Université Ouaga II
Classes Préparatoires d'entrée dans les Grandes Ecoles (CPGE)
Niveau d'études : 1re année MPSI
Enseignants : Dr P. KAFANDO
Dr S. OUOBA
Dr B. OUEDRAOGO
Dr J. KOURAOGO

Année universitaire 2018 – 2019

DEVOIR N°1 DE PHYSIQUE

Documents non autorisés, calculatrice autorisée

Durée : 3 heures

Chaque partie doit être traitée sur une feuille séparée

Partie I : Propagation d'un signal (7.5 points)

Exercice 1

Une corde de guitare, de longueur $l = 60\ cm$, est fixée à ses deux extrémités.

1) Quelle est la plus grande longueur d'onde possible pour une onde stationnaire sur cette corde ? S'agit-il du mode fondamental ou d'une harmonique ?

Représenter schématiquement la déformation de la corde.

2) Trouver la vitesse de propagation de l'onde progressive associée, sachant que dans ce cas la corde émet un son (La), de fréquence $f = 440\ Hz$

Dans une autre expérience, on considère deux ondes voyageant en sens contraire sur la corde. Les équations de ces ondes s'écrivent:

$y_1(x,t) = 0.02\sin[\pi(10t + 2x)]$ et $y_2(x,t) = 0.02\sin[\pi(10t - 2x) + \pi]$ (toutes les grandeurs sont données en SI).

x est l'abscisse du point M le long de la corde. O est l'extrémité de cette corde où $x = 0$.

3) Déterminer la longueur d'onde et la période de ces deux ondes progressives.
4) Ecrire l'équation d'onde $y_M(x,t)$ de l'onde stationnaire qui résulte de la superposition des deux ondes.
5) Trouver les positions par rapport à l'origine O des trois premiers nœuds.
6) Trouver les positions par rapport à l'origine O des trois premiers ventres.
7) Trouver l'amplitude A à $x = \dfrac{\lambda}{8}$

Partie II : Optique géométrique (12.5 points)

Consignes : a) Pour les calculs on donnera toujours la formule littérale avant de faire l'application numérique.
b) Il sera tenu compte de la rédaction lors de la notation de la copie.

Exercice 1

On considère la lame à faces parallèles d'indice n et d'épaisseur « e » ainsi que le rayon incident RI provenant d'une source monochromatique S (figure 1).

1) Compléter la marche du rayon incident RI jusqu'à sa sortie de la lame ;
2) Montrer que le rayon RR émergeant de la lame par la deuxième face est parallèle au rayon RI ;
3) Faire la construction géométrique de l'image S' de S puis donner sa nature ;
4) On considère cette fois-ci la figure 2 où le rayon incident RI pénètre dans la lame par sa section sous une incidence i. Le rayon subit des réflexions totales successives sur les deux faces parallèles de la lame (figure2). Montrer que l'angle d'incidence i vérifie la relation suivante : $\sin(i) \prec \sqrt{n^2-1}$

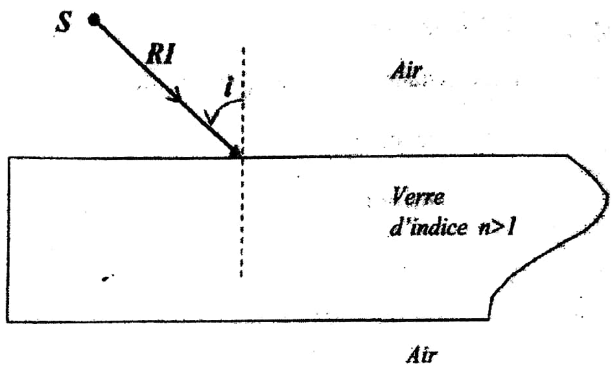


Figure 1

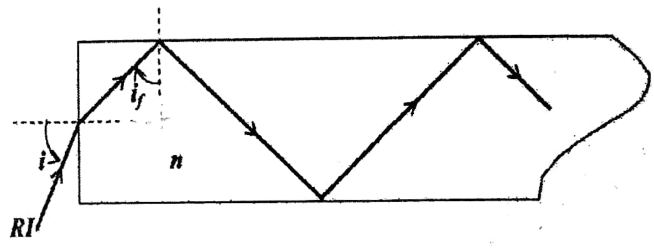


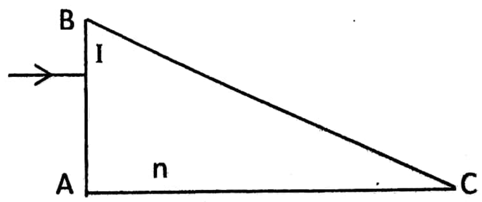
Figure 2

Exercice 2

On considère un prisme de verre d'indice n=1,50. Sa section principale est un triangle ABC, rectangle en A et tel que l'angle du prisme B, soit égal à 70°. Un rayon lumineux dans le plan ABC rencontre le prisme en I sur le côté AB et perpendiculairement à AB (figure 3).

1. Citez les deux conditions qui doivent être vérifiées par un prisme d'indice n placé dans un milieu d'indice n_0 pour qu'il y ait réflexion totale dans le prisme ;
2. Sachant que le prisme de la figure 3 est placé dans l'air, étudier la marche de la lumière jusqu'à sa sortie du prisme ;
3. On plonge le prisme dans un liquide d'indice n'. Entre quelles limites doit être compris l'indice n' si l'on veut que la lumière ne subisse qu'une seule réflexion totale dans le prisme ?

Figure 3



Exercice 3

Le microscope est un instrument d'optique destiné à l'observation d'objets dont les dimensions sont de l'ordre du micromètre. Le modèle le plus simple d'un microscope consiste en un système composé de deux lentilles minces convergentes de même axe optique appelées objectif et oculaire.

Partie A :

1) Dans un microscope où se situe l'oculaire ?

L'objectif est modélisé par la lentille L_1 (O_1, F_1, F'_1) de distance focale image f'_1=16mm et l'oculaire est modélisé par la lentille L_2 (O_2, F_2, F'_2) de distance focale image f'_2=50mm (où O_j, F_j, F'_j représentent respectivement le centre optique, le foyer principal objet et le foyer principal image de la lentille L_j. On souhaite observer un grain de pollen de longueur ℓ=50μm. Le grain de pollen sera représenté par un segment fléché AB perpendiculaire à l'axe optique, l'extrémité A étant placé sur l'axe optique à 17,6mm de O_1. L'intervalle optique $\Delta = \overline{F'_1F_2} = 160mm$. A_1B_1 est l'image de AB donnée par l'objectif et A'B' est l'image de AB donnée par le microscope

2) a – Donner la valeur de $e = \overline{O_1O_2}$;

   b - Déterminer par le calcul la position de l'image intermédiaire A_1B_1 (la position sera donnée par rapport à O_1 puis par rapport à O_2) ;

   c – Déduire la position de l'image finale A'B'.

3) Calculer le grandissement transversal γ_1 de l'objectif et déduire la taille de l'image intermédiaire A_1B_1.

4) Faire la construction géométrique de l'image sur la feuille millimétrée jointe.
   (**Echelle :** sur l'horizontale : 1cm → 0,5cm et sur la verticale : 50μm → 1cm)

Partie B :

Par convention, la distance minimale de vision distincte d'un œil normal est d=25cm

1) Calculer le diamètre apparent α du grain de pollen observé par un œil normal situé à la distance d ;
2) α' est l'angle sous lequel l'oeil observe l'image A'B'. Donner l'expression de α' en fonction de AB et de f'_2 puis calculer sa valeur ;
3) Le grossissement d'un microscope est donné par la relation $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$. Calculer le grossissement du microscope étudié.

Bon courage à tous !

Université Ouaga II

Classes Préparatoires d'entrée dans les Grandes Ecoles (CPGE)

Niveau d'études : 1re année MPSI

Enseignants : Pr I. ZERBO

Dr P. KAFANDO

Dr S. Z. KAM

Année universitaire 2018 – 2019

DEVOIR N°2 DE PHYSIQUE 1

Documents non autorisés, calculatrice autorisée

Durée : 3h

Exercice 1

On considère le circuit de la ***figure 1.a*** alimenté par un générateur de tension sinusoidale. Ce circuit transforme la tension d'entrée sinusoidale $e(t)$ en une tension de sortie $s(t)$.

1) Ce filtre est-il un passe-bas, passe-haut ou passe bande ? Justifier votre réponse sans faire de calcul.
2) Établir l'expression de la fonction de transfert de ce filtre $\underline{H}(j\omega)$.
3) Déterminer le module et la phase de cette fonction de transfert. Déduire le gain en décibels G_{dB}.
4) En précisant les limites du module de la fonction de transfert quand ω tend vers zéro et l'infini, vérifier la nature du filtre.
5) Quelle est la pulsation de coupure ω_c. Calculer la valeur de la résistance R dans le cas où la fréquence de coupure est $f_c = 1000\ Hz$ et $C = 0,1\ \mu F$.

Dans la suite, on utilise un oscilloscope dont les caractéristiques d'entrée sont : $R_0 = 10^6\ \Omega$ et $C_0 = 25\ pF$. Cet appareil, branché sur le filtre précédent, correspond ainsi au circuit de la ***figure 1.b***.

6) Déterminer l'admittance complexe $\underline{Y}$ telle que l'impédance $\underline{Z} = 1/\underline{Y}$
7) Déterminer le déphasage de la tension $\underline{s}$ par rapport à l'intensité $\underline{i}$ parcourant le dipôle équivalent d'admittance $\underline{Y}$. Quelle est sa limite à basse fréquence ?
8) Déterminer la nouvelle fonction de transfert $\underline{H'}(j\omega) = \underline{s}/\underline{e}$.

Exercice 2

Soit un circuit constitué de l'association en série d'une source idéale de tension E, d'une résistance R, d'un interrupteur K et de l'association en parallèle d'une résistance r, d'une inductance L et d'une capacité C ***(figure 2)***. Initialement l'interrupteur est ouvert, la capacité est déchargée et tous les courants sont nuls. On ferme l'interrupteur K à l'instant $t = 0$. On notera i l'intensité du courant dans R, i_1 dans L, i_2 dans C et i_3 dans r ainsi que u la tension aux bornes de r (ou de C ou de L).

1) Déterminer, en les justifiant, les valeurs de u, i, i_1, i_2 et i_3 juste après la fermeture de l'interrupteur K.
2) Même question lorsque le régime permanent est complètement établi.
3) Etablir l'équation différentielle vérifiée par i_3 pour $t > 0$.

4) Ecrire l'équation différentielle sous la forme : $\dfrac{d^2 i_3}{dt^2} + 2\lambda\omega_0 \dfrac{di_3}{dt} + \omega_0^2 i_3 = 0$.

On donnera les expressions de ω_0 et λ en fonction de r, R, L et C.

5) Etablir la condition que doivent vérifier r, R, L et C pour observer un régime pseudopériodique.

6) Donner les expressions de la pseudo-pulsation ω et la pseudo-période T en fonction de r, R, L et C.

7) Déterminer l'expression de i_3 en fonction du temps. On justifiera la détermination des constantes.

8) Exprimer le décrément logarithmique δ en fonction de T, ω_0 et λ. On rappelle que pour une grandeur oscillante $x(t)$, le décrément logarithmique s'écrit : $\delta = \ln\left[\dfrac{x(t)}{x(t+T)}\right]$.

9) Déterminer le temps nécessaire pour que le régime permanent soit établi dans le circuit avec une précision d'un millième (lorsque l'amplitude de i_3 devient inférieure au millième de sa valeur maximale).

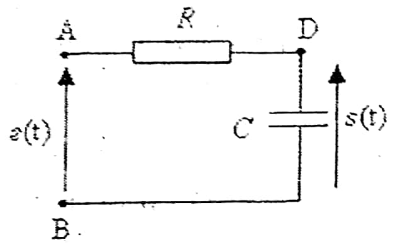


Figure1.a

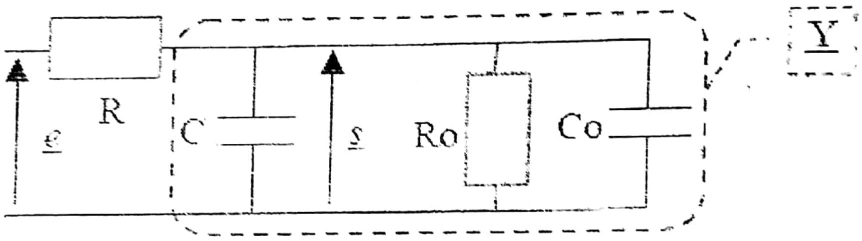


Figure1.b

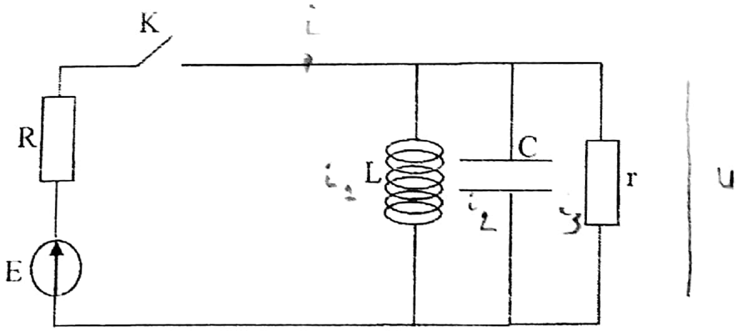


Figure 2

Université Ouaga 2
CPGE
Semestre 1

Examen de Physique

MPSI
Année scolaire : 2018-2019

(Propagation d'un signal, Optique géométrique, Electrocinétique, Mécanique du point matériel)

Cette épreuve comporte quatre (4) parties indépendantes ; il faut traiter chaque partie dans une copie différente.

Documents et appareils (téléphones portables, tablettes, ordinateurs) : non autorisés

Calculettes non programmables : autorisées pour les calculs numériques

---

Partie I : Propagation d'un signal

Exercice 1: Ondes progressives

Parmi les fonctions suivantes, indiquer celles qui représentent une onde progressive :

1. $y(x,t) = A\sin(Ax^2 - bt)$ **2.** $y(x,t) = A(x+bt)^3$ **3.** $y(x,t) = A\cos(ax+bt)^2$

4. $y(x,t) = Ae^{-\alpha(x-bt)^2}$ **5.** $y(x,t) = \dfrac{1}{b+\alpha(t-ax)^2}$ **6.** $y(x,t) = A\sin^2\left(\pi(t-\frac{x}{v})\right)$

7. $y(x,t) = Ae^{-\alpha t}\sin(ax-bt)$ **8.** $y(x,t) = A\cos(\omega t+\phi).\sin(kx+\psi)$

Indiquer la célérité dans le cas où l'onde est progressive.

Exercice 2 : Effet Doppler

Un radar ultrason émet un signal de fréquence $f = 80\ kHz$ qui se propage à la vitesse $c = 340\ m/s$.

1) Le radar est immobile et reçoit le signal réfléchi par un objet : ce signal à une fréquence $f_r = 81\ kHz$. L'objet s'approche-t-il ou s'éloigne-t-il du radar ? Quelle est sa vitesse ?
2) Le radar se déplace maintenant à une vitesse de $7{,}2\ m/h$ dans le sens du signal émis. Il reçoit, d'un objet, un signal réfléchi de $80{,}5\ kHz$. Dans quelle sens et à quelle vitesse se déplace l'objet ?

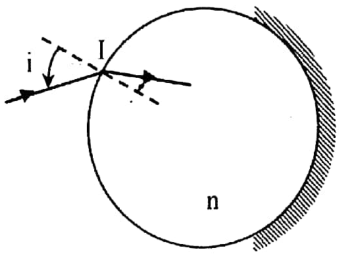
Université Ouaga 2 **Examen de Physique** **MPSI**
CPGE **Année scolaire : 2018-2019**
Semestre 1

(Propagation d'un signal, Optique géométrique, Electrocinétique, Mécanique du point matériel)

Partie II : Optique géométrique

Exercice 1

Une boule sphérique transparente d'indice n (>1), dont une partie de la surface est rendue réfléchissante, est placée dans l'air. Un rayon lumineux pénètre dans la boule, se réfléchit sur la partie métallisée puis émerge dans l'air. On notera i l'angle d'incidence

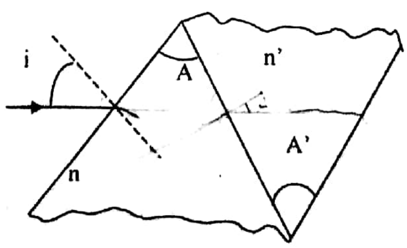


1) Tracer la marche du rayon lumineux.
2) La déviation D du rayon émergent par rapport au rayon incident est donnée par la valeur absolue de la somme algébrique des déviations en chaque point de contact du rayon lumineux avec la boule. Déterminer D.
3) Pour quelle valeur i_1 de l'angle d'incidence le rayon émergent est-il parallèle au rayon incident.
   Application numérique : $n = \sqrt{2}$
4) Pour quelle valeur i_m de l'angle d'incidence la déviation est-elle minimale? Calculer la déviation correspondante.

Exercice 2

On accole deux prismes, de sommets A et A' et d'indices n et n' respectivement.

1) On considère un rayon incident correspondant au minimum de déviation pour le premier prisme (A, n) supposé seul, calculer la valeur de l'angle A' du second prisme pour que l'angle d'émergence final soit égal à 45°.
   On donne : A = 60° ; $n = \sqrt{2}$; n'= 1,5.
2) On se place maintenant dans la situation où les deux prismes sont identiques (A=A' = 60° ; $n = n' = \sqrt{2}$).
   Déterminer la position du rayon émergent par rapport au rayon incident correspondant au minimum de déviation.



Université Ouaga 2
CPGE
Semestre 1

Examen de Physique

MPSI
Année scolaire : 2018-2019

(Propagation d'un signal, Optique géométrique, Electrocinétique, Mécanique du point matériel)

Partie III : Electrocinétique (1h 15mn)

Problème

On relie par des fils de résistance négligeable, deux points A_1 et B_1 à deux points A et B entre lesquels on maintient une tension sinusoidale $u(t) = U_m \cos(\omega t)$.

1. Entre A_1 et B_1 on place en dérivation une bobine (d'inductance L et de résistance r) et un condensateur C de capacité variable (**figure 1**).
   1.1. Déterminer l'expression de l'impédance complexe $\underline{Z}$ entre les points A_1 et B_1.
   1.2. Déterminer l'amplitude complexe $\underline{I}$ de l'intensité du courant principal $I(t)$.
   1.3. Déduire son amplitude maximale I_m et son retard de φ par rapport à la tension $u(t)$.
   1.4. Pour quelle valeur C_0 de la capacité, l'intensité I_m est-elle minimale ?
   1.5. Montrer que le circuit est alors équivalent à une résistance pure R_0 que l'on exprimera en fonction de r, L et C_0.
   1.6. On néglige la résistance r de la bobine, que devient la résistance R_0 ? Justifier l'appellation de "circuit bouchon".
2. On considère maintenant le circuit modifié et présenté par la **figure 2** : entre les bornes de A_1 et B_1, on dispose trois branches en parallèle contenant respectivement une bobine d'inductance L de résisitance negligéable, un condensateur de capacité C et une résistance variable R.
   On designera par I_L, I_C et I les amplitudes maximales des courants respectivement dans la bobine, le condensateur et le courant principal.
   2.1. Déterminer le facteur de surintensité $Q_L = I_L/I$ en fonction de R, L, C et ω.
   2.2. Calculer en fonction de R, L et C la pulsation ω_L pour laquelle le facteur Q_L est maximal. Calculer la valeur maximale de Q_L et donner la condition d'existence de ce maximum.
   2.3. Tracer l'allure du graphe $Q_L(\omega)$.

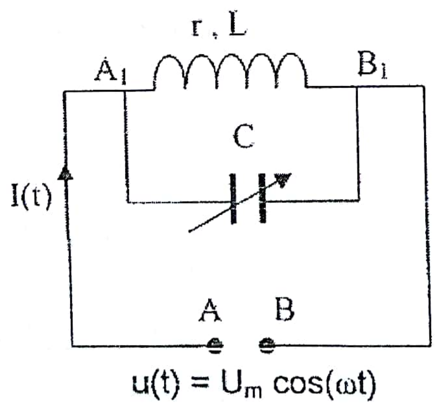


Figure 1

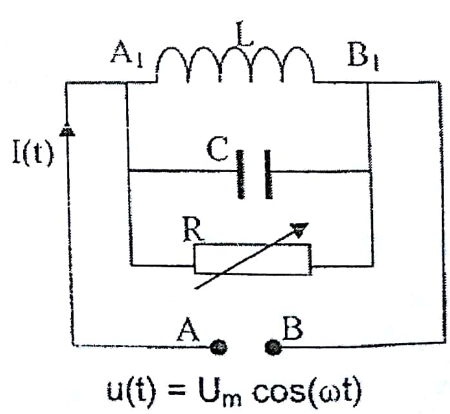


Figure 2

Université Ouaga 2
CPGE
Semestre 1

Examen de Physique

MPSI
Année scolaire : 2018-2019

(Propagation d'un signal, Optique géométrique, Electrocinétique, Mécanique du point matériel)

Partie IV : Mécanique du point matériel

Problème

On maintient verticalement, une bille d'acier de masse m, en équilibre à l'aide d'un électroaimant ; le centre de gravité A de la bille est à une hauteur h du sol horizontal. On désigne par $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur terrestre et on assimile la bille à un point matériel.

1) Définir un repère cartésien $R = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, lié au sol, que l'on prendra comme système de référence pour l'étude mécanique de la bille.
2) Dans le repère cartésien $R = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, donner les expressions du vecteur-position de la bille et du vecteur-accélération $\vec{g}$.
3) Montrer que le poids $\vec{P}$ de la bille est une force conservative ; en déduire l'expression de l'énergie potentielle U de la bille
4) À l'instant $t = 0$, on coupe le courant de l'électroaimant ; quelle est la nature du mouvement de la bille si on néglige les forces de frottements ? On déterminera à chaque instant t les grandeurs cinématiques du mouvement.
5) Quelles sont les équations paramétriques du mouvement de la bille ?
6) Soit $\vec{v}$ le vecteur-vitesse de la bille à chaque instant t ; si d est la distance qui sépare le centre de gravité de la bille de sa position initiale, montrer que l'on a la relation suivante : $\|\vec{v}\|^2 = 2gd$
7) Déterminer l'expression du vecteur-vitesse de la bille lorsqu'elle touche le sol.
8) Au contact du sol, on suppose que la bille rebondit verticalement ; en négligeant les frottements, déterminer le vecteur-vitesse $\overrightarrow{v'}$ de la bille juste après le contact.
9) Si on néglige toujours les frottements, quelle est la hauteur maximale atteinte par la bille après avoir rebondit sur le sol ?

&&&&&

Université Ouaga 2 | **Physique 1 : Mécanique du point matériel** | **Enseignants :**

CPGE

MPSI

Année scolaire : 2018-2019 | **Devoir** | **Dr SOUGOTI Moussa, Dr NANA Bernard**

Documents et appareils (téléphones, tablettes, calculettes) : non autorisés

Durée : 3 heures

I. Mouvement en spirale (4 points)

Dans le repère cartésien $R = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, les équations paramétriques d'un point $P = (x, y, z)$, en fonction du temps t et des constantes positives b et k, sont :

$$x = be^{-kt}\cos kt$$
$$y = be^{-kt}\sin kt$$
$$z = 0$$

1) Montrer que le mouvement est plan
2) Déterminer en fonction du temps t, les coordonnées polaires ρ et φ du point P dans le plan du mouvement.
3) En déduire l'équation polaire $\rho = f(\varphi)$ de la trajectoire du point P.
4) Déterminer en fonction du temps t, les composantes polaires de la vitesse $\vec{v}_R(P)$ et de l'accélération $\vec{a}_R(P)$ du point P.
5) Déterminer l'angle $\alpha = \left(\widehat{\overrightarrow{OP}, \vec{v}_R(P)}\right)$.

II. Force visqueuse (6 points)

Une particule de masse m, de vitesse initiale $\vec{v}_0$, se déplace verticalement de haut vers le bas. L'action de l'air sur la particule est représentée par une force visqueuse $\vec{F}$, qui est proportionnelle à la vitesse instantanée $\vec{v}$ de la particule :

$\vec{F} = -km\vec{v}$; k est une constante positive

1) Définir le référentiel terrestre $R = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ nécessaire pour l'étude du mouvement
2) Quelles sont les forces qui s'exercent sur la particule ?
3) En supposant le référentiel terrestre galiléen, appliquer la relation fondamentale de la dynamique et déterminer :
   a. La vitesse $\vec{v}$ de la particule à l'instant t
   b. La vitesse limite $\vec{v}_l$ de la particule lorsque t tend vers l'infini
   c. L'accélération $\vec{a}$ de la particule à l'instant t
   d. La loi horaire exprimant la distance parcourue s en fonction du temps t.

Données : $g = 10\ m\ s^{-2}$; $k = 25\ s^{-1}$; $v_0 = 10\ m\ s^{-2}$

Université Ouaga 2 | **Physique 1 : Mécanique du point matériel** | **Enseignants :**

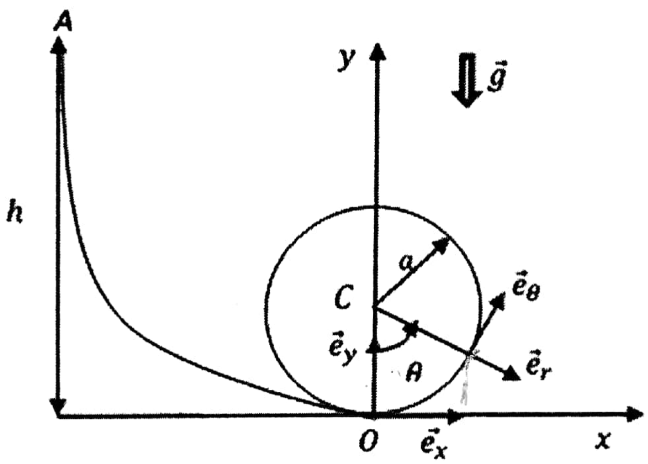
CPGE

MPSI

Année scolaire : 2018-2019 | **Devoir** | **Dr SOUGOTI Moussa, Dr NANA Bernard**

III. Problème (10 points)

Une bille, assimilée à un point matériel M de masse m, est lâchée sans vitesse initiale depuis le point A d'une gouttière situé à une hauteur h du point le plus bas O de la gouttière. Cette dernière est terminée en O par un guide circulaire de rayon a, disposé verticalement. La bille, dont on suppose que le mouvement a lieu sans frottement, peut éventuellement quitter la gouttière vers l'intérieur du cercle. On désigne par $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur (*cf.* figure ci-dessous)



1) Définir le référentiel terrestre $R = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ d'étude et déterminer les cordonnées de $\vec{g}$
2) Calculer la norme v_0 de la vitesse de la bille en O
3) Exprimer la norme v_M de la vitesse de la bille en un point quelconque M du cercle, repéré par l'angle θ .
4) Le vecteur-position de la bille étant $\overrightarrow{CM}$, on pose $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{CM}}{\|\overrightarrow{CM}\|}$ et la réaction du guide circulaire sur la bille peut s'écrire : $\vec{R} = R\vec{e}_r$; déterminer l'expression de R en fonction de $m, g, \theta, h\ et\ a$. On utilisera le repère cartésien local $(\mathrm{M}, \vec{\mathrm{e}}_\mathrm{r}, \vec{\mathrm{e}}_\theta)$
5) Déterminer la hauteur minimale h_{min} à partir de laquelle il faut lâcher la bille sans vitesse initiale pour qu'elle ait un mouvement de révolution dans le guide.
6) On lâche la bille sans vitesse initiale depuis une hauteur $h_0 = 2a$. Calculer, en degrés, la valeur θ_0 de l'angle θ pour laquelle la bille quitte le guide.

&&&&&

CPGE Ouaga 2

UNIVERSITE OUAGA 2
Parcours : **MPSI**
UEF : **Electromagnétisme 1**
Enseignants: **Pr Issa ZERBO**
Dr Pétronille KAFANDO, Dr Zacharie S. KAM

ANNEE UNIVERSITAIRE 2018-2019
Niveau : **1ère année**
Durée : **3 heures**
Date : **18 mai 2018**

EVALUATION DE PHYSIQUE 2

Documents non autorisés, Calculatrice autorisée

Exercice 1 Modélisation d'un nuage mince (6 points)

On considère, dans le vide et loin de toute charge, un nuage électrique Π suffisamment étendu pour le considérer d'épaisseur négligeable, d'équation $z = h$ et chargé avec la densité surfacique constante négative σ.

1. Donner l'expression du champ électrique créé par le nuage, considéré comme un plan infini, en tout point M de l'espace c'est-à-dire pour $z > h$ et $z < h$).

2. On considère maintenant que le plan xOy représentant le sol porte une densité de charge opposée à celle du nuage. Déterminer le champ total créé par le sol et le nuage pour $0 < z < h$.

3. Déterminer le potentiel total créé par le sol et le nuage pour $0 < z < h$ sachant que $V(0) = 0$.

4. Ce condensateur modélise un nuage carré de $10\ km$ de côté à une hauteur $h = 2\ km$.
Déterminer la capacité du condensateur ainsi formé et effectuer l'application numérique.

5. On considère maintenant un nuage d'orage. Sachant que lorsque l'éclair se forme, le champ électrique a pour valeur $25\ kV.m^{-1}$, déterminer le potentiel V_0 du nuage.

Exercice 2 Atome d'hydrogène (7 points)

L'atome d'hydrogène, dans son état fondamental, est équivalent à une distribution de charges qui crée un potentiel donné par l'expression, en coordonnées sphériques:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1+\frac{r}{a}\right)exp\left(-\frac{2r}{a}\right) \text{ où } q \text{ et } a \text{ sont positifs.}$$

1. Déterminer la charge $Q(r)$ comprise dans la sphère de rayon r et de centre O.

2. Caractériser entièrement la distribution de charges à la source de ce potentiel (densité volumique de charge $\rho(r)$, éventuelles charges ponctuelles). Vérifier la compatibilité avec l'atome d'hydrogène.

3. Étudier et représenter la densité radiale de charge $\frac{dQ}{dr} = f(r)$. Interpréter.

Exercice 3 (7 points)

Soit un cylindre de longueur infinie, d'axe (Oz), de rayon R et parcouru par une densité volumique de courant $\vec{j} = j_0 r^2 \vec{u}_z$ où j_0 est une constante positive (**voir figure 1**).

1. Donner la relation générale entre le courant I traversant la surface S et la densité de courant $\vec{j}$. Exprimer I en fonction de j_0 et R.

2. Etudier les symétries et invariances de la distribution de courant et déduire la direction et le sens du champ magnétique en un point M quelconque de l'espace, ainsi que les variables dont il dépend.

3. Donner l'énoncé du théorème d'Ampère.

4. En utilisant le théorème d'Ampère, calculer alors le champ magnétique en tout point de l'espace en fonction de I, R, μ_0 et r la position du point M. Tracer $\|\vec{B}\|$ en fonction de r.

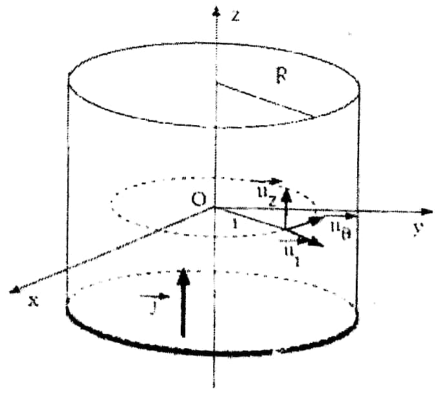


Figure 1

Année académique : 2018-2019
MPSI, S2
Durée: 4 heures
Juillet 2019

Classes Préparatoires d'entrée dans les Grandes Ecoles (CPGE)

UO2 UNIVERSITE OUAGA II

Examen de Physique

Tout support papier et numérique du cours et du TD non autorisé, calculatrice autorisée

Les deux parties doivent être traitées sur des feuilles séparées

Partie I : ELECTROMAGNETISME 1 (5 points)

Exercice : Quatre charges aux sommets d'un carré

On considère la distribution constituée de quatre charges ponctuelles q (positives) de même valeur placées aux sommets d'un carré de côté a (figure 1). On note O le centre du carré et on s'intéresse au potentiel et au champ électrostatiques créés par les quatre charges en un point M situé sur la droite (Ox) perpendiculaire au plan du carré et passant par O (le point M est à la côte x).

1. Trouver, en utilisant les symétries, la direction du champ électrostatique en M ;

2. En exploitant les résultats de la question précédente, calculer directement le champ électrostatique créé en M ;

3. En déduire l'expression du potentiel électrostatique créé en M ;

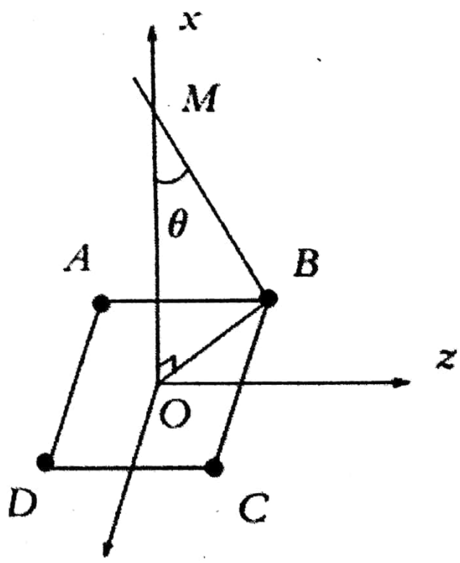


Figure 1

4. On modifie la distribution de la figure 1 en mettant une charge -2Q en un point E de l'axe Ox (avec OE=b). Déterminer l'énergie électrostatique E du système.

Partie II THERMODYNAMIQUE (15 points)

Exercice 1

Dans une machine thermique, une mole d'un gaz parfait décrit le cycle des transformations suivantes :

Initialement à l'état 1, {$P_1=10^5$ Pa, T_1=300k), il subit une évolution adiabatique jusqu'à l'état 2: (P_2, T_2) ; Il se trouve alors en contact avec une source chaude, et il se réchauffe, de façon isobare, jusqu'à T_3=900K.

Ensuite, il se détend de manière adiabatique réversible jusqu'à la pression P_4, sa température est alors T_4. Il achève de se refroidir, d'une façon isobare, au contact d'une source froide, il se trouve, alors dans l'état 1.

1. Quelle est la relation entre P_2 et P_3 ?
2. Tracer le cycle sur le diagramme de Clapeyron (P, V).
3. Démontrer que lors d'une transformation adiabatique, on a la relation suivante :

   $P^{1-\gamma}T^{\gamma} = cte$
4. En déduire l'expression de T_2 en fonction de P_1, P_2, T_1 et γ;
5. En déduire l'expression de T_4 en fonction de P_1, P_2, T_3 et γ.
6. Exprimer en fonction des températures t'énergie Q_c échangée avec la source chaude et Q_f échangée avec la source froide.
7. Donner l'expression du travail de cycle en fonction de Cp, T_1, T_2, T_3 et T_4.
8. Soit le rapport $\tau = \frac{P_2}{P_1}$; Pour $\tau = 4$ $\gamma = 1,4$, Donner les valeurs numériques des différents paramètres (P, V, T) , des travaux et des quantités de chaleurs échangées, quelle la nature du cycle ? justifier votre réponse

9. donner le rendement η théorique de cette machine et démonter qu'il peut s'écrire :

$\eta = 1 - \tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$; calculer le rendement

Exercice 2

Données :

– Tous les gaz considérés sont supposés parfaits.

– La constante des gaz parfaits : R = 8,31 SI.

– La correspondance des températures : T(K) = t° (C) + 273.

– Le rapport des capacités thermiques molaires de l'air, à pression constante (Cp) et à volume constant (Cv) : $\gamma a = Cp / Cv = 1,4$.

– La relation de Mayer : $Cp - Cv = R$.

– La masse molaire de l'air : $Ma = 29\ g.mol^{-1}$.

– Le champ de pesanteur uniforme : $g = 9,8\ m.s^{-2}$.

On étudie un moteur à explosion d'automobile (à quatre temps). Dans l'un des quatre cylindres, on considère une quantité de matière formée de n moles d'un fluide et qui décrit le cycle de Beau de Rochas (ou d'Otto) entre les états notés A. B, C et D de façon supposée réversible :

– AB : compression adiabatique,

– BC : échauffement isochore,

– CD : détente adiabatique,

– DA : refroidissement isochore.

Les grandeurs : pression, température, volume et entropie sont notées respectivement P, T, V et S. On appelle rapport volumétrique la quantité $x = VA/ VB$. On note par Tm la température maximale atteinte au cours du cycle.

Pour le fluide air-carburant, l'air étant en grand excès, on assimilera le mélange qui décrit le cycle ABCDA à un gaz parfait unique, de coefficient $\gamma = Cp / Cv = \gamma a$.

1.1. Représentation du cycle

1.1.1. Représenter l'allure du cycle ABCDA dans un diagramme de Watt (P : ordonnée, V : abscisse). Interpréter le sens de parcours et la signification de l'aire délimitée par le cycle.

1.1.2. Pour chacune des transformations, déterminer l'allure de T(S) et tracer le cycle ABCDA dans le diagramme (T, S).

1.2. Expression du rendement

1.2.1. Soient QF et QC les chaleurs reçues, lors d'un cycle, par le système de la source froide et de la source chaude respectivement. Préciser les signes de ces deux grandeurs. Donner l'expression du rendement r en fonction de QF et QC.

1.2.2. Déterminer, pour chacune des transformations précédentes, les expressions du travail et chaleur reçus par le fluide.

1.2.3. Exprimer le rendement r du moteur en fonction de x et γ. Comment varie ce rendement avec x ?

MPSI-Algèbre 1
Devoir 1
Durée : 3 heures

Exercice 1. *6 points.*

Soit $f : \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \to \mathbb{Q}$ une application définie par : $\forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$, $f((p,q)) = p + \frac{1}{q}$.

1. Soit $g : E \to F$ une application. Que signifie les expressions : "g est une application injective" ; "g est une application surjective".
2. On se propose de montrer que f est injective.
   a) Démontrer que pour tout $k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}), 0 < \frac{1}{k} \leq 1$.
   b) Soit à présent (p,q), $(p\prime, q\prime) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$. Démontrer que :
      i. $-1 \leq \frac{1}{q} - \frac{1}{q\prime} \leq 1$.
      ii. $f(p,q) = f(p\prime,q\prime) \Rightarrow |p - p\prime| \leq 1$.
   c) Démontrer que f est injective.
3. On étudie à présent la surjectivité de f.
   a) Le nombre rationnel $\frac{2}{3}$ a t'-il un antécédent par f ? Justifier votre réponse.

   b) L'application f est-elle surjective ? Justifier votre réponse.

Exercice 2. *4 points.*

Soient E un ensemble et H une partie fixée de E. On note $\overline{H}$ le complémentaire de H dans E. On définit dans $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E, la relation $\leq$ par :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \leq B \Leftrightarrow (A \cap H \subset B \cap H \quad et \quad B \cap \overline{H} \subset A \cap \overline{H}).$$

1. Démontrer que $\leq$ est une relation d'ordre. L'ordre est-il total ou partiel ?
2. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ a-t-il un plus grand élément et un plus petit élément pour cette relation d'ordre ?

Exercice 3. *10 points.*

Soient $A \subseteq \mathbb{N}$ et n un entier naturel non nul ($n \geq 1$). On pose

$$S_n(A) = Card(A \cap \{1, 2, ..., n\})$$

et on appelle densité de Schnireimann de A le réel

$$\sigma(A) = inf\{\frac{S_n(A)}{n}, n \geq 1\}.$$

Si A et B sont deux parties de $\mathbb{N}$, on pose $A + B = \{a + b, \ a \in A, b \in B\}$.

1. a) Justifier la définition de $\sigma(A)$.
   b) Que vaut $\sigma(A)$ si $1 \notin A$?
   c) Sous quelle condition a-t-on $\sigma(A) = 1$?

d) Si $A \subset B$, comparer $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$.

2. Calculer $\sigma(A)$ pour les parties suivantes :
   a) A est une partie finie de $\mathbb{N}$.
   b) A est l'ensemble des entiers impairs.
   c) Soit $k \geq 2$ un entier fixé et A l'ensemble de puissances k-ièmes d'entiers.

$$A = \{m^k,\ m \in \mathbb{N}^*\}.$$

3. Soient A et B deux parties de $\mathbb{N}$ contenant 0 et $n \geq 1$ un nombre entier. En considérant

$$C = \{n - b, b \in \{0, 1, ..., n\} \cap B\}$$

montrer que

$$S_n(A) + S_n(B) \geq n \Rightarrow n \in A + B.$$

4. *a)* Montrer que si $\sigma(A) + \sigma(B) \geq 1$ alors $A + B = \mathbb{N}$.
   b) Montrer que si $0 \in A$ et $\sigma(A) \geq \frac{1}{2}$ alors tout nombre entier est la somme de deux éléments de A.

CPGE **Année académique 2017-2018**

Algèbre 1
Devoir Surveillé 1
Durée : 3h

Exercice 1. *(6 pts)*
Soit E un ensemble.

1. *Montrer les assertions suivantes :*
   (a) $\forall\ A, B \in \mathcal{P}(E), (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$.
   (b) $\forall\ A, B, C \in \mathcal{P}(E), (A \cup B = A \cup C$ *et* $A \cap B = A \cap C) \Rightarrow B = C$
2. *Caractériser les parties A, B, C de E telles que :* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.

Exercice 2. *(4pts)*
On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 3(x - y).$$

1. *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.*
2. *Déterminer pour chaque $x \in \mathbb{R}$, le cardinal de la classe d'équivalence de x dans $\mathbb{R}$.*

Exercice 3. *(4pts)*

1. *Déterminer les sommes suivantes :*
   (a) $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$
   (b) $\sum_{1 \leq i,j \leq n} (i + j)^2$.
2. (a) *En utilisant la formule du binôme de Newton, développez $(1 + x)^n$.*
   (b) *En déduire les sommes suivantes :*
      i) $U = \sum_{k=1}^{n+1} (k - 1)\binom{n}{k-1}$.
      ii) $V = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} k\binom{n}{k}$.

Exercice 4. *(6pts)*

1. *Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux. Pour k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n - 1$, on note $z_k = exp(2ki\pi/n)$ une racine n-ième de l'unité.*
   (a) *Montrer que $z_0 + z_1 + \ldots + z_{n-1} = 0$.*
   (b) *Pour $n=3$, déterminer z_0, z_1 et z_2.*
2. *Soient a, b, c des nombres complexes deux à deux distincts. On note $j = \exp(2i\pi/3)$.*
   (a) *Exprimer $exp(i\pi/3)$ en fonction de j.*
   (b) *Montrer l'équivalence des propositions suivantes :*
      i) *Dans le plan, les points A, B, C d'affixes respectives a, b, c forment un triangle équilatéral.*
      ii) $j^2a + jb + c = 0$ *ou* $ja + j^2b + c = 0$.
      iii) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

* * *

Bonne Chance

* * *

DS2 Algèbre 1

3 heures

Exercice 1 (3 pts= 2+1)

Soit $\omega = \exp \frac{2i\pi}{7}$ et $u = \omega + \omega^2 + \omega^4$, $v = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

1^0) Calculer $u + v$, uv.

2^0) En déduire les formes algébriques de u et v.

Exercice 2 (7pts=0,5+1+2+3+0,5)

On considère l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$.

1^0) Donner une solution simple de (1).

Dans la suite (x, y, z) désigne une solution de (1) dans $(\mathbb{N}^*)^3$.

2^0) On note $d = pgcd(x, y)$.

(a) Montrer que d divise z.

(b) On pose $x = dx'$, $y = dy'$, $z = dz'$. Montrer que z' est premier avec x' et avec y'. Le triplet (x', y', z') est évidemment solution de (1).

3^0) (a) Soient a et b deux entiers impairs. Montrer que $a^2 + b^2 - 2$ est divisible par 4.

(b) En déduire que x' et y' ne peuvent pas être tous les deux impairs.

(c) Montrer que x' et y' sont de parités différentes. Quelle est la parité de z' ? On suppose dans la suite que x' est pair.

4^0) On pose $x' = 2a$ avec $a \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer qu'il existe deux entiers strictement positifs b et c tels que $b + c = z'$ et $b - c = y'$. En déduire que $a^2 = bc$.

(b) Montrer que b et c sont premiers entre eux. En déduire qu'il existe deux entiers u et v dans $\mathbb{N}^*$ tels que $b = u^2$ et $c = v^2$.

(c) En déduire que

$$x = 2duv, \quad y = d(u^2 - v^2), \quad z = d(u^2 + v^2).$$

5⁰) Réciproquement, montrer que tout triplet (x, y, z) de la forme ci-dessus avec $d, u, v \in \mathbb{N}^*$ et $u > v$, est une solution de (1). Conclure.

Problème (10pts=2+1+4+3)

Dans tout le problème, $A = \{a + b\sqrt{7} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1⁰) (a) Montrer que $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$ et en déduire que l'application

$$\varphi : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow A, (a, b) \longmapsto a + b\sqrt{7}$$

est bijective.

(b) Démontrer que A est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

(c) Démontrer que l'ensemble $U(A)$ des éléments inversibles de A est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

2⁰) Pour $x = a + b\sqrt{7}$, on pose $\overline{x} = a - b\sqrt{7}$ et $N(x) = x\overline{x} = a^2 - 7b^2$.

(a) Démontrer que $\forall (x, y) \in A^2, N(xy) = N(x)N(y)$.

On admet que l'équation $N(x) = -1$ n'admet pas de solution dans A.

(b) Démontrer que

$$\forall x \in A, \Big(x \in U(A) \Longleftrightarrow N(x) = 1\Big).$$

3⁰) (a) Soit $x = a + b\sqrt{7} \in U(A)$. Démontrer que

$$a \geq 0 \text{ et } b \geq 0 \Longleftrightarrow a + b\sqrt{7} \geq 1.$$

(b) Démontrer que $U(A)$ n'est pas réduit à $\{1, -1\}$.

(c) Démontrer que $]1, 3\sqrt{7}[\cap U(A) = \phi$.

(d) Démontrer qu'il existe un unique $u \in U(A) \cap]1, +\infty[$ tel que

$$U(A) = \{u^n, \ n \in \mathbb{Z}\} \cup \{-u^n, \ n \in \mathbb{Z}\}.$$

4⁰) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^n = a_n + b_n\sqrt{7}$.

(a) Démontrer que les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et strictement croissantes.

(b) En déduire la valeur de u.

(c) Donner dans l'ordre croissant des valeurs de x, les quatre plus petites solutions dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ de l'équation dite de Pell-Fermat :

$$x^2 - 7y^2 = 1.$$

Université Ouaga II–CPGE **Année académique 2018-2019**

Algèbre 1
Examen S1
Durée : 4h

Exercice 1. *(5 points)*

Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ par :

$$\forall \ z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ z_1 \mathcal{R} z_2 \Leftrightarrow \exists\ \theta \in \mathbb{R}; z_2 := \frac{z_1 \cos(\theta) + \sin(\theta)}{-z_1 \sin(\theta) + \cos(\theta)}.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{C}$.
2. Déterminer la classe d'équivalence de 0.
3. Montrer que $z_1 \mathcal{R} z_2 \Leftrightarrow \overline{z}_1 \mathcal{R} \overline{z}_2$. Comparer la classe d'équivalence de z et $\overline{z}$.
4. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $z_1 \mathcal{R} z_2$. Calculer $z_2 - i$ en fonction de $z_1 - i$. En déduire la classe d'équivalence de i.
5. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes distincts de i. Montrer que :

$$z_1 \mathcal{R} z_2 \Leftrightarrow \left|\frac{z_2 + i}{z_2 - i}\right| = \left|\frac{z_1 + i}{z_1 - i}\right|.$$

Exercice 2. *(5 points)*

On pose $A = (X+1)^{2n} - 1$, un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, $n \geq 1$.

1. Montrer que l'on peut écrire $A = X \times B$ où B est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont on précisera le degré, le coefficient dominant et le terme constant noté b_0.
2. Déterminer les racines (sous forme trigonométrique) de A dans $\mathbb{C}$.
   On note $z_0, z_1, z_2, \cdots, z_{2n-1}$ ces racines, avec $z_0 = 0$.
   On pose $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{2n})$.
3. Montrer, à l'aide d'un changement d'indice, que $P_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin(\frac{k\pi}{2n})$.
   En déduire que, si $Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin(\frac{k\pi}{2n})$, alors $P_n = \sqrt{Q_n}$.
4. Calculer de deux façons différentes : $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$. Puis en déduire Q_n et enfin P_n.
5. On pose $F = \frac{1}{A}$. Déterminer la décomposition de F en éléments simples sur $\mathbb{C}$.

Exercice 3. *(10 points) (Deux familles de polynômes).*

Les parties A) et B) sont indépendantes.

$A)$ **Polynômes de Fibonacci**

On considère la suite (F_n) définie par les relations :
$F_0 = 0, F_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = XF_{n+1} + F_n$.

1) Calculer F_5 et F_6.
2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1}^2 = 1 + F_n F_{n+2}$.
3) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, F_n$ et F_{n+1} sont premiers entre eux.

4) Etablir que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $F_{m+n} = F_n F_{m+1} - F_{n-1} F_m$.

5) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $pgcd(F_{m+n}, F_n) = pgcd(F_n, F_m)$.

6) En déduire que $pgcd(F_m, F_n) = pgcd(F_n, F_r)$ où r est le reste de la division euclidienne de m par n.

7) Conclure que $pgcd(F_n, F_m) = F_{pgcd(m,n)}$ et que F_n divise F_m si et seulement si n divise m.

8) *Polynômes de Lucas*

On considère à present la suite (L_n) définie par les relations :

$L_0 = 2, L_1 = X$, et $\forall n \in \mathbb{N}, L_{n+2} = XL_{n+1} + L_n$. Calculer L_5 et L_6.

B) Polynômes de Legendre

On note $H^{(k)}$ la dérivée d'ordre k de H où $k \in \mathbb{N}$ et H un polynôme sur $\mathbb{R}$. On rappelle la formule de Leibniz :

$$(FG)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F^{(k)} G^{(n-k)}$$

Pour tout entier naturel n on définit le polynôme de Legendre : $P_n = \frac{n!}{(2n)!} \left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$

1) Déterminer le degré et le coéfficient dominant de P_n.

2) En utilisant la formule de Leibniz, montrer que $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} n!(\binom{n}{k})^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k$.

3) Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

4) Montrer que :

i) Si n est impair alors $P_n(0) = 0$.

ii) Si n est pair alors $P_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\binom{k}{\frac{n}{2}}}{2^n}$.

4) Etablir que pour tout $m \in \mathbf{N}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on a : $F_{m+n} = F_n F_{m+1} - F_{n-1} F_m$.

5) Montrer que pour tout $m \in \mathbf{N}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on a : $pgcd(F_{m+n}, F_n) = pgcd(F_n, F_m)$.

6) En déduire que $pgcd(F_m, F_n) = pgcd(F_n, F_r)$ où r est le reste de la division euclidienne de m par n.

7) Conclure que $pgcd(F_n, F_m) = F_{pgcd(m,n)}$ et que F_n divise F_m si et seulement si n divise m.

8) *Polynômes de Lucas*

On considère à present la suite (L_n) définie par les relations :
$L_0 = 2, L_1 = X$, et $\forall n \in \mathbf{N}, L_{n+2} = XL_{n+1} + L_n$. Calculer L_5 et L_6.

B) **Polynômes de Legendre**

On note $H^{(k)}$ la dérivée d'ordre k de H où $k \in \mathbb{N}$ et H un polynôme sur $\mathbb{R}$. On rappelle la formule de Leibniz :

$$(FG)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F^{(k)} G^{(n-k)}$$

Pour tout entier naturel n on définit le polynôme de Legendre : $P_n = \frac{n!}{(2n)!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$

1) Déterminer le degré et le coéfficient dominant de P_n.

2) En utilisant la formule de Leibniz, montrer que $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} n!(\binom{n}{k})^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k$.

3) Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

4) Montrer que :

   i) Si n est impair alors $P_n(0) = 0$.

   ii) Si n est pair alors $P_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\binom{k}{\frac{n}{2}}}{2^n}$.

MPSI Algèbre 2
Devoir surveillé
Durée : 3 h

Exercice 1. *(4 points)*

Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x-y)^2 + (y-z)^2 = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + z = 0\}$.

1. Montrer que E et F sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $E \cap F$.
3. On pose $G = vect((1, 1, 1); (3, 1, -1))$. Vérifier que $G \subset F$. A-t-on $F \subset G$?

Exercice 2. *(5 points)*

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \ : \ P = (1-X)Q(X^2); Q \in \mathbb{R}[X]\}$. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes pairs et I l'ensemble des polynômes impairs.

1. Montrer que $E, \mathcal{P}$ et I sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ peut s'écrire sous la forme $P = P_1(X^2) + XP_2(X^2)$ où $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que $\mathbb{R}[X] = E + \mathcal{P}$.
4. Montrer que $\mathbb{R}[X] = E + I$
5. En déduire que $\mathbb{R}[X] = E + \mathcal{P}$ et $\mathbb{R}[X] = E + I$.

Exercice 3. *(5 points)*

1. Définissez les termes suivants : espace vectoriel, supplémentaire d'un sous-espace vectoriel, dimension d'un espace vectoriel
2. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $(e_1, ...e_p)$ une famille libre de vecteurs de E, $F = Vect(e_1, ...e_p)$ et G un supplémentaire de F dans E. Pour tout a dans G on note $F_a = Vect(e_1 + a, ..., e_p + a)$.
   a) Montrer que $F_a \oplus G = E$.
   b) Soient $a, b \in G$. Montrer que $a \neq b \Rightarrow F_a \neq F_b$.

Exercice 4. *(6 points)*

Soient U, V et W trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \neq 0$.

1. On suppose que $dimU + dimV > n$. Démontrer que $U \cap V$ contient au moins un vecteur non nul.
2. On suppose dans cette question que $dimU + dimV + dimW > 2n$.
   a) On pose $W' = U \cap V$. Démontrer que $dimW' \geq dimU + dimV - n$.
   b) Déduire de a) que $dimW' + dimW > n$.
   c) Montrer que $U \cap V \cap W$ n'est pas réduit au vecteur nul.

CPGE OUAGA II, MPSI **Année académique 2018-2019**

DS D'ALGEBRE 2

Durée : 3 h

Exercice 1.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

Pour quelles valeurs de α, u est-il bijectif? Lorsque u n'est pas bijectif, déterminer l'image et le noyau de u. En déduire les solutions du système d'équations $UX = B$ où

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Exercice 2.

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie $n > 1$, vérifiant pour un certain entier naturel $k > 1$, $f^k = 0$ et $f^{k-1} \neq 0$.

1. Montrer que $f \neq 0$ et $Im(f^{k-i}) \subset Ker(f^i)$ pour tout $i \in \{1, ..., k-1\}$.
2. On suppose dans cette question que $n = 3$ et $k = 2$.
   a) Montrer que $rg(f) = 1$.
   b) Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Dans cette question on suppose $n = k > 2$. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer alors que la famille $B = (x, f(x), f^2(x), ..., f^{n-1}(x))$ est une base de E. Quelle est alors la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Problème

Soit n un entier naturel non nul et soit $T(X)$ un polynôme fixé de $\mathbb{C}[X]$ de degré n

I Définition d'une application

Soit f l'application définie sur $\mathbb{C}[X]$ qui à tout polynôme $P(X)$ de $\mathbb{C}[X]$ associe $Q(X)\cancel{T(X)}+$ X $R(X)$ où $Q(X)$ et $R(X)$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(X^2)$ par $T(X)$. (On a donc $P(X^2) = Q(X)T(X) + R(X)$ avec $deg(R(X) < deg(T(X)))$.
On rappelle également que pour un polynôme $P(X) = a_mX^m + ... + a_1X + a_0$, on a $P(X^2) = a_mX^{2m} + ... + a_1X^2 + a_0$.
On note enfin f_n la restriction de f à $\mathbb{C}_n[X]$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Montrer que f_n est une endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.
3. Dans cette question uniquement on prend $n = 2$ et $T(X) = X^2$.
   a) Déterminer la matrice A de f_2 dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{C}_2[X]$.
   b) Calculer A^2. En déduire que f_2 est bijective et déterminer son inverse. En déduire la nature de f_2.
4. Dans cette question uniquement $n = 2$ et $T(X) = (X - 1 - i)(X + i)$. Donner l'image du polynôme $U(X) = X^2 + (1 - 2i)X - 2i$ par l'application f.

II Etude d'un cas particulier

Soit a un nombre complexe fixé. Dans cette partie, $n = 3$ et $T(X) = X^3 + X^2 + a$.

1. Montrer que f_3 a pour matrice dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{C}_3[X]$:

$$B = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -a-1 \\ 1 & 0 & a+1 & 1+a+a^2 \\ 0 & 0 & -a & -a-1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a+2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array} \end{array}$$

2. On prend ici $a = -1$.
   a) Donner une base de $Ker(f_3)$, le noyau de f_3.
   b) Donnèr une base de $Im(f_3)$, l'image de f_3.
   c) $Ker(f_3)$ et $Im(f_3)$ sont-ils supplémentaires ?

III Quelques propriétés du noyau

On revient dans cette partie au cas général.

1. Soit $P(X)$ un polynôme non nul de degré p tel que $2p < n$. Montrer que $f(P(X))$ est non nul.
2. Soit $P(X)$ un polynôme. Montrer qu'il appartient au noyau de f si et seulement si il existe un polynôme $R(X)$ de degré strictement inférieur à n tel que $P(X^2) = R(X)(1-XT(X))$.
3. En déduire que si un polynôme $P(X)$ est un élément du noyau de f, alors il appartient à $\mathbb{C}_n[X]$.
4. Déduire des questions précédentes que si $P(X)$ appartient au noyau de f, et si k est un entier naturel tel que $deg(P(X)) + k \leq n$, alors $X^kP(X)$ appartient au noyau de f.

TD Déterminant

Exercice 1.

Déterminer la décomposition en produit de cycles disjoints de la permutation suivante, puis en donner une décompostion en transpositions et calculer sa signature :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 2 & 8 & 10 & 7 & 9 & 1 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

I) Soient $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{K}^n$ et $(x_1, ..., x_n)$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Exprimer $det_{\mathcal{B}}(x_n, ..., x_1)$ en fonction de $det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n)$.
II) Soient $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre $n > 0$. Calculer le déterminant de la matrice $B = ((-1)^{i+j} a_{ij})$.

Exercice 3.

Calculer (sous forme factorisée) le déterminant de la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & cb \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{bmatrix}$$

Exercice 4.

Calculer en fonction de $x + y + z$, le déterminant de la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} x - y - z & 2x & 2x \\ 2y & y - z - x & 2y \\ 2z & 2z & z - x - y \end{bmatrix}$$

En déduire que l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ pour lesquels la matrice A est non inversible forment un plan du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^3$ dont on donnera une équation et une base.

Exercice 5.

Calculer

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 3 & 4 \\ 1 & \frac{1}{4} & 9 & 16 \\ -1 & \frac{1}{8} & 27 & 64 \end{vmatrix}$$

Exercice 6.

Calculer

$$\begin{vmatrix} 0 & . & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & . & \dots & a_2 & 0 \\ . & . & \dots & .. & . \\ 0 & a_{n-1} & \dots & . & 0 \\ a_n & . & \dots & . & 0 \end{vmatrix}$$

et

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & . & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ . & . & \dots & .. & . \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & . & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 7.

Soient $n \geq 1$, et $1 \leq p \leq n$ des entiers et soient les matrices $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{C})$, $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{C})$ et

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

1) Si $C = 0$ et $A = I_p$, montrer que :

$$\begin{vmatrix} I_p & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = |D|$$

2) Si $B = 0, C = 0$ et $D = I_{n-p}$, montrer que :

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & I_{n-p} \end{vmatrix} = |A|.$$

3) Si $C = 0$, calculer en fonction de $|A|$ et de $|D|$:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix}$$

4) Si $n = 2p$, en supposant que C et D commutent, montrer que $det(M) = det(AD - BC)$.

5) En utilisant

$$A = D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$B = C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

montrer que le résultat de 4) n'est pas vrai en général.

Exercice 8.

On se propose de calculer le déterminant de la matrice complexe d'ordre n

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & a & a & \dots & a \\ b & c_2 & a & \dots & a \\ b & b & .. & .... & a \\ . & . & ..... & \dots & \\ b & b & .. & b & c_n \end{bmatrix}$$

dont tous les coefficients au-dessus de la diagonale sont tous égaux à a et ceux au-dessous de la diagonale tous égaux à b.

Pour cela on pose $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (a_{ij} + h)_{1 \leq i,j \leq n}$, obtenue de A en ajoutant la variable h à tous les coefficients de A. Enfin soit $P(h) = det(B)$.

(a) Montrer que $P(h)$ est une fonction polynómiale de degré 1 en h.
(b) Que vaut $P(0)$?
(c) Calculer $P(-a)$ et $P(-b)$.
(d) Déterminer le déterminant de A pour $a \neq b$.
(e) Calculer enfin le déterminant de A lorsque $a = b$.

Exercice 9.

Soit la matrice d'ordre $n \geq 2$ sur le corps $\mathbb{K}$:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & .. & .. & 1 \\ 1 & 0 & 1 & .. & 1 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 1 & 1 & .. & 0 & 1 \\ 1 & 1 & .. & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dont les coefficients situés hors de la diagonale sont égaux à 1, et ceux situés sur la diagonale tous nuls. On se propose de calculer la matrice inverse de N. On note $I_n$la matrice identité d'ordre n et on pose $J = N + I_n$.

i. Calculer J^2 en fontion de n et de J.

ii. Démontrer que la matrice $N^2 + (2-n)N + (1-n)I_n$ est égale à la marice nulle.

iii. En déduire que N est inversible et calculer sont inverse.

Université Ouaga II–CPGE

Année académique 2018-2019

Algèbre 2
Examen
Durée : 4h

Exercice 1. 6 *points*

Calculer les déterminants suivants et donner impérativement le résultat sous forme complètement factorisée :

$$G = \begin{vmatrix} x & a & b & x \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix}.\ H = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}.\ I = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}.$$

$$K = \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}.\ L = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ b^2 & ab & a^2 \\ ab & a^2 & b^2 \end{vmatrix}.\ M = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}$$

avec $a, b, c, x \in \mathbb{C}$.

Exercice 2. 6 *points*

Soit $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'anneau des matrices carrées réelles d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$. Soit A une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ d'indice 3, c'est-à-dire qu' elle vérifie : $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$. On note I la matrice identité d'ordre p.

Pour tout réel t, on note $E(t)$ la matrice $E(t) = I + t.A + \frac{t^2}{2}.A^2$.

1. Montrer que : $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, E(s)E(t) = E(s+t)$.
2. En déduire que $(E(t))^n = E(nt)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que la matrice $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse ?
4. Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
5. En déduire que l'application $E : t \longmapsto E(t)$ définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est injective.
6. Application : on suppose $p = 3$ et on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Déterminer $E(t)$.

Exercice 3. 8 *points*

Partie A

La notation $\mathbb{R}_2[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On identifiera dans la suite de ce problème les éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et leurs fonctions polynômiales associées. On note $B = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On définit les deux applications suivantes :

$$f : \quad \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$$

$$P \longmapsto \quad \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right]$$

et

$$\varphi : \quad \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$P \longmapsto \quad P(1)$$

On rappelle aussi que l'on note $f^0 = Id_{\mathbb{R}_2[X]}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = fof^{n-1}$.

1. Vérifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et montrer que f est linéaire.
2. Montrer que φ est linéaire.
3. Ecrire la matrice de f dans la base B de $\mathbb{R}_2[X]$, en indiquant les calculs intermédiaires.
4. Déterminer une base de $Ker\varphi$. Quelle est la dimension de $Ker\varphi$?
5. L'application φ est-elle injective ? surjective ?

Partie B

On note I_3 la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$ et A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Enfin, on note B' est la famille de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par : $B' = (1, -2X+1, 6X^2-6X+1)$.

1. Justifier que la famille B' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Ecrire la matrice de passage Q de B à B'.
3. Justifier que Q est inversible et calculer son inverse.
4. Ecrire la matrice M de f dans la base B' en donnant les calculs intermédiaires.
5. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On explicitera les neuf coefficients de A^n.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f^n(P)$ en fonction de a, b, c.
7. En déduire que $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)dt$

Année universitaire 2018-2019

Université Ouaga II
Classes préparatoires d'entrée dans les grandes écoles (CPGE)

Contrôle des connaissances - Semestre 2
Français - Philosophie
Durée de l'épreuve : 2 heures

Exercice 1 (5 pts)

Faites l'accord des participes passés entre parenthèses dans les phrases suivantes :

1. Ce n'est ni le calme ni la tranquillité qu'il a (voulu).
2. Vous trouverez (ci-inclus) copie des textes qu'il a (corrigé).
3. Les morceaux de musique que tu as (entendu) jouer sont à la mode.
4. Quels soins il a (fallu) pour que cet arbre grandisse !
5. J'ai pris la route qu'on m'a (affirmé) être la meilleure ?
6. Ta robe te convenait pourtant bien ; pourquoi l'as-tu (laissé) diminuer ?
7. Les belligérants se sont (lancé) des propos violents, se sont (regardé) simplement, puis se sont (quitté).

Exercice 2 (15 pts)

Dissertation

Lucrèce affirme : « *Car l'amour espère toujours que l'objet qui alluma cette ardente flamme est capable en même temps de l'éteindre : illusion que combattent les lois de l'amour. C'est le seul cas en effet où plus nous possédons, plus notre cœur s'embrase de désirs furieux.* »

A la lumière des ouvrages du programme, dites ce que vous pensez de cette affirmation. Soignez la langue. (2 à 3 pages, introduction et conclusion y comprises)

Université Ouaga 2
CPGE 1^re^ année

Année universitaire 2018-2019

Français-Philosophie : Résumé de texte

Texte d'étude

Épistémologie de la démocratie

L'épistémologie contemporaine nous appelle à l'abandon du rêve (marxiste) d'abolir la contradiction dans l'être et dans l'ordre social. Il est aujourd'hui établi que même dans le domaine de la matière inanimée comme dans celui des structures logico-mathématiques, il n'y a pas de vérité absolue, parce que le déterminisme absolu est mis en échec. On le sait au moins depuis le théorème de Goedel. Le célèbre mathématicien a montré qu'en logique et en mathématique, une théorie d'une richesse donnée (l'arithmétique par exemple) ne peut suffire à démontrer sa propre non-contradiction ; une nouvelle théorie est nécessaire. Le savoir scientifique se constitue ainsi en une chaîne faite de maillons de vérités provisoires dépassées ou promises au dépassement.

L'ordre de la vérité politique est, sans doute plus encore que celui de la vérité scientifique, affecté d'incertitude et de relativité. C'est pourquoi la pensée – et a fortiori l'opinion - politique doit s'énoncer avec prudence et humilité. Je me méfie toujours de ceux qui en dehors des temples et des chapelles, des mosquées et des synagogues appellent encore à la foi... dans le parti, dans sa doctrine et ses idéaux, en un homme guide-éclairé ; parce que la foi n'admet d'être relativisée. Or le dépassement est l'être comme dans l'ordre des choses. C'est la vertu première de la démocratie de s'envisager comme un choix ouvert.

La matière vivante, groupée en individus par les mutations redistribuées au fil des générations grâce à la reproduction, présente toujours une immense diversité. Cette diversité biologique des hommes est source de complexité sociale. C'est pourquoi aucun système social ne peut être justiciable d'une seule lecture reposant sur une "théorie" unique globale fermée sur elle-même, insusceptible de toute réfutation sauf à s'exposer à une véritable catastrophe intellectuelle. La biologie contemporaine apparaît ainsi comme le révélateur d'une exigence bio-sociologique de la démocratie, dans la mesure où elle s'institue comme une théorie de la complexité. Comme l'écrit Jacques Ruffié, elle "jette le pont entre sciences de la vie et sciences humaines". Elle souligne à quel point la société est, comme tout phénomène vivant ou animé, un ensemble de combinaisons complexes et dynamiques. Seule la démocratie entendue comme cadre privilégié d'expression du pluralisme, peut à la fois rendre compte de cette complexité et en assurer la préservation, parce qu'elle est le reflet des sinuosités sociales. Comme support doctrinal des luttes politiques, elle a sans aucun doute une fonction idéologique, parce qu'elle est célébration du peuple et du pluriel ; mais elle est, en son essence, une méthode : celle qui est fondée sur le respect de la diversité et qui vise à faire coexister les contraires. Du politique à l'économique, du sociétal au déploiement méthodologique, épistémologique voire ontique de l'homme-personne, la démocratie s'efforce d'épouser les contours mouvants, imprévisibles, explosifs de notre destin, de notre vocation.

La démocratie n'est donc pas une matière, une substance définitivement stable. Elle est appelée à s'inventer elle-même, en permanence. Elle est par essence même indétermination ; tout rêve d'ordre absolu ou d'harmonie parfaite lui est contraire. Elle est le sursaut du pluriel contre l'irrésistible tentation de l'un. Elle est la garantie d'une quête différenciée de la destination commune. C'est pourquoi la tolérance lui est consubstantielle.

La vérité est une valeur fondamentale, et l'aspiration à l'atteindre, la source de toute pensée importante. Mais il est vain de chercher à atteindre la certitude. Il faut y renoncer parce qu'elle ne nous est jamais donnée. Et sans doute est-il bien ainsi, car la certitude serait source de mort. A l'échelle de la science comme à celle de l'existence, l'essentiel est dans le questionnement. C'est pourquoi la démocratie est essentielle à l'homme comme à la société. Parce qu'elle permet de tâtonner ensemble, d'essayer en commun de tracer l'asymptote de la vérité et de se prémunir des dogmes.

Nous avons, très humainement, des faiblesses pour nos propres "théories" et notre réflexe naturel est de les défendre. Cela n'est pas grave si les autres ont la possibilité d'assurer vis-à-vis d'elles leur fonction critique. Il est seulement regrettable que la critique d'une œuvre dérive souvent en une diatribe contre son auteur ; que la hargne de défaire l'Autre, que la passion de le détruire aient souvent raison de notre sens de l'analyse, de notre sérénité dans l'analyse. "Pourtant, déclare avec justesse Karl Popper, il est extrêmement important pour des raisons d'éducation, extraordinairement important pour la démocratie, de procéder à l'aide de bons exemples et de rendre sa critique aussi objective que possible".

Il faut admettre désormais que le vrai est pluriel et relatif. Ces deux attributs se déterminent réciproquement, car le vrai est pluriel parce qu'il est relatif, et il est relatif parce qu'il est pluriel. Nous progressons sur le chemin du savoir à la faveur d'une conciliation des connaissances partielles et parcellaires, et par dépassement des vérités provisoires. Cette idée de relativité du vrai scientifique renvoie au principe poppérien de "réfutabilité", généralisé en possibilité de critique.

Appliqué au social, la relativité du vrai et la loi de la complexité du vivant - être individuel ou collectif - nous appellent à plus de modestie dans nos prétentions idéologiques. Plus qu'elles la justifient, elles imposent la démocratie comme mode privilégié de régulation sociale, dans la mesure précisément où seul un contexte démocratique rend possible l'expression des prétentions contraires. Car la démocratie est fondamentalement possibilité d'alternative et d'alternance. C'est le seul ordre qui permet d'expérimenter des prétentions formellement exprimées et d'en changer lorsqu'elles se révèlent en divorce avec la réalité. Elle croit donc à l'erreur et par là même à la perfectibilité. Le débat est sa pierre de touche parce qu'il crée les conditions d'échange, du commerce d'idées, du dialogue politique et social. C'est une méthodologie de la critique positive qui reconstruit autrement ce qu'elle déconstruit, ou qui reconstruit autre chose sur les ruines de ce qu'elle a détruit.

Or le débat n'est possible qu'à la condition que chacun soit convaincu de ne pas détenir la vérité absolue, que nous ayons l'intelligence de "considérer les idées d'en face et les nôtres comme des vues relatives et partielles, qui doivent s'intégrer dans un système global". Car loin d'être une certitude scientifique qui elle-même est provisoire, toute idée politique est au mieux, l'expression d'une "opinion droite" "en tant qu'elle s'articule de manière cohérente à des valeurs et qu'elle se corrige à travers la confrontation avec d'autres opinions". Le désordre du langage et la cacophonie du débat dans les sociétés politiques des États nouveaux viennent précisément de ce que ces valeurs de référence qui doivent servir de balises au dialogue social et à la confrontation des opinions politiques ne sont pas encore établies. Elles ne peuplent pas l'imaginaire des citoyens comme autant de représentations mythifiées des éléments constitutifs de l'éthique démocratique.

Maurice KAMTO, *L'urgence de la pensée*, Éditions Mandara, 1993

<u>Consigne</u>

Résumez le texte ci-dessus au quart (1/4) de sa longueur, avec une marge de plus ou moins 10%.

Université Ouaga II

Classes préparatoires d'entrée dans les grandes écoles (CPGE)

MPSI, Semestre 1

Année universitaire 2018-2019

Examen du premier semestre
Épreuve de Français-Philosophie

Date de l'épreuve : 11 mars 2019
Durée de l'épreuve : 2 heures

---

1. Texte : Éloge de l'amour

J'ai dit que l'amour commence par le caractère absolument contingent et hasardeux de la

Exercice

L'école étrangère

« Je viens vous dire ceci : moi, Grande Royale, je n'aime pas l'école étrangère. Je la déteste. Mon avis est qu'il faut y envoyer les enfants cependant. »[…]

La Grande Royale se tourna vers un autre point de l'assistance.

- Hier, Ardo Diallobé, vous me disiez : « La parole se suspend, mais la vie, elle ne se suspend pas ». C'est très vrai […]

L'assistance demeurait immobile, comme pétrifiée. La Grande Royale seule bougeait. Elle était au centre de l'assistance comme la graine dans la gousse.

- L'école où je pousse nos enfants tuera en eux ce qu'aujourd'hui nous aimons et conservons avec soin, à juste titre. Peut-être notre souvenir lui-même mourra-t-il en eux. Quand ils nous reviendrons de l'école, il en est qui ne nous reconnaîtront pas. Ce que je propose, c'est que nous acceptions de mourir en nos enfants et que les étrangers qui nous ont défaits prennent en eux toute la place que nous aurons laissée libre.

Elle se tut encore, bien qu'aucun murmure ne l'eût interrompue. Samba Diallo perçu qu'on reniflait près de lui. Il leva la tête et vit deux grosses larmes ~~couler le~~ long du rude visage du maître des forgerons.

- Mais, gens des Diallobé, souvenez-vous de nos champs quand approche la saison des pluies. Nous aimons bien nos champs mais que faisons-nous alors ? Nous y mettons le fer et le feu, nous les tuons. De même, souvenez-vous : que faisons-nous de nos réserves de graines quand il a plu ? Nous voudrions bien les manger, mais nous les enfouissons en terre. La tornade qui annonce le grand hivernage de notre peuple est arrivée [redacted] les étrangers, gens des Diallobé. Mon avis à moi, Grande Royale, c'est que nos meilleures graines et nos champs les plus chers, ce sont nos enfants. Quelqu'un veut-il parler ?

Nul ne répondit.

C.H. KANE, *L'Aventure ambiguë*, Extraits pages 56-58

longtemps, est si chargé de nouveauté et d'expérience du monde que, rétrospectivement, cela apparaît non plus du tout comme contingent et hasardeux, comme au tout début, mais pratiquement comme nécessité. [...] La déclaration d'amour est le passage du hasard au destin, et c'est pourquoi elle est si périlleuse, si chargée d'une sorte de trac effrayant. La déclaration

Université Ouaga II

Année universitaire 2018-2019

Classes préparatoires d'entrée dans les grandes écoles (CPGE)

MPSI, Semestre 1

Examen du premier semestre
Épreuve de Français-Philosophie

Date de l'épreuve : 11 mars 2019
Durée de l'épreuve : 2 heures

---

1. Texte : Éloge de l'amour

J'ai dit que l'amour commence par le caractère absolument contingent et hasardeux de la rencontre. C'est vraiment les jeux de l'amour et du hasard. Et ils sont inéluctables. Ils existent toujours, en dépit de la propagande dont je vous parlais. Mais le hasard doit, à un moment donné, être fixé. Il doit commencer une durée, justement. C'est un problème quasi métaphysique très compliqué : comment un pur hasard, au départ, va-t-il devenir le point d'appui d'une construction de vérité? Comment cette chose qui, au fond, n'était pas prévisible et paraît liée aux imprévisibles péripéties de l'existence va-t-elle cependant devenir le sens complet de deux vies mêlées, appariées, qui vont faire l'expérience prolongée de la constante (re)naissance du monde par l'entremise de la différence des regards? Comment passe-t-on de la pure rencontre au paradoxe d'un seul monde où se déchiffre que nous sommes deux? C'est tout à fait mystérieux, à vrai dire. Et d'ailleurs, cela nourrit beaucoup le scepticisme à l'égard de l'amour. Pourquoi, dira-t-on, parler de grande vérité à propos du fait, banal, que quelqu'un a rencontré sa ou son collègue au boulot? Or c'est justement cela qu'il faut soutenir: un événement d'apparence insignifiante, mais qui en réalité est un événement radical de la vie microscopique, est porteur, dans son obstination et dans sa durée, d'une signification universelle. Il est vrai cependant que « le hasard doit être fixé ». C'est une expression de Mallarmé : « Le hasard est enfin fixé ... » Il ne le dit pas à propos de l'amour, il le dit à propos du poème. Mais on peut très bien l'appliquer à l'amour et à la déclaration d'amour, avec les terribles difficultés et angoisses diverses qui lui sont associées. Au demeurant, les affinités entre le poème et la déclaration d'amour sont bien connues. Dans les deux cas, il y a un risque énorme qu'on fait endosser au langage. Il s'agit de prononcer une parole dont les effets, dans l'existence, peuvent être pratiquement infinis. C'est bien aussi le désir du poème. Les mots les plus simples se chargent alors d'une intensité presque insoutenable. Déclarer l'amour, c'est passer de l'événement-rencontre au commencement d'une construction de vérité. C'est fixer le hasard de la rencontre sous la forme d'un commencement. Et souvent ce qui commence là dure si longtemps, est si chargé de nouveauté et d'expérience du monde que, rétrospectivement, cela apparaît non plus du tout comme contingent et hasardeux, comme au tout début, mais pratiquement comme nécessité. [...] La déclaration d'amour est le passage du hasard au destin, et c'est pourquoi elle est si périlleuse, si chargée d'une sorte de trac effrayant. La déclaration d'amour, d'ailleurs, n'a pas lieu forcément une seule fois, elle peut être longue, diffuse, confuse, compliquée, déclarée et re-déclarée, et vouée à être re-déclarée encore. C'est le moment où le hasard est fixé. Où vous vous dites: ce qui s'est passé là, cette rencontre, les épisodes de cette rencontre, je vais les déclarer à l'autre. Je vais lui déclarer qu'il s'est passé là, en tout cas pour moi, quelque chose qui m'engage. Voilà: je t'aime. Si « je t'aime» n'est pas une ruse pour coucher avec quelqu'un, ce qui peut arriver, si ce n'est pas cette ruse, qu'est-ce que c'est? Qu'est-ce qui est dit là ? Ce n'est pas simple du tout, de dire « je t'aime ». On a l'habitude de considérer ce petit membre de phrase comme absolument usé et insignifiant. D'ailleurs, quelquefois, pour dire « je t'aime », on préfère employer d'autres mots, plus poétiques ou moins usés. Mais c'est toujours pour dire: ce qui était un hasard, je vais en tirer autre chose. Je vais en tirer une durée, une obstination, un engagement, une fidélité. Alors, fidélité, c'est un mot que j'emploie ici dans mon jargon philosophique en le retirant de son contexte habituel. Il signifie justement le passage d'une rencontre hasardeuse à une construction aussi solide que si elle avait été nécessaire. [...]

La fidélité n'a-t-elle pas un sens beaucoup plus considérable que la seule promesse de ne pas coucher avec quelqu'un d'autre? Ne montre-t-elle pas précisément que le «je t'aime» initial est un engagement qui n'a besoin d'aucune consécration particulière, l'engagement de construire une durée, afin que la rencontre soit délivrée de son hasard? Mallarmé voyait le poème comme « le hasard vaincu mot par mot ». Dans l'amour, la fidélité désigne cette longue victoire: le hasard de la rencontre vaincu jour après jour dans l'invention d'une durée, dans la naissance d'un monde. Pourquoi dit-on si souvent: je t'aimerai toujours? À condition, bien sûr, que ce ne soit pas une ruse. Les moralistes, évidemment, s'en sont beaucoup moqués, disant qu'en réalité ce n'est jamais vrai. D'abord, ce n'est pas vrai que ce n'est jamais vrai. Il y a des gens qui s'aiment toujours, et il y en a beaucoup plus qu'on ne le croit ou qu'on ne le dit. Et tout le monde sait que décider, surtout unilatéralement, la fin d'un amour est toujours un désastre, quelles que soient les excellentes raisons qu'on met en avant.

Alain Badiou, *Éloge de l'amour*, Paris, Flammarion, 2009, pp. 49-53.

2. Questions sur le texte (20 pts)

2.1. Comment comprenez-vous dans le texte l'expression « hasard fixé » que l'auteur emprunte à Mallarmé pour caractériser l'amour ? (5 lignes maximum) (6 pts)

2.2. Vous ferez un résumé de ce texte de 841 mots. Il devra comporter 210 mots (± 10 %). Vous indiquerez impérativement le nombre total de mots utilisés et vous aurez soin d'en faciliter la vérification en mettant un trait vertical tous les vingt mots (14 pts).

Université Ouaga 2
CPGE 1re année

Année universitaire 2018-2019

Français-Philosophie : Résumé de texte

Texte d'étude

Épistémologie de la démocratie

L'épistémologie contemporaine nous appelle à l'abandon du rêve (marxiste) d'abolir la contradiction dans l'être et dans l'ordre social. Il est aujourd'hui établi que même dans le domaine de la matière inanimée comme dans celui des structures logico-mathématiques, il n'y a pas de vérité absolue, parce que le déterminisme absolu est mis en échec. On le sait au moins depuis le théorème de Goedel. Le célèbre mathématicien a montré qu'en logique et en mathématique, une théorie d'une richesse donnée (l'arithmétique par exemple) ne peut suffire à démontrer sa propre non-contradiction ; une nouvelle théorie est nécessaire. Le savoir scientifique se constitue ainsi en une chaîne faite de maillons de vérités provisoires dépassées ou promises au dépassement.

L'ordre de la vérité politique est, sans doute plus encore que celui de la vérité scientifique, affecté d'incertitude et de relativité. C'est pourquoi la pensée – et a fortiori l'opinion - politique doit s'énoncer avec prudence et humilité. Je me méfie toujours de ceux qui en dehors des temples et des chapelles, des mosquées et des synagogues appellent encore à la foi... dans le parti, dans sa doctrine et ses idéaux, en un homme guide-éclairé ; parce que la foi n'admet d'être relativisée. Or le dépassement est l'être comme dans l'ordre des choses. C'est la vertu première de la démocratie de s'envisager comme un choix ouvert.

La matière vivante, groupée en individus par les mutations redistribuées au fil des générations grâce à la reproduction, présente toujours une immense diversité. Cette diversité biologique des hommes est source de complexité sociale. C'est pourquoi aucun système social ne peut être justiciable d'une seule lecture reposant sur une "théorie" unique globale fermée sur elle-même, insusceptible de toute réfutation sauf à s'exposer à une véritable catastrophe intellectuelle. La biologie contemporaine apparaît ainsi comme le révélateur d'une exigence bio-sociologique de la démocratie, dans la mesure où elle s'institue comme une théorie de la complexité. Comme l'écrit Jacques Ruffié, elle "jette le pont entre sciences de la vie et sciences humaines". Elle souligne à quel point la société est, comme tout phénomène vivant ou animé, un ensemble de combinaisons complexes et dynamiques. Seule la démocratie entendue comme cadre privilégié d'expression du pluralisme, peut à la fois rendre compte de cette complexité et en assurer la préservation, parce qu'elle est le reflet des sinuosités sociales. Comme support doctrinal des luttes politiques, elle a sans aucun doute une fonction idéologique, parce qu'elle est célébration du peuple et du pluriel ; mais elle est, en son essence, une méthode : celle qui est fondée sur le respect de la diversité et qui vise à faire coexister les contraires. Du politique à l'économique, du sociétal au déploiement méthodologique, épistémologique voire ontique de l'homme-personne, la démocratie s'efforce d'épouser les contours mouvants, imprévisibles, explosifs de notre destin, de notre vocation.

La démocratie n'est donc pas une matière, une substance définitivement stable. Elle est appelée à s'inventer elle-même, en permanence. Elle est par essence même indétermination ; tout rêve d'ordre absolu ou d'harmonie parfaite lui est contraire. Elle est le sursaut du pluriel contre l'irrésistible tentation de l'un. Elle est la garantie d'une quête différenciée de la destination commune. C'est pourquoi la tolérance lui est consubstantielle.

La vérité est une valeur fondamentale, et l'aspiration à l'atteindre, la source de toute pensée importante. Mais il est vain de chercher à atteindre la certitude. Il faut y renoncer parce qu'elle ne nous est jamais donnée. Et sans doute est-il bien ainsi, car la certitude serait source de mort. A l'échelle de la science comme à celle de l'existence, l'essentiel est dans le questionnement. C'est pourquoi la démocratie est essentielle à l'homme comme à la société. Parce qu'elle permet de tâtonner ensemble, d'essayer en commun de tracer l'asymptote de la vérité et de se prémunir des dogmes.

Nous avons, très humainement, des faiblesses pour nos propres "théories" et notre réflexe naturel est de les défendre. Cela n'est pas grave si les autres ont la possibilité d'assurer vis-à-vis d'elles leur fonction critique. Il est seulement regrettable que la critique d'une œuvre dérive souvent en une diatribe contre son auteur ; que la hargne de défaire l'Autre, que la passion de le détruire aient souvent raison de notre sens de l'analyse, de notre sérénité dans l'analyse. "Pourtant, déclare avec justesse Karl Popper, il est extrêmement important pour des raisons d'éducation, extraordinairement important pour la démocratie, de procéder à l'aide de bons exemples et de rendre sa critique aussi objective que possible".

Il faut admettre désormais que le vrai est pluriel et relatif. Ces deux attributs se déterminent réciproquement, car le vrai est pluriel parce qu'il est relatif, et il est relatif parce qu'il est pluriel. Nous progressons sur le chemin du savoir à la faveur d'une conciliation des connaissances partielles et parcellaires, et par dépassement des vérités provisoires. Cette idée de relativité du vrai scientifique renvoie au principe poppérien de "réfutabilité", généralisé en possibilité de critique.

Appliqué au social, la relativité du vrai et la loi de la complexité du vivant - être individuel ou collectif - nous appellent à plus de modestie dans nos prétentions idéologiques. Plus qu'elles la justifient, elles imposent la démocratie comme mode privilégié de régulation sociale, dans la mesure précisément où seul un contexte démocratique rend possible l'expression des prétentions contraires. Car la démocratie est fondamentalement possibilité d'alternative et d'alternance. C'est le seul ordre qui permet d'expérimenter des prétentions formellement exprimées et d'en changer lorsqu'elles se révèlent en divorce avec la réalité. Elle croit donc à l'erreur et par là même à la perfectibilité. Le débat est sa pierre de touche parce qu'il crée les conditions d'échange, du commerce d'idées, du dialogue politique et social. C'est une méthodologie de la critique positive qui reconstruit autrement ce qu'elle déconstruit, ou qui reconstruit autre chose sur les ruines de ce qu'elle a détruit.

Or le débat n'est possible qu'à la condition que chacun soit convaincu de ne pas détenir la vérité absolue, que nous ayons l'intelligence de "considérer les idées d'en face et les nôtres comme des vues relatives et partielles, qui doivent s'intégrer dans un système global". Car loin d'être une certitude scientifique qui elle-même est provisoire, toute idée politique est au mieux, l'expression d'une "opinion droite" "en tant qu'elle s'articule de manière cohérente à des valeurs et qu'elle se corrige à travers la confrontation avec d'autres opinions". Le désordre du langage et la cacophonie du débat dans les sociétés politiques des États nouveaux viennent précisément de ce que ces valeurs de référence qui doivent servir de balises au dialogue social et à la confrontation des opinions politiques ne sont pas encore établies. Elles ne peuplent pas l'imaginaire des citoyens comme autant de représentations mythifiées des éléments constitutifs de l'éthique démocratique.

Maurice KAMTO, *L'urgence de la pensée*, Éditions Mandara, 1993

<u>Consigne</u>

Résumez le texte ci-dessus au quart (1/4) de sa longueur, avec une

CHIMIE GENERALE
DEUXIEME PARTIE : THERMOCHIMIE
(durée : 1 h 30 mn)

En phase gazeuse, le cyclohexadiène (A) réagit avec l'éthylène (B) pour donner le bicyclo-octène (C) selon une réaction d'addition schématisée comme suit :

$$A_{(g)} + B_{(g)} \rightleftharpoons C(g)$$

A. 1) $\Delta G°_{800}$ et $\Delta S°_{800}$ de cette réaction sont égales respectivement à – 1,51 kJ mol^{-1} et – 161,96 J mol^{-1} K^{-1}. Calculer $\Delta H°_{800}$ de la réaction à 800 K.

2) A la température 800 K, la pression étant maintenue constante, indiquer dans quel sens évoluera l'équilibre chimique ?

3) Calculer la constante d'équilibre K_p à 600 K sachant que K_p = 0,78 à 820 K. On considère que $\Delta H°_T$ est constant et égal à $\Delta H°_{800}$ dans le domaine de température considérée.

B. 1) A 820 K, la valeur de K_p = 0,78, on introduit à cette température dans un réacteur de volume constant V_o et initialement vide, une mole de produit C ; pression initiale P_o est exprimée en bar.

a) Exprimer, lorsque l'équilibre est atteint, le nombre de mole total en fonction de α. Exprimer de même la pression partielle de chaque constituant du système et la pression totale en fonction de α et P_o. (les gaz sont considérés parfaits).

b) Exprimer la constante d'équilibre K_p en fonction de α et P_o.

2) Calculer la pression P_o sachant que α = 0,95 quand l'équilibre est atteint.

3) On renouvelle l'expérience dans le même réacteur contenant initialement de l'azote, un gaz inerte, sous la pression de 1 bar.
Calculer la pression partielle de chaque gaz et la pression totale quand l'équilibre est atteint.

Université Ouaga II
Classes Préparatoires aux Grandes Écoles
(CPGE)

Année universitaire 2018-2019

Contrôle des connaissances

Mathématiques-Physique-Sciences de l'Ingénieur(MPSI) :
L1S1 / Examen

EUPREUVE DE CHIMIE GENERALE : 3 H

PREMIERE PARTIE : ATOMISTIQUE *(à composer sur feuille séparée) : 1 h 30 mn*

EXERCICE 1 : structure de matière

On considère deux éléments X et Y de la quatrième période de la classification périodique dont la couche de valence comporte cinq électrons avec trois célibataires.

1. Représenter par les cases quantiques les configurations électroniques possibles de X et Y à l'état fondamental. Déterminer leurs numéros atomiques.
2. Sachant que Y possède le numéro atomique le plus petit des deux, déterminer à quel groupe appartient ces éléments.
3. Donner la configuration électronique du gaz rare le plus proche de X et en déduire, la charge que doit porter X pour qu'il soit iso-électronique avec ce gaz rare.
4. L'élément Y peut donner deux cations Y^{2+} et Y^{5+}.
   i. Ecrire la configuration électronique de ces cations
   ii. En justifiant votre réponse, déterminer l'ion le plus stable.
5. Les valeurs 0,92, 1,08 et 1,39 correspondent aux rayons atomiques (en Ä) des éléments suivant N(Z=7), X(Z= ?) et P(Z=15). Attribuer à chaque atome, la valeur de son rayon atomique.

EXERCICE 2 : liaison chimique

1) Ecrire la formule de Lewis en précisant la géométrie des composés suivants :
2) H_2O, H_3PO4, H_2SO_4, SF_6, MnO_4^-.
3) Quels sont, parmi ces composés, ceux qui respectent la règle de l'octet ? Donner les molécules à hypervalence nécessaire et celles à hypervalence préférable.
4) Dans la molécule d'eau, l'angle HÔH a pour valeur expérimentale 105 °.
   a) Calculer le moment dipolaire de cette molécule.
   b) Calculer le pourcentage ionique de la liaison OH dans l'eau
   On donne : $\mu_{O-H} = 1{,}51\ D\ et\ d = l_{O-H} = 0{,}96$ Å.

CHIMIE GENERALE : THERMOCHIMIE

(durée : 2 heures)

Exercice 1

La décomposition thermique partielle du carbonate de calcium ($CaCO_3$) solide en oxyde de calcium (CaO) solide et en dioxyde de carbone (CO_2) gazeux s'accompagne des variations d'enthalpie et d'entropie suivantes : $\Delta H° = 176$ kJ mol^{-1} et $\Delta S° = 160$ J K^{-1} mol^{-1}.

1) Ecrire la réaction de décomposition.
2) Exprimer la variation d'enthalpie libre molaire standard.
3) Calculer cette variation à la température de 27 °C.
4) Donner l'expression de la constante d'équilibre.
5) Cette décomposition est-elle possible à cette température si la pression *partielle* du dioxyde de carbone est de 10^{-3} atm ?
   Justifier votre réponse.

Exercice 2

On considère l'équation bilan :

$$2\,NO_2(g) \rightleftarrows 2\,NO(g) + O_2(g)$$

caractérisée par les grandeurs thermodynamiques à 370 K :

$\Delta H° = 112{,}2$ kJ mol^{-1} et $K_p = 5{,}1.\,10^{-7}$

1) Calculer les valeurs de l'enthalpie libre standard $\Delta G°$ et l'entropie standard $\Delta S°$, relatives à l'équation bilan à 370 K.

2) Comment doit-on faire varier la température, à pression constante, pour augmenter le taux de dissociation de NO_2 ? Justifier votre réponse.

On considère que $\Delta H°$ ne varie pas.

3) On introduit deux moles de $NO_2(g)$ dans un réacteur maintenu à une température de 960 K et sous une pression constante de 1 atm. On constate qu'à l'équilibre 99% de ce gaz est dissocié.

Calculer la valeur de la constante thermodynamique K'_p relative à l'équation bilan correspondant à la température de 960 K.

Date : 11 mai 2018
Durée : 2 h

Année Universitaire 2018-2019
CPGE

Devoir de Chimie Organique Générale

Exercice 1 ***(7 pts)***:

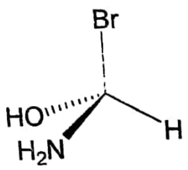
1°) Donnez les formules semi-développées des composés suivants :

a. acide 3-amino-4-méthylhex-4-énoïque
b. 3-chloro-6-hydroxy-5-méthylhex-3-én-2-one

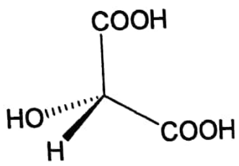
2°) Donner la représentation de CRAM des composés ci-dessous :

a. (2R, 3R)-2,3,4-trihydroxybutanal
b. (2S, 3S)- 3-chlorobutan-2-ol

3°) Les molécules suivantes sont-elles chirales ou non ? Justifier



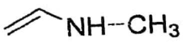
A



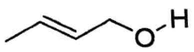
B

Exercice 2 ***(7 pts)***

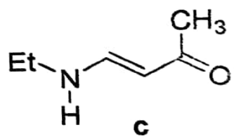
Dans la liste des composés ci-dessous, indiquer quelles sont les molécules qui présentent un système ou une **structure conjugué** (e) qui peut conduire à une délocalisation d'électrons par mésomérie. Ecrire les formes mésomères de ces molécules.



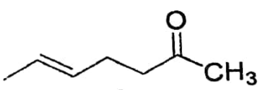
a



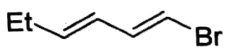
b



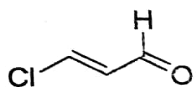
c



d



e



f

Exercice 3 ***(6 pts)***

On chauffe à reflux, pendant 40 min, un mélange constitué de 0,35 mol d'acide éthanoïque et 0,20 mol d'alcool benzylique (C_6H_5-CH_2-OH), en présence de quelques gouttes d'acide sulfurique. Après relargage, lavage, séparation, séchage, puis distillation de la phase organique, on recueille une masse m = 21,6 g d'ester.

a. Quel est le rôle : du chauffage? de l'acide sulfurique ?
b. Écrire l'équation de la réaction d'estérification
c. Déterminer le rendement de cette synthèse.
d. Comment aurait-on pu, en utilisant la même quantité d'alcool benzylique, améliorer le rendement de cette synthèse ?

Données : température d'ébullition dans les conditions de l'expérience : eau : 100 °C ; acide éthanoïque : 118 °C ; alcool benzylique : 205 °C ; éthanoate de benzyle : 215 °C.

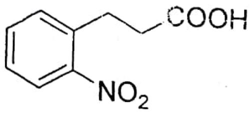
Bon courage

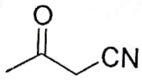
Année Universitaire 2017-2018
CPGE

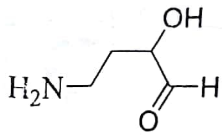
Date : 26 mai 2018
Durée : 2 h

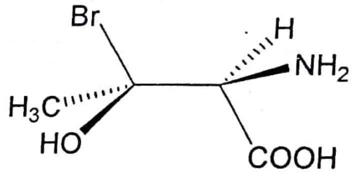
Devoir de Chimie Organique Générale

Exercice 1 *(6,5 pts)*: 1°) Nommer les composés organiques suivants









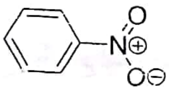
2°) Représenter deux énantiomères du pentane-2,3-diol en projection Newman

Exercice 2 *(3,5 pts)*

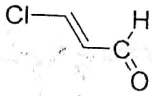
On donne les acides pentanoïque, méthylpropanoïque, éthanoïque, chloroéthanoïque, iodoéthanoïque, bromoéthanoïque, dichloroéthanoïque ainsi que les pKa : 4,86 ; 4,82 ; 4,76 ; 3,16 ; 2,90 ; 2,86 ; 1,29. En vous basant sur la théorie des effets électroniques, attribuez un pKa à chaque acide.

Exercice 3 *(5 pts)*

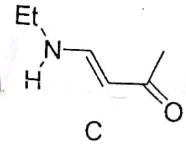
Donner les formes mésomères des molécules dont les structures sont représentées ci-dessous :



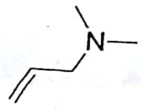
A



B



C



D

Exercice 4 *(5 pts)*

L'acétate d'isoamyle (arôme de banane) est utilisé pour aromatiser certains médicaments mais surtout des denrées alimentaires (bonbons, yaourts, boissons). Il peut être obtenu par synthèse à partir de l'acide acétique (acide éthanoïque) et l'alcool isoamylique (3-méthylbutan-1-ol).
Pour la synthèse de l'acétate d'isoamyle, on fait réagir 11 mL d'alcool isoamylique avec 15 mL d'acide acétique.

1 -1- donner les formules sémi-développées de chacun des réactifs
2 - 2- Ecrire l'équation de la réaction chimique qui se produit
3 - ~~2~~- Quel est le nom usuel de ce type de réaction ?
4 - ~~3~~- Sachant que c'est 2/3 de la quantité initiale de l'alcool isoamylique qui a réagi, calculer la masse d'acétate d'isoamyle obtenue.

On donne : alcool isoamylique : M = 88,2 g.mol⁻¹ ; d = 0,87
Acide acétique : M = 60 g.mol⁻¹ ; d = 1,05
Acétate d'isoamyle : M = 130,2 g.mol⁻¹

Bon courage

UNIVERSITE OUAGA II
CPGE
Enseignante: Dr M. BAYO

Année académique 2018-2019

MPSI

EPREUVE de l'équilibre en solution session normale

Durée: 02 heures

Exercice 1 : (5 points)

Données: pKa (CH_2ClCO_2H/ $CH_2ClCO_2^-$) = pKa_1 = 4,8; pKb (HBO_2 / BO_2^-) = pKb_2 = 4,8; Ke =10^{-14} .

Soit une solution molaire (1M) d'acide chloroacétique (CH_2ClCO_2H).

1- Ecrire la réaction de dissociation de CH_2ClCO_2H, dans l'eau.

2- Calculer, en justifiant votre réponse, le coefficient de dissociation α de cet acide, ainsi que le pH la solution en question.

3- Calculer, dans ce cas, la concentration des ions H_3O^+ provenant de la dissociation de l'eau.

Exercice 2 : (5 points)

Données: pKs (PbF_2, solide) =7,44 ; pKs (PbI_2, solide) = 7,86 ; pKs ($PbSO_4$, solide) = 8

A) On considère une solution aqueuse qui contient les ions F^-, I^- et SO_4^{2-} à des concentrations initiales respectivement égales à 0,1M. On ajoute progressivement et sans variation de volume, Pb^{2+} à cette solution.

1) Indiquer l'anion qui précipite en premier.

2) Déterminer les concentrations des ions F^- et SO_4^{2-} lorsque la moitié des ions iodures I^- est précipitée sous forme de PbI_2.

Exercice 3 : (2 points)

Equilibrer, en milieu acide et en milieu basique, la réaction d'oxydo-réduction suivante et indiquer l'oxydant et le réducteur. $HPO_3^{2-} + MnO_4^- \rightleftharpoons PO_4^{3-} + MnO_4^{2-}$

Exercice 4 : (6 points)

On considère la pile schématisée par Mg $_{(solide)}$ |Mg^{2+} (0,01M) ||Zn^{2+} (0,1M) |Zn $_{(solide)}$

La force électromotrice est égale à 1,64 V et la réaction de fonctionnement de cette pile est:

$Mg_{(s)} + Zn^{2+}_{(aq)} \rightarrow Mg^{2+}_{(aq)} + Zn_{(s)}$

$E°(Zn^{2+}/Zn_{(s)}) = E°_1$ et $E°(Mg^{2+}/Mg_{(s)}) = E°_2 = -2,37V$

1- Donner le schéma de la pile en indiquant le sens du courant électrique, des électrons, et celui des ions K^+ et Cl^- dans le pont salin.

2- Calculer $E°(Zn^{2+}/Zn_{(s)}) = E°_1$

3-Après une certaine durée de fonctionnement, le potentiel de la cathode devient égal à -0,82V. Déterminer la force électromotrice de la pile dans ces conditions.

<u>Exercice 5</u>: (3 points)

A 100mL d'une solution de sel de fer(III) Fe^{3+} 0,1M, on ajoute 0,1 mol de thiocyanate de potassium KSCN. On mesure la concentration des ions Fe^{3+} non complexés : $[Fe^{3+}] = 5,5.10^{-4}$M. Calculer la constante de formation β du complexe formé $[FeSCN]^{2+}$.

Université Ouaga 2

CPGE

MPSI

2018/2019

Examen de Chimie (S2)

(durée : 3 heures)

NB : *Les parties I et II devraient impérativement être traitées sur des feuilles de composition séparées. Il est recommandé de consacrer 1h30 min. de temps à chaque partie*

Partie I : Chimie des solutions

Exercice 1 (3pts)

Soit une solution à 0,1 $mol.L^{-1}$ de $[Ag(NH_3)_2]^+$. Calculer le pH pour que ce complexe soit détruit à moitié.

On donne : $[Ag(NH_3)_2]^+$ $\beta_2 = 10^{7,2}$ NH_4^+/NH_3 pKa = 9,2

Exercice 2 (7pts)

On souhaite déterminer le titre d'une solution fraîchement préparée de fer (II). Pour ce faire, on réalise un dosage de cette solution par une solution de cérium (IV) en effectuant un suivi potentiométrique à 25 °C. L'électrode de référence est l'électrode au calomel saturé.

Les potentiels des couples redox sont donnés ci-dessous :

$E°(Fe^{3+}/Fe^{2+})$ = 0,77 V/ENH

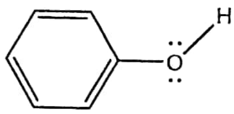
$E°(Ce^{4+}/Ce^{3+})$ = 1,44 V/ENH

1. Ecrire la demi-équation redox associée à chaque couple et donner l'expression du potentiel d'équilibre à l'aide de la relation de Nernst. On assimilera activités et concentrations
2. Quelle électrode de travail sera utilisée dans ce dosage ? expliquer.
3. Dessiner l'allure de la courbe obtenue et indiquer sur cette dernière les espèces chimiques présentes en cours de dosage
4. Calculer la valeur du potentiel mesuré lorsque l'équivalence est atteinte
5. Donner l'expression du potentiel mesuré à la demi-équivalence. Calculer sa valeur.
6. Le potentiel mesuré à la demi-équivalence vaut 0,52 V. Comment expliquer cette différence par rapport à la valeur calculée à la question précédente ?

Partie II : Chimie Organique

Questions de cours (5 points)

1) Après avoir donné la formule développée du réactif principal, déterminez la structure et le nom des produits de chacune des réactions suivantes :
   a) 2-méthylbut-1-ène + H_2O (en présence d'acide sulfurique, H_2SO_4)
   b) Butan-1-ol sous chauffage en présence d'acide sulfurique
2) Pour la structure du phénol ci-dessous :
   a) Ecrire les différentes formes limites (formes mésomères)
   b) En déduire les positions possibles (*ortho, méta ou para*) pour la fixation d'un ion chlorure (Cl^-)



Exercice (5 points)

Un des acides présents dans le raisin est l'acide 2,3-dihydroxybutanedioïque ou acide tartrique.

1) Donner la formule semi-développée de cet acide.
2) Indiquer le nombre de stéréoisomères de configuration attendus pour cet acide. Donner leur représentation de CRAM en précisant la configuration absolue des atomes de carbone asymétriques
3) En observant les représentations de Fischer, indiquer pourquoi un des stéréoisomères n'est pas optiquement actif.

Ecole Polytechnique de Ouagadougou Année 2018/2019

CPGE

MPSI

Epreuve de Chimie II

(Session de Rattrapage)

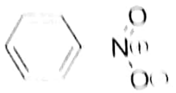
Durée : 3heures

Traiter les parties I et II sur des feuilles séparées

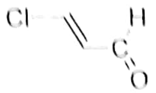
Partie I : Chimie organique (1h 30min)

Exercice-1 : *(4 pts)*

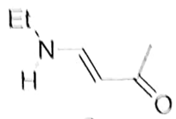
Donner les formes mésomères des molécules dont les structures sont représentées ci-dessous :



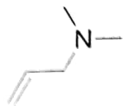
A



B



C



D

Exercice-2 : *(6 pts)*

L'analyse élémentaire d'un composé organique monooxygéné a donné les résultats suivants :

%C = 69,76 ; %H = 11,61 ; %O = 18,63

1. Déterminer sa formule brute

2. Donner les formules semi-développées ayant au moins un carbone asymétrique, sachant que ce composé comporte un groupement hydroxyle dans sa structure.

3. Représenter en CRAM en donnant les configurations absolues des carbones asymétriques les stéréoisomères listés à la question 2°).

Partie II : Equilibre chimique en solution

(Il est conseillé de consacrer 1h 30min à cette partie)

Exercice 1 (4pts)

L'acide phosphorique H_3PO_4 est un triacide dont les trois pKa valent respectivement 2,2 ; 7,2 ; 12,3.

a) Définir et tracer le diagramme de prédominance

b) Définir le domaine de majorité des 4 espèces phosphorées. On tiendra compte d'un rapport de 10 entre l'espèce majoritaire et minoritaire

c) une solution de NaH_2PO_4 de 0,05 $mol.L^{-1}$ a un pH de 4,7. Calculer les concentrations des différentes espèces et classer celles-ci selon leur importance relative

<u>Exercice 2 (3pts)</u>

Le thiosulfate de sodium $Na_2S_2O_3$ est le réducteur usuel du diiode. Les couples mis en jeux sont :

I_2/I^- ($E°_1 = 0{,}62 V/ENH$) ; $S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-}$ ($E°_2 = 0{,}09$ V/ENH)

a) donner les nombres d'oxydation du soufre dans les ions thiosulfate $S_2O_3^{2-}$ et tétrathionate $S_4O_6^{2-}$. Equilibrer la demi-équation redox correspondante

b) En déduire l'équation de la réaction de titrage du diiode par le thiosulfate. Calculer sa constante d'équilibre. Comment visualise-t-on l'équivalence ?

<u>Exercice 3 (3pts)</u>

La solubilité du diiode dans l'eau pure à 25°C vaut $S_0 = 1{,}36.10^{-3}$ $mol.L^{-1}$.

Pour augmenter cette solubilité, on opère en présence d'un excès d'ions iodure. Il s'établit alors l'équilibre :

$I_{2(aq)} + I^- \rightleftharpoons I_3^-$ de constante $K_F = 4{,}6\ 10^2$ à 25°C

a) Exprimer la solubilité s du diiode en fonction de S_0 et de la concentration en I_3^-. Justifier l'augmentation de la solubilité.

b) Calculer S pour une solution contenant à la préparation 0,05 $mol.L^{-1}$ en iodure de potassium.

Université OUAGA II

Année académique 2018-2019

Classes Préparatoires d'entrée dans les Grandes Ecoles (CPGE) - MPSI

Enseignants : Pr Hamidou TOURE, Pr Sado TRAORE, Dr Bernard BONZI, Dr Safimba SOMA, Issa ZABSONRE Dr Ali OUEDRAOGO, Mlle K. Estelle NASSOURI.

Examen d'Analyse II : Semestre 2

-(Durée: 04 heures)

Aucun document ni calculatrice n'est autorisé.

Exercice 1 (06 points)

1. Pour $x \in [0;1]$, et $n \in \mathbb{N}$ on pose : $f_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1+x^n}$
   (a) Les fonctions f_n sont-elles continues ?
   (b) Montrer que la suite f_n converge vers une fonction f que l'on déterminera.
   (c) La fonction f est-elle continue ? La convergence est-elle uniforme ?
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}$ on pose : $\quad g_n(x) = \lim\limits_{k\to\infty} [\cos(n!\pi x)]^{2k}$
   Montrer que la suite (g_n) converge vers une fonction qui n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$. (prendre considération x élément de $\mathbb{Q}$ ou non).

Exercice 2 : (5 points)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et F la fonction définie par : $F(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt$.

1. Montrer que F est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer F pour $f(t) = |t|$ et représenter le graphe de F.
3. Montrer que si : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ alors $= \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 2\ell$.

Exercice 3 (04 points)

On considère l'intégrale $I_n(x,a)$ définie par :

$$I_n(x,a) = \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{t^2+a^2}}dt, \quad ; x; a \in \mathbb{R}, \quad et \quad a > 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer que pour $n \geqslant 2$, $\quad nI_n(x,a) = x^{n-1}\sqrt{x^2+a^2} - (n-1)a^2 I_{n-2}(x,a)$.
2. En déduire la valeur de $I_5(2, \sqrt{5})$.

Exercice 4 ((05 points)

On pose : $S_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^k$;

1. Etablir que : $S_2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. Soit f_n définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :
   $f_n(x) = \dfrac{p^2}{n^2}$ si $x \in [\dfrac{p}{n}; \dfrac{p+1}{n}[$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant p \leqslant n-1$ et $f_n(1) = 1$.
   Montrer que f_n est une fonction en escalier. sur $[0;1]$
3. Calculer $F_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$. $\quad$ Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n$

Bon courage !

Université OUAGA II

Année académique 2018-2019

Classes Préparatoires d'entrée dans les Grandes Ecoles (CPGE)

Enseignants: Pr Hamidou TOURE, Dr Bernard BONZI, Dr Safimba SOMA

Devoir 1 d'Analyse: Nombres réels et suites numériques—Durée: Trois (03) heures

---

Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (10 points)

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application croissante sur $[0,1]$ et soit

$$A = \{x \in [0,1] ; x \leqslant f(x)\}.$$

1. Montrer que A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.
2. On note $a = \operatorname{Sup}(A)$. Montrer que $a \in [0,1]$.
3. Montrer $f(a)$ est un majorant de A. En deduire que $a \in A$.
4. On suppose que $a = 1$. Montrer que $f(1) = 1$
5. On suppose que $a \in [0,1[$. Montrer $f(a)$ est un ~~majorant~~ minorant de $]a,1]$. En deduire que $f(a) = a$.

Exercice 2 (10 points)

1. Soient a et b deux réels srtictement positifs. On définit les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ par :
$$u_0 = a,\ v_0 = b,\ \forall n \geqslant 0,\ \frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n},\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$
Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes.
2. On définit le sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ par :
$$E = \{a + b\sqrt{2}/(a;b) \in \mathbb{Z}^2\}$$
Après avoir vérifié que E est stable par la multiplication des réels, Montrer que la suite $(a_n)_{n\in Nn}$ définie par : $a_n = \lambda^n$ où $\lambda = 2 - \sqrt{2}$ est convergente dans E.
3. Montrer que le nombre $m = \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7}$ est un entier. (Calculer les premières puissances entières de $1 + \sqrt{2}$)
4. Etablir que E est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (10 points)

1. Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.
On pose : $C = AB = \{x / \exists\, a \in A, \exists\, b \in B, x = ab\}$.
Déterminner la borne supérieure de C.
2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle.
Montrer que si les suites $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$, $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{3n})_{n\geqslant 0}$ convergent alors elles convergent vers la même limite ℓ. En déduire la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, convergeant vers ℓ, et l'on définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $v_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k u_k$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ.

(On pourra établir que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $w_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} k u_k}{\sum_{k=1}^{n} k}$ est convergente).

4. Sans utiliser le logarithme, montrer que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$

Exercice 4 (10 points)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite telle que pour tout $n \geqslant 2$, $(n+1)^2 u_{n+1} - (n-1)^2 u_n + n = 0 \quad (E)$.

1) Montrer qu'il existe un réel k tel que si l'on pose $v_n = u_n - k$ alors pour tout $n \geqslant 2$,

$$(n+1)^2 v_{n+1} - (n-1)^2 v_n = 0.$$

2) En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n.

3) Que se passe-t-il si la relation (E) est vraie pour $n = 1$?

Bon courage !

Université OUAGA II

Année académique 2018-2019

Classes Préparatoires d'entrée dans les Grandes Ecoles (CPGE) - MPSI

Enseignants : Pr Hamidou TOURÉ, Pr Sado TRAORÉ, Dr Bernard BONZI, Dr Safimba SOMA & M^{lle} Estelle NASSOURI.

Examen d'Analyse S1-MPSI -(Durée: Quatre (04) heures)

Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (05 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = x^n - (1-x)^2.$$

1. Dans cette question, l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.
   (a) Etudier la monotonie de f_n.
   (b) Montrer qu'il existe un unique $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.
   (c) Etudier le signe de $f_{n+1}(\alpha_n)$.
2. On considère maintenant la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$.
   (a) Etudier la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$.
   (b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.
   (c) On pose $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$. Déterminer la valeur de α.

Exercice 2 (05 points)

1. Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = x^2$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que la fonction f est dérivable en un seul point que l'on précisera.
2. Soit g une fonction réelle définie dans l'intervalle $[a,b]$, $b > a$ et soit $x_0 \in [a,b]$.
   On suppose que la limite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x_0+h) - g(x_0-h)}{2h}$ existe et òn la note $g'_s(x_0)$.

   Cette limite s'appelle la *la dérivée symétrique de* g au point x_0.
   (a) Montrer que si g admet en x_0 une dérivée à droite et une dérivée à gauche, alors elle admet en ce point une dérivée symétrique.
   (b) Soit la fonction réelle φ définie par $\varphi(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $\varphi(0) = 0$.
   Montrer que φ n'admet au point 0 ni de dérivée à droite, ni de dérivée à gauche, mais qu'elle admet une dérivée symétrique.

Exercice 3 (10 points) :

Les suites de Fibonacci et le nombre d'or

Dans cet exercice, on s'interesse aux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ qui vérifient la relation de récurrence :

$$(*)\quad \forall\, n \geqslant 0,\ \ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

. On note E l'ensemble des suites réelles qui vérifient la relation $(*)$.

1. Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites de l'ensemble E.
   Etablir que :$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$; la suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$ est un élément de E.
2. Trouver toutes les suites géométriques de E.

3. On appelle "suite de Fibonacci" la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$(**)\ :\ \begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \\ u_0 = 0\ et\ u_1 = 1 \end{cases}$$

(a) Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5.

(b) Déterminer les valeurs de λ et μ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n$$

où q_1 et q_2 $(q_1 < q_2)$ sont les raisons de deux suites géométriques éléments de E.

(c) Etablir que : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(d) Justifier que le nombre $V_n = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est un entier.

(e) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2 = (-1)^n$.
En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ PGCD(u_n\,;\,u_{n+1}) = 1$.

(f) Etablire que $S_n \overset{def}{=} \sum\limits_{k=0}^{k=n} u_k = u_{n+2} - 1$.

Bon courage !

Université OUAGA II

Année académique 2018-2019

Classes Préparatoires d'entrée dans les Grandes Ecoles (CPGE) - MPSI

Enseignants: Pr Hamidou TOURÉ, Dr Bernard BONZI, Dr Safimba SOMA

Devoir d'Analyse II : Continuité et dérivabilité, Développement limité, Primitives

-(Durée: Trois (03) heures)

Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (12 points)

1. Montrer que, $\forall x \in [-1,1]$, $\text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}, u = \sin(\text{Arctan}(x))$ et $v = \cos(\text{Arctan}(x))$.
   Déterminer le signe de v puis, à l'aide de $\frac{u}{v}$ et de $u^2 + v^2$, déterminer des expressions de u et v en fonction de x sans utiliser de fonctions trigonométriques.
3. Les questions $a°$) et $b°$) sont indépendantes.
   (a) Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}; 0[\cup]0; \frac{\pi}{2}[$, on pose :
   $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et $f(x) = \frac{1}{sin(x)} - \frac{1}{x}$.
   Montrer que f peut se prolonger en une fonction de classe C^1 sur I.
   (b) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose on pose : $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$.
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que :
   $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = P_n(1/x)\exp(-\frac{1}{x^2})$.
   En déduire que f se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donner les valeurs de $f^{(n)}(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 : (08 points)

Soient I un intervalle, f une application deux fois dérivable de I dans $\mathbb{R}$, a et b deux éléments de I avec $a < b$. Pour $x \in I$ on pose :
$g(x) = \frac{f(a) + f(x)}{2} - \left(f\left(\frac{a+x}{2}\right) + \beta(x-a)^2\right)$, où β est une constante réelle.

1. Montrer qu'on peut choisir β de sorte que $g(a) = g(b) = 0$.
2. Montrer que $\exists\, c \in]a, b[\ / \ g'(c) = 0$.
3. En appliquant l'égalité des accroissements finis à f' entre deux points bien choisis en déduire que :
   $\exists d \in]a, b[/ \frac{f(a) + f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + (x-a)^2 f''(d)$

Bon courage !

Université OUAGA II

Classes Préparatoires d'entrée dans les G [illegible] CPG [illegible] - MP [illegible]

Enseignants: Pr [illegible]do TRAORÉ, Dr [illegible] ONZI, Dr Safimba SOMA

Devoir 2 d'Analyse III : S [illegible] **ériques, limites, continuité et dérivabilité - (Durée: Trois (03) heures)**

Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (10 points)

1. Etude de limites :
   (a) Après avoir déterminé ℓ, utiliser la définition de la limite pour montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+\sin x}{(2x+1)^2} = \ell$.

   (b) Calculer le cas échéant la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x}{2x+1}\right)^{\sqrt{x}}$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = xE(x - \dfrac{1}{x})$
   Montrer que f admet en 0 une limite que l'on déterminera.

3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{2}) & si \ \ x \neq 0 \\ 0 \ \ \text{sinon} \end{cases}$

   Déterminer son domaine de continuité.

4. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = \begin{cases} \exp(-\dfrac{1}{x^2}) & si \ \ x \notin \mathbb{Q} \\ 0 \ \ \text{sinon} \end{cases}$
   (a) Déterminer en le justifiant son domaine de continuité.
   (b) Indiquer en le justifiant son domaine de dérivabilité.

Exercice 2 : (05 points)

Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n - x - 1$, avec $n \in \mathbb{N}$; $n \geqslant 2$.

1. Montrer qu'il existe un unique x_n dans $[1, +\infty[$ tel que $f_n(x_n) = 0$
2. Montrer que $f_{n+1}(x_n) > 0$.
3. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante et convergeante. Déterminer sa limite ℓ.

Exercice 3 (05 points)

1. Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et f une application de $I = [a; b]$ dans I
   (a) On suppose que pour tout $(x; y)$ dans $I \times I$, on a : $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$
   Montrer que f est continue sur I.
   En déduire qu'il existe $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = \alpha$. (On dit que "α est un point fixe de f")
   (b) On suppose maintenant que pour tout $(x; y)$ dans $I \times I$, on a : $|f(x) - f(y)| < |x - y|$
   Montrer qu'il existe un unique $\beta \in I$ tel que $f(\beta) = \beta$.
2. Montrer que l'application f définie sur $[0, 2]$ par :

$$\forall x \in [0, 2] \ \ f(x) = \ln(2 + x^2)$$

admet un point fixe sur $[0, 2]$.

Bon courage !

Université OUAGA II **Année académique 2018-2019**

Classes Préparatoires d'entrée dans les Grandes Ecoles (CPGE) - MPSI

Enseignants: Pr Hamidou TOURÉ, Dr Bernard BONZI, Dr Issa ZABSONRÉ
Mlle Estelle NASSOURI

Devoir 2 d'Analyse II : Equations différentielles, Calcul intégral,

-(Durée: Trois (03) heures)

Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (08 points)

1. Calculer $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right]$.
2. On considère la fonction F définie pour $x>0$ par : $F(x)=\int_1^x \frac{1}{t}dt$.
   Sans utiliser le logarithme, établir que $\forall\, a;b \in \mathbb{R}_+^*$; $F(ab)=F(a)+F(b)$.
3. déterminer le cas échéant la valeur de l'intégrale I définie par :
   $I=\int_{-1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$
4. On considère les intégrales indéfinies I_n et J_n définies par :
   $I_n(a;x)=\int_a^x \frac{tdt}{(1+t^2)^n}$ et $J_n(a,x)=\int_a^x \frac{dt}{(1+t^2)^n}$
   Calculer In et établir une relation de récurrence portant sur J_n. En déduire $I_2(0;1)$ et $J_2(0;1)$.

Exercice 2 (06 points)

1. Déterminer la solution de l'équation différentielles

$$(1)\qquad x^2+2xy-y^2+(y^2+2xy-x^2)y'=0$$

   passant par le point : (1 ;-1)

2. Une équation différentielle de la forme

$$(2)\qquad y'=a(x)y+b(x)y^{\alpha}\ ;\quad \alpha\in\mathbb{R}$$

   a et b sont des fonctions réelles à variable réelle, est dite équation de Bernoulli.

   (a) Que devient (2) si $\alpha \in 0;1$?

   (b) En posant $z=y^{1-\alpha}$, montrer que (2) devient une équation linéaire.

   (c) Intégrer l'équation différentielle :
   $2xy'+y+3x^2y^2=0$

Exercice 3 (06 points)

1. Intégrer l'équation différentielle :
   (*) $\qquad \alpha y' + \beta y + \gamma = 0; \quad y(0) = y_0.$
   Les paramètres α, β et γ sont dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. Une balle de masse m est projetée verticalement avec une vitesse initiale v_0 à l'instant $t_0 = 0$. Son mouvement est freiné par son poids mg et une force de frottement proportionelle à sa vitesse $V(t)$. On notera p le coefficient de proportionalité.
   (a) Etablir que sa vitesse $V(t)$ à l'instant t est :
   (**) $\qquad V(t) = (v_0 + \frac{mg}{p})\, e^{-pt/m} - \frac{mg}{p}$ [1]
   (b) Montrer alors que la hauteur $h(t)$ atteinte par la balle est de :
   (* * *) $\qquad h(t) = \frac{m}{p}\left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)\left(1 - e^{-pt/m}\right) - \frac{mgt}{p}.$
3. **Application :** Déterminer la hauteur maximale atteinte [2] par la balle sachant que :
   $m = 1kg$, $g = 10ms^{-2}$, et $p = 10^{-1}$; $v_0 = 20m/s$

Bon courage !

1. On montrera par la relation fondamentale de la dynamique que $V(t)$ satisfait à une équation de type (*) dont on précisera les paramètres
2. La hauteur maximale est atteinte pour $V(t) = 0$

Université Ouaga II

Classes Préparatoire d'entrée dans les Grandes Écoles

Devoir de rattrapage d'Informatique

(Durée : 2H)

COMPRÉHENSION DU COURS : (6 points)

Traduire cet algorithme en C	Soit l'algorithme suivant. Cet algorithme présente 10 erreurs ; Corrigez-les.
ALGORITHME CALCUL; Var N, I, Q, S: entier; DEBUT Lire(N) ; I <---- N; S <---- 0; TantQue I ≠ 0 faire Debut Q <---- I Mod 10; S <---- S*10 + Q ; I <---- I Div 10 ; Fin; Ecrire (S) FIN.	Algorithme 1Calcul; Var a,b,c : entier ; e, β : Réel ; Debut Lire('a'); b<---- 0.5; β <---- 4 ; b+c <---- 10 ; a <---- c; a <---- e; c <---- ' b '; f <---- c; Ecrire (a) Terminé.

EXERCICE 1 : (5 points)

Les habitants d'une ville paient l'impôt selon les règles suivantes :

- ✓ Les hommes de plus de 20 ans paient l'impôt ;
- ✓ Les femmes entre 18 et 35 ans paient l'impôt ;
- ✓ Les autres ne paient pas d'impôt.

Écrire un programme C qui demande donc l'âge et le sexe de l'habitant, et affiche s'il paye l'impôt ou non.

EXERCICE : (9 points)

Écrire un programme C qui calcul et affiche le montant net à payer (en TTC ; la TVA =18%) de la facture d'eau d'un abonné, sachant que le montant est comptabilisé comme suit :

Paiement de sa consommation selon le volume d'eau consommé en fonction du tarif à tranche indiqué ci-dessous + 2000 FCFA montant de la redevance :

Consommation ≤ 50 M^3 → Prix unitaire = 50 FCFA le M^3

50 M^3 < consommation ≤ 150 M^3 → Prix unitaire = 100 FCFA le M^3

150 M^3 < consommation ≤ 300 M^3 → Prix unitaire = 200 FCFA le M^3

300 M^3 < consommation ≤ 600 M^3 → Prix unitaire = 300 FCFA le M^3

Consommation > 600 M^3 → Prix unitaire = 500 FCFA le M^3

Université Ouaga 2

CPGE 1 **Année 2018/2019**

Algorithmiques et Programmation

Examen

Mini projet : Gestion de comptes bancaires.

1. définir un type structure **DATE** qui contient trois membres entiers : jour, mois et année
2. définir un type structure **CLIENT** qui contient les membres suivants :
    - numero_cmpt : entier (numéro de compte)
    - nom : chaîne de caractères (nom d'un client)
    - der_operation : caractère (R : Retrait, V : Virement)
    - anc_solde : réel (ancien solde)
    - nouv_solde : réel (nouveau solde)
    - date : DATE (jj mm aa)
3. Écrire une fonction **ouvrir** qui ouvre un fichier existant ou le crée sinon.
4. Écrire une fonction **fermer** qui ferme le fichier.
5. Écrire la fonction **main** qui fait appel SEULEMENT aux fonctions **ouvrir**, **fermer** et la fonction **menu**. Le début de la fonction **menu** est donné. Avant de continuer VERIFIEZ que le fichier est bien créé.
6. Écrire la fonction **creer_tab_client** qui alloue la mémoire nécessaire à un ensemble donné de clients.
7. Écrire une fonction **ajout_client** qui permet d'ajouter un client dans le fichier.
8. écrire une fonction **lister** qui affiche tous les clients du fichier. TESTEZ votre programme avant de remettre.

```c
void menu(FILE *fic)
{
	char choix;
	do
	{
		printf("Ajouter d'un nouveau client............: A\n");
		printf("Consultation d'un compte client........: C\n");
		printf("Lister tous les comptes de clients.....: L\n");
		printf("Opération sur un compte client.........: O\n");
		printf("Quitter................................: Q\n");
		printf("                                votre choix: ");
		rewind(stdin);
		scanf("%c",&choix);
		switch(choix)
		{
			case 'a':
			case 'A': ajout(...);
			...
		}
	}
	while (choix != 'q' && choix != 'Q');
}
```

Bon courage !

Université Ouaga 2 **Année académique 2018-2019**

CPGE

MPSI

Devoir Surveillé de Logique Combinatoire

Durée : 2h

Documents et calculatrice non autorisés

Question de cours (06 points)

1- Définir les termes suivants :

- Automatique ***(0.5 point)***
- Système automatisé ***(0.5 point)***

2- Schématiser un système automatisé ***(1 point)***

3- Donner le rôle de la partie opérative et le rôle de la partie commande d'un système automatisé ***(0.5 point + 0.5 point).***

4- Dessiner les symboles d'une bascule D et d'une bascule RS ***(0.5 point + 0.5 point).***

5- Citer un exemple de bascule asynchrone et d'une bascule synchrone. ***(0.5 point + 0.5 point)***

6- Que est ce qu'un compteur ? ***(1 point)***

Exercice 01 (04 points)

Effectuer les conversions suivantes :

1- $(18.25)_{10} = (\ ?)_2 = (\ ?)_8 = (\ ?)_{16}$ ***(1 point)***

2- $(11100)_2 = (\ ?)_{10} = (\ ?)_8 = (\ ?)_{16}$ ***(1 point)***

3- $(24)_8 = (\ ?)_2 = (\ ?)_{10} = (\ ?)_{16}$ ***(1 point)***

4- $(2019)_{10} = (\ ?)_{BCD}$ ***(1 point)***

Exercice 02 (04 points)

Simplifier algébriquement les fonctions suivantes (2 pts) et vérifier les résultats par la méthode du tableau de karnaugh (2 pts)

$$F1 = a.b.\bar{c} + \bar{a}.\bar{b}.c + a.\bar{b}.\bar{c} + a.\bar{b}.c$$

$$F2 = \bar{a}.\bar{b}.c.\bar{d} + \bar{a}.b.\bar{c}.d + a.\bar{b}.c.\bar{d} + \underline{\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d}} + a.b.\bar{c}.d + \bar{a}.b.c.d + \underline{a.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d}}$$

Exercice 03 : Commande de feux automobiles : (06 points)

On dispose, sur une automobile, de 4 commandes indépendantes: Cv pour les veilleuses, Cc pour les 2 feux de croisement, Cr pour les feux de route et Ca pour les phares anti-brouillard (valeur 1 au travail, 0 au repos).

On note les états des lumières V pour les veilleuses, C pour les feux de croisement, R pour les feux de route et A pour les feux antibrouillard (valeur 1 à l'allumage, 0 à l'extinction).

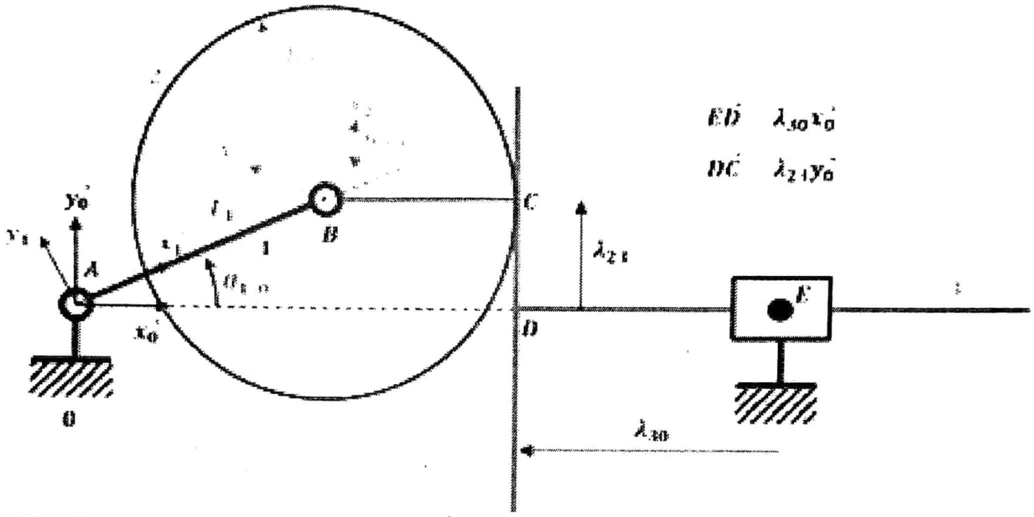
Les veilleuses n'étant pas comptées comme des phares, il est précisé que :

- 4 phares ne peuvent être allumés simultanément ;
- les feux de croisement ont priorité sur les feux de route et sur les antibrouillard ;
- les antibrouillards ont priorité sur les feux de route
- les veilleuses peuvent être allumées seules mais l'allumage des feux de croisement ou des feux de route ou des antibrouillard entraîne obligatoirement l'allumage des veilleuses.

1. A partir de ces postulats, établir la table de vérité liant V, C, R, A à Cv, Cc, Cr et Ca. ***(2 points)***
2. Trouver les équations simplifiées des fonctions V, C, R et A. ***(2 = 0.5 x 4 points)***,
3. Tracer les schémas logiques des fonctions V, C, R et A. ***(2 = 0.5 x 4 points)***

Exercice 3

Soit le mécanisme suivant



Dans le cas de calcul de vitesses en présence de points de contact, une erreur classique est à éviter. Elle réside dans la définition du vecteur $\vec{BC}$.

Du fait du contact, on peut toujours écrire :

$$\vec{BC} = R_2 \vec{x_1}$$

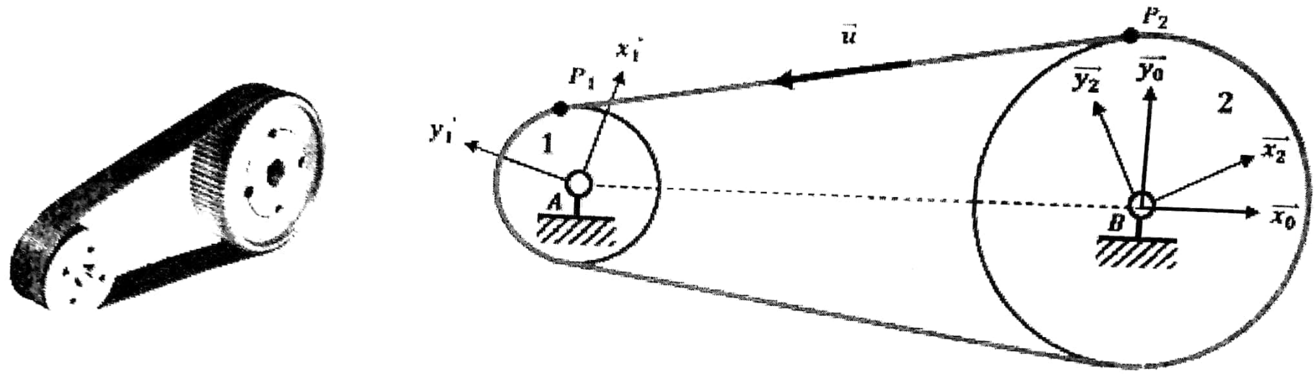
1) Calculer la vitesse $V_{C2/0}$ du mécanisme de transformation de mouvement représenté par le schéma cinématique paramétré ci-dessus (utiliser la loi de composition des vitesses, puis Varignon)
2) Calculer la vitesse du point E appartenant au solide 3par rapport au solide 0 ($V_{E3/0}$)

UNIVERSITE OUAGA 2 CPGE **Année académique 2018- 2019**

Devoir de mécanique du solide 1--Durée : **3 heures**

EXERCICE 1 : Transmission par poulie/courroie

Le système poulie/courroie ci-dessous transmet le mouvement de rotation d'une roue (2) à une roue (1) par le biais d'une courroie. On donne le schéma cinématique paramétré du mécanisme

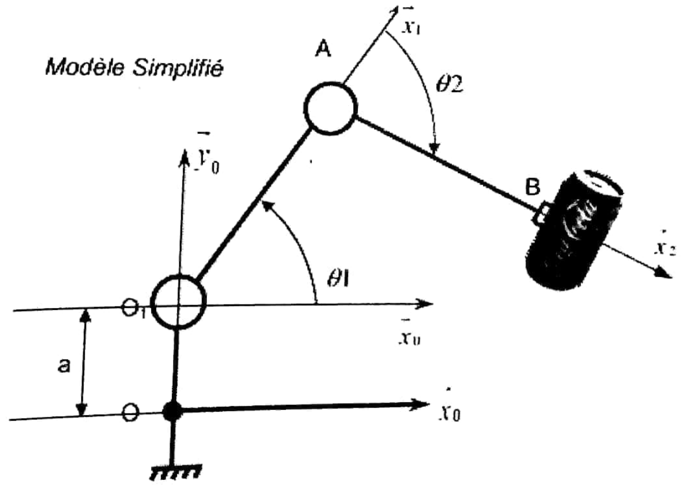


On pose que $\|\overrightarrow{AP_1}\| = R_1$; $\|\overrightarrow{BP_2}\| = R_2$ et $\theta_{2/0} = (\widehat{\vec{x}_0, \vec{x}_2}) = (\widehat{\vec{y}_0, \vec{y}_2})$; $\theta_{1/0} = (\widehat{\vec{x}_0, \vec{x}_1}) = (\widehat{\vec{y}_0, \vec{y}_1})$. On suppose que la courroie ne se déforme pas entre P_1 et P_2 lors de l'utilisation (ce qui est vrai en régime stationnaire, à vitesse constante et sans variation de l'effort dans celle-ci).

1) Etablir la loi « entrée-sortie » du système.

EXERCICE 2 : Bras de robot

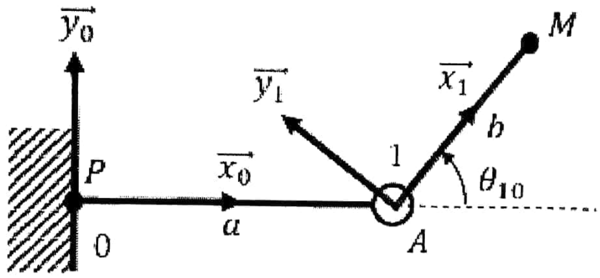
On considère le schéma cinématique paramétré ci-dessous dans lequel la pince de robot n'est animé que par deux mouvements de rotation paramétré θ_1 et θ_2. Le point B en bout de chaîne a comme coordonnées x_B et y_B dans le repère $R_o(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$. On donne $[O_1A] = [AB] = L$; $[OO_1] = a$ et la relation de Chasles $\overrightarrow{O_0B} = \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{AB}$.



1) Exprimer les coordonnées x_B et y_B en fonction des paramètres θ_1 et θ_2 en utilisant le modèle géométrique direct.

EXERCICE 3 : Loi « entrée-sortie »

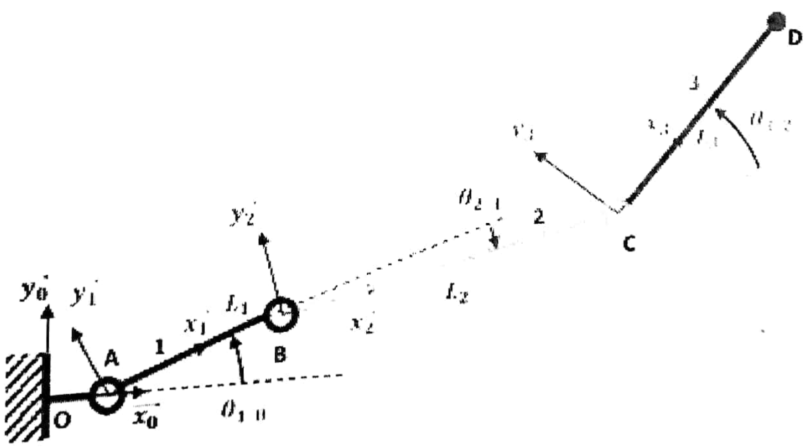
Dans le mécanisme ci-dessous la pièce (1) est en rotation par rapport à la pièce fixe (0) au point A. Le point P appartenant à la pièce fixe (0). On exprime le vecteur position de M dans le repère $R(P, x_0, y_0, z_0)$ par $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{x_0} + b\overrightarrow{x_1}$ où a et b sont des constantes. On définit également le vecteur vitesse angulaire (rotation) de la pièce 1 par rapport à la pièce 0 par $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{z_0} = \dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{z_1}$.



1) Calculer la vitesse du point M appartenant à la pièce 1 par rapport à la pièce 0.

EXERCICE 4 : Loi « entrée-sortie » du mécanisme ci-dessous

Schéma cinématique paramétré du mécanisme



1) Calculer la vitesse $\overrightarrow{V_{D3/0}}$

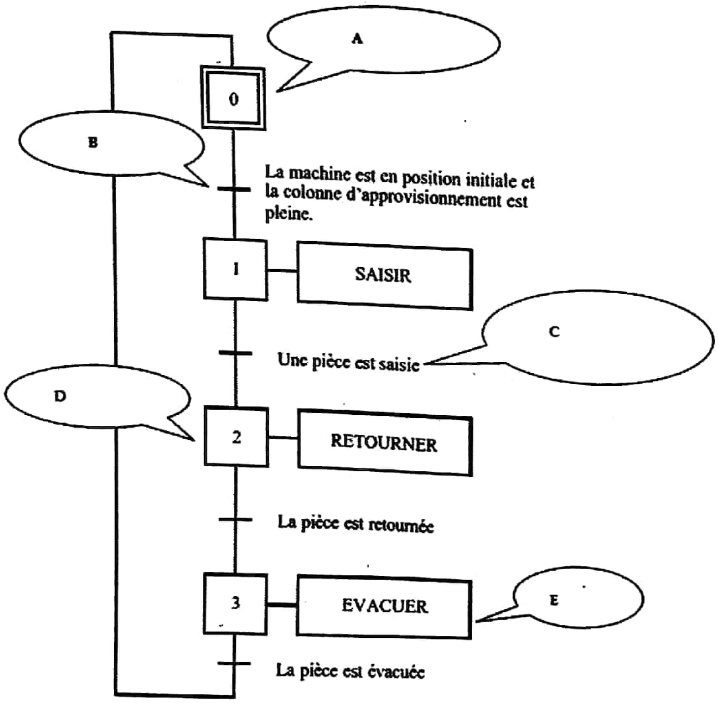
a) Méthode de Chasles puis changement de base de dérivation

EPREUVE DE SYSTEME AUTOMATISE

DUREE : 1 HEURE

I- Que signifie GRAFCET ? ***(0,75 pt)***

II- Dans le grafcet ci-dessous, nommer les éléments repérés par les lettres A, B, C, D et E. ***(0,25 pt x 5)***



III- Qu'appelle-t-on grafcet à séquence unique ? ***(0,5 pt)***

IV- Compléter la phrase suivante : ***(0,25 pt x 2)***

Lorsqu'une étape aboutit à un choix entre plusieurs transitions, on parle de ……………… du grafcet. Lorsque plusieurs transitions aboutissent à la même étape, on parle de ………………… du grafcet.

V- Réalisation de grafcets : Les feux tricolores:

CPGE UO2

Année académique 2018-2019

Examen de STI :----------------------------Dessin technique industriel et Automatisme

A l'intersection des voies A et B se trouvent 4 feux tricolores. Le cycle de fonctionnement en journée est le suivant:

- feux rouges sur les deux voies pendant 1s (T1),
- feu rouge sur la voie A et feu vert sur la voie B pendant 5s (T2),
- feu rouge sur la voie A et feu orange sur la voie B pendant 2s (T3),
- feux rouges sur les deux voies pendant 1s (T1),
- feu rouge sur la voie B et feu vert sur la voie A pendant 5s (T2),
- feu rouge sur la voie B et feu orange sur la voie A pendant 2s (T3).

Le cycle de fonctionnement de nuit est le suivant:

- feu orange clignotant sur les deux voies: allumé pendant 1,5s (T4) et éteint pendant 0,5s (T5).

Données techniques:

Feux rouges voie A	RA
Feux oranges voie A	OA
Feux verts voie A	VA
Feux rouges voie B	RB
Feux oranges voie B	OB
Feux verts voie B	VB
Marche	m
Capteur jour/nuit	**j pour jour et $\bar{j}$ pour nuit**

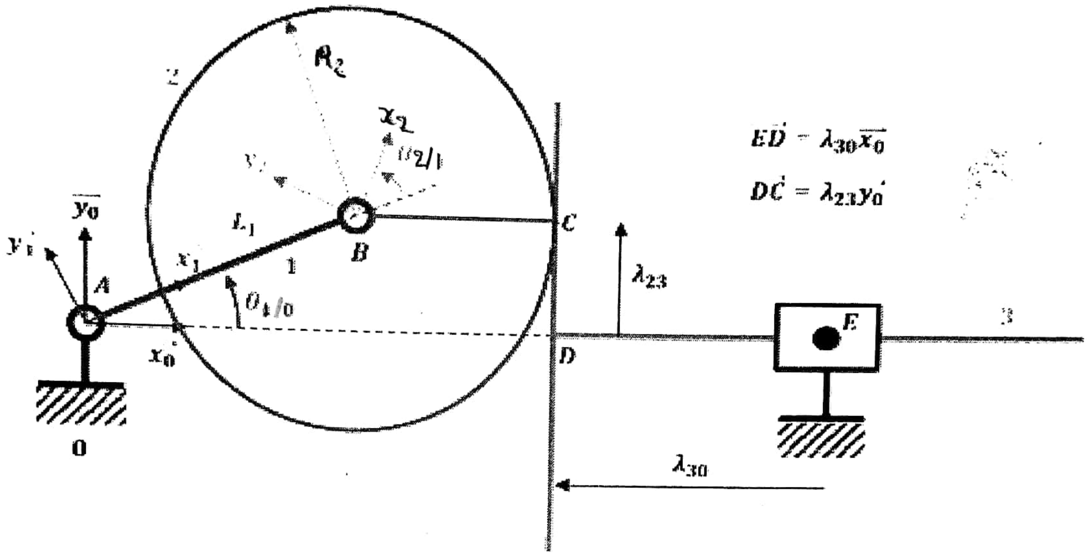
1- Compléter sur le document réponse les grafcet du point de vu système et du point de vu de la partie commande en journée. Les conditions de départ sont un interrupteur marche et un capteur jour/nuit. ***(1 pt + 1 pt)***

2- Réaliser un grafcet pour le fonctionnement de nuit (point de vu système et point de vu commande). ***(1 pt + 1 pt)***

EXERCICE 5 : Loi « entrée-sortie » du mécanisme ci-dessous

1) Calculer la vitesse $\overrightarrow{V_{C2/0}}$ du mécanisme de transformation de mouvement représenté par le schéma cinématique paramétré ci-dessous (utiliser la loi de composition des vitesses puis Varignon)

2) Calculer la vitesse du point E appartenant au solide 3 par rapport au solide 0 ($\overrightarrow{V_{E3/0}}$)



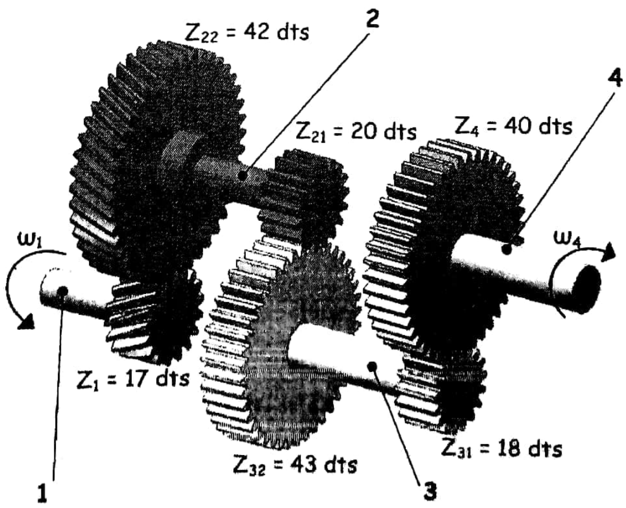
EXERCICE 6 : Train d'engrenage

Le train d'engrenage ci-dessous est composé un couple d'engrenage à dentures hélicoïdales (pignon 1 et roue 22) et des couples d'engrenages à dentures droites.

1) Compléter le tracé le schéma cinématique sur la feuille à rendre

2) Etablir la loi entrée-sortie du mécanisme

3) Calculer le rapport de réduction



Université OUAGA II

Année académique 2018-2019

Classes Préparatoires d'entrée dans les Grandes Ecoles (CPGE)

Enseignants: Pr Sado TRAORE, Pr Hamidou TOURÉ, Dr Bernard BONZI, Dr Safimba SOMA

Rattrapage d'Analyse du semestre 1 — Durée: Quatre (04) heures

Aucun document ni calculatrice n'est autorisé.

Exercice 1 (08 points)

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

1) On suppose que $\lim_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0$.

Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

2) On suppose que pour tous $x > 0,\ y > 0,\ f(xy) = f(x) + f(y)$.

Montrer que $\lim_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0$ et en déduire que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} xf(x) = 0$.

Exercice 2 (12 points)

Dans tout cet exercice, on considère des suites de nombres réels à propos desquelles on adopte les notations suivantes : à toute suite α de terme général α_n, $n \in \mathbb{N}$, on associe les deux suites $\beta = T\alpha$ et $\gamma = T^2\alpha$ de termes généraux respectifs

$$\beta_n = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n+1} \quad \text{et} \quad \gamma_n = \frac{\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_n}{n+1}.$$

Si $\beta = T\alpha$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, on dit que la suite α converge en moyenne vers l et si $\gamma = T^2\alpha$ converge vers l, on dit que la suite α converge en moyenne itérée vers l.

1) a) Montrer que si la suite α converge vers l, elle converge en moyenne vers l et en déduire que si la suite α converge en moyenne vers l, elle converge en moyenne itérée vers l.

b) Donner un exemple de suite divergente qui converge en moyenne vers l et un exemple de suite ne convergeant pas en moyenne vers l mais convergeant en moyenne itérée vers l.

c) Montrer que si la suite α tend vers $+\infty$, il en est de même de la suite $T\alpha$ et de la suite $T^2\alpha$.

2) On suppose dans cette question que la suite α est à termes positifs.

a) Montrer que si la suite α converge en moyenne vers 0, il en est de même de la suite de terme général $\sqrt{\alpha_n}$.

b) Montrer que si la suite α est décroissante, la suite de terme général $\alpha_n\sqrt{n}$ converge vers 0 si et seulement si elle converge en moyenne vers 0.

c) Montrer que si la suite α est décroissante, la suite de terme général $n\alpha_n$ converge vers 0 si et seulement si elle converge en moyenne itérée vers 0.

Dans toute la suite on considère la suite u de terme général réel u_n et on définit les suites s et v de termes généraux respectifs $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $v_n = nu_n$.

3) a) Vérifier la formule $s - Ts = Tv$.

b) Si s converge vers $l \in \mathbb{R}$, montrer que v converge en moyenne vers 0.

c) Si s converge en moyenne vers l, montrer que v converge en moyenne vers 0 si et seulement si la suite s converge.

4) a) Donner un exemple de suite de terme général u_n telle que s converge en moyenne sans que v ne converge en moyenne vers 0.

b) Etudier, du point de vue de la convergence en moyenne des suites s et v, la suite de terme général $u_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+2)}$ où ln désigne le logarithme néperien.

c) Montrer que si s converge en moyenne, v converge en moyenne itérée vers 0. La réciproque est-elle exacte ?

Bon courage !

04/10/2019

Université OUAGA II

Année académique 2018-2019

Classes Préparatoires d'entrée dans les Grandes Ecoles (CPGE)

Enseignants: Pr Sado TRAORE, Pr Hamidou TOURÉ, Dr Bernard BONZI, Dr Safimba SOMA

Corrigé du rattrapage d'Analyse du semestre 1 — Durée: Quatre (04) heures

Aucun document ni calculatrice n'est autorisé.

Exercice 1 (08 points)

1) On se donne $\varepsilon > 0$.

Par hypothèse, il existe $x_0 > 0$ tel que $x \geq x_0 \Rightarrow |f(x+1) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Soit x un réel quelconque supérieur ou égal à x_0.

Soit $m = [x - x_0]$. On a donc $m \leq x - x_0 < m+1$ c'est-à-dire $x - m - 1 < x_0 \leq x - m$.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(x-1) + f(x-1) - f(x-2) + \cdots + f(x-m+1) - f(x-m) + f(x-m) \\ &= f(x-m) + \sum_{k=1}^{m} (f(x-k+1) - f(x-k)) \end{aligned}$$

Dans cette somme on a $|f(x-k+1) - f(x-k)| \leq \varepsilon$ pour tout k de $\{1, \ldots, m\}$.

D'autre part $x - m \in [x_0, x_0+1] \Rightarrow |f(x-m)| \leq M$, avec $M = \sup_{[x_0, x_0+1]} |f|$ (f est continue.)

On en déduit $|f(x)| \leq M + m\varepsilon \leq M + (x - x_0)\varepsilon$.

Il en résulte $\frac{|f(x)|}{x} \leq \frac{M + (x-x_0)\varepsilon}{x}$. Or on constate que $\lim_{x \to +\infty} \frac{M + (x - x_0)\varepsilon}{x} = \varepsilon$.

Il existe donc $x_1 > x_0$ tel que $x \geq x_1$ implique $\frac{M + (x-x_0)\varepsilon}{x} \leq 2\varepsilon$ donc $\frac{|f(x)|}{x} \leq 2\varepsilon$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc trouvé x_1 tel que $x \geq x_1$ implique $\frac{|f(x)|}{x} \leq 2\varepsilon$.

Autrement dit : $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

2) f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie :

$\forall x > 0, \forall y > 0, f(xy) = f(x) + f(y)$

En prenant $x = y = 1$ on trouve $f(1) = 0$.

Pour tout $x > 0$, posons $y = \frac{1}{x}$.

On obtient $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ car $f(1) = 0$.

Pour tout $x > 0$. posons $u = \frac{1}{\quad}$.

On a :

$$\lim_{x \to 0} x f(x) = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{-f(t)}{t} = 0.$$

(1)

On obtient :

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

$$=f(x)-f(x+1)$$

D'où
$$f(x+1)-f(x)=-f\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$=f\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ on a

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{x+1}{x}\right)=f(1)=0 \quad \text{car}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1.$$

Finalement on trouve

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(f(x+1)-f(x)\Big)=0.$$

On en déduit par la question 1)

que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

Aussi pour tout $x>0$ en posant $t=\frac{1}{x}$

Ecole Polytechnique de Ouagadougou
Classes Préparatoires d'entrée
dans les Grandes Ecoles
Niveau d'études : 1re année MPSI
Enseignants : Prof. I. ZERBO
Dr P. KAFANDO
Dr Z. S. KAM
Dr B. NANA
Dr S. OUOBA
Dr M. SOUGOTI

Année universitaire 2018 – 2019

Examen de physique 1 - Session de rattrapage

Durée : 4 heures

Cette épreuve comporte trois (3) parties indépendantes ; Chaque partie est à traiter sur une copie différente.
Documents et appareils (téléphones portables, tablettes, ordinateurs) : non autorisés
Calculettes non programmables : autorisées pour les calculs numériques

Partie I : Optique géométrique (Durée : 1 heure)

Exercice

On considère une lentille en forme de demi-sphère de rayon R et d'indice n plongée dans l'air d'indice 1. Un faisceau cylindrique (de rayon d) de lumière monochromatique arrive sous incidence normale sur la face plane de la lentille ; le faisceau incident est issu d'un point objet A situé à l'infini dans la direction de l'axe optique de la lentille figure 1.

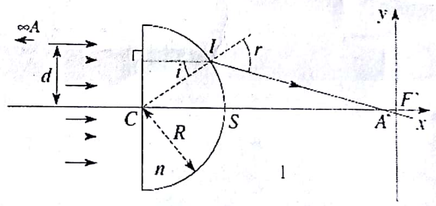


Figure 1

1) a- On considère un rayon du faisceau incident. Etablir la relation donnant $\overline{CA'}$ en fonction de $R = \overline{CS}$ et des angles i et r.

Indications : utiliser la figure 2 ; on commencera par déterminer les angles β et θ.

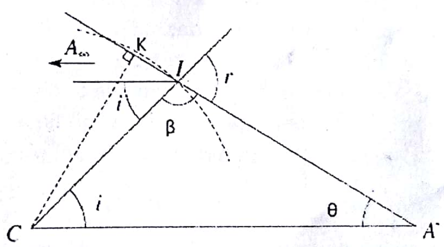


Figure 2

b- En déduire la limite $\overline{CF'}$ de $\overline{CA'}$ lorsqu'on se place dans l'approximation de Gauss (d << R et, r et i très petits).

Indication : utiliser la relation de Descartes pour les angles très petits.

2) les éléments manquants sur la vue de dessu

3) les éléments manquants sur la vue de dessu

b- Même question pour $\frac{\underline{v}}{\underline{e}}$ où v(t) est la tension aux bornes de l'association en série de *R* et *C*.

4. Exprimer l'amplitude de $\underline{u}(t)$.

5. Tracer et justifier l'allure du rapport entre l'amplitude de $\underline{u}(t)$ et celle de $\underline{e}(t)$ en fonction de la pulsation ω. On donnera toutes les valeurs particulières.

6. a) Calculer les limites asymptotiques de la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{u}}{\underline{e}}$

b) Calculer le gain en tension et en déduire les pentes des asymptotes obliques

c) Calculer la phase de la fonction de transfert et en déduire les limites asymptotiques.

Indications : pour tous les calculs de la question 6 on prendra x=RCω

7. Déterminer l'intensité complexe circulant dans le générateur.

Partie III : Mécanique du point matériel (Durée : 1 heure et 30 minutes)

Problème

Une bille d'acier de masse $m = 2\,grammes$ et de centre de gravité G, est placée sur un plan incliné dont l'angle d'inclinaison par rapport au sol horizontal est $\theta = 30°$ (voir figure 4). On veut étudier le mouvement de la bille lorsqu'on l'abandonne sans vitesse initiale au point A sur le plan incliné. Par ailleurs, on suppose que les frottements sont négligeables et on assimile la bille à un point matériel. On désigne par $\vec{g} = 10ms^{-2}$ l'accélération de la pesanteur terrestre

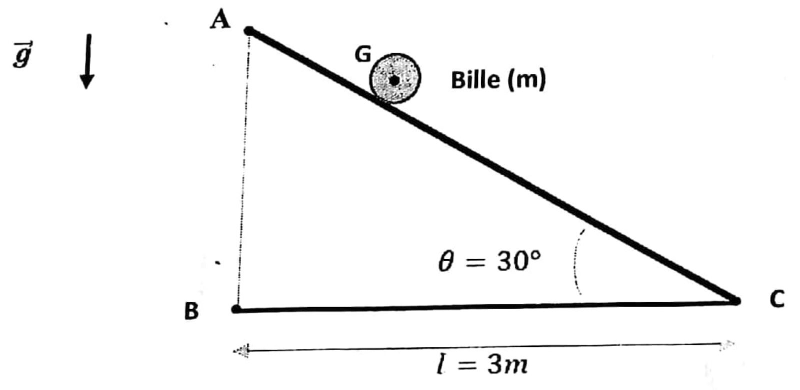


Figure 4

Ecole Polytechnique de Ouagadougou — Année 2018/2019

CPGE

MPSI

Epreuve de Chimie I

(Session de Rattrapage)

Durée : 3heures

partie I: Atomistique (à composer sur une feuille séparée, 1h 30 min.)

EXERCICE 1 : structure de matière

I. Soit l'élément de $Z = 33$.

1) Donner la configuration électronique de l'atome de cet élément dans son état fondamental
2) Placer cet élément dans le tableau périodique : période (numéro de ligne) famille (numéro de colonne) et bloc (élément *s, p, d* ou *f*)
3) Préciser les électrons de valence et les électrons de cœur.
4) Pour l'argent Z=47, on note un seul électron de valence du type *s*.
   a) Donner la configuration électronique de l'atome d'argent dans son état fondamental.
   b) Préciser la règle de remplissage qui n'est pas respectée ici,
   c) Placer cet élément dans le tableau périodique : période (numéro de ligne) famille (numéro de colonne).

XERCICE 2 : liaison chimique

e brome Br et le fluor F donnent trois composés BrF, BrF_3 et BrF_5.

Décrivez leur structure de Lewis et les figures de répulsion des deux derniers sous rme AX_nE_m.

Br et F sont deux éléments de la colonne 17 (Halogènes) et ils ont donc a priori des ractères chimiques analogues. Pourtant les composés inverses FBr_3 et FBr_5 n'existent s. Pourquoi ?

nnées : 1 D = $3{,}336.10^{-30}$ C.m ; e = $1{,}6.10^{-19}$ C ; Br (Z = 35) ; F (Z = 9)

Partie II : thermochimie et Equilibre chimique

(Il est conseillé de consacrer 1h 30min à cette partie)

Exercice 1 (3 pts)

La pentachlorure de phosphore PCl_5, se dissocie en donnant PCl_3 et Cl_2 :

$$PCl_5\,(g) \rightleftharpoons PCl_3\,(g) + Cl_2\,(g)$$

et la constante d'équilibre de cette réaction vaut 1,8 à 250 °C.

a) On porte 1,5 mol de PCl_5 à 250 °C, sous une pression constante de 1 bar. Quelles sont les pressions partielles des trois gaz à l'équilibre ?

b) On chauffe à 250°C, 0,7mol de PCl_5 dans une enceinte de 5 litres initialement vide. Quelle est la valeur de son coefficient de dissociation ?

c) On porte à 250 °C un mélange de 1,5 mol de PCl_5 et 1 mol de Cl_2, sous la pression constante de 1 bar. Quelles sont les pressions partielles des trois gaz à l'équilibre ? Quel volume occupent-ils ?

Exercice 2 (4 pts)

La dissociation du carbonate de calcium peut être modélisée par l'équation de réaction

$CaCO_3(s) \rightleftharpoons CaO(s) + CO_2(g)$

1. Calculer $\Delta H_r°$; $\Delta S_r°$ et $\Delta G_r°$ à 298K
2. Donner les expressions de $\Delta H_r°$; $\Delta S_r°$ et $\Delta G_r°$ en fonction de la température T.
3. Calculer la constante d'équilibre K° à 1 100 K

On donne à 298 K

	$CaCO_3$	CaO	CO_2
$\Delta H_f°$ en $kJ.mol^{-1}$	–1 207	–634	–394
$\Delta S_f°$ en $J.K^{-1}.mol^{-1}$	90	40	214
$C_p°$ en $J.K^{-1}.mol^{-1}$	111	48	46

Exercice 3 (3 pts)

On donne

$Al(OH)_3(s) \rightleftharpoons Al^{3+} + 3OH^-$ (1)

$Al(OH)_4^- \rightleftharpoons Al^{3+} + 4OH^-$ (2)

$Al(OH)_3(s) \rightleftharpoons Al^{3+} + 3\,Al(OH)_4^-$ (3)

MPSI 1 Algèbre 2

Devoir surveillé

Durée : 3h

Nouveau

Exercice 1 (1+1+2)

1) On a $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $(x-y)^2 + (y-z)^2 = 0 \iff \begin{cases} x-y=0 \\ \text{et} \\ y-z=0 \end{cases}$

Donc $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x = y = z\} = \{x(1,1,1), x \in \mathbb{R}\}$

$= \text{vect}\{(1,1,1)\}$. Par conséquent E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On a $F = \{(2y-z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(2,1,0) + z(-1,0,1), y, z \in \mathbb{R}\}$

$= \text{vect}\{(2,1,0), (-1,0,1)\}$, d'où F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

2) $\forall (x,y,z) \in E$, on a $x - 2y + z = 0$ car $x = y = z$ donc $E \subset F$, par conséquent $E \cap F = E$.

3) On a $(1,1,1) \in F$. Montrons que (3, ...

2) $\forall (x,y,z) \in E$, on a $x - 2y + z = 0$ car $x = y = z$ donc $E \subset F$, par conséquent $E \cap F = E$.

3) On a $(1,1,1) \in F$. Montrons que $(2,1,\ldots$

On a $(3,1,-1) = (2,1,0) - (-1,0,1) \Rightarrow (3,1,-1) \in F$, donc $G = \text{vect}((1,1,1);(3,1,-1)) \subset F$.

On a $(2,1,0) = \frac{1}{2}(1,1,1) + \frac{1}{2}(3,1,-1) \Rightarrow (2,1,0) \in G$

et $(-1,0,1) = \frac{1}{2}(1,1,1) - \frac{1}{2}(3,1,-1) \Rightarrow (-1,0,1) \in G$

par conséquent $\text{vect}((2,1,0),(-1,0,1)) = F \subset G$.

Exercice 2

1) * Soit P_0 le polynôme nul i.e. $P_0(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

on a $P_0 = (1-X)P_0(X^2) \Rightarrow P_0 \in E$ et $E \neq \emptyset$.

Soient $P_1, P_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; on a $\begin{cases} P_1 = (1-X)Q_1(X^2) \\ P_2 = (1-X)Q_2(X^2) \end{cases}$; $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$,

$$P_1 + \lambda P_2 = (1-X)Q_1(X^2) + \lambda(1-X)Q_2(X^2)$$

$$= (1-X)\left(Q_1(X^2) + \lambda Q_2(X^2)\right) = (1-X)R(X^2) \quad \text{où}$$

$R(X^2) = Q_1(X^2) + \lambda Q_2(X^2) \Rightarrow P_1 + \lambda P_2 \in E$, d'où

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. $P_0 \in F$ car $P_0(-x) = P_0(x) = -P_0(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Soient $P_1, P_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$

$(P_1 + \lambda P_2)(\ldots$

$P_2(x) = (1-x)P_1(x^2) + x(P_1+P_2)(x^2)$.

de plus $(1-X)P_1(X^2) \in E$ et $X(P_1+P_2)(X^2) \in I$, d'où

$\mathbb{R}[X] = E + I$.

5) d'après 3) et 4) on a $\mathbb{R}[X] = E + P = E + I$

$\forall P \in E$, P n'est ni pair, ni impaire, alors

$E \cap P = \{P_0 = 0\}$ et $E \cap I = \{P_0 = 0\}$ où P_0 est le polynôme nul

Par conséquent $E \oplus P = E \oplus I = \mathbb{R}[X]$.

Exercice 3

Nouveau

1) a) Soit $\mathbb{K}$ un corps, on dit qu'un ensemble E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ si:

i) $(E,+)$ est un groupe commutatif et s'il vérifie les propriétés suivantes: $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$, $\forall (u,v)\in E^2$

ii) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$, iii) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$, iv) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$

v) $1_{\mathbb{K}} u = u$.

b) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F est un supplémentaire de G dans E si $E = F \oplus G$.

i.e. $E = F+G$ et $F\cap G = \{0_E\}$

c) On appelle dimension d'un espace vectoriel de type fini le cardinal ~~de la~~ d'une base de cet espace vectoriel.

2) a) * Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_p \in \mathbb{K}$ tel que

$\sum_{i=1}^p \lambda_i(e_i+a) = 0$. Alors $\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = -a\sum_{i=1}^p \lambda_i$. or $a\in G \Rightarrow$

$a\sum_{i=1}^p\lambda_i \in G \Rightarrow \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i \in G \Rightarrow \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i \in \underbrace{G\cap F}_{=\{0_E\}} \Rightarrow \lambda_i = 0\ \forall i \in [\![$

La famille $(e_1+a,\dots,e_p+a)$ e[illegible]

on a alors $\dim F_a + \dim G = \dim F + \dim G = \dim E$.

Soit $x \in F_a \cap G$, on a $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i(e_i+a) \Rightarrow$

$x = \sum \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^p \lambda_i a \Rightarrow x - \sum_{i=1}^p$ [illegible] i.e. $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$

c) On appelle dimension d'un espace vectoriel fini le cardinal de la d'une base de cet espace vectoriel.

2) a) * Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i (e_i + a) = 0$. Alors $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = -a \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$ or $a \in G \Rightarrow$ $a \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \in G \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \in G \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \in \underbrace{G \cap F}_{=\{0_E\}} \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i \in [\![1$

La famille $(e_1 + a, \dots, e_p + a)$ e[illegible] (1)

On a alors $\dim F_a + \dim G = \dim F + \dim G = \dim E$.

Soit $x \in F_a \cap G$, on a $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (e_i + a) \Rightarrow$

$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a \Rightarrow x - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \in F \cap G = \{0_E\}$

Donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ d'où $x = 0_E$.

Conclusion : On a $\dim F_a + \dim G = \dim E$ et $F_a \cap G = \{0_E\} \Leftrightarrow$ $F_a + G = E$

b) Supposons que $F_a = F_b$, alors

$e_1 + a = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (e_i + b) \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i - e_1 = a - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i b \in F \cap G$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ et $\lambda_i = 0 \ \forall i \in [\![2, p]\!]$, d'où $e_1 + a = e_1 + b$ et $a = b$

Nouyau

Exercice 4 (1,5 + 1,5 + 1,5 + 1,5) Nouveau

1) On a $\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$

D'où $\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U+V)$ or

$\dim U + \dim V > n$ et $\dim(U+V) \leq n$, d'où

$\dim(U \cap V) > n - n = 0$. On en déduit que $U \cap V \neq \{0\}$

prouvant que $U \cap V$ contient au moins un vecteur non nul.

2) a) On a $\dim W' = \dim U + \dim V - \dim(U+V)$ or

$\dim(U+V) \leq n$ d'où $\dim W' \geq \dim U + \dim V - n$.

b) D'après a) $\dim W' \geq \dim U + \dim V - n$. Ainsi en ajoutant

$\dim W$ à chaque membre, on obtient ~~dim W'~~

$\dim W' + \dim W \geq \dim U + \dim V + \dim W - n > 2n - n = n$

c) $\dim(U \cap V \cap W) = \dim(W' \cap W) = \dim(W') + \dim W - \dim(W'+W)$

$> n - \dim(W'+W)$. Mais $W'+W$ est un sous-espace vectoriel

de E donc $\dim(W'+W) \leq n$, par conséquent

$\dim(U \cap V \cap W) > n - n = 0$ et $U \cap V \cap W \neq \{0\}$, ce qui montre

qu'il contient au moins un vecteur non nul.

$* \; P_0 \in \mathcal{P}$ et $P_0 \in I$ car $P_0(-x) = P_0(x) = -P_0(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Soient $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$(P_1 + \lambda P_2)(-x) = P_1(-x) + \lambda P_2(-x) = P_1(x) + \lambda P_2(x) \text{ car } P_1, P_2 \in \mathcal{P}$$

$$= (P_1 + \lambda P_2)(x) \implies P_1 + \lambda P_2 \in \mathcal{P}.$$

De même :

$P_1, P_2 \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R} \implies (P_1 + \lambda P_2)(-x) = -(P_1 + \lambda P_2)(x) \implies$

$P_1 + \lambda P_2 \in I$.

Donc $\mathcal{P}$ et I sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

2) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$

$$= a_0 + a_2 X^2 + \cdots + a_{2k} X^{2k} + X(a_1 + a_3 X^2 + \cdots + a_{2k+1} \cdots).$$

Ainsi en séparant les puissances paires et impaires, on peut écrire P sous la forme $P = P_1(X^2) + X P_2(X^2)$ avec $P_1(X^2) = a_0 + a_2 X^2 + \cdots$ et $P_2(X^2) = a_1 + a_3 X^2 + \cdots$.

Nouveau !

3) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, on a : **Nouveau**

$$P = P_1(X^2) + X P_2(X^2) = (P_1 + P_2)(X^2) - (1-X) P_2(X^2).$$

De plus $(P_1+P_2)(X^2) \in \mathcal{P}$ et $(1-X)P_2(X^2) \in E$, d'où

$\mathbb{R}[X] = \mathcal{P} + E$.

4) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$P = P_1(X^2) + X P_2(X^2) = (1-X) P_1(X^2) + X(P_1 + P_2)(X^2).$$

De plus $(1-X)P_1(X^2) \in E$ et $X(P_1+P_2)(X^2) \in I$, d'où

$\mathbb{R}[X] = E + I$.

5) D'après 3) et 4) on a $\mathbb{R}[X] = E + \mathcal{P} = E + I$

$\forall P \in E$, P n'est ni pair, ni impaire, alors

$E \cap \mathcal{P} = \{P_0 = 0\}$ et $E \cap I = \{P_0 = 0\}$ où P_0 est le polynôme nul

Par conséquent $E \oplus \mathcal{P} = E \oplus I = \mathbb{R}[X]$

MP2L

Corrigé
DS Algèbre 2

Nouv

Exercice 1

u est bijectif $\Longleftrightarrow$ U est inversible

Par la méthode du pivot, on obtient que U est équivalente

à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha+1 \end{pmatrix}$. Donc u est inversible si et seulement

si $\alpha \neq -1$.

Pour $\alpha = -1$, U est équivalente à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} u \Longleftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow y = z$ et $x = -z$.

$\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}\{(-1, 1, 1)\}$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} u \Longleftrightarrow rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & -1 & c \end{pmatrix}$.

Par la méthode du pivot,

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & -1 & c \end{pmatrix}$ est équivalente à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & a-b+c \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} u \Longleftrightarrow a - b + c = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin \operatorname{Im} u$ donc $S = \emptyset$.

Scanned by CamScanner

Exer[illegible] 2

Nouveau

1) $k > 1$ donc $k-1>0$, donc $f^{k-1} \neq 0$ implique $f \neq 0$ car si $f=0$ alors $\forall i \in \mathbb{N}^*$ $f^i = 0$.

$\forall x \in E$, $f^k(x) = 0$ donc $f^i \circ f^{k-i}(x) = 0$, pour $i \in \{1, \dots, k-1\}$

Ainsi $\forall y \in \operatorname{Im} f^{k-i}$, $f^i(y)$ i.e. $\operatorname{Im}(f^{k-i}) \subset \operatorname{Ker} f^i$

2) $f^2 = 0$ et $f \neq 0$.

a) On a $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ avec $\operatorname{Im} f \neq 0$. Donc

$1 \leq rg(f) \leq \dim(\operatorname{Ker} f) \leq 3$. Or $rg(f) + \dim(\operatorname{Ker}(f)) = 3$

On en déduit $rg(f) = 1$ car $rg(f) \geq 2$ impliquerait $rg(f) + \dim(\operatorname{Ker}(f)) \geq 4$.

b) Par 2a), $\dim(\operatorname{Ker} f)) = 2$. Soit $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0$. Alors $f^2(x) = f(f(x)) = 0$, donc $f(x) \in \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f)$.

Complétons $(f(x))$ par un vecteur y de $\operatorname{Ker}(f)$, de sorte que $(f(x), y)$ soit une base de $\operatorname{Ker}(f)$. Comme $f(x) \neq 0$, alors $x \notin \operatorname{Ker}(f)$, donc $(f(x), y, x)$ est libre d'où une base de E car $\dim(E) = 3$.

On a $f(f(x)) = f(y) = 0$ et $f(x) = 1 \cdot f(x) + 0 \cdot y + 0 \cdot x$, d'où la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

représentant f dans la base $(f(x), y, x)$.

3). Il suffit de remarquer que $f^{n-1} \neq 0$. Donc il existe $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Considérons $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$.

Liberté de cette famille : soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{C}$ tels [illegible] Alors $\lambda_1 f^{n-1}(x) = 0$ [illegible] $f^{n-2}(\lambda_2 f^{i}(x) + \dots + \lambda_n f^{n-1}(x)) = 0$ et [illegible]

Problème

Nouveau

I

1) Soit P_1 et P_2 deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ Soit α de $\mathbb{C}$ Soit $Q_1(X)$ et $R_1(X)$ les quotient et reste de la division euclidienne de $P_1(X^2)$ par $T(X)$ alors. Soit $Q_2(X)$ et $R_2(X)$ les quotient et reste de la division euclidienne de $P_2(X^2)$ par $T(X)$ donc : $\deg(R_1(X))<\deg(T)$ et : $\deg(R_2(X)<\deg(T(X)$ et : $P_1(X^2)=Q_1(X)T(X)+R_1(X)$ et $P_2(X^2)=Q_2(X)T(X)+R_2(X)$ donc $(\alpha P_1+P_2)(X^2)=\alpha P_1(X^2)+P_2(X^2)=$ $\alpha(Q_1(X)T(X)+R_1(X))+Q_2(X)T(X)+R_2(X)=(\alpha Q_1(X)+Q_2(X))T(X)+\alpha R_1(X)+R_2(X)$. Or $\deg(\alpha R_1(X)+R_2(X))<\sup(\deg(\alpha R_1(X), R_2(X))$. Si $\alpha=0$ alors $\deg(\alpha R_1(X))=-\infty\leq\deg(R_1(X)<\deg(T(X)$. Si $\alpha\neq0$ alors $\deg(\alpha R_1(X))=\deg(R_1(X)<\deg(T(X))$. Donc $\sup(\deg(\alpha R_1(X), R_2(X))<\deg(T(X))$ donc $\alpha R_1(X)+R_2(X)$ est le reste de la division de $\alpha P_1(X^2)+P_2(X^2)$ par $T(X)$ et $\alpha Q_1(X)+Q_2(X)$ son quotient. Donc $f(\alpha P_1(X)+P_2(X))=\alpha Q_1(X)+Q_2(X)+X(\alpha R_1(X)+R_2(X))$ $=\alpha(Q_1(X)+XR_1(X))+Q_2(X)+XR_2(X)=$ $\alpha f(P_1(X))+f(P_2(X))$ donc f est linéaire.

2) Soit $P(X)$ un polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$. Soit p son degré. On a donc : $p\leq n$ $P(X^2)$ est de degré $2p$. Soit $Q(X)$ le quotient de la division euclidienne de $P(X^2)$ par $T(X)$ et $R(X)$ son reste. Or $\deg(R(X))<\deg(T(X))=n$ donc $\deg(XR(X))=\deg(X)+\deg(R(X))=1+\deg(R(X)\leq n$. $\deg(Q(X))=0$ si $2p<n$ et à $2p-n$ si $2p\geq n$ or $2p-n\leq 2n-n=n$ donc dans tous les cas $\deg(Q(X))\leq n$. Or $f(P(X))=Q(X)+XR(X)$ donc $\deg(f(P(X)))\leq\sup(\deg(Q(X)),\deg(XR(X))\leq n$ donc $f(P(X))$ appartient à $\mathbb{C}_n[X]$. Donc f_n va bien de $\mathbb{C}_n[X]$ dans $\mathbb{C}_n[X]$ de plus la restriction d'une application linéaire est une application linéaire donc f_n est bien un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$

3)

a) $f(1)=0+X\times1=X$ car $1=0\times T(X)+1$ et $Q(X)=0$ et $R(X)=1$. Si $P(X)=X$ $P(X^2)=X^2=1\times X^2+0$ donc ici $Q(X)=1$ et $R(X)=0$ donc $f(X)=1$. Si $P(X)=X^2$ $P(X^2)=X^4=X^2\times X^2+0$ donc ici $Q(X)=X^2$ et $R(X)=0$ donc $f(X^2)=X^2$ donc la matrice A est la matrice : $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

b) $A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ donc $f_2^2=id$ l'application identité donc f_2 est une symétrie vectorielle. Elle est bijective et son application réciproque est elle même.

4) $U(X^2)=V(X)=(X-i)(X+i)(X-1-i)(X+1+i)$ (car les racines de $V(X)$ sont $1+i$, $-1-i$, i, $-i$) donc $U(X^2)=T(X)(X-i)(X+1+i)$ donc $Q(X)=(X-i)(X+1+i)$ et $R(X)=0$ donc $f(U(X))=(X-i)(X+1+i)$.

II.

1) Si $P=1$ $P(X^2)=1$ $1=0\times T(X)+1$ donc $Q(X)=0$ et $R(X)=1$ donc $f(1)=X$
Si $P=X$ $P(X^2)=X^2$ $1=0\times T(X)+X^2$ donc $Q(X)=0$ et $R(X)=X^2$ donc $f(X)=X^3$
Si $P=X^2$ $P(X^2)=X^4=(X-1)(X^3+X^2+a)+X^2-aX+a$ donc $Q(X)=X-1$ et $R(X)=X^2-aX+a$ donc $f(X^2)=X-1+X(X^2-aX+a)=X^3-aX^2+(a+1)X-1$. Si $P=X^3$ alors $P(X^2)=X^6=(-a-1+X-X^2+X^3)(X^3+X^2+a)+(2a+1)X^2-aX+a^2+a$ donc $Q(X)=(-a-1+X-X^2+X^3)$ et $R(X)=(2a+1)X^2-aX+a^2+a$ donc $f(X^3)=(-a-1+X-X^2+X^3)+X((2a+1)X^2-aX+a^2+a)=(2a+2)X^3+(-1-a)X^2+(1+a^2+a)X-a-1$. Donc la matrice de f_3 sur la base canonique est $B=\begin{pmatrix}0&0&-1&-a-1\\1&0&a+1&a+1+a^2\\0&0&-a&-a-1\\0&1&1&2a+2\end{pmatrix}$.

nouveau

la base canonique est $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 & a+1+a \\ 0 & 0 & -a & -a-1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix}$.

Nouveau

2) . Si $a=-1$ donc f_3 a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a)

Si $P=a+bX+cX^2+dX^3$ donc $f_3(P)=-c+(a+d)X+cX^2+(b+c)X^3$ donc $f(P)=0$ si et seulement si

$$\begin{cases} -c=0 \\ a+d=0 \\ c=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ a=-d. \\ b=0 \end{cases}$$

Donc $\ker f_3=\{a(1-X^3) \forall a\in\mathbb{R}\}$ et une base est le vecteur non nul $1-X^3$.

b)

$\mathrm{Ker} f_3$ est de dimension 1 donc d'après le théorème du rang $\mathrm{Im} f_3$ a pour dimension $\dim \mathbb{C}_3[X]-1=4-1=3$. Or $(1\ X,\ X^2,\ X^3)$ base de $\mathbb{C}_3[X]$ donc $(f_3(1), f_3(X), f_3(X^2), f_3(X^3))$ forme une partie génératrice de $\mathrm{Im} f_3$ or $f_3(1)=f_3(X^3)$ donc $(f_3(1), f_3(X), f_3(X^2))$ forme une partie génératrice de $\mathrm{Im} f_3$ donc une base de $\mathrm{Im} f_3$ car c'est une partie génératrice ayant autant d'éléments que la dimension de $\mathrm{Im} f_3$.

c)

Deux sev sont supplémentaires si la réunion d'une base de l'un et d'une base de l'autre forme une base de $E=\mathbb{C}^4$ donc si $(1-X^3, X, X^3, -1+X^2+X^3)$ base de $\mathbb{C}_4[X]$. La matrice de ces 4 polynômes sur la base canonique est la matrice M : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

donc

qui est de rang 4, en appliquant la méthode du pivot.
Par suite le noyau et l'image sont supplémentaires.

III

1) Si $P(X)$ est de degré p avec $2p<n$ $P(X^2)$ est de degré $2p<n=\deg(T(X))$ donc $P(X^2)=0\times T(X)+P(X^2)$ donc $F(P)=XP(X^2)\neq 0$ donc P n'appartient pas au noyau de f.

2) Si P appartient à $\mathrm{Ker} f$ alors $Q(X)+XR(X)=0$ avec $Q(X)$ et $R(X)$ qui sont respectivement le reste et le quotient de la division de $P(X^2)$ par $T(X)$ donc $Q(X)=-XR(X)$ donc $P(X^2)=-XR(X)T(X)+R(X)=R(X)(-XT(X)+1)$ et $\deg(R(X))<\deg(T(X))=n$ car $R(X)$ est un reste. **Réciproquement** s'il existe $R(X)$ de degré inférieur strictement à n tel que $P(X^2)=R(X)(1-XT(X))$ alors $P(X^2)=-XR(X)T(X)+R(X)$ comme : $\deg(R(X))<\deg(T(X))$ alors $R(X)$ est le reste de la division de $P(X^2)$ par $T(X)$ et $-XR(X)$ son quotient donc $f(P(X))=-XR(X)+XR(X)=0$.

3) Si P appartient à $\mathrm{Ker} f$ alors il existe $R(X)$ de degré q ($q<n$) et $P(X^2)=R(X)(1-XT(X))$. Or $-XT(X)$ est de degré $n+1$ donc $-1+XT(X)$ aussi donc $R(X)(1-XT(X))$ est de degré $q+n+1<n+n+1$ donc $P(X^2)$ est de degré inférieur ou égal à $2n$ donc $P(X)$ est de degré inférieur ou égal à n.

4) Si $P(X)$ est un élément du noyau. Donc il existe $R(X)$ de degré strictement inférieur à n tel que $P(X^2)=R(X)(1-XT(X))$ Si k est tel que $k+\deg(P(X))\leq n$ alors $X^{2k}P(X^2)=X^{2k}R(X)(1-XT(X))$ or si $p=\deg(P(X))$ alors $2p=\deg(R(X))+n+1$ d'après la question précédente $2k+2p=2k+\deg(R(X))+n+1$ donc $2k+\deg(R(X)+n+1\leq 2n$ donc ...ogue de la question 2 ... $2k+\deg(R(X)+1$ do...

. MPS ... du devoir d'anal... ...MEN MP

Nouveau

Exercice 1

1) a) $f_n(x) = \frac{1-x^n}{1+x^n}$, $x \in [0,1]$

f_n est une fonction rationnelle définie sur $[0,1]$, donc classe C^∞. D'ici f_n est continue.

b) $f_n \longrightarrow \begin{cases} 1 & si\ x \neq 1 \\ 0 & si\ x = 1 \end{cases}$

En effet : si $x \neq 1$, $|f_n(x) - 1| = \frac{2x^n}{1+x^n} \leq 2x^n$

$\Rightarrow |f_n(x) - 1| \longrightarrow 0$, car $|x| < 1$.

$f_n(1) = 0$, $\forall n$, d'où le résultat.

c) . f est continue sur $[0,1[$ mais pas sur $[0,1]$.

f est discontinue en $x = 1$.

. La convergence ne peut être uniforme sinon, f serait continue.

2) $g_n(x) = \lim_{k\to+\infty} [\cos(n!\pi x)]^{2k}$

Convergence de g_n :

Notons que $[\cos(n!\pi x)]^2 < 1$ si $n!\pi x \neq n\pi$

Ainsi si $x = \frac{p}{q}$ alors

si $n \geq q \Rightarrow [\cos(n!\pi x)]^2 = 1 \Rightarrow g_n(x) = 1$.

On a pour $x_0 \in \mathbb{Q}$, $g_n(x_0) = 1$.

$\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists q \in \mathbb{Q}$

2) $F(x) = \int_{x-1}^{x+1} |t|\,dt$

$x-1 < 0 < x+1$

$x+1 < 0$

$x-1 > 0$

a) $x+1 < 0 \Rightarrow |t| = -t$.

$F(x) = -\int_{x-1}^{x+1} t\,dt = -\left[\frac{t^2}{2}\right]_{x-1}^{x+1} = -\frac{1}{2}\left((x+1)^2 - (x-1)^2\right)$

$= -\frac{1}{2}(2x \times 2) = -2x$.

b) $x-1 > 0$,

$f(t) = t$.

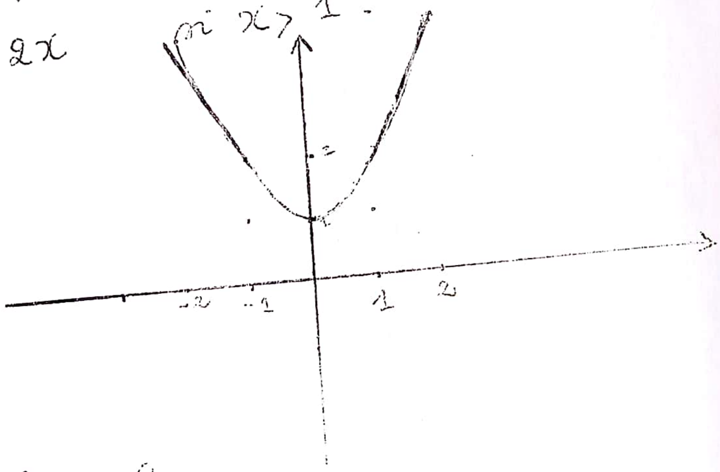
$F(x) = \frac{1}{2}\left((x+1)^2 - (x-1)^2\right) = \frac{1}{2}(2x \times 2) = 2x$.

c) $F(x) = \int_{x-1}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x+1} f(t)\,dt = \int_{x-1}^{0} -t\,dt + \int_{0}^{x+1} t\,dt$

$= -\frac{1}{2}(-1)(x-1)^2 + \frac{(x+1)^2}{2} = x^2 + 1$

$$F(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < -1 \\ x^2+1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

2



3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

$F(x) = 2f(x-1+2\theta)$ $\quad 0 < \theta < 1$. comme f est continu

$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 2\left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right) = 2\ell$

NOUVEAU

(2)

Exercice 3

$$I_n(x, a) = \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{t^2+a^2}}\,dt$$

$u = t^{n-1}$; $v' = \frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}}$; $v = \sqrt{t^2+a^2}$.

$$\int uv' = uv - \int u'v = \left[t^{n-1}\sqrt{t^2+a^2}\right]_0^x - (n-1)\int_0^x t^{n-2}\sqrt{t^2+a^2}\,dt.$$

$$I_n(x;a) = x^{n-1}(x^2+a^2)^{1/2} - (n-1)\int_0^x t^{n-2}(t^2+a^2)^{1/2}\,dt$$

$$= x^{n-1}(x^2+a^2)^{1/2} - (n-1)\int_0^x t^{n-3}\,t(t^2+a^2)^{1/2}\,dt.$$

$$\int_0^x \frac{t^{n-2}(t^2+a^2)}{\sqrt{t^2+a^2}}\,dt = \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{t^2+a^2}}\,dt + a^2\int_0^x \frac{t^{n-2}}{\sqrt{t^2+a^2}}\,dt$$

$$= I_n + a^2 I_{n-2}.$$

$$\Rightarrow I_n = x^{n-1}(x^2+a^2)^{1/2} - (n-1)I_n - a^2 I_{n-2}(n-1)$$

$$\Rightarrow nI_n = x^{n-1}\sqrt{x^2+a^2} - (n-1)a^2 I_{n-2}$$

$$I_5(2, \sqrt{5}) = \int_0^2 \frac{t^5}{\sqrt{t^2+5}}\,dt \; ; \; I_1 = 3 - \sqrt{5}$$

$$5I_5 = 2^4\sqrt{4+5} - 4\times 5\times I_3$$

$$3I_3 = 2^2\sqrt{4+5} - 2\times 5 I_1 = 12 - 10 I_1$$

$$\Rightarrow I_5(2, \sqrt{5}) = \frac{168}{5} - \frac{40}{3}\sqrt{5}$$

2,5

1,5

Nouveau

Exercice 4

1) Etablir que $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(Par recurrence)

2) f_n est une fonction en escalier sur $[0,1] = I$

$\exists$ A_m une subdivision de I

$A_m = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ tq $x_n = 1$, $x_0 = 0$ et $x_i < x_{i+1}$

f constante sur $]x_i ; x_{i+1}[$.

or $f_n(x) = \frac{p^2}{n^2}$ sur $[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}[$ $0 \leq p \leq n-1$.

~~Posons~~ Ainsi f_n = cste sur $[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}]$.

Posons $x_p = \frac{p}{n}$ où $0 \leq p \leq n-1$.

alors $x_0 = 0, \dots, x_n = 1$ est une subdivision de I et

par conséquent :

2) $F_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx = \sum_{p=0}^{n-1} (x_{p+1} - x_p) f(x_p)$

$= \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{p^2}{n^2} = \frac{(n+1)(2n-1)}{3n^2}$.

1

1

1,5

$\lim_{n \to +\infty} F_n = \frac{2}{3}$.

Nouveau

Annuelle

UNIVERSITE OUAGA II
Année académique 2018-2019
CPGE
Enseignante: Dr M. BAYO

Corrigé de l'EPREUVE de l'équilibre en solution session normale

Durée: 02 heures

Exercice 1 : (5 points)

Données: pKa (CH_2ClCO_2H/ $CH_2ClCO_2^-$) = pKa_1 = 4,8; pKb (HBO_2 / BO_2^-) = pKb_2 = 4,8; Ke =10^{-14} .

Soit une solution (A) molaire (1M) d'acide chloroacétique (CH_2ClCO_2H).

1- Ecrire la réaction de dissociation de CH_2ClCO_2H, dans l'eau.

2- Calculer, en justifiant votre réponse, le coefficient de dissociation α de cet acide, ainsi que le pH la solution en question.

3- Calculer, dans ce cas, la concentration des ions H_3O^+ provenant de la dissociation de l'eau.

Corrigé

1- Réaction de dissociation de CH_2ClCO_2H, dans l'eau.

L'acide CH_2ClCO_2H est un acide faible. Il se dissocie donc partiellement selon la réaction :

$$CH_2ClCO_2H_{(aq)} + H_2O_{(l)} \rightleftharpoons [CH_2ClCO_2]^-_{(aq)} + [H_3O]^+_{(aq)}$$ (1 point)

2- Calcul du coefficient de dissociation α et du pH de la solution en question.

$$CH_2ClCO_2H_{(aq)} + H_2O_{(l)} \rightleftharpoons [CH_2ClCO_2]^-_{(aq)} + [H_3O]^+_{(aq)}$$

Les espèces en solution :$CH_2ClCO_2H_{(aq))}$, $H_3O^+_{(aq)}$, $[CH_2ClCO_2]^-_{(aq)}$, $OH^-_{(aq)}$

Equation d'électroneutralité: $[H_3O^+] = [CH_2ClCO_2^-] + [OH^-]$

Equation de la conservation de la matière: $C = [[CH_2ClCO_2^-] + [CH_2ClCO_2H]$

Equations de la loi d'action de masse: $Ka = \frac{[H_3O^+][CH_2ClCO_2^-]}{[CH_2ClCOOH]}$

Equation de la dissociation de l'eau $Ke = [H_3O^+] [OH^-]$

Hypo.: Si la solution est acide; $[OH^-] << [H_3O^+]$; $[OH^-]$ est négligeable devant les autres termes. On a $[H_3O^+] = [CH_2ClCO_2^-]$ (1 point)

Lorsque la dissociation de H_2O est négligeable ce qui permet d'écrire $[H_3O^+] = [CH_2ClCO_2^-]$

$[CH_2ClCO_2^-] + [CH_2ClCO_2H]$

Equations de la loi d'action de masse: $Ka = \frac{[H_3O^+][CH_2ClCO_2^-]}{[CH_2ClCOOH]}$

Equation de la dissociation de l'eau $Ke = [H_3O^+]\,[OH^-]$

Hypo.: Si la solution est acide; $[OH^-] << [H_3O^+]$; $[OH^-]$ est négligeable devant les autres termes. On a $[H_3O^+] = [CH_2ClCO_2^-]$ (1 point)

Lorsque la dissociation de H_2O est négligeable ce qui permet d'écrire $[H_3O^+] = [CH_2ClCO_2]$

Nouveau

L'avancement de la réaction est :

	$CH_2ClCO_2H_{(aq)} + H_2O_{(l)}$ ⇌	$[CH_2ClCO_2]^-_{(aq)}$ +	$[H_3O]^+_{(aq)}$
initialeme	C_0	0	0
Equilibre	$C_0(1-\alpha)$	$C_0\alpha$	$C_0\alpha$

$[H_3O^+] = C_0\alpha + \varepsilon \approx C_0\alpha$

L'expression de la constante d'acidité $Ka = \frac{[H_3O^+][CH_2ClCO_2^-]}{[CH_2ClCOOH]} = \frac{C_0^2\alpha^2}{C_0(1-\alpha)} \Rightarrow \frac{Ka}{C_0} = \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)}$

Or C_0=1M, ce qui permet d'obtenir α= 0,004 (1 point)

Calcul du pH

$[H_3O^+] = C_0\alpha \Rightarrow$ pH= 2,4 (1 point)

3) Calcul de la concentration des ions H_3O^+ provenant de la dissociation de l'eau

La réaction de dissociation de H_2O est :

$2H_2O$	⇌	$[H_3O]^+$	+	[
		x		

On remarque que $[H_3O^+] = x = [OH^-]$

De fait à pH=2,4 on a pOH=11,6 et $[H_3O^+] = [OH^-] = 2,5\times10^{-12}$M (0,5 point)

$[H_3O^+]_{eau}$ est bien négligeable devant $[H_3O]^+$ provenant de la dissociation de l'acide et dont la concentration est $[H_3O^+] = 10^{-pH}$ = 0,004 M (0,5 point)

Exercice 2 : (5 points)

Données: pKs (PbF_2, solide) =7,44 ; pKs (PbI_2, solide) = 7,86 ; pKs ($PbSO_4$, solide) = 8

On considère une solution aqueuse qui contient les ions F^-, I^- et SO_4^- à des concentrations initiales respectivement égales à 0,1M. On ajoute progressivement et sans variation de volume, Pb^{2+} à cette solution.

1) Indiquer l'anion qui précipite en premier.

2) Déterminer les concentrations des ions F^- et SO_4^{2-} lorsque la moitié des ions iodures I^- est précipitée sous forme de PbI_2.

Corrigé

1) L'anion qui précipite le premier

Je

$\frac{Ks(PbF_2)}{[F^-]^2} = 3,63.10$

Nouveau

$Pb^{2+}{}_{(aq)} + 2F^-{}_{(aq)} \rightleftharpoons PbF_2\downarrow$

$Ks_{(PbF_2)} = [Pb^{2+}][F^-]^2 \Rightarrow [Pb^{2+}] = \frac{Ks(PbF_2)}{[F^-]^2} = 3,63.10^{-6}$ M (0.5 point)

$Pb^{2+}{}_{(aq)} + 2I^-{}_{(aq)} \rightleftharpoons PbI_2\downarrow$

$Ks_{(PbI_2)} = [Pb^{2+}][I^-]^2 \Rightarrow [Pb^{2+}] = \frac{Ks(PbI_2)}{[I^-]^2} = 1,38.\ 10^{-6}$ M (0,5 point)

$Pb^{2+}{}_{(aq)} + 2SO_4^{2-}{}_{(aq)} \rightleftharpoons PbSO_4\downarrow$

$Ks_{(PbSO_4)} = [Pb^{2+}][SO_4^{2-}] \Rightarrow [Pb^{2+}] = \frac{Ks(PbSO_4)}{[SO_4^{2-}]} = 10^{-7}$ M (0.5 point)

Le précipité qui se forme le premier est celui qui correspond à la plus faible concentration $[Pb^{2+}]$. C'est $PbSO_4$ qui précipite le premier suivi de PbI_2, puis de PbF_2. (0,5 point)

2) Les concentrations des ions F^- et SO_4^{2-} lorsque la moitié des ions iodures I^- est précipitée sous forme de PbI_2.

$[I^-]=\frac{[I^-]_0}{2} = 0,05M \Rightarrow [Pb^{2+}] = \frac{Ks(PbI_2)}{[I^-]^2} = 5,52.\ 10^{-6}$ M (1 point)

$[F^-]^2 = \frac{Ks(PbF_2)}{[Pb^{2+}]} = \frac{3,63.10^{-8}}{5,52.10^{-6}} = 6,6.10^{-3} \Rightarrow [F^-]=0,081M$ (1 point)

$[SO_4^{2-}] = \frac{Ks(PbSO_4)}{[Pb^{2+}]} = \frac{1,0.10^{-8}}{5,52.10^{-6}} = 1,81.10^{-3}M$ (1 point)

Exercice 3 : (2 points)

Equilibrer, en milieu acide et en milieu basique, la réaction d'oxydo-réduction suivante et indiquer l'oxydant et le réducteur. $HPO_3^{2-} + MnO_4^- \rightleftharpoons PO_4^{3-} + MnO_4^{2-}$

Corrigé

En milieu acide: $(MnO_4^- + e^- \rightleftharpoons MnO_4^{2-}) \times 2$

$HPO_3^{2-} + H_2O \rightleftharpoons PO_4^{3-} + 3H^+ + 2e^-$

$HPO_3^{2-} + 4H_2O \rightleftharpoons PO_4^{3-} + 3H_3O^+ + 2e^-$

$HPO_3^{2-} + 2MnO_4^- + 4H_2O \rightleftharpoons PO_4^{3-} + 2MnO_4^{2-} + 3H_3O^+$ (1 point)

En milieu basique: $(MnO_4^- + e^- \rightleftharpoons MnO_4^{2-}) \times 2$

$HPO_3^{2-} + 3OH^- \rightleftharpoons PO_4^{3-} + 2H_2O + 2e^-$

$HPO_3^{2-} + 2MnO_4^- + 3OH^- \rightleftharpoons PO_4^{3-} + 2MnO_4^{2-} + 2H_2O$ (1 point)

Exercice 4 : (5 points)

On considère la pile schématisée par $Mg_{(solide)} | Mg^{2+}$ (0,01M) $|| Zn^{2+}$ (0,1M) $| Zn_{(solide)}$

La force électromotrice est égale à 1,64 V et la réaction de fonctionnement de cette pile est:

$Mg_{(s)} + Zn^{2+}{}_{(aq)} \rightarrow Mg^{2+}{}_{(aq)} + Zn_{(s)}$

$E°(Zn^{2+}/Zn_{(s)}) = E°_1$ et $E°(Mg^{2+}/Mg_{(s)}) = E°_2 = -2{,}37V$

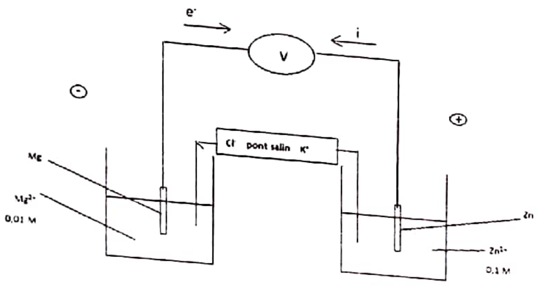
1- Donner le schéma de la pile en indiquant le sens du courant électrique, des électrons, et celui des ions K^+ et Cl^- dans le pont salin.

2- Calculer $E°(Zn^{2+}/Zn_{(s)}) = E°_1$

3-Après une certaine durée de fonctionnement, le potentiel de la cathode devient égal à -0,82V. Déterminer la force électromotrice de la pile dans ces conditions.

<u>Corrigé</u>

1- Le schéma de la pile en indiquant le sens du courant électrique, des électrons, et celui des ions K^+ et Cl^- dans le pont salin.



(1 point)

2- Calcul de $E°(Zn^{2+}/Zn_{(s)}) = E°_1$

$E_{pile} = E_{cathode} - E_{anode} = 1{,}64V$ (0,5 point)

$E_{cathode} = E_1 = E_1° + \frac{0{,}06}{2}\log[Zn^{2+}]$ (0,5 point)

$E_{anode} = E_2 = E_2° + \frac{0{,}06}{2}\log[Mg^{2+}]$(0,5 point)

$E_{pile} = E°_{pile} + \frac{0{,}06}{2}\log\frac{[Zn^{2+}]}{[Mg^{2+}]} = E_1° -$ ⊡ $E_1° - E_2° = -0{,}76V$ (0,5 point)

3- La force électromotrice de la pile quand le potentiel de la cathode devient égal à -0,82V.

$E_{pile} = E°_{pile} + \frac{0{,}06}{2}\log\frac{[Zn^{2+}]}{[Mg^{2+}]}$

On doit calculer $[Zn^{2+}]$ et en déduire $[Mg^{2+}]$

Tableau d'avancement :

	$Mg_{(s)}$ +	$Zn^{2+}{}_{(aq)}$	→	$Mg^{2+}{}_{(aq)}$	+ $Zn_{(s)}$
Initialement	solide	0,1		0,01	
Avancement	-x	-x		+x	+x

A un instant donné	solide	0,1-x		0,01+x	solide

Il faut déterminer le coefficient d'avancement $E_{cathode} = E_1 = E_1° + \frac{0,06}{2}\log[Zn^{2+}] = -0,82V$

⍰ $[Zn^{2+}]$ =0,01M donc x= 0,1- 0,01= 0,09 M (0,5 point) et $[Mg^{2+}]$ =0,01 + 0,09= 0,1M (0,5 point)

E_{pile}= 1,58 V (1 point)

Nouveau

Exercice 5: (3 points)

A 100mL d'une solution de sel de fer(III) Fe^{3+} 0,1M, on ajoute 0,1 mol de thiocyanate de potassium KSCN. On mesure la concentration des ions Fe^{3+} non complexés :
$[Fe^{3+}] = 5,5.10^{-4}$M. Calculer la constante de formation β du complexe formé $[FeSCN]^{2+}$.

Corrigé:

1) La constante de formation β

La réaction de complexation s'écrit: $Fe^{3+}_{(aq)} + SCN^-_{(aq)} \rightleftharpoons [FeSCN]^{2+}_{(aq)}$

et $\beta = \frac{[FeSCN^{2+}]}{[Fe^{3+}][SCN^-]}$ (0,5 point)

Les bilans de matière BM sur $[Fe^{3+}]_i = [Fe^{3+}] + [FeSCN^{2+}] = C = 0,1M$ (0, 5 point)

et sur $[SCN^-]_i = [SCN^-] + [FeSCN^{2+}] = C' = 1M$ (0,5 point)

$[FeSCN^{2+}] = [Fe^{3+}]_i - [Fe^{3+}] = C - C'' = 0,1M - 5,5.10^{-4}M \approx 0,1\ M$ et (0, 5 point)

$[SCN^-] = [SCN^-]_i - [FeSCN^{2+}] = C' - (C - C'') \approx 1M - 0,1M + 5,5.10^{-4}M \approx 0,9M$ (0,5 point)

et $\beta = \frac{[FeSCN^{2+}]}{[Fe^{3+}][SCN^-]} = \frac{0,1}{5,5.10^{-4} \cdot 0,9} = 202,02 = 202$ (0,5 point)

Nouveau

9- En considérant les valeurs des potentiels standard quel équilibre chimique peut-on écrire entre ces différentes espèces? Comment s'appelle cette réaction?

En présence d'ions cyanure, les ions de l'or forment les complexes : $[Au(CN)_2]^-$ et $[Au(CN)_4]^-$ - **10-** Calculer les potentiels standard des couples : $[Au(CN)_2]^-/Au$ (noté $E°'_1$) et $[Au(CN)_4]^-/[Au(CN)_2]^-$ (noté $E°'_2$). Quel est l'effet des ions cyanure sur la stabilité de Au^+ en solution aqueuse ?

Chimie des solutions : Potentiels standard à 298 K: $E°(Au^{3+}/Au(s))=1{,}50$ V. $E°(Au^{3+}/Au^+)= 1{,}41$ V. $E°(Au^+/Au(s))= 1{,}68$ V. $E°(O_2(g)/H_2O)= 1{,}23$ V. $E°(Zn^{2+}/Zn(s))= -0{,}76$ V. $E°(Zn(CN)_4^{2-}/Zn(s))= -1{,}26$ V. $E°(AgCl(s)/Ag(s))=0{,}22$ V. $E°(Cl_2/Cl^-)=1{,}36$ V

Constantes globales de formation: $\beta([Au(CN)_2]^-) =10^{38}$, $\beta([Au(CN)_4]^-) =10^{56}$

$\beta([Au(Cl)_4]^-) =10^{22}$

Ecrire l'équation de la réaction d'oxydation de Ag en AgCl à 1400 K, rapportée à une mole de dichlore.

C) Le calcium, constituant des dents. Physico-chimie bucco-dentaire.
L'émail dentaire est composé à 95% d'hydroxyapatite, solide ionique de formule brute $Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2(s)$. Sa dissolution en solution aqueuse s'écrit :

$Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2(s) = 10\ Ca^{2+}(aq) + 6\ PO_4^{3-}(aq) + 2\ OH^-(aq)$ (C1)

La constante d'équilibre sera notée Ks1.

12- Proposer une structure de Lewis pour l'ion phosphate.

13- Calculer (avec une précision raisonnable) la solubilité s de l'hydroxyapatite à 37°C dans une solution de pH fixé à 7,2 ne contenant pas d'autres espèces de calcium ni de phosphate dans l'état initial.

La salive en contact avec l'émail dentaire étant constamment renouvelée, ce dernier risque

théoriquement de se dissoudre peu à peu. En réalité la salive contient des ions Ca^{2+} et HPO_4^{2-} dont on supposera les concentrations constantes :

$[Ca^{2+}]=[HPO_4^{2-}] = 2.10^{-4}$ mol.L^{-1}

Produit ionique de l'eau : à 310,15K, on prendra pKe = 14,0

pKa de couples acido-basiques à 310,15 K :

$H_3PO_4/ H_2PO_4^-$ $pKa_1 = 2,15$

$H_2PO_4^- / HPO_4^{2-}$ $pKa_2 = 7,2$

HPO_4^{2-} / PO_4^{3-} $pKa_3 = 12,1$

Constantes de solubilité à 310,15 K :

Hydroxyapatite $Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2$ (s) $pKs_1 = 117$

Phosphate de calcium $Ca_3(PO4)_2$ (s) $pKs_2 = 27$

Nouveau

MPSI Correction du devoir.

Exercice 1

1) a) $f_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1+x^n}$, $x \in$

fonction ratio

Ecole Polytechnique de Ouagadougou
Classes Préparatoires d'entrée
dans les Grandes Ecoles
Niveau d'études : 1ʳᵉ année MPSI
Enseignants : Prof. I. ZERBO
Dr P. KAFANDO
Dr Z. S. KAM

Année universitaire 2018 – 2019

Nouveau

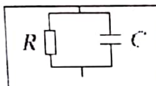
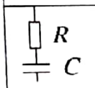
Corrigé de l'examen d'électrocinétique - Session de rattrapage

Durée : 1h30

Exercice 1 (7,5 points)

+0,25 en bonus à tous les étudiants

1) Valeurs de R' et C'

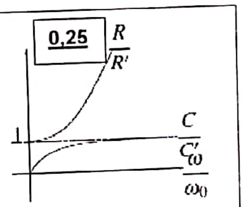
	$\frac{1}{\underline{Z}_{1-eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_R} + \frac{1}{\underline{Z}_C} = \frac{1}{R} + jC\omega \rightarrow \underline{Z}_{1-eq} = \frac{R}{1+jRC\omega}$ $\boxed{0,25}$	On veut que $\underline{Z}_{1-eq} = \underline{Z}_{2-eq}$ $R' = \frac{R}{1+(RC\omega)^2}$ $\boxed{0,25}$ $C' = \frac{1+(RC\omega)^2}{R^2C\omega^2} = C.\frac{1+(RC\omega)^2}{(RC\omega)^2}$ $\boxed{0,25}$
	$\underline{Z}_{2-eq} = R' - \frac{j}{C'\omega}$ $\boxed{0,25}$	

2) Tracer de C/C' et R/R' en fonction du rapport $\frac{\omega}{\omega_0} = u$ (avec $\omega_0 = \frac{1}{RC}$).

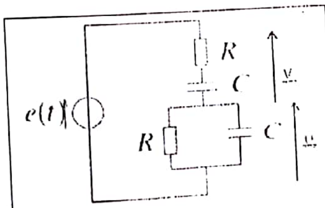
$$\frac{R}{R'} = 1+(RC\omega)^2 = 1+u^2 \quad \boxed{0,25}$$

$$\frac{C}{C'} = \frac{(RC\omega)^2}{1+(RC\omega)^2} = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{u^2}{1+u^2} \quad \boxed{0,25}$$

$\boxed{0,25}$



3-a) Calcul du rapport $\underline{u}/\underline{e}$: on utilise la relation du pont diviseur de tension $\boxed{0,25}$



$$\underline{u} = \underline{e}\frac{\underline{Z}_{parall}}{\underline{Z}_{serie}+\underline{Z}_{parall}} \rightarrow \frac{\underline{u}}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z}_{1-eq}}{\underline{Z}_{2-eq}+\underline{Z}_{1-eq}}$$

posons $\underline{Z}_{total} = \underline{Z}_{1-eq} + \underline{Z}_{2-eq}$

$$\underline{Z}_{total} = \frac{R}{1+jRC\omega} + R - \frac{j}{C\omega} = \frac{RC\omega + (1+jRC\omega)(RC\omega - j)}{C\omega.(1+jRC\omega)} \quad \boxed{0,25}$$

$$\rightarrow \frac{\underline{u}}{\underline{e}} = \frac{jRC\omega}{3jRC\omega + 1 - (RC\omega)^2} \quad OU \quad \frac{\underline{u}}{\underline{e}} = \frac{1}{3+j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)} \quad \boxed{0,25}$$

Nouveau

3-b) Calcul du rapport $\underline{v}/\underline{e}$: on utilise la relation du pont diviseur de tension

$$\underline{v} = \underline{e}\frac{\underline{Z}_{serie}}{\underline{Z}_{serie}+\underline{Z}_{parall}} \rightarrow \frac{\underline{v}}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z}_{2-eq}}{\underline{Z}_{Total}} \quad \boxed{0,25} \quad \rightarrow \frac{\underline{v}}{\underline{e}} = \frac{(1+jRC\omega)^2}{3jRC\omega + 1 - (RC\omega)^2} \quad \boxed{0,25}$$

4) Calcul de l'amplitude de $\underline{u}$

$$\|\underline{u}\| = \|\underline{e}\|.\left|\frac{jRC\omega}{3jRC\omega + 1 - (RC\omega)^2}\right| = E\frac{RC\omega}{\sqrt{9(RC\omega)^2 + \left[1-(RC\omega)^2\right]^2}} \quad \text{ou} \quad U = E\frac{1}{\sqrt{9+\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)^2}} \quad \boxed{0,25}$$

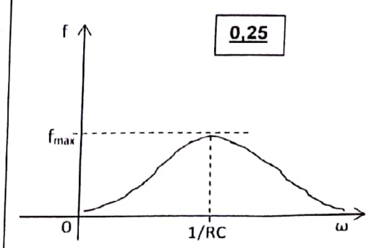
5) Tracer et justifier l'allure du rapport entre l'amplitude de $\underline{u}(t)$ et celle de $\underline{e}(t)$ en fonction de la pulsation ω.

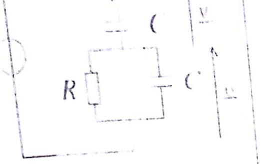
alors $f(\omega) = \left\|\frac{\underline{u}}{\underline{e}}\right\| = \frac{RC\omega}{\sqrt{9(RC\omega)^2 + \left[1-(RC\omega)^2\right]^2}} = \frac{1}{\sqrt{9+\left[\frac{1}{RC\omega} - RC\omega\right]^2}}$ $\boxed{0,25}$

Détermination des valeurs particulières :

$$\rightarrow \begin{cases} Si\ \omega \rightarrow 0\ alors\ f(\omega) \rightarrow 0 & \boxed{0,25} \\ Si\ \omega \rightarrow \infty\ alors\ f(\omega) \rightarrow 0 & \boxed{0,25} \\ Si\ \omega = \omega_0 = \frac{1}{RC}\ alors\ f_{max}(\omega) = \frac{1}{3} & \boxed{0,25} \end{cases}$$

$\boxed{0,25}$





$$\underline{Z}_{total}=\frac{R}{1+jRC\omega}+R-\frac{j}{C\omega}=\frac{RC\omega+(1+jRC\omega)(RC\omega-j)}{C\omega(1+jRC\omega)}\quad \boxed{0,25}$$

$$\rightarrow \frac{\underline{u}}{\underline{e}}=\frac{jRC\omega}{3jRC\omega+1-(RC\omega)^2}\quad OU\quad \frac{\underline{u}}{\underline{e}}=\frac{1}{3+j\left(RC\omega-\frac{1}{RC\omega}\right)}\quad \boxed{0,25}$$

Nouveau

b) Calcul du rapport $\underline{v}/\underline{e}$: on utilise la relation du pont diviseur de tension

$$\underline{v}=\underline{e}\frac{\underline{Z}_{serie}}{\underline{Z}_{serie}+\underline{Z}_{parall}}\rightarrow\frac{\underline{v}}{\underline{e}}=\frac{\underline{Z}_{serie}}{\underline{Z}_{total}}\ \boxed{0,25}\rightarrow\frac{\underline{v}}{\underline{e}}=\frac{(1+jRC\omega)^2}{3jRC\omega+1-(RC\omega)^2}\quad \boxed{0,25}$$

4) Calcul de l'amplitude de $\underline{u}$

$$\|\underline{u}\|=\|\underline{e}\|\cdot\left|\frac{jRC\omega}{3jRC\omega+1-(RC\omega)^2}\right|=E\frac{RC\omega}{\sqrt{9(RC\omega)^2+\left[1-(RC\omega)^2\right]^2}}\ \text{ou}\ U=E\frac{1}{\sqrt{9+\left(RC\omega-\frac{1}{RC\omega}\right)^2}}\quad \boxed{0,25}$$

5) Tracer et justifier l'allure du rapport entre l'amplitude de $\underline{u}(t)$ et celle de $\underline{e}(t)$ en fonction de la pulsation ω.

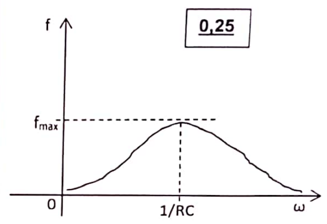
alors $f(\omega)=\left\|\frac{\underline{u}}{\underline{e}}\right\|=\frac{RC\omega}{\sqrt{9(RC\omega)^2+\left[1-(RC\omega)^2\right]^2}}=\frac{1}{\sqrt{9+\left[\frac{1}{RC\omega}-RC\omega\right]^2}}$ $\boxed{0,25}$

Détermination des valeurs particulières :

$$\rightarrow\begin{cases} Si\ \omega\rightarrow 0\ alors\ f(\omega)\rightarrow 0 & \boxed{0,25}\\ Si\ \omega\rightarrow\infty\ alors\ f(\omega)\rightarrow 0 & \boxed{0,25}\\ Si\ \omega=\omega_0=\frac{1}{RC}\ alors\ f_{max}(\omega)=\frac{1}{3} & \boxed{0,25}\end{cases}$$

La fonction est croissante de 0 à 1/3 pour ω < 1/RC et décroissante jusqu'à 0. $\boxed{0,25}$

$\boxed{0,25}$



6-a) Calcul des limites asymptotiques de la fonction de transfert $\underline{H}=\frac{\underline{u}}{\underline{e}}$ (on pose x=RCω)

** Fonction de transfert : $\underline{H}(j\omega)=\frac{\underline{u}}{\underline{e}}=\frac{RC\omega}{3RC\omega+j\left[(RC\omega)^2-1\right]}\rightarrow\underline{H}(jx)=\frac{1}{3+j\left(x-\frac{1}{x}\right)}$ $\boxed{0,25}$

** Limites asymptotiques de la fonction de transfert :

Si x << 1 ; alors $\underline{H}(jx)\approx jx$ $\boxed{0,25}$ et Si x >> 1 alors $\underline{H}(jx)\approx\frac{1}{jx}$ $\boxed{0,25}$

6-b) ** Calcul du gain en tension

$$G_{dB}(\omega)=20\log\left(\left\|\frac{\underline{u}}{\underline{e}}\right\|\right)=20\log\left(\frac{RC\omega}{\sqrt{9(RC\omega)^2+\left[1-(RC\omega)^2\right]^2}}\right)=20\log\left(\frac{1}{\sqrt{9+\left(\frac{1}{x}-x\right)^2}}\right)=-10\log\left(9+\left(\frac{1}{x}-x\right)^2\right)\ \boxed{0,25}$$

Nouveau.

** Détermination des pentes des asymptotes obliques

➢ En utilisant les limites asymptotiques de la fonction de transfert on a :

Si x << 1 alors $G_{dB}(x)=20\log(\|jx\|)=+20\log(x)$ $\boxed{0,25}$ La pente est de +20dB/décade

Si x >> 1 alors $G_{dB}(\omega)=20\log\left(\left\|\frac{1}{jx}\right\|\right)=-20\log(x)$ $\boxed{0,25}$ La pente est de -20dB/décade

ou

➢ En utilisant l'expression du gain en tension:

Si x << 1 alors $G_{dB}(x)=-10\log\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)=20\log(x)$ $\boxed{0,25}$ La pente est de +20dB/décade

Si x >> 1 alors $G_{dB}(x)=-10\log(x^2)=-20\log(x)$ $\boxed{0,25}$ La pente est de -20dB/décade

6-c) ** Calcul de la phase de la fonction de transfert

$\varphi(\omega)=arg(\underline{H}(j\omega))=arg\left[\frac{1}{3+j\left(x-\frac{1}{x}\right)}\right]=arg(1)-arg\left(3+j\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)$ alors $\varphi(x)=-arctg\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]$ $\boxed{0,25}$

ou $tg[\varphi(x)]=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{x}\right)$ $\boxed{0,25}$

** Détermination des limites asymptotiques de la phase

➢ En utilisant les limites asymptotiques de la fonction de transfert on a:

Si x << 1 alors $\underline{H}(jx)\approx jx$ et $\varphi(x)\rightarrow\frac{\pi}{2}$; $\boxed{0,25}$ Si x >> 1 alors $\underline{H}(jx)\approx-\frac{j}{x}$ et $\varphi(x)\rightarrow-\frac{\pi}{2}$ $\boxed{0,25}$

ou

➢ En utilisant l'expression de la phase de la fonction de transfert:

Si x << 1 alors $tg[\varphi(x)]\rightarrow\infty$ et $\varphi(x)\rightarrow\frac{\pi}{2}$; $\boxed{0,25}$ Si x >> 1 alors $tg[\varphi(x)]\rightarrow-\infty$ et $\varphi(x)\rightarrow-\frac{\pi}{2}$ $\boxed{0,25}$

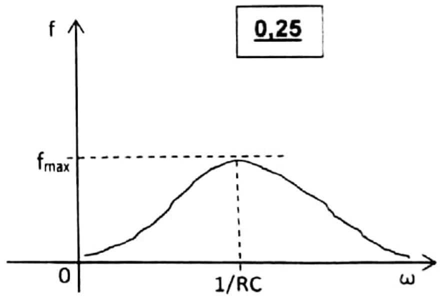
alors $f(\omega)=\left\|\frac{\underline{u}}{\underline{e}}\right\| = \frac{RC\omega}{\sqrt{9(RC\omega)^2+\left[1-(RC\omega)^2\right]^2}} = \frac{1}{\sqrt{9+\left[\frac{1}{RC\omega}-RC\omega\right]^2}}$ **0,25**

Détermination des valeurs particulières :

$$\rightarrow \begin{cases} Si\ \omega \rightarrow 0\ alors\ f(\omega) \rightarrow 0 & \boxed{0,25} \\ Si\ \omega \rightarrow \infty\ alors\ f(\omega) \rightarrow 0 & \boxed{0,25} \\ Si\ \omega = \omega_0 = \frac{1}{RC}\ \ alors\ f_{max}(\omega) = \frac{1}{3} & \boxed{0,25} \end{cases}$$

La fonction est croissante de 0 à 1/3 pour ω < 1/RC et décroissante jusqu'à 0. **0,25**

0,25



6-a) Calcul des limites asymptotiques de la fonction de transfert $\underline{H}=\frac{\underline{u}}{\underline{e}}$ (on pose x=RCω)

** Fonction de transfert : $\underline{H}(j\omega)=\frac{\underline{u}}{\underline{e}}=\frac{RC\omega}{3RC\omega+j\left[(RC\omega)^2-1\right]} \rightarrow \underline{H}(jx)=\frac{1}{3+j\left(x-\frac{1}{x}\right)}$ **0,25**

** Limites asymptotiques de la fonction de transfert :

Si x << 1 ; alors $\underline{H}(jx)\approx jx$ **0,25** et Si x >> 1 alors $\underline{H}(jx)\approx\frac{1}{jx}$ **0,25**

6-b) ** Calcul du gain en tension

$$G_{dB}(\omega)=20\log\left(\frac{\|\underline{u}\|}{\|\underline{e}\|}\right)=20\log\left(\frac{RC\omega}{\sqrt{9(RC\omega)^2+\left[1-(RC\omega)^2\right]^2}}\right)=20\log\left(\frac{1}{\sqrt{9+\left(\frac{1}{x}-x\right)^2}}\right)=-10\log\left(9+\left(\frac{1}{x}-x\right)^2\right)$$ **0,25**

Nouveau.

** Détermination des pentes des asymptotes obliques

➢ En utilisant les limites asymptotiques de la fonction de transfert on a :

Si x << 1 alors $G_{dB}(x)=20\log(\|jx\|)=+20\log(x)$ **0,25** La pente est de +20dB/décade

Si x >> 1 alors $G_{dB}(\omega)=20\log\left(\left\|\frac{1}{jx}\right\|\right)=-20\log(x)$ **0,25** La pente est de -20dB/décade

ou

➢ En utilisant l'expression du gain en tension:

Si x << 1 alors $G_{dB}(x)=-10\log\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)=20\log(x)$ **0,25** La pente est de +20dB/décade

Si x >> 1 alors $G_{dB}(x)=-10\log(x^2)=-20\log(x)$ **0,25** La pente est de -20dB/décade

6-c) ** Calcul de la phase de la fonction de transfert

$\varphi(\omega)=arg(\underline{H}(j\omega))=arg\left[\frac{1}{3+j\left(x-\frac{1}{x}\right)}\right]=arg(1)-arg\left(3+j\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)$ alors $\varphi(x)=-arctg\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]$ **0,25**

ou $tg\left[\varphi(x)\right]=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{x}\right)$ **0,25**

** Détermination des limites asymptotiques de la phase

➢ En utilisant les limites asymptotiques de la fonction de transfert on a:

Si x << 1 alors $\underline{H}(jx)\approx jx$ et $\varphi(x)\rightarrow\frac{\pi}{2}$; **0,25** Si x >> 1 alors $\underline{H}(jx)\approx-\frac{j}{x}$ et $\varphi(x)\rightarrow-\frac{\pi}{2}$ **0,25**

ou

* Calcul du gain en tension

$$G(\omega) = 20\log\left(\frac{\|\underline{u}\|}{\|\underline{e}\|}\right) = 20\log\left(\frac{RC\omega}{\sqrt{9(RC\omega)^2+\left[1-(RC\omega)^2\right]^2}}\right) = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{9+\left(\frac{1}{x}-x\right)^2}}\right) = -10\log\left(9+\left(\frac{1}{x}-x\right)^2\right) \quad \boxed{0,25}$$

Nouveau.

* Détermination des pentes des asymptotes obliques

- En utilisant les limites asymptotiques de la fonction de transfert on a :

Si x << 1 alors $G_{dB}(x) = 20\log(\|jx\|) = +20\log(x)$ $\boxed{0,25}$ La pente est de +20dB/décade

Si x >> 1 alors $G_{dB}(\omega) = 20\log\left(\left\|\frac{1}{jx}\right\|\right) = -20\log(x)$ $\boxed{0,25}$ La pente est de -20dB/décade

ou

- En utilisant l'expression du gain en tension:

Si x << 1 alors $G_{dB}(x) = -10\log\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right) = 20\log(x)$ $\boxed{0,25}$ La pente est de +20dB/décade

Si x >> 1 alors $G_{dB}(x) = -10\log(x^2) = -20\log(x)$ $\boxed{0,25}$ La pente est de -20dB/décade

6-c) ** Calcul de la phase de la fonction de transfert

$$\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega)) = \arg\left[\frac{1}{3+j\left(x-\frac{1}{x}\right)}\right] = \arg(1) - \arg\left(3+j\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)$$ alors $$\varphi(x) = -arctg\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right] \quad \boxed{0,25}$$

ou $tg[\varphi(x)] = -\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{x}\right)$ $\boxed{0,25}$

** Détermination des limites asymptotiques de la phase

- En utilisant les limites asymptotiques de la fonction de transfert on a:

Si x << 1 alors $\underline{H}(jx) \approx jx$ et $\varphi(x) \to \frac{\pi}{2}$; $\boxed{0,25}$ Si x >> 1 alors $\underline{H}(jx) \approx -\frac{j}{x}$ et $\varphi(x) \to -\frac{\pi}{2}$ $\boxed{0,25}$

ou

- En utilisant l'expression de la phase de la fonction de transfert:

Si x << 1 alors $tg[\varphi(x)] \to +\infty$ et $\varphi(x) \to \frac{\pi}{2}$; $\boxed{0,25}$ Si x >> 1 alors $tg[\varphi(x)] \to -\infty$ et $\varphi(x) \to -\frac{\pi}{2}$ $\boxed{0,25}$

7) Détermination de l'intensité complexe circulant dans le générateur

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{\underline{Z}_{total}} = \frac{\underline{e}}{\frac{RC\omega + (1+jRC\omega)(RC\omega - j)}{C\omega(1+jRC\omega)}} = \underline{e}\frac{C\omega(1+jRC\omega)}{3RC\omega + j\left[(RC\omega)^2-1\right]} \quad \boxed{0,25}$$

ou $$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{\underline{Z}_{total}} = \underline{e}\frac{jC\omega(1+jRC\omega)}{3jRC\omega + 1 - (RC\omega)^2} \quad \boxed{0,25}$$

Mécanique du solide 1

Nouveau

$\boxed{\text{Corrigé - Examen de Rattrapage -}}$

(Exercice 1:) Etablir la loi « entrée-sortie ».

On a $\vec{V}_{P_1 1/0} = \vec{V}_{A 1/0} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{AP_1}$

$\vec{V}_{A1/0} = \vec{0}$, car A est un point coïncident pour les solides 1 et 0. $\|\vec{AP_1}\| = R_1$

Corrigé

Alors $\vec{V}_{P_1 1/0} = R_1 \cdot \Omega_{1/0} \cdot \vec{u}$

$\vec{V}_{P_2 2/0} = \vec{V}_{B2/0} + \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{BP_2}$

$\vec{V}_{B2/0} = \vec{0}$, car B est un point coïncident pour les solides 2 et 0. $\|\vec{BP_2}\| = R_2$

Alors $\vec{V}_{P_2 2/0} = R_2 \cdot \Omega_{2/0} \cdot \vec{u}$

Comme la courroie ne se déforme pas, alors $[P_1P_2] = C^{ste}$, ce qui permet d'écrire que $\vec{V}_{P_1 1/0} = \vec{V}_{P_2 2/0}$

$\Leftrightarrow R_1 \cdot \Omega_{1/0} \cdot \vec{u} = R_2 \cdot \Omega_{2/0} \cdot \vec{u}$

$R_1 \cdot \Omega_{1/0} = R_2 \cdot \Omega_{2/0} \Leftrightarrow \boxed{\Omega_{1/0} = \frac{R_2}{R_1} \Omega_{2/0}}; \; \Omega_{2/0} = \frac{R_1}{R_2} \Omega_{1/0}$

ou bien $\boxed{\frac{\Omega_{1/0}}{\Omega_{2/0}} = \frac{\Omega_{sortie}}{\Omega_{entrée}} = \frac{R_2}{R_1}}$

1/8

(Exercice 3:) Nouveau

Calcul de la vitesse du point M appartenant à la pièce (1) par rapport à la pièce (0).

Donnée : $\vec{PM} = \vec{PA} + \vec{AM} = a\vec{x_0} + b\vec{x_1}$; $\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}_{1/0}\vec{z_0} = \dot{\theta}_{1/0}\vec{z_1}$

- Méthode de Chasles puis changement de base de dérivation

$\vec{V}_{M1/0} = \left.\frac{d\vec{PM}}{dt}\right)_0 = \left.\frac{d(a\vec{x_0}+b\vec{x_1})}{dt}\right)_0 = \left.\frac{d(a\vec{x_0})}{dt}\right)_0 + \left.\frac{d(b\vec{x_1})}{dt}\right)_0$

$= \vec{0} + \left.\frac{d(b\vec{x_1})}{dt}\right)_0$

or $\left.\frac{d(b\vec{x_1})}{dt}\right)_0 = b\left[\left.\frac{d\vec{x_1}}{dt}\right)_1 + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{x_1}\right]$

$= b\left[\vec{0} + \dot{\theta}_{1/0}\vec{y_1}\right] \Leftrightarrow \boxed{\vec{V}_{M1/0} = b\dot{\theta}_{1/0}\vec{y_1}}$

- Méthode de la composition des mouvements

$\vec{V}_{M1/0} = \vec{V}_{A1/0} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{AM}$

Corrigé

$\vec{O_0B}$

$\vec{O_0B}$

Ou bi

(Exercic

$\vec{V}_{D2/0} =$

$\left.\frac{d\vec{x_1}}{dt}\right)_0$

$\left.\frac{d\vec{x_2}}{dt}\right)_0$

$R_1 \cdot \Omega_{1/0} = R_2 \cdot \Omega_{2/0}$

ou bien $\boxed{\frac{\Omega_{1/0}}{\Omega_{2/0}} = \frac{\Omega_{sortie}}{\Omega_{entrée}} = -\frac{R_2}{R_1}}$

1/8

Nouveau

Exercice 3 :

Calcul de la vitesse du point M appartenant à la pièce (1) par rapport à la pièce (0).

Donnée : $\vec{PM} = \vec{PA} + \vec{AM} = a\vec{x_0} + b\vec{x_1}$; $\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}_{1/0}\vec{z_0} = \dot{\theta}_{1/0}\vec{z_1}$

– Méthode de Chasles puis changement de base de dérivation

$$\vec{V}_{M1/0} = \frac{d\vec{PM}}{dt}\Big|_0 = \frac{d(a\vec{x_0}+b\vec{x_1})}{dt}\Big|_0 = \frac{d(a\vec{x_0})}{dt}\Big|_0 + \frac{d(b\vec{x_1})}{dt}\Big|_0$$

$$= \vec{0} + \frac{d(b\vec{x_1})}{dt}\Big|_0$$

or $\frac{d(b\vec{x_1})}{dt}\Big|_0 = b\left[\frac{d\vec{x_1}}{dt}\Big|_1 + \vec{\Omega}_{1/0}\wedge\vec{x_1}\right]$

$= b\left[\vec{0} + \dot{\theta}_{1/0}\vec{y_1}\right] \Leftrightarrow \boxed{\vec{V}_{M1/0} = b\dot{\theta}_{1/0}\vec{y_1}}$

Corrigé

– Méthode de la composition des mouvements

$$\vec{V}_{M1/0} = \vec{V}_{A1/0} + \vec{\Omega}_{1/0}\wedge\vec{AM}$$

$$= \vec{0} + \frac{d\theta_{1/0}}{dt}\vec{z_1}\wedge b\vec{x_1}$$

$$= \vec{0} + \dot{\theta}_{1/0}\vec{z_1}\wedge b\vec{x_1}$$

$$= \dot{\theta}_{1/0}\, b(\vec{z_1}\wedge\vec{x_1})$$

$\vec{V}_{M1/0}$

$\boxed{\vec{V}_{M1/0} = b\dot{\theta}_{1/0}\vec{y_1}}$

3/8

$\vec{V}_{D3/}$

Exercice 5 : Calcul des vitesses $\vec{V}_{C2/0}$ et $\vec{V}_{E3/0}$ par la méthode de composition des vitesses puis Varignon.

Données : $\vec{BC} = R_2\vec{x_0}$; $\vec{CB} = -R_2\vec{x_0}$

On a $\vec{V}_{C2/0} = \vec{V}_{C2/1} + \vec{V}_{C1/0}$

• $\vec{V}_{C2/1} = \vec{V}_{B2/1} + \vec{CB}\wedge\vec{\Omega}_{2/1}$

$= \vec{0} - R_2\vec{x_0}\wedge\dot{\theta}_{2/1}\vec{z_2} = R_2\dot{\theta}_{2/1}(-\vec{x_0}\wedge\vec{z_2})$

$\vec{V}_{C2/1} = R_2\dot{\theta}_{2/1}\vec{y_0}$

• $\vec{V}_{C1/0} = \vec{V}_{A1/0} + \vec{CA}\wedge\vec{\Omega}_{1/0}$

$= \vec{0} - R_2\vec{x_0}\wedge\dot{\theta}_{1/0}\vec{z_0} - L_1\vec{x_1}\wedge\dot{\theta}_{1/0}\vec{z_0}$

$= R_2\dot{\theta}_{1/0}(-\vec{x_0}\wedge\vec{z_0}) + L_1\dot{\theta}_{1/0}(-\vec{x_1}\wedge\vec{z_0})$

$\vec{V}_{C1/0} = R_2\dot{\theta}_{1/0}\vec{y_0} + L_1\dot{\theta}_{1/0}\vec{y_1}$

Corrigé

Alors $\boxed{\vec{V}_{C2/0} = R_2(\dot{\theta}_{2/1}+\dot{\theta}_{1/0})\vec{y_0} + L_1\dot{\theta}_{1/0}\vec{y_1}}$

Calcul de $\vec{V}_{E3/0}$: Posons que $\vec{ED} = \lambda_{30}\vec{x_0}$; $\lambda_{30}\left[\frac{d\vec{x_0}}{dt}\right]_0$

$\vec{V}_{E30} = \frac{d\vec{ED}}{dt}\Big|_0 = \frac{d(\lambda_{30}\vec{x_0})}{dt}\Big|_0 = \frac{d\lambda_{30}}{dt}\vec{x_0} + \lambda_{30}\,\vec{0}$

$= \dot{\lambda}_{30}\vec{x_0}$

$\vec{V}_{E30} = \dot{\lambda}_{30}\vec{x_0}$

5/8

Nouveau

On a … méth… déri…

$\vec{V}_{C2/0} =$

$\frac{d(L\vec{x_1})}{dt}\Big|_0$

$\frac{d(R_2\vec{x_2})}{dt}$

$\vec{V}_{C2/0} =$

(Exercice: suite)

On retrouve le même résultat de $\vec{V}_{C_{2/0}}$ avec la méthode de Chasles puis changement de base de dérivation

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = L\vec{x_1} + R_2\vec{x_2}$$

$$\vec{V}_{C_{2/0}} = \frac{d\vec{AC}}{dt}\Big)_0 = \frac{d(L\vec{x_1} + R_2\vec{x_2})}{dt}\Big)_0 = \frac{d(L\vec{x_1})}{dt}\Big)_0 + \frac{d(L\vec{x_2})}{dt}\Big)_0$$

- $$\frac{d(L\vec{x_1})}{dt}\Big)_0 = L_1 \frac{d\vec{x_1}}{dt}\Big)_0 = L_1\left[\frac{d\vec{x_1}}{dt}\Big)_1 + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{x_1}\right]$$

$$= L_1\left[\vec{0} + \dot{\theta}_{1/0}\vec{z_1} \wedge \vec{x_1}\right] = L_1\dot{\theta}_{1/0}\vec{y_1}$$

- $$\frac{d(R_2\vec{x_2})}{dt}\Big)_0 = R_2\frac{d\vec{x_2}}{dt}\Big)_0 = R_2\left[\frac{d\vec{x_2}}{dt}\Big)_2 + \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{x_2}\right]$$

$$= R_2\left[\vec{0} + (\vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0}) \wedge \vec{x_2}\right]$$

$$= R_2\left[(\dot{\theta}_{2/1}\vec{z_1} + \dot{\theta}_{1/0}\vec{z_1}) \wedge \vec{x_2}\right]$$

$$= R_2\left[(\dot{\theta}_{2/1}\vec{z_1} \wedge \vec{x_2}) + (\dot{\theta}_{1/0}\vec{z_1} \wedge \vec{x_2})\right]$$

$$= R_2\left[\dot{\theta}_{2/1}(\vec{z_1} \wedge \vec{x_2}) + \dot{\theta}_{1/0}(\vec{z_1} \wedge \vec{x_2})\right]$$

$$= R_2\left[\dot{\theta}_{2/1}\vec{y_0} + \dot{\theta}_{1/0}\vec{y_0}\right]$$

$$= R_2(\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})\vec{y_0}$$

Corrigé

$$\boxed{\vec{V}_{C_{2/0}} = L_1\dot{\theta}_{1/0}\vec{y_1} + R_2(\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})\vec{y_0}}$$

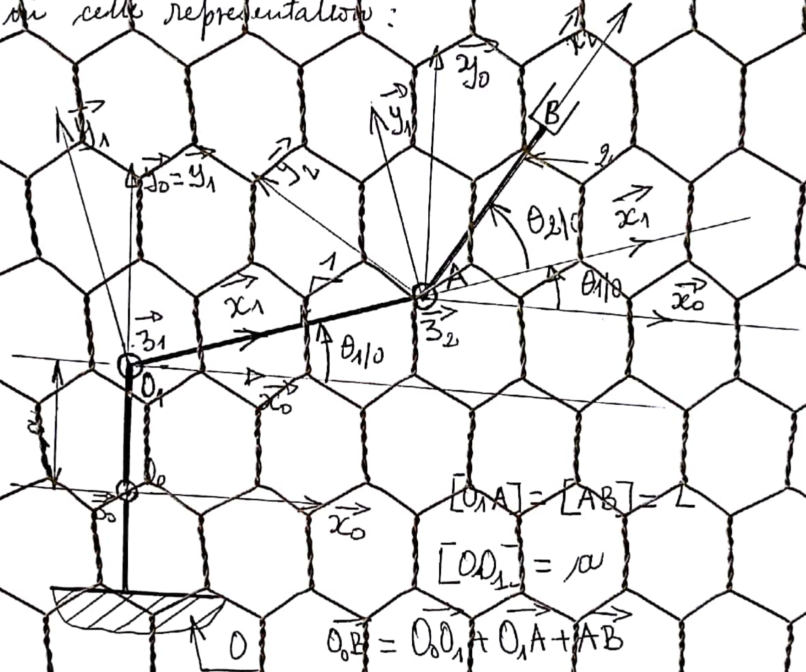
5/8

Nouveau

6/8

Exercice 2 :

A un instant (t) quelconque donné, les solides 1 et 2 peuvent occupés n'importe quelle position. D'où cette représentation :



$[O_1A]=[AB]=L$

$[O_0O_1]=a$

$\vec{O_0B}=\vec{O_0O_1}+\vec{O_1A}+\vec{AB}$

$$\vec{O_0B}\begin{vmatrix} x_B \\ y_B \end{vmatrix} = \vec{O_0O_1}\begin{vmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{vmatrix} + \vec{O_1A}\begin{vmatrix} L\cos\theta_1 \\ L\sin\theta_1 \\ 0 \end{vmatrix} + \vec{AB}\begin{vmatrix} L\cos(\theta_1+\theta_2) \\ L\sin(\theta_1+\theta_2) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{O_0B}\begin{vmatrix} x_B = L\cos\theta_1 + L\cos(\theta_1+\theta_2) \\ y_B = L\sin\theta_1 + L\sin(\theta_1+\theta_2) \end{vmatrix}$$

Ou bien : $\vec{O_0B}=\left[L\cos\theta_1+L\cos(\theta_1+\theta_2)\right]\vec{x_0}+\left[a+L\sin\theta_1+L\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$

Exercice 4 : Calcul de la vitesse $\vec{V_{D3/0}}$ par la méthode de Chasles puis changement de base de dérivation

$$\vec{V_{D3/0}}=\frac{d\vec{AD}}{dt}\Big)_0=\frac{d(L_1\vec{x_1}+L_2\vec{x_2}+L_3\vec{x_3})}{dt}\Big)_0$$

$$=L_1\frac{d\vec{x_1}}{dt}\Big)_0+L_2\frac{d\vec{x_2}}{dt}\Big)_0+L_3\frac{d\vec{x_3}}{dt}\Big)_0$$

- $\frac{d\vec{x_1}}{dt}\Big)_0=\frac{d\vec{x_1}}{dt}\Big)_1+\vec{\Omega_{1/0}}\wedge\vec{x_1}$
  $=\vec{0}+\dot{\theta}_{1/0}\vec{y_1}\Longleftrightarrow L_1\frac{d\vec{x_1}}{dt}\Big)_0=\boxed{L_1\cdot\dot{\theta}_{1/0}\vec{y_1}}$
- $\frac{d\vec{x_2}}{dt}\Big)_0=\frac{d\vec{x_2}}{dt}\Big)_2+\vec{\Omega_{2/0}}\wedge\vec{x_2}$
  $=\vec{0}+(\dot{\theta}_{2/1}+\dot{\theta}_{1/0})\vec{y_2}\Longleftrightarrow L_2\frac{d\vec{x_2}}{dt}\Big)_0=\boxed{L_2(\dot{\theta}_{2/1}+\dot{\theta}_{1/0})\vec{y_2}}$
- $\frac{d\vec{x_3}}{dt}\Big)_0=\frac{d\vec{x_3}}{dt}\Big)_3+\vec{\Omega_{3/0}}\wedge\vec{x_3}$
  $=\vec{0}+(\dot{\theta}_{3/2}+\dot{\theta}_{2/1}+\dot{\theta}_{1/0})\vec{y_3}$
  $\frac{d\vec{x_3}}{dt}=\boxed{L_3(\dot{\theta}_{3/2}+\dot{\theta}_{2/1}+\dot{\theta}_{1/0})\vec{y_3}}$

$$\vec{O_0B} = \vec{O_0O_1} \begin{vmatrix} ... \\ 0 \end{vmatrix} + \vec{O_1A} \begin{vmatrix} L \sin\theta_1 ... \\ 0 \end{vmatrix} ... \Big|_0$$

$$\vec{O_0B} \begin{vmatrix} x_B = L\cos\theta_1 + L\cos(\theta_1+\theta_2) \\ y_B = L\sin\theta_1 + L\sin(\theta_1+\theta_2) \end{vmatrix}$$

Ou bien : $\vec{O_0B} = [L\cos\theta_1 + L\cos(\theta_1+\theta_2)]\vec{x_0} + [a + L\sin\theta_1 + L\sin(\theta_1 ...$

Exercice 4 : Calcul de la vitesse $\vec{V}_{D3/0}$ par la méthode de Chasles puis changement de base de dérivation

$$\vec{V}_{D3/0} = \frac{d\vec{AD}}{dt}\Big)_0 = \frac{d(L_1\vec{x_1} + L_2\vec{x_2} + L_3\vec{x_3})}{dt}\Big)_0$$

$$= L_1\frac{d\vec{x_1}}{dt}\Big)_0 + L_2\frac{d\vec{x_2}}{dt}\Big)_0 + L_3\frac{d\vec{x_3}}{dt}\Big)_0$$

- $\frac{d\vec{x_1}}{dt}\Big)_0 = \frac{d\vec{x_1}}{dt}\Big)_1 + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{x_1}$

$$= \vec{0} + \dot{\theta}_{1/0}\vec{y_1} \iff L_1\frac{d\vec{x_1}}{dt}\Big)_0 = \boxed{L_1 \cdot \dot{\theta}_{1/0}\vec{y_1}}$$

- $\frac{d\vec{x_2}}{dt}\Big)_0 = \frac{d\vec{x_2}}{dt}\Big)_2 + \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{x_2}$

$$= \vec{0} + (\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})\vec{y_2} \iff L_2\frac{d\vec{x_2}}{dt}\Big)_0 = \boxed{L_2(\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})\vec{y_2}}$$

Corrigé

- $\frac{d\vec{x_3}}{dt}\Big)_0 = \frac{d\vec{x_3}}{dt}\Big)_3 + \vec{\Omega}_{3/0} \wedge \vec{x_3}$

$$= \vec{0} + (\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})\vec{y_3}$$

$$\iff L_3\frac{d\vec{x_3}}{dt}\Big)_0 = \boxed{L_3(\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})\vec{y_3}}$$

Ainsi

$$\boxed{\vec{V}_{D3/0} = L_1\dot{\theta}_{1/0}\vec{y_1} + L_2(\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})\vec{y_2} + L_3(\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})\vec{y_3}}$$

par Varignon.

Exercice 5 : suite

On retrouve le même résultat de $\vec{V}_{C2/0}$ avec la méthode de Chasles puis changement de base de dérivation.

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = L\vec{x_1} + R_2\vec{x_2}$$

$$\vec{V}_{C2/0} = \frac{d\vec{AC}}{dt}\Big)_0 = \frac{d(L\vec{x_1} + R_2\vec{x_2})}{dt}\Big)_0 = \frac{d(L\vec{x_1})}{dt}\Big)_0 + \frac{d(L\vec{x_2})}{dt}\Big)_0$$

- $\frac{d(L\vec{x_1})}{dt}\Big)_0 = L_1\frac{d\vec{x_1}}{dt}\Big)_0 = L_1\left[\frac{d\vec{x_1}}{dt}\Big)_1 + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{x_1}\right]$

$$= L_1[\vec{0} + \dot{\theta}_{1/0}\vec{z} \wedge \vec{x_1}] = \boxed{L_1\dot{\theta}_{1/0}\vec{y_1}}$$

- $\frac{d(R_2\vec{x_2})}{dt}\Big)_0 = R_2\frac{d\vec{x_2}}{dt}\Big)_0 = R_2\left[\frac{d\vec{x_2}}{dt}\Big)_2 + \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{x_2}\right]$

$$= R_2[\vec{0} + (\vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0}) \wedge \vec{x_2}]$$

$$= R_2[(\dot{\theta}_{2/1}\vec{z_1} + \dot{\theta}_{1/0}\vec{z_1}) \wedge \vec{x_2}]$$

$$= R_2[(\dot{\theta}_{2/1}\vec{z_1} \wedge \vec{x_2}) + (\dot{\theta}_{1/0}\vec{z_1} \wedge \vec{x_2})]$$

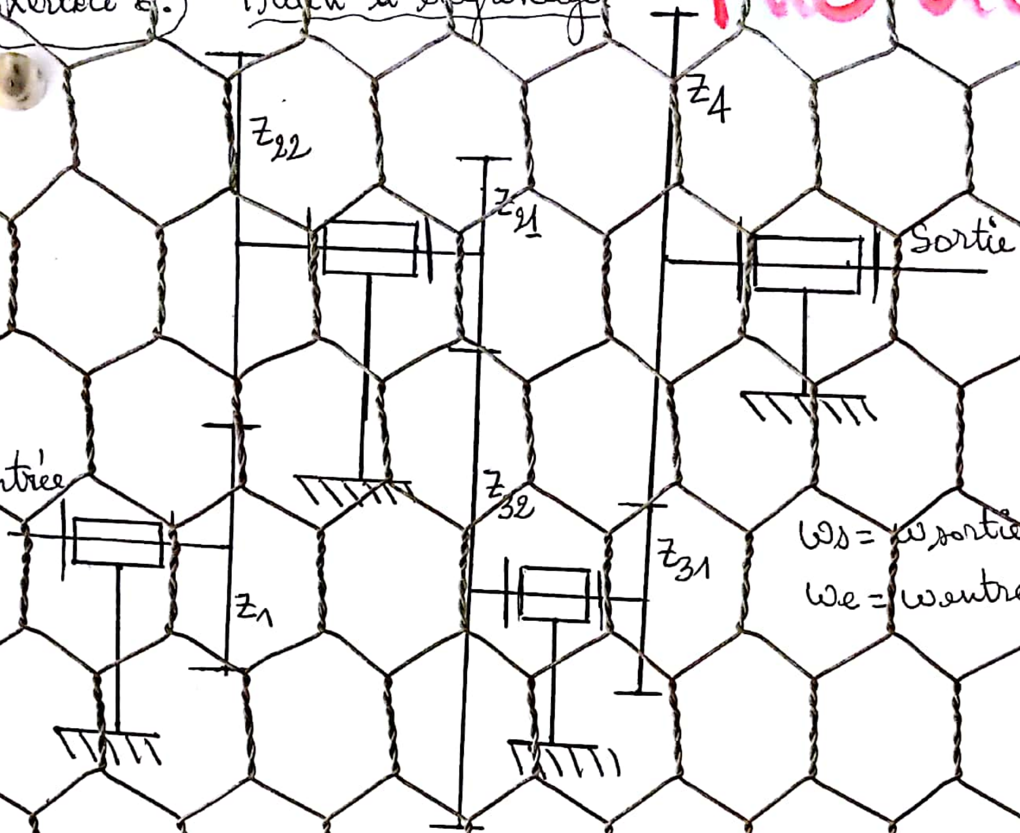
$$= R_2[\dot{\theta}_{2/1}(\vec{z_1} \wedge \vec{x_2}) + \dot{\theta}_{1/0}(\vec{z_1} \wedge \vec{x_2})]$$

$$= R_2[\dot{\theta}_{2/1}\vec{y_2} + \dot{\theta}_{1/0}\vec{y_2}]$$

$$= R_2(\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})\vec{y_2}$$

Nouveau

Exercice 6 : Train d'engrenage



$\omega_s = \omega_{sortie} = \Omega_s$

$\omega_e = \omega_{entrée} = \Omega_e$

Corrigé

1) : Loi « entrée-sortie » du train d'engrenage

$$\frac{\omega_s}{\omega_e} = \frac{\omega_4}{\omega_1} = (-1)^n \times \frac{\prod Z \text{ menantes}}{\prod Z \text{ menées}} = (-1)^n \times \frac{Z_1 \times Z_{21} \times Z_{31}}{Z_{22} \times Z_{32} \times Z_4} = k$$

$\omega_s = k.\omega_e$

Application numérique

$$\frac{\omega_4}{\omega_1} = (-1)^3 \times \frac{17 \times 20 \times 18}{42 \times 43 \times 40} = -0{,}084 \text{ ou } \boxed{\omega_4 = -0{,}084\, \omega_1}$$ loi entrée sortie

2) Calcul du rapport de réduction k sur

$$k = \frac{Z_1 \times Z_{21} \times Z_{31}}{Z_{22} \times Z_{32} \times Z_4}$$

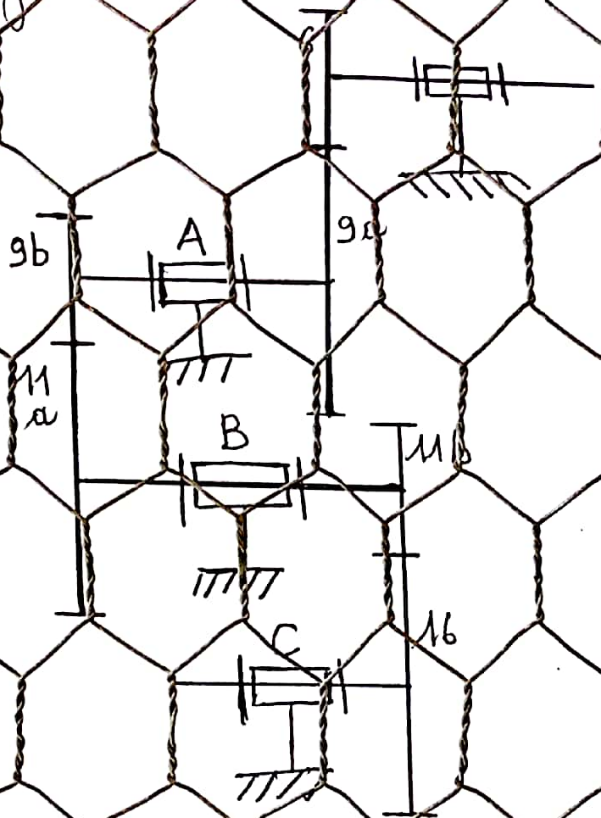
Application numérique

$$\boxed{k = \frac{17 \times 20 \times 18}{42 \times 43 \times 40} = 0{,}084}$$

ue au

Exercice 7 : Monte charge

Schéma cinématique de la monte charge et
1) repérage des roues dentées indicées a et b



ie = Ωs
rée = Ωe

Corrigé

= k

2) Expression du rapport de réduction $i = \frac{\omega s}{\omega e}$

$$\frac{\omega s}{\omega e} = i = (-1)^n \frac{Z \text{ menantes}}{Z \text{ menées}} = (-1)^n \times \frac{Z_6 \times Z_{9b} \times Z_{11b}}{Z_{9a} \times Z_{11a} \times Z_{16}}$$

entrée
sortie.

La loi «entrée-sortie» est alors : $\boxed{\omega s = i \cdot \omega e}$

3) Application numérique :

$$\boxed{i = \frac{16 \times 19 \times 17}{46 \times 59 \times 85} = 0,0224}$$

4) Calcul de la vitesse de rotation du tambour en tr/min

On a : $\frac{\omega s}{\omega e} = i \iff \omega s = i \cdot \omega e \iff \omega s = 0,022\,\omega e$. Or $\omega = \frac{\pi N}{30}$

7/8

$\iff \frac{\pi Ns}{30} = 0,0222 \frac{\pi Ne}{30} \iff Ns = 0,022\,Ne \iff Ns = 0,0222 \times 1500$ tr/min

$\boxed{Ns = 33 \text{ tr/min}}$