Ecole Polytechnique de Ouagadougou
Niveau : CPGE (MPSI-A & MPSI-B)
Enseignant : Dr Serge L. OUEDRAOGO

Année Académique: 2022-2023
Semestre 2
Durée : 2heures

Evaluation d'Anglais

Read the following text very carefully and then write a précis using 1/4 of its original length, providing it with a title and indicating the number of words at the end; a margin of 10% is allowed:

The movement of intellectuals like university lecturers and researchers from one national setting to another facilitates the dissemination of knowledge and the broadening of cultural horizons. However, when one nation becomes a substantial net exporter of academic talent, a "brain drain" condition is said to occur. The presence of this condition suggests that the provider nation is at risk of depleting its natural supply of intellectual talent. (According to research reports presented on an international conference concerning the issue of brain drain, Africa generally loses over 20,000 intellectuals yearly.) This is doubtless one of the main constraints of under-development in the continent.

Education plays a big role in the growing problems of international migration of high level educated individuals from poor countries to the rich ones causing the so called brain drain to the poor countries. Many scholars who have been sent abroad for further studies or who are once out in one way or another, remain abroad leaving their family and workplace behind with the hope that a better life can be achieved elsewhere, despite their well-being at home. Expectations are usually not met as hopped. Thus the migrants are obliged to seek asylum, which deteriorates their lives, and become `ashamed` of themselves to return home empty-handed. Moreover, due to lack of employment and low salaries, people are tempted to look for better salaries elsewhere. In this case we talk about economic factors.

The second cause of migration is political instability in home countries, thus emigrants lose confidence in their governments and future prospects for a better life. These are individuals who may have difficulties because of their ethnic, cultural, religious belongings or being a member of opposition political groupings in their home countries. Migration is taking place in response to wars, political and social turmoil. What should Africa do to curve this flow of intellectuals within or beyond the continent?

Good governance at the national and international level, especially maintenance of reasonable security for peoples' lives and property is essential for economic progress, thus withholding political and economic emigrants, who blame their government's failure for political unrest and stagnant economic growth. Transparency in leadership is essential and should be maintained. Offering higher wages for `insiders` according to their qualifications is essential, instead of overestimating and hiring expatriates, which are more costly.

One of the most efficient means to prevent brain drain consists in fair economic development. African leaders should make sure their countries reach significant progress in per capita income. This implies that the fruit of the economic growth should be fairly distributed among all the social layers in the countries without regard to social, political, cultural or political position. In this respect, the youth should be put in the center of every development program in the continent, because they make up the vast majority of its overall population. It is illusory to seek to address the issue of brain drain without taking concrete actions in favor of young people who are the ones more involved in emigration.

Education also plays a powerful role especially in the growing problems of international migration. Therefore, offering these individuals the necessary education qualifications in their home countries, and expanding a better educational infrastructure may definitely prevent emigrants who are seeking a higher education abroad. **(547 words)**

By Ashenafi Gedamu, State University of Kassel, Germany, Nov 2002

Ecole Polytechnique de Ouagadougou
Classes Préparatoires d'Entrée dans les Grandes Ecoles
MPSI-PCSI

Année académique 2022-2023

DEVOIR DE PYTHON

Durée : 3 heures

Exercice 1

Initialisez deux entiers : Nb1 = 0 et Nb2 = 10.
Écrire une boucle affichante et incrémentant la valeur de Nb1 tant qu'elle reste inférieure à celle de Nb2.

Écrire une autre boucle décrémentant la valeur de Nb2 et affichant sa valeur si elle est impaire. Boucler tant que Nb2 n'est pas nul.

Exercice 2

Demander une chaîne de caractère à l'utilisateur et affiché chaque caractère de la chaîne en utilisant une boucle for.

Exercice 3

Écrire un programme qui demande à l'utilisateur un nombre et qui retourne la somme des chiffres qui le compose.

Exercice 4

Écrire un programme qui fait la somme des nombres pairs d'une liste de taille 10. Les 10 nombres devront être fournir au clavier par l'utilisateur.

ECOLE POLYTECHNIQUE DE OUAGADOUGOU	**MPSI & PCSI** **Durée : 02H**

EXAMEN D'AUTOMATIQUE I

CONNAISSANCES DU COURS

1. Citer les trois grandes parties d'un Système Automatisé de Production (SAP); dans chaque cas proposer un exemple.
2. Citer les trois types de capteurs ; dans chaque proposer un exemple.

EXERCICE 1

Effectuer les conversions ci-dessous ; Dans chaque cas justifier vos réponses.

1. $(45{,}125)_{10} = (\ ?)_2 = (\ ?)_8 = (\ ?)_{16}$
2. $(110011{,}011)_2 = (\ ?)_{10} = (\ ?)_8 = (\ ?)_{16}$
3. $(2A,\ B5)_{16} = (\ ?)_{10} = (\ ?)_8 = (\ ?)_2$

EXERCICE 2 : UNITE DE PERÇAGE

Cahier de charges

1. Fonctionnement

Un poste de perçage (figure 1) permet d'effectuer un trou automatiquement. Mais comme les pièces sont de tailles différentes, on a le choix entre deux cycles de perçage : simple ou avec débourrage.

En position initiale, la perceuse est en « position haute » (S_1) et le moteur de broche est arrêté.

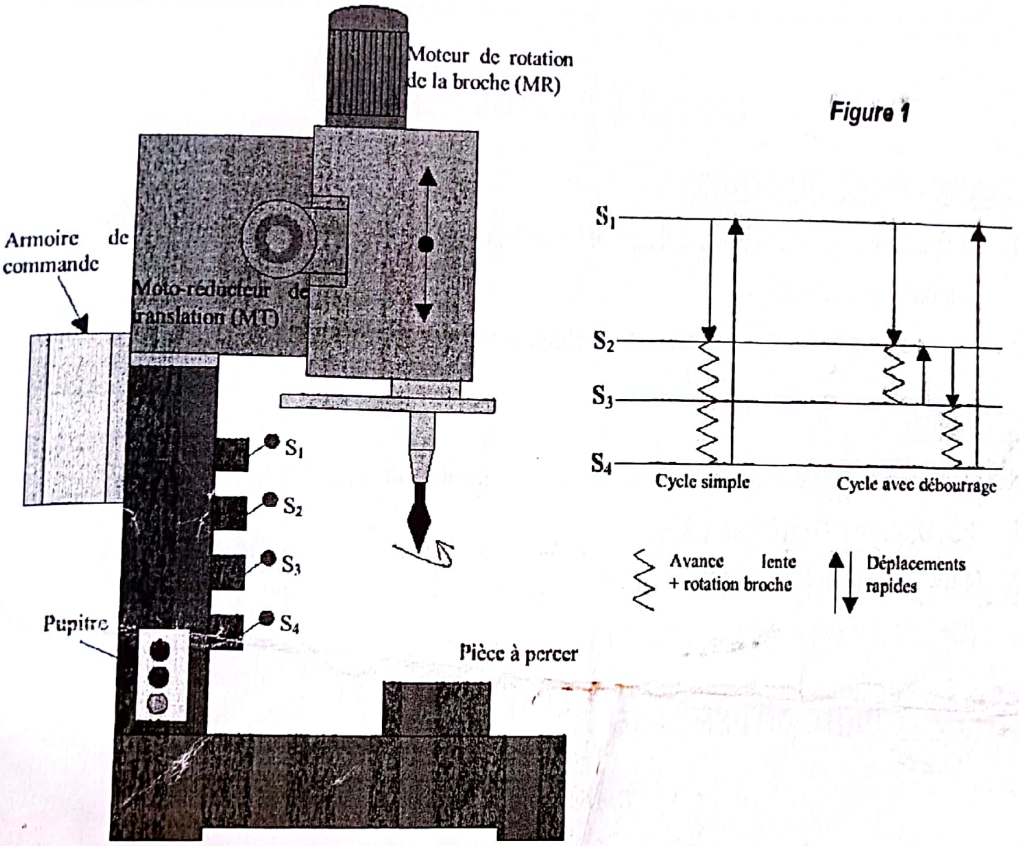
Le démarrage du cycle de fonctionnement se fait par le bouton poussoir « départ cycle » (dcy).

En fonction du cycle choisit (simple ou avec débourrage) grâce au bouton tournant « cycle » (cy), la perceuse effectue le cycle choisit comme indiqué ci-dessus. En fin de cycle, la perceuse doit être en position haute et le moteur de la broche arrêté.

- **KM1:** Marche Rotation broche
- **KM2:** Marche Translation vitesse Lente vers le Bas
- **KM3 :** Marche Translation vitesse Rapide vers le Bas
- **KM4 :** Marche Translation vers le Haut

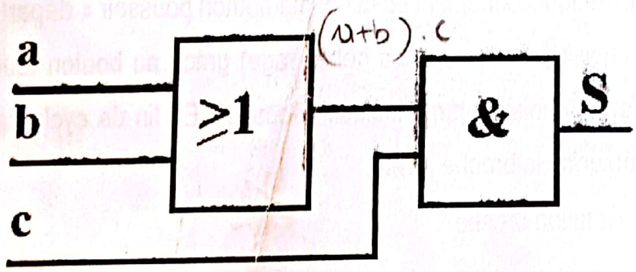
2. ***Travail demandé***
   a) Compléter le GRAFCET point partie Opérative (document réponse II page 3/4).
   b) Compléter le GRAFCET point de vue partie commande (document réponse III page 4/4).

3. ***Dispositif de perçage***



EXERCICE 3

Soit le logigramme suivant :



1. Trouver l'équation de S.
2. Compléter le chronogramme (document réponse I page 3/4)

Ecole Polytechnique de Ouagadougou

Classes Préparatoires d'entrée dans les Grandes Ecoles

Année académique 2022 – 2023

Niveau : 1re année MPSI –A&B

Enseignants : Dr S. OUOBA, Dr H. GUENGANE et Dr D BORO

Devoir de Physique 1 : Optique géométrique

Durée : 3 h

Exercice 1 :

Le système optique à étudier est un cylindre plein en verre transparent, homogène et d'indice n. Les extrémités du cylindre sont limitées par deux surfaces sphériques formant deux dioptres sphériques $DS_1(S_1,C_1)$ et $DS_2(S_2,C_2)$. Le système optique centré ainsi formé est placé dans l'air d'indice 1 (Figure 2).

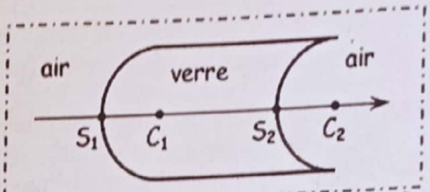


Figure 2

Les conditions de l'approximation de Gauss sont satisfaites.

On donne : $n = 3/2 = 1,5$, $\overline{S_1C_1} = \overline{S_2C_2} = R$ et $\overline{S_1S_2} = e = 3R$

Les résultats doivent être exprimés en fonction de R.

1- Quelle est la concavité de chaque dioptre ? Justifier la réponse. Convexe

2- Quelle est la nature de chaque dioptre ? Justification. calcul de V | V>0 convergent | V<0 divergent

3- a) Donner la relation de conjugaison du dioptre DS_1 avec origine au sommet pour le couple de points conjugués (A , A_1).

b) Quelles sont ses distances focales objet f_1 et image f'_1 ?

c) Quelle est sa vergence V_1 ?

4- a) Donner la relation de conjugaison du dioptre DS_2 avec origine au sommet pour le couple de points conjugués (A_1 , A').

b) Quelles sont ses distances focales objet f_2 et image f'_2 ?

c) Quelle est sa vergence V_2 ?

5- a) Déterminer la vergence V du système optique centré.

b) Quelle est sa nature ? Justifier.

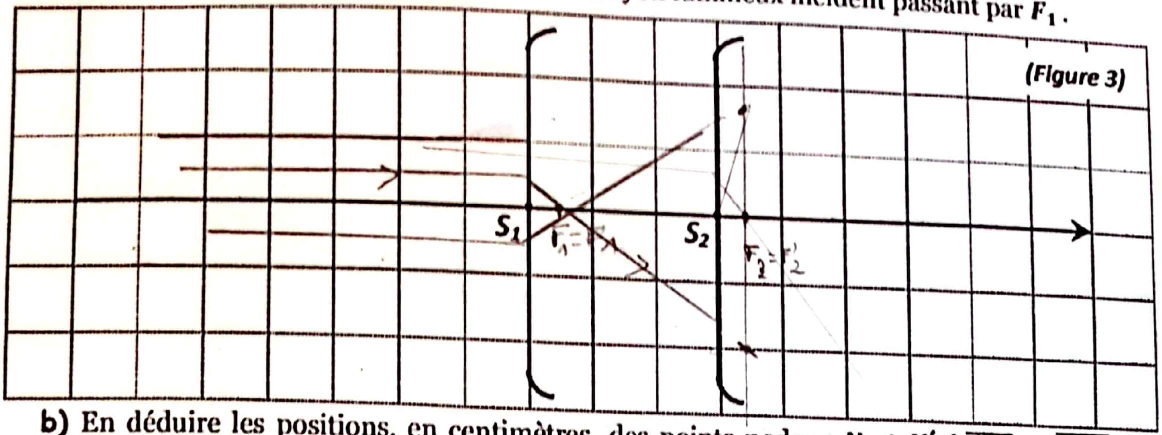
c) Quelles sont ses distances focales image f' et objet f.

6- Déterminer la position du foyer principal objet F du système par rapport à F_1.

7- Trouver la position du foyer image F' du système par rapport à F'_2.

D= C - (B'1 + B'2)

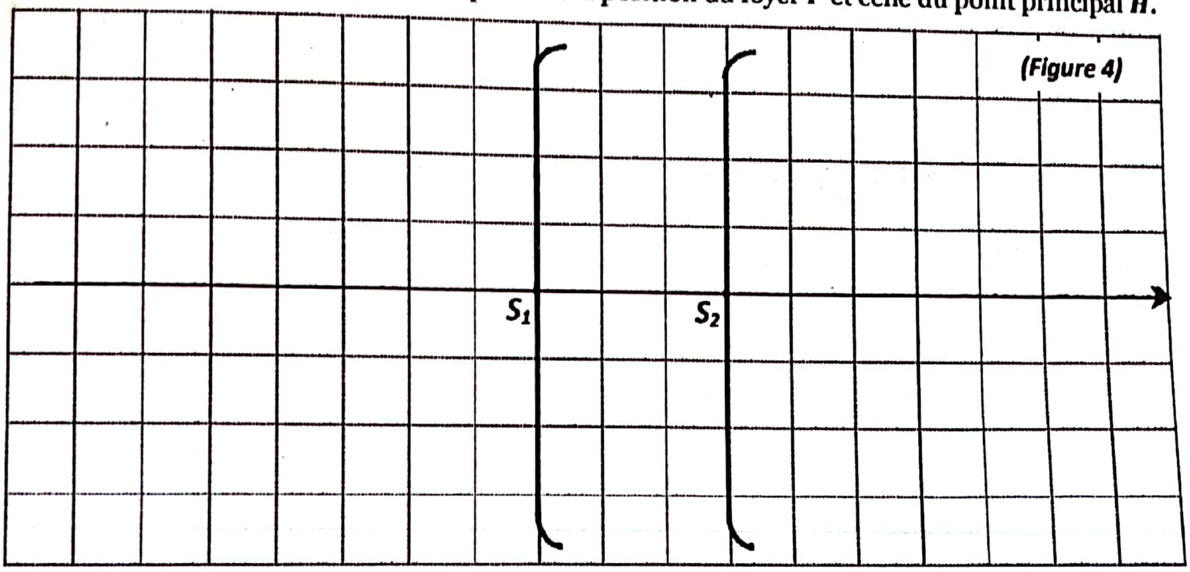
8- a) Sur la figure 3 à l'échelle unité, placer les points F_1, F'_1, F_2 et F'_2 pour $R = 1cm$. Ensuite tracer la marche, à travers le système, d'un rayon lumineux incident passant par F_1.



b) En déduire les positions, en centimètres, des points nodaux N et N' ($\overline{S_1N}$ et $\overline{S_2N'}$) du système optique. Que peut - on dire du centre optique O de ce système ?

c) Quelles sont alors les positions des points principaux H et H' ?

9- Sur la figure 4, retrouver géométriquement la position du foyer F et celle du point principal H.



Exercice 2 :

Soit un miroir sphérique dont le rayon de courbure est $R = \overline{SC} = 60\ cm$. Un objet (AB) vertical et réel, de hauteur $h = \overline{AB} = 10\ cm$, est placé sur l'axe optique à 30 cm du sommet du miroir.

On supposera que les conditions de l'approximation de Gauss sont réalisées.

1- Sans faire de calculs, quelle est la nature de ce miroir sphérique ? Justifier votre réponse.

2- Ecrire la relation de conjugaison, avec origine au sommet S, du miroir sphérique pour le couple de points conjugués (A , A').

3- a. Déterminer la position de l'image (A'B') par rapport à S.

b. Quelle est la nature de l'image (A'B') ? Justifier.

c. Quels sont le sens et la hauteur $h' = \overline{A'B'}$ de l'image (A'B') ?

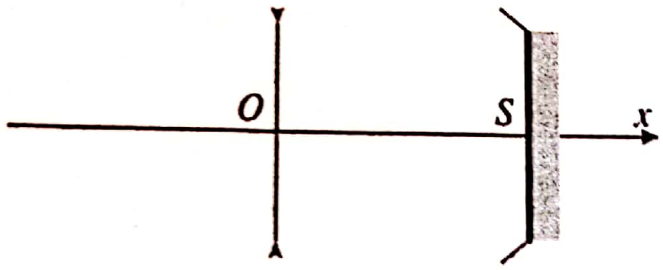
4 -Montrer qu'un miroir sphérique convexe ne peut jamais donner une image réelle d'un objet réel.

5. Retrouver géométriquement l'image (A'B'). (Echelle 1/10)

Exercice 3:

On considère un système catadioptrique constitué par une lentille divergente de focale image f' et centre O, placée devant un miroir concave de rayon R et sommet S, à distance $\overline{OS} = -f'$.

Pour les constructions et calculs, on prendra **$f' = -2R$.**



1) On repère un point A de l'axe optique, et son image A' par ce système catadioptrique, par les abscisses $x = \overline{OA}$ et $x' = \overline{OA'}$. Établir la relation de conjugaison :

$$6xx' - 5xR - 5x'R + 4R^2 = 0.$$

2) Justifier qualitativement, constructions graphiques à l'appui, l'équivalence du système, en termes de position des objets et images, à un miroir sphérique de sommet Σ et centre Ω.

3) Vérifier la qualité des constructions effectuées en calculant les positions de Σ et Ω

4) Retrouver la relation de conjugaison en utilisant les caractéristiques du miroir équivalent.

Devoir d'Analyse I

:04 heures

Les Documents, les Calculatrices, les Téléphones et les Ordinateurs sont strictement interdits.

Exercice 1 : Maniement et Connaissances des Concepts Fondamentaux (Minimum Vital)

$\boxed{1}$ Soit $\mathcal{I}$ une partie de $\mathbb{R}$ définie par : $\mathcal{I} = \{|a| + |b| \ : \ (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ 3[a][b] + 3[b] - 4[a] = 6\}$.
Où pour tout réel x, $[x]$ désigne la partie entière de x.

- Déterminer s'il existe $\inf(\mathcal{I})$, $\sup(\mathcal{I})$, $\min(\mathcal{I})$ et $\max(\mathcal{I})$.

$\boxed{2}$ Soient $c \in \mathbb{R}$, $m, p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\left[\frac{1}{m}\left[\frac{c}{p}\right]\right] = \left[\frac{c}{mp}\right]$.

$\boxed{3}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation, $(E) : \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3}\right) = 2 + \sqrt{1-x^2}$.

$\boxed{4}$ Montrer que le réel $\delta = \dfrac{\ln(6\sin(2550^o))}{\ln(2)}$ est irrationnel.

$\boxed{5}$ Montrer que l'ensemble $\{m - \ln(p) \mid (m,p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{6}$ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\begin{cases} f \circ f & \text{est croissante,} \\ f \circ f \circ f & \text{est strictement décroissante.} \end{cases}$

- Montrer que f est strictement décroissante.

$\boxed{7}$ Déterminer toutes les fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ Vérifiant : $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\quad x^2(f(x)+f(y)) = (x+y)f(f(x)y)$.

$\boxed{8}$ Soit $n \geqslant 2$ et $\alpha, \beta, x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, n réels positifs.

(a) On pose $x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Montrer que : $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i(x_{n+1} - x_i)} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{n+1}(x_{n+1} - x_i)}$.

(b) On suppose que $\alpha^n + \beta^n = 1$. Montrer que : $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1+\alpha^{2k}}{1+\alpha^{4k}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1+\beta^{2k}}{1+\beta^{4k}}\right) < \frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)}$.

$\boxed{9}$ Etudier la nature (convergence) de la suite numérique de terme général :

(a) $u_n = \sqrt{n}\ln\left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}\right)$; (b) $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$.

$\boxed{10}$ Soit $\delta \in]2, +\infty[$ et la suite $(q_n)_n$ définie par :
$q_0 = \delta;\qquad \forall n \in \mathbb{N},\quad q_{n+1} = q_n^2 - 2$.

- On pose $P_n = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{\prod_{k=0}^{m} q_k}$. Montrer que : $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\left(\delta - \sqrt{\delta^2 - 4}\right)$.

ent. Ensuite

Exercice 2 : Suites Réelles, Fonction Partie Entière, Approximation

Nous admettons que le nombre π n'est pas rationnel.

Posons

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n, p \in \mathbb{Z};\ x = n + 2\pi p\}.$$

1. Soit x et y des éléments de E. Montrer que $x + y \in E$ et que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a $nx \in E$.
2. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, posons $x_k = 2k\pi - E(2k\pi)$, (où $E(x)$ est la partie entière de x).
   (a) Montrer que pour tout k, on a $x_k \in]0,1[$ et $x_k \in E$.
   (b) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. En utilisant le principe des tiroirs, montrer qu'il existe des entiers k et l tels que $k \neq l$ et $|x_k - x_l| \leq \dfrac{1}{n}$.

   Remarque : Principe des tiroirs : Partager le segment $[0,1]$ en n intervalles de même longueur $\dfrac{1}{n}$ et remarquer que si deux nombres réels a et b appartiennent à un même intervalle de longueur $\dfrac{1}{n}$ alors on a $|a - b| \leq \dfrac{1}{n}$.

   (c) En déduire que pour tout nombre $\alpha > 0$, il existe un nombre $u \in E$ tel que $0 < u < \alpha$.
3. Soient x et α des nombres réels strictement positifs et soit u un nombre appartenant à E tel que $0 < u < \alpha$.
   (a) Notons p le plus grand entier tel que $pu \leq x$. Montrer que l'on a $0 \leq x - pu < \alpha$.
   (b) En déduire qu'il existe un nombre $v \in E$ tel que $|x - v| < \alpha$.
4. Soit un nombre $t \in [-1, 1]$ et soit x un nombre réel tels que $\cos(x) = t$.
   (a) Montrer qu'il existe une suite (x_n) tel que $x_n \in E$ quel que soit n et $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n) = x$.
   (b) En déduire qu'il existe une suite (a_n) telle que $a_n \in \mathbb{N}$ quel que soit n et $\lim\limits_{n \to +\infty} (\cos(a_n)) = t$.

Exercice 3 : Quelques Propriétés de la Borne Inférieure

Pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\mathcal{S}(a,b) = \frac{ab}{a+b}, \qquad \text{et} \qquad A_t = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = t\right\}.$$

1. Soient $a, b > 0$.
   (a) Étudier les variations de la fonction $f : x \longmapsto ax^2 + b(t-x)^2$, puis donner l'allure de sa courbe dans un repère orthogonal du plan.
   (b) En déduire que : $\inf\left\{ax^2 + by^2 \mid (x,y) \in A_t\right\} = \mathcal{S}(a,b)t^2$.
   (c) Cette borne inférieur est-elle le plus petit élément ?
2. Soient $a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$. A l'aide du résultat de la question précédente, montrer que :

$$\mathcal{S}(a_1, b_1)t^2 + \mathcal{S}(a_2, b_2)t^2 \leqslant \mathcal{S}(a_1 + a_2, b_1 + b_2)t^2.$$

3. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, et tous réels strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \mathcal{S}(a_k, b_k) \leqslant \mathcal{S}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k, \sum_{k=1}^{n} b_k\right).$$

FIN

Date : 16 Décembre 2022.

Ecole Polytechnique de Ouagadougou

Classes Préparatoires d'entrée dans les Grandes Ecoles

Année académique 2022 – 2023

Niveau : 1re année MPSI –A&B

Enseignants : Dr S. OUOBA, Dr H. GUENGANE et Dr D BORO

Devoir de Physique 1 : Optique géométrique

Durée : 3 h

Exercice 1 :

Le système optique à étudier est un cylindre plein en verre transparent, homogène et d'indice n. Les extrémités du cylindre sont limitées par deux surfaces sphériques formant deux dioptres sphériques $DS_1(S_1,C_1)$ et $DS_2(S_2,C_2)$. Le système optique centré ainsi formé est placé dans l'air d'indice 1 (Figure 2).

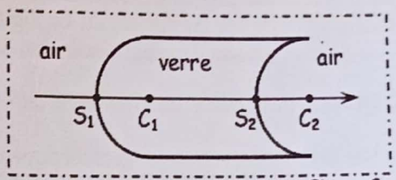


Figure 2

Les conditions de l'approximation de Gauss sont satisfaites.

On donne : $n = 3/2 = 1{,}5$, $\overline{S_1C_1} = \overline{S_2C_2} = R$ et $\overline{S_1S_2} = e = 3R$

Les résultats doivent être exprimés en fonction de R.

1- Quelle est la concavité de chaque dioptre ? Justifier la réponse.

2- Quelle est la nature de chaque dioptre ? Justification.

3- a) Donner la relation de conjugaison du dioptre DS_1 avec origine au sommet pour le couple de points conjugués (A , A_1).

b) Quelles sont ses distances focales objet f_1 et image f'_1 ?

c) Quelle est sa vergence V_1 ?

4- a) Donner la relation de conjugaison du dioptre DS_2 avec origine au sommet pour le couple de points conjugués (A_1 , A').

b) Quelles sont ses distances focales objet f_2 et image f'_2 ?

c) Quelle est sa vergence V_2 ?

5- a) Déterminer la vergence V du système optique centré.

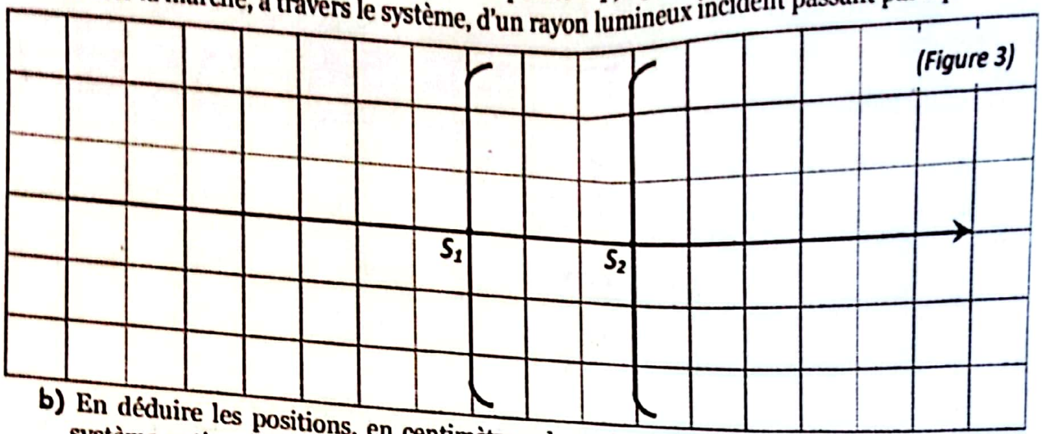
b) Quelle est sa nature ? Justifier.

c) Quelles sont ses distances focales image f' et objet f.

6- Déterminer la position du foyer principal objet F du système par rapport à F_1.

7- Trouver la position du foyer image F' du système par rapport à F'_2.

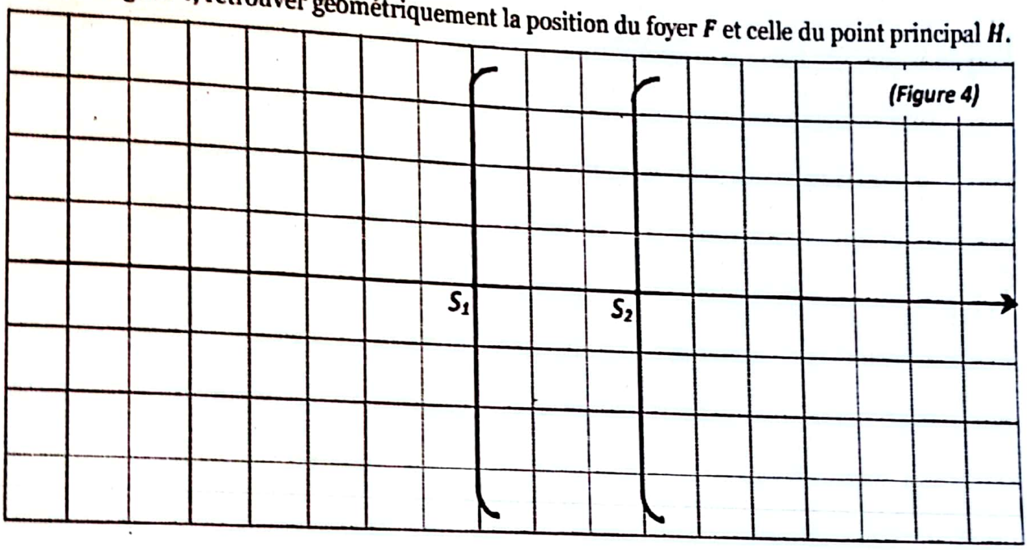
8- **a)** Sur la figure 3 à l'échelle unité, placer les points F_1, F'_1, F_2 et F'_2 pour $R = 1cm$. Ensuite tracer la marche, à travers le système, d'un rayon lumineux incident passant par F_1.



b) En déduire les positions, en centimètres, des points nodaux N et N' ($\overline{S_1N}$ et $\overline{S_2N'}$) du système optique. Que peut - on dire du centre optique O de ce système ?

c) Quelles sont alors les positions des points principaux H et H' ?

9- Sur la figure 4, retrouver géométriquement la position du foyer F et celle du point principal H.



Exercice 2 :

Soit un miroir sphérique dont le rayon de courbure est $R = \overline{SC} = 60\ cm$. Un objet (AB) vertical et réel, de hauteur $h = \overline{AB} = 10\ cm$, est placé sur l'axe optique à 30 cm du sommet du miroir.

On supposera que les conditions de l'approximation de Gauss sont réalisées.

1- Sans faire de calculs, quelle est la nature de ce miroir sphérique ? Justifier votre réponse.

2- Ecrire la relation de conjugaison, avec origine au sommet S, du miroir sphérique pour le couple de points conjugués (A , A').

3- a. Déterminer la position de l'image (A'B') par rapport à S.

b. Quelle est la nature de l'image (A'B') ? Justifier.

c. Quels sont le sens et la hauteur $h' = \overline{A'B'}$ de l'image (A'B') ?

Année académique : 2022-2023
Propagation du signal
Dr S.M LOMPO/KOUDOUGOU

Devoir surveillé de propagation du signal

Durée de l'épreuve : 1h30

L'usage de la calculatrice est autorisé. L'énoncé de ce devoir comporte 2 pages.

- La numérotation des exercices doit être respectée.
- Les résultats doivent être systématiquement encadrés.
- Les pages doivent être numérotées de la façon suivante : n°page courante/nombre total de pages.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler des commentaires. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.
- Tout calcul numérique doit être précédé d'un calcul littéral dans lequel les grandeurs intervenant sont clairement identifiables.
- Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené à prendre.

Exercice 1 : Cuve à ondes

La figure représente la surface d'une cuve à onde éclairée en éclairage stroboscopique.

L'onde est engendrée par un vibreur de fréquence $f = 16\ Hz$.

L'image est claire là où la surface de l'eau est convexe, foncée là où elle est concave.

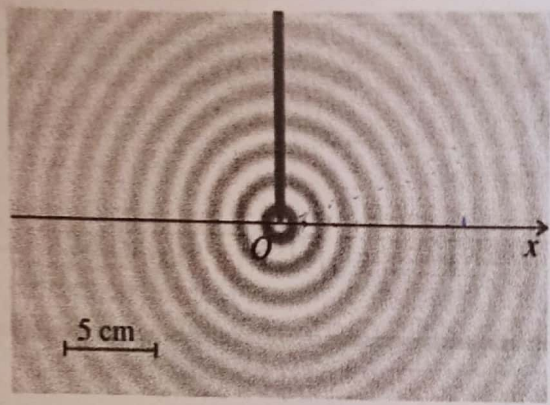
1. En mesurant sur la figure, déterminer la longueur d'onde.

2. En déduire la célérité de l'onde.

3. On suppose l'onde sinusoïdale, d'amplitude A constante et de phase initiale nulle en O.

Écrire le signal $s(x,t)$ pour $x > 0$ et pour $x < 0$.

4. Expliquer pourquoi A n'est pas, en fait, constante.



0,3 cm

Exercice 2 : Onde sinusoïdale

Une onde sinusoïdale se propage dans la direction des x négatifs avec la célérité c.

En $x = 0$, on a :

$$s(x = 0, t) = s_0 \cos(\frac{2\pi t}{T})$$

Donner l'expression de $s(x, t)$ et tracer l'allure des variations spatiales du signal à $t = T/4$

$S(o,t) = S(o, t - \frac{x}{c}$

École Polytechnique de Ouagadougou
Classes Préparatoires d'Entrée dans
les Grandes Écoles
MPSI

Année académique 2022-2023

Examen d'analyse 1
Lundi 13 février 2023
Durée: 4 heures

Tous les documents et les calculatrices sont interdits.

Exercice N°1

NB: Les parties 1), 2) et 3) de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit f une application continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que la fonction $f(x+1)-f(x)$ admet dans $\mathbb{R}$ une limite finie l quand x tend vers $+\infty$. Montrer que: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = l$.

2. Soit l'application $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]0;1[$ telle que $f(0)=0$ et $\forall x\in\,]0;1[,\ f(x)>0$.

   a) Montrer qu'il existe $c\in\,]0;1[$ tel que
   $$\frac{2f'(c)}{f(c)} = \frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$$

   b) Existe-t-il $d\in\,]0;1[$ tel que $\dfrac{3f'(d)}{f(d)} = \dfrac{f'(1-d)}{f(1-d)}$.

3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et
$$f_n:\ \begin{array}{rcl}]-1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{n-1}\ln(x+1) \end{array}$$

   Montrer que f_n est n fois dérivable sur $]-1;+\infty[$, et $\forall x\in\,]-1;+\infty[$,
$$f_n^{(n)}(x) = (n-1)!\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+x)^k}.$$

Exercice N°2.

Soit f une application dérivable sur $]0;1[$ telle que $f(0)=0$ et $f(1)=1$ et admettant une dérivée à droite nulle en 0 et une dérivée à gauche nulle en 1. On souhaite montrer que cette application admet un point fixe dans l'intervalle $]0;1[$, c'est-à-dire montrer qu'il existe $\alpha\in\,]0;1[$ tel que $f(\alpha)=\alpha$.

a) Donner un exemple de fonction vérifiant les hypothèses de ce exercice (On pourra s'intéresser aux fonctions polynômiales).

b) Soit g l'application définie sur $]0;1[$ par

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)-1}{x-1}.$$

Calculer $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim_{x\to 1^-} g(x)$; en déduire que g est prolongeable par continuité sur $[0;1]$.

c) Montrer qu'il existe $\alpha \in [0;1]$ tel que

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}.$$

En déduire que $f(\alpha) = \alpha$.

d) Montrer qu'il n'y a pas nécessairement unicité du point fixe en donnant un exemple de fonction vérifiant les hypothèses de cet exercice et possédant deux points fixes (On pourra s'intéresser aux fonctions polynômiales).

Exercice N°3.

Soit I un intervalle ouvert contenant les nombres 0 et 1 et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Posons $p = f(1) - f(0)$.

1. On définit la fonction $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ en posant:

$$g(x) = \begin{cases} f'(0) & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{f(x)-f(0)}{x} & \text{si } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

   a) Montrer que g est continue sur le segment $[0;1]$. En déduire que si u est un nombre réel compris entre $f'(0)$ et p, il existe un nombre $c \in [0;1]$ tel que $g(c) = u$.

   b) Montrer que si u est un nombre réel compris entre $f'(0)$ et p, il existe un nombre $a \in [0;1]$ tel que $f'(a) = u$.

2. On définit la fonction $h : [0;1] \to \mathbb{R}$ en posant:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} & \text{si } 0 \leq x < 1. \\ f'(1) & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

   Montrer que h est continue sur le segment $[0;1]$. En déduire que si v est un nombre réel compris entre p et $f'(1)$, il existe un nombre $b \in [0;1]$ tel que $v = f'(b)$.

3. Soit k un nombre réel compris entre $f'(0)$ et $f'(1)$. Montrer qu'il existe un nombre $c \in [0;1]$ tel que $k = f'(c)$.

fonction de $\log x$ en prenant en compte la présence d'éventuels

École Polytechnique de Ouagadougou
Classes préparatoires aux Grandes Ecoles
MPSI - PCSI

Année académique 2022-2023

Examen du premier semestre
Épreuve de français
Date : février 2023
Durée : 2 heures

Sujet (20 points)

Texte : Condition première d'un travail non servile

Il y a dans le travail des mains et en général dans le travail d'exécution, qui est le travail proprement dit, un élément irréductible de servitude que même une parfaite équité sociale n'effacerait pas. C'est le fait qu'il est gouverné par la nécessité, non par la finalité. On l'exécute à cause d'un besoin, non en vue d'un bien ; « parce qu'on a besoin de gagner sa vie », comme disent ceux qui y passent leur existence. On fournit un effort au terme duquel, à tous égards, on n'aura pas autre chose que ce qu'on a. Sans cet effort, on perdrait ce qu'on a. Mais, dans la nature humaine, il n'y a pas pour l'effort une autre source d'énergie que le désir. Et il n'appartient pas à l'homme de désirer ce qu'il a. Le désir est une orientation, un commencement de mouvement vers quelque chose. Le mouvement est vers un point où on n'est pas. Si le mouvement à peine commencé se boucle sur le point de départ, on tourne comme un écureuil dans une cage, comme un condamné dans une cellule. Tourner toujours produit vite l'écœurement. L'écœurement, la lassitude, le dégoût, c'est la grande tentation de ceux qui travaillent, surtout s'ils sont dans des conditions inhumaines, et même autrement. Parfois cette tentation mord davantage les meilleurs.

Exister n'est pas une fin pour l'homme, c'est seulement le support de tous les biens, vrais ou faux. Les biens s'ajoutent à l'existence. Quand ils disparaissent, quand l'existence n'est plus ornée d'aucun bien, quand elle est nue, elle n'a plus aucun rapport au bien. Elle est même un mal. Et c'est à ce moment même qu'elle se substitue à tous les biens absents, qu'elle devient en elle-même l'unique fin, l'unique objet du désir. Le désir de l'âme se trouve attaché à un mal nu et sans voile. L'âme est alors dans l'horreur (...)

Toute condition où l'on se trouve nécessairement dans la même situation au dernier jour d'une période d'un mois, d'un an, de vingt ans d'efforts qu'au premier jour a une ressemblance avec l'esclavage. La ressemblance est l'impossibilité de désirer une chose autre que celle qu'on possède, d'orienter l'effort vers l'acquisition d'un bien. On fait effort seulement pour vivre (...) Tout est intermédiaire dans cette existence, tout est moyen, la finalité ne s'y accroche nulle part. La chose fabriquée est un moyen ; elle sera vendue. Qui peut mettre en elle son bien ? La matière, l'outil, le corps du travailleur, son âme elle-même, sont des moyens pour la fabrication. La nécessité est partout, le bien nulle part. Il ne faut pas chercher de causes à la démoralisation du peuple. La cause est là ; elle est permanente ; elle est essentielle à la condition du travail.

Simone Weil (1951), *La condition ouvrière*.
Extrait de conférence devant un auditoire ouvrier le 23 février 1937.

Travail à faire

Exercice 1 : Vous résumerez ce texte en 90 mots. Une marge de 10% en plus ou en moins sera tolérée.

Exercice 2 : Analysez les propos suivants de Simone WEIL, parlant du travail ouvrier : « *L'écœurement, la lassitude, le dégoût, c'est la grande tentation de ceux qui travaillent, surtout s'ils sont dans des conditions inhumaines, et même autrement. Parfois cette tentation mord davantage les meilleurs.* » Rédigez votre texte en deux pages au plus, introduction et conclusion brèves y comprises.

ECOLE POLYTECHNIQUE DE OUAGADOUGOU

Examen de Physique 1 :

Classe : MPSI A

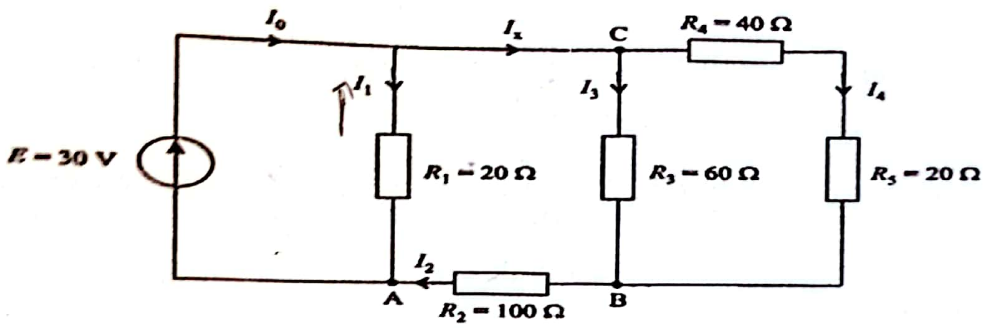
Durée : 03 H 00

Partie 1 : Electrocinétique (12pts)

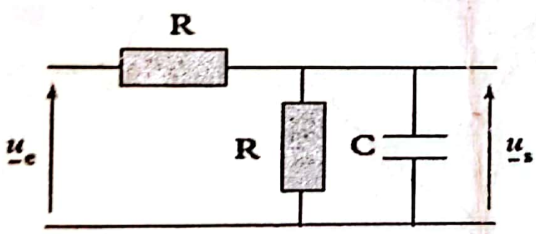
Exercice 1 :(6 pts)

Dans le schéma du circuit ci-dessous, déterminer les courants dans les diverses branches du circuit.

NB : Veuillez préciser les lois ou les théorèmes utilisés pour la détermination de chaque intensité.



Exercice 2 : (6 pts)



Considérons le filtre de la figure ci-dessous en sortie ouverte.

1) Sans calcul, prévoyez la nature de ce filtre.

2) Calculez sa fonction de transfert en posant $\omega_0 = \dfrac{2}{RC}$ et $x = \dfrac{\omega}{\omega_0} = \dfrac{RC\omega}{2}$

3) Donner les expressions du gain en Décibel(dB) et de la phase ϕ de la tension u_s.

4) Donner l'expression de la bande passante.

5)

a. Déterminer les limites du gain en décibel aux basses fréquences ($x \to 0$), puis aux hautes fréquences ($x \to \infty$).

b. En déduire les asymptotes correspondantes.

6) Tracer le diagramme du gain G en fonction de $\log x$ en prenant en compte la présence d'éventuels extrema.

7)

a. Déterminer les limites de la phase aux basses fréquences ($x \to 0$), puis aux hautes fréquences ($x \to \infty$).

b. En déduire les asymptotes correspondantes.

8) Tracer le diagramme de la phase φ en fonction de $\log x$

<u>Partie 2 :</u> Mécanique (08 pts)

<u>Exercice 1 (3pts)</u>

Dans un repère R0, M a pour rayon vecteur $\overrightarrow{OM} = 2(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)$.

1) Déterminer les coordonnées cylindriques de M et exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le repère associé aux coordonnées cylindriques

2) Déterminer les coordonnées sphériques de M et exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le repère associé aux coordonnées sphériques.

<u>Exercice 2 : (5pts)</u>

Un point matériel M se déplace le long d'une hélice circulaire. Son mouvement est donné en coordonnées cylindrique (r, θ, z) ou R, h et ω sont des constantes.

$$\begin{cases} r = R \\ \theta = \omega t \\ z = ht \end{cases}$$

1) Exprimer dans la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ en coordonnées cylindriques :

a) Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$

b) Le vecteur vitesse du point M ; en déduire son module ;

c) Le vecteur accélération du point M.

2)

a) Déterminer les coordonnées cartésiennes x(t), y(t) et z(t) du point M.

b) Déterminer son hodographe de pôle O.

Ecole Polytechnique de Ouagadougou (EPO)
Classes Préparatoire aux Grandes Ecoles
(CPGE)

Année Université 2022-2023

Contrôle des connaissances

Mathématiques-Physique-Sciences de l'Ingénieur (MPSI) :

L1S1 / Session normale

Composition de Chimie : 3 H

I°) <u>Questions de cours</u> (5 points)

1°) Donner les noms des quatre séries du spectre d'émission de l'hydrogène.

2°) Quels sont les noms réels des nombres quantiques n, l, ml, ms de l'électron dans le modèle de Hund-Milliken.

3°) Définir les termes suivants : système fermé, système ouvert, transformation isochore, transformation isobare.

4°) Définir l'état d'équilibre d'un système ?

II°) Exercices

Exercice 1

1°) Etablir pour un atome hydrogénoïde (noyau de charge + Ze autour duquel gravite un électron), les formules donnant :

a°) Le rayon de l'orbite de rang n.

b°) L'énergie du système noyau-électron correspondant à cette orbite.

c°) Exprimer le rayon et l'énergie totale de rang n pour l'hydrogénoïde en fonction des mêmes grandeurs relatives à l'atome d'hydrogène.

2°) Calculer en eV et en joules, l'énergie des quatre premiers niveaux de l'ion hydrogénoïde Li^{2+}, sachant qu'à l'état fondamental, l'énergie du système noyau-électron de l'atome d'hydrogène est égale à -13,6 eV.

3°) Quelle énergie doit absorber un ion Li^{2+}, pour que l'électron passe du niveau fondamental au premier niveau excité.

4°) Si cette énergie est fournie sous forme lumineuse, quelle est la longueur d'onde λ_{1-2} du rayonnement capable de provoquer cette transition ?

On donne : Li (Z=3) 1eV= $1,6.10^{-19}$ Joules ; h= $6,62.10^{-34}$ J.s ; c = 3.10^{8} m.s^{-1}

Exercice 2

1°) Un vase clos de volume 35 litres contient 54 g de dioxygène O_2 à 25 °C. Quelle est la pression Po qui règne dans le vase ?

2°) A 25°C, on comprime le gaz selon un processus réversible jusqu'à ce que la pression dans le vase soit multipliée par 8. Calculer le travail engendré par la compression du gaz.

3°) On chauffe à pression constante de 1atm, de 0°C à 25°C, 22,4 g de monooxyde de carbone CO.

a°) Calculer la chaleur absorbée par CO ainsi que le travail effectué par ce gaz.

b°) En déduire la variation d'énergie interne ΔU du gaz.

On donne C = 12, O = 16 et $Cp(CO) = 26{,}86 + 6{,}97.10^{-3}T$ en $J.mol^{-1}K^{-1}$.

Exercice 3

Une mole de N2(g), considérée comme un gaz parfait est portée de 20°C à 100°C.

Calculer la quantité de chaleur Q reçue par ce système, sa variation d'énergie interne et sa variation d'enthalpie dans les 2 cas suivants :

1°) lorsque la transformation est isochore

2°) lorsque la transformation est isobare On donne Cp (N2, g) = 33 $J.\ mol^{-1}.K^{-1}$ et R = 8,31 $J.\ mol^{-1}.K^{-1}$

Exercice 4

La combustion totale d'une mole de méthanol liquide dans les conditions standards de pression et de température, libère 725,2 kJ selon la réaction suivante :

$$CH_3OH\ (l) + 3/2\ O_2\ (g) \rightarrow CO_2\ (g) + 2H_2O\ (l).$$

1°) Calculer l'enthalpie molaire standard de formation du méthanol liquide.

On donne les enthalpies molaires standards de formations de $H_2O(l)$ et de $CO_2(g)$.

$\Delta Hf°,298\ (H_2O, l) = -285{,}2\ kJ.mol^{-1}$ $\Delta Hf°,298\ (CO_2, g) = -393{,}5\ kJ.mol-1$

2°) Calculer l'enthalpie de cette réaction à 60°C.

On donne les chaleurs molaires à pression constante :

Cp (H2O, l) = 75,2 $J\ mol^{-1}K^{-1}$

Cp (CH3OH, l) = 81,6 $J\ mol^{-1}K^{-1}$

Cp (O2, g) = 34,7 $J\ mol^{-1}K^{-1}$

Cp (CO2, g) = 36,4 $J\ mol^{-1}K^{-1}$

Ecole Polytechnique de Ouagadougou
Classes Préparatoires aux Grandes Écoles
(CPGE)

Année universitaire 2022 - 2023

Contrôle des connaissances

Mathématiques-Physique-Sciences de l'Ingénieur(MPSI) :
L1S1 / Session normale

Devoir d'Atomistique : 3 H

A°) Structure de la matière (10 points)

Exercice 1

On suppose qu'un électron parcourt une orbite circulaire de rayon r.

1°) Quelle est la condition pour que l'onde associée soit stationnaire ?

2°) Retrouver à l'aide de ce modèle la condition de quantification de Bohr.

3°) Soit Ec = 13,52 eV l'énergie cinétique de cet électron, correspondant au nombre quantique n = 1 ; calculer dans ce cas le rayon de l'orbite.

m_e : masse électron $= 9{,}11\ 10^{-31}$ kg

Exercice 2

L'existence du spectre de l'atome d'hydrogène soumis à une irradiation lumineuse a été prouvée expérimentalement.

Les nombres d'ondes des diverses raies sont empiriquement liées par la relation de Balmer généralisée par Ritz.

1°) Ecrire (sans démontrer) l'expression de la longueur d'onde $\lambda_{p\rightarrow n}$ correspondant à une raie d'émission d'un niveau **p** vers un niveau **n,** en fonction de **R_H**, **n** et **p**, n et p sont éléments de **N***.

2°) Etablir à partir de cette formule dite de Ritz, l'expression de l'énergie **En** d'un niveau **n**. Pourquoi dit-on que cette énergie est quantifiée ?

3°) Calculer en joule (J) et eV, l'énergie nécessaire pour ioniser l'atome d'hydrogène pris à l'état fondamental.

4°) Quelle est la valeur de la première raie de la série de Paschen (**n=3 ↔ p=4**) de l'atome d'hydrogène ? Dans quel domaine du spectre se situe-t-il ?

5°) Calculer la longueur d'onde correspondant à cette raie dans le cas de l'ion **Li^{2+}**.

Données : **$R_H = 1{,}097.10^{7}\ m^{-1}$; $h = 6{,}63.10^{-34}$ J.s ; $c = 3.10^{8}\ m.s^{-1}$; $_1H$; $_3Li$.**

Exercice 3

Soit l'élément de Z = 33.

1°) Donner la configuration électronique de l'atome de cet élément dans son état fondamental.

2°) Placer cet élément dans le tableau périodique : période (numéro de ligne) famille (numéro de colonne) et bloc (élément *s*, *p*, *d* ou *f*).

3°) Pour l'argent Z = 47, on note un seul électron de valence du type *s*.

a°) Donner la configuration électronique de l'atome d'argent dans son état fondamental.

b°) Préciser la règle de remplissage qui n'est pas respectée ici.

c°) Placer cet élément dans le tableau périodique : période (numéro de ligne) famille (numéro de colonne).

B. Liaison chimique (10 points)

Exercice 1

On considère le monosulfure de carbone CS. Le moment dipolaire de cette molécule est de 1,958 D et sa longueur de liaison expérimentale est de 1,535 Å.

1°) Quel est le sens de polarisation dans cette molécule ? Justifier.

2°) Calculer la charge partielle (**en coulomb**) portée par chaque atome.

3°) Calculer le caractère ionique partiel de cette molécule.

Exercice 2

1°) Donner le diagramme énergétique des orbitales moléculaires (OM) de la molécule de N_2 et CN.

2°) En déduire les propriétés magnétiques de N_2 et CN.

3°) Comparer la stabilité des espèces chimiques suivantes en justifiant vos réponses.

N_2 et N_2^+ ; CN et CN^-.

Exercice 3

1°) Rappeler les principaux résultats obtenus lors de l'étude de la formation de la liaison H-H.

2°) Quelles sont les orbitales moléculaires qui peuvent se former lors du recouvrement des orbitales s-s ; s-p et p-p.

3°) Représenter l'aspect spatial de ces orbitales moléculaires

NB : <u>Le tableau périodique n'est pas autorisé</u>

« Bon courage »

Devoir de Python

Exercice 1 :

Ecrire un programme python qui affiche le double des nombres paire d'un tableau de 10 entiers. Le programme demandera à l'utilisateur de saisir successivement les 10 entiers au clavier.

Exercice 2 :

Ecrire un programme python qui affiche la somme des 100 premiers nombres entiers premiers.

Exercice 3 :

Ecrire un programme en langage python qui demande à l'utilisateur d'entrer une chaine de caractère et qui affiche chaque caractère de la chaîne en utilisant une boucle.

Exercice 4 :

Ecrire un algorithme en Python qui demande à l'utilisateur de saisir un entier n et qui affiche à l'écran un triangle d'étoiles isocèle dont le nombre de ligne sera exactement à comme l'indique le design suivant :

```
         *           n=1 ; u=1
        ***          n=2 ; u=3
       *****         n=3 ; u=5
      *******        n=4 ; u=7
     *********
    ***********
   *************
  ***************
 *****************
*******************
```

19 colonnes
10 lignes

EPO-CPGE/MPSI

Année académique 2022-2023

Algèbre 1 Devoir 1
Durée: 3h

Exercice 1. *(6 points)*

1. On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par:
$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 3(x - y).$$
   (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer pour chaque $x \in \mathbb{R}$, le cardinal de la classe d'équivalence de x dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur $\mathbb{R}^2$ par $(a, b)\mathcal{R}\,(a', b') \Longleftrightarrow [\ a < a' \quad \text{ou} \quad (a = a' \quad \text{et} \quad b < b')\ ]$.
   (a) Montrer que $\mathcal{R}$ définit une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Ordonner $(1, 5), (3, 6), (1, -2)$ et $(4, 6)$.

Exercice 2. *(6 points)*

1. Soit E un ensemble non vide et A et B deux parties de E.

   Montrer que si $A \cap B = \varnothing$, alors pour toute partie X de E
$$(X \cup A) \cap (X \cup B) = X$$
   Soit l'application $f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)^2 \\ \quad X \longmapsto (X \cup A, X \cup B) \end{cases}$.
   (b) Montrer que f n'est pas surjective.
   (c) Montrer que f est injective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.
2. On pose $s = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et $p = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.
   (a) Montrer que $s = 2p$.
   (b) En calculant $p \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, déterminer la valeur de p et en déduire celle de s.
   (c) En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 3. *(8 points)*

Partie I - Étude d'une application
On définit une application f de la manière suivante :
$$f : \begin{cases} \mathbb{C}^* & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longrightarrow z + \frac{1}{z} \end{cases}$$

1. Déterminer les antécédents éventuels du nombre complexe i par f.
2. L'application f est-elle injective?
3. Montrer que f est surjective.

Partie II - Une suite d'applications On définit une suite d'applications (φ_n) de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ en posant
$$\forall z \in \mathbb{C}, \varphi_0(z) = 2 \text{ et } \varphi_1(z) = z$$
et par la relation de récurrence .
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, \varphi_{n+2}(z) = z\varphi_{n+1}(z) - \varphi_n(z)$$

1. Donner des expressions de $\varphi_2(z), \varphi_3(z)$ et $\varphi_4(z)$.

2. En déduire les solutions des équations $\varphi_2(z) = 0, \varphi_3(z) = 0$ et $\varphi_4(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}^+, \varphi_n(f(z)) = f(z^n)$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $f(z^n) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}^*$.

5. En déduire les solutions de l'équation $\varphi_n(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On précisera également le nombre de ces solutions.

École Polytechnique de Ouagadougou
Classes préparatoires aux Grandes Ecoles
MPSI - PCSI

Année académique 2022-2023

Devoir du premier semestre
Épreuve de français

Date : 26 novembre 2022
Durée : 2 heures

Sujet **(20 points)**

Exercice 1 (6 points)

Mettez les verbes entre parenthèses dans les phrases suivantes aux formes qui conviennent. Ne **recopiez** pas les phrases. Donnez le numéro de la phrase et le verbe.

1. Moins de deux mètres (être utilisé).
2. Jeune homme qui (m'observer) si attentivement, crois-moi.
3. Plus d'une poignée de graines (devoir être semé) ici.
4. La douzaine de stylos que ce commerçant (avoir vendu) (coûter) mille francs.
5. La plupart des étudiants (rester) sur le campus à midi.
6. J'irai leur rendre visite ne (fût-ce) que deux jours.
7. La moitié des participants (avoir voté) pour lui.
8. Peu de raisons (pouvoir) justifier une telle décision.
9. Ni vous ni moi (n'avoir) une existence exempte de soucis.
10. Le bien ou le mal (se moissonner) selon que l'on sème le bien ou le mal.
11. C'est la raison que (donner) bon nombre de retardataires.
12. Le riche, aussi bien que le pauvre, (avoir) des peines à endurer.

Exercice 2 (14 points)

« Aujourd'hui nous recevons trois éducations différentes ou contraires : celle de nos pères, celle de nos maîtres, celle du monde. Ce que l'on nous dit dans la dernière renverse toutes les idées des premières ». Montesquieu, *Esprit des lois*, IV, 1748, Pense.

Après avoir analysé ce propos de Montesquieu dans un premier temps, argumentez un point de vue personnel sur le sujet. Inspirez-vous d'un type de raisonnement de votre choix.
Soignez la langue.

École Polytechnique de Ouagadougou
Classes préparatoires aux Grandes Ecoles
MPSI - PCSI

Année académique 2022-2023

Devoir du deuxième semestre
Épreuve de français
Date : 20 mai 2023
Durée : 2 heures

Sujet (20 points)

Texte n°1 : L'éducation et le travail.
Il est de la plus haute importance que les enfants apprennent à travailler. L'homme est le seul animal qui doit travailler. Il lui faut d'abord beaucoup de préparation pour en venir à jouir de ce qui est supposé par sa conservation. La question de savoir si le Ciel n'aurait pas pris soin de nous avec plus de bienveillance, en nous offrant toutes les choses déjà préparées, de telle sorte que nous ne serions pas obligés de travailler, doit assurément recevoir une réponse négative : l'homme, en effet, a besoin d'occupations et même de celles qui impliquent une certaine contrainte. Il est tout aussi faux de s'imaginer que si Adam et Eve étaient demeurés au Paradis, ils n'auraient rien fait d'autre que d'être assis ensemble, chanter des chants pastoraux et contempler la beauté de la nature. L'ennui les eût torturés tout aussi bien que d'autres hommes dans une situation semblable. L'homme doit être occupé de telle manière qu'il soit rempli par le but qu'il a devant les yeux, si bien qu'il ne se sente plus lui-même et que le meilleur repos soit pour lui celui qui suit le travail. Ainsi l'enfant doit être habitué à travailler. Et où donc le penchant au travail doit-il être cultivé, si ce n'est à l'école ? L'école est une culture par contrainte. Il est extrêmement mauvais d'habituer l'enfant à tout regarder comme un jeu. Il doit avoir du temps pour ses récréations, mais il doit aussi y avoir pour lui un temps où il travaille. Et si l'enfant ne voit pas d'abord à quoi sert cette contrainte, il s'avisera plus tard de sa grande utilité.

Emmanuel KANT, *Réflexions sur l'éducation.*

Texte n°1 : La condition première d'un travail non servile
Il y a dans le travail des mains et en général dans le travail d'exécution, qui est le travail proprement dit, un élément irréductible de servitude que même une parfaite équité sociale n'effacerait pas. C'est le fait qu'il est gouverné par la nécessité, non par la finalité. On l'exécute à cause d'un besoin, non en vue d'un bien ; « parce qu'on a besoin de gagner sa vie », comme disent ceux qui y passent leur existence. On fournit un effort au terme duquel, à tous égards, on n'aura pas autre chose que ce qu'on a. Sans cet effort, on perdrait ce qu'on a. Mais, dans la nature humaine, il n'y a pas pour l'effort une autre source d'énergie que le désir. Le désir est une orientation, un commencement de mouvement vers quelque chose. Le mouvement est vers un point où on n'est pas. Si le mouvement à peine commencé se boucle sur le point de départ, on tourne comme un

écureuil dans une cage, comme un condamné dans une cellule. Tourner toujours produit vite l'écœurement. L'écœurement, la lassitude, le dégoût, c'est la grande tentation de ceux qui travaillent, surtout s'ils sont dans des conditions inhumaines.

Simone Weil (1951), *La condition ouvrière.*
Extrait de conférence devant un auditoire ouvrier le 23 février 1937

Travail à faire

Exercice 1 : Vous rédigerez un texte de synthèse des deux textes ci-dessus en 115 mots. Une marge de 10% en plus ou en moins sera tolérée. (14 pts)

Exercice 2 : Accordez les participes passés des verbes pronominaux soulignés dans le texte ci-dessous (6 pts)

Les travailleurs se sont *laisser* gagner par certaines pratiques malsaines qui nuisent à la vie interne de l'entreprise. Cependant, la réaction des autorités pour remettre de l'ordre ne s'est pas *faire* attendre. Après les mises en demeure, lorsque les deux collègues ciblées se sont *rencontrer*, elles se sont *serrer* les mains, elles se sont *dire* des paroles rassurantes. Mais plusieurs rencontres se sont *succéder* pour juguler entièrement la crise.

Devoir d'Analyse II

:04 heures

Les Documents, les Calculatrices, les Téléphones et les Ordinateurs sont **strictement interdits**.

Exercice 1 : Calcul Intégral & Equation Différentielle (08pts)

$\boxed{1}$ Calculer lorsqu'elle existe la limite de la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ de terme général :

(a) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{n-k}{n^3+kn^2}}$;

(b) $S_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \sqrt[n]{2022^k \cdot 2023^{n-k}}$.

$\boxed{2}$ Calculer la primitive suivante : $F(x) = \displaystyle\int (1+2x)\operatorname{argth}(x)dx$.

$\boxed{3}$ Soient $e, p, o \in \mathbb{R}$. **Etudier** la nature des intégrales suivantes, puis **calculer** en cas de convergence :

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^5(z)dz$;

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left[\frac{epo}{1+e^2+p^2+o^2+m^2} + \frac{m^{2022}}{(1+m)^{2024}}\right] dm.$

$\boxed{4}$ On considère l'équation différentielle : $(E) : x(x^2+1)y' - 2y = x^3(x-1)e^{-x}$.
On note y_0 la solution de l'équation homogène associée à (E) sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $y_0(1) = 1$.

(a) Déterminer explicitement y_0, puis résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

(b) Etudier les variations de y_0, puis tracer sa courbe $(\mathscr{C}_{y_0})$ dans un repère orthogonal du plan $\mathbb{R}^2$.

(c) Montrer que : $\forall x \in [1/\sqrt{3}; +\infty[, \quad y_0(x) \leqslant x + \sqrt{3}$.

(d) Déterminer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan délimitée par $(\mathscr{C}_{y_0})$ et la droite $(\Delta) : y = 2$.

(e) On note $I = [1, 2]$, f la restriction de y_0 à I et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \dfrac{2(x^2+1)}{3x}$.

(e.1) Montrer qu'il existe $C, P, G, E > 0$, tel que : $\forall x \in I, \quad \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{C}{E}\right)\left(\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{G}{P}\right) \leqslant 0.$

(e.2) En déduire que : $\displaystyle\int_1^2 f^2(x)dx \cdot \int_1^2 g^2(x)dx \leqslant \left(\sqrt{\frac{CP}{GE}} + \sqrt{\frac{EG}{PC}}\right)^2.$

Exercice 2 : Restitution Organisée de Connaissance (Analyse des Fonctions, Inégalité de Jensen**(05pts)**)

1. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ continue et vérifiant : $f(1) = 1$, et $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^x f^2(\theta)d\theta = \frac{1}{x}\left(\int_0^x f(\theta)d\theta\right)^2.$

2. Soient $\varphi \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$, et $\xi, \psi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications continues.

(a) Montrer qu'il existe $\gamma \in [0,1]$ tel que : $\xi(\gamma)\displaystyle\int_0^1 \psi(t)dt = \psi(\gamma)\int_0^1 \xi(t)dt.$

(b) On suppose de plus que φ vérifie $\displaystyle\int_0^1 \varphi = 0$. Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)^2 dx \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 |\varphi'(x)|\, dx \cdot \int_0^1 |\varphi(x)|\, dx.$

3. Soient $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et convexe.

(a) Montrer que : $\varphi\left(\displaystyle\int_0^1 f\right) \leqslant \int_0^1 \varphi o f.$

(b) On suppose de plus que $f > 0$, et on pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \displaystyle\int_0^1 f(z)^n dz, \qquad a_n = \sqrt[n]{I_n}, \qquad b_n = \frac{I_{n+1}}{I_n}$

Etudier le sens de variations des deux suites $(a_n)_{n>0}$ et $(b_n)_{n>0}$, puis déterminer leur limite.

Problème : Etude d'une fonction définie par une intégrale (08pts)

Soit f la fonction définie par, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad G(x) = e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_G$.
2. Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathscr{D}_G$, puis calculer $G'(x)$ pour tout $x \in \mathscr{D}_G$.
3. Montrer pour tout réel $x > 0$: $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt - \frac{1}{2x}e^{-x^2} \leqslant 0$.
4. En déduire la limite de $G(x)$ quand x tends vers $+\infty$.
5. Etudier les variations de G sur $\mathscr{D}_G \cap \mathbb{R}_+$.
6. On admet que l'intégrale de Gauss $I_G := \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ converge vers $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.
   (a) Montrer rigoureusement la convergence, puis déterminer la valeur de l'intégrale $\int_{[illegible]}$ [illegible]
   (b) Déterminer la limite de G au voisinage de $-\infty$.
   (c) Pour tout $x \in \mathscr{D}_G$, exprimer $G(x) + G(-x)$ en fonction de x.
   (d) En déduire le signe de G' sur $\mathscr{D}_G \cap \mathbb{R}_-$.
7. (a) Avec d'intégrations par partie, montrer que : $\forall x > 0, G(x) = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{4x^3} + \dfrac{3e^{x^2}}{4}\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^4}\,dt$
   (b) En déduire que : $G(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$.
8. Tracer l'allure de la courbe de G dans un repère orthogonal du plan $\mathbb{R}^2$.
9. (a) Monter que G est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D}_G$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n, Q_n \in \mathbb{R}[x]$ telles que : $\forall x \in \mathscr{D}_G, \quad G^{(n)}(x) = P_n(x)G(x) + Q_n(x)$
   (c) Déterminer, pour $n > 0$, les termes de plus haut degré respectifs de P_n et de Q_n.
   (d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathscr{D}_G, \quad G^{(n+1)}(x) = 2xG^{(n)}(x) + 2nG^{(n-1)}(x)$.
   (e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, G admet un $DL_n(0)$ de la forme : $G(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$.
   (f) Calculer a_0, puis exprimer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, a_{2k+1} en fonction de a_{2k-1} et a_{2k+2} en fonction de a_{2k}
   (g) En déduire l'expression de a_k en fonction de k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

FIN

EPG CPGE

Année académique 2022-2023

Devoir Algèbre 2(Espaces vectoriels)

Durée: 2h

Le barème est à titre indicatif

Exercice 1. *(6 pts)*

1. Montrer que la réunion de deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E est un sous espace vectoriel de E si et seulement si l'un est inclus dans l'autre.
2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension fini $n \neq 0$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F + \dim G > n$. Montrer que $F \cap G$ n'est pas réduit au vecteur nul.
3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F + G$. Soit H un supplémentaire de $F \cap G$ dans G. Montrer que $E = F \oplus H$.

Exercice 2. *(5 pts)*

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $(e_1, \dots e_p)$ une famille libre de vecteurs de E, $F = Vect(e_1, \dots, e_p)$ et G un supplémentaire de F dans E. Pour tout a dans G on note $F_a = Vect(e_1 + a, \dots, e_p + a)$.

1. Montrer que $F_a \oplus G = E$.
2. Soient $a, b \in G$. Montrer que $a \neq b \Rightarrow F_a \neq F_b$.

Exercice 3. *(9 pts)*

Soit $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z - t = 0; x - 2y + 2z + t = 0; x - y + z = 0\right\}$.

1. Montrer que F est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base de F.
3. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.
4. Soit $G = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x + 6y + 7z - t = 0\right\}$.
   (a) Montrer que G est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Déterminer une base de G
   (c) A-t-on $F \oplus G = \mathbb{R}^4$? Justifier
5. Soit $H = \{P \in \mathbb{R}_2[X]; XP'' - P = 0\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer une base.

ECOLE POLYTECHNIQUE DE OUAGADOUGOU

Devoir d'électromagnétisme :

Classes : MPSI A et B

Partie A : Questions de cours **Durée : 02 H 00**

1.

a) Definir la notion de symetrie et d'invariance pour une distribution de charges.

b) Quel est l'interet que presente les symetries et les invariances pour une distribution de charge.

2. Pour chacunes des distributions de charges suivantes,indiquer si elles presententent des symetries et des invariances.

c) Cylindre d'axe (oz), de rayon R, de hauteur h, uniformement chargé en volume.

d) Cylindre d'axe(oz), de rayon R, infini, uniformement chargé en surface.

e) Cone d'axe(oz),de sommet O,d'angle au sommet α ,uniformement chargé en volume.

f) Cylindre d'axe (oz), de rayon R, infini, de densité de charge $\rho(r < R) = \rho_0 \ln\frac{r}{R}$

Partie B : Exercice

Exercice1

On considère une sphère de centre O et de rayon R.

1. Énoncer le théorème de Gauss

2.

a) On suppose que cette sphère est chargée en volume, avec une densité volumique de charges uniforme $+\rho_0$. De quelles variables dépend le champ électrostatique créé par cette distribution ? Quelle est sa direction ?

b) Calculer le champ électrostatique créé par cette distribution en un point M.

3. On suppose maintenant que cette sphère est chargée en surface, avec une densité surfacique de charges uniforme $+\sigma_0$. Calculer le champ électrostatique créé par cette distribution en un point M.

Exercice2

Une spire circulaire de rayon R, de centre O est parcourue par un courant stationnaire d'intensité I.

1. Calculer le champ magnétostatique créé par cette spire d'axe Oz de centre O, de rayon R, parcourue par un courant I, au centre O de la spire.

2. Déterminer par application de la loi de Biot et savart, le champ magnétique créé par ce courant en un point M quelconque de l'axe OZ.

Ecole Polytechnique de Ouagadougou
....
Classes Préparatoires d'Entrée dans les Grandes Ecoles

Epreuve de Thermodynamique
MPSI A & B
Durée : 04 heures

b) En utilisant la relation de Clausius exprimer ce rapport en fonction de T_1 et T_2. Application numérique.

6)- a) Déterminer les variations d'entropie ΔS_1 et ΔS_2 des sources de chaleur de températures respectivement T_1 et T_2.

b) Calculer la variation d'entropie totale $\Delta S_T = \Delta S_{systeme} + \Delta S_1 + \Delta S_2$. Conclusion

7)- On suppose que la transformation BC est irréversible

a) Quelle est l'expression de la variation d'entropie ΔS_{BC}?

b) Déterminer alors l'expression de l'entropie créée au cours de cette transformation.

On donne : n =1, $R = 8{,}31$ *J/mol .K* ; $\gamma = 1{,}4$

2.2. A l'état final on a $P_3 = P_2$. Justifier cette égalité. Déterminer la température T_3 et le volume V_3.

2.3. Calculer la variation d'énergie interne du gaz.

Epreuve de Thermodynamique
MPSI A & B
Durée : 04 heures

1) Partant de l'état d'équilibre 1 (état initial), on ajoute une à une, des petites masses jusqu'à ce que sa pression soit $P_2 = 7{,}5\ 10^5 Pa$. Suite à cette opération, le gaz atteint donc un état d'équilibre 2 décrit par les paramètres $V_2, P_2\ et\ T_2$.

1.1. Quelle est la nature de la transformation subie par le gaz ? Justifier votre réponse.

1.2. Calculer le volume V_2, la température T_2, la variation d'énergie interne du gaz et le travail échangé par le gaz (le calcul direct du travail n'est pas demandé).

2) Le gaz étant en équilibre dans l'état 2, le cylindre n'est plus isolé thermiquement. La température du milieu extérieur est $T_0 = 300\ K$. Suite à cette opération, le gaz évolue vers un nouvel état d'équilibre 3.

2.1. Quelle est la nature de la transformation subie par le gaz ? Justifier votre réponse

Problème

On considère une machine ditherme fonctionnant entre deux sources de chaleur de températures respectives $\boldsymbol{T_1} = \mathbf{300\ K}$ et $\boldsymbol{T_2} = \mathbf{280\ K}$. Le fluide de cette machine, assimilé à un gaz parfait de $\boldsymbol{n}$ moles et de constante γ, décrit un cycle ditherme composé de transformations réversibles suivantes :

A→B : Compression adiabatique de V_A à V_B $T_1 \to T_2$
B→C : Compression isotherme de V_B à V_C $T_2 \to T_1$
C→D : Détente adiabatique de V_C à V_D $T_2 \to T_1$
D→A : Détente isotherme de V_D à V_A ($V_A > V_D$) T

1)- a) Représenter ce cycle dans le diagramme de Clapeyron.
b) Qu'appelle-t-on ce cycle ?
c) Que représente l'aire du cycle dans le diagramme (P, V)
d) En déduire la nature de ce cycle ditherme.

2)- a) Déterminer les expressions des travaux échangés lors de ces transformations en fonction de $T_1, T_2, V_A, V_B, V_C\ et\ \ V_D$
b) En déduire le travail total W échangé par le système lors du cycle.

Application numérique. 1

3)- a) Déterminer les quantités de chaleur échangées lors de chacune de ces transformations. On notera $Q_1\ et\ Q_2$les quantités de chaleur échangées par le système respectivement avec les sources de températures$T_1\ et\ T_2$.
b) Retrouver l'expression du travail W de la question 2- b)

4)- a) Déterminer la variation d'entropie du système pour chacune des transformations du cycle.
b) En déduire la variation d'entropie ΔS du cycle,

5)- a) Exprimer le rapport $\frac{\textbf{gain}}{\textbf{Dépense}}$ de cette machine en fonction de $Q_1\ et\ Q_2$. Etudier les cas possibles

Epreuve de Thermodynamique
MPSI A & B
Durée : 04 heures

Exercice 1

On considère un gaz, de capacités calorifiques C_v et C_p respectivement à volume et à pression constantes, subissant une transformation réversible. On suppose qu'au cours d'une transformation infinitésimale, ce gaz échange avec le milieu extérieur une quantité de chaleur élémentaire δQ et un travail élémentaire δW.

1) On suppose que la transformation est adiabatique réversible

a) déterminer $\left.\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{adiab}$ en fonction des coefficients calorimétriques μ et λ

b) Établir la relation entre $\left.\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$ et $\left.\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{adiab}$

On rappelle que les expressions des coefficients calorimétriques μ et λ s'écrivent :

$\mu = C_P \left.\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P$ et $\lambda = C_V \left.\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V$

Et que de manière générale : $\frac{1}{\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z} = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$ et $\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left.\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$

c) Dans le cas où le gaz est parfait, écrire l'expression de δQ lorsque les variables :

- V et T sont indépendantes.
- T et P sont indépendantes.
- P et V sont indépendantes

2) déterminer $\left.\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$ lorsque la transformation est réversible isotherme

3) En utilisant l'équation 1) b), déduire l'équation d'état du gaz pour une transformation adiabatique réversible

Exercice2

Pour maintenir en hiver la température d'un local à $\theta_1 = -20°C$ pour une température extérieure égale à $\theta_2 = -5°C$, on utilise l'énergie thermique Q libérée par la combustion dans l'air d'un combustible liquide.

1) On utilise la chaleur libérée par la combustion pour faire fonctionner une pompe à chaleur réversible entre le local et l'extérieur.

Calculer le coefficient de performance ou efficacité de cette pompe à chaleur, ainsi que le travail consommé par le moteur de cette pompe sachant que la chaleur reçue par le local est de **164 kJ.**

2) Un conseiller propose un dispositif qu'il déclare plus avantageux. L'énergie thermique Q est utilisée pour la vaporisation de l'eau d'une chaudière auxiliaire à la température $\theta_3 = 210°C$ qui sert de source chaude à un moteur ditherme réversible dont la source froide et le local. Le moteur reçoit une chaleur égale à Q. Le travail fourni par ce moteur est utilisé pour faire fonctionner la pompe à chaleur.

Déterminer le rapport Q_{local}/Q où Q_{local} est la chaleur reçue par le local.

Exercice 3

Un gaz parfait est enfermé dans un cylindre vertical thermiquement isolé muni d'un piston mobile sans frottement. Au départ, le gaz est en équilibre et son état est décrit par les paramètres (ou variables) $V_1 = 12{,}5\ 10^{-2}\ m^3$, $P_1 = 2{,}5\ 10^5\ Pa$ et $T_1 = 300\ K$. Le rapport des capacités calorifiques du gaz est $\gamma = 7/5$. On donne R = 8,32 J/mole.K.

EPO– CPGE

Année académique 2022-2023

Examen Algèbre 1
Durée: 3h
Le barême est à titre indicatif

Exercice 1. *(6 pts)*

1. Montrer que 11 divise $2^{123}+3^{121}$.
2. Calculer le PGCD de $P=X^5+3X^4+2X^3-X^2-3X-2$ et $Q=X^4+2X^3+2X^2+7X+6$.
   Déterminer une relation de Bézout entre P et Q.
3. (a) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ la fraction rationnelle suivante: $\frac{4X^2-8X+6}{X(X-1)(X^2-X-2)}$.
   (b) En déduire $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=3}^{n}\frac{4k^2-8k+6}{k^4-2k^3-k^2+2k}$.

Exercice 2. *(5 pts)*

On définit sur l'ensemble $E=\mathbb{R}-\{3\}$ où $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels, la loi $\star$ par :

$$\forall(x,y)\in E^2, x\star y=x+y-\frac{1}{3}xy.$$

1. Montrer que $(E,\star)$ est un groupe abélien.
2. Résoudre dans E les équations $x\star x=x$ et $x\star x=3x$.

Problème. *(9 pts)*

On considère les polynômes à coefficients complexes. On dit qu'un polynôme est normalisé si le coefficient du terme de plus haut degré vaut 1.

1. Rappeler la relation entre les coefficients et les racines d'un polynôme de degré 2 et de degré 3. 1
2. En déduire les solutions du système : $\begin{cases} x+y+z=1 \\ xy+xz+yz=1 \\ xyz=1 \end{cases}$ 1
3. Soit Q un polynôme normalisé de degré 2 tel que: $Q(\mathrm{X})=\mathrm{X}^2+p\mathrm{X}+q$. Soient a et b les deux racines de Q.
   (a) Calculer a^2+b^2 et $(ab)^2$ en fonction de p et q. 1
   (b) On suppose également que a^2 et b^2 sont aussi deux racines de Q. Montrer que $p^2+p-2q=0$ et $q^2=q$.
   En déduire tous les polynômes possibles vérifiant cette relation. 1,5
4. Soit T un polynôme normalisé de degré 2 , de racines a et b tel que $T(\mathrm{X})=(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)=\mathrm{X}^2+p\mathrm{X}+q$.
   (a) Effectuer la division euclidienne de $T(X^2)$ par $T(X)$. On donnera essentiellement le quotient Q et le reste R. 1
   (b) En déduire tous les polynômes T tels que $T(X)$ divise $T(\mathrm{X}^2)$. 2

5. On pose $\begin{cases} F_1 = X^3 + \alpha X^2 + (\alpha - 1)X - 1 \\ F_2 = X^3 + \beta X^2 + (\beta - 1)X - 1 \end{cases}$ où $\alpha = \frac{1-i\sqrt{7}}{2}$ et $\beta = \bar{\alpha}$. On suppose que les carrés des racines de F_1(respectivement F_2) sont aussi des racines de F_1(respectivement F_2)

   (a) Calculer le produit $F_1(X)F_2(X)$ et déterminer toutes les racines de $F_1(X)F_2(X)$. 2

   (b) En déduire les racines de chacun des polynômes F_1 et F_2. 1

   (c) On pose $H(X) = X(64X^6 - 112X^4 + 56X^2 - 7)$.

      i. Développer $\sin(7\theta)$ (On développera selon les puissances de $\sin(\theta)$).
      En déduire $H(\sin(\theta))$ et $H(\cos(\theta))$. 1

      ii. On définit une relation $\mathcal{S}$ sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{S}y \Leftrightarrow H(x) = H(y)$.
      Cette relation est-elle une relation d'équivalence? une relation d'ordre? 1

7) **a)** Déterminer la solution générale de l'équation différentielle homogène (E_0) associée à (E).

b) Montrer que la seule solution générale de l'équation différentielle (E_0) ayant une limite en $+\infty$ est la fonction nulle.

c) En déduire que f est la seule solution de (E) ayant une limite en $+\infty$.

~~3~~ 4) Montrer que f a une limite à droite en 0. On explicitera cette limite en fonction de la limite de u à droite en 0.

CLASSES PREPARATOIRES D'ENTREE DANS LES GRANDES ECOLES
ANNEE SCOLAIRE 2022-2023

Filière: MPSI

Date: 17 juin 2023

Durée: 4 heures

Examen d'analyse 2

Exercice n°1 (5 ppints=1+1+3)

1. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^{-\frac{3}{2}}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{n+k}\right)$.

2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n!\binom{2n}{n}}{n^n}}$, où $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

3. Etudier la nature de la série $\sum u_n$ où u_n est égal à:

a) $\dfrac{1}{\left(\sum\limits_{1}^{n}\sqrt[k]{k}\right)^{\alpha}}$;

b) $\prod\limits_{k=1}^{n}(2-e^{\frac{1}{k}})$

c) $(-1)^n v_n$; avec $v_n=\sum\limits_{p=1}^{n-1}\dfrac{1}{p(n-p)}$.

Exercice n°2 (5 points=2+1+2)

On considère deux suites $(a_n)_n\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_n\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On note, $\forall n\in\mathbb{N}$, $A_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$, et on pose:

(H_1) $\exists M>0/\ \forall n\in\mathbb{N},\ |A_n|\leq M$; (H_2) $(b_n)_n\subset\mathbb{R}_+$, décroissante et $\lim b_n=0$.

1. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sum a_k b_k=\sum\limits^{n-1}A_k(b_k-b_{k+1})+A_n b_n$;

2. En déduire que la série $\sum a_n b_n$ converge.

3. Application: Etudier la nature des séries suivantes: $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{e^{in\sqrt{2}}}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sin(n\theta)}{n}$.

Exercice 3 (10 points)

On s'intéresse dans cet exercice aux solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$y''(t) + y(t) = \frac{1}{t} \qquad \text{(E)}$$

qui possède une limite en $+\infty$. On considère les fonctions

$$u :\mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \quad \text{et} \quad v :\mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt \ .$$

1. **a)** Montrer que les fonctions u et v sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$. (On pourra utiliser une intégration par parties)

   b) Montrer que $u(x) = u(1) - \int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt$ et que u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Montrer de même que v est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

   c) Montrer que u admet une limite à droite en 0.

   d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a

   $$v(x) + \ln(x) = \int_1^x \frac{1-\cos(t)}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt.$$

   En déduire que v est équivalente à l'opposé de la fonction logarithme dans un voisinage à droite de 0 i.e $v(x) \underset{0+}{\sim} -\ln(x)$.

2. Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = u(x)\cos(x) - v(x)\sin(x)$

   a) Calculer les dérivées de u et v. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$.

   b) Montrer que f est une solution de l'équation différentielle (E) et qu'elle admet pour limite 0 en $+\infty$.

ECOLE POLYTECHNIQUE DE OUAGADOUGOU

Année académique 2022-2023

....

Session normale

CPGE

MPSI

Epreuve d'équilibre chimique en solutions aqueuses

Durée : 02 heures

Exercice 1 : En solution aqueuse, l'équilibre acido-basique : $NH_3 + H_2O \leftrightarrows NH_4^+ + OH^-$

Est associé une constante d'acidité Ka.

1- Ecrire la constante d'acidité qui caractérise cet équilibre.
2- Quelles sont, en dehors de toute approximation, les relations qui permettront de calculer le pH de la solution en fonction de C_0 (concentration initiale de NH_3) et du produit ionique de l'eau Ke ?
3- Sachant que la solution d'ammoniaque se comporte comme celle d'une base faible, quelles sont les approximations que l'on peut envisager ?
4- Si les approximations sont vérifiées, comment s'exprimera le pH de la solution, en fonction de pKa, pKe et de C_0 ? Calculer le pH.

Exercice 2 : On dispose d'une solution d'acide cyanhydrique HCN 0,1M. Le couple HCN/CN^- possède un pK_a de 9,3.

1- Calculer le pH de la solution en démontrant la formule utilisée et en justifiant les approximations.

2- On se propose d'effectuer le dosage d'une solution de HCN 0,1N par une solution de soude 0,2 N. Quel volume de soude doit-on ajouter à 20 mL pour obtenir le point d'équivalence ? Quel sera le pH au point d'équivalence ?

Normalité = nombre (de mole) de H^+ cédé par un acide ou capté par une base.

Exercice 3 : Calculer la solubilité de AgCN ($Ks = 1{,}6.10^{-14}$).

1- Dans l'eau pure

2- Dans une solution de KCN ($0{,}01\ mol.\ L^{-1}$)

3- Dans une solution de $Na_2S_2O_3$ (0,05 M) sachant que $Na_2S_2O_3$ est très soluble et que $S_2O_3^{-2}$ se comporte comme un ligand : $AgCN_{(s)} + 2S_2O_3^{2-}{}_{(aq)} \leftrightarrows Ag(S_2O_3)_2^{-3}{}_{(aq)} + CN^-{}_{(aq)}$

$K = 5{,}2.10^3$ à 25°C.

Exercice 4 : Calculer le potentiel standard de la réaction suivante :

$$MnO_4^- + 4H_3O^+ + 3e^- \leftrightarrows MnO_2 + 6H_2O$$

Sachant que $E°(MnO_4^-Mn^{2+}) = 1{,}5\ V$; $E°(MnO^2/Mn^{2+}) = 1{,}23\ V$.