Devoir de Maison N°1 d'Analyse II (DM1-MPSI1)

A rendre au plus tard le ***13 Avril 2023*** *à* 14h00min *GMT à la* ***Scolarité*** *de l'EPO.*

Exercice 1 : Calcul d'Intégrales

08 pts

1. Calcul d'aire : Calculer l'aire du domaine plan de $\mathbb{R}^2$ delimiter par l'axe des ordonnées, et la courbe de la fonction $f : x \longmapsto e^{-2022x}\sin(2023x)$ sur $[0, +\infty[$. 2
2. Calculer les primitives suivantes : pour $m \in \mathbb{N}^*$,

   (a) $\displaystyle\int \sqrt{\tan(x)} + \sqrt{\text{cotan}(x)}dx$; 1

   (b) $\displaystyle\int \left(x^{3m} + x^{2m} + x^m\right)\left(2x^{2m} + 3x^m + 6\right)^{\frac{1}{m}} dx$. 1
3. Etudier la nature des intégrales suivantes, puis calculer leur valeur en cas de convergence : soit $p > 1$,

   (a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) - \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)^2} dx$; 1

   (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^p}$. 1
4. Soit $\xi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\xi(0) = 1$, $\xi'(0) = 0$ et $\xi''(0) = -1$. Calculer la limite de la suite de terme générale :

   (a) $\displaystyle a_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \xi\left(\frac{k}{n+1}\right)\xi'\left(\frac{k+1}{n+1}\right)$; 1

   (b) $\displaystyle b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\xi\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\right)^n}{\sqrt{(n+k)(n+1+k)}}$. 1

Exercice 2 : Intégrale, Analyse des Fonctions, et Inégalité de Jensen Continue

07 pts

1. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ continue et vérifiant : $f(1) = 1$, et $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^x f^2(\theta)d\theta = \frac{1}{x}\left(\int_0^x f(\theta)d\theta\right)$ 2
2. Soient $\varphi, \psi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications continues.

   Montrer qu'il existe $\gamma \in [0,1]$ tel que : $\displaystyle\varphi(\gamma)\int_0^1 \psi(t)dt = \psi(\gamma)\int_0^1 \varphi(t)dt$. 1
3. Soient $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et convexe.

   (a) Montrer que : $\displaystyle\varphi\left(\int_0^1 f\right) \leqslant \int_0^1 \varphi o f$. 1

   (b) On suppose de plus que $f > 0$, et on pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \displaystyle\int_0^1 f(z)^n dz$, $\quad I_n = \sqrt[n]{a_n}$, $\quad b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

   Etudier le sens de variations des deux suites $(a_n)_{n>0}$ et $(b_n)_{n>0}$, puis déterminer leur limite. 3

Exercice 3 : Etude d'une fonction définie par une intégrale

05 pts

On considère la fonction F définie par : $\displaystyle F(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2 + \sin^2(t)}dt$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de la fonction F, et que, pour tout $x \neq 0$, $F(-x) = -F(x)$. 0,25+0
2. Montrer que F est prolongeable en une fonction continue en 0. 0,5
3. Montrer que la fonction F ainsi prolongée est de classe C^1, et étudier son sens de variation sur son domaine. 1
4. Etudier les limites de F aux bornes de $\mathscr{D}$. 0,5
5. Tracer l'allure de F dans un repère orthogonal du plan. 1+0,5+0,5=2

Bonne Courage

FIN!

Scanné avec CamScanner

Proposition de Correction du DM 1

Exo 1 : Calcul d'Intégrales

01/38

1) Calcul d'Aire :

Calculons l'aire du domaine plan de $\mathbb{R}^2$ delim par l'axe des ordonnées, et la courbe de $f : x \longmapsto f(x) = e^{-2022x} \sin(2023x)$ sur $[0, +\infty[$

[i] Etude expression de f sur $\mathbb{R}_+$

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}_+$ car produit telles fonction. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$f'(x) = [2023 \cos(2023x) - 2022] e^{-2022x}$$

- Dans un repère du plan $\mathbb{R}^2$, on déduit la courbe de f à travers de celles des fonctions $x \xmapsto{h} e^{-2022x}$ et $x \xmapsto{g} \sin(2023x)$

- Leur mixture illustre (C_f) déterminons ses pts d'intersection avec l'axe $(O, \vec{i})$.

Scanné avec CamScanner

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = 0 \iff \sin(20\pi x) = 0 \Rightarrow 20\pi x = n\pi$

$\Rightarrow \quad x_n = \dfrac{n\pi}{20\pi}$, pour $n = 0, 1, 2, \dots, \cancel{+}\infty$

02/38

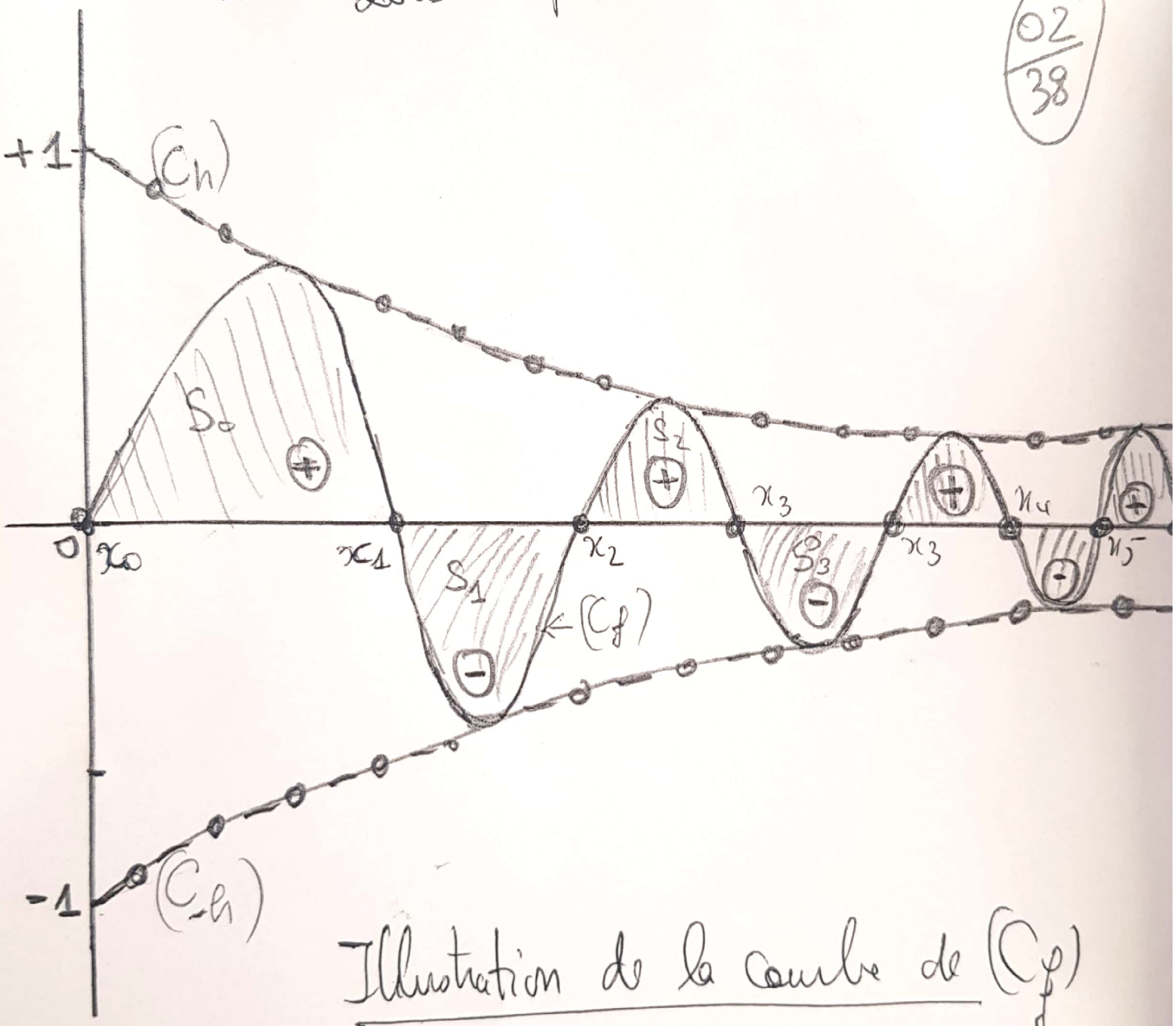


Illustration de la courbe de (C_f)

Ainsi f est positive sur les intervalles $[x_{2n}, x_{2n+1}]$ et elle est négative sur les intervalles $[x_{2n+1}, x_{2n+2}]$

Pour la suite posons S_n l'aire du plan délimité par (C_f) et l'axe $(O, \vec{i})$ sur $[x_n, x_{n+1}]$

Il vient que : $S_n = \left| \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\,dx \right| = \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(x)|\,dx$ u.a

$$\Rightarrow S_n = \left| \int_{x}^{x_{n+1}} e^{-2022x} \sin(2023x)\,dx \right|$$ dans ce cas. u.a

03/38

En faisant une double intégration par partie, on trouve :

$$S_n = \left| \left[\frac{-e^{-2022x}}{2022^2 + 2023^2} \left[2022 \sin(2023x) + 2023 \cos(2023x) \right] \right]_{x_n}^{x_{n+1}} \right|$$

$$= \left| -\frac{2023}{2022^2 + 2023^2} \left(e^{-2022x_{n+1}} \cos(2023x_{n+1}) - e^{2022x_n} \cos(2023x_n) \right) \right|$$

Or $x_n = \frac{n\pi}{2023}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_n = \frac{2023\, e^{-\frac{2022n\pi}{2023}}}{2022^2 + 2023^2} \left(1 + e^{-\frac{2022\pi}{2023}} \right) u$$

On en déduit que les aires $(S_n)_n$ suit une progression géométrique de raison $q = e^{-\frac{2022\pi}{2023}}$. En effet : $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{\frac{2023\, e^{-\frac{2022(n+1)\pi}{2023}}}{2022^2 + 2023^2}\left(1 + e^{-\frac{2022\pi}{2023}}\right)}{\frac{2023\, e^{-\frac{2022n\pi}{2023}}}{2022^2 + 2023^2}\left(1 + e^{-\frac{2022\pi}{2023}}\right)}$$

$$= e^{-\frac{2022\pi}{2023}}$$

Cor. f : La somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite des aire $(S_n)_n$ est donnée par

$$A_n = S_0 + S_1 + S_2 + \cdots + S_n = S_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ u.}$$

Par suite, on a l'aire demandée est donnée par

$$\int_0^{+\infty} |f| = \lim_{n \to +\infty} A_n = \frac{S_0}{1 - q} = \frac{1 + e^{-\frac{2022\pi}{2023}}}{(2022^2 + 2023^2)\left(1 - e^{-\frac{2022\pi}{2023}}\right)} \text{ u.a}$$

car $|q| < 1$

Scanné avec CamScanner

2) Calcul de primitives :

(a) $\int \sqrt{\tan(x)} + \sqrt{\cot an(x)}\, dx = F(x)$

$\frac{05}{38}$

$$f(x) = \int \frac{\sqrt{\sin(x)}}{\sqrt{\cos(x)}} + \frac{\sqrt{\cos(x)}}{\sqrt{\sin(x)}}\, dx = \int \frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sqrt{\sin(x)\cos(x)}}\, dx$$

$$= \sqrt{2} \int \frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sqrt{\sin(2x)}}\, dx$$

Posons $\sin(x) - \cos(x) = t \Rightarrow (\cos(x) + \sin(x))dx = dt$

De plus $(\sin(x) - \cos(x))^2 = t^2 \Leftrightarrow 1 - \sin(2x) = t^2$

$\Rightarrow \sin(2x) = 1 - t^2$. Il vient alors que :

$$f(x) = \sqrt{2} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \sqrt{2} \arcsin(t) + C$$

Conc : $\int \sqrt{\tan(x)} + \sqrt{\cot an(x)}\, dx = \sqrt{2} \arcsin(\sin(x) - \cos(x)) + C$

où $C \in \mathbb{R}$.

Scanné avec CamScanner

(b) $G(x) = \int (x^{3m} + x^{2m} + x^{m})(2x^{2m} + 3x^{m} + 6)^{\frac{1}{m}} dx$

$\frac{86}{88}$

$$G(x) = \int (x^{3m} + x^{2m} + x^{m}) \left(\frac{2x^{3m} + 3x^{2m} + 6x^{m}}{x^{m}}\right)^{\frac{1}{m}} dx$$

$$= \int \left(\frac{x^{3m} + x^{2m} + x^{m}}{x}\right) \left(2x^{3m} + 3x^{2m} + 6x^{m}\right)^{\frac{1}{m}} dx$$

$$= \int \left(x^{3m-1} + x^{2m-1} + x^{m-1}\right) \left(2x^{3m} + 3x^{2m} + 6x^{m}\right)^{\frac{1}{m}} dx$$

Posons $u = 2x^{3m} + 3x^{2m} + 6x^{m}$

$\Rightarrow du = 6m \left(x^{3m-1} + x^{2m-1} + x^{m-1}\right) dx$

$\Rightarrow G(x) = \int \frac{1}{6m} u^{\frac{1}{m}} du = \frac{1}{6m} \frac{u^{1+\frac{1}{m}}}{1+\frac{1}{m}} + C$

Concl. : $G(x) = \frac{1}{6(m+1)} \left(2x^{3m} + 3x^{2m} + 6x^{m}\right)^{\frac{m+1}{m}} + C, \; C \in \mathbb{R}$

Scanné avec CamScanner

3) Nature des intégrale impropre

(a) $$I = \int_2^{+\infty} \underbrace{\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)^2}}_{f(x)} dx = \int_2^{+\infty} f(x)\,dx$$

07/38

I présente des incertitudes au voisinage de $+\infty$.

Etude de I au voisinage de $+\infty$

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = \ln(x) + \ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$
$$= \ln(2x) + \ln\left(1+\frac{1}{(2x)^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$
$$= \ln(2x) + \frac{1}{(2x)^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

D'où: $\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \ln(2x) - \frac{1}{(2x)^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Ainsi: $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x^2}$ (*)

Scanné avec CamScanner

Car $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln(x+1) - \ln(x-1)$ et que

$$\ln(x+1) = \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln(x) + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\ln(x-1) = \ln(x) + \ln\left(1-\frac{1}{x}\right) = \ln(x) - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\ln(x+1) - \ln(x-1) = \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ainsi $\left[\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]^2 = \frac{4}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

D'où $\left[\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{4}{x^2}$ (**)

Conf : De (*) et (**), on obtient alors :

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{2x^2}}{\frac{4}{x^2}} = \frac{1}{2x^2} \times \frac{x^2}{4} = \frac{1}{8}$$

Donc $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{8} \neq 0$

On en déduit que $I = \int_2^{+\infty} f$ est divergente.

(b) $J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+\sqrt{x^2+1})^p}$ avec $p>1$.

$\circ$ ☒ J présente des singularité au voisinage de $+\infty$.

Posons $\theta = x+\sqrt{x^2+1} \Rightarrow \sqrt{1+x^2} = \theta - x$

$\Rightarrow 1+x^2 = (\theta - x)^2 \Rightarrow 1+\cancel{x^2} = \theta^2 - 2\theta x + \cancel{x^2}$

$\Rightarrow 2\theta x = \theta^2 - 1 \Rightarrow x = \frac{\theta^2-1}{2\theta} = \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{1}{\theta}\right)$

$\Rightarrow dx = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\theta^2}\right)d\theta$

Si $x=0 \Rightarrow \theta = 1$

Si $x \to +\infty \Rightarrow \theta \to +\infty$

Il vient alors que :

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\theta^p}\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\theta^2}\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left(\theta^{-p}+\theta^{-p-2}\right)d\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{\theta^{-p+1}}{-p+1}+\frac{\theta^{-p-1}}{-p-1}\right]_1^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{p+1+p-1}{p^2-1}\right)$$

Conl : $J = \frac{p}{p^2-1} \Rightarrow$ J est converge

09/38

Scanné avec CamScanner

4) Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tq $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ et $f''(0) = -1$.

Calcul de la limite de la suite de terme général :

10/38

(a) $a_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n+1}\right) f'\left(\frac{k+1}{n+1}\right)$

Méthode : Somme de Riemann

Posons $R_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n+1}\right) f'\left(\frac{k}{n+1}\right)$

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ dc sur $[0,1]$ dou

$x \longmapsto f(x) f'(x)$ est cont sur $[0,1]$ car produ

de telles fonctions.

Ainsi d'après le Théorème de Convergence des somm

de Riemann, on en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} R_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n+1}\right) f'\left(\frac{k}{n+1}\right) = \int_0^1 f'(x) f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[f(x)^2 \right]_0^1$$

Scanné avec CamScanner

On obtient alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = \frac{1}{2}\left[f^2(1) - f^2(0)\right]$ (E.1)

11/38

III Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

Méthode : Mq : $\lim a_n = \lim R_n \iff a_n - R_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n - R_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n+1}\right)\left[f'\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f'\left(\frac{k}{n+1}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N},\quad |a_n - R_n| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n+1}\right)\right|\left|f'\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f'\left(\frac{k}{n+1}\right)\right| \quad (E.2)$$

- $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \Rightarrow f''$ est cont sur $\mathbb{R}^2$ dc cont sur $[0,1]$

Les fct f et f'' étant cont sur $[0,1]$ elles y sont dc Borné. D'où $\exists\, M_0, M_2 > 0$ tq :

$$M_0 = \sup_{[0,1]} |f| \quad \text{et} \quad M_2 = \sup_{[0,1]} |f''| \quad (E.3)$$

- Par ailleurs $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1} \in [0,1]$ et d'après le Theo des Accroissm Fini $\exists\, c_k$ ds $]\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}[$ / $f'\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f'\left(\frac{k}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} f''(c_k)$

$$\Rightarrow \left|f'\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f'\left(\frac{k}{n+1}\right)\right| \leq \frac{1}{n+1} M_2 \quad (E.4)$$

Scanné avec CamScanner

De (E.2), (E.3) et (E.4), on obtient :

$$|a_n - R_n| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} M_0 \cdot \frac{M_2}{n+1} = \frac{M_0 M_2}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

d'où $a_n - R_n \xrightarrow[n\infty]{} 0 \iff \lim a_n = \lim R_n$ (E.5)

<u>Concl</u> : De (E.1) et (E.5), on conclut que :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} R_n = \frac{1}{2}\left(f^2(1) - f^2(0)\right) = \frac{f^2(1) - 1}{2} \quad (E.6)$$

(b) $$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(f\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\right)^n}{\sqrt{(n+k)(n+1+k)}}$$

12/38

On procède de manière analogue que en (a)

Ainsi, on pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \left(f\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+1+k)}} \\ w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k)}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)} \end{cases}$$

Ainsi, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $b_n = u_n v_n$ (i)

Scanné avec CamScanner

Ainsi, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^* : b_n = u_n v_n$ (i)

Calcul de $\lim u_n$

Comme $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors f admet un $DL_2(0)$ qui s'écrit sous sa forme générale :

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{1}{2} x^2 f''(0) + o(x^2)$$
$$= 1 - \frac{1}{2} x^2 + o(x^2) \quad (ii)$$

13/38

Posons $X = \frac{\pi}{\sqrt{n}} \Rightarrow X \longrightarrow 0$ qd $n \longrightarrow +\infty$

D'où, on obtient avec (ii) le développm asymptotique d'ordre 2 suivant de f en $+\infty$

$$f\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (\text{en } +\infty)$$

$$\Rightarrow \ln\left(f\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\pi^2}{2n} \Rightarrow n\ln\left(f\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\pi^2}{2}$$

Par ailleurs $u_n = \left(f\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = e^{n\ln\left(f\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\right)}$ (iii) (iv)

Conl : De (iii) et (iv) on trouve que :

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{\pi^2}{2}} \quad (v)$$

[

[

Posons

$t^2 -$

Calcul de la limite de w_n

D'après le Theorème de Convergence des Sommes de Riemann, on déduit que :

$$w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(2) \quad (vi)$$

$\frac{14}{38}$

Calcul de la limite de v_n

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq w_n - v_n = \sum_{k=1} \frac{1}{\sqrt{n+k}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}} - \frac{1}{\sqrt{n+1+k}}\right)$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq w_n - v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}\left(\frac{\sqrt{n+1+k} - \sqrt{k+n}}{\sqrt{(n+k)(n+1+k)}}\right)$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq w_n - v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)} \frac{1}{\sqrt{n+1+k}\left(\sqrt{n+1+k} + \sqrt{n+k}\right)}$

D'où : $0 \leq w_n - v_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2(n+1)^2} = \frac{n}{2(n+1)^2} \xrightarrow[n\infty]{} 0 \quad (vii)$

On en déduit que $w_n - v_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$

D'où $\lim v_n = \lim w_n = \ln(2) \quad (viii)$

Conf : De (i), (v) et (vii), il vient ... $-\frac{\pi^2}{3}$

Exo 2 : Intégrale, Analyse des Fonctions et Inégalité de Jensen Continue

1) Trouvons toutes les fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ continue et vérifiant :

$\frac{15}{38}$

$$(RF) : f(1) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\int_0^x f^2(\theta)\,d\theta = \frac{1}{x}\left[\int_0^x f(\theta)\,d\theta\right]^2$$

- Soit f une solution de (RF) et posons

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad g(x) = \int_0^x f(\theta)\,d\theta \quad \text{et} \quad g'(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = f(x) \Rightarrow \int_0^x (g'(\theta))^2\,d\theta = \int_0^x (f(\theta))^2\,d\theta \quad (E_1)$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^x (g'(\theta))^2\,d\theta = \int_0^x (f(\theta))^2\,d\theta \quad (E_2)$

$$(E_1) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad [g(x)]^2 = \left[\int_0^x f(\theta)\,d\theta\right]^2 \quad (E_3)$$

$$(E_3) \Rightarrow \forall x > 0, \quad \frac{1}{x}[g(x)]^2 = \frac{1}{x}\left[\int_0^x f(\theta)\,d\theta\right]^2$$

Scanné avec CamScanner

Il vient alors que : d'après (RF)

$$\forall x>0,\ \frac{1}{x}[g(x)]^2 = \frac{1}{2}\int_0^x f^2(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^x (g'(\theta))^2\,d\theta$$

$$\Rightarrow \forall x>0,\ \frac{1}{x}[g(x)]^2 = \frac{1}{2}\int_0^x (g'(\theta))^2\,d\theta \quad (E_4)$$

En dérivant membre à membre (E_4) par rapport à la variable $x \in \mathbb{R}_+^*$, on obtient :

16/38

$$\frac{2xg'(x)g(x) - [g(x)]^2}{x^2} = \frac{1}{2}[g'(x)]^2$$

$$[xg'(x)]^2 - 4xg'(x)g(x) + 2[g(x)]^2 = 0$$

$$\left[\frac{xg'(x)}{g(x)}\right]^2 - 4\frac{xg'(x)}{g(x)} + 2 = 0 \quad (E_5)$$

Posons $t = \dfrac{xg'(x)}{g(x)}$ alors (E_5) devient :

$$t^2 - 4t + 2 = 0 \Rightarrow t = 2 \pm \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{xg'(x)}{g(x)} = 2 \pm \sqrt{2} \Rightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{x}$$

Scanné avec CamScanner

$\ln|g(x)| = (2 \pm \sqrt{2}) \ln(x) \Rightarrow \ln(g(x)) = \ln\left(x^{2 \pm \sqrt{2}}\right)$

car $g(x) > 0$ par positivité de f sur $\mathbb{R}_+$.

Il vient alors que : $g(x) = k x^{2 \pm \sqrt{2}}$ pour $x > 0$.

On en déduit que $f(x) = g'(x) = C x^{1 \pm \sqrt{2}}$, $x > 0$

(où $C = 2 \pm \sqrt{2}\, k \in \mathbb{R}$ constante initiale)

Pour $f : x \longmapsto C x^{1-\sqrt{2}}$, avec $C \in \mathbb{R}$, on a

f n'est pas bien définie sur $\mathbb{R}_+$ car $1-\sqrt{2} < 0$. D'où

cette solution n'est pas valable pour (RF).

Pour $f : x \longmapsto C x^{1+\sqrt{2}}$, nous pouvons

calculer $f(1) = 1 \Rightarrow C = 1$

Conf : (RF) admet une unique solution, la fonction

$f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*,\ x \longmapsto x^{1+\sqrt{2}}$.

Scanné avec CamScanner

2) Soient $\varphi, \psi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 applicat° cont

Montrons q : $\exists \gamma \in [0,1] \,/\, \varphi(\gamma)\int_0^1 \psi(t)\,dt = \psi(\gamma)\int_0^1 \varphi(t)\,dt$

Considérons la fonction $\delta : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$\forall x \in [0,1]$, $\delta(x) = \varphi(x)\int_0^1 \psi(t)\,dt - \psi(x)\int_0^1 \varphi(t)\,dt$

18/38

*) δ est cont sur $[0,1]$ car combinaison linéaire de telles fonct° φ et ψ sur $[0,1]$.

**) Par ailleurs, on a :

$$\int_0^1 \delta(x)\,dx = \int_0^1 \left[\varphi(x)\left(\int_0^1 \psi(t)\,dt\right)\right]dx - \int_0^1 \psi(x)\int_0^1 \varphi(t)\,dt\,dx$$

$$= \left(\int_0^1 \psi(t)\,dt\right)\int_0^1 \varphi(x)\,dx - \left(\int_0^1 \varphi(t)\,dt\right)\int_0^1 \psi(x)\,dx$$

$$= 0$$

Conf : De (*) et (**), on en déduit que si δ a un signe constante, alors $\forall \gamma \in [0,1]$, on a $\delta(\gamma) = 0$. Sinon δ change de signe sur $[0,1]$ d'où d'après le T.V.I $\exists \gamma \in [0,1] \,/\, \delta(\gamma) = 0$

Soit alors : $\varphi(\gamma)\int_0^1 \psi = \psi(\gamma)\int_0^1 \varphi$

Scanné avec CamScanner

Soit alors : $f(x) = 1$

3) Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction cont et convexe.

(a) Montrons que : $\varphi\left(\int_0^1 f\right) \leq \int_0^1 \varphi \circ f$. $\frac{19}{38}$

Méthode : Somme de Riemann (Convergente)
Inégalité de Jensen.

(i) φ étant convexe alors d'après l'inégalité de Jensen $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (\lambda_i)_{i \in [\![0,n-1]\!]} \subset [0,1]$ $\forall (x_i)_{i \in [\![0,n-1]\!]}$

$$\varphi\left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \varphi(x_i) \qquad (I.J)$$

(ii) Dans (I.J) pour $\lambda_i = \frac{1}{n}$ pour $i = 0, \dots, n-1$ et $x_i = f\left(\frac{i}{n}\right)$ pour $i = 0, \dots, n-1$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \varphi\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\right) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \varphi\left(f\left(\frac{i}{n}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \varphi\left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f\left(\frac{i}{n}\right)$$

Scanné avec CamScanner

Par passage à la limite qd $n \longrightarrow +\infty$, on obtient d'après Théo de la convergence de sommes de Riemann (avec la continuité des φ et f)

on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)\right) \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \varphi\circ f\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)\right) \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \varphi\circ f\left(\frac{i}{n}\right)$$

20/38

$$\Rightarrow \varphi\left(\int_0^1 f\right) \leq \int_0^1 \varphi\circ f$$

Conf : De (i) et (ii), on en déduit que :

$$\varphi\left(\int_0^1 f\right) \leq \int_0^1 \varphi\circ f$$

Scanné avec CamScanner

(b) On suppose de plus que $f>0$; et on pose :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \int_0^1 f(z)^n dz$, $J_n = \sqrt[n]{a_n}$, $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Coe $f>0$ alors $\forall x \in [0,1]$, $f(x)^n > 0 \Rightarrow$ la suite $(b_n)_n$ est bien définie.

21/28

(b1) Sens de variation et limite de $(a_n)_{n\geq 1}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} - a_n = \int_0^1 f^n(x)\left(f(x)-1\right) dx$

Il vient que le signe de $(a_{n+1} - a_n)$ est celui de $x \mapsto f(x) - 1$ sur $[0,1]$. On en déduit que : $(a_n)_{n\geq 1}$ est :

* Croissante si $f \geq 1$ sur $[0,1]$.
* Décroissante si $f < 1$ sur $[0,1]$.

Pour la limite de la suite $(a_n)_n$ on procède de manière analogue :

Ainsi :

$(*)$ $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ si $f \leq 1$ sur $[0,1]$

$(**)$ $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ si $f \equiv 1$ sur $[0,1]$

$(***)$ $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ si $f > 1$ sur $[0,1]$

(b2)

Scanné avec CamScanner

(**) $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ si $f > 1$ [illegible]

(b.2) Sens de Variation et limite de $(b_n)_{n>0}$

(P1) Par definition avec $f > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $\underline{\underline{b_n > 0}}$

(P2) Par ailleurs : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on peut écrire :

$$\int_0^1 f(z)^{n+1}\,dz = \int_0^1 f(z)^{\frac{2n+2}{2}}\,dz = \int_0^1 f(z)^{\frac{n+2}{2}+\frac{n}{2}}\,dz$$

$$= \int_0^1 \left(f(z)^{\frac{n+2}{2}}\right) \times \left(f(z)^{\frac{n}{2}}\right) dz$$

Ainsi en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonct$^{\circ}$: $f^{\frac{n+2}{2}}$ et $f^{n/2}$ on obtient sur $[0,1]$

$$\left(\int_0^1 f(z)^{n+1}\,dz\right)^2 \leq \left[\int_0^1 \left(f(z)^{\frac{n+2}{2}}\right)^2 dz\right]\left[\int_0^1 \left(f(z)^{\frac{n}{2}}\right)^2 dz\right]$$

$$\Rightarrow \left(\int_0^1 f^{n+1}\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f^{n+2}\right)\left(\int_0^1 f^{n}\right)$$

soit alors $\quad a_{n+1}^2 \leq a_{n+2} \cdot a_n$

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow \quad a_{n+1}^2 \leq a_n a_{n+2} \Leftrightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \Leftrightarrow b_n \leq b_{n+1}$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \leq b_{n+1} \Leftrightarrow (b_n)_{n>0}$ est $\nearrow$.

(P3) : Posons $M = \underset{[0,1]}{\text{Max}} |f| = \underset{[0,1]}{\text{Max}} f$ car $f > 0$ et cont. sur $[0,1]$.

Il vient alors que : $\forall z \in [0,1]$, on a :

$f(z) \leq M \Rightarrow f(z)^{n+1} \leq M f(z)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \int_0^1 f^{n+1} \leq M \int_0^1 f^n \Rightarrow \dfrac{\int_0^1 f^{n+1}}{\int_0^1 f^n} \leq M$ 23/38

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \leq M \Rightarrow 0 < b_n \leq M$

On en déduit que $(b_n)_{n \geq 1}$ est Bornée.

<u>Conf 1</u> : De (P1) - (P3), on en déduit que (b_n) est une suite croissante et Majorée. Donc elle est convergente. D'où $\exists\, l \in \mathbb{R}$ /

$$\underline{l = \lim b_n} \qquad (L1)$$

Scanné avec CamScanner

(P4) Déterminons la limite ℓ de $(b_n)_{n\geq 0}$

<u>Objectif</u>: Montrons que $\lim b_n = \lim J_n = M$

où on rappel que $M = \max_{[0,1]} |f| = \max_{[0,1]} f$

(P4.(a)) $J_n \xrightarrow[n\to\infty]{} M$

on a : $\forall\ x \in [0,1]$, $f(x)^n \leq M^n \Rightarrow \int_0^1 f^n \leq M^n$

$\Rightarrow$ $\underline{J_n \leq M}$ (R1)

24/38

. Par ailleurs f étant cont sur le segm $[0,1]$ alors

$\exists\, x^* \in [0,1] \,/\, f(x^*) = M$ (R2)

. <u>soit $\varepsilon > 0$</u> : par continuité de f en x^*

alors $\exists$ un voisinage $V = [\alpha, \beta] \subset [0,1] \,/$

$x \in V$ et $|f(x) - f(x^*)| = |f(x) - M| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \forall\ x \in V$, $M - \varepsilon \leq f(x) \leq M + \varepsilon$ (R3)

$\Rightarrow \forall\ z \in V$, $f^n(z) \geq (M-\varepsilon)^n$

Scanné avec CamScanner

Par suite, on a : $\int_\alpha^\beta f(z)^n dz \geq \int_\alpha^\beta (M-\varepsilon)^n dz$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta f(z)^n dz \geq (\beta-\alpha)(M-\varepsilon)^n \quad (R4)$$

Comme $V = [\alpha, \beta] \subset [0,1]$ alors, on a :

$$\int_0^1 f(z)^n dz \geq \int_\alpha^\beta f^n \quad (R_5).$$

25/38

En combinant (R_4) et (R_5), on obtient :

$$\int_0^1 f^n \geq (\beta-\alpha)(M-\varepsilon)^n \Rightarrow I_n \geq (M-\varepsilon)(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq (M-\varepsilon)(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}}$ (R_6)

On a : $(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \Rightarrow (M-\varepsilon)(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} (M-\varepsilon)$

Par suite $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* / \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_0$

$$\Rightarrow (M-\varepsilon)(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}} \geq (M-\varepsilon) - \varepsilon = M - 2\varepsilon \quad (R7)$$

$(R6)$ et $(R7) \Rightarrow \forall n \geq n_0 \Rightarrow I_n \geq M - 2\varepsilon$ $(R8)$

Scanné avec CamScanner

$\int_-$: De (R1) et (R8), on en déduit

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_0$: 96/38

$2\varepsilon \leq I_n \leq M \leq M + 2\varepsilon$ (R9)

---

cela est vraie pour tout $\varepsilon > 0$

on déduit que $I_n \xrightarrow[n\infty]{} M$ (L2)

(b)) Mq : $\lim I_n = \lim b_n$

après (P4(a)), $I_n \xrightarrow[n\infty]{} \mathbb{R}$ par continuité et positivité de $f > 0$ sur $[0,1]$, on ~~en~~ déduit que $\ln(I_n) \xrightarrow[n\infty]{} \ln(M)$ (L3)

car $x \longmapsto \ln(x)$ est cont sur $]0,+\infty[$

) or ailleurs : $\ln(I_n) = \frac{1}{n}\ln(a_n) = \frac{1}{n}[\ln(a_n) - \ln(a_0)] + \frac{1}{n}\ln(a_0)$

(R10)

• D'une part d'après (L1) de (P3), on a :

$$\ln(b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln(\ell) \quad (R11)$$

• D'autre part, le Theo de la Moyenne de CESARO avec (R11), on obtient que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(b_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln(\ell) \quad (R12)$$

27/38

• $$\sum_{k=1}^{n} \ln(b_k) = \sum_{k=1}^{n-1}\left[\ln(b_k)\right] + \ln(b_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) + \ln(b_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left[\ln(a_{k+1}) - \ln(a_k)\right] + \ln(b_n)$$

$$= \ln(a_n) - \ln(a_1) + \ln(b_n)$$

SOMME TELESCOPIQUE

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(b_k) = \frac{1}{n}\left[\ln(a_n) - \ln(a_1)\right] + \frac{\ln(b_n)}{n} \quad (R13)$$

Scanné avec CamScanner

En combinant les égalités (R10) et (R13),

on trouve :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(b_k) = \ln(I_n) - \frac{\ln(a_1)}{n} + \frac{\ln(b_n)}{n} \quad (R14)$$

On a : $\frac{\ln(a_1)}{n} \xrightarrow[n\infty]{} 0$ et $\frac{\ln(b_n)}{n} \xrightarrow[n\infty]{} 0$

Par conséquent par passage à la limite qd $n \longrightarrow +\infty$ ds (R14) compte tenue de (L3) et (R12), nous obtenons l'égalité suivante :

$$\ln(\ell) = \ln(M) \iff \underline{\underline{M = \ell}} \quad (L4)$$

Conf : $b_n \xrightarrow[n\infty]{} \ell = M = \max_{z \in [0,1]} f(z)$

Exo 3 : Etude d'une fonct° définie par Integ

on Considère la fonction F par :

29/38

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2+\sin^2(t)}\,dt$$

1.a) Le domaine de définition de F $\mathcal{D}$.

Posons $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \dfrac{t^2}{t^2+\sin^2(t)}$

* $\forall x \in \mathbb{R}^*$, l'intervalle $[x, 2x]$ n'est pas réduit à un singleton et ne contient pas 0. On en déduit que $t \longmapsto f(t)$ est définie et même continue sur $[x, 2x]$ car $t \longmapsto \dfrac{t^2}{t^2+\sin^2(t)}$ est cont sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de telles fonctions (et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$)

Par conséquent $F(x)$ est bien définie $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

Scanné avec CamScanner

• Pour $x=0$, sur $[0;1]$ $t \longmapsto f(t)$ n'est pas définie, il en est de m̂ que F.

30/38

Conc: $\mathcal{D} := \mathcal{D}_F = \mathbb{R}^*$

(1.b) Montrons que : $\forall x \in \mathcal{D} = \mathbb{R}^*, F(-x) = -F(x)$

$\forall x \in \mathcal{D}$, $-x \in \mathcal{D}$, et, on a $F(-x) = \int_{-x}^{-2x} f(t)\,dt$.

En faisant le changement de variable $u = -t$

on obtient : $du = -dt$ et $\begin{cases} \text{si } t = -x \Rightarrow u = x \\ \text{si } t = -2x \Rightarrow u = 2x \end{cases}$

$$F(-x) = \int_{x}^{2x} f(-u)(-du) = -\int_{x}^{2x} f(u)\,du = -F(x).$$

En effet f est paire ($f(-t) = f(t), \forall t \neq 0$,

Ainsi : $\forall x \in \mathcal{D}$, $F(-x) = -F(x)$

On en déduit que F est Impaire.

Scanné avec CamScanner

2) Montrons que F est prolongeable par continuité en 0 !

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\forall t \in [x, 2x]$ $\sin^2(t) \geq 0$

$\Rightarrow \forall t \in [x, 2x]$, $t^2 + \sin^2(t) \geq t^2 > 0$

21/38

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{t^2 + \sin^2(t)} \leq \frac{1}{t^2} \Rightarrow f(t) \leq 1, \forall t \in [x, 2x]$$

D'où $\forall x > 0$, $|F(x)| = \left| \int_x^{2x} f(t)\,dt \right| \leq \int_x^{2x} |f(t)|\,dt$

$$\Rightarrow |F(x)| \leq \int_x^{2x} f(t)\,dt \leq \int_x^{2x} dt = x$$

$$\Rightarrow |F(x)| \leq x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0 \Rightarrow \lim_{0^+} F = 0$$

Par imparité de F, on obtient aussi $\lim_{0^-} F = 0$

Concl : $\lim_0 F = 0 \Rightarrow F$ est prolongeable par continuité en 0. Sa fonct° prolongée est :

$$\tilde{F} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } x \in \mathcal{D} \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

3.) Montrons que la fonction F ainsi prolongée est de classe C^1 et sens de variation de F

(i) La fonct° $t \longmapsto f(t) = \dfrac{t^2}{t^2+\sin^2(t)}$ est cont sur $\mathbb{R}^* = \mathcal{D}$ (car quotient de telle fonct° dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$).

on déduit que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

32/38

(ii) De plus, $\forall x \in \mathcal{D}$, on a :

$$F'(x) = 2f(2x) - f(x) = \frac{4x^2(x^2+\sin^2(x)+\sin^4(x))}{(4x^2+\sin^2(2x))(x^2+\sin^2(x))}$$

Il vient que : $\forall x \in \mathcal{D}$, $F'(x) > 0$

on en déduit que F est strictement $\nearrow$ sur chacun des intervalle $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$

(iii) Etude au voisinage de 0

Dérivabilité en 0.

Scanné avec CamScanner

obj : calculer $\lim_{x \to 0} \frac{\tilde{F}(x) - \tilde{F}(0)}{x} = \frac{\tilde{F}(x)}{x}$ (d1)

$\frac{\tilde{F}(x)}{x} = \frac{F(x)}{x} = \frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$. 33/38

D'après la Formule de Moyenne $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$\exists \theta_x \in]x, 2x[$ / $f(\theta) = \frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)dt = \frac{F(x)}{x}$ (d2)

$\lim_{\theta \to 0} f(\theta) = \lim_{\theta \to 0} \frac{\theta^2}{\theta^2 + \sin^2(\theta)} = \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{1 + \left(\frac{\sin(\theta)}{\theta}\right)^2} = \frac{1}{2}$

on obtient : $f(\theta) \xrightarrow[\theta \to 0]{} \frac{1}{2}$ (d3)

Par ailleurs par definition on a : $x \to 0 \Leftrightarrow \theta \to 0$

on en déduit d'après (d2) que :

$\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x} = \lim_{\theta \to 0} f(\theta) = \frac{1}{2}$ (d4)

Concl : De (d1) - (d4), on en déduit que $\tilde{F}$ est dérivable en 0 et $\tilde{F}(0) = \frac{1}{2}$ (d5)

Scanné avec CamScanner

Continuité de $\tilde{F}'$ en 0.

En (ii), on a trouvé : $\forall x \in \mathcal{D} = \mathbb{R}^*$

$$\tilde{F}'(x) = F'(x) = \frac{4x^2(x^2+\sin^2(x)+\sin^4(x))}{(4x^2+\sin^2(2x))(x^2+\sin^2(x))}$$

$\frac{24}{38}$

on en déduit que $F'(x) \underset{0}{\sim} \frac{4x^2(2x^2)}{(8x^2)(2x^2)} = \frac{8x^4}{16x^4}$

d'où $F'(x) \underset{0}{\sim} \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}$

Ainsi, on a : $\lim_{0} F'(x) = \frac{1}{2} = F'(0)$ (d6)

D'où F' (de $\tilde{F}'$) est cont en 0.

Conl : De (i), (ii) et (iii), on conclut que la fonction prolongée de F notée $\tilde{F}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. De plus, on a trouvé que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tilde{F}'(x) > 0$.

Ainsi $\tilde{F}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Rmq :

Scanné avec CamScanner

) Etude des limites de F aux bornes de $\mathcal{D}$.

après ce qui précède (imparité et prolongeme) suffit d'étudier la limite de F en $+\infty$.

$\boxed{1}$ $\forall x > 0$, $\forall t \in [x, 2x]$, on a :

$0 \leq \sin^2(t) \leq 1 \Rightarrow 0 + t^2 \leq \sin^2(t) + t^2 \leq 1 + t^2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{t^2 + \sin^2(t)} \leq \dfrac{1}{t^2} \Rightarrow \dfrac{t^2}{1+t^2} \leq f(t) \leq 1$

$\Rightarrow \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{1+t^2}\,dt \leq F(x) \leq x$

$\Rightarrow \underline{\forall x > 0}$: $x - \arctan(2x) + \arctan(x) \leq F(x) \leq x$ (I)

Par passage à la limite qd $x \longrightarrow +\infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient d'après le Theo des Gendarmes que :

$$F(x) \xrightarrow[x \longmapsto +\infty]{} +\infty.$$

Il s'ensuit que $F(x) \xrightarrow[x \longrightarrow -\infty]{} -\infty$.

[Imparité].

37/38

5) Allure de $\tilde{F}$ dans un repère orthogonal.

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe de $\tilde{F}$ dans ce repère.

) $\tilde{F}$ impaire $\Rightarrow (\mathcal{C})$ est symétrique par rapport à l'origine $O(0,0)$.

i) $\tilde{F}(0) = \frac{1}{2}$ et $\tilde{F}'(0) = 0$, on en déduit que une équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ en $O(0,0)$ est donnée par $(T_0) : y = \frac{1}{2}x$

iii) Etude des branche parabolique :

D'après l'inégalité (I), on obtient : $\forall x > 0$

$$1 - \frac{\arctan(2x)}{x} + \frac{\arctan(x)}{x} \leq \frac{F(x)}{x} \leq 1 \quad (II)$$

Par passage à la limite qd $x \longrightarrow +\infty$ avec le Td G, on trouve : $\frac{F(x)}{x} \xrightarrow[x \mapsto +\infty]{} 1$

- On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$F(x) - x = \int_x^{2x} f(t)dt - \int_x^{2x} dt = -\int_x^{2x} \frac{\sin^2(t)}{t^2 + \sin^2(t)} dt \quad (III)$$

Scanné avec CamScanner

De (III), on en déduit que : $\forall\, x>0$

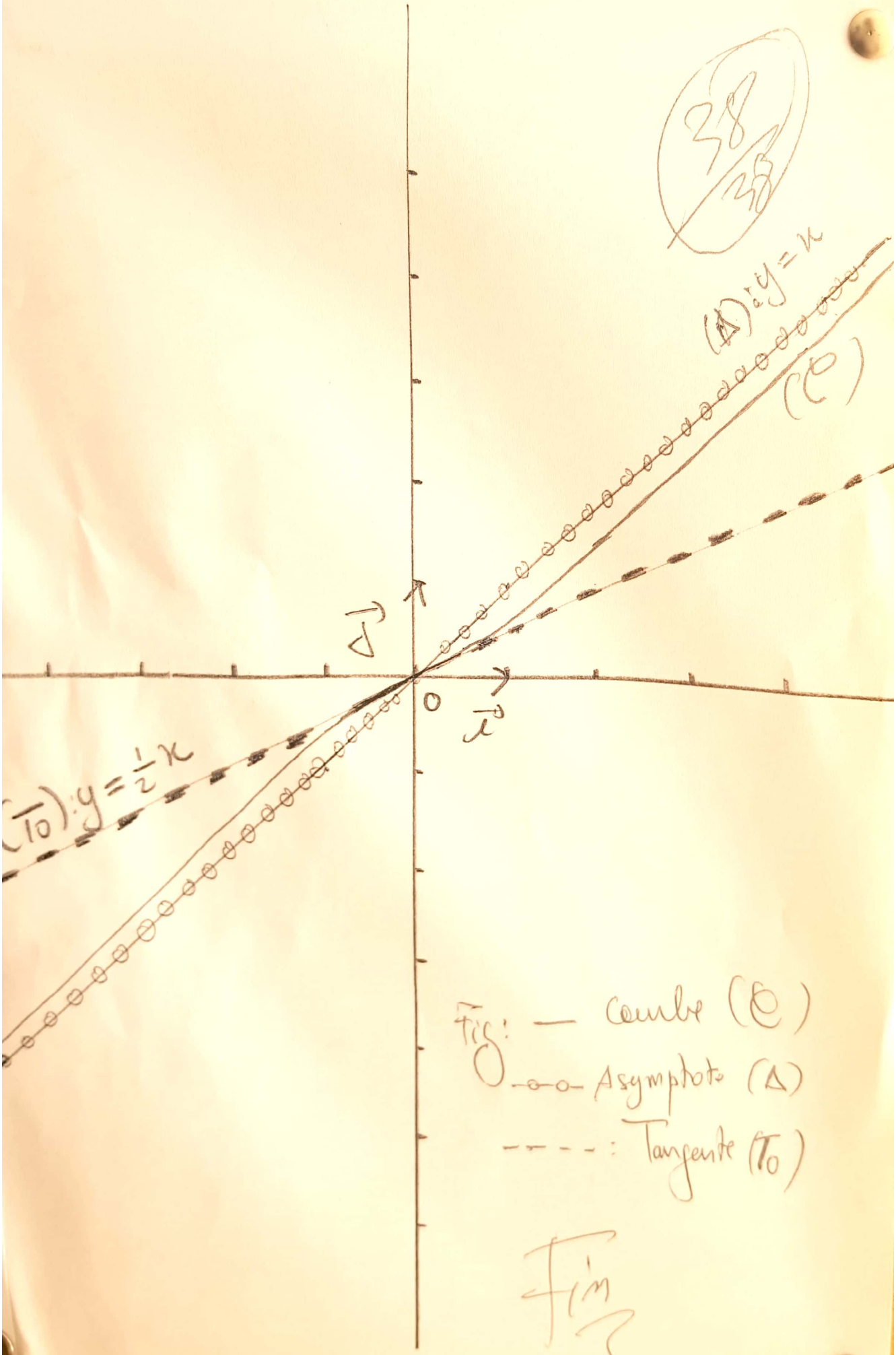
$$|F(x)-x| \leq \int_x^{2x} \left|\frac{\sin^2(t)}{t^2+\sin^2(t)}\right| dt = \int_x^{2x} \frac{\sin^2(t)}{t^2+\sin^2(t)}\, dt$$

$$\Rightarrow |F(x)-x| \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x} = \frac{1}{2x}$$

$$\Rightarrow |F(x)-x| \leq \frac{1}{2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \Rightarrow F(x)-x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

On en résume que $(\mathcal{C})$ admet au voisinage la droite $(\Delta): y=x$ (1ère bissectrice) comme asymptote (oblique). De plus avec (III) on en déduit que $F(x)-x \leq 0 \Rightarrow (\mathcal{C})$ est <u>en-dessous</u> de (Δ) au voisinage de $+\infty$.

Rmq : De manière analogue (et par imparité) il s'ensuit que $(\mathcal{C})$ est asymptote à (Δ) au voisinage de $-\infty$ tout en restant <u>au dessus de celle-ci</u> (cette fois ci).



Fin

Scanné avec CamScanner