destruction ». (Philocours.com, 2017)

En vous appuyant vos analyses sur les œuvres du programme, dites ce que vous pensez de ces propos ?

EPO/CPGE

Année académique 2020-2021

MP-Algèbre 3
Devoir 1 (4h)

PROBLEME I (6 points)

Partie I

1. Lister les éléments inversibles (en précisant leur inverse) de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et ceux de $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}^* - \{1, 2, 3, 4\}$. Montrer que si p et $p + 2$ sont premier, alors $p \equiv -1[6]$.
3. Montrer que le polynôme $X^2 - \bar{5}$ est irréductible sur $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}[X]$.

Partie II

On note K_{13} l'ensemble $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ que l'on munit des lois de composition suivantes :

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y'),$$

$$(x, y) \bullet (x', y') = (xx' + \bar{5}yy', xy' + x'y).$$

Pour $\alpha \in K_{13}$, on note $\alpha^2 = \alpha \bullet \alpha$.

1. Montrer que $(K_{13}, \oplus, \bullet)$ est un corps commutatif à 169 éléments.
2. Soit $H_{13} = \{(x, \bar{0}) \in \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}\}$ un sous-ensemble de K_{13}. Montrer que $(H_{13}, \oplus, \bullet)$ est un sous-corps isomorphe à $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, +, .)$.
3. Désormais, on identifie H_{13} et $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ en identifiant x et $(x, \bar{0})$. Trouver les éléments α de K_{13} tels que $\alpha^2 = \bar{5}$ et factoriser $X^2 - \bar{5}$ dans $K_{13}[X]$.

PROBLEME (14 points)

Entiers somme de deux carrés

L'objectif de ce problème est de déterminer quels sont les entiers naturels qui sont somme de deux carrés.

Notations :

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{C}$ désignent respectivement les ensembles des entiers naturels, des entiers relatifs et des nombres complexes.

On pose $\mathbb{Z}[i]=\{a+i.b/a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{Z}\}\subset\mathbb{C}$ et $\mathbb{Z}[i]^*=\mathbb{Z}[i]\setminus\{0\}$.

Pour $z\in\mathbb{C}$, on pose $N(z)=z\overline{z}$.

Partie I : Présentation de l'anneau de $\mathbb{Z}[i]$

1. Présentation de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$.

1.a Vérifier que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ muni de l'addition et de la multiplication usuelles.

1.b Etablir que pour tout $u,v\in\mathbb{Z}[i]$, $N(uv)=N(u)N(v)$ et que pour tout $u\in\mathbb{Z}[i]$, $N(u)\in\mathbb{N}$.

1.c Un élément $u\in\mathbb{Z}[i]$ est dit inversible ssi il existe $v\in\mathbb{Z}[i]$ tel que $uv=1$.
Montrer que si u est inversible alors $N(u)=1$.
Déterminer alors l'ensemble, noté U, des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

2. Divisibilité dans l'anneau $\mathbb{Z}[i]$.
Soit $u,v\in\mathbb{Z}[i]$. On dit que u divise v dans $\mathbb{Z}[i]$, et on note $u\mid v$, ssi il existe $s\in\mathbb{Z}[i]$ tel que $v=su$.

2.a Soit $u,v,w\in\mathbb{Z}[i]$. Etablir l'implication que si $u\mid v$ et $v\mid w$ alors $u\mid w$.

2.b Soit $u,v\in\mathbb{Z}[i]$. Etablir que si $u\mid v$ et $v\mid u$ alors $u=\pm v$ ou $\pm iv$.

2.c Soit $u,v\in\mathbb{Z}[i]$. Montrer que si u divise v alors $N(u)$ divise $N(v)$ dans $\mathbb{Z}$.

2.d Déterminer les diviseurs de $1+i$, puis de $1+3i$ dans $\mathbb{Z}[i]$.

3. Division euclidienne dans $\mathbb{Z}[i]$.

3.a Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$, il existe $u\in\mathbb{Z}[i]$ tel que $N(u-z)<1$.
Ce u est-il unique ?

3.b Montrer que pour tout $u\in\mathbb{Z}[i]$ et tout $v\in\mathbb{Z}[i]^*$, il existe $(q,r)\in\mathbb{Z}[i]\times\mathbb{Z}[i]$ tel que :
$u=vq+r$ avec $N(r)<N(v)$.
On pourra utiliser la division dans $\mathbb{C}$.

Partie II : Arithmétique dans $\mathbb{Z}[i]$

1. Soit $\delta\in\mathbb{Z}[i]$. On note $\delta.\mathbb{Z}[i]=\{\delta u/u\in\mathbb{Z}[i]\}$.
Montrer que $\delta.\mathbb{Z}[i]$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{Z}[i]$.

2. Soit $u,v\in\mathbb{Z}[i]$ avec $u\neq 0$ ou $v\neq 0$. On note $I(u,v)=\{uz+vz'/z,z'\in\mathbb{Z}[i]\}$.

2.a Observer que u et v appartiennent à l'ensemble $I(u,v)$.

2.b Montrer que l'ensemble $A=\{N(w)/w\in I(u,v)\setminus\{0\}\}$ possède un plus petit élément $d>0$.

2.c Soit δ un élément de $I(u,v)$ tel que $N(\delta)=d$. Etablir que $I(u,v)=\delta.\mathbb{Z}[i]$.
On pourra exploiter la division euclidienne présentée en I.3b.

2.d Montrer que δ divise u et v puis que
pour tout $w \in \mathbb{Z}[i]$, on a l'équivalence : ($w \mid u$ et $w \mid v$) $\Leftrightarrow w \mid \delta$.
On dit que δ est un pgcd de u et v.

3. Soit $u, v \in \mathbb{Z}[i]$ avec $u \neq 0$ ou $v \neq 0$.
On dit que u et v sont premiers entre eux ssi le nombre δ défini en II.2.d appartient à $\{\pm 1, \pm i\}$.
Dans les questions 3.a et 3.b, on suppose que u et v sont premiers entre eux.

3.a Justifier qu'il existe $z, z' \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $1 = uz + vz'$

3.b Soit $w \in \mathbb{Z}[i]$. Montrer que si u divise vw alors u divise w.

4. Soit $u \in \mathbb{Z}[i] - \{0, \pm 1, \pm i\}$.
On dit que u est irréductible ssi ses seuls diviseurs sont $\pm 1, \pm i, \pm u$ et $\pm iu$.

4.a Soit $v \in \mathbb{Z}[i]$. On suppose que u irréductible et ne divise pas v.
Montrer que u et v sont premiers entre eux.

4.b Soit $v, w \in \mathbb{Z}[i]$. On suppose que u est irréductible et divise vw.
Montrer que u divise v ou divise w.

Partie III : Nombres somme de deux carrés

1. On note $\Sigma = \{a^2 + b^2 / a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$.

1.a Montrer que $n \in \Sigma \Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{Z}[i], n = N(u)$.

1.b En déduire que si $n, n' \in \Sigma$ alors $nn' \in \Sigma$.

2. p désigne un nombre premier strictement supérieur à 2.

2.a Montrer que $p \in \Sigma \Rightarrow p \equiv 1$ modulo 4.
Nous admettrons que l'implication réciproque est vraie (quoique loin d'être immédiate).
Ainsi $5 = 1^2 + 2^2$, $13 = 2^2 + 3^2$, $17 = 1^2 + 4^2$,... sont des éléments de Σ.

2.b Montrer que si p n'est par irréductible alors $p \in \Sigma$.

3. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n = a^2 + b^2 \in \Sigma$. Soit $p \equiv 3$ modulo 4, un nombre premier diviseur de n.

3.a Montrer que $p \mid a + i.b$ dans $\mathbb{Z}[i]$.

3.b En déduire que p^2 divise n.

4. Etablir que les entiers naturels non nuls appartenant à Σ sont les nombres de la forme $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_N^{\alpha_N}$
avec $p_1, p_2, \dots, p_N$ nombres premiers deux à deux distincts et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ entiers naturels tels que :
$\forall 1 \leq i \leq N$, $p_i \equiv 3$ modulo 4 $\Rightarrow \alpha_i$ est pair.

EPO
CPGE

Contrôle en Informatique

MP
Année scolaire : 2020-2021

Algorithme et Programmation II

Documents et appareils (téléphones portables, tablettes, ordinateurs) : non autorisés

Calculettes non programmables : autorisées pour les calculs numériques

Durée : 3 heures

Exercice 1: Question de cours (10 points)

Question 1 : On définit les variables de la façon suivante :

```
int i=10;
int tab[10] ;
char c='f' ;
int *pti ;
char *ptc ;
```

Cochez la bonne réponse

a. pti=&i ; *pti=12 ;
b. pti=&tab ; *pti=4 ;
c. ptc=&c ; *ptc='a' ;
d. tab[i] est équivalent à &(tab+i) ;

Question 2 : On considère la déclaration suivante :

```
int *ptc
```

La variable « ptc » peut contenir :

a. des valeurs de variables de type entier
b. des adresses de variables de type caractère

Question 3 : Quelle sont les manières correctes pour passer un tableau d'entiers en argument ?

a. void fonction (int *tab, int dim)
b. void fonction (int tab[ ], int dim)
c. void fonction (int &tab, int dim)

Question 4 : Soit les lignes d'instruction suivantes :

```
struct timbre
{
      int prix ;
      int annee ;
      char origine[20] ;
      char image[20] ;
} ;
struct timbre COLLECTION[10] ;
```

Comment accède t-on à l'année du 3ème timbre de la collection

a. COLLECTION[2,2]
b. COLLECTION[2].annee
c. COLLECTION.annee[2]
d. (COLLECTION+2)->annee

Question 5 : On considère l'en-tête de la fonction suivante »

```
void fiche(float *x, float *y, int i, char z, char c)
```

On considère les déclarations suivantes :

```
float a, c ;

int j ;

char b, h ;
```

Quels sont les appels de fonctions corrects

a. fiche (a, c ; j ;b, h) ;
b. fiche (&a, &b, c, j, h) ;
c. fiche (&a, &c, 3, 'b',.b)
d. fiche (&a, &c, j, b, h) ;

Question 6 : Compléter le tableau en indiquant les valeurs des différentes variables au terme de chaque instruction du programme suivant (on peut aussi indiquer sur quoi pointent les pointeurs)

Programme	a	b	c	p1	*p1	p2	*p2
int a, b, c, *p1, *p2 ;	?	?	?	?	?	?	?
a = 1, b = 2, c = 3 ;							
p1 = &a, p2 = &c ;							
*p1 = (*p2)++ ;							
p1 = p2 ;							
p2 = &b ;							
*p1 -= *p2 ;							
++*p2 ;							
*p1 *= *p2 ;							
a = ++*p2 * *p1 ;							
p1 = &a ;							
*p2 = *p1 /= *p2 ;							

<u>Exercice 2</u> : Algorithmique (3 points)

On souhaiterait déterminer l'amende qu'un chasseur devra payer s'il tue certains animaux. Chaque chasseur possède un capital de 100 points. S'il tue une poule, il perd 1 point, 3 points pour un chien, 5 points pour une vache. Chaque point perdu lui coûte 20.000 frs CFA

Ecrire un programme qui demande à l'utilisateur de saisir successivement les nombre de poule (chien et vache) qu'il a tué. Ensuite, il affiche le montant à payer et le nombre de points restant

Exemple : Un utilisateur saisit les informations suivantes :

- Nombre de poules tués : 3
- Nombre de chien tué : 0
- Nombre de vache tués : 5

Il obtiendra alors :

- Nombre total de points perdu : 3 * 1 + 0*3 + 5*5 = 28
- Nombre de points restants = 100 – 28 = 72 .
- Amende à payer : 28*20000 = 560000 frs CFA

Exercice 3 : Traduction d'algorithme en langage C (7 points)

On souhaiterait traduire en langage C, la procédure permettant d' effectuer le tri d'un tableau en utilisant la méthode de tri à bulle (vu dans le cours). Son algorithme est le suivant :

```
Procédure tri_bulles ( T[1..n], : tableau d'entiers) :
Entier i,j
Début
    pour i← 1 à n-1 faire
        pour j← n à i+1 faire {décroissant}
            si T[j-1] > T[j] alors
               échange(T,j-1,j)
            fsi
        fpour
    fpour
Fin
```

La procédure « ***échange(T[1...n] : tableau d'entier, ind1 : entier, ind2 : entier)*** » permet d'échanger les valeurs des cases (aux indices « ind1 » et « ind2 » du tableau T).

1. Ecrire la procédure « échange » en langage C
2. Ecrire la procédure « tri_bulles » en langage C
3. Ecrire la fonction principale dans laquelle on demandera à l'utilisateur de spécifier la taille du tableau appelé « data ». Ensuite, il remplira le tableau, le triera puis affichera le tableau trié