Problème 1

La suite de Fibonacci (F_n) est définie par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
La suite de Lucas (L_n) est définie par : $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$.
On pose pour tout le problème, $w = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $w' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Partie I : Quelques propriétés arithmétiques de (F_n)

Q1) a) Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}, F_n \in \mathbb{N}$ et que $F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} = (-1)^n$.

b) En déduire que F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.

Q2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que pour tout entier p, on a $F_{n+p} = F_{n-1}F_p + F_nF_{p+1}$.

b) En déduire que $\text{pgcd}(F_{n+p}, F_n) = \text{pgcd}(F_n, F_p)$.

c) Montrer que $\forall\ n, k, p \in \mathbb{N}$ on a $\text{pgcd}(F_{kn+p}, F_n) = \text{pgcd}(F_n, F_p)$.

Q3) À l'aide de l'algorithme d'Euclide, montrer que :

$$\forall\ n, m \in \mathbb{N},\ \text{pgcd}(F_n, F_m) = F_d \text{ avec } d = \text{pgcd}(n, m).$$

Q4) Exemples d'applications :

a) Montrer que si F_n est premier, alors soit $n = 4$, soit n est premier impair.

b) Vérifier que F_8 est le premier terme divisible par 7.
Justifier l'équivalence : $7 \mid F_n \iff 7 \mid F_{\text{pgcd}(n,8)}$.
En déduire que 7 divise F_n si et seulement si n est un multiple de 8.

c) Déterminer tous les termes F_n divisibles par 4, puis tous les termes F_n divisibles par 28.

Partie II : Quelques propriétés de (L_n)

Q5) Soit n un entier naturel.

a) Exprimer F_n et L_n, en fonction de n, de w et de w'.

b) Montrer que $L_{2n} - L_n^2 = 2(-1)^{n+1}$.

c) En déduire que L_{2n} ne peut pas être le carré d'un entier.

Q6) Déterminer en fonction de n, le reste de la division euclidienne de L_n par 4.

Q7) Soient m et k deux entiers naturels.

a) Montrer que $2L_{2k+m} = 5F_mF_kL_k + L_mL_{2k}$.

b) En déduire que $2L_{2k+m} \equiv 2(-1)^{k+1}L_m \pmod{L_k}$.

Q8) Soit q un entier impair $\geqslant 5$.

a) Montrer qu'il existe un unique triplet d'entiers (c, k, r) tel que :
$c \in \{1; 3\}$, k congru à 2 ou 4 modulo 6, et $q = c + 2k3^r$.

b) Avec les mêmes notations que ci-dessus, montrer que $L_k \mid 2L_{3k}$, puis $L_k \mid 2^rL_{k3^r}$, et $L_k \mid L_{k3^r}$.

c) En déduire que soit $L_q \equiv -1 \pmod{L_k}$, soit $L_q \equiv -4 \pmod{L_k}$.

Partie III : les carrés de (L_n) (John H.E. Cohn)

Q9) Soit p un nombre premier et a un entier non divisible par p.

a) Rappeler et démontrer le petit théorème de Fermat.

b) En déduire que $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Q10) a) Soit p un nombre premier congru à 3 modulo 4.
Montrer qu'il n'existe pas d'entier x tel que $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$.
NB : *on remarquera que* $\frac{p-1}{2}$ *est impair.*

b) Soit n un entier naturel congru à 3 modulo 4.
Montrer qu'il n'existe pas d'entier x tel que $x^2 \equiv -1 \pmod{n}$.

NB : *on commencera par justifier qu'il existe au moins un nombre premier p congru à* 3 *modulo* 4 *qui divise n.*

Q11) Montrer que les seuls entiers n pour lesquels L_n est un carré, sont $n = 1$ et $n = 3$.
De la même manière, on pourrait montrer que les seuls entiers n pour lesquels F_n est un carré, sont $n = 0, 1, 2$ et $n = 12$.

Problème 2

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\begin{cases} \bullet f \text{ est } \underline{\text{continue}} \text{ sur } \mathbb{R} \\ \bullet f \text{ s'annule au moins une fois sur } \mathbb{R} \\ \bullet\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \end{cases}$$

Le but du problème est déterminer les éléments de $\mathscr{E}$.

Q1) a) Montrer que la fonction nulle est dans $\mathscr{E}$.

b) Montrer que la fonction cos est dans $\mathscr{E}$.

c) Si f est dans $\mathscr{E}$ et si $\omega \in \mathbb{R}^*$, montrer que la fonction $f_\omega : x \mapsto f(\omega x)$ est dans $\mathscr{E}$.

Q2) On considère une fonction $f \in \mathscr{E}$. En donnant à x et à y des valeurs particulières, prouver que :

a) $f(0)$ vaut 0 ou 1.

b) Si $f(0) = 0$, alors f est identiquement nulle.

c) Si $f(0) = 1$, alors f est une fonction paire.

d) Si $f(0) = 1$, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2\left[f(\frac{x}{2})\right]^2 - 1$.

e) Si f s'annule en $a \in \mathbb{R}^*$, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2a - x) = -f(x)$. En déduire que f est $4a$-périodique.

Dans la suite, f est un élement de $\mathscr{E}$ avec $f(0) = 1$.

Q3) a) Montrer que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Soit $\mathrm{A} = \{x > 0 \ /\ f(x) = 0\}$, montrer que A admet une borne inférieure.

On pose dans la suite du problème, $a = \inf(\mathrm{A})$.

c) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $t_n \in \mathrm{A}$ tel que $a \leqslant t_n < a + \frac{1}{n}$. En considérant la suite $(f(t_n))$, prouver que $f(a) = 0$. En déduire que $a > 0$.

d) Montrer que $\forall x \in [0; a[,\ f(x) > 0$.

Dans la suite, on pose $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \cos(\omega x)$ avec $\omega = \frac{\pi}{2a}$.

Q4) a) Soit $q \in \mathbb{N}$, montrer que $f\left(\frac{a}{2^q}\right) = 2\left[f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right]^2 - 1$. En déduire que $\forall q \in \mathbb{N}, f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$ [récurrence sur q].

b) Montrer que $\forall p, q \in \mathbb{N}, f\left(\frac{pa}{2^q}\right) = g\left(\frac{pa}{2^q}\right)$ [récurrence sur $p \geqslant 1$].

c) Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que la suite u définie par $u_q = \frac{a\left\lfloor 2^q \frac{x}{a} \right\rfloor}{2^q}$ [où E désigne la partie entière] converge vers x et que $f(u_q) = g(u_q)$.

d) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$.

– FIN –