

### Exercice 6 :

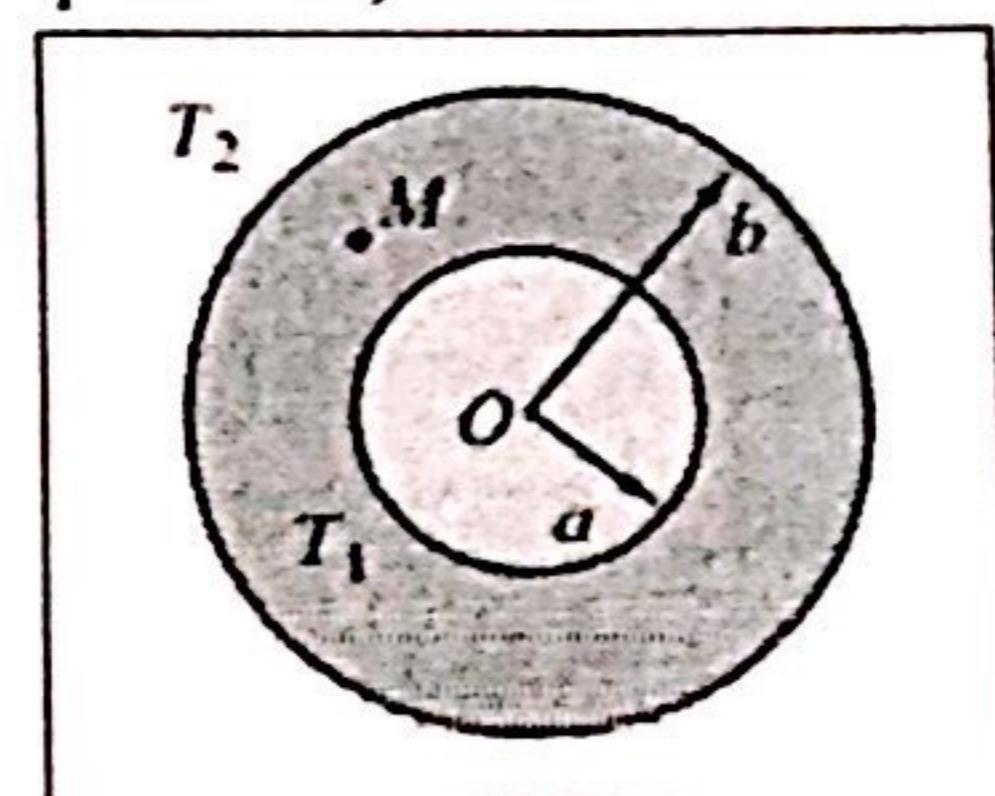
Considérons un matériau homogène compris entre deux sphères concentriques de centre O, de rayons  $a$  et  $b$  ( $a < b$ ), de conductivité thermique  $K$ , de capacité thermique massique  $c$  et de masse volumique  $\rho$ . Les parois sphériques de ce matériau sont maintenues aux températures  $T_1$  ( $r = a$ ) et  $T_2$  ( $r = b$ ) et on suppose  $T_1 > T_2$ .

Données :  $a = 1 \text{ cm}$ ,  $b = 10 \text{ cm}$ ,  $K = 35 \cdot 10^{-2} \text{ W.m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ,  $T_1 = 100 \text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $T_2 = 20 \text{ }^{\circ}\text{C}$

1) Écrire l'équation aux dérivées partielles que vérifie la température  $T$  en un point M, à l'instant  $t$ .

2) Déterminer, en régime permanent :

- la température  $T(r)$  en tout point M du matériau ;
- la puissance  $P$  transférée entre les deux sphères de rayons  $a$  et  $b$  ;
- la résistance thermique  $R_{\text{th}}$  de ce conducteur. Calculer  $R_{\text{th}}$  et  $P$ .



### Exercice 7 :

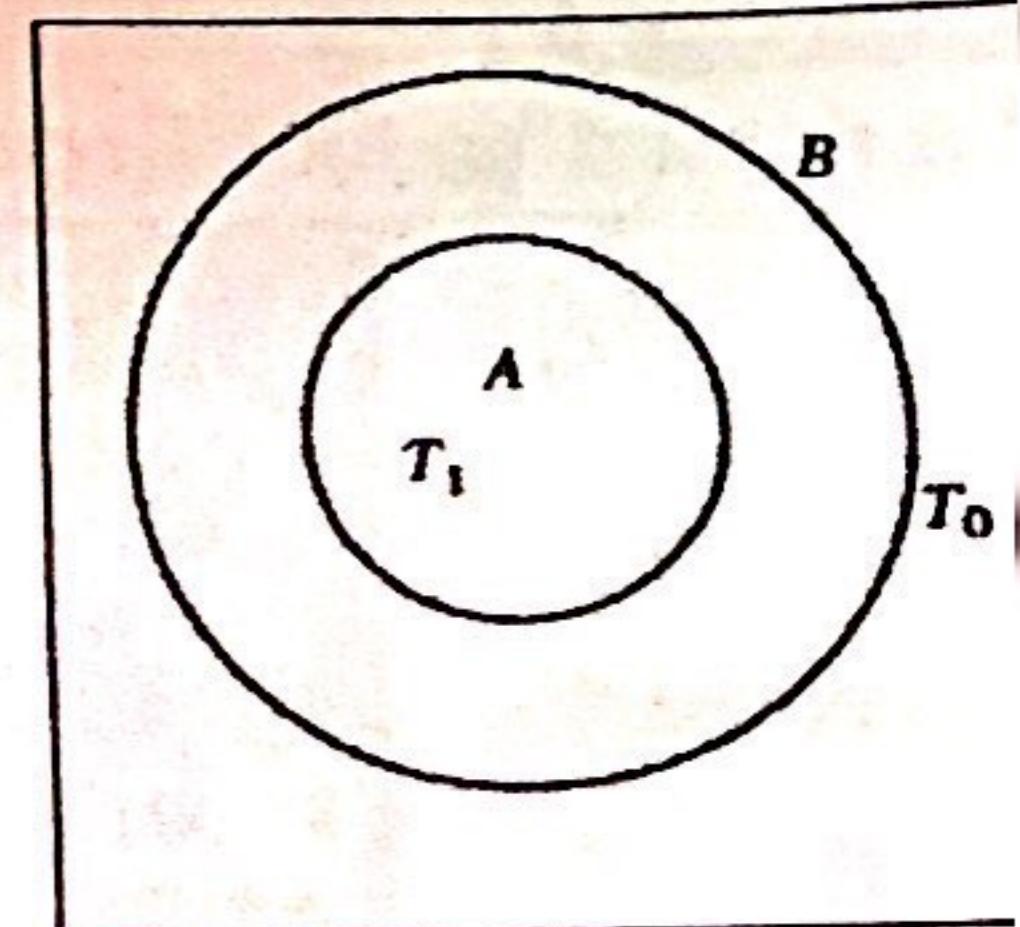
Un corps sphérique (A) de rayon  $a$ , de capacité thermique  $C_0$ , et de température  $T_1$ , est placé dans une enceinte vide dont la paroi intérieure absorbante est maintenue à la température  $T_0$  (fig. ci-contre). On suppose que le corps (A) rayonne comme un corps noir et qu'il n'y a pas d'autres types de transferts thermiques.

Les températures  $T_1$  et  $T_0$  sont voisines et l'on pose  $T_1 = \theta_1 + T_0$  avec  $\theta_1 \ll T_0$ .

- Quel est le flux  $\Phi_a$  reçue par le corps (A) de la part de l'enceinte ?
- Déterminer la loi d'évolution de la température  $T$  de la sphère en fonction du temps.
- On considère une sphère métallique de rayon  $a = 1 \text{ cm}$ , de capacité thermique massique  $C_0 = 0,5 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ , de masse volumique  $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ .

Données :  $T_0 = 273 \text{ K}$ ,  $T_1 = 280 \text{ K}$  et la constante de Stefan :  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ .

Au bout de combien de temps, l'écart de température  $(T_1 - T_0)$  est-il inférieur à  $0,1 \text{ K}$  ?



Année académique :

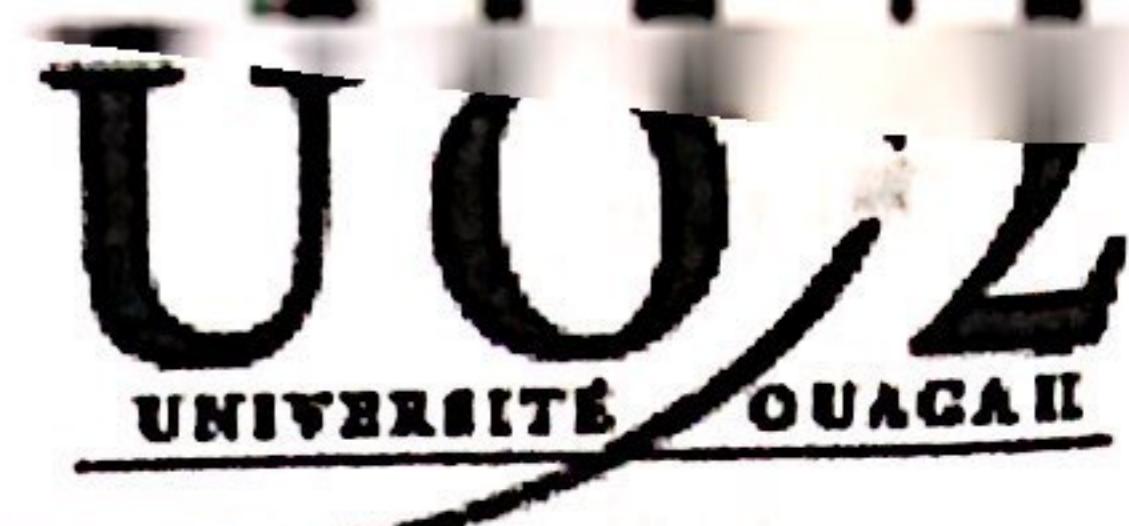
2018-2019

LICENCE 2

Dr A.COMPAORE

Mai 2019

**Classes Préparatoires  
d'entrée dans les  
Grandes Ecoles  
(CPGE)**



**Travaux dirigés N°1 de Thermo statistique**

**Exercice N°1**

Un tube de longueur  $L=1\text{ m}$  et de section  $s=80\text{ mm}^2$  contient du néon (masse molaire  $M_{Ne}=20,2\text{ g/mol}$ ), sous une pression partielle  $p=1\text{ kPa}$ , à la température  $T=300\text{K}$ .

- 1) Calculer la masse de néon contenu dans le tube, l'énergie interne et les vitesses caractéristiques du gaz,
- 2) On ajoute dans le tube 0,4 mg d'hélium (masse molaire  $M_{He}=4\text{ g/mol}$ ). Quelle sont la pression partielle de ce gaz et la vitesse quadratique moyenne de ses molécules? Calculer la pression totale et l'énergie totale.
- 3) on diminue le volume de l'enceinte de 2% de façon isotherme .Calculer les nouvelles valeurs de la pression, de l'énergie et des vitesses caractéristiques.

**Exercice N°2**

Un gaz monoatomique constitué de molécules identiques de masse  $m$  est en équilibre thermodynamique à la température  $T$ . on désigne par  $n_v$  la densité volumique des particules .ce gaz, supposé parfait, satisfait aux hypothèses de la théorie cinétique de maxwell.

- 1) donner l'expression de la pression en fonction de la vitesse quadratique moyenne  $v_q$ .
- 2) calculer  $n_v$  et  $v_q$  pour du néon dans les conditions normales de température  $T=298,15\text{K}$  et de pression  $p=1\text{ bar}$ . on rappelle la masse molaire du krypton :  $M=83,8\text{ g/mol}$ . on augmente la pression de 10% ; en déduire la variation relative de la vitesse quadratique moyenne.

**Exercice N°3**

On considère un gaz parfait monoatomique constitué de  $N$  particules de masse  $m$  enfermées dans une enceinte cubique de volume  $V$ , en l'absence de champ extérieur. On cherche à

calculer la pression exercée par le gaz sur les parois de l'enceinte, en moyennant les chocs individuels des particules sur celles-ci.

1. Rappeler les hypothèses du modèle du gaz parfait monoatomique.
2. En considérant tout d'abord un cas simplifié (voire simpliste) dans lequel les particules ont toutes la même vitesse  $u$  et ne peuvent se mouvoir que le long de trois axes perpendiculaires aux parois de l'enceinte, déterminer la pression  $P$  en fonction des paramètres du problème.
3. Même question en tenant compte de l'existence d'une distribution des vitesses  $f(v)$ .
4. Sachant que la température cinétique  $T$  du gaz est définie à partir de son énergie cinétique microscopique  $E_c$  par  $3Nk_B T = 2E_c$ , où  $k_B$  est la constante de Boltzmann, retrouver l'équation d'état des gaz parfaits. Donner l'expression de l'énergie interne  $U$  du gaz.
5. Calculer la vitesse quadratique moyenne des molécules des différents gaz de l'air dans les conditions usuelles de température et de pression. On donne  $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$   $M_{N_2} = 28 \text{ g.mol}^{-1}$ ,  $M_{O_2} = 32 \text{ g.mol}^{-1}$ .

#### Exercice N°4

L'énergie potentielle des forces intermoléculaires a pour expression

$$\varepsilon_p(r) = 4\varepsilon_0 \left[ \left(\frac{r_1}{r}\right)^{12} - \left(\frac{r_1}{r}\right)^6 \right]$$

Où  $r$  est la distance entre deux molécules .trouver en fonction de  $r_1$  la distance  $r_0$  pour laquelle l'énergie potentielle est minimale ainsi que la valeur de ce minimum.

#### Exercice N°5

1. A partir des hypothèses de stationnarité, d'homogénéité et d'isotropie de la distribution des vitesses des particules d'un gaz parfait, montrer que celle-ci est une gaussienne.
2. En calculant la vitesse quadratique moyenne, et en comparant avec l'exercice précédent, donner l'expression complète de la distribution des vitesses en fonction de la masse  $m$  des particules et de la température  $T$ . On donne les intégrales suivantes:

$$\int_0^\infty v^{2q} \exp(-bv^2) dv = \frac{(2q-1)!}{(q-1)!} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2q} b^{q+\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad \int_0^\infty v^{2q+1} \exp(-bv^2) dv = \frac{q!}{2^{2q+1} b^{q+\frac{1}{2}}}.$$

### Exercice N°6

On considère une enceinte contenant un gaz monoatomique parfait à la température  $T$  et sous la pression  $p$ . on désigne par  $n_v$  le nombre de molécules par unité de volume.

- 1) quelle est la vitesse moyenne  $v_m$  des molécules ?,
- 2) les molécules de l'enceinte sortent par un petit trou, de surfaces  $s$ .
  - a. trouver le nombre de molécules qui sortent, pendant la durée  $dt$ , en ayant la norme de la vitesse comprise entre  $v$  et  $v+dv$  ?
  - b. on note  $\Phi$  le flux de molécules c'est-à-dire le nombre de molécules qui sortent de l'enceinte par unité de temps. exprimer  $\Phi$  en fonction de  $n_v, s$  et  $v_m$ .
  - c. montrer que chaque molécule qui s'échappe transporte en moyenne l'énergie cinétique  $2k_B T$ .

### Exercice N°7

De l'hexafluorure d'uranium gazeux, à la température  $T$ , est contenu dans un récipient cylindrique, de rayon extérieur  $R_e$ , de rayon intérieur  $R_e/2$  et de hauteur  $l$ , tournant autour de son axe de révolution vertical, à la vitesse angulaire  $\Omega$ . Le champ de pesanteur est négligeable devant le champ centrifuge.

- 1) Etablir la distribution de la densité particulaire  $n(r)$  des molécules, de masse  $m$ , en fonction de leur distance  $r$  à l'axe.
- 2) Sachant que le nombre total de molécules est  $N$ , quelle est cette densité sur l'axe?
- 3) Quelle est l'expression de  $n(r)/N$  la densité particulaire en fonction de  $r/R_e$  dans le cas où  $T=400K$ ,  $\Omega=500 \text{ m.s}^{-1}$  et  $h=3 \text{ m}$ ? On donne la masse molaire de UF6:  $M=352 \text{ g}$

### Exercice N°8 : mesure de la capacité thermique du dioxygène

Une ampoule, de volume intérieur  $V=15 \text{ cm}^3$ , contient du dioxygène, supposé parfait, sous faible pression  $p=36 \text{ torr}$ , à la température  $T= 1440K$ . À cette température ce gaz peut être considéré comme formé de molécules diatomiques rigides.

On mesure sa capacité thermique molaire  $C_{vm}$  à volume constant en fournissant brusquement au gaz une énergie de 3,6 mJ. La variation de température qui en résulte est  $\Delta T = 28,5 \text{ K}$ . Trouver  $C_{vm}$  ainsi que la capacité thermique massique correspondante. Comparer ces résultats à ceux prévus par la théorie classique des capacités thermiques. On appelle la valeur de la masse molaire du dioxygène :  $M = 32 \text{ g mol}^{-1}$  et  $1 \text{ torr} = 133,4 \text{ Pa}$ .

### Exercice N°9

On assimile un solide à un ensemble de  $N$  atomes identiques, indépendant, oscillant selon trois directions perpendiculaires.

- 1) en utilisant le théorème d'équipartition de l'énergie, établir la loi de Dulong et Petit.  
en déduire la capacité thermique massique de l'étain, de masse molaire :  $M = 118,7 \text{ g mol}^{-1}$ .
- 2) quelle énergie faut-il fournir à 50 g d'étain pour éléver sa température de 10K ?

### Exercice N°10

1. Un gaz parfait est enfermé dans une enceinte, à la température  $T$  et sous une pression  $P$ . A l'instant  $t = 0$ , une des parois est percée d'un trou de surface  $S$  par lequel peuvent alors s'échapper les particules de gaz. En supposant que le milieu extérieur est le vide, déterminer l'évolution temporelle de la pression dans l'enceinte. On pourra d'abord calculer le nombre de particules s'échappant de l'enceinte par unité de temps. Calculer la constante de temps de ce processus pour un litre de dihydrogène à 0°C et un trou de  $1 \mu\text{m}^2$ .

2. On considère un gaz parfait remplissant deux compartiments séparés par une paroi poreuse. Le gaz est maintenu à des températures différentes  $T_1$  et  $T_2$  dans chaque compartiment. En assimilant le passage des particules à travers la paroi à une fuite par un ensemble de petits trous, montrer qu'en régime permanent, on a  $P_1/P_2 = \sqrt{T_1/T_2}$ .

**Ecole Polytechnique de Ouagadougou (EPO)**

**Classes Préparatoires d'entrée**

**dans les Grandes Ecoles (CPGE)**

**Niveau d'étude : MP**

**EXAMEN DE PHYSIQUE 3 – Semestre 3**

Documents non autorisés, calculatrice autorisée

**Durée : 4 heures**

**Les 2 parties sont indépendantes, chaque partie doit être traitée sur une feuille séparée**

**Partie1 : Eléments de traitement du signal**

**Durée approximative : 1h30**

**Exercice 1**

Soit le signal  $s(t) = a_1 \cos(2\pi f_1 t) + a_2 \cos(2\pi 4f_1 t)$

Soit  $s_e(t)$ , le signal issu de l'échantillonnage de  $s(t)$  avec une fréquence d'échantillonnage  $f_e$

- 1) Le signal  $s(t)$  est-il périodique ? Si oui donner sa période.
- 2) On choisit  $f_1 = 20 \text{ Hz}$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$  et  $f_e = 130 \text{ Hz}$ 
  - a) Pour cette valeur de  $f_e$ , la condition de Shannon est-elle respectée ? Justifier votre réponse
  - b) Représenter sur une figure le spectre du signal  $s(t)$  entre 0 et 260 Hz
  - c) Représenter sur une autre figure le spectre du signal  $s_e(t)$
- 3) Expliquer les différences entre le spectre de  $s(t)$  et celui de  $s_e(t)$ .
- 4) Quel est l'effet de l'échantillonnage sur le spectre du signal  $s(t)$  ?

**Exercice 2**

**A/ Etude d'un signal périodique**

On considère le signal  $U_\alpha(t)$  de rapport cyclique  $\alpha = \frac{T_f}{T}$  (figure 1). On note  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

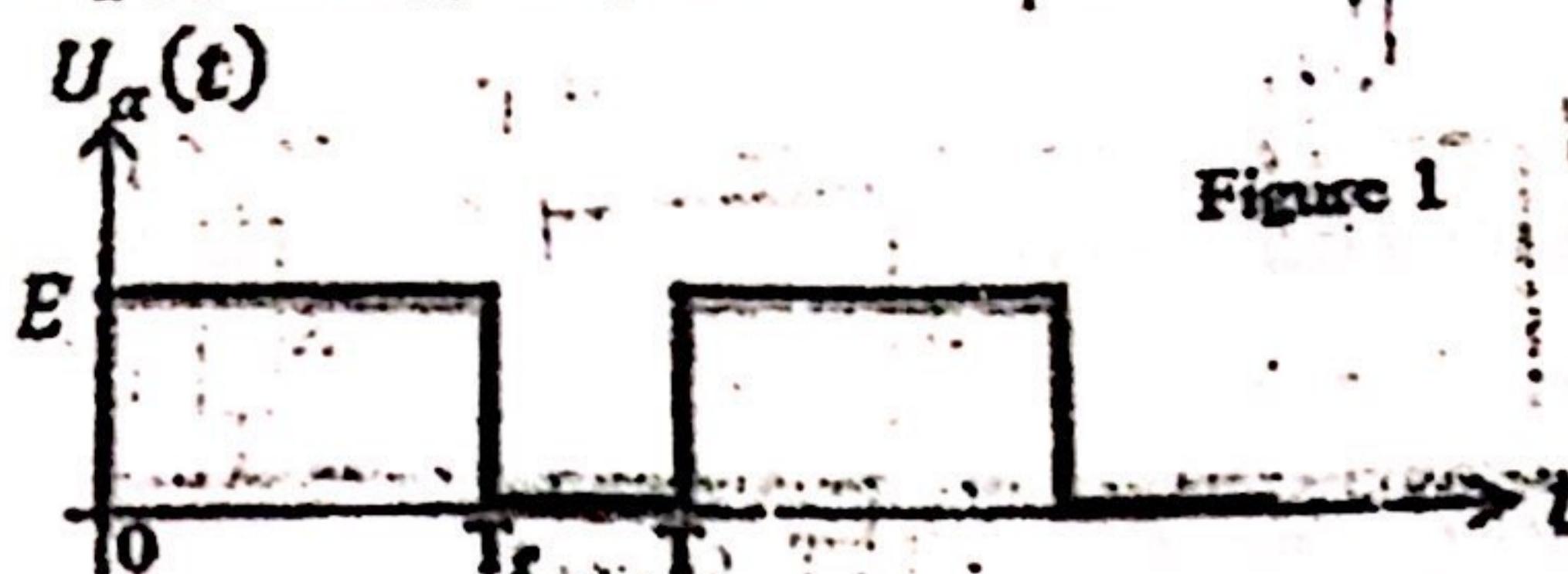


Figure 1

1- Calculer  $U_{moy}$  et  $U_{eff}$ , les valeurs moyenne et efficace de  $U_\alpha(t)$ .

2- Justifier que  $U_\alpha(t)$  peut s'écrire sous la forme :

$$U_\alpha(t) = U_{moy} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t - \theta_n)$$

3- On rappelle que  $C_n = 2|D_n|$  et  $\theta_n = \arg(D_n)$  où  $D_n = \frac{1}{T} \int_0^T U_\alpha(t) e^{-jn\omega t} dt$ .

Montrer que :

$$C_n = 2\alpha E \left| \frac{\sin(n\pi\alpha)}{n\pi\alpha} \right|$$

4- Tracer  $U_\alpha(t)$  et son spectre pour les deux cas particuliers  $\alpha \ll 1$  et  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Commenter.

5- a. Calculer, pour  $\alpha = \frac{1}{2}$ , le taux de distorsion harmonique  $\eta = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} C_n^2}}{C_1}$  en %. Commenter.

b. Vérifier l'égalité de Perceval pour  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

$$\text{On donne } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

## B/ Etude d'un filtre analogique

On considère le circuit suivant (figure 2).

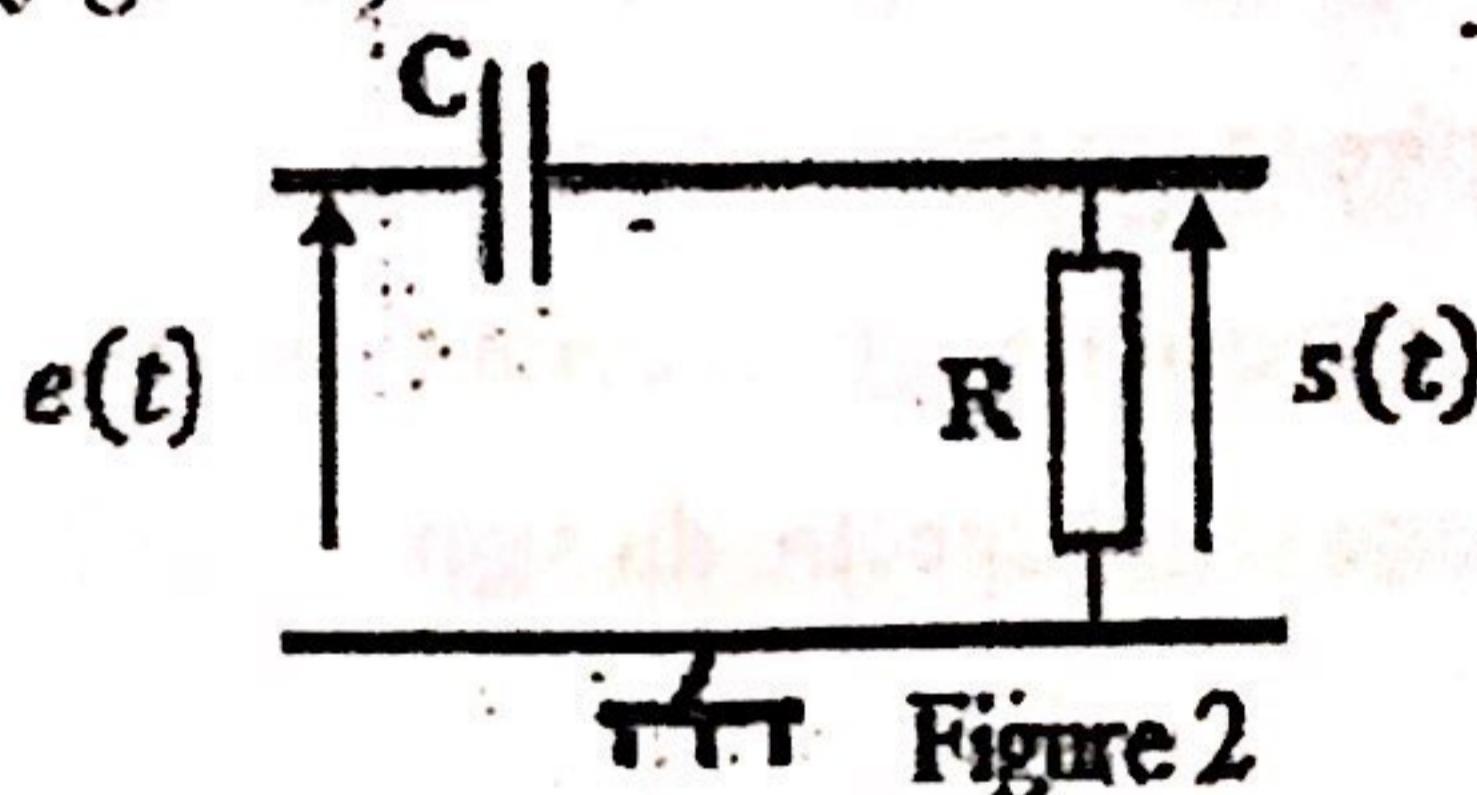


Figure 2

6- La tension d'entrée s'écrit  $e(t) = E \cos(\omega t)$ .

a. Montrer que  $H(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$ . On exprimera  $\omega_0 = \frac{1}{R}$  en fonction de  $R$  et  $C$ .

b. Déterminer le gain  $G(\omega) = |H(j\omega)|$  et le déphasage  $\phi(\omega) = \arg(H(j\omega))$ .

c. Représenter le diagramme de Bode de ce filtre.

7- La tension d'entrée  $e(t)$  s'identifie maintenant à  $U_{\frac{1}{2}}(t)$  de rapport cyclique  $\alpha = \frac{1}{2}$

a. Déterminer l'équation différentielle liant  $e(t)$  et  $u_c(t)$  la tension aux bornes de  $C$ .

b. Résoudre cette équation puis tracer l'allure du  $s(t)$  pour  $\omega \ll \omega_0$ . Le condensateur est initialement déchargé.

c. Retrouver ces résultats en utilisant le comportement du filtre aux basses fréquences.

## Equilibres Physiques

Durée : 2 heures

### Exercice 1 (8pts)

Soit un corps pur B en équilibre, à T et à p, sous deux phases α et β. Soient respectivement  $S_m(\alpha)$ ,  $S_m(\beta)$ ,  $V_m(\alpha)$  et  $V_m(\beta)$  les entropies et les volumes molaires de B dans ces deux phases à l'équilibre.

1. Exprimer  $d\mu_\alpha$  et  $d\mu_\beta$  en fonction des variables p et T.
2. Écrire la condition, portant sur les potentiels chimiques, traduisant l'équilibre entre les deux phases α et β :
  - a) à la température T et sous la pression p ;
  - b) à la température  $T + dT$  et sous la pression  $p + dp$ .

En déduire une expression donnant  $\frac{dp}{dT}$  en fonction de  $S_m(\alpha)$ ,  $S_m(\beta)$ ,  $V_m(\alpha)$  et  $V_m(\beta)$ , puis en fonction de  $\Delta H_m(\alpha \rightarrow \beta)$  et de T ( $\alpha \rightarrow \beta$ ) ; cette relation constitue la troisième relation de Clapeyron.

3. Déterminer la température de solidification de l'eau sous une pression  $p_f = 100,0$  bar.

Données supposées indépendantes de p et de T dans cette question :

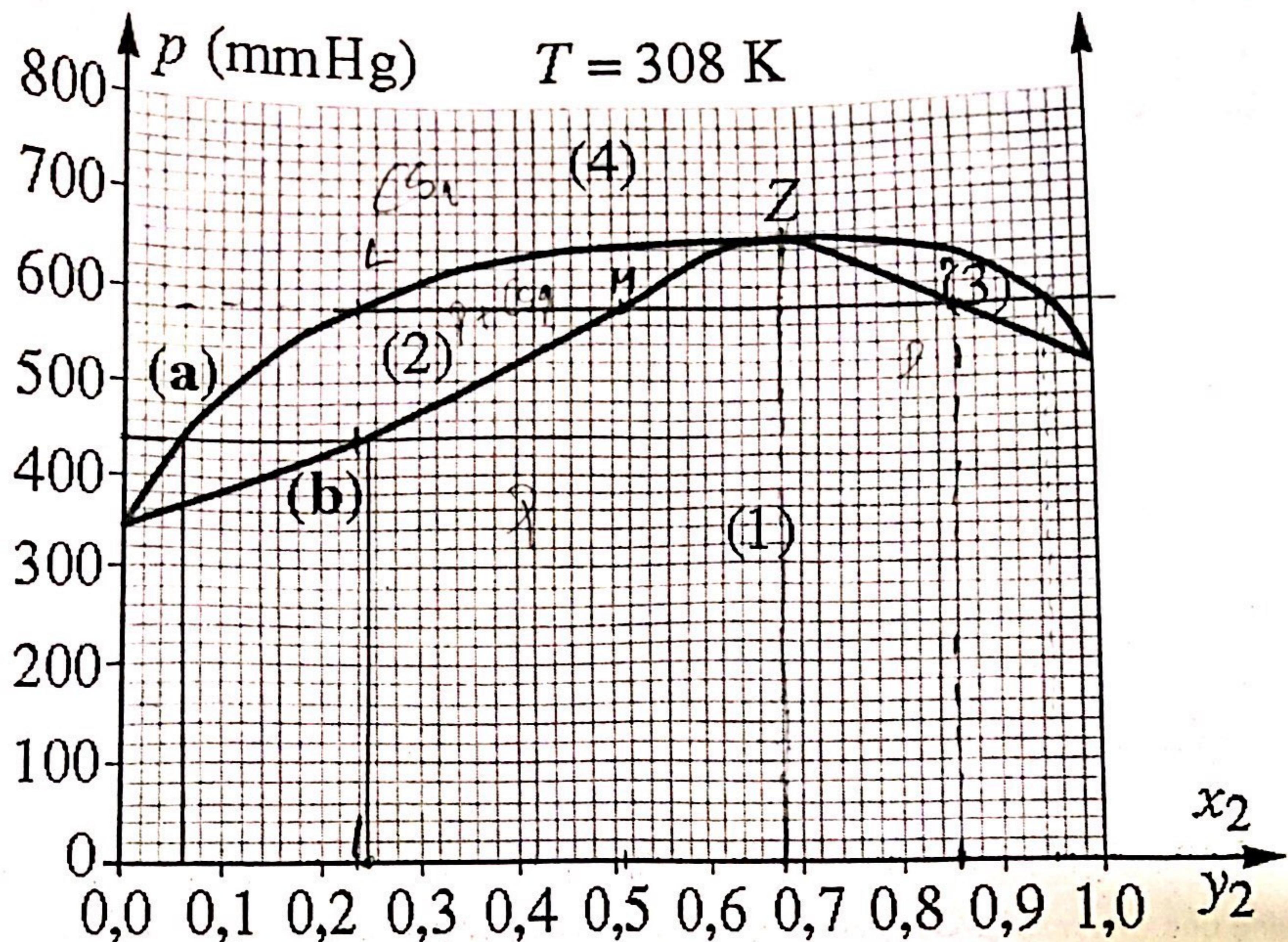
$$\rho(H_2O(l)) = 1 \text{ g.cm}^{-3};$$

$$\rho(H_2O(s)) = 0,9168 \text{ g.cm}^{-3};$$

$$\Delta_{fus}H^\circ(H_2O) = 6.10^3 \text{ J.mol}^{-1}.$$

### Exercice 2 (12 pts)

Le diagramme binaire isotherme liquide-vapeur de la propanone (notée 1) et du sulfure de carbone (noté 2) est donné ci-après. La composition est exprimée en fraction molaire en  $CS_2$ , on note  $x_2$  la fraction molaire en  $CS_2$  dans la phase liquide et  $y_2$  celle dans la phase vapeur.



1. a) Indiquer le nombre et la nature des phases présentes dans les domaines numérotés (1), (2), (3), et (4) sur la figure. Nommer les courbes (a) et (b).
  - b) Quel est le nom donné au mélange liquide de composition égale à celle du maximum Z ? Quelles sont les propriétés de ce mélange ?
2. À  $T = 308\text{ K}$ , un mélange liquide de propanone et de sulfure de carbone commence à bouillir sous une pression de 440 mmHg. En déduire :
  - a) la composition du mélange liquide et celle de la première bulle de vapeur qui apparaît ;
  - b) la composition de la dernière goutte de liquide qui disparaît.
3. À  $T = 308\text{ K}$ , on considère un mélange obtenu en mélangeant 4,0 mol de  $\text{CS}_2$  et 6,0 mol de  $\text{CH}_3\text{COCH}_3$ .
  - a) Calculer les quantités de matière  $n^l$  et  $n^v$  de liquide et de vapeur en équilibre sous la pression  $p = 580\text{ mmHg}$ .
  - b) Calculer la quantité de matière n° 1 de propanone liquide présente dans ce système.
4. a) Indiquer lequel des deux constituants possède la température d'ébullition la plus élevée. Justifier très brièvement la réponse.
  - b) Représenter l'allure du diagramme binaire isobare ( $p = p_z = 658\text{ mmHg}$ ) liquide - vapeur du système binaire propanone - sulfure de carbone.
  - c) On réalise, sous la pression  $p = p_z = 658\text{ mmHg}$ , la distillation fractionnée d'un mélange contenant de la propanone et du sulfure de carbone. Indiquer la nature du distillat et la nature du résidu de distillation dans les deux cas suivants :  $x_2 = 0,3$  et  $x_2 = 0,8$ .

## Partie2 : Électromagnétisme-Optique physique

Durée approximative : 2h30

### **Exercice1 :**

Une onde plane monochromatique, de pulsation  $\omega$ , de champs électriques

$\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{e}_z$  et magnétiques  $\vec{B} = B_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{e}_y$  ( $E_0$  et  $B_0$  constantes), se propage selon l'axe OZ dans un milieu de permittivité  $\epsilon$ , non magnétique, non chargé et non parcouru par un courant.

- 1) a) Rappeler les équations de Maxwell dans ce milieu matériel.  
b) Écrire quatre relations vectorielles entre  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}$ , et  $\vec{B}$ .
- 2) Etablir la relation entre  $k$  et  $\omega$  (relation de dispersion).
- 3) On suppose que le milieu a une permittivité complexe  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r^*$  avec  $\epsilon_r^* = \epsilon_r' + i\epsilon_r''$ ,  $\epsilon_r'$  et  $\epsilon_r''$  sont des réels positifs. On introduit l'indice complexe  $n = n' + i n''$  tel que  $k = n \frac{\omega}{c}$ .

Etablir les relations vérifiées par  $n$ ,  $n'$  et  $n''$ . En déduire les indices respectifs d'un milieu diélectrique parfait et d'un milieu bon conducteur.

### **Exercice2 :**

On considère un conducteur cylindrique homogène de base circulaire de rayon  $R$  et de longueur  $L$  supposée grande ( $L$  tendant vers l'infini). Ce conducteur est parcouru par un courant volumique axial d'intensité  $I$  et de densité volumique  $\vec{j} = j \vec{e}_z$ .

- 1) Par des considérations de symétrie, déterminer:
  - a) Les variables dont dépend l'induction magnétique  $\vec{B}(M)$ ,
  - b) La direction de  $\vec{B}(M)$ ,
  - c) Vérifier que  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ ,
- 2) Déterminer l'expression du champ  $\vec{B}(M)$  en tout point de l'espace,
- 3) Déterminer les variables dont dépend le potentiel vecteur  $\vec{A}(M)$ ,
- 4) Déterminer la direction de  $\vec{A}(M)$ ,
- 5) Vérifier que  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ ,
- 6) A partir de la relation  $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ , déterminer l'expression de  $\vec{A}(M)$  en tout point de l'espace,
- 7) En déduire la constante d'intégration pour la condition  $\vec{A}(\rho = R)$ .

### Exercice3 :

- A) On considère deux vibrations lumineuses, monochromatiques et polarisées suivant la même direction ( $E_1 = a_1 \cos(\omega t)$  et  $E_2 = a_2 \cos(\omega t + \varphi)$ ), qui se superposent en un point M de l'espace.
1. Pour  $a_1 = a_2 = a$ , représenter graphiquement la vibration résultante ( $E = E_1 + E_2$ ), en fonction du temps t, dans les cas suivant :  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi = \pi$  et  $\varphi = 2\pi$ . Pour quelles valeurs du déphasage  $\varphi$  l'amplitude est-elle maximale ou minimale ?
  2. Calculer l'intensité I de la vibration résultante en utilisant la représentation complexe.
  3. Retrouver le résultat par application de la formule générale établie en cours.
  4. Représenter I en fonction du déphasage.
- B) Une onde lumineuse a une fréquence  $\nu = 510^{14} \text{ Hz}$  dans le vide.
1. Calculer la période de cette onde.
  2. Calculer la longueur d'onde de cette onde dans le vide.
  3. De quelle couleur agit-il ?
  4. Que devient la longueur d'onde et la fréquence de cette onde dans un verre ordinaire d'indice  $n = 1,5$  ?
- C) Deux fentes de Young sont distantes de 0,2 mm. L'écran d'observation est distant de 1 m.
- 1) La 3<sup>e</sup> frange brillante est située à 7,5 mm de la frange centrale. Calculer la longueur d'onde de la lumière utilisée.
  - 2) Même question en supposant que c'est la 3<sup>e</sup> frange sombre qui est à 7,5 mm de la frange centrale.

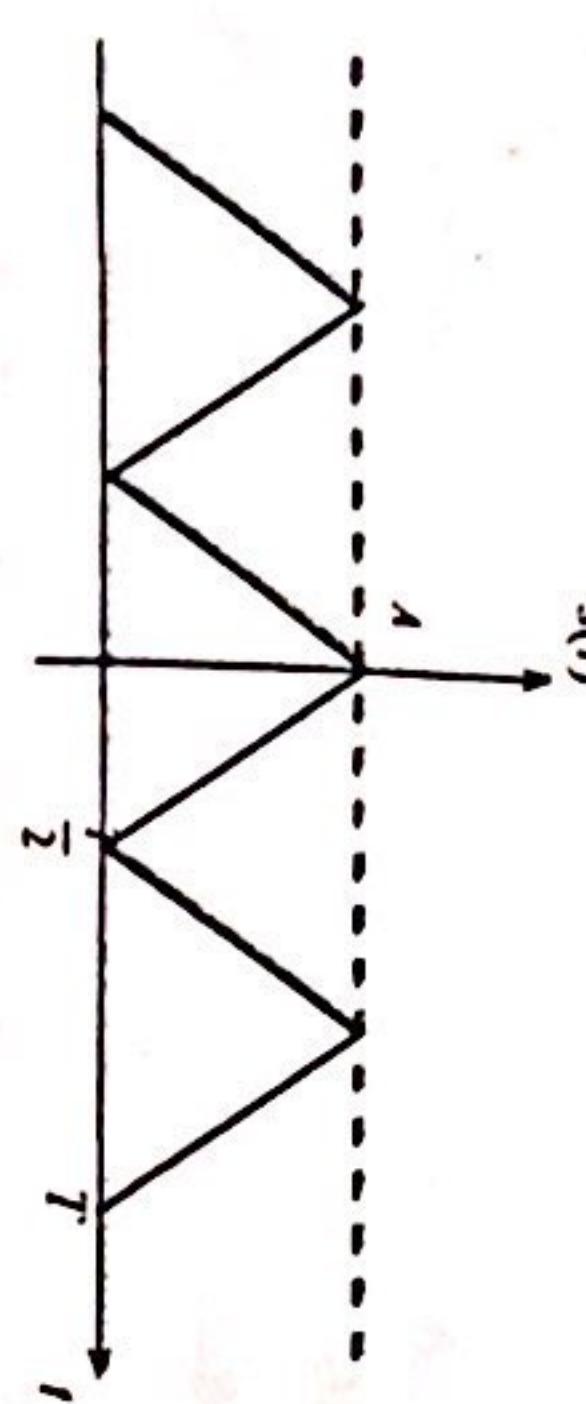
## Révisions sur le filtrage analogique - analyse spectrale - traitement numérique

### TD N° 1: ELECTROCINÉTIQUE

#### Signaux périodiques - Effet des filtres

##### **EXERCICE N°1:** Décomposition spectrale

On considère le signal triangulaire ci-dessous:



Déterminer, sans calcul explicite, laquelle des quatre propositions ci-dessous correspond à la décomposition en série de Fourier du signal.

1.  $\frac{A}{2} + 4 \frac{A}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)\omega_0 t]}{(2n-1)^2}$
2.  $\frac{A}{2} - 4 \frac{A}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n-1)\omega_0 t]}{(2n-1)^2}$
3.  $\frac{A}{4} - 4 \frac{A}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)\omega_0 t]}{(2n-1)^2}$
4.  $\frac{A}{2} - 4 \frac{A}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)\omega_0 t]}{(2n-1)^2}$

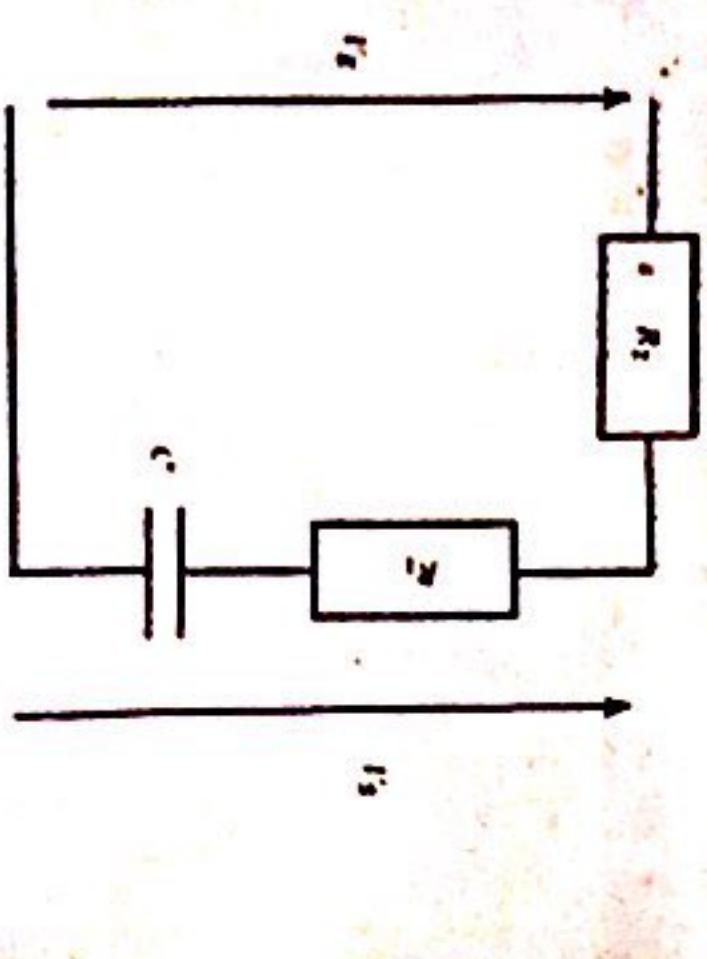
$$V_F(t > 0) = A$$

On précise que toutes les tensions étaient nulles avant  $t = 0$ , et que le condensateur était déchargé.

Déterminer le signal de sortie. Tracer l'allure de  $V_S(t)$ .

##### **EXERCICE N°2:** Analyses spectrale et temporelle de la réponse d'un filtre

On considère le circuit représenté sur la figure ci-contre, composé d'un condensateur de capacité  $C = 10 \text{ nF}$  et de deux résistances  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$  et  $R_2 = 90 \text{ k}\Omega$ .



$$e(t) = \frac{8E}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos[(2p+1)\omega_0 t]$$

Ce signal traverse un filtre linéaire dont la fonction de transfert est:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

- Quelle est la nature du filtre exploité ici?

- On ne se préoccupe pas du déphasage introduit par le filtre. On cherche à obtenir une atténuation de moitié de la puissance de l'harmonique de rang 5. Quelle fréquence de coupure  $\omega_c$  du filtre doit-on choisir? Quelle est alors l'atténuation sur la puissance:

- du fondamental?
- de l'harmonique de rang 3?
- de l'harmonique de rang 7?

Quelle est l'amplitude de l'harmonique de rang 7 par rapport à celle du fondamental après filtrage?

L'atténuation de cet harmonique n'est pas suffisante. On se propose alors de "cadrer" 3 filtres identiques ayant la même fréquence de coupure.

- a. Déterminer la fonction de transfert du filtre résultant de cette association. Quelle hypothèse doit on faire sur les caractéristiques d'entrée du filtre?

b. Quelle est alors l'atténuation sur la puissance:

- du fondamental?
- de l'harmonique de rang 3?
- de l'harmonique de rang 5?
- de l'harmonique de rang 7?

Quelle est l'amplitude de l'harmonique numéro 7 relativement à l'amplitude du fondamental après filtrage ? Quelle est l'atténuation en dB par décade de ce filtre?

**EXERCICE N°4: Détermination des caractéristiques d'un filtre par exploitation d'oscillosogrammes**

Pour analyser les composantes fréquentielles d'un signal sonore, on utilise un transducteur (microphone) qui convertit le signal en une tension  $v_e$ , puis un filtre passe-bande qui extrait les composantes sinusoïdales de  $v_e$ , de fréquences voisines d'une fréquence  $f_0$  innée. On note  $v_s$  la tension de sortie du filtre. Le filtre est un circuit linéaire dont la fonction de transfert s'écrit:

$$H(j\omega) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{H_0}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

On se propose de déterminer les caractéristiques  $H_0$ ,  $Q$  et  $\omega_0$  du filtre à partir des oscillosogrammes obtenus en régime périodique pour une tension d'entrée  $v_e$  rectangulaire pour deux valeurs de fréquences. On rappelle la décomposition en série de Fourier

$$v_e(t) = V_0 \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin[(2k+1)\omega_1 t]}{2k+1} \right) \quad \text{avec } \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

- Première expérience (oscilloscopie de la figure 1):

- voies 1 et 2 en position DC - base de temps à  $50\mu\text{s}/\text{div}$  - sensibilités à  $0,5 \text{ V/div}$  en voie 1 et  $2 \text{ V/div}$  en voie 2

Dans cette expérience: la tension  $V_s$  obtenue est quasi-sinusoidale et si on augmente ou diminue la fréquence de  $T$  par rapport à la valeur correspondant à cet oscilloscopage, on constate que l'amplitude de  $V_s$  diminue.

- Seconde expérience (oscilloscopie de la figure 2):
  - voies 1 et 2 en position DC - base de temps à  $5\mu\text{s}/\text{div}$  - sensibilités à  $2 \text{ V/div}$  en voie 1 et  $0,2 \text{ V/div}$  en voie 2

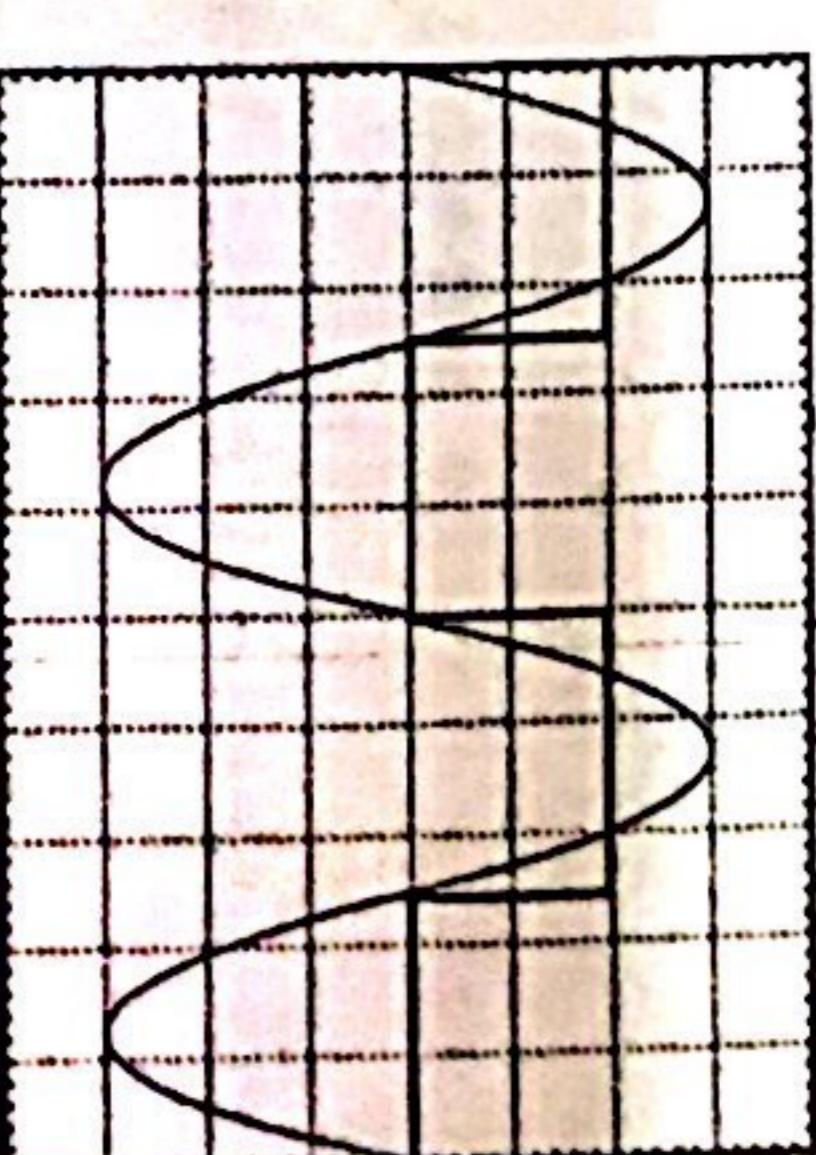


Figure 1

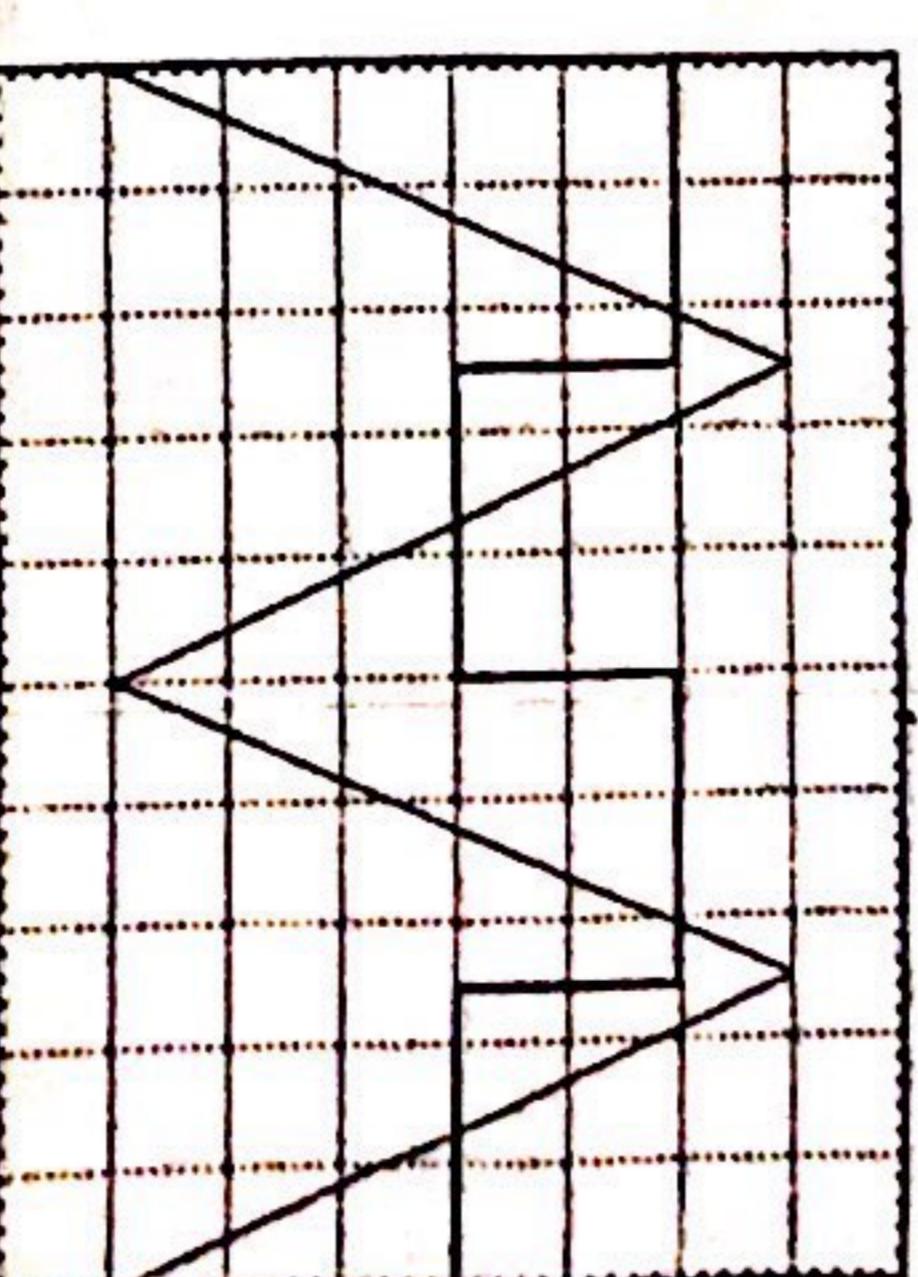


Figure 2

- ① Pourquoi dans chaque expérience, la tension  $V_s$  de sortie ne comporte-t-elle pas de composante continue contrairement à la tension d'entrée  $v_e$ ?
- ② Première expérience: pourquoi peut-on obtenir une tension de sortie  $V_s$  quasi-sinusoïdale alors que la tension  $v_e$  est rectangulaire?
- ③ Déduire de l'oscilloscopage de la première expérience et du commentaire qui l'accompagne: la pulsation  $\omega_0$  et la valeur de  $H_0$ .
- ④ Dans la deuxième expérience,  $V_s$  est triangulaire alors que  $v_e$  est rectangulaire. Le filtre a donc un comportement intégrateur.
- a. Donner l'expression approchée de  $H(j\omega)$  dans le domaine de fréquences correspondant à la deuxième expérience.

- b. En utilisant l'oscillogramme de la deuxième expérience, déterminer en justifiant précisément la méthode utilisée, le rapport  $\frac{H_0 \omega_0}{Q}$  (on se souviendra que la composante continue n'est pas intégrée). En déduire la valeur de  $Q$ .

## — Non linéarité - introduction/suppression d'harmoniques —

**EXERCICE N°5:** Linéarité et non linéarité des filtres

On envoie en entrée de différents filtres le signal  $e(t)$  dont le spectre en amplitude est représenté en figure ci-contre. On note la fréquence réduite  $x = \frac{f}{f_0}$  avec  $f_0 = 1 \text{ kHz}$ .

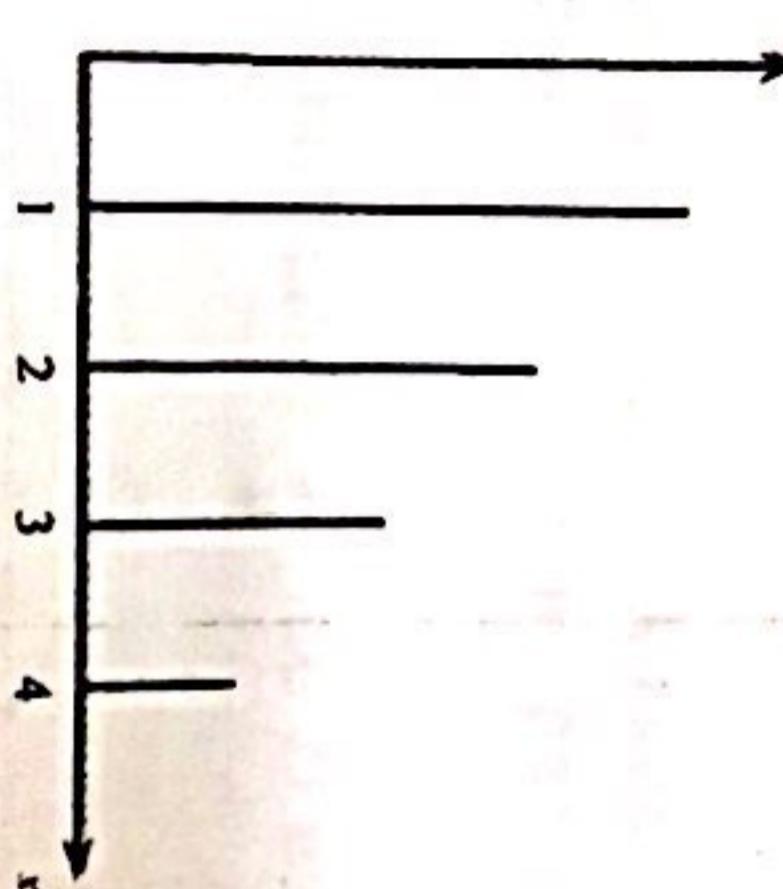


Figure 1: Spectre du signal  $e(t)$

On obtient en sortie des filtres (1), (2), et (3) un signal  $s(t)$  dont les spectres en amplitude sont donnés en figures ci-dessous.

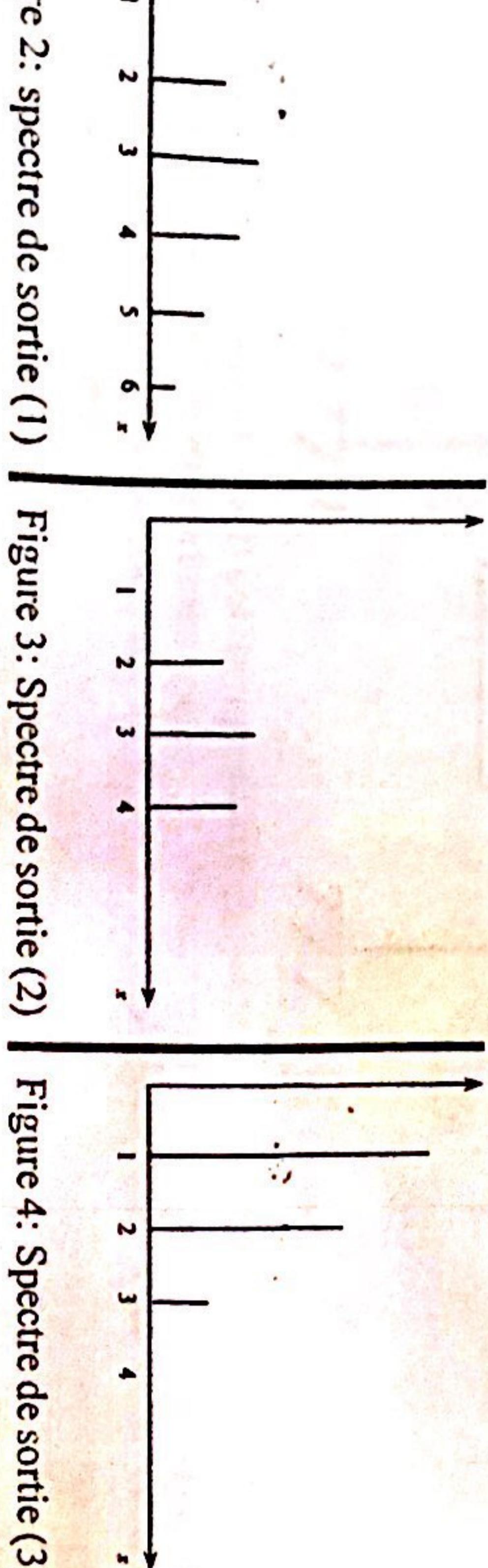
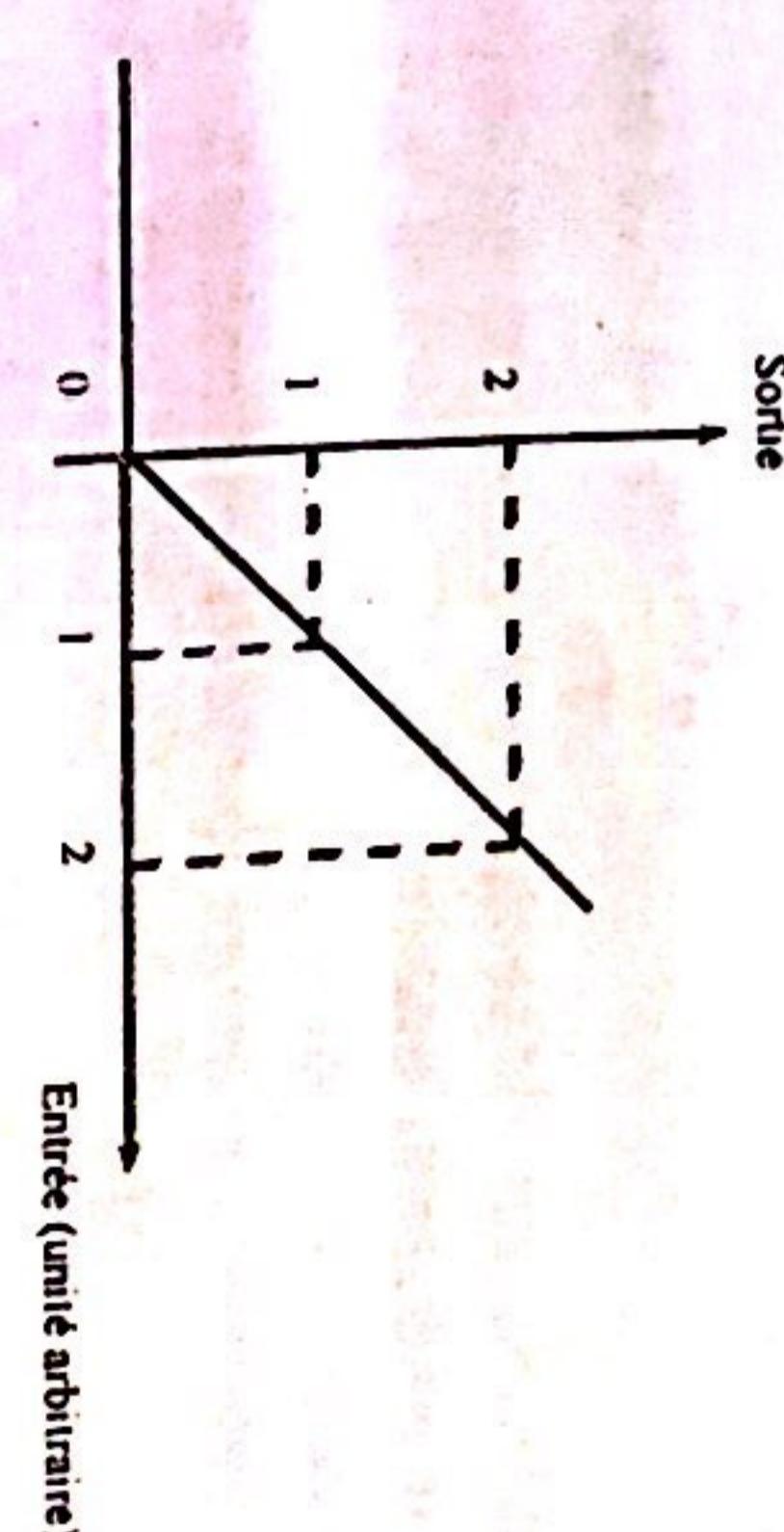
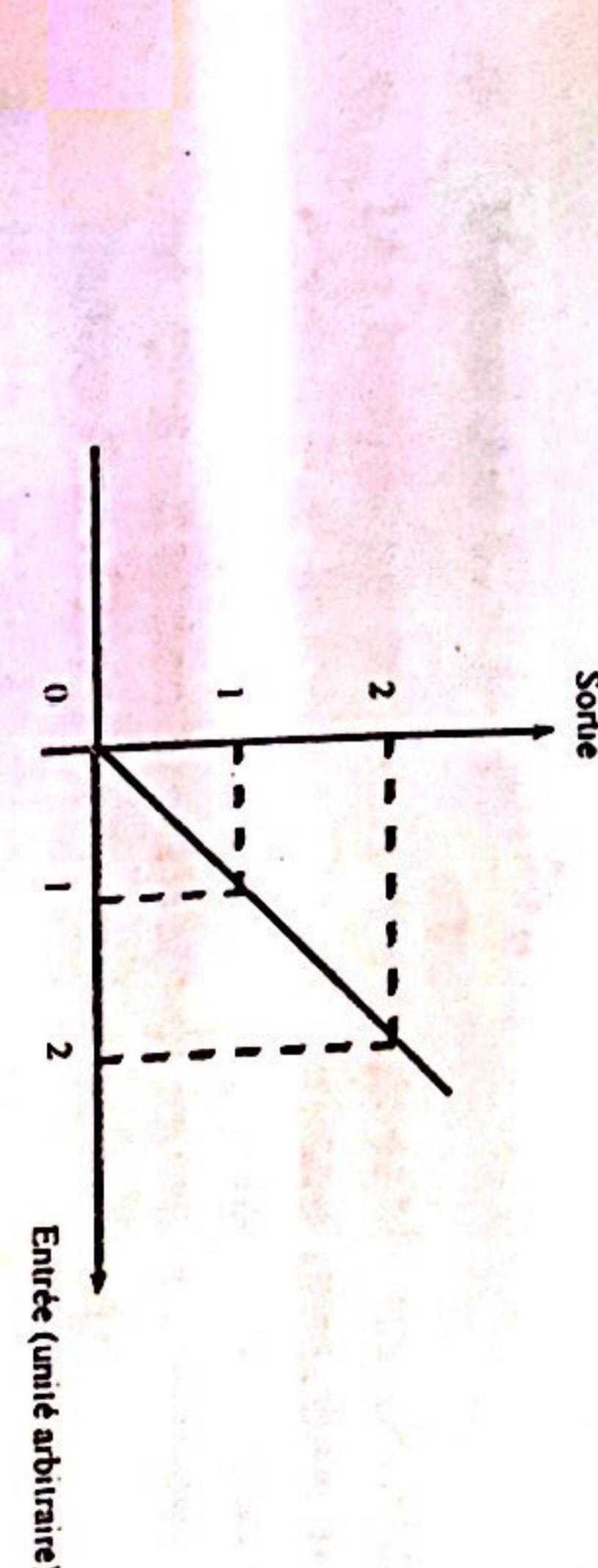


Figure 3: Spectre de sortie (2)

- Quel est (ou quels sont) le(s) filtre(s) non linéaire(s)?
- Caractériser les filtres linéaires et donner un ordre de grandeur de leur fréquence de coupure.

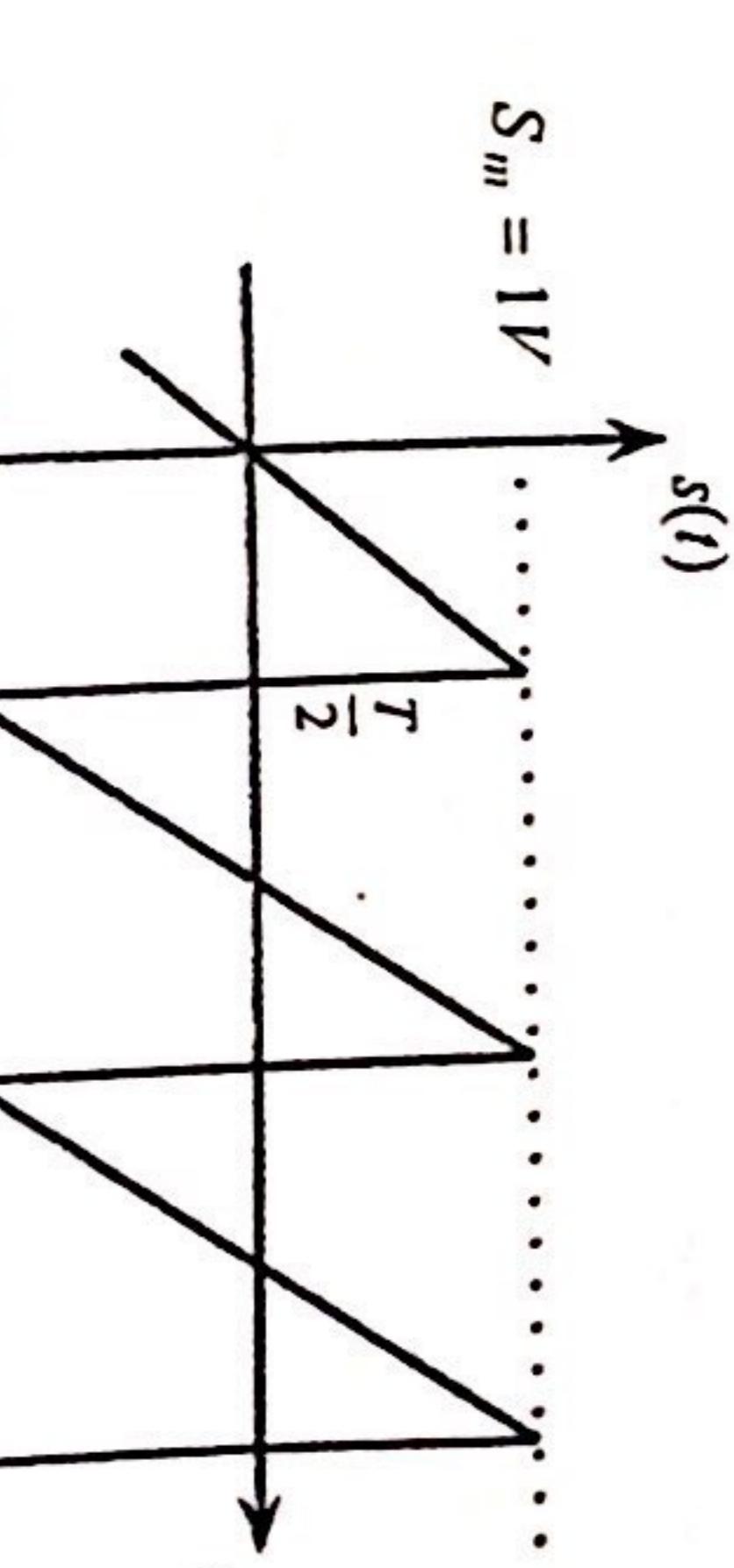
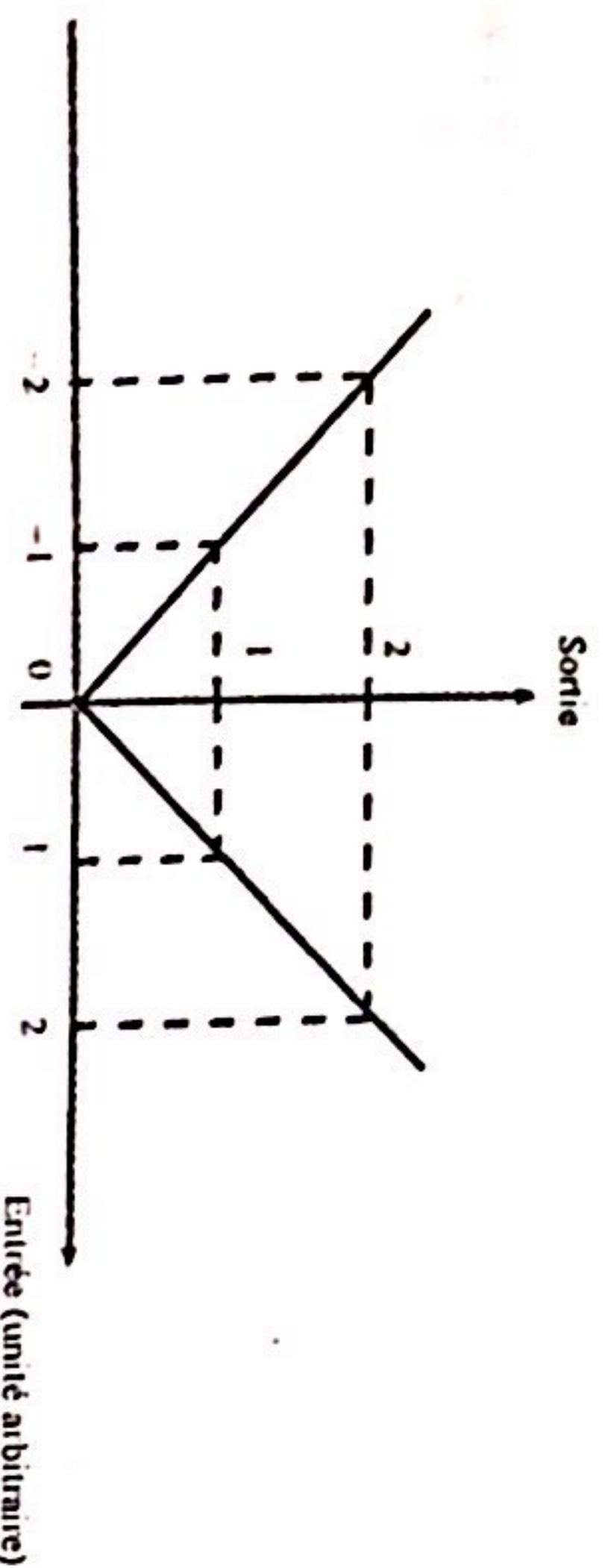


- Représenter sur un même graphique le signal d'entrée et le signal de sortie, en considérant la phase à l'origine du signal reçu comme une constante, de valeur quelconque (on omet ses fluctuations)
- Justifier le qualitatif de redresseur donné à l'opérateur.
- Déterminer les fréquences des 3 premières raies spectrales du signal sortant de l'opérateur.
- Quel type de filtre permet, à partir du signal de sortie, de récupérer un signal constant  $D$ , dont la valeur est proportionnelle à  $A$ ? Préciser la constante de proportionnalité  $\frac{D}{A}$  caractérisant la sensibilité du détecteur, en considérant que le gain du filtre est égal à l'unité pour la composante utile.
- On préfère généralement utiliser un autre opérateur, appelé redresseur bi-alternance, dont la caractéristique est donnée ci-dessous.

Un signal reçu par une antenne dans le domaine hyperfréquence est assimilé à une onde sinusoïdale d'amplitude  $A$  et de fréquence  $f$ . On désire déterminer son amplitude, qui est supposée contenir l'information utile, en sachant que la phase à l'origine n'est pas stable, ce qui empêche de recourir aux procédés usuels (détection synchrone, cf futur TP)

### ❶ Insuffisance d'un simple procédé de filtrage

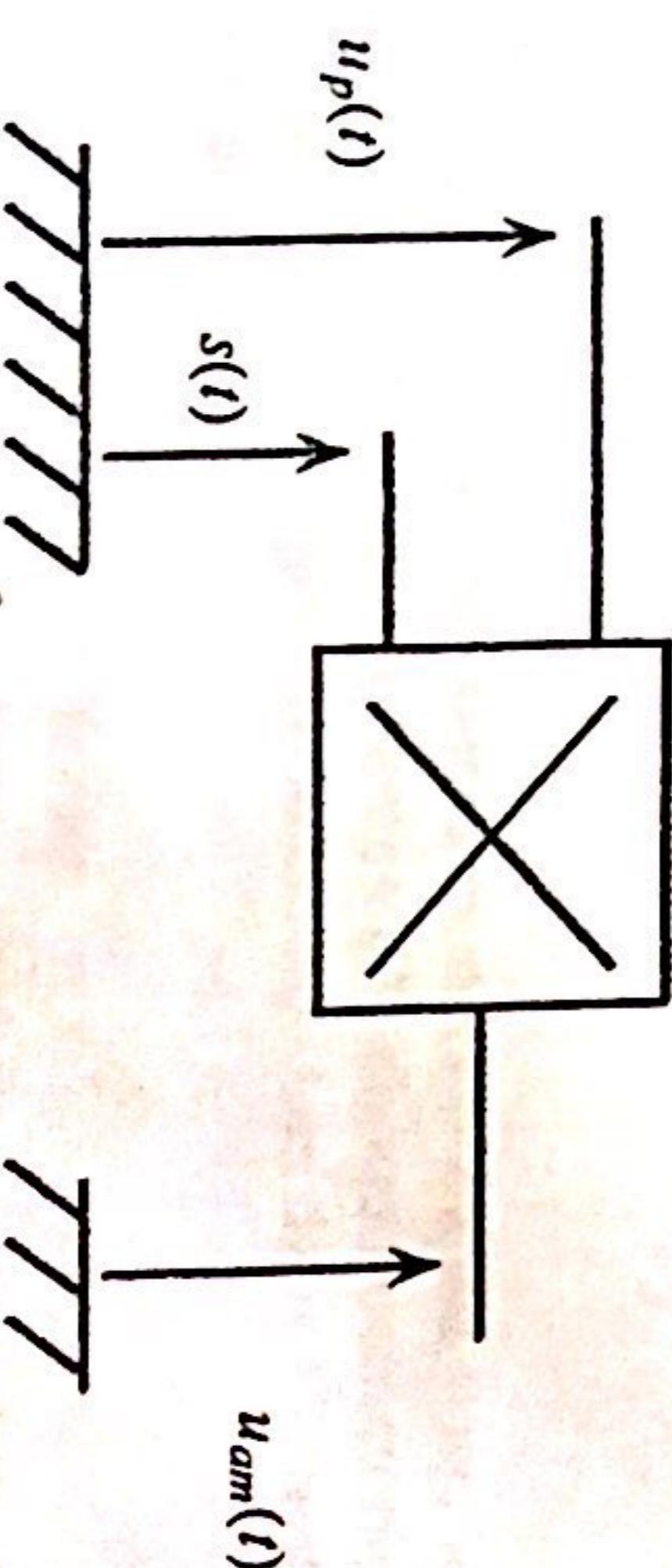
- L'utilisation d'un filtre moyenneur, de type passe-bas, appliqué au signal reçu, suffit-elle?
- Montrer par un examen de l'aspect spectral, qu'il est vain de chercher à effectuer la détection par simple filtrage.
- On utilise un composant à base de diode (jonctions semi-conductrices) réalisant un opérateur dont la relation entrée-sortie est donnée en figure ci-dessous:



- a. Les raies spectrales du signal obtenu sont-elles situées aux mêmes fréquences que celles obtenues précédemment?
- b. On place un filtre de même type que celui proposé ci-dessus, indiquer quels avantages l'opérateur redresseur bi-alternance procure par rapport au redresseur simple.
- c. Préciser la nouvelle constante de proportionnalité  $\frac{D'}{A}$ , où  $D'$  est la valeur du signal sortant du filtre.

### EXERCICE N°7: Analyse spectrale d'une modulation

La transmission hertzienne des signaux, de nature analogique comme numérique, nécessite pour des raisons physiques de transmettre ces derniers en haute fréquence. Pour cela, on a recours au principe de modulation (modulation d'amplitude dans le cas présent (cf TP n°7)), opération réalisée dans cet exercice par un multiplicateur (cf schéma ci-dessous).



Le signal BF à transmettre  $s(t)$  est un signal de fréquence 1 kHz de type dent de scie, tandis que le signal HF dit de porteuse  $u_p(t) = U_p \cos \omega_p t$  est de fréquence  $f_p = 100 \text{ kHz}$ . La valeur maximale de cette tension est de  $U_p = 3V$ . L'opération de multiplication réalisée par l'opérateur est telle que:

$$u_{AM} = [k \cdot s(t) + 1] \times u_p(t) \quad \text{avec } k = 0,67 \text{ V}^{-1}$$

- Q** Représenter l'allure du signal modulé en amplitude  $u_{AM}(t)$ .
- Q** ANALYSE SPECTRALE
- a. Montrer que la série de Fourier du signal  $s(t)$  peut s'écrire:
- $$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\Omega t$$

b. Montrer que  $b_n = (-1)^{n+1} \frac{2S_m}{n\pi}$

c. Les bandes passantes des composants qui constituent les circuits de transmission sont limitées. On s'intéresse uniquement aux harmoniques de  $s(t)$  dont l'amplitude est supérieure ou égale au cinquième de celle du fondamental. Quel est le nombre d'harmoniques nécessaires pour décrire le signal  $s(t)$ ? Donner alors l'expression approchée de  $s(t)$ .

- d. Représenter l'allure du spectre du signal.
- e. Quelle est la bande de fréquence,  $\Delta f$ , occupée par le signal modulé en amplitude  $u_{AM}(t)$ ?

### Q CALCUL DE LA PUISSANCE MOYENNE

- a. En l'absence de signal modulant à l'entrée du multiplicateur, calculer la puissance moyenne  $P_0$  que dissiperait  $u_{AM}(t)$  aux bornes d'une résistance  $R$ .
- b. On applique maintenant le signal modulant  $s(t)$ , calculer la puissance moyenne  $P$  que dissiperait  $u_{AM}(t)$  toujours aux bornes d'une résistance  $R$ . On exploiter la décomposition spectrale effectuée à la question précédente.
- c. En déduire la valeur du rapport  $\frac{P_0}{P}$ . Conclusion.

## Echantillonnage de signaux - Signaux numériques

**EXERCICE N°8:**

**Répliement**

On échantillonne un signal analogique à  $500 \text{ Hz}$ . Ce signal est la somme de 3 sinusoïdes pures de fréquences  $50, 100$ , et  $300 \text{ Hz}$ .

- Donner l'allure du spectre de ce signal analogique.
- Donner l'allure du spectre du signal échantilloné.
- Donner enfin l'allure du signal analogique reconstruit à partir du signal échantilloné. On pourra s'aider d'une calculatrice graphique pour ce travail.

**EXERCICE N°9:**

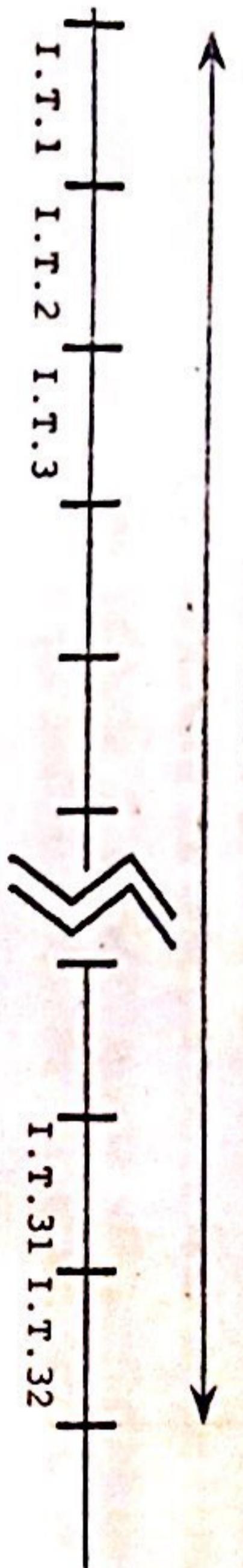
**Multiplexage temporel d'une transmission téléphonique**

L'augmentation incessante des coûts de production des métalux a forcée les électroniciens à trouver des solutions permettant d'économiser l'exploitation des conducteurs électriques lorsqu'il s'agit de véhiculer des signaux par voie filaire. Parmi les solutions envisagées, le multiplexage est l'une des plus répandues aujourd'hui; elle est couramment employée dans les voitures modernes, mais également dans l'installation des lignes téléphoniques dont il est question dans cet exercice.

Un de ces systèmes est le M.I.C pour **Modulation d'Impulsions et Codage**, permettant la transmission simultanée de 30 communications sur la même ligne.

- Pour ce faire, chaque signal est tout d'abord numérisé. Justifiez le choix de la cadence de 8000 échantillons par seconde, sachant que la bande fréquentielles est limitée à  $[300 \text{ Hz}, 3400 \text{ Hz}]$ .

Afin d'assurer la transmission simultanée de 30 voix, le signal est organisé en trames de 32 intervalles de temps (IT) chaque communication se voyant assigner un IT par trame (cf figure ci-dessous). Les deux IT restants servent à la gestion du réseau.



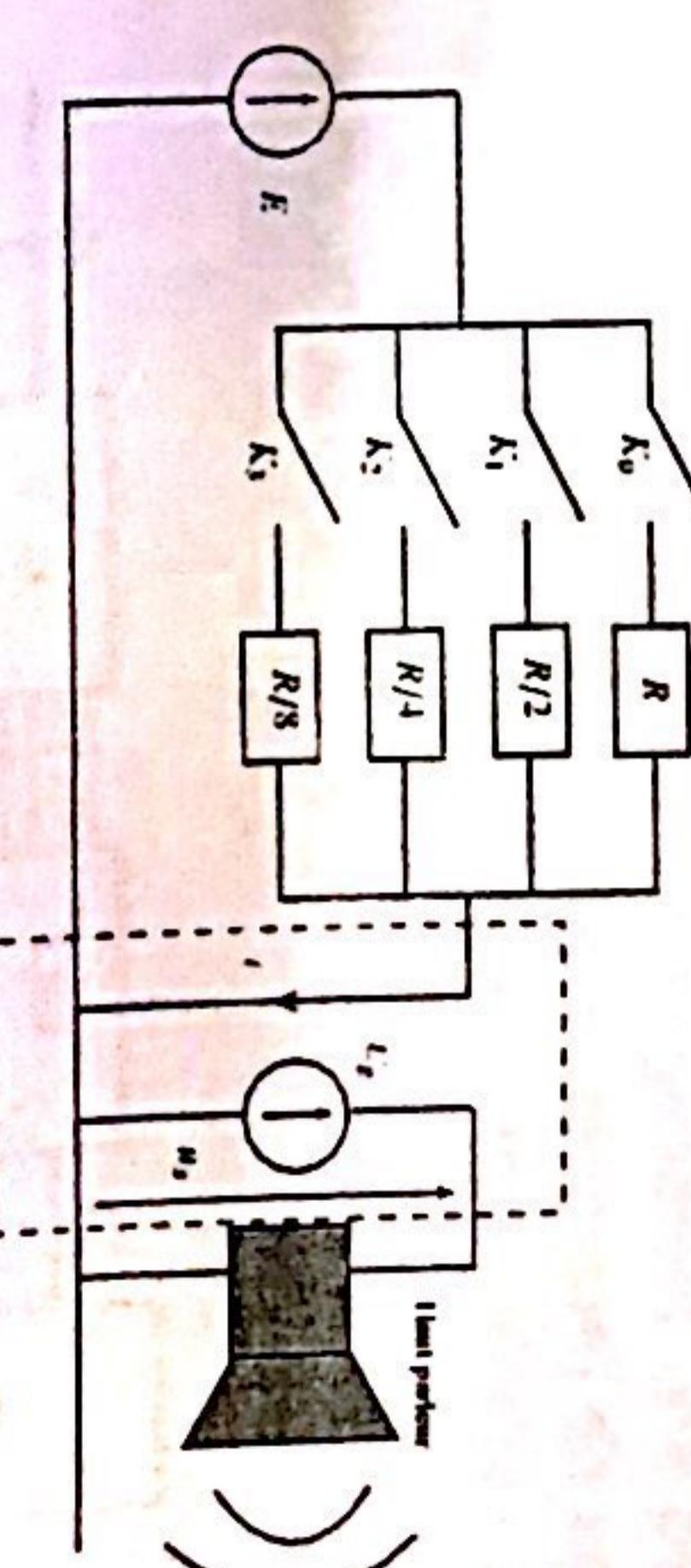
Quelle est la durée d'une trame? En déduire le débit d'échantillons par seconde, toutes communications confondues. Chaque signal vocal est numérisé sur 8 bits selon une loi non linéaire (on parle de compression)

- Déterminer le débit binaire, exprimé en bits par seconde, du signal complet.
- La loi de compression distribue les niveaux de quantification de manière non équidistante, le quantum étant plus faible pour les faibles valeurs de signal. Quel est l'intérêt, sachant que les signaux vocaux varient dans une large gamme d'amplitude?

**EXERCICE N°10:**

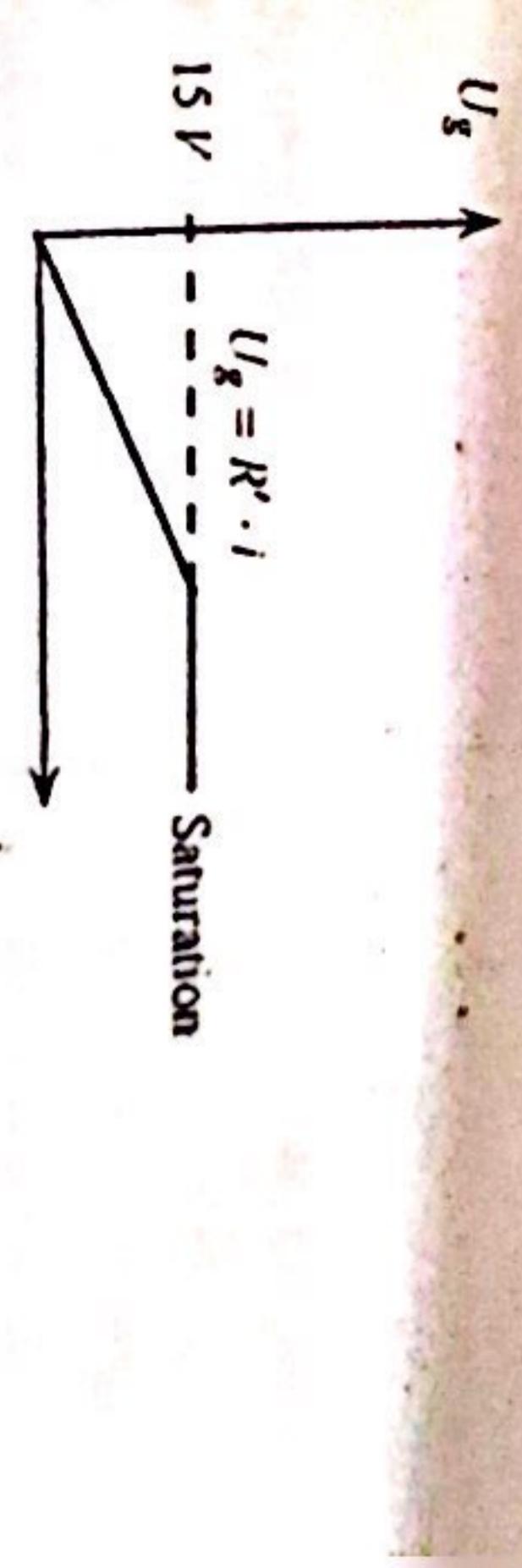
**Etude d'un CAN 4 bits à résistances pondérées dans un lecteur de CD**

Les haut-parleurs de chaîne Hifi fonctionnent avec des signaux analogiques; ainsi, la restitution par ses derniers du son enregistré sous forme numérique sur un support optique CD nécessite l'utilisation d'un CNA ou convertisseur numérique-analogique. On propose ici l'étude d'un CNA 4 bits à résistances pondérées dont le schéma de principe est donné ci-dessous:



Il est constitué d'une tension  $E$  constante de référence, de 4 résistances notées  $n$  ( $0 \leq n \leq 3$ ) de valeur  $R_n = \frac{R}{2^n}$  et de 4 interrupteurs  $K_n$ . Un interrupteur ouvert est l'état 0 et un interrupteur fermé est l'état 1. Par exemple, 1101 signifie  $K_3 = 1, K_2 = 1, K_1 = 0$ , et  $K_0 = 1$ . Un convertisseur courant-tension (bloc en pointillés) donne une tension  $U_g$ .

On donne la caractéristique entrée-sortie du convertisseur (voir tracé ci-contre); il se comporte en sortie comme un générateur de tension parfait de *f.e.m.*  $U_g = R'i$  tant que la tension de saturation  $V_{sat} = 15 \text{ V}$  n'est pas atteinte. Il sature à  $V_{sat} = 15 \text{ V}$  si on lui demande une tension supérieure.

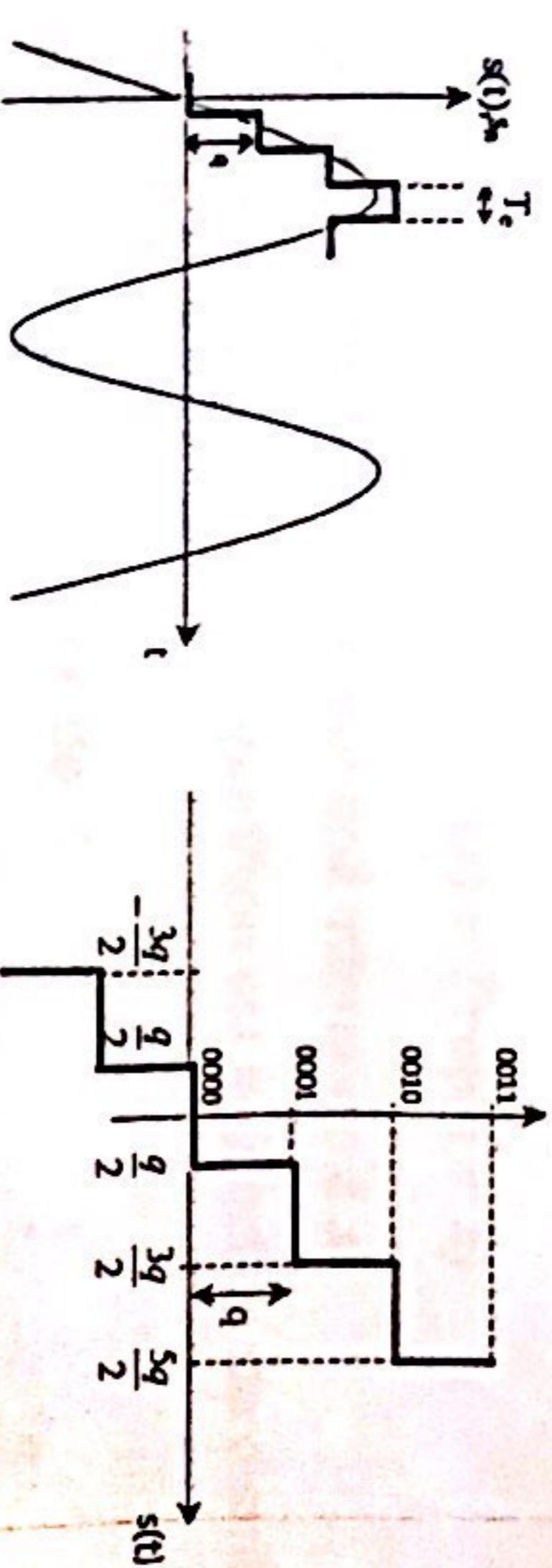


Déterminer l'intensité du courant circulant dans la résistance  $R_u$  en fonction de  $K_m$ ,  $R$ , et  $E$ . En déduire  $u_s$  en fonction des  $K_m$ , de  $R$ ,  $R'$ , et de  $E$ . Commenter le résultat obtenu.

- Application numérique. On choisit dans un premier temps  $R = R' = 1 \text{ V}$ . Calculer la valeur de tension correspondant à 0000, 0001, 0010, 0011, 0100. Calculer également la tension de sortie maximale, correspondant 1111. Commentaire?
- En réalité, le signal audio est enregistré sur un CD avec 16 bits. On place donc en parallèle 16 résistances de valeurs  $R_n = \frac{R}{2^n}$  ( $0 \leq n \leq 15$ ). Calculer la valeur maximale correspondante (convertie en décimal), et en déduire la tension maximale demandée en sortie de montage. Quel problème cela pose-t-il
- Pour remédier à ce problème, on décide de changer les valeurs de  $R$ ,  $R'$ , et  $E$ . Quelle condition doivent vérifier les composants pour que le convertisseur courant-tension ne soit jamais saturé?

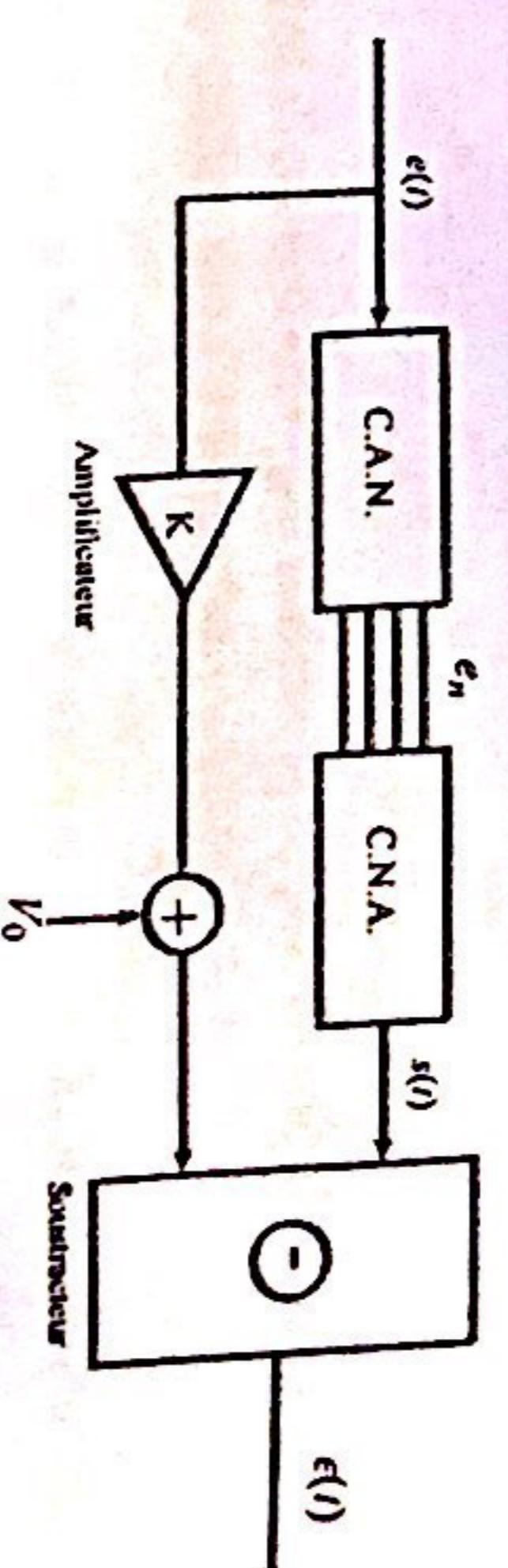
### EXERCICE N° 11: Erreur de quantification

Du fait de la numérisation d'un signal par un convertisseur à loi linéaire, une erreur d'arrondi est commise sur chaque échantillon.



Lors de la numérisation d'un signal par un C.A.N. (convertisseur analogique numérique), les arrondis des valeurs échantillonnées engendrent une perte d'information. Si l'on place un C.N.A. (convertisseur numérique analogique) en sortie du C.A.N., on obtient donc un signal analogique altéré que l'on peut donc décrire comme un signal "bruité".

Pour étudier ce "bruit" de quantification, on propose le montage suivant:



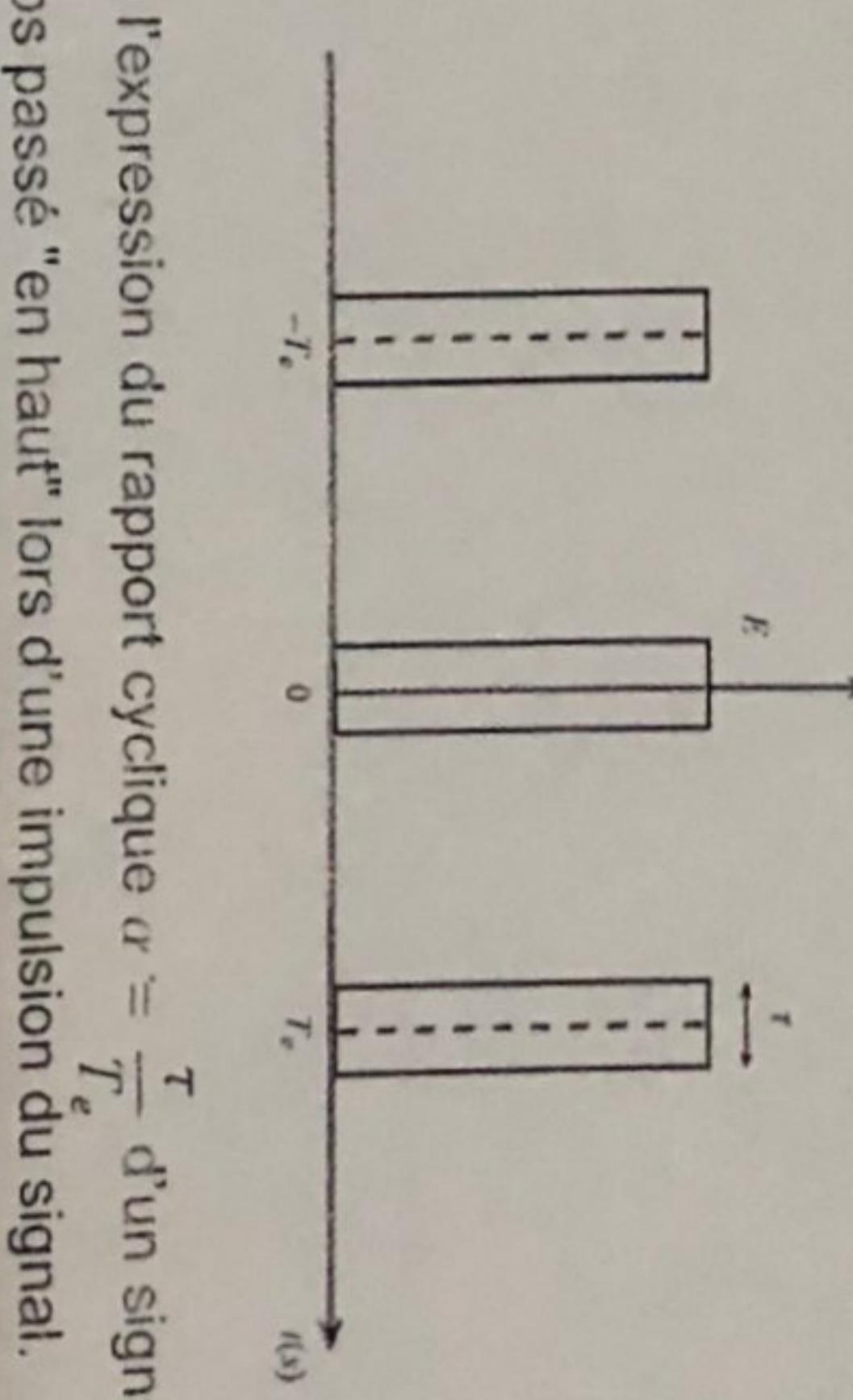
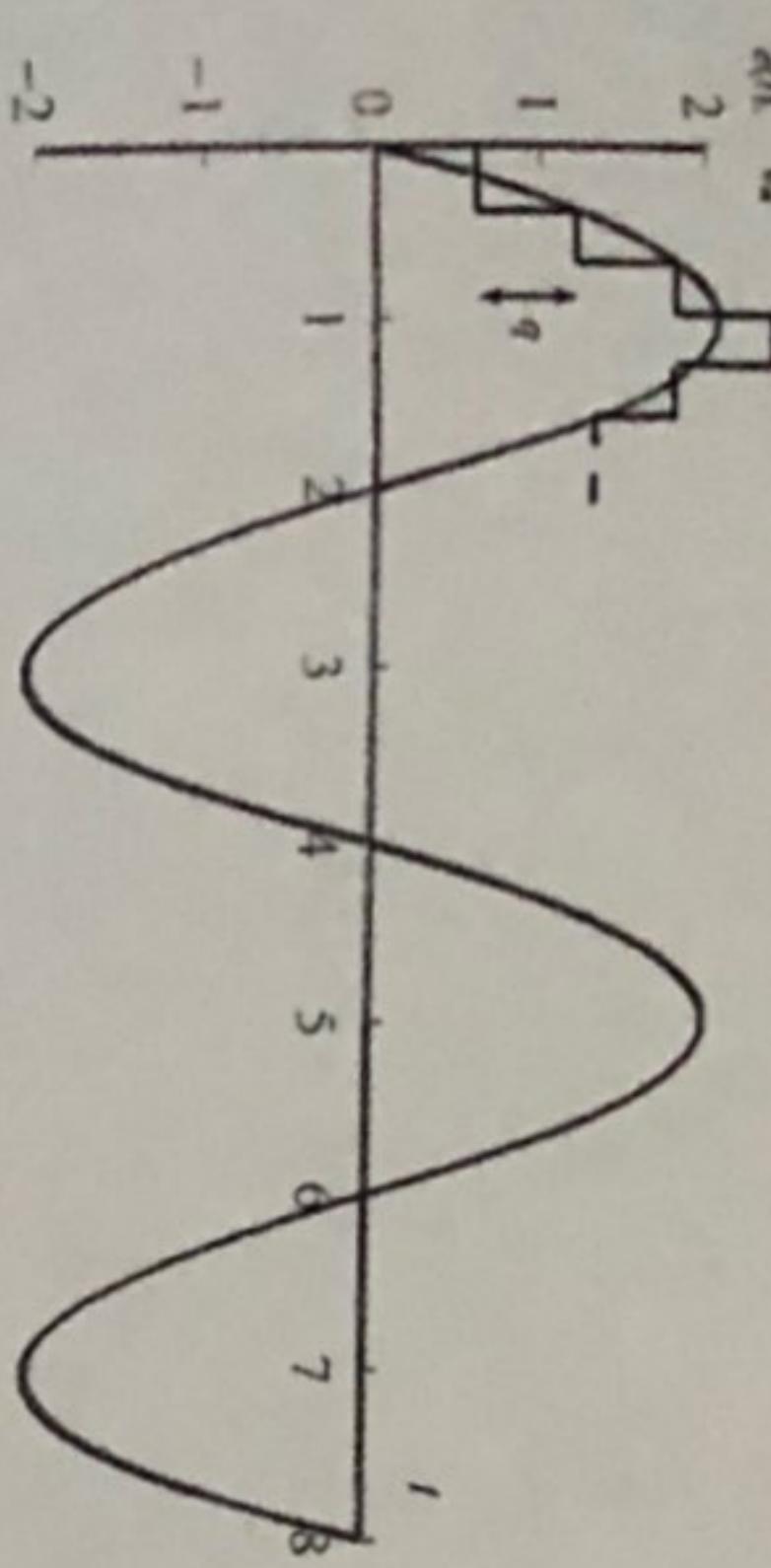
Les deux signaux  $e(t)$  et  $s(t)$  obtenus respectivement en entrée et en sortie l'association sont soustraits l'un à l'autre; le convertisseur analogique numérique linéaire et de pas  $q$  constant (écart fixe entre deux valeurs successives du signal numérisé).

- En notant  $q$  le pas de quantification, préciser dans quel intervalle l'erreur d'arrondi  $\epsilon$  prend sa valeur.
- Lors d'un essai du convertisseur avec un signal triangulaire, quelle est l'évolution temporelle de  $\epsilon(t)$  (on raisonnera sur une portion croissante de l'entrée)?
- En raisonnant sur une période  $T$  de  $\epsilon(t)$ , quelle valeur moyenne peut-on lui attribuer? Quelle moyenne quadratique? Quelle valeur efficace  $\epsilon_{eff}$ ?

APPLICATION NUMÉRIQUE: comparer  $\epsilon_{eff}$  et la dynamique  $\Delta s$  pour un convertisseur linéaire 8 bits ou 12 bits.

L'amplificateur  $K$  et l'additionneur permettent de modifier le signal  $\epsilon(t)$  (amplification ajout d'une tension  $V_0$ ) afin de compenser un éventuel décalage ou une atténuation les suppose réglés de telle manière que  $s(t) = e(t)$  lorsque la valeur de  $\epsilon(t)$  correspond exactement à un multiple du pas de quantification  $q$  dont la signification est donnée le schéma ci-dessous:

On considère le signal  $p(t)$  formé d'une suite périodique d'impulsions de largeur  $\tau$ .



On rappelle l'expression du rapport cyclique  $\alpha = \frac{\tau}{T_e}$  d'un signal  $T_e$  périodique,  $\tau$  désignant le temps passé "en haut" lors d'une impulsion du signal.

Soit  $\epsilon(t) = s(t) - c(t)$  l'erreur d'arrondi commise à un instant  $t$ ; on décrit ici  $\epsilon(t)$  comme une variable aléatoire.

- Dans quel intervalle  $I$  l'erreur  $\epsilon(t)$  prend-elle sa valeur?
- On suppose  $\epsilon$  uniformément distribuée sur cet intervalle, définir sa fonction de répartition:

$$F(x) = \text{Prob}(\epsilon < x)$$

qui est la probabilité que l'erreur soit inférieure à  $x$ .

- La dérivée de la fonction de répartition est la fonction de distribution  $f(x)$ ; exprimer  $f(x)$  et tracer son graphe.

- Quelle est la valeur moyenne de  $\epsilon$ ?
- On précise que la moyenne quadratique de  $\epsilon$  s'exprime comme:

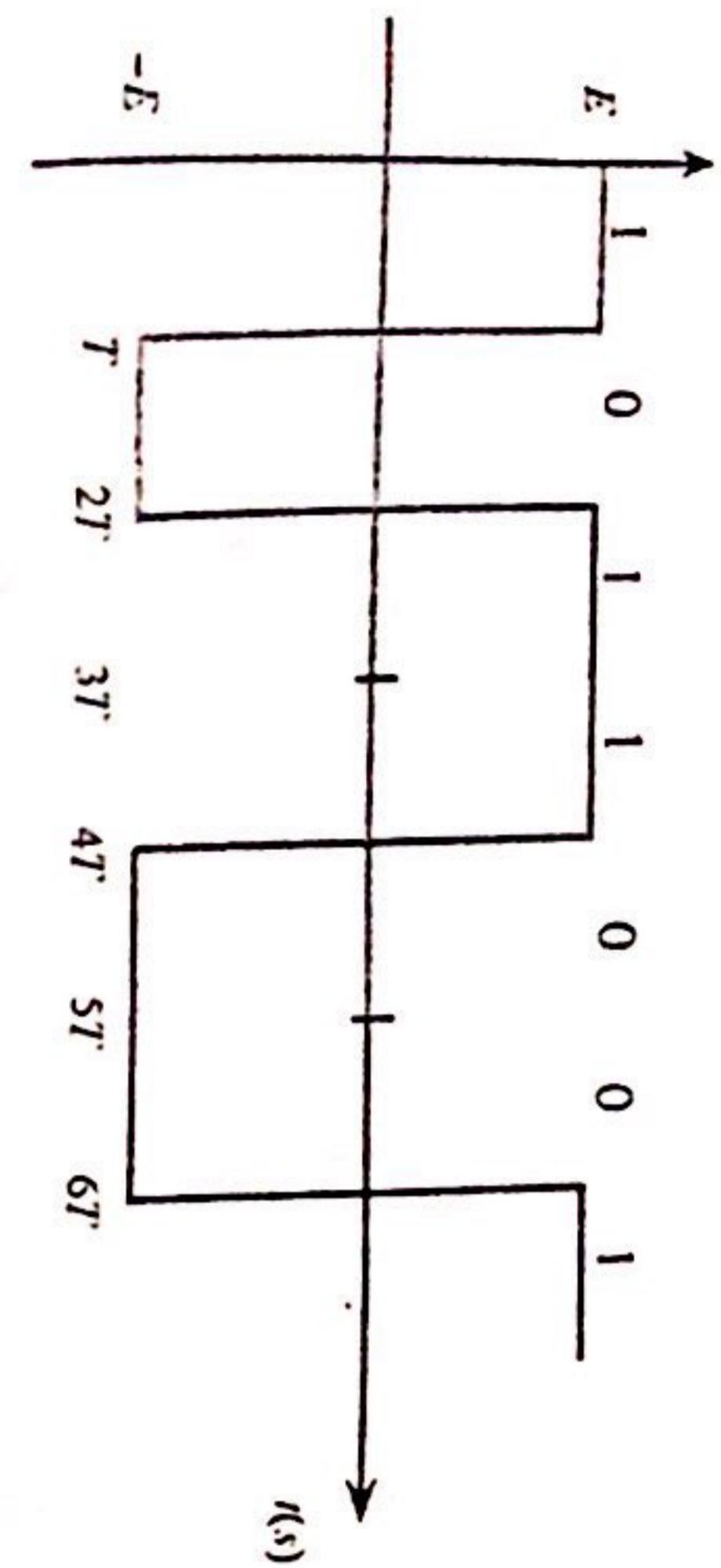
$$\langle \epsilon^2 \rangle = \int x^2 f(x) \cdot dx$$

Déterminer  $\langle \epsilon^2 \rangle$  et sa racine carrée.

Que représente cette dernière grandeur? Comment la mesure-t-on?

**EXERCICE N° 13:** Spectre d'un signal numérique

Si l'on note  $I(v)$  la transformée de Fourier de l'impulsion, justifier sans développement important que la densité spectrale de puissance du signal, c'est à dire la puissance par unité de fréquence comprise entre  $v$  et  $v + dv$ , soit proportionnelle à  $\frac{1}{T} \cdot |I(v)|^2$



- Que devient alors le spectre, si l'on remplace l'impulsion précédente par un train d'onde sinusoïdal de fréquence  $\nu_0 \gg \frac{1}{T}$  et de durée  $T$ ? Proposer une forme vraisemblable pour le spectre d'une telle communication.

## Cadeaux pour vous ! (Travail personnel)

### Exercice :

On se propose d'étudier les états liés d'une particule de masse  $m$ , d'énergie  $E$  indépendant du temps, dans un puits de potentiel à une dimension défini par :

$$U(x) = \begin{cases} U_0 & \text{si } x < -a \\ 0 & \text{si } -a < x < 0 \\ \infty & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) Tracer  $U(x)$  ?

2) A partir de l'équation de Schrödinger écrite pour la particule de masse  $m$ , placée dans le potentiel  $U(x)$ , d'énergie  $E$  telle que  $0 < E < U_0(x)$ , montrer que la fonction d'onde associée à la particule est de la forme

$$\varphi(x) = \begin{cases} Ae^{qx} + A'e^{-qx} \\ B \sin(Kx) + C \cos(Kx) \\ 0 \end{cases}$$

on indiquera à quelles régions de l'espace correspondant les équations de Schrödinger et les fonctions données ci-dessus. On exprimera  $K$  et  $q$ .

3) On utilisant le fait que ces fonctions présentent des densités de probabilité et sont continues aux points  $-a$  et  $0$ , lesquelles de ces solutions faut-il retenir dans la suite de ce problème.

4) Etablir que :  $\tan(Ka) = -\frac{K}{q}$

5) Calculer  $P_1$  la probabilité de présence de la particule dans la région de l'espace  $x < -a$ . La comparer au cas classique.

### Exercice :

Soit une particule d'énergie  $E$ , de masse  $m$  placée dans un puits de potentiel dissymétrique  $U$  défini par :

$$U(x) = \begin{cases} U_1 \text{ si } x < 0 \\ 0 \text{ si } 0 < x < a ; 0 < E < U_1 < U_2 \\ U_2 \text{ si } x > a \end{cases}$$

1/ Tracer  $U(x)$  ?

2/ A partir de l'équation de Schrödinger écrite pour la particule de masse  $m$ , placée dans le potentiel  $U(x)$  et d'énergie  $E$ , montrer que la fonction d'onde associée à la particule est de la forme :

$$\varphi(x) = \begin{cases} Ae^{qx_1} + A'e^{-qx_1} \\ B_1 e^{kx} + B_2 e^{-kx} \\ C e^{-q_1 x} + D e^{q_2 x} \end{cases}$$

On indiquera à quelles régions de l'espace correspondent les équations de Schrödinger et les fonctions données ci-dessus. On exprimera  $k$ ,  $q_1$  et  $q_2$ .

3/ En utilisant le fait que ces fonctions représentent des densités de probabilité et sont bornées, lesquelles de ces solutions faut-il retenir dans la suite de ce problème.

4/ Calculer  $P_1$  probabilité de présence de la particule dans la région de l'espace  $x < 0$ .

5/ Calculer  $P_3$  probabilité de présence de la particule dans la région  $x > a$ . En déduire  $P_2$  probabilité de présence de la particule dans la région  $0 < x < a$ .

6/ Montrer que l'on peut aussi écrire  $B \sin(kx + \delta) = B_1 e^{kx} + B_2 e^{-kx}$ , expliciter  $B, \delta$  en fonction de  $B_1$ ,  $B_2$ .

**Exercice 8 :**

Dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène les orbites de l'électron, supposé confiné dans un volume de dimension linéaire  $r_0$ , sont décrites par une fonction d'onde à symétrie sphérique dont l'extension spatiale est caractérisé par un rayon  $r$ .

- 1) Écrire le potentiel Coulombien auquel est soumis l'électron.
- 2) En appliquant la loi fondamentale de la dynamique, montrer que :

$$mv^2 = \frac{q^2}{r}$$

Avec  $q^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$  et où  $v$  et  $m$  sont respectivement la vitesse et la masse de l'électron.

- 3) Donner l'énergie totale de l'électron en fonction de  $r$ .
- 4) En déduire la valeur minimale. Que peut-on conclure ?
- 5) Écrire le principe d'incertitude de Heisenberg et donner son interprétation physique.
- 6) En admettant que l'incertitude sur la quantité de mouvement est  $\Delta p = p_{min}$  et  $\Delta r = r_0$

Où  $p_{min}$  est la quantité de mouvement minimale de l'électron ; montrer en utilisant le principe d'incertitude de Heisenberg que l'énergie cinétique  $T$  ne peut être inférieure à une valeur minimale :

$$T \geq T_{min} = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2}$$

- 7) Déterminer l'énergie minimale  $E_{min}$  et donner le rayon correspondant  $r_0$ .
- 8) Sachant que les orbites permises sont déterminées par la règle de quantification  $p = n\hbar$ , montrer que leurs rayons sont donnés par :

$$r_n = \frac{\hbar^2}{mq^2} n^2$$

En déduire le rayon  $r_0$  de l'état fondamental de l'atome d'hydrogène.

- 9) Donner l'expression de l'énergie quantifiée  $E_n$  et montrer que les transitions possibles pour l'atome d'hydrogène sont données par :

$$\Delta E = E_{nf} - E_{ni} = \frac{mq^4}{2\hbar^2} \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right)$$

- 6) Si l'électron atteint la vitesse de la lumière quelle est la dimension des bornes de ce puits de potentiel.
- 7) Si la fonction d'onde stationnaire est de carré sommable, déterminer sa constante de normalisation. Déterminer l'expression de la fonction d'onde.

### Exercice 5 :

Déterminer la valeur minimale de la longueur d'onde des rayons X émis par un écran de télévision quand les électrons, accélérés dans le tube cathodique par une tension de 1800V, sont arrêtés sur l'écran.

On donne  $\hbar c = 200 \text{ MeV} \cdot F$ ,  $m_e c^2 = 0,5 \text{ MeV}$ .

Conclusion ?

### Exercice 6 :

1/ Calculer la longueur d'onde de l'onde associée à un grain de poussière de diamètre 1mm, de masse  $m=10^{-15} \text{ kg}$  et de vitesse  $v=1 \text{ mm/s}$ .

L'étude de ce grain de poussière relève-t-elle de la mécanique quantique ?

2/ Même cas pour un véhicule de longueur 6m, de masse  $m=310^3 \text{ kg}$  et de vitesse  $v=60 \text{ km/h}$ .

3/ Calculer la longueur d'onde de l'onde associée à un neutron de masse  $M_n = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  et de vitesse  $V_n = 10^3 \text{ m/s}$  (le diamètre  $D_n$  d'un neutron est de l'ordre de 1 Angström)

4/ Un faisceau d'électrons est accéléré par une différence de potentiel  $V=100 \text{ Volts}$ .

Calculer la longueur d'onde associée à chacun de ces électrons.

On donne :  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

### Exercice 7 :

L'atome d'Hydrogène est composé d'un noyau (proton) et un électron tournant avec une vitesse  $v$  autour du noyau sur une orbite de rayon  $r$ .

1) Donner l'expression classique de la force électrostatique de Coulomb.

2) Dans la suite de cet exercice on posera  $e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0}$ . Donner les dimensions de  $e^2$ .

3) En égalant la force électrostatique à celle centrifuge due à la rotation de l'électron sur l'orbite de rayon  $r$  d'une part et en utilisant la théorie des quanta d'autre part, calculer en fonction  $m_e$ ,  $\hbar$  et  $e$  le rayon de Bohr.

4) Que représente physiquement le rapport  $\frac{e^2}{\hbar}$  ?

5) Calculer l'énergie potentielle de l'électron  $E_p = 0$  pour  $r = +\infty$ .

Montrer que l'énergie totale de l'électron est quantifiée. En déduire l'énergie de l'état fondamental.

## 2) $V_0$ infini

Si  $V_0$  tend vers l'infini :

- Que deviennent les solutions de l'équation de Schrödinger dans les régions (I) et (III)?
- En écrivant les conditions de continuité aux points  $x=0$  et  $x=a$ , déduire les valeurs possibles de l'énergie E de la particule dans le puits. Conclure.
- Généraliser à trois dimensions et retrouver les énergies de la particule et les fonctions d'onde associées. Donner la dégénérescence des 5 premiers niveaux d'énergie.

### Exercice 3 :

De De Broglie a suggéré qu'à tout corpuscule de masse  $m$  et de vitesse  $v$ , est associé une onde de longueur d'onde défini par l'expression suivante

$$\Lambda = h/mv, \text{ où } v \text{ est très négligeable devant la célérité de la lumière.}$$

Évaluer la longueur d'onde de :

- L'électron a des énergies cinétiques de 1eV et de 10eV.
- D'un photon avec une énergie cinétique de 1eV.
- De la molécule de dioxyde de carbone avec une énergie cinétique de 1eV.

### Exercice 4 :

Nous étudions le problème d'un électron libre produit lors de l'ionisation de l'atome d'hydrogène.

On impose à l'électron de masse  $m$  et d'énergie  $E$  de se déplacer le long de l'axe OX, mais dans l'intervalle  $[0, L]$  on lui applique un potentiel  $V$ .

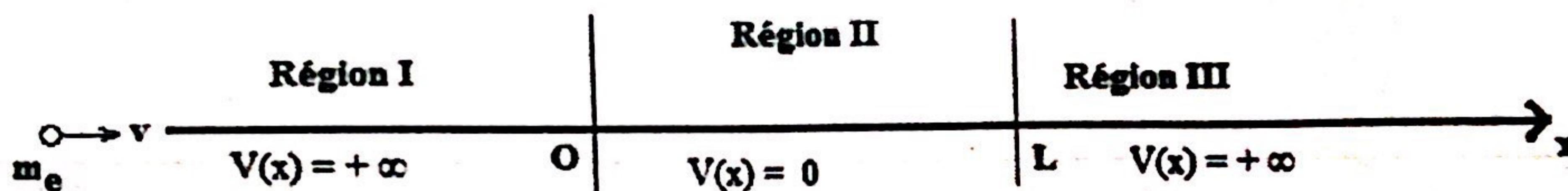


Figure : Électron libre dans un puits de potentiel

La distance OL est égale à 258 pm.

Soit  $H$  l'opérateur Hamiltonien monodimensionnel de cet électron et  $\Psi(x, t)$  sa fonction d'onde non stationnaire.

- Écrire l'équation de Schrödinger totale de l'électron dans chaque région de l'espace.
- En séparant les variables : espace-temps, donner l'expression analytique de l'équation de Schrödinger stationnaire de l'électron libre.
- Montrer que l'énergie de l'électron est quantifiée et établir son diagramme énergétique. Sachant que les fonctions d'onde monodimensionnelles aux bornes ( $X=0$  et  $X=L$ ) sont nulles (conditions aux limites).
- Calculer l'énergie de l'électron dans l'état où  $n=1$  (en J et en KJ/mole)
- Calculer la vitesse de l'électron libre et conclure.

## CPGE : MP

**Exercice 1 :** Quantification de l'énergie : Modèle de Bohr pour un hydrogénoidé

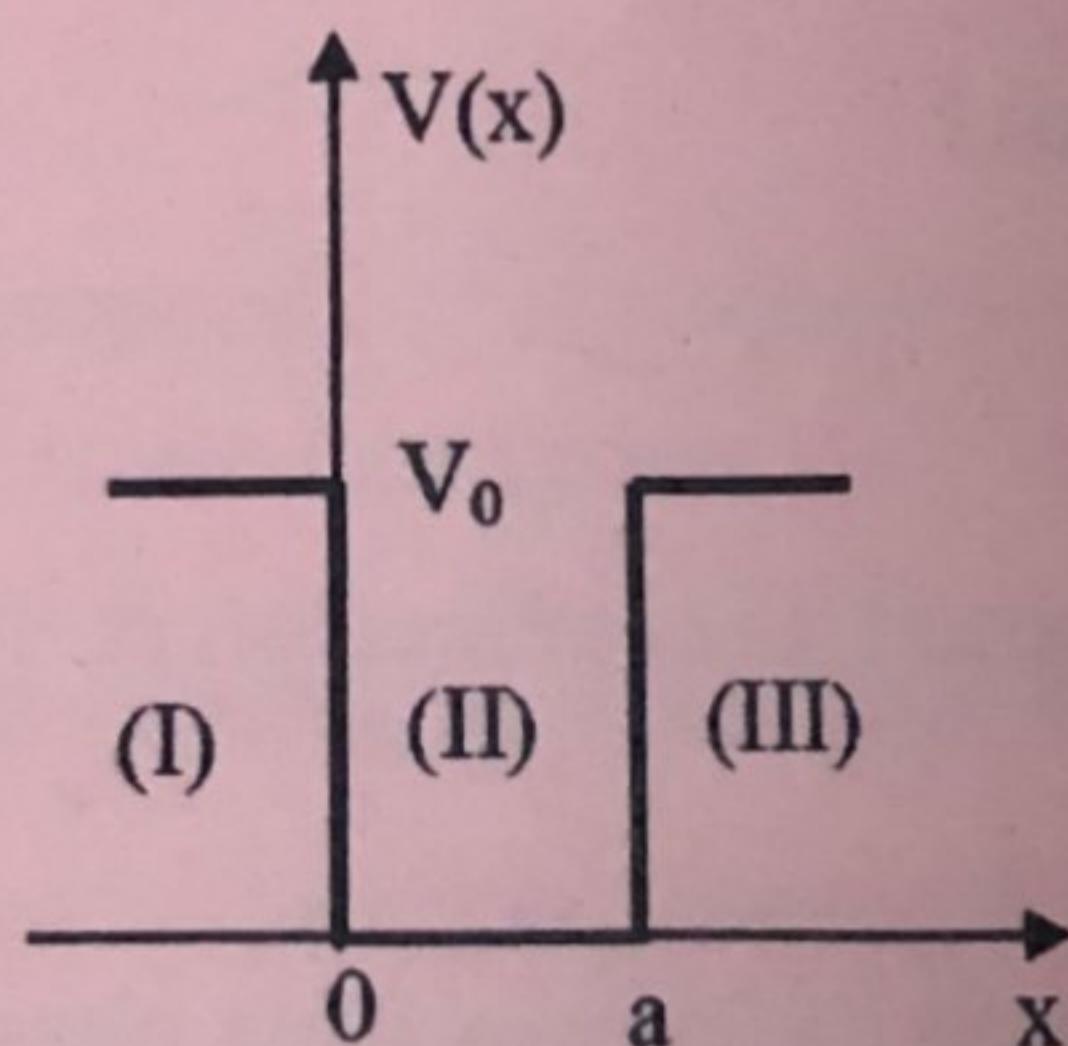
Un hydrogénoidé est un atome constitué d'un électron (masse  $m$  et charge  $-e$ ) et d'un noyau de masse  $M \gg m$  et de charge  $+Ze$ . On suppose que l'électron décrit un cercle de rayon  $r$  autour du noyau supposé fixe

- 1) a) Montrer que l'énergie totale de l'hydrogénoidé s'écrit :  $E = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r} \frac{1}{r}$
  - b) Quelle est la signification d'une énergie totale nulle ?
  - 2) Quelle résultat obtient-on par application de la théorie classique ?
  - 3) On tient compte des deux hypothèses suivantes (hypothèses de Bohr) :
    - les seules orbites permises pour l'électron sont celles pour lesquelles le moment cinétique  $\vec{\sigma}$  satisfait à la relation :  $\|\vec{\sigma}\| = n\hbar$  où  $n$  est un entier  $\geq 1$
    - l'électron rayonne de l'énergie seulement lorsqu'il saute d'une orbite caractérisée par une énergie  $E_n$  à une autre orbite d'énergie  $E_p$  plus petite. La fréquence  $v_{np}$  d'émission est telle que :  $h\nu_{np} = E_n - E_p$
- a) Etablir l'expression du rayon des orbites permises ainsi que leurs énergies correspondantes.  
 b) Montrer que les longueurs d'onde  $\lambda_{nm}$  d'émission vérifient la relation suivante :

$$\frac{1}{\lambda_{np}} = Z^2 R_H \left( \frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{où } R_H \text{ est une constante, dite de Rydberg.}$$

Exprimer littéralement, puis numériquement la constante  $R_H$ .

c) Donner les séries associées aux valeurs de  $p$  et  $n$ .

**Exercice 2 :**

Soit une particule de masse  $m$  d'énergie  $E$  se trouve piégée dans un puits de potentiel carré de la figure ci-contre tel que  $0 < E < V_0$

**1)  $V_0$  fini**

- a) Résoudre l'équation de Schrödinger stationnaire dans les trois régions.
- b) Donner la signification physique de chaque terme.
- c) Expliciter les conditions de continuités aux points  $x=0$  et  $x=a$ .
- d) Déduire la condition à laquelle doivent satisfaire les quantités  $k$ ,  $\rho$  et  $a$ , où  $k$  et  $\rho$  sont définies comme suit :  $k^2 = 2mE/\hbar^2$  et  $\rho^2 = 2m(V_0 - E)/\hbar^2$ .

## 2) $V_0$ infini

Si  $V_0$  tend vers l'infini :

- Que deviennent les solutions de l'équation de Schrödinger dans les régions (I) et (III) ?
- En écrivant les conditions de continuité aux points  $x=0$  et  $x=a$ , déduire les valeurs possibles de l'énergie  $E$  de la particule dans le puits. Conclure.
- Généraliser à trois dimensions et retrouver les énergies de la particule et les fonctions d'onde associées. Donner la dégénérescence des 5 premiers niveaux d'énergie.

### Exercice 3 :

De De Broglie a suggéré qu'à tout corpuscule de masse  $m$  et de vitesse  $v$ , est associé une onde de longueur d'onde défini par l'expression suivante

$$\Lambda = h/mv, \text{ où } v \text{ est très négligeable devant la célérité de la lumière.}$$

Évaluer la longueur d'onde de :

- L'électron a des énergies cinétiques de 1eV et de 10eV.
- D'un photon avec une énergie cinétique de 1eV.
- De la molécule de dioxyde de carbone avec une énergie cinétique de 1eV.

### Exercice 4 :

Nous étudions le problème d'un électron libre produit lors de l'ionisation de l'atome d'hydrogène.

On impose à l'électron de masse  $m$  et d'énergie  $E$  de se déplace le long de l'axe OX, mais dans l'intervalle  $[0, L]$  on lui applique un potentiel  $V$ .

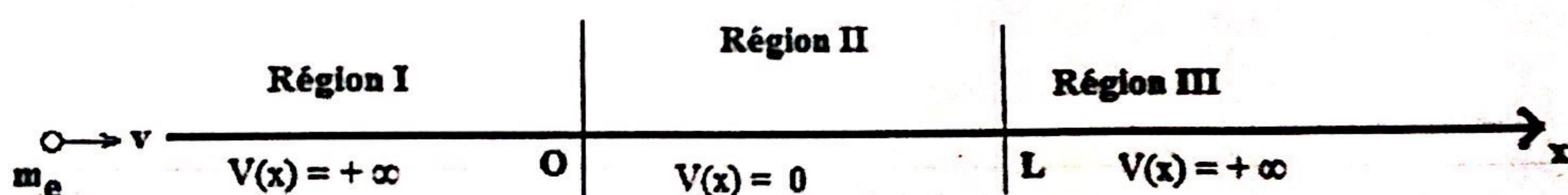


Figure : Électron libre dans un puits de potentiel

La distance OL est égale à 258 pm.

Soit  $H$  l'opérateur Hamiltonien monodimensionnel de cet électron et  $\Psi(x, t)$  sa fonction d'onde non stationnaire.

- Écrire l'équation de Schrödinger totale de l'électron dans chaque région de l'espace.
- En séparant les variables : espace-temps, donner l'expression analytique de l'équation de Schrödinger stationnaire de l'électron libre.
- Montrer que l'énergie de l'électron est quantifiée et établir son diagramme énergétique. Sachant que les fonctions d'onde monodimensionnelles aux bornes ( $X=0$  et  $X=L$ ) sont nulles (conditions aux limites).
- Calculer l'énergie de l'électron dans l'état où  $n=1$  (en J et en KJ/mole)
- Calculer la vitesse de l'électron libre et conclure.

# Travaux Dirigés de Mécanique Quantique

## CPGE : MP

### Exercice 1 : Quantification de l'énergie : Modèle de Bohr pour un hydrogénoidé

Un hydrogénoidé est un atome constitué d'un électron (masse  $m$  et charge  $-e$ ) et d'un noyau de masse  $M \gg m$  et de charge  $+Ze$ . On suppose que l'électron décrit un cercle de rayon  $r$  autour du noyau supposé fixe

1) a) Montrer que l'énergie totale de l'hydrogénoidé s'écrit :  $E = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r} \frac{1}{r}$

b) Quelle est la signification d'une énergie totale nulle ?

2) Quelle résultat obtient-on par application de la théorie classique ?

3) On tient compte des deux hypothèses suivantes (hypothèses de Bohr) :

- les seules orbites permises pour l'électron sont celles pour lesquelles le moment cinétique  $\vec{\sigma}$  satisfait à la relation :  $\|\vec{\sigma}\| = n\hbar$  où  $n$  est un entier  $\geq 1$
- l'électron rayonne de l'énergie seulement lorsqu'il saute d'une orbite caractérisée par une énergie  $E_n$  à une autre orbite d'énergie  $E_p$  plus petite. La fréquence  $v_{np}$  d'émission est telle que :  $h\nu_{np} = E_n - E_p$

a) Etablir l'expression du rayon des orbites permises ainsi que leurs énergies correspondantes.

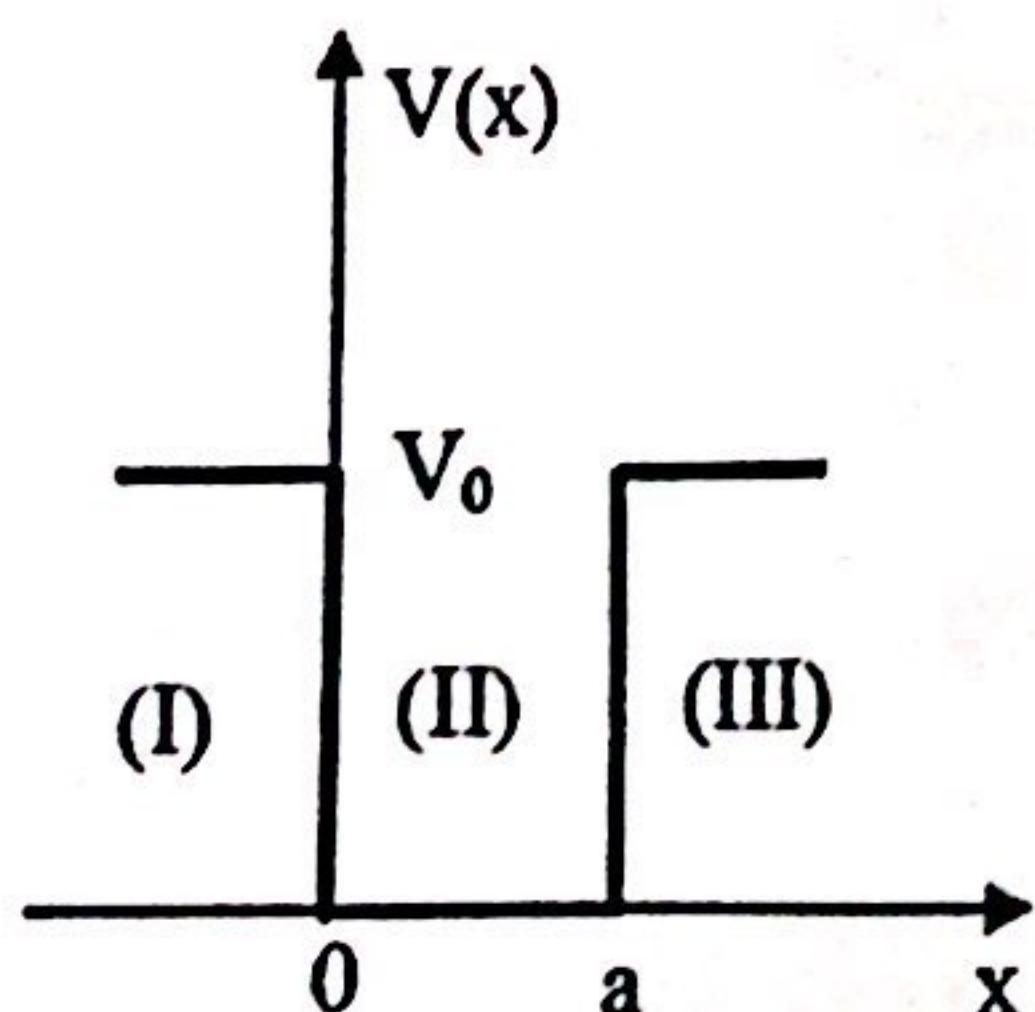
b) Montrer que les longueurs d'onde  $\lambda_{nm}$  d'émission vérifient la relation suivante :

$$\frac{1}{\lambda_{np}} = Z^2 R_H \left( \frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{où } R_H \text{ est une constante, dite de Rydberg.}$$

Exprimer littéralement, puis numériquement la constante  $R_H$ .

c) Donner les séries associées aux valeurs de  $p$  et  $n$ .

### Exercice 2 :



Soit une particule de masse  $m$  d'énergie  $E$  se trouve piégée dans un puits de potentiel carré de la figure ci-contre tel que  $0 < E < V_0$ .

#### 1) $V_0$ fini

- a) Résoudre l'équation de Schrödinger stationnaire dans les trois régions.
- b) Donner la signification physique de chaque terme.
- c) Expliciter les conditions de continuités aux points  $x=0$  et  $x=a$ .
- d) Déduire la condition à laquelle doivent satisfaire les quantités  $k$ ,  $p$  et  $a$ , où  $k$  et  $p$  sont définies comme suit :  $k^2 = 2mE/\hbar^2$  et  $p^2 = 2m(V_0-E)/\hbar^2$ .

Soit une particule de masse  $m$  d'énergie  $E$  se trouve piégée dans un puits de potentiel carré de la figure ci-contre tel que  $0 < E < V_0$

### 1) $V_0$ fini

- a) Résoudre l'équation de Schrödinger stationnaire dans les trois régions.
- b) Donner la signification physique de chaque terme.
- c) Expliciter les conditions de continuités aux points  $x=0$  et  $x=a$ .
- d) Déduire la condition à laquelle doivent satisfaire les quantités  $k$ ,  $\rho$  et  $a$ , où  $k$  et  $\rho$  sont définies comme suit :  $k^2 = 2mE/\hbar^2$  et  $\rho^2 = 2m(V_0-E)/\hbar^2$ .

### 2) $V_0$ infini

Si  $V_0$  tend vers l'infini :

- a) Que deviennent les solutions de l'équation de Schrödinger dans les régions (I) et (III)?
- b) En écrivant les conditions de continuité aux points  $x=0$  et  $x=a$ , déduire les valeurs possibles de l'énergie  $E$  de la particule dans le puits. Conclure.
- c) Généraliser à trois dimensions et retrouver les énergies de la particule et les fonctions d'onde associées. Donner la dégénérescence des 5 premiers niveaux d'énergie.

## Exercice 3 :

- 1) a- Interpréter la relation qui régit l'effet Compton :

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{\hbar}{mc} (1 - \cos\theta)$$

- b- Montrer que la relation entre l'angle de diffusion du photon et l'angle de diffusion de l'électron est telle que :

$$\cotg \varphi = \left( 1 + \frac{h\nu_0}{mc^2} \right) \tg \frac{\theta}{2}$$

- c- Montrer que l'énergie cinétique maximale transférée à l'électron après diffusion est :

$$E_c^{\max} = \frac{h\nu_0}{1 + \frac{mc^2}{2h\nu_0}}$$

- 2) a- Un rayon X de longueur d'onde  $0.300\text{\AA}$  subit une diffusion Compton à  $60^\circ$ . Quelles sont, après diffusion, la longueur d'onde du photon et l'énergie cinétique de l'électron.

- b- Un électron frappé par un Rayon X de  $0.5 \text{ MeV}$  acquiert une énergie de  $0.1 \text{ MeV}$ .

- i) Calculer la longueur d'onde du photon diffusé sachant que l'électron était initialement au repos.

- ii) Calculer l'angle que fait le photon diffusé avec le photon incident.

On donne :  $h/mc = 0.024\text{\AA}$  ( $= \lambda_C$  dite longueur d'onde de Compton).

## Devoir de Mécanique quantique

Durée : 2H00

## Exercice 1 :

On considère une particule libre de masse  $m$  que l'on décrit par un paquet d'ondes (à une dimension) défini par :

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k_x) e^{i[k_x \cdot x - \omega(k_x) \cdot t]} dk_x$$

1) Montrer que  $\Psi(x, t)$  est solution de l'équation de Schrödinger.

2) On suppose que  $g(k_x)$  est une gaussienne centrée sur  $k_{x_0}$  : soit :

$$g(k_x) = A \cdot \exp[a^2(k_x - k_{x_0})^2/4] \quad \text{avec } A = \frac{\sqrt{a}}{(2m)^{3/2}} \quad \text{et } a \text{ est homogène à une distance.}$$

a) Montrer que la probabilité de présence de la particule est indépendant du temps.

b) En utilisant la forme ci-dessus de  $g(k_x)$ , on obtient après intégration, l'expression suivante pour  $\Psi(x)$  (à un facteur de phase près) :

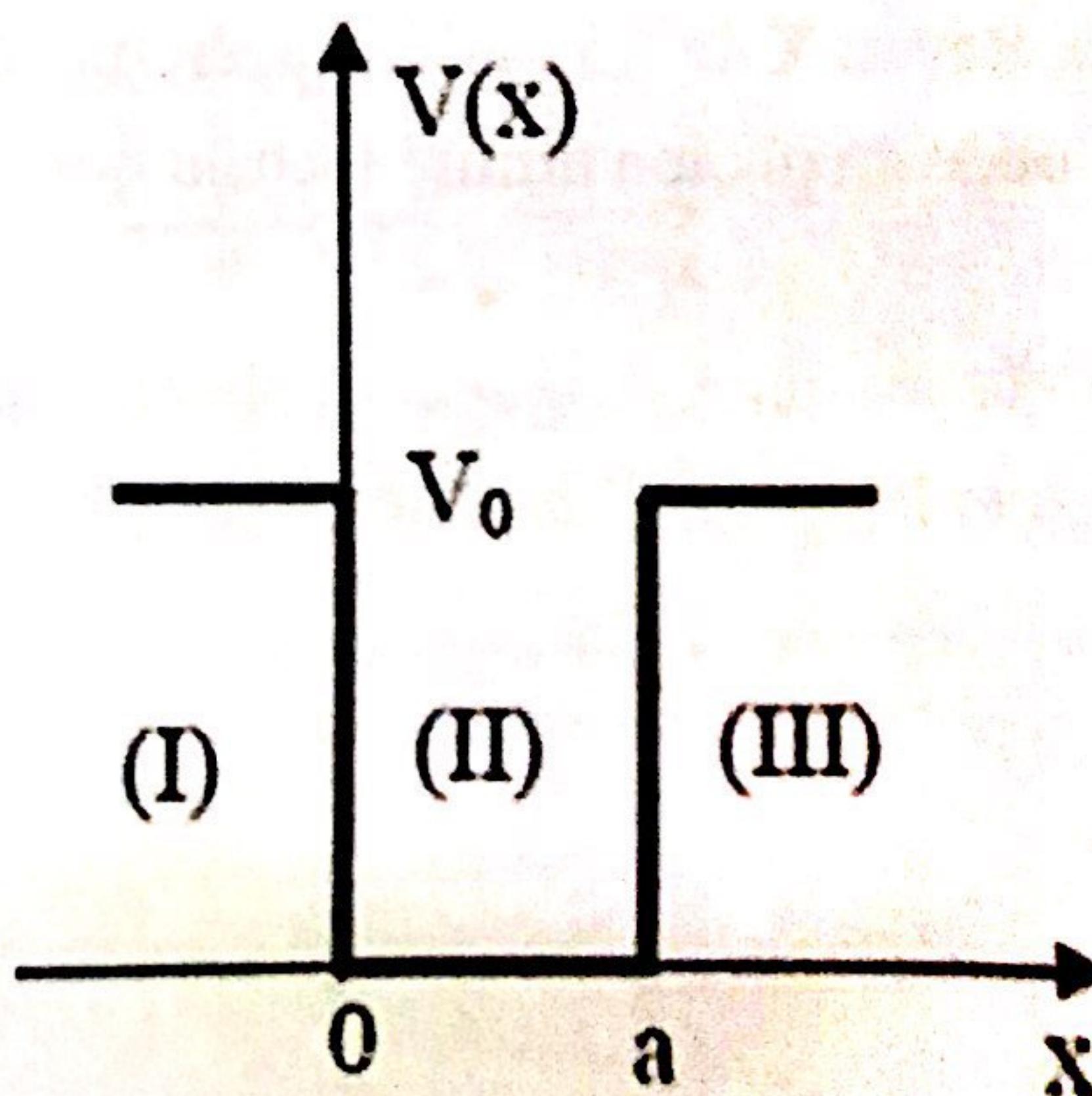
$$\Psi(x, t) = \left[ \frac{2a^2}{\pi\alpha(t)} \right]^{1/4} \exp\left( \frac{\varphi^2(x, t)}{Z(t)} \right)$$

$$\text{avec } \alpha(t) = a^4 + \frac{4ht^2}{m^2} \quad ; \quad \varphi(x, t) = x - \frac{\hbar k_{x_0} t}{m} \quad \text{et} \quad Z(t) = a^2 + i \frac{2ht}{m}$$

i) Calculer la densité de probabilité. ii) En déduire la vitesse du groupe  $v_g$ .

3) Retrouver  $v_g$  en considérant la relation de dispersion  $\omega(k_x)$ . Comparer  $v_g$  à la vitesse de phase  $v_\varphi$  et à la vitesse  $v$  de la particule. Conclure.

## Exercice 2 :



Le système est éclairé en lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  par une fente source très fine, parallèle aux trois fentes, et disposées au foyer objet d'une lentille  $L$ . On observe à travers un oculaire les phénomènes d'interférences obtenus dans un plan ( $E$ ) situé à la distance  $p'$  des trois fentes.

On désignera par  $p$  la distance  $FF_2$  et par  $\varphi$  la différence de phases, en un point  $M$  du plan ( $E$ ), entre les vibrations diffractées par deux fentes consécutives  $F_1, F_2$  ou  $F_2, F_3$

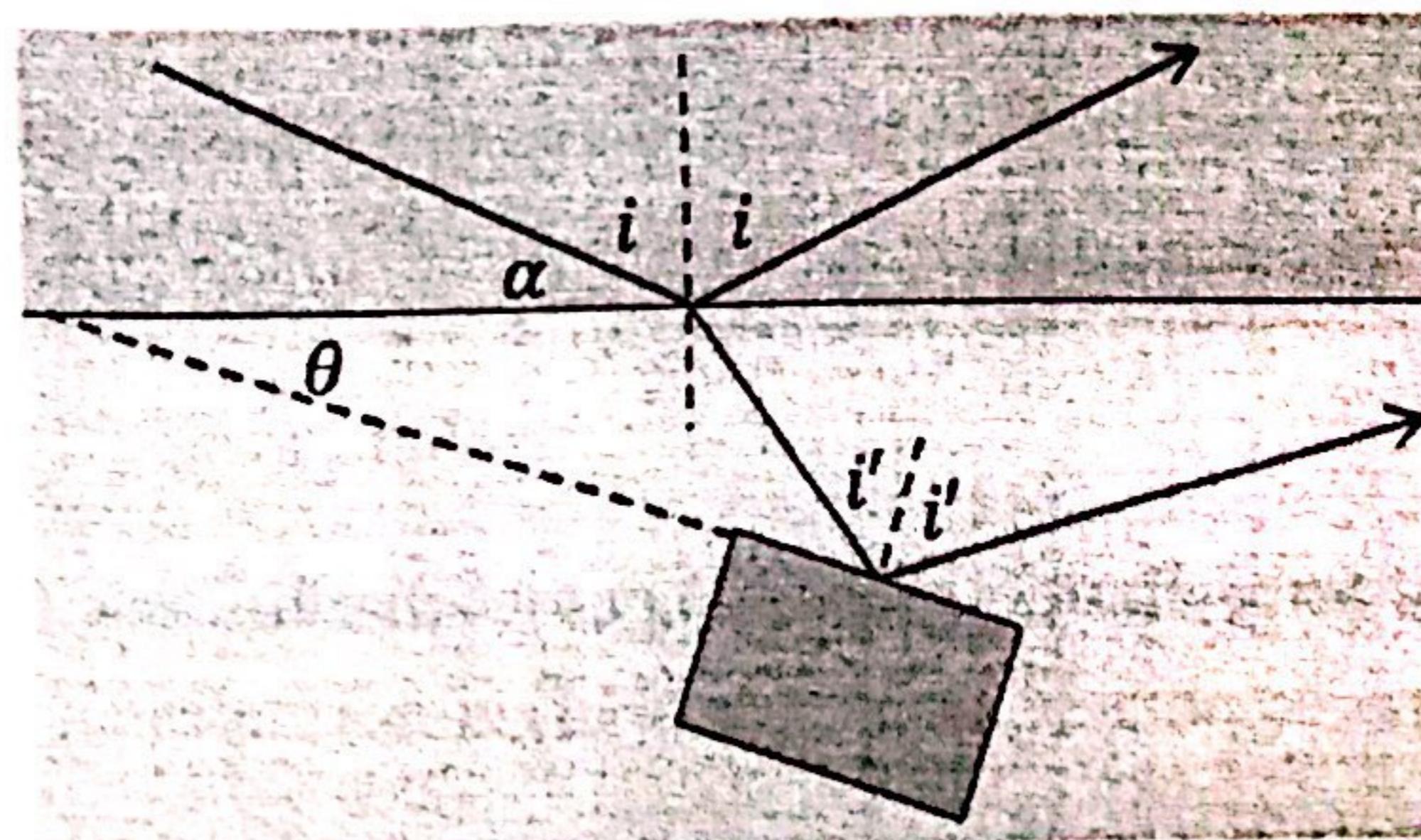
On donne :  $d=0,5$  mm ;  $\lambda=546$  nm ;  $p=50$  cm

1. On ferme la fente  $F_2$ . Décrire brièvement le phénomène observé dans la plan ( $E$ ). Calculer et représenter graphiquement, en fonction de  $\varphi$ , la valeur de l'intensité lumineuse en  $M$ . Donner la valeur numérique de l'interfrange.
2. On ouvre la fente  $F_2$  de manière à lui donner la même largeur (très faible) qu'aux fentes  $F_1$  et  $F_3$ . Calculer la valeur de l'intensité en  $M$ , les positions des maximums et des minimums, l'interfrange.

#### Exercice 4 :

##### Polarisation par réflexion

1. Quelle doit être la hauteur angulaire du Soleil au-dessus de l'horizon pour que la lumière réfléchie par une nappe d'eau calme soit complètement polarisée (indice de l'eau  $n = 4/3$  ?)
2. Lorsque le Soleil atteint cette hauteur, on immerge dans une cuve d'eau un bloc de verre, d'indice  $n = 1,6$ , dont la surface plane fait l'angle  $\theta$  avec l'horizontale. Déterminer  $\theta$  pour que le faisceau réfléchi par le bloc soit lui aussi complètement polarisé. Ce faisceau émerge-t-il ?



#### Exercice 5 :

La fente source  $F$  d'un appareil à fentes de Young est éclairé en lumière monochromatique, de longueur d'onde  $\lambda=0.6\mu$ , polarisée rectiligne par une lame polaroïd  $P$ . Les fentes de

## Travaux dirigés d'optique physique : partie 3

Institut : CPGE/Classe : MP

### Exercice 1 :

On observe une source  $S$  monochromatique rectiligne ( $\lambda = 546 \text{ nm}$ ), placée à 10 mètres de l'observateur au travers d'une fente  $F$  (diaphragme) disposée tout contre l'œil.

Fente et source sont verticales. La position de la source coïncide avec le zéro d'une règle horizontale graduée centrée sur  $S$ . L'œil voit apparaître sur la règle les franges de diffraction de la fente.

1. Les deux premières franges d'intensité nulle bordant le maximum central coïncident avec les divisions  $\pm 27 \text{ cm}$  de la règle. Quelle est la largeur de la fente ?
2. La distance de ces franges est lue à  $\pm 1 \text{ cm}$  près et la mesure supposée faite à 20 % près.

Quelle est la largeur maximale de la fente mesurable avec cette précision ?

Quelle est la largeur maximale de la fente donnant des franges visibles (c'est-à-dire séparables par l'œil), la limite de résolution angulaire de l'œil étant de l'ordre de  $3,10^{-4} \text{ rad}$  ?

### Exercice 2 :

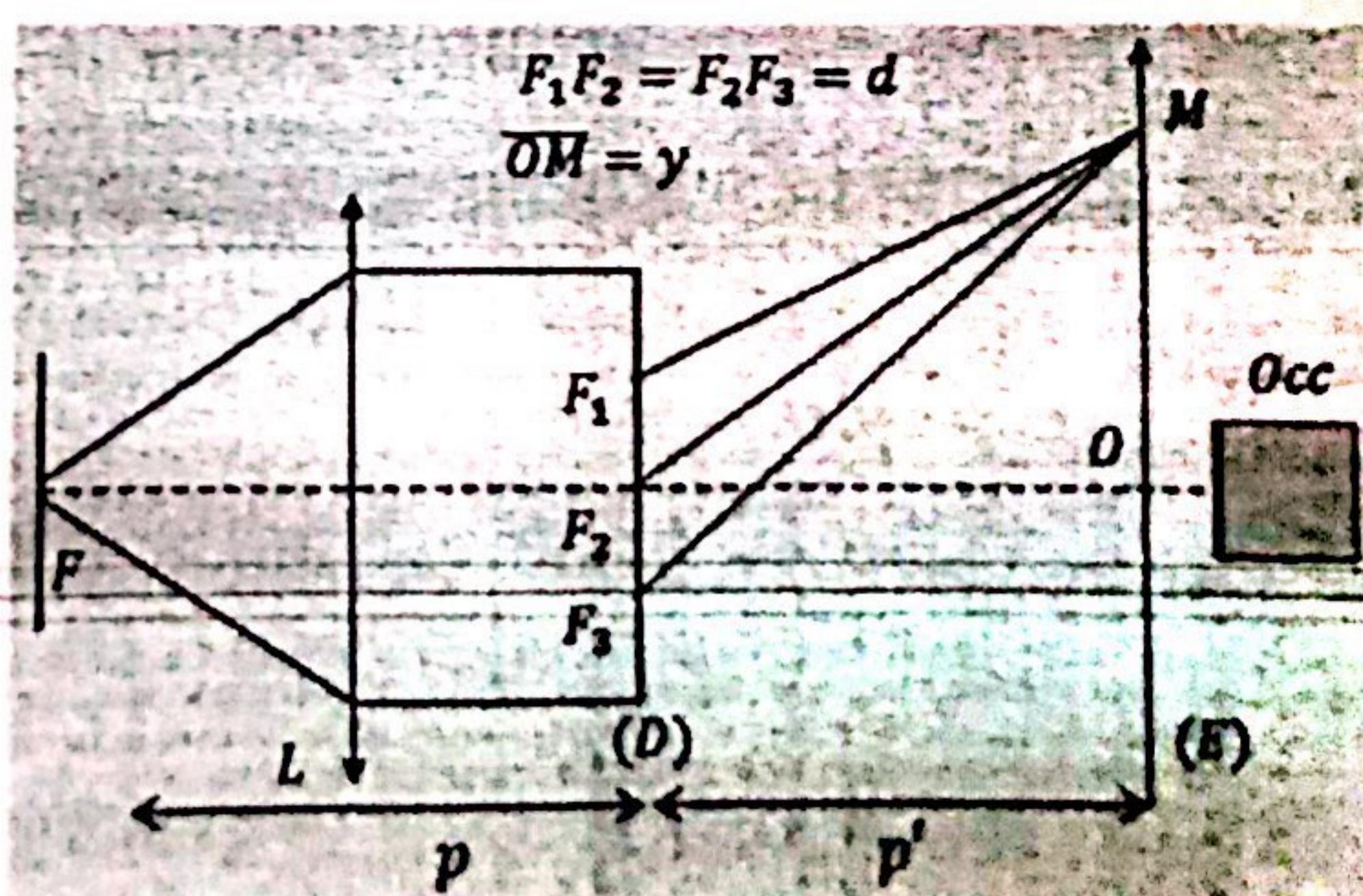
Deux fentes de Young sont distantes de 0,2 mm. L'écran d'observation est distant de 1 m.

1. La 3<sup>e</sup> frange brillante est située à 7,5 mm de la frange centrale. Calculer la longueur d'onde de la lumière utilisée.
2. Même question en supposant que c'est la 3<sup>e</sup> frange sombre qui est à 7,5 mm de la frange centrale.

### Exercice 3 :

Interférences à trois sources.

On considère un dispositif interférentiel constitué par un diaphragme ( $D$ ) percé de trois fentes  $F_1, F_2, F_3$  très fines, équidistantes ( $F_1F_2 = F_2F_3 = d$ ) et normales au plan de la figure.



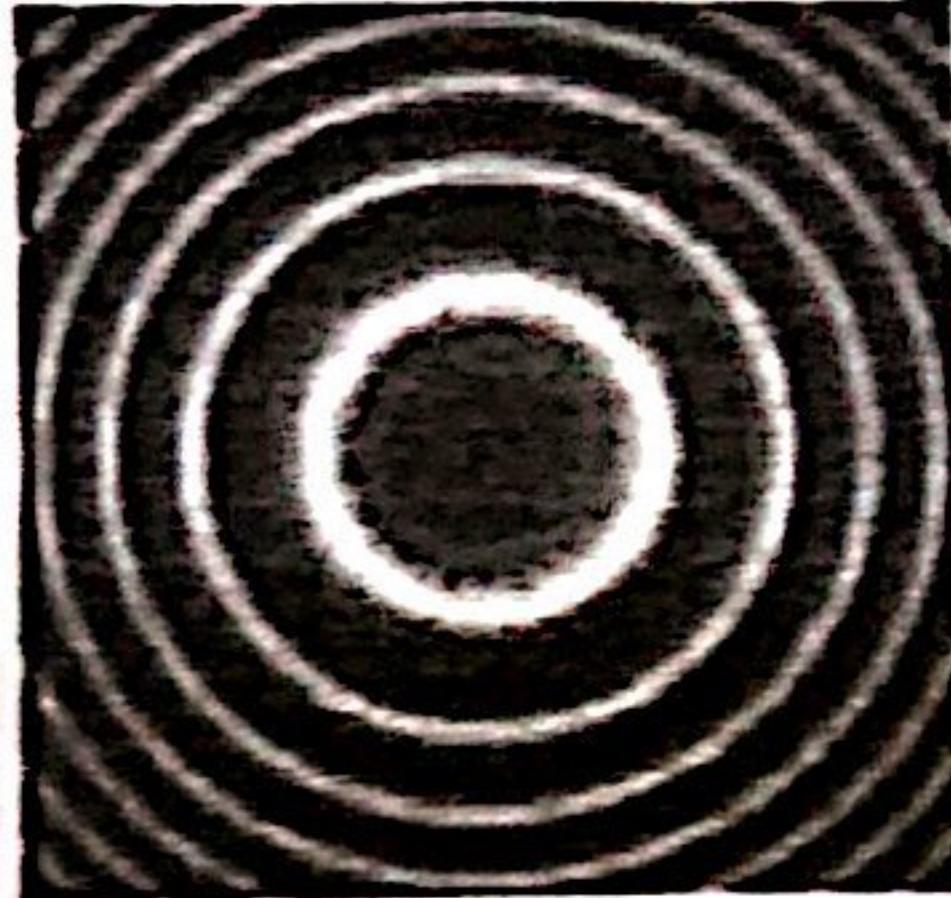
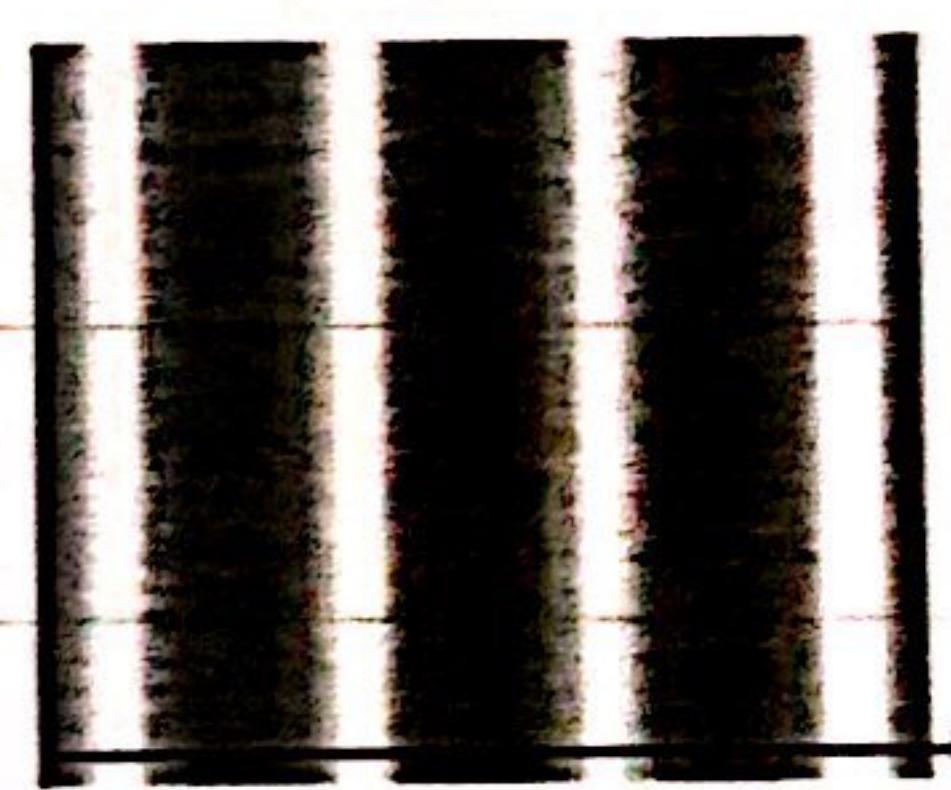
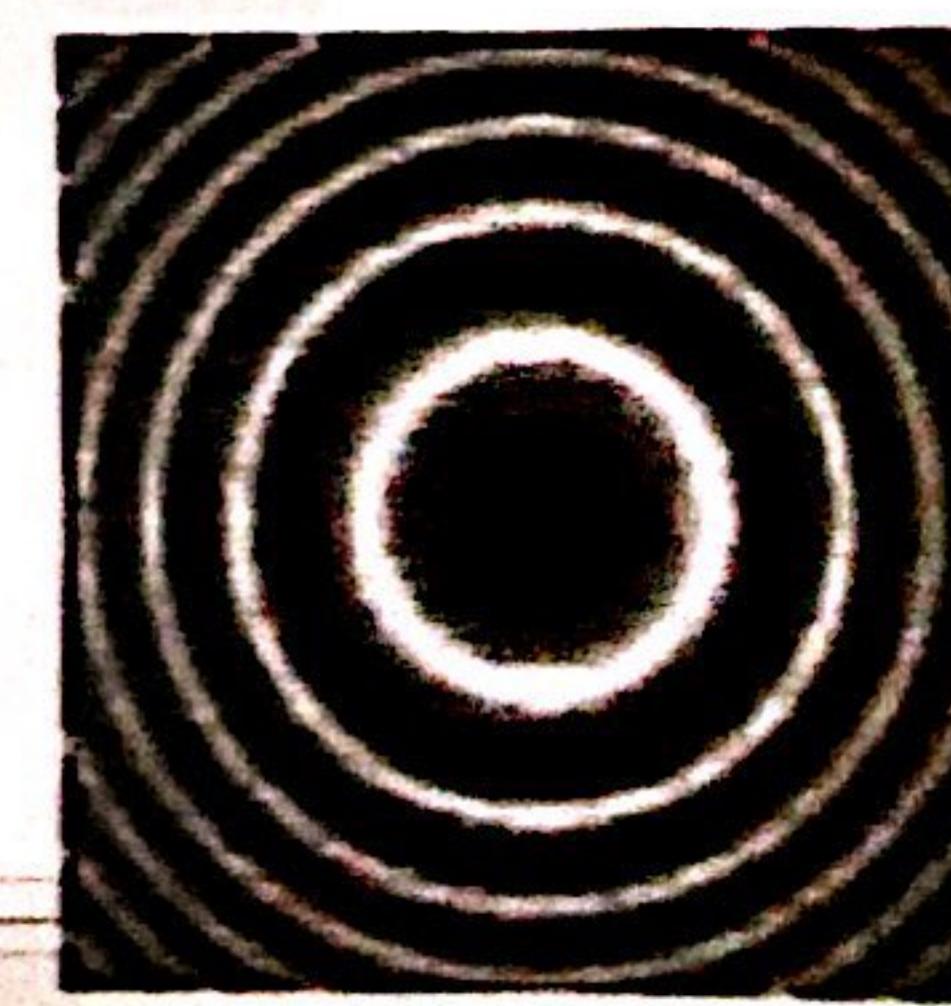
Localisation	Ordre d'interférence
à l'infini ou dans le plan focal image d'une lentille convergente	$p = \frac{\cos r}{\lambda} + \frac{1}{2}$ <p>(si <math>i</math> désigne l'angle d'incidence de l'onde sur la lame, <math>r</math> est l'angle de réfraction avec <math>\sin i = n \sin r</math>)</p>
	$p = \frac{\cos i}{\lambda}$
dans un plan voisin de la lame (extérieur ou intérieur à la lame)	$p = \frac{2n\alpha}{\lambda}x + \frac{1}{2}$
	$p = \frac{2\alpha}{\lambda}x$
dans un plan voisin de la lame	$p = \frac{r^2}{R\lambda} + \frac{1}{2}$ <p>(<math>r</math> est la distance à O sur l'écran)</p>

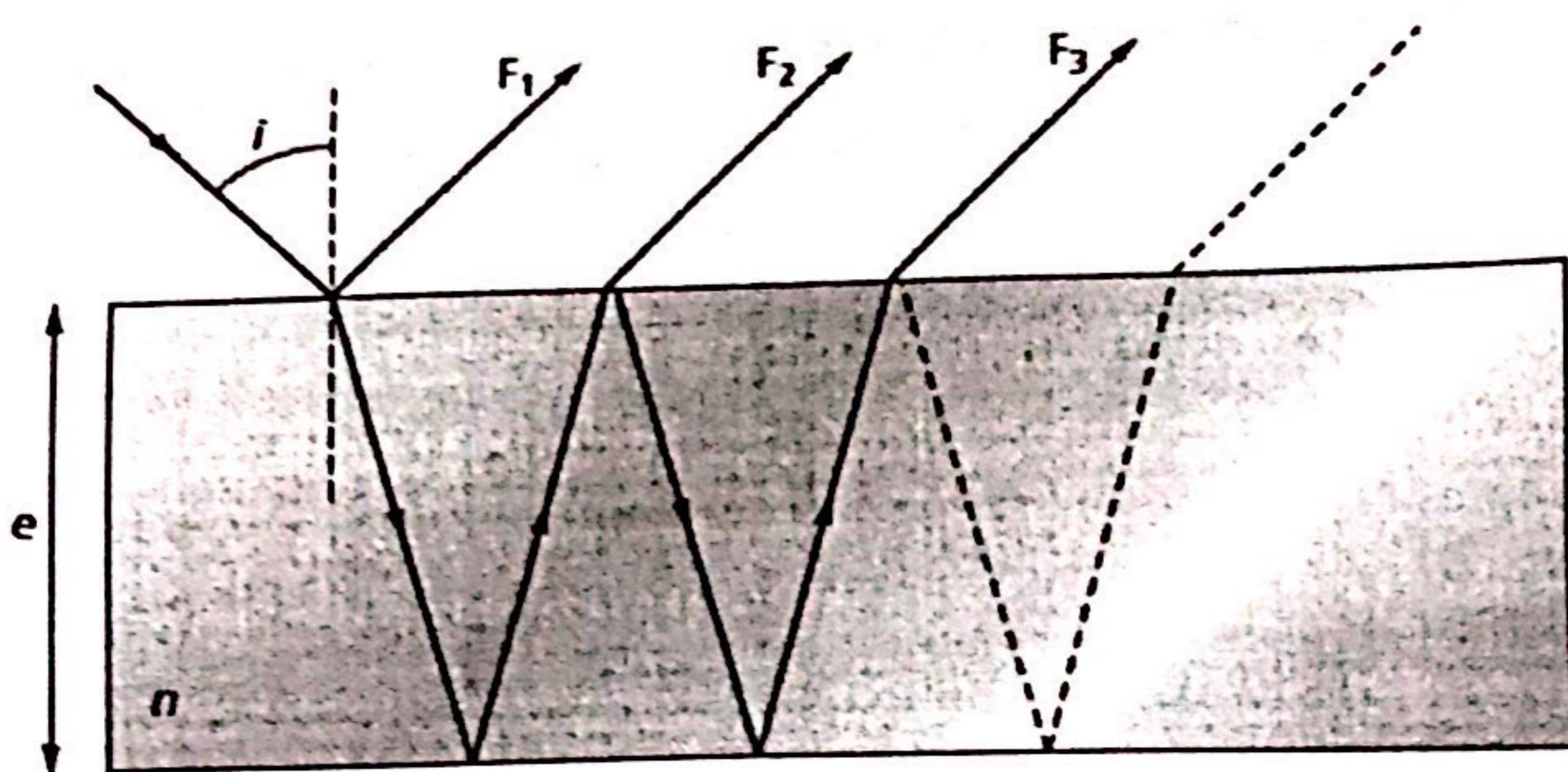
1.b. calculer le rapport des intensités des différents pics et la distance qui sépare les franges les plus brillantes.

2. On obture la fente centrale  $F_2$ . Exprimer l'intensité au point M et calculer l'interfrange  $i$ .

A.N.  $a = 0,30\text{mm}$  ;  $D = 2,90\text{m}$  ;  $\lambda = 500\text{nm}$ .

Rappel du cours :

Type de lame	Type de franges	Forme des franges
Lame de verre à faces parallèles		Anneaux
Lame d'air à faces parallèles	Franges d'égale inclinaison	
Lame de verre d'épaisseur variable		Franges rectilignes
Coin d'air à deux faces planes	Franges d'égale épaisseur	
Coin d'air à une face sphérique (rayon R) et une face plane		Anneaux de Newton
	Franges d'égale épaisseur	



On place un écran dans le plan focal image d'une lentille convergente disposée parallèlement à la lame. On note  $f'$  la distance focale de la lentille.

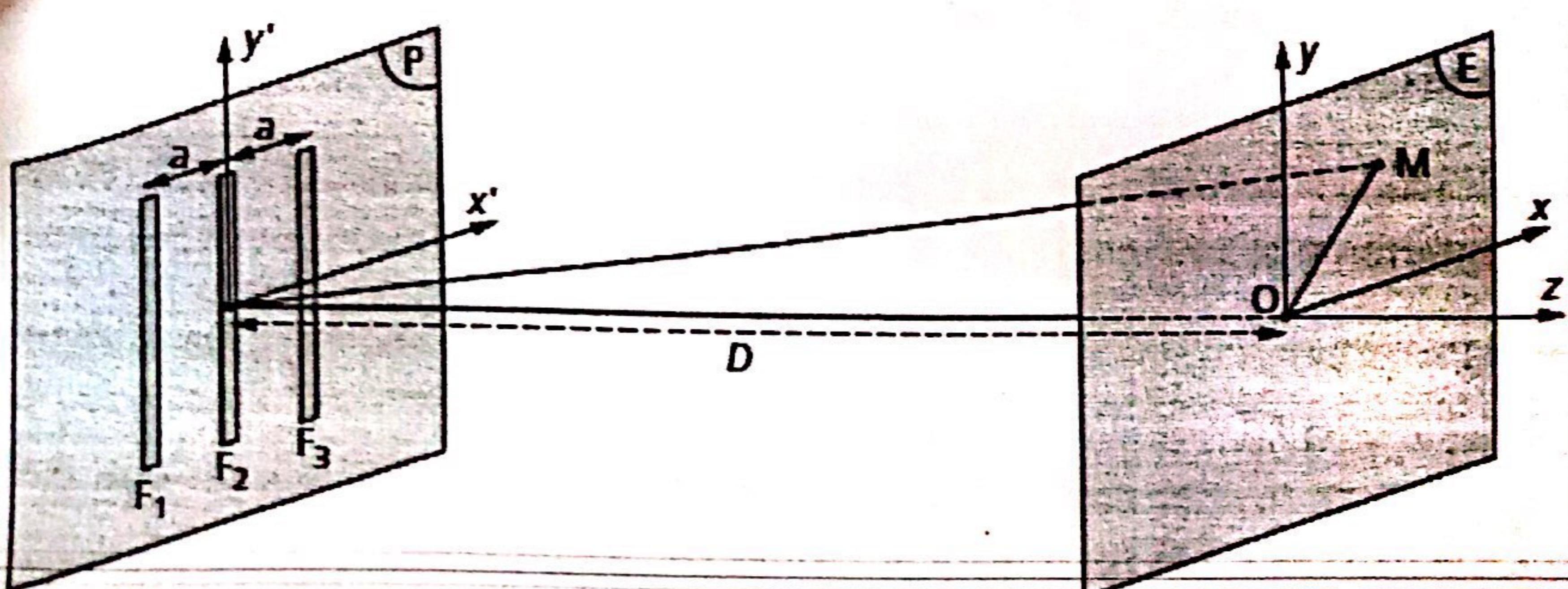
- 3) Calculer la différence de marche entre les rayons réfléchis correspondants à trous  $F_1$  et  $F_2$ .
- 4) En déduire l'ordre d'interférence dans la direction  $i$  en fonction de  $n$ ,  $e$ ,  $\lambda$  et  $i$  (on donnera une expression approchée en incidence quasi normale), puis en un point  $M$  de l'écran situé à la distance  $r$  du centre, en fonction de  $n$ ,  $e$ ,  $\lambda$ ,  $f'$  et  $r$ . exprimer l'ordre d'interférence au centre de l'écran.
- 5) On suppose que le centre de l'écran correspond à une interfrange sombre. Calculer le rayon  $R_\alpha$  des anneaux brillants.
- 6) Quelle est l'aspect de la figure d'interférence ?

### Exercice 6 : système interférentiel à trois fentes fines parallèles

On considère le système interférentiel suivant, constitué de trois fentes fines parallèles  $F_1, F_2, F_3$ , considérées comme infiniment fines et équidistantes ( $F_1F_2 = F_2F_3 = a$ ).

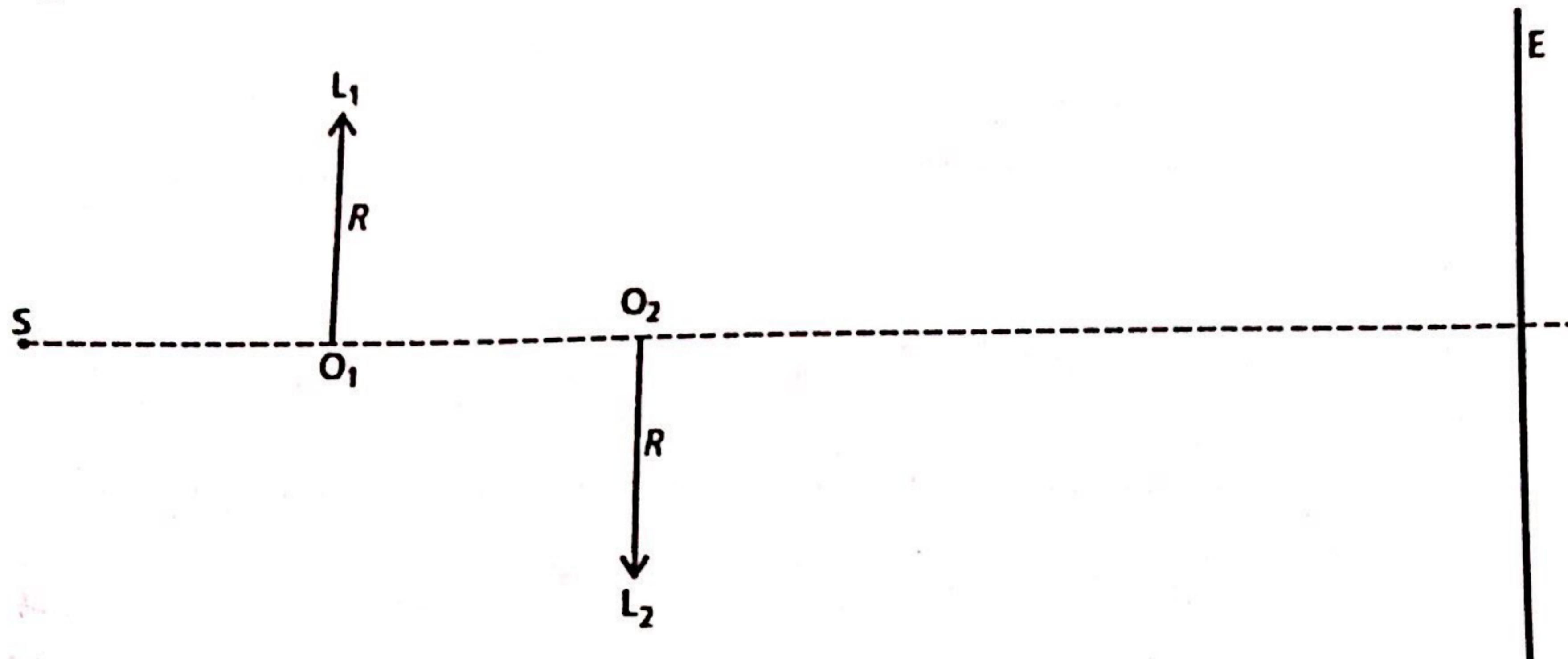
Le système est éclairé par une source monochromatique. On observe les phénomènes d'interférence sur un écran parallèle au dispositif et situé à la distance  $D$  de celui-ci.

Soit  $O$  le point où la normale au dispositif interférentiel passant par  $F_2$  coupe l'écran et  $M$  un point voisin de  $O$ . on admet que  $OM$  est très petit devant  $D$ .



- 1.a. donner l'expression du champ électrique résultant de la superposition, au point  $M$ , des ondes issues des trois fentes. En déduire l'intensité  $I$  au point  $M$ .

On admettra, sans démontrer, qu'une onde lumineuse portée par un rayon passe d'une lentille, subit un déphasage de  $-\pi$  (ou de façon équivalente, une différence de marche de  $\frac{-\lambda}{2}$ ).



- 1) Déterminer le champ d'interférence et la différence de marche entre deux rayons qui interfèrent (les notations sont à préciser).
- 2) Qu'observe-t-on sur l'écran E placé à la distance D de la source S ? déterminer le nombre de franges brillantes visibles dans le plan de l'écran E.

On donne :  $f' = 20 \text{ cm}$  ;  $d = O_1 O_2 = 10 \text{ cm}$  ;  $R = 2 \text{ cm}$  ;  $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$  ;  $S O_1 = 30 \text{ cm}$  ;  $D = 85 \text{ cm}$ .

### Exercice 5 : Interférence des ondes réfléchies par une lame à faces parallèles

Un faisceau cylindrique de lumière monochromatique (de longueur d'onde  $\lambda$ ) arrive en incidence proche de l'incidence normale sur une lame à face parallèles. On note  $e$  l'épaisseur de la lame et  $n = 1,5$  son indice pour cette longueur d'onde.

On note  $F_1$  le faisceau directement réfléchi par la face supérieure de la lame et  $F_t$  les faisceaux suivants (voir schéma).

- 1) Montrer que les amplitudes des faisceaux 1 et 2 sont très grandes devant celles des faisceaux suivants.

On rappelle qu'en incidence normale, les coefficients énergétiques de réflexion  $R$  et de transmission  $T$  à une interférence air (indice 1) / verre (indice) ou verre / air sont données par :

$$R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \quad T = 1 - R.$$

- 2) En déduire qu'on peut décrire correctement le phénomène en ne considérant que des interférences à deux ondes. Où se forment les franges d'interférence ?

#### Exercice 4 : Paquet (ou groupe) d'ondes dans le vide

Un paquet d'ondes est obtenu dans le cas présent par la superposition d'ondes électromagnétiques planes et progressives monochromatiques, polarisées rectilignement, dont les champs électriques sont du type  $A(\omega)\cos(\omega t - kz)\vec{e}$ .

On suppose que les ondes se propagent dans le vide, que  $0 \leq \omega < \infty$ , et on considère le cas où l'amplitude  $\delta A(\omega)$  d'un groupe « élémentaire » d'ondes, de pulsations comprises entre  $\omega$  et  $\omega + d\omega$ , est donnée par :

$$\delta A(\omega) = \frac{2}{\sqrt{\pi\Delta}} E_0 e^{-(\frac{\omega}{\Delta})^2} d\omega \quad (\Delta \text{ étant une constante positive})$$

On utilisera :  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} e^{2\pi ixy} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\pi^2 y^2/\alpha}$  ( $x, y$  et  $\alpha$  étant des réels,  $\alpha > 0$ ).

- 1) Déterminer le champ  $\vec{E}(z, t)$  de ce paquet d'ondes.
- 2) Représenter le profil de ce paquet d'ondes et estimer sa largeur  $\delta z$ .
- 3) Estimer la durée de passage  $\delta t$  de ce groupe d'ondes en un point  $z$  donné.

#### Exercice 5 : Mesure du temps de cohérence d'un laser

On étudie les interférences produites par deux lasers identiques. On considère que ces deux sources émettent des trains d'ondes d'amplitude constante  $A_0$ , qui ont tous la même durée  $t_c$ , mais des pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  très légèrement différentes. Chaque onde est caractérisée par une intensité  $I_0$ .

On utilise un détecteur ayant un temps de réponse  $t_R$  très supérieur à la période des ondes, mais très inférieur à la durée d'émission des trains d'ondes. On suppose également que la différence de pulsation  $\omega_1 - \omega_2$  est très faible de sorte que  $t_R \ll 1/(\omega_1 - \omega_2)$ .

- 1) Exprimer l'intensité  $I(t)$  mesurée par le détecteur en fonction de  $I_0, \omega, \omega_1, \omega_2$  et des phases aléatoires  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  des deux ondes.  
Quelle est la valeur moyenne de  $\langle I \rangle$  calculée sur une durée grande devant  $t_c$ .
- 2) En supposant que les deux trains d'ondes sont de même durée  $t_c$ , déterminer les valeurs moyennes (sur une durée grande devant  $t_c$ ) :  $\langle \cos[\varphi(t+T) - \varphi(t)] \rangle$  et  $\langle \sin[\varphi(t+T) - \varphi(t)] \rangle$  avec  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  le déphasage entre les deux ondes.
- 3) Le signal de sortie du détecteur  $u(t)$  est traité par un système informatique qui détermine la fonction de corrélation  $g(T)$  définie par :

$$g(T) = \frac{\langle I(t)I(t+T) \rangle}{\langle I \rangle^2}$$

- a) Calculer  $g(T)$ .
- b) Tracer le graphe de  $g(T)$ .
- c) En déduire une mesure de  $t_c$ .

# Fiche de Travaux dirigés d'optique physique : partie 1

Institut : CPGE/Classe : MP

## Exercice 1 : longueur d'onde d'une radiation émise par un laser

Un laser émet une radiation rouge de longueur d'onde  $\lambda_1 = 0,6329923 \pm 10^{-7} \mu m$ . Calculer la longueur d'onde  $\lambda_2$  du rayonnement dans l'air d'indice  $n_2 = 1,00028 \pm 10^{-5}$ .

## Exercice 2 : Condition de séparation de deux signaux lumineux

On considère une fibre creuse rectiligne : la gaine de la fibre est constituée d'un verre d'indice  $n = 1,5$  et on réalise le vide à l'intérieur de la fibre. On éclaire une extrémité de la fibre avec un bref signal lumineux. À l'autre extrémité de la fibre, de longueur  $L = 1m$ , on place un détecteur dont le temps de réponse est noté  $\tau$ .

- 1) Écrire l'expression de l'onde se propageant dans l'air le long de la fibre, et de celle se propageant dans la gaine de verre le long de la fibre.
- 2) Au bout de combien de temps le détecteur reçoit-il la première onde ? la seconde ?
- 3) En déduire le temps de réponse que doit avoir le détecteur pour séparer les deux signaux.
- 4) Sachant que les détecteurs usuels ont un temps de réponse de  $10^{-6}s$ , quelle devrait être la longueur de la fibre pour qu'un détecteur usuel sépare les deux signaux.

## Exercice 3 : Condition de détection d'un problème de battement

On considère deux faisceaux monochromatiques (issus par exemple de deux sources de lasers). Les deux faisceaux sont de longueurs d'onde voisines et de fréquences respectives  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , avec  $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$ . Les ondes associées aux faisceaux sont caractérisées par leur champs électriques (supposés colinéaires)  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  et elles éclairent un détecteur dont le temps de réponse est  $\tau$  (avec  $\tau \gg \frac{1}{\omega_1}$  et  $\frac{1}{\omega_2}$ ).

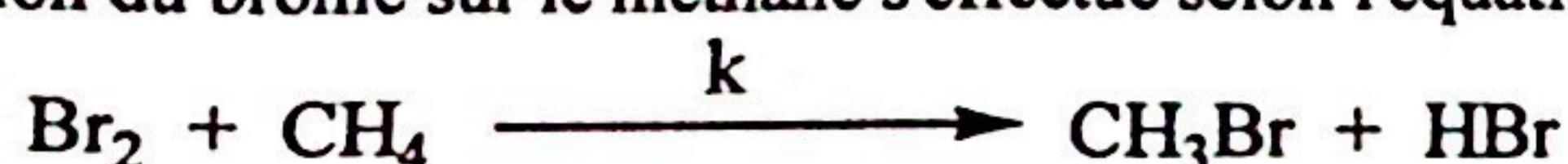
On rappelle qu'un détecteur optique est sensible à l'intensité lumineuse reçue, proportionnellement à  $\langle E^2 \rangle$ , où  $\vec{E}$  est le champ associé à l'onde reçue par le détecteur, et  $\langle X \rangle$  désigne la moyenne temporelle de  $X$  sur le temps caractéristique du détecteur.

- 1) Expliciter la dépendance temporelle des champs électriques.
- 2) En déduire la forme du champ électrique associé à l'onde résultante.
- 3) Écrire l'expression de l'intensité lumineuse mesurée par le détecteur et exprimer une condition sur le temps de réponse du détecteur pour qu'il puisse détecter le phénomène de battement.

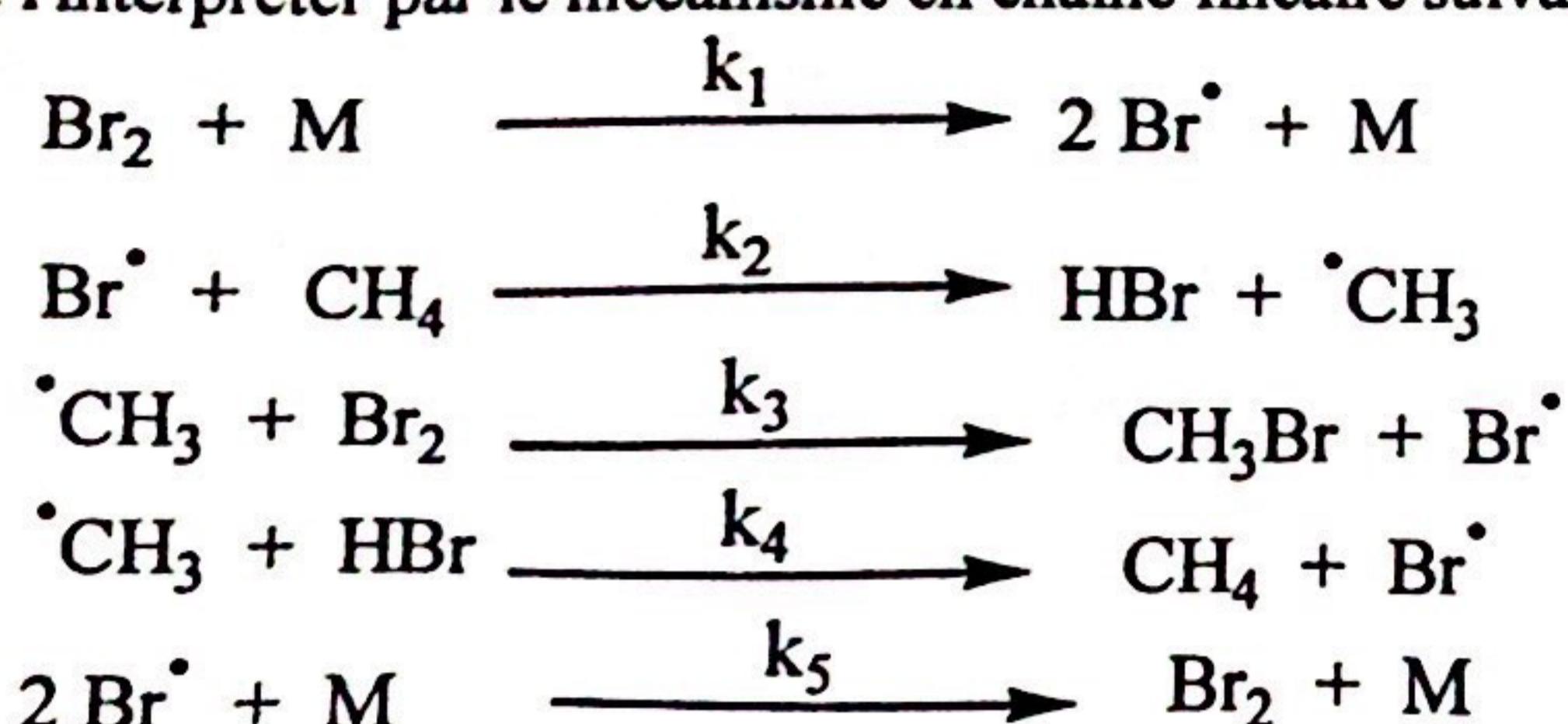
- 1) Représenter les données du tableau ci-dessus sur un graphique et déterminer l'ordre de la réaction par la méthode de demi-réaction.  
2) Vérifier l'ordre de la réaction par la méthode d'intégration, calculer la constante de vitesse et retrouver la valeur du temps de demi-réaction.

### Exercice 6

La réaction du brome sur le méthane s'effectue selon l'équation globale suivante:



On peut l'interpréter par le mécanisme en chaîne linéaire suivant:



M est une espèce moléculaire quelconque.

- 1) Donner l'expression littérale de la vitesse de formation du bromure de méthyle en fonction des composés stables.
- 2) Comment varie cette expression en fonction de l'avancement de la réaction?

# CINETIQUE ET DYNAMIQUE CHIMIQUE

## Exercice 1

Définir l'unité de la constante de vitesse

- d'une réaction d'ordre zéro ;
- d'une réaction du premier ordre ;
- d'une réaction du deuxième ordre ;
- d'une réaction du troisième ordre ;

(Exprimer la concentration en mole par litre et le temps en seconde) ;

## Exercice 2

On donne ci-dessous les valeurs de la constante de vitesse de la réaction de nitration du benzène par l'acide nitrique, en fonction de la concentration en acide sulfurique.

Les conditions expérimentales initiales sont les suivantes :

$[Benzène] = 0,12 \text{ M}$

$[\text{HNO}_3] = 3\text{M}$

La température est maintenue à  $-10^\circ\text{C}$ .

$\text{H}_2\text{SO}_4 \text{ (M)}$	0	$5,3 \cdot 10^{-3}$	$2,06 \cdot 10^{-2}$
$k \cdot 10^6 \text{ (mol.l}^{-1}\text{s}^{-1}\text{)}$	1,03	10,5	31,0

Déterminer dans chaque cas :

1) L'ordre de la réaction par rapport au benzène ;

2) La concentration et le taux de réaction du benzène après une heure de réaction

3) Le temps nécessaire pour l'obtention d'un taux de réaction de 0,95 en admettant que l'ordre reste constant jusqu'à réaction totale.

## Exercice 3

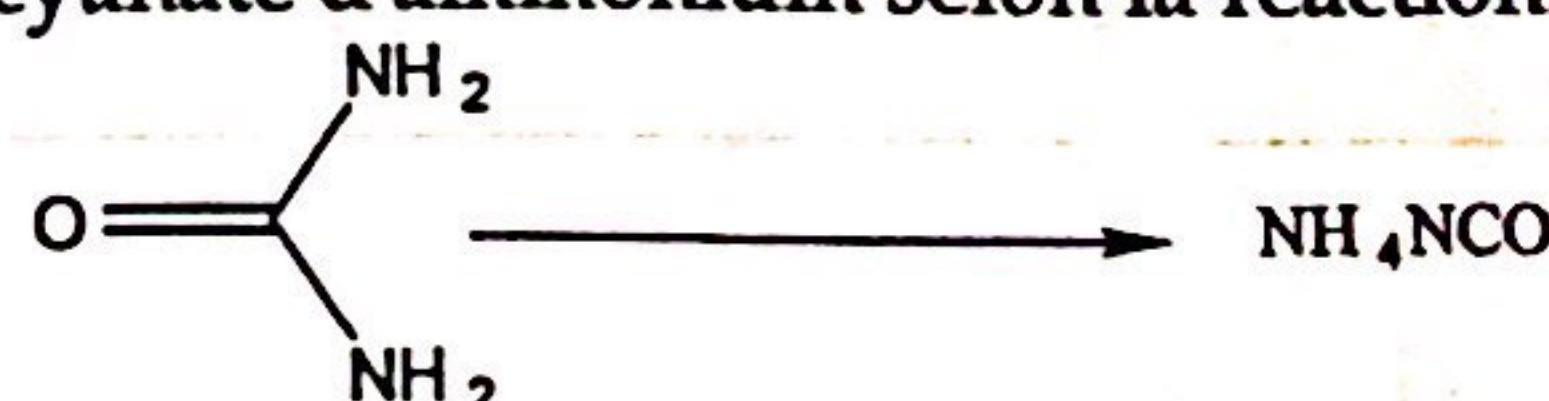
L'étude cinétique de la réaction de dissociation de l'ammoniac en dihydrogène et en diazote, à volume constant, sur un fil de tungstène à  $1100^\circ\text{C}$  donne les résultats suivants :

Pression initiale de $\text{NH}_3$ (mm de Hg)	265	130	58
Temps de $\frac{1}{2}$ réaction (min)	7,6	3,7	1,7

Établir la relation entre le temps de demi réaction, la pression initiale de l'ammoniac, l'ordre et la constante de vitesse de la réaction. Calculer l'ordre de la réaction et la constante de vitesse.

## Exercice 4

En milieu neutre l'urée s'isomérise en isocyanate d'ammonium selon la réaction:



La variation de la concentration en urée au cours du temps est consignée dans le tableau ci-dessous (la réaction est effectuée à  $50^\circ\text{C}$ ) :

t (min)	[urée] (M)
0	$10^{-1}$
120	$9,905 \cdot 10^{-2}$
300	$9,766 \cdot 10^{-2}$
480	$9,620 \cdot 10^{-2}$

1) Montrer que la réaction est du premier ordre par rapport à l'urée.

2) Calculer le temps de demi-réaction  $t_{1/2}$ .

3) Quelle est la valeur de  $t_{1/2}$ , si la concentration initiale en urée est égale à  $10^{-2} \text{ M}$  ?

## Exercice 5

Étude cinétique de l'hydrolyse du saccharose (A) à  $25^\circ\text{C}$  a conduit aux résultats suivants :



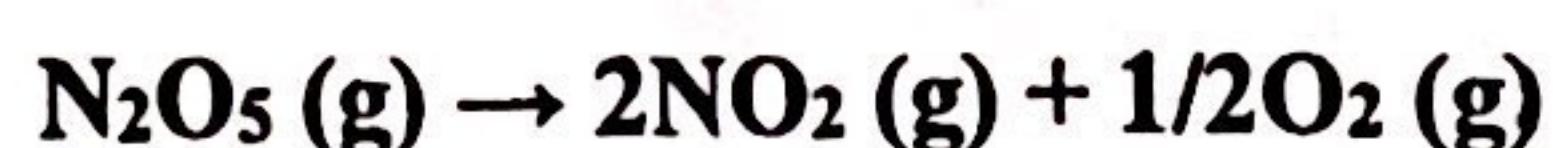
t, min	0	45	65	100	115	173
[A], M	1	0,83	0,77	0,67	0,62	0,50

4°) Calculer les concentrations de l'urée aux différents temps.

5°) Quel serait l'impact de la variation de la concentration initiale de l'urée sur la valeur du temps de demi-réaction. Justifier votre réponse.

**Exercice 2 (7 points)**

En mesurant la constante de vitesse de la réaction suivante à différentes températures, on a obtenu les résultats suivants :



T (°C)	0	25	35	45	55	65
K (s <sup>-1</sup> )	8.10 <sup>-7</sup>	3,5.10 <sup>-5</sup>	1,4.10 <sup>-4</sup>	5.10 <sup>-4</sup>	1,5.10 <sup>-3</sup>	4,9.10 <sup>-3</sup>

1°) Rappeler la loi d'Arrhenius (relation entre la température absolue, la constante de vitesse et l'énergie d'activation) pour cette réaction.

2°) Déterminer graphiquement les paramètres suivants :

a°) L'énergie d'activation.

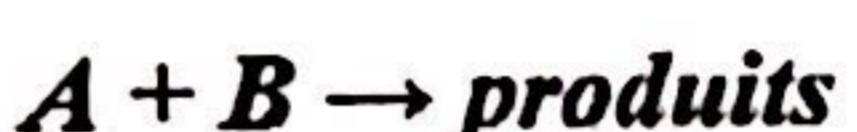
b°) Le facteur de fréquence K<sub>0</sub>.

c°) La constante de vitesse à 30 °C.

*Bonne inspiration !*

**Mathématiques-Physique-Sciences de l'Ingénieur (MPSI) :**

L2S3 / Session normale

**Composition de Cinétique chimique : 2 H****I<sup>o</sup>) Questions de cours (5 points)**1<sup>o</sup>) Définir la cinétique chimique (1 point)2<sup>o</sup>) Qu'appelle-t-on vitesse d'une réaction chimique ? (1 point)3<sup>o</sup>) Quels sont les facteurs qui influencent la vitesse d'une réaction chimique ? (1 point)4<sup>o</sup>) Soit l'écriture d'une réaction de la façon suivante (2 points) :

Pour  $[A]_0$  (a)  $\neq [B]_0$  (b)  $\rightarrow \Delta[A] = \Delta[B] = x$ , exprimer l'expression de la vitesse de la réaction.

En déduire l'expression de la constante de vitesse k en fonction du temps t et des concentrations des réactifs A et B.

**II<sup>o</sup>) Exercices (15 points)****Exercice 1 (8 points)**

En milieu neutre l'urée s'isomérise en isocyanate d'ammonium selon la réaction :



La concentration initiale en urée est  $[\text{urée}]_0 = 10^{-1} \text{ M}$

Les valeurs des constantes de vitesse au cours de la réaction ci-dessus sont consignées dans le tableau ci-dessous (la réaction est effectuée à 50 °C) :

t (min)	k ( $\text{min}^{-1}$ )
120	$7,94 \cdot 10^{-5}$
300	$7,88 \cdot 10^{-5}$
480	$8,06 \cdot 10^{-5}$

1<sup>o</sup>) Montrer que la réaction est du premier ordre par rapport à l'urée.

2<sup>o</sup>) Etablir l'expression de la vitesse de cette réaction d'ordre 1 par rapport à l'urée.

3<sup>o</sup>) Etablir l'expression du temps de demi-réaction  $t_{1/2}$  et en déduire sa valeur ?

1) Déterminer la répartition de température  $T(x)$  au sein de la tige. Calculer  $T(L)$ .

On donne:  $K = 389 \text{ W/mK}$ ,  $h = 155 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,  $a = 1 \text{ mm}$ ,  $T_0 = 340 \text{ K}$ ,  $T_e = 300 \text{ K}$  et  $L = 10 \text{ cm}$

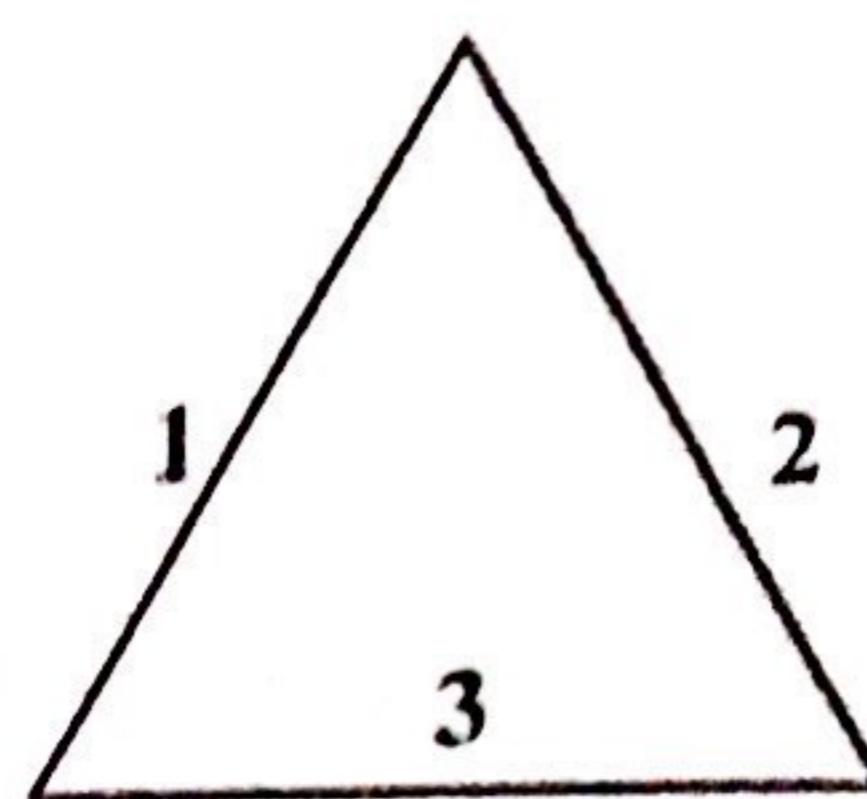
2) En supposant que les pertes thermiques par convection sont données par la même loi pour l'échangeur et pour la tige (même coefficient  $h$ ), calculer le rapport  $\eta$  des flux thermiques sortant de l'échangeur à travers la surface  $\Sigma$  à la base de l'ailette en  $x = 0$  en présence de l'ailette, puis sans l'ailette.

A quelle condition portant sur  $a$ ,  $h$  et  $K$ ,  $\eta$  est-il plus grand que 1 ?

Cette condition est-elle vérifiée avec les valeurs les valeurs numériques ci-dessus ? Si oui, calculer la valeur de  $\eta$

3) Calculer la répartition de la température  $T'(x)$  que l'on aurait obtenue si on avait supposé l'ailette de longueur infinie. Calculer dans ces mêmes conditions le « rendement »  $\eta'$  correspondant. Comparer les valeurs numériques et  $\eta$  et  $\eta'$ . Conclure.

- Trouver les définitions de : Pouvoir émissif, corps noir, facteur de forme, corps gris.
- Trouver les valeurs des facteurs de formes dans le cas de trois surfaces constituant un triangle équilatéral (voir figure) :

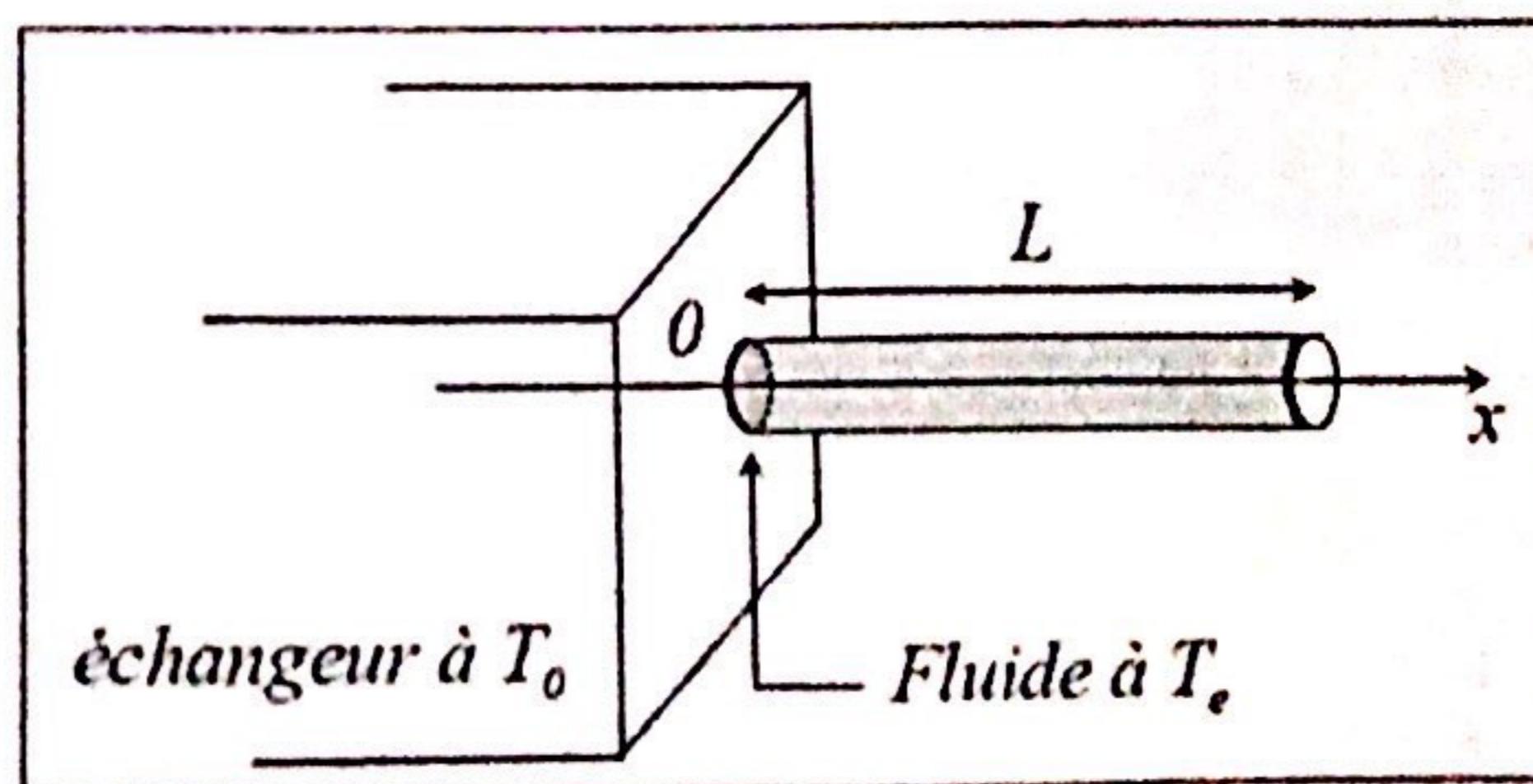


2. Soit deux surfaces grises, infinies et parallèles. Les températures et les émissivités de ces deux surfaces sont respectivement  $T_1 = 300 \text{ K}$ ,  $T_2 = 400 \text{ K}$ ,  $\varepsilon_1 = 0.75$ ,  $\varepsilon_2 = 0.65$ .
- Déterminer le flux échangé entre ces deux surfaces par rayonnement et par unité de surface.
  - Que devient la valeur du flux dans le cas où les surfaces sont noires.  $\sigma = 5.68 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ .

### Exercice 5 : Ailette de refroidissement

Une tige en cuivre, pleine, cylindrique, d'axe ( $ox$ ), de longueur  $L$ , de rayon  $a$  et de conductivité  $K$ , est au contact par une de ses extrémités ( $x = 0$ ) avec un échangeur à la température  $T_0$  et par sa surface latérale et son autre extrémité ( $x = L$ ) elle est en contact avec un fluide à la température constante  $T_e$  ( $T_0 > T_e$ ). Elle joue le rôle d'ailette de refroidissement.

On se place en régime permanent et on suppose qu'à l'intérieur de la tige, le gradient radial de température est suffisamment faible pour considérer que, dans la section droite d'abscisse  $x$ , la température  $T(x)$  est uniforme. La tige présente, au niveau de sa surface en contact avec le fluide, des pertes thermiques, par unité de temps et de surface, égales à  $h(T(x) - T_e)$ , si  $T(x)$  désigne la température du point de la surface considérée et  $h$  un coefficient constant.



### Exercice 3 : diffusion convecto-thermique

1) On considère une barre cylindrique de section  $S$ , longueur  $L$  et de conductivité thermique  $K$  constantes. La surface latérale de la barre est thermiquement isolée de l'extérieur.

On néglige tout effet de bord, de sorte qu'en régime permanent, la température de la barre ne dépend que de l'abscisse  $x$  le long de l'axe de celle-ci.

On a de plus  $T(x = 0) = T_1$  et  $T(x = L) = T_2$ , la barre étant en contact à ses extrémités avec des thermostats parfaits de températures  $T_1$  et  $T_2$ . Faire le schéma de l'ensemble du dispositif.

2) Rappeler l'unité du vecteur densité de flux thermique, noté  $\vec{j}_{th}$ . Rappeler de même celle du flux thermique orienté de  $T_1$  vers  $T_2$ . Rappeler enfin la loi de Fourier à 1 D. Justifier le signe dans cette loi.

3) En faisant un bilan de puissance entre  $x$  et  $x + dx$ , montrer qu'en régime permanent,  $\frac{dT}{dx} = cste$ .

Exprimer cette constante en fonction de  $T_1$ ,  $T_2$  et  $L$ , puis en fonction de  $T_1$ ,  $T(x)$  et  $x$ .

En déduire  $T(x)$  en fonction de  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $x$  et  $L$ . La répartition de température en régime permanent dépend-elle de  $K$ ? Sur quelle grandeur physique  $K$  va-t-elle intervenir?

4) Montrer qu'on peut écrire avec la convention « récepteur » que  $T_1 - T_2 = R_{th} \phi$ . Exprimer la « résistance thermique »  $R_{th}$  en fonction de  $L$ ,  $S$ ,  $K$ .

5)

a) On considère maintenant une barre de conductivité  $K_1$ , de section  $S$  et de longueur  $L_1$  en contact à son extrémité avec une barre de conductivité  $K_2$ , de même section  $S$  et de longueur  $L_2$ . Les barres sont isolées sur leur surface latérale. On impose  $T_1$  à l'entrée de la première barre et  $T_2$  à la sortie de la deuxième barre. Faire un schéma. Déterminer la résistance thermique de l'ensemble.

b) Déterminer la température de la jonction entre les barres en fonction de  $T_1$ ,  $T_2$  et des deux résistances thermiques  $R_{th,1}$  et  $R_{th,2}$ ; on pourra s'appuyer sur une analogie, clairement définie, avec l'électrocinétique.

6) On suppose maintenant une paroi de température de surface  $T_{Paroi}$  en contact avec un fluide de température  $T_i$ , on admet alors l'existence d'un vecteur densité de flux thermique de la surface de la paroi vers le fluide selon la loi d'Isaac Newton :  $\vec{j}_{th} = h(T_{Paroi} - T_i)\vec{N}$ , où  $h$  est une constante appelée coefficient d'échange paroi-fluide et  $\vec{N}$  le vecteur unitaire normal à la paroi, dirigé de la paroi vers le fluide. Faire un schéma. Justifier le sens du vecteur  $\vec{j}_{th}$

Montrer que pour une section  $S$  de paroi, on peut définir une résistance thermique  $R_{Th}$ , c'est-à-dire que

l'on peut écrire  $T_{Paroi} - T_i = R_{Th} \phi$ , en utilisant encore la convention « récepteur ». Exprimer  $R_{Th}$  en fonction de  $h$  et de  $S$ .

## Fiche 2 : Travaux dirigés de Transfert Thermique

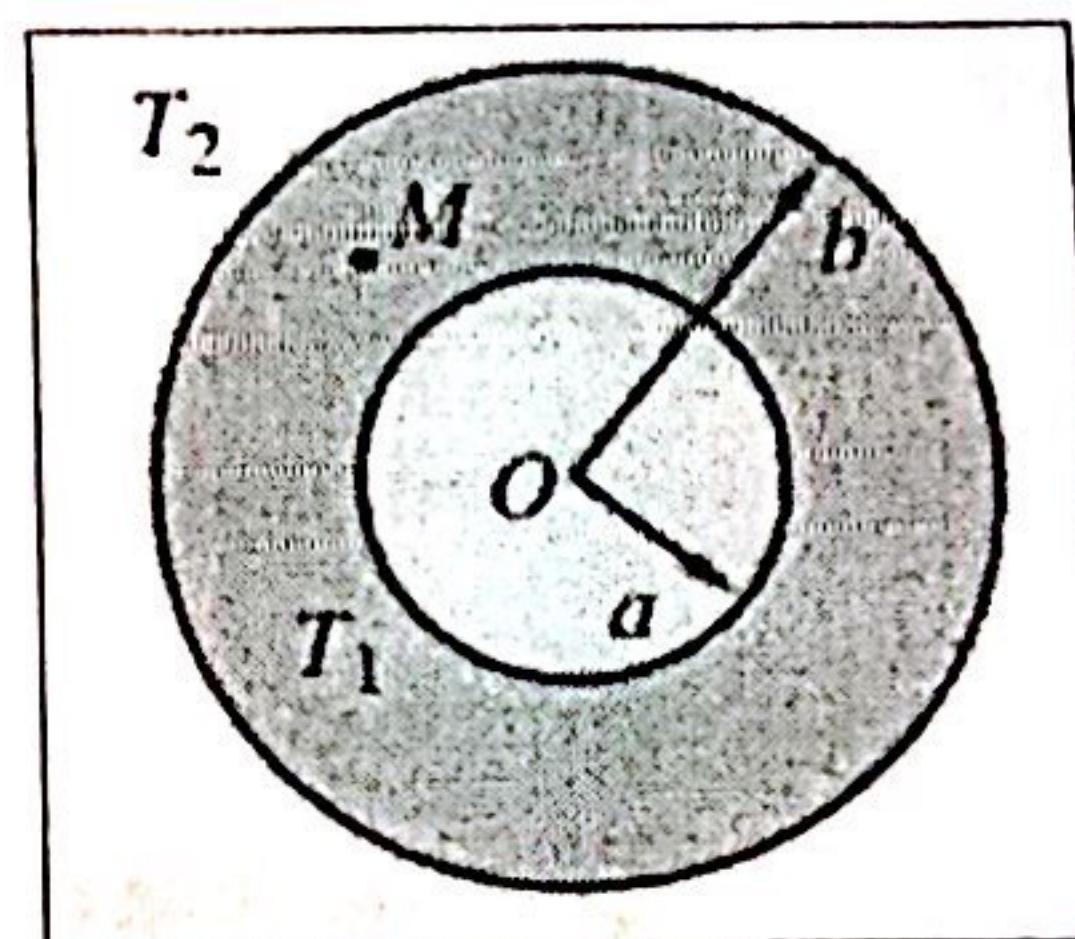
### Exercice 1 : diffusion de chaleur

Considérons un matériau homogène compris entre deux sphères concentriques de centre O, de rayons a et b ( $a < b$ ), de conductivité thermique K, de capacité thermique massique c et de masse volumique  $\rho$ . Les parois sphériques de ce matériau sont maintenues aux températures  $T_1$  ( $r = a$ ) et  $T_2$  ( $r = b$ ) et on suppose  $T_1 > T_2$

1) Écrire l'équation aux dérivées partielles que vérifie la température T en un point M, à l'instant t.

2) Déterminer, en régime permanent :

- la température  $T(r)$  en tout point M du matériau ;
- la puissance P transférée entre les deux sphères de rayons a et b ;
- la résistance thermique  $R_{th}$  de ce conducteur. Calculer  $R_{th}$  et P.



Données :  $a = 1 \text{ cm}$ ,  $b = 10 \text{ cm}$ ,  $K = 35 \cdot 10^{-2} \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$ ,  $T_1 = 100^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 20^\circ\text{C}$ .

### Exercice 2 : Double vitrage

On ne considère que des régimes permanents, indépendant, du temps.

L'intérieur d'une pièce est séparé de l'extérieur par une paroi vitrée de surface S, orthogonale à l'axe (Ox), et dont le verre a une conductivité thermique K. Ses faces interne et externe sont respectivement aux températures  $T_i$  et  $T_e$  avec  $T_e < T_i$ .

Première partie : On ne tient compte que de la conduction.

1. La paroi est une vitre simple d'épaisseur e.

Évaluer le flux thermique  $\phi_1$  sortant de la pièce à travers cette paroi en fonction de K, S, e,  $T_i$  et  $T_e$ .

Calculer la résistance thermique  $R_{th}$  de la paroi vitrée.

2. La paroi est un ensemble de deux vitres de même épaisseur e, séparées par une épaisseur e d'air, de conductivité thermique K'.

a) Évaluer le flux thermique  $\phi_2$  sortant de la pièce, puis  $\phi_2/\phi_1$ .

(b) A.N. :  $T_e = 270\text{K}$ ,  $T_i = 292\text{K}$ ,  $e = 3 \text{ mm}$ ,  $K = 1,2 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$ ,  $K' = 0,025 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$ .

Calculer  $\phi_2/\phi_1$  et les températures  $T_1$  et  $T_2$  des faces en regard des deux vitres.

Représenter graphiquement les variations de la température en fonction de x dans le double vitrage

### Exercice 7:

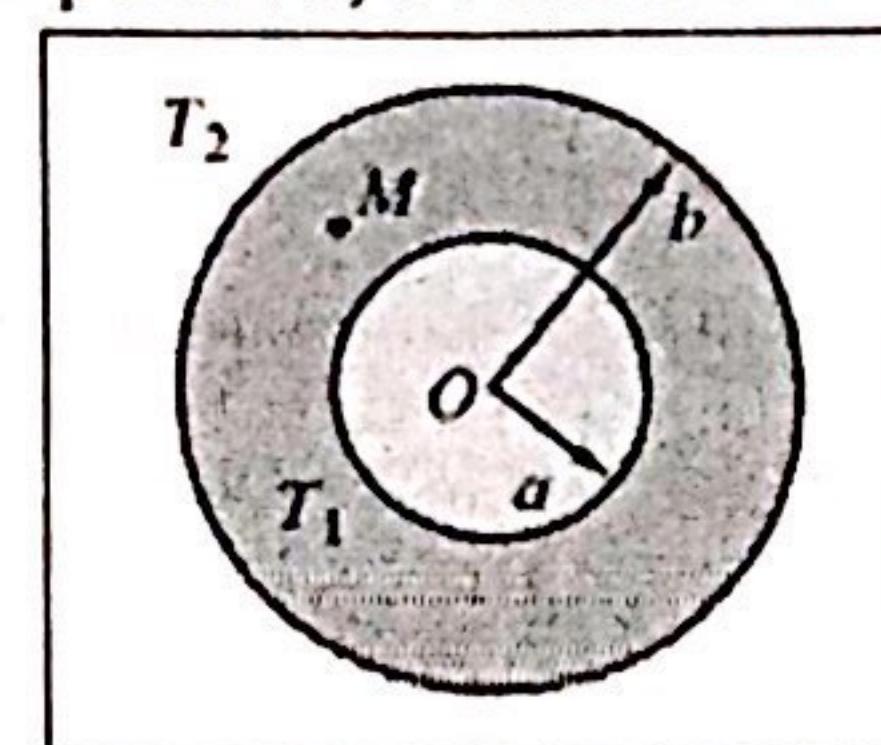
Considérons un matériau homogène compris entre deux sphères concentriques de centre O, de rayons  $a$  et  $b$  ( $a < b$ ), de conductivité thermique  $K$ , de capacité thermique massique  $c$  et de masse volumique  $\rho$ . Les parois sphériques de ce matériau sont maintenues aux températures  $T_1$  ( $r = a$ ) et  $T_2$  ( $r = b$ ) et on suppose  $T_1 > T_2$ .

Données :  $a = 1 \text{ cm}$ ,  $b = 10 \text{ cm}$ ,  $K = 35 \cdot 10^{-2} \text{ W.m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ,  $T_1 = 100^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 20^\circ\text{C}$

1) Écrire l'équation aux dérivées partielles que vérifie la température  $T$  en un point M, à l'instant  $t$ .

2) Déterminer, en régime permanent :

- la température  $T(r)$  en tout point M du matériau ;
- la puissance  $P$  transférée entre les deux sphères de rayons  $a$  et  $b$  ;
- la résistance thermique  $R_{th}$  de ce conducteur. Calculer  $R_{th}$  et  $P$ .

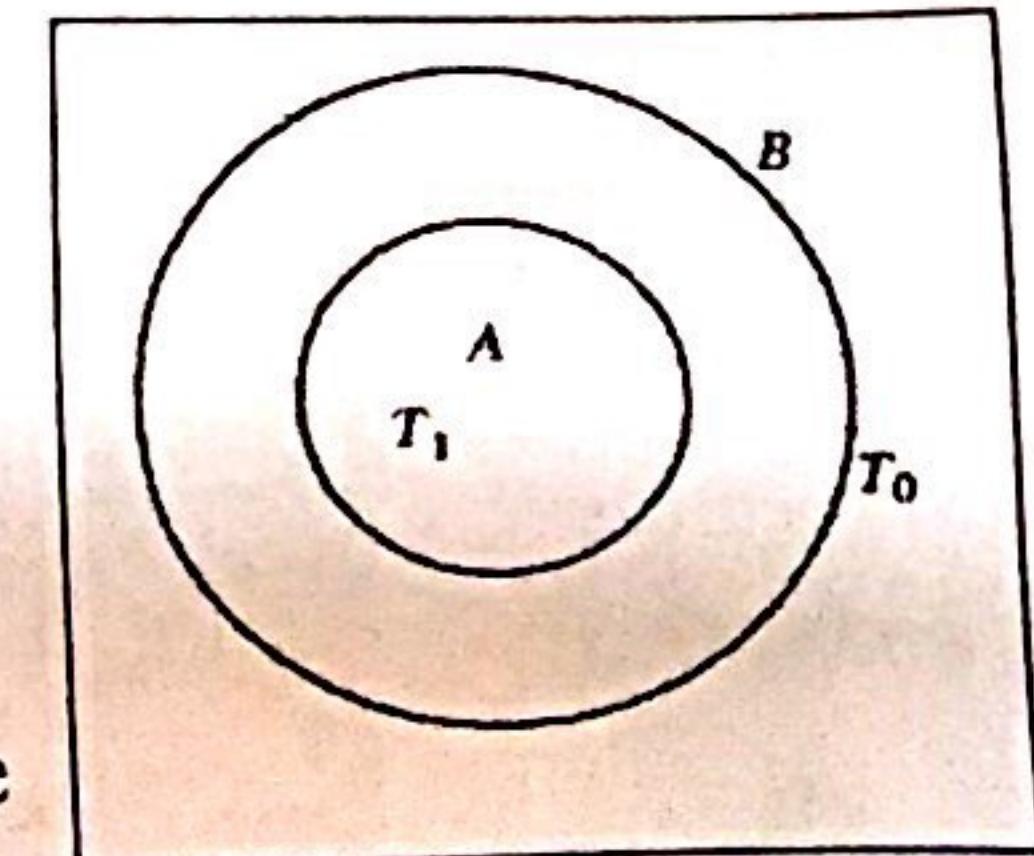


### Exercice 8:

Un corps sphérique (A) de rayon  $a$ , de capacité thermique  $C_0$ , et de température  $T_1$ , est placé dans une enceinte vide dont la paroi intérieure absorbante est maintenue à la température  $T_0$  (fig. ci-contre). On suppose que le corps (A) rayonne comme un corps noir et qu'il n'y a pas d'autres types de transferts thermiques.

Les températures  $T_1$  et  $T_0$  sont voisines et l'on pose  $T_1 = \theta_1 + T_0$  avec  $\theta_1 \ll T_0$ .

- Quel est le flux  $\Phi_a$  reçue par le corps (A) de la part de l'enceinte ?
- Déterminer la loi d'évolution de la température  $T$  de la sphère en fonction du temps.
- On considère une sphère métallique de rayon  $a = 1 \text{ cm}$ , de capacité thermique massique  $C_0 = 0,5 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ , de masse volumique  $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ .



Données :  $T_0 = 273 \text{ K}$ ,  $T_1 = 280 \text{ K}$  et la constante de Stefan :  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ .

Au bout de combien de temps, l'écart de température  $(T_1 - T_0)$  est-il inférieur à  $0,1 \text{ K}$  ?

### Généralités

#### Exercice 5

On remplit en 5 minutes une baignoire de 500 litres avec de l'eau chaude prélevée dans un réservoir supposé à température constante de 50°C. La canalisation de diamètre extérieur de 16 mm et intérieur de 14 mm a une longueur de 10 m.

- 1) Si la chute de température entre le réservoir et le robinet est de 2°C. Calculer le flux de chaleur perdu par la canalisation pendant le remplissage de la baignoire ainsi que les densités de flux de chaleur correspondants aux surfaces intérieur et extérieur de la canalisation.

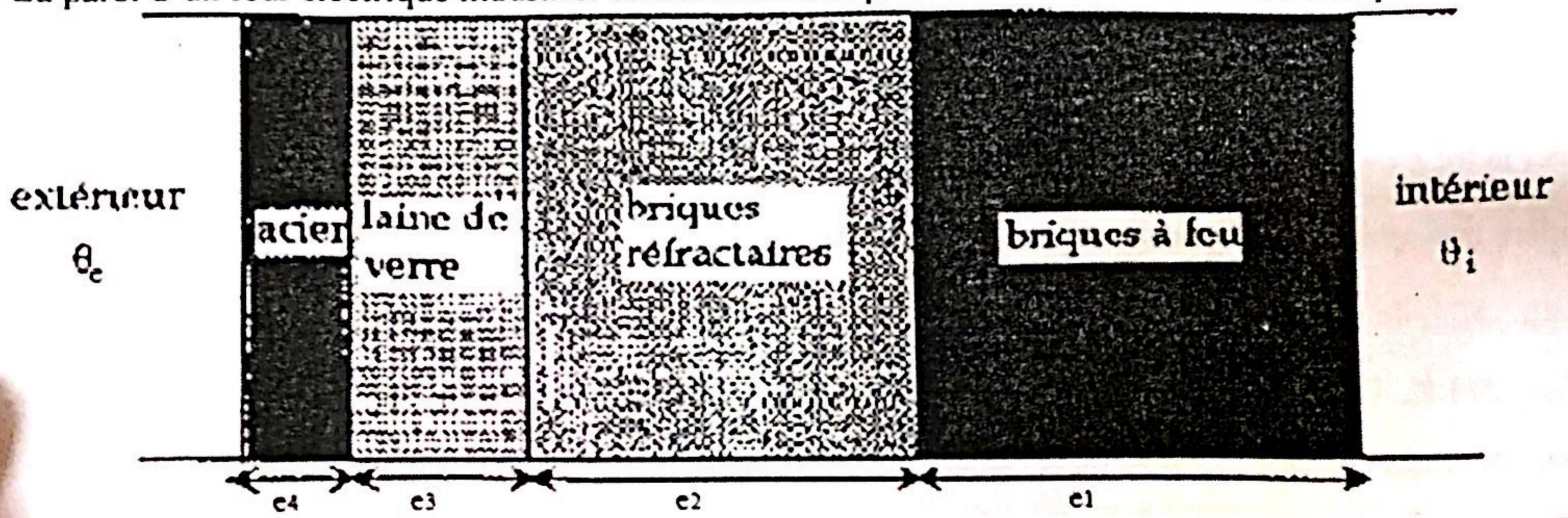
A quel pourcentage de perte de chaleur cela correspond-il si on suppose que l'eau froide était à 15°C avant d'être chauffée dans le réservoir ?

- 2) La température de l'eau dans la canalisation revient à la température de 20°C au bout de 30 minutes. Calculer le flux de chaleur perdu dans ces conditions.
- 3) Quelles quantités d'eau chaude faudrait-il prélever en une seule fois pour que les pertes en énergie entre le réservoir et le robinet ne représentent que 10 %, 20 %, 50 % ?

### *Conduction morte en régime permanent*

#### Exercice 6 :

La paroi d'un four électrique industriel est constituée de plusieurs matériaux comme l'indique le schéma ci-dessous.



Données numériques.

Température ambiante intérieure :  $\theta_i = 1092^\circ\text{C}$ .

Température ambiante extérieure :  $\theta_e = 32^\circ\text{C}$ .

Surface intérieure du four :  $S = 8,00 \text{ m}^2$ .

Résistance superficielle interne pour un mètre carré de paroi :  $1/h_i = r_i = 0,036 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$

Résistance superficielle externe pour un mètre carré de paroi :  $1/h_e = r_e = 0,175 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$

Caractéristiques des divers matériaux :

Matériau	Épaisseur	Conductivité thermique
Brique à feu	$e_1 = 230 \text{ mm}$	$1 = 1,04 \text{ W.m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Brique réfractaire	$e_2 = 150 \text{ mm}$	$2 = 0,70 \text{ W.m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Laine de verre	$e_3 = 50 \text{ mm}$	$3 = 0,07 \text{ W.m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Acier	$e_4 = 3 \text{ mm}$	$4 = 45 \text{ W.m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

- Exprimer littéralement puis calculer la résistance thermique globale  $R$  de un mètre carré de paroi.
- Exprimer littéralement puis calculer la densité de flux thermique  $\phi$  (puissance thermique par unité de surface) traversant la paroi.
- Déterminer les températures au niveau des diverses interfaces de l'intérieur vers l'extérieur  $\theta_{i1}, \theta_{i2}, \theta_{i3}, \theta_{i4}, \theta_{e1}$ .
- En admettant que la transmission de la chaleur est uniforme sur l'ensemble des parois du four, calculer la puissance électrique  $P$  nécessaire à son fonctionnement à vide.
- Calculer le coût de fonctionnement journalier du four sachant que le prix du kWh est 125 f CFA.

Le gaz est rejeté avec la vitesse  $c$  (ce qui assure la propulsion) dans l'atmosphère extérieure où il se refroidit à la pression constante  $P_1$  de  $T_5$  à  $T_1$ .

On considère que la vitesse du gaz est partout négligeable sauf à la sortie de la tuyère.

Données numériques :  $T_1 = 290 \text{ K}$ ,  $P_1 = 1 \text{ bar}$ ,  $P_2 / P_1 = 5$ . La température du gaz à l'entrée de la turbine est  $T_3 = 1300 \text{ K}$ . L'air est considéré comme étant un gaz diatomique de masse molaire  $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$ . La constante  $R$  des gaz parfaits vaut  $R = 31,8 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ .

Les applications numériques demandées sont relatives à l'unité de masse (ici, 1 kg) et les grandeurs extensives correspondantes seront notées par des lettres minuscules ( $s_m$  pour l'entropie,  $h_m$  pour l'enthalpie,  $e_{cm}$  pour l'énergie cinétique macroscopique, ...).

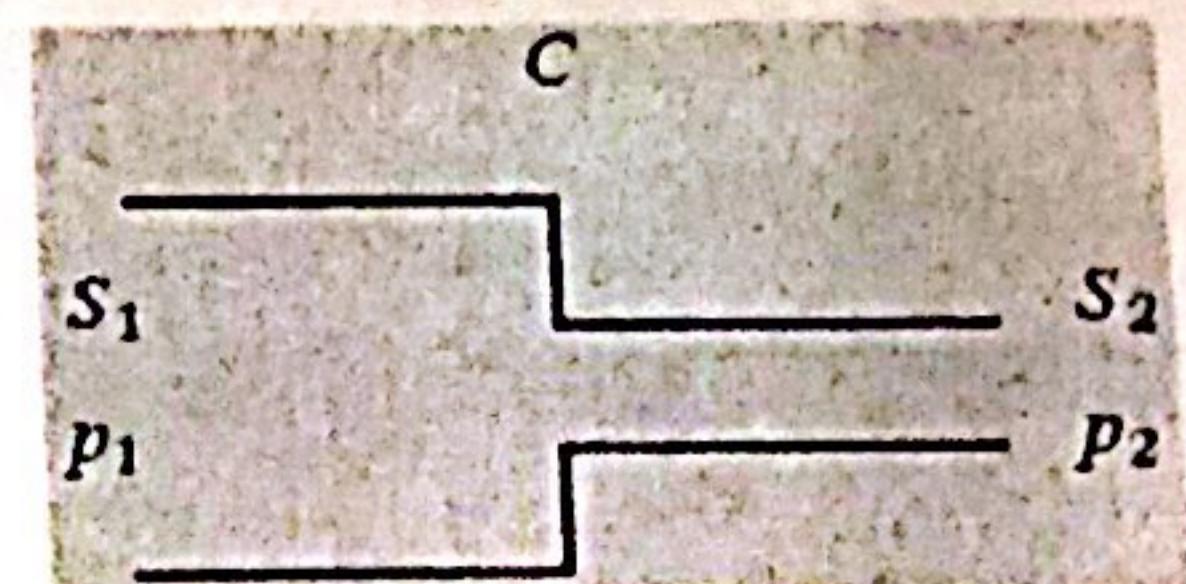
- 1) Déterminer l'expression de  $T_2$  en fonction des données. Quelle est l'énergie fournie à l'unité de masse de gaz qui traverse le compresseur ?
- 2) Quels sont les échanges d'énergie par unité de temps et par unité de masse dans la chambre de combustion ?
- 3) Déterminer  $T_4$  et  $T_5$ . Quelle est la vitesse  $c$  du gaz à la sortie de la tuyère ?
- 4) Quel est le rendement  $\rho$  du moteur ?

#### Exercice 4 :

On considère un gaz parfait qui s'écoule à partir d'un récipient de grand volume (état 1) jusqu'à l'atmosphère par un ajutage C. La pression du gaz est mesurée à une distance grande de C pour qu'elle puisse être considérée comme uniforme et constante dans toute la section  $S_1$ . En première approximation, la vitesse du fluide dans cette section  $S_1$  peut être négligée. Le régime est supposé permanent.

On donne :  $p_1 = 2,0 \text{ bar}$  ;  $p_2 = 1,0 \text{ bar}$  ;  $T_1 = 293 \text{ K}$  ;  $c_p = 1005 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$  ;  $\gamma = 1,40$  ;  $S_2 = 100 \text{ cm}^2$

L'écoulement est isentropique. Calculer la variation d'enthalpie massique entre les sections  $S_1$  et  $S_2$ . Calculer la vitesse théorique du gaz  $c_2$  dans la section  $S_2$  en négligeant la vitesse du fluide dans la section  $S_1$ . Calculer le débit massique du gaz dans l'état 2.



2. En réalité l'écoulement est adiabatique irréversible (existence de frottements) et la température mesurée dans l'état 2 (sortie de l'écoulement) est  $T'_2 = 243 \text{ K}$ , en déduire la vitesse  $c'_2$  de sortie. Pendant son écoulement l'air subit une variation continue de son état que l'on peut assimiler à une évolution polytropique soit  $pv^k = A$ . Calculer  $k$ .
3. Calculer le travail de transvasement massique pour la polytropique, la variation d'entropie massique dans la transformation réelle et la quantité de chaleur massique dissipée par frottement (ou quantité de chaleur massique fictive).

Représenter graphiquement l'évolution dans un diagramme ( $T,s$ ). Calculer la quantité de chaleur massique dissipée par frottement par une autre méthode.

## TRAVAUX DIRIGÉS DE TRANSFERTS THERMIQUES

### Partie 1 : systèmes ouverts (thermodynamique)

#### Exercice 1

A partir du bilan des puissances sous forme de travail, montrer que l'expression du travail réversible dans le cas d'un système ouvert en thermodynamique est :  $+ \int v dp$

#### **Application**

Un compresseur compresse lentement un débit d'air de 2 kg/s depuis 1 bar jusqu'à 20 bar. Pendant la compression, le volume spécifique et la pression de l'air sont liés par la relation  $p v^{1,35} = k$ . À l'entrée, le volume spécifique de l'air est de  $v_A = 0,8 \text{ m}^3 \text{kg}^{-1}$ .

Tracer le diagramme PV de façon qualitative. Quelle est la puissance consommée sous forme de travail ?

#### Exercice 2 :

Dans la tuyère d'un petit turboréacteur, la pression de l'air chute tandis que sa vitesse augmente. La tuyère est un élément sans aucun pièce mobile : aucun transfert de travail n'y est effectué. Les pertes en chaleur y sont négligeables et le débit d'air est de  $26 \text{ kg s}^{-1}$ .

À l'entrée, on mesure les caractéristiques suivantes :

$$h = 1\,092 \text{ kJ kg}^{-1}, C = 10 \text{ m s}^{-1}, T = 950 \text{ K}, v = 1,36 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1},$$

$$P = 2,28 \text{ bars}, u = 781,85 \text{ kJ kg}^{-1}$$

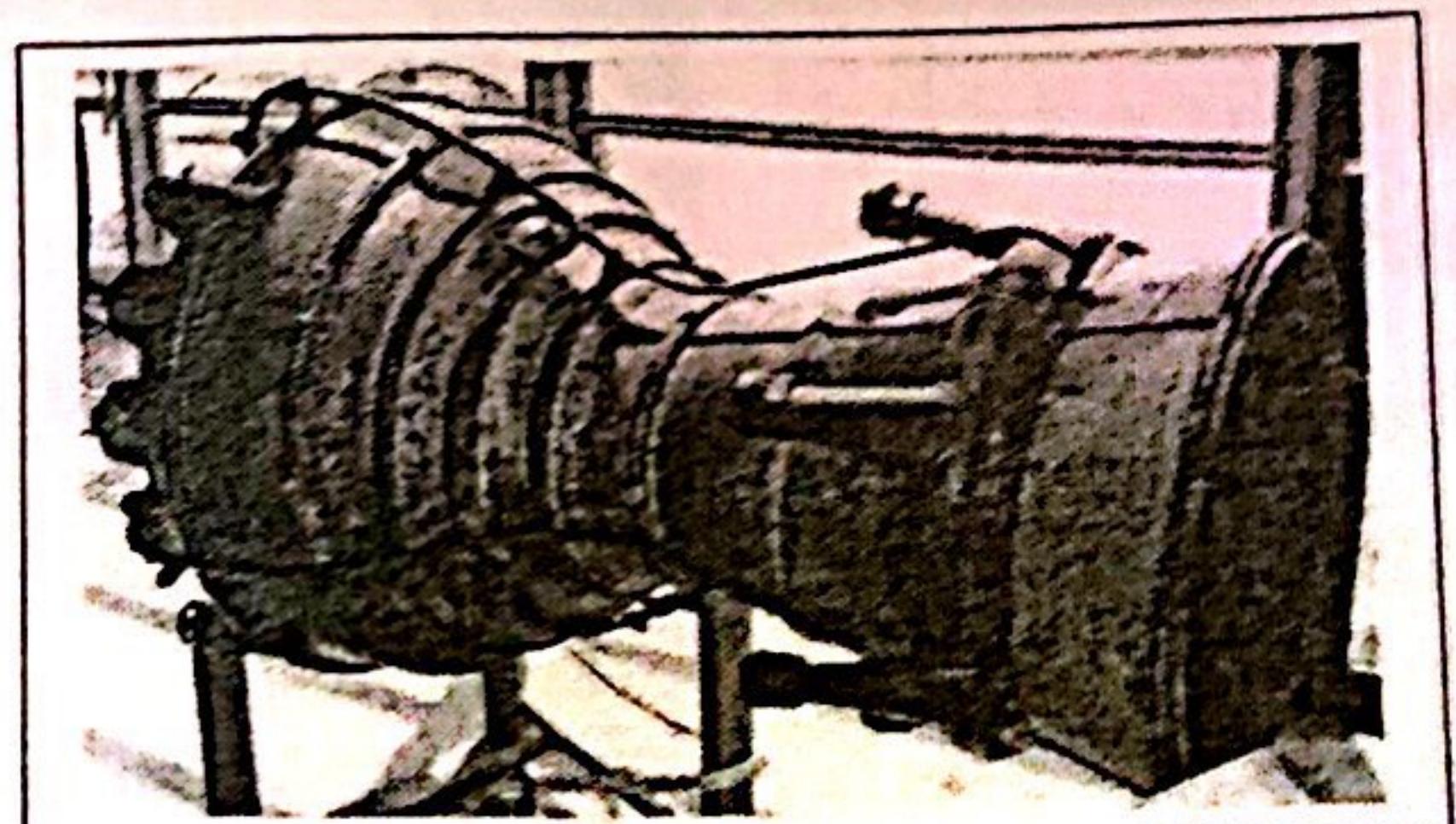
À la sortie, l'air est redescendu à pression atmosphérique (1 bar).

Étudier que les caractéristiques de l'air atteindront :

$$T = 300 \text{ K}, v = 2,55 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}, u = 642,1 \text{ kJ kg}^{-1}$$

À quelle vitesse les gaz sont-ils éjectés ?

Quels sont les débits volumiques d'air à l'entrée et à la sortie de la tuyère ?



#### Exercice 3 :

Dans un moteur à réaction, un gaz (assimilé à l'air supposé parfait) parcourt un cycle que l'on considérera tout d'abord comme étant réversible.

Le gaz pénètre dans le réacteur à la pression  $P_1$  et à la température  $T_1$  (état (1)).

Il est ensuite comprimé adiabatiquement jusqu'à la pression  $P_2$  et la température vaut alors  $T_2$  (état (2)).

Il entre alors dans une chambre de combustion où sa température passe de  $T_2$  à  $T_3$ , la pression restant égale à  $P_2$  (la température de la chambre de combustion est représentée par l'état (3)).

Le gaz subit ensuite une détente adiabatique dans une turbine jusqu'à  $P_4$  et  $T_4$  (état (4)). Cette détente est telle que la puissance fournie à la turbine compense exactement celle que consomme le compresseur entre les états (1) et (2).

Enfin, le gaz se détend dans une tuyère adiabatique sans parties mobiles jusqu'à  $P_1$  et  $T_5$  (état (5)).

### **Exercice 2 (06 points)**

1) A la frontière d'un solide, les échanges de chaleur dans l'environnement se produisent par convection et rayonnement.

Expliquer qualitativement ces deux modes d'échanges.

2) En conduction de la chaleur, on linéarise les lois d'échanges de la chaleur par convection et rayonnement thermiques si bien que les densités de flux de chaleur  $\varphi_{cv}$  et  $\varphi_r$  sont respectivement égales à :

$\varphi_{cv} = h_{cv}(T_p - T_{cv})$  et  $\varphi_r = h_r(T_p - T_r)$ , où  $h_{cv}$  et  $h_r$  sont les coefficients d'échanges respectivement de convection et de rayonnement,  $T_p$  est la température de la paroi du corps échangeant,  $T_{cv}$  et  $T_r$  sont les températures de référence du milieu environnant.

Sous quelles conditions peut-on linéariser la loi d'échange par rayonnement ? Exprimer  $h_r$  en fonction du facteur de forme, de la constante de Boltzmann dont on rappellera la valeur et d'une température que l'on définira.

Montrer que dans les conditions ordinaires de température,  $h_r \approx 6Wm^{-2}K^{-1}$  si le facteur de forme est voisin de 1.

### **EXERCICE 3 (07 points)**

La croûte continentale terrestre a une épaisseur  $L$  d'environ 35 km. On peut la considérer comme équivalente à une couche homogène de conductivité  $\lambda=23\text{ W/m K}$ . Au niveau du sol, la température est  $T_0 = 273\text{ K}$ , et à la profondeur  $L$ , elle vaut  $T_L = 873\text{ K}$ .

1. Exprimer la densité de flux  $\varphi_{th}$  (puissance géothermique par unité de surface) issue de la croûte continentale, en fonction du rayon terrestre  $R$  et de l'épaisseur  $L$  de cette croûte (ainsi que  $\lambda$ ,  $T_0$  et  $T_L$ ).
2. En considérant que l'épaisseur  $L$  est très petite devant le rayon  $R$  ( $L \ll R$ ), exprimer  $\varphi_{th}$  en fonction de  $L$  (ainsi que  $\lambda$ ,  $T_0$  et  $T_L$ ). En déduire que le problème pourra être traité en géométrie plane.
3. En fait, il faut tenir compte du caractère radioactif des éléments de la croûte continentale terrestre qui dissipent une puissance interne volumique supposée uniformément répartie  $q_{ra}=2,25 \cdot 10^{-5}\text{ W/m}^3$ . Déterminer le profil de la température de la croûte.
4. Représenter graphiquement ce profil.
5. Calculer la température  $T_5$  à la profondeur de 5 km.
6. En déduire  $\varphi_{ra}$  puissance géothermique par unité de surface au niveau du sol, quand on tient compte des éléments radioactifs.

**Devoir de TRANSFERTS THERMIQUES****Durée : 03 heures****Exercice 1 (07 points)**

Un compresseur aspire en régime permanent un débit d'air aux conditions de pression  $P_1$  et de température  $T_1$ , et rejette aux conditions  $P_2$  et  $T_2$ . L'air est considéré comme un gaz parfait de coefficient  $\gamma = 1,4$  et de masse molaire 29 g/mol, sa vitesse est négligeable ainsi que l'effet de la pesanteur. On réalisera les applications numériques avec  $T_1 = 300 \text{ K}$ ,  $P_1 = 10^5 \text{ Pa}$  et  $T_2 = 500 \text{ K}$ ,  $P_2 = 5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ,  $R = 8,315 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ .

Dans le carter du compresseur, l'air est brassé par un moteur électrique de travail indiqué massique  $w_i$ . La transformation est adiabatique.

- 1) calculer le travail indiqué en fonction des données.
- 2) On appelle compression polytropique, une transformation non adiabatique, sans frottements qui a la même représentation dans le diagramme ( $T, s$ ) que la transformation réelle.
  - a) Que représente la variation d'entropie  $\Delta S_{pol}$  entre les états A( $T_1, P_1$ ) et B( $T_2, P_2$ ) ?
  - b) Exprimer le travail indiqué élémentaire  $\delta w_{i,pol}$  dans cette transformation en fonction de  $T$  et de  $P$ .
- 3) a) On appelle rendement polytropique du compresseur le rapport  $\eta_{pol} = \frac{\delta w_{i,pol}}{\delta w_i}$ . Donner son expression en fonction de  $\gamma$ ,  $T$  et  $P$ .  
b) On admet que ce rendement est constant tout le long de la compression. Montrer que  $T$  et  $P$  sont reliés par une relation de la forme  $T^n P^{1-n} = \text{cte}$  et exprimer  $\eta_{pol}$  en fonction de  $n$  et de  $\gamma$ .  
Calculer  $n$  pour  $\eta_{pol} = 1$ . Commenter.
- 4) a) Calculer  $n$  et  $\eta_{pol}$  dans les hypothèses de 3) avec les valeurs numériques proposées.  
b) Calculer l'entropie créée par unité de masse d'air comprimé.  
c) Déterminer l'équation de l'isobare  $P = P_2$  et de l'isenthalpe  $h = h_A$  dans le diagramme entropique ( $T, s$ ) de l'air. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection C.  
d) Représenter ces deux courbes ainsi que la courbe correspondant à la compression.  
e) Déterminer graphiquement  $w_{i,pol}$  et  $w_i$ .

En donner une valeur approchée et les comparer aux valeurs exactes.

Durée : 2hAnnée : 2022/2023EXERCICE

Soit  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  un repère orthonormé fixe lié au bati d'une éolienne constitué d'une girouette et d'une hélice. La girouette ( $S_1$ ) lié au repère  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , a une liaison pivot avec le bati fixe de manière à tourner dans le plan horizontal autour de l'axe  $(O, \vec{z}_0)$ , avec  $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$ ,  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$  et  $\overrightarrow{OG} = a \vec{x}_1$  où  $a$  : est une constante positive.

L'hélice ( $S_2$ ) est lié au repère  $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  et ayant un rayon  $\overrightarrow{GP} = b \vec{z}_2$ , tourne autour de l'axe  $\vec{x}_1 \equiv \vec{x}_2$  tel que :  $\beta = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ .

La girouette a un moment d'inertie par rapport à l'axe  $(O, \vec{z}_0)$  qui est égal à :  $I$

Le tenseur d'inertie de hélice de masse  $M$  et de centre d'inertie  $G$  dans le repère  $R_2$  est donné

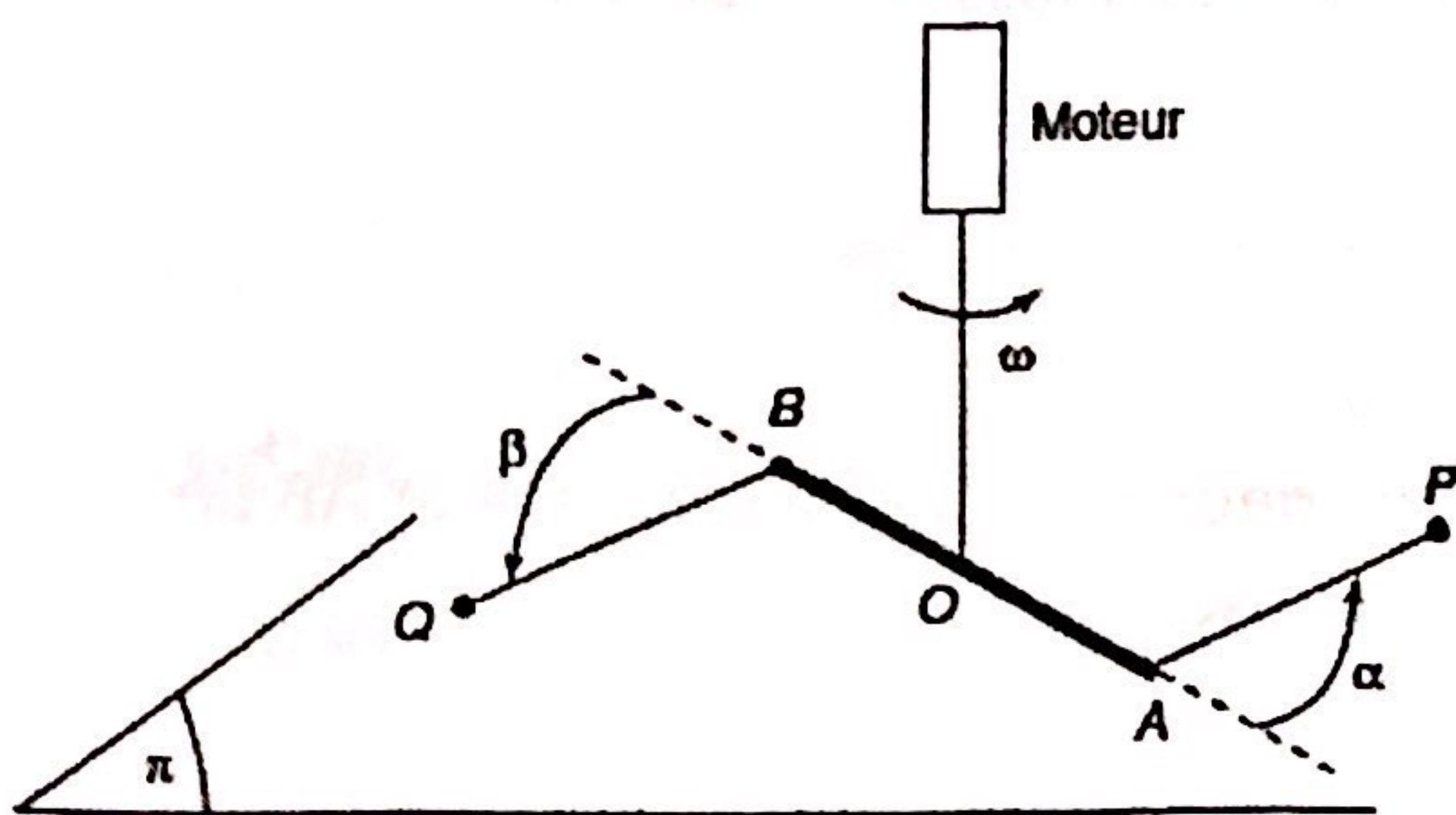
$$\text{par : } I_G(S_2)_{R_2} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_2}$$

Un balourd représenté par une masse ponctuelle  $m$  située à l'extrémité de l'hélice au point sur l'axe  $(G, \vec{z}_2)$ .

### Exercice 3

Une tige AB de masse négligeable, de longueur  $2L$ , de centre O tourne dans un plan horizontal ( $\Pi$ ).

Un moteur impose une vitesse angulaire  $\omega$  à la tige. Deux autres tiges AP et BQ de masses négligeables et de longueur  $L$  portent chacune en leur extrémité respective P et Q un point matériel de masse  $m$ . Ces tiges sont articulées en A et B et peuvent donc tourner par rapport à la tige AB. L'ensemble forme le système (S).



1. On considère dans un premier temps que les articulations en A et B sont bloquées et donc que  $\alpha = \text{cte}$  et  $\beta = \text{cte}$ .

a. Exprimer la résultante cinétique  $\vec{P}$  de (S) en fonction de  $L$ ,  $m$ ,  $\omega$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ .

b. Exprimer le moment cinétique  $\vec{\sigma}_O$  de (S) en O.

2. Les articulations sont à présent débloquées. Exprimer  $\vec{P}$  et  $\vec{\sigma}_O$  en fonction de  $L$ ,  $m$ ,  $\omega$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\dot{\alpha}$  et  $\dot{\beta}$ .

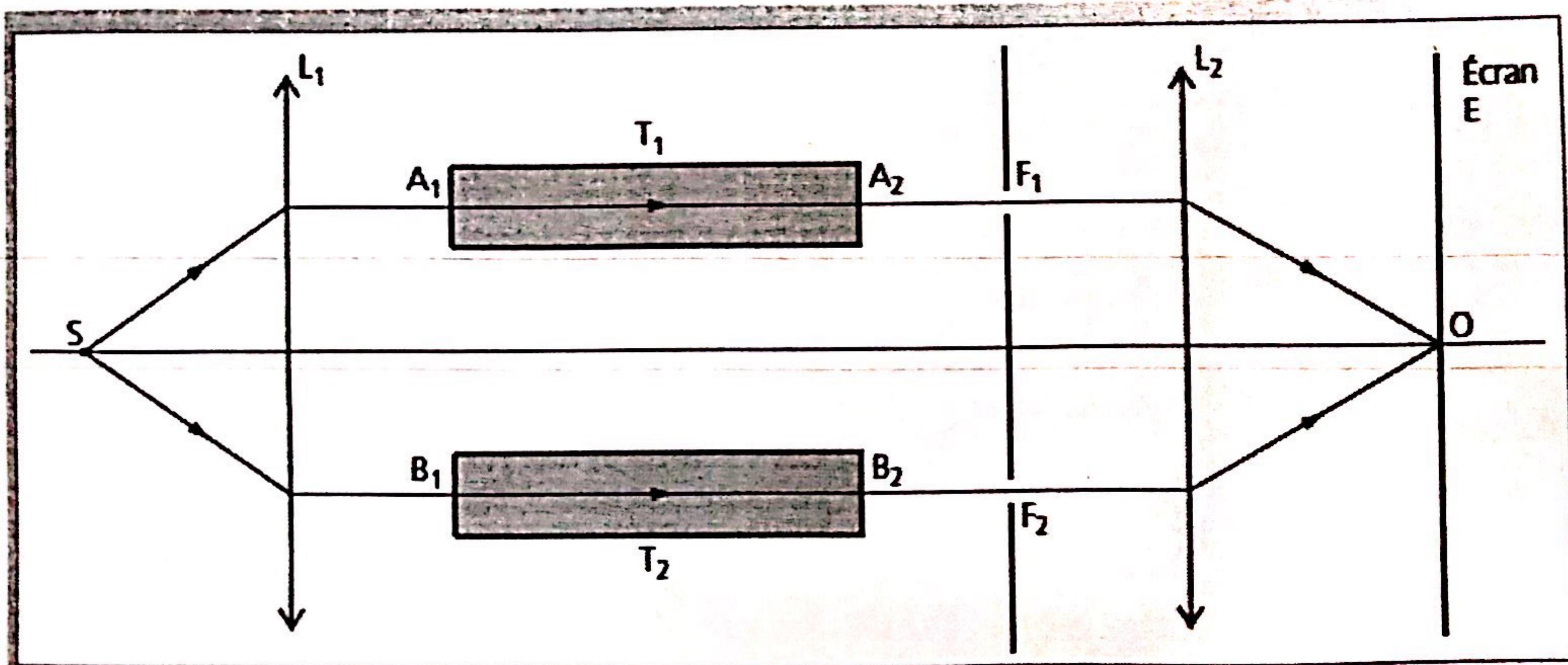
PS : La résultante cinétique est la résultante de la quantité de mouvement

- 4) En supposant que les rayons traversant la lame sont presque en incidence normale, déterminer le nouveau déphasage  $\Delta\varphi'(x) = \varphi'_2 - \varphi'_1$  au point M de l'écran.
- 5) Comment la figure d'interface est-elle modifiée ? donner la nouvelle position  $x'_0$  de la frange centrale.

### Exercice 3 : Mesure de l'indice de l'air dans un montage différentiel des trous de Young

Soit le montage différentiel des trous de Young représenté sur la figure ci-dessous. Entre les deux lentilles  $L_1$  et  $L_2$  sont disposés deux tubes  $T_1$  et  $T_2$  de longueur  $L = 10\text{cm}$ . Lorsque ces tubes sont remplis d'air, on observe une frange brillante au centre O du champ d'interférence sur l'écran d'observation E. la source émet une radiation monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 0,546\mu\text{m}$ . On réalise progressivement le vide dans le tube  $T_1$ . On voit alors 53 franges brillantes défiler lentement en O. à la fin du pompage, on observe une frange sombre.

- 1) Exprimer les chemins optiques  $\delta_1$  et  $\delta_2$  le long des rayons issus de S, traversant  $T_1$  et  $T_2$  et atteignant le point O de l'écran avant le pompage. Que vaut la différence de chemin optique entre ces deux rayons ?
- 2) Exprimer la différence de marche  $\delta$  entre les deux chemins optiques après pompage.
- 3) Quelles sont les positions  $x_0$  et  $x'_0$  des centres de la figure d'interférence sur l'écran ?
- 4) En déduire la valeur de l'indice n de l'air pour la radiation utilisée.



### Exercice 4 : Bilentille de Meslin

Soit S une source ponctuelle de lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  ; soient  $L_1$  et  $L_2$  deux demi-lentilles convergentes de rayon R et de même distance focale  $f'$ , placées comme indiquée ci-dessous.

## Fiche de Travaux dirigés d'optique physique : partie 2

Institut : CPGE/Classe : MP

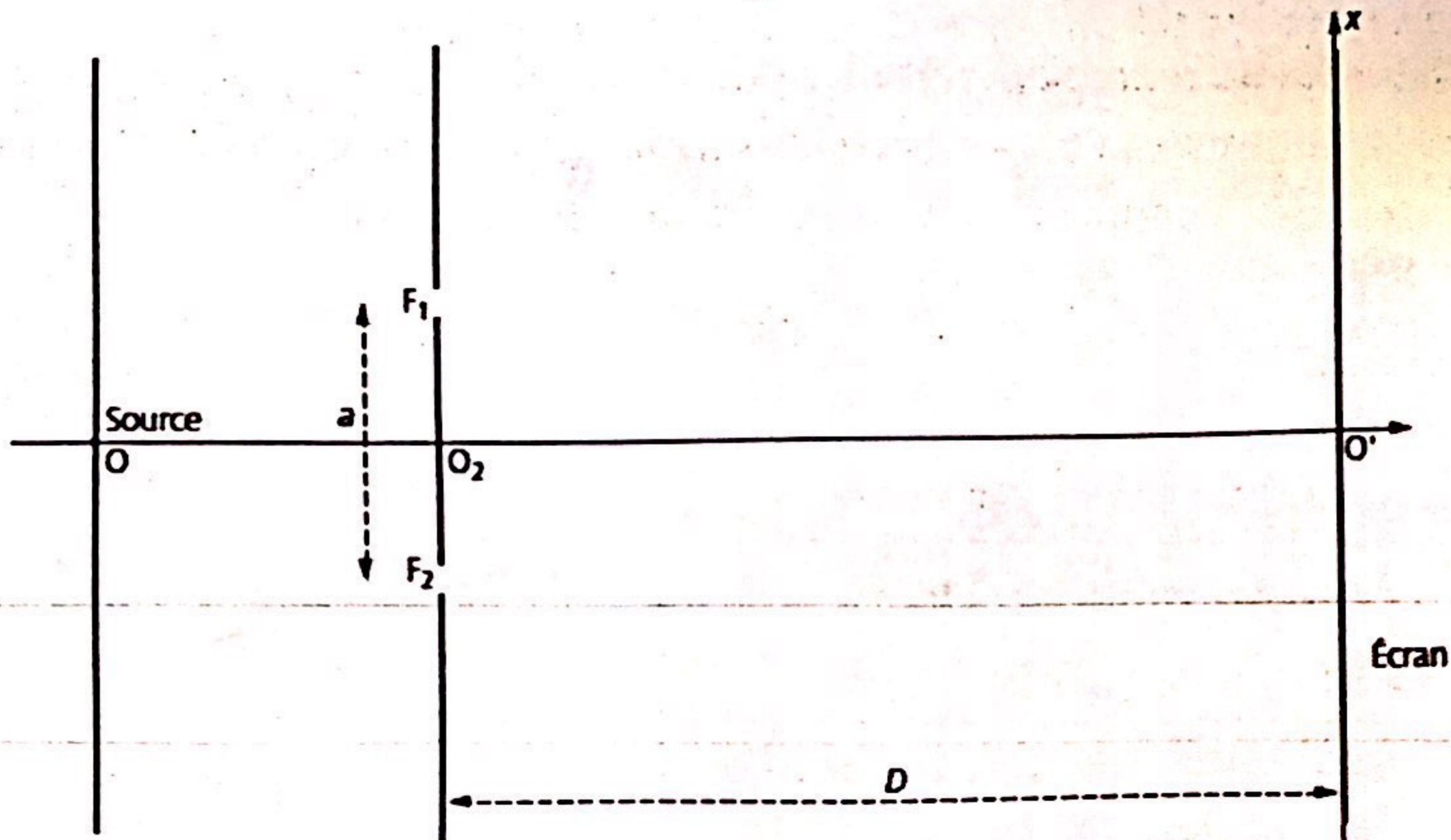
### Exercice 1 : interférence à deux ondes

On considère le dispositif des trous de Young ci-dessous permettant d'obtenir deux sources en phase. La source principale est équidistante des deux trous  $F_1$  et  $F_2$  considérés comme quasi-ponctuels, situés dans le même plan vertical, et distants de  $F_1F_2 = a$ . La source émet une lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ .

À distance  $D \gg a$  du plan des trous, on place un écran, également vertical.

On donne :  $a = 6\text{mm}$ ,  $D = 1,5\text{m}$ ,  $\lambda = 500\text{nm}$ .

- 1) Soient deux rayons issus de la source et arrivant sur l'écran à une distance  $x$  de O, après être passés respectivement par  $F_1$  et  $F_2$ . Déterminer la différence de marche et le déphasage entre ces rayons.
- 2) Qu'observe-t-on sur l'écran ?
- 3) En déduire la valeur de l'interfrange.



### Exercice 2 : Trou de Young en présence d'une lame de verre

On considère un dispositif de trous de Young éclairé par une source monochromatique S émettant une onde monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ . On pose  $S_1S_2 = a$ .

- 1) Calculer le déphasage  $\Delta\varphi(x) = \varphi_2 - \varphi_1$  en un point M de l'écran repéré par sa position  $(x, 0, 0)$ .
- 2) En déduire l'expression de l'intensité  $I(x)$ . on calculera la position  $x_0$  de la frange centrale (définie par  $\Delta\varphi(x_0) = 0$ ).
- 3) Donner l'expression de l'interfrange i.

On interpose devant le trou  $S_1$  une lame de verre d'indice  $n$  et d'épaisseur  $e$