18-01-2023

Année Académique : 2022-2023
Module : Analyse III

EPO/CPGE/MP

Devoir d'Analyse III

⏱ : 03 heures

Exercice 1 : Maniement et Connaissances des Concepts Fondamentaux (Minimum Vital) 07pts

1. Représenter graphiquement dans un repère du plan R^2 l'enveloppement convexe de la famille $\mathbb{P} := \{M_0(-3,-2), M_1(0,-1/2), M_2(3,-3), M_3(3,3), M_4(0,1/2), M_5(3,2)\}$ de $\mathbb{R}^2$. 0,5 + 0,5

2. Soit E un espace vectoriel normé. Soit C une partie non vide et convexe de E.

   Montrer que : $\forall \lambda \in]0,1] \quad \lambda \mathring{C} + (1-\lambda)\overline{C} \subset \mathring{C}$. 1

3. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. 1,5 + 0,5
   (a) Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout segment $[a,b] \subset I$ et pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, l'application $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) + \mu x$ est bornée et atteint sa borne supérieure en a ou en b.
   (b) On suppose que $I = \mathbb{R}$ et que f est convexe. Montrer que f est continue. 1

4. Soient $E = \mathscr{C}([0;1], \mathbb{R})$ muni de $||\cdot||_\infty$ et $F = \mathscr{C}^1([0;1], \mathbb{R})$ muni de la norme suivante :

$$||f||_F = ||f||_\infty + ||f'||_\infty \quad (\forall f \in F).$$

   On considère l'application $T : E \longrightarrow F, f \longmapsto T[f]$, tel que : $\forall x \in [0;1], \quad T[f](x) = \int_0^x f(t)dt$.

   Montrer que T est continue et Calculer sa norme. 1 + 1 = 2pts

Exercice 2 : Restitution Organisée de Connaissance sur les Convexes & Points Extrémaux 02p

Soit C un polyèdre convexe fermé de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'un point x^* est **extrémal** (ou un **point extrémal**) s'il n'y a pas deux points distincts y et z de C tels que : $x^* = (1-\lambda)y + \lambda z$ avec $\lambda \in]0,1[$.

1. On suppose ici que C est borné ; plus précisément on a $C = \text{conv}\{v_1, \cdots, v_k\}$.

   Montrer qu'un point extrémal de C est nécessairement l'un des v_i. 0,5

2. On suppose C décrit de la manière suivante : $C = C_0 + K \quad (\clubsuit)$,

   où C_0 est un polyèdre convexe compact et K un cône convexe fermé polyédrique.
   (a) Montrer que tout point extrémal de C est nécessairement dans C_0 et qu'il est aussi extrémal dans C_0 0,5
   (b) Donner un exemple de C décrit comme en $(\clubsuit)$ mais sans point extrémal. 0,5
   (c) Quelle condition portant sur C (ou sur K) assurerait que C a effectivement des points extrémaux ? 0,5

(c) Quelle condition portant sur C (ou sur K) ...

Exercice 3 : Métrique sur l'e.v. des fonctions lipschitiziennes (Rudolf Lipschitz (1832-1903)) 11 | 6

Soit $L_{\text{ip}}([0,1];\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère la fonction Ψ définie par :

$$\Psi : L_{\text{ip}}([0,1];\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto \Psi(f) = |f(0)| + \sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}; 0 \leqslant x < y \leqslant 1\right\}.$$

Pour tout $f \in L_{\text{ip}}([0,1];\mathbb{R})$, on pose : $\mathscr{L}_f := \{k \in \mathbb{R}_+ : \forall x, y \in [0,1], |f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y|\}$.

1. Montrer que $L_{\text{ip}}([0,1];\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([0,1];\mathbb{R})$. 1
2. Démontrer que les éléments de $L_{\text{ip}}([0,1];\mathbb{R})$ sont des fonctions bornées. 1
3. Soit $f \in L_{\text{ip}}([0,1];\mathbb{R})$.
   (a) Démontrer que $\mathscr{L}_f$ admet une borne inférieure que notera $\mathscr{R}_f$, puis justifier que $\mathscr{R}_f \in \mathscr{L}_f$. 1 0,5
   (b) Démontrer que si $f, g \in L_{\text{ip}}([0,1];\mathbb{R})$ alors $\mathscr{R}_{f+g} \leqslant \mathscr{R}_f + \mathscr{R}_g$. 1
4. Montrer que Ψ est bien définie sur $L_{\text{ip}}([0,1];\mathbb{R})$. 1
5. Montrer que l'application Ψ est une norme, puis calculer $\Psi(h)$ où $h : x \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{x+1}$. Que peut-on dire ? 1,5 0,5
6. On définie sur $L_{\text{ip}}([0,1];\mathbb{R})$ la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$ par : $\forall f \in L_{\text{ip}}([0,1];\mathbb{R}),\ \|f\|_\infty = \sup\limits_{[0,1]} |f|$.
   (a) Montrer qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $\forall f \in L_{\text{ip}}([0,1];\mathbb{R}),\ \|f\|_\infty \leqslant \alpha\Psi(f)$. 1
   (b) Existe-t-il une constante $\beta > 0$ telle que $\forall f \in L_{\text{ip}}([0,1];\mathbb{R}),\ \Psi(f) \leqslant \beta\|f\|_\infty$? **Conclure !** + 0,5
7. On note d_Ψ la distance associée à la norme Ψ, et on pose : $P : x \mapsto 2021x^{2022}$, $Q : x \mapsto 2022\sin\left(\frac{x\pi}{2}\right) - 2023$.
   (a) Donner l'expression analytique de d_Ψ. 0,5
   (b) Montrer que $P, Q \in L_{\text{ip}}([0,1];\mathbb{R})$, puis calculer $d_\Psi(P,Q)$. 1

Proposition de Correction du Devoir N° 1 d'Analyse III

Exo 1 : Maniement et Connaissances de concepts Fondamentaux

1) Représentation Graphique de l'enveloppe Convexe de la famille $\mathbb{P} = \{M_0(-3,-2), M_1(0,-\frac{1}{2}), M_2(3,-3), M_3(3,3), M_4(0,1/2), M_5(3,2)\}$

01/23

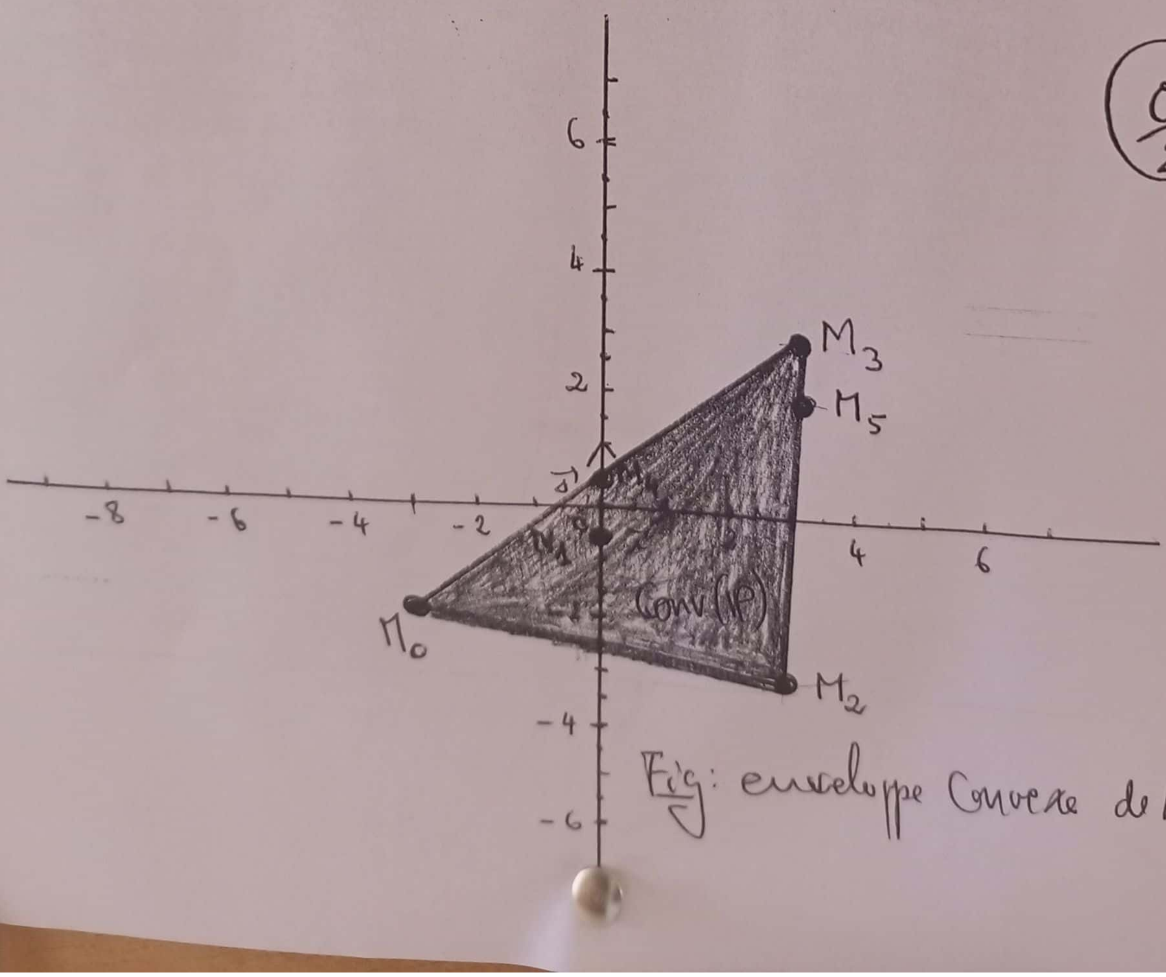

Fig : enveloppe Convexe de $\mathbb{P}$

2) Soit E un e.v.n. Soit C une partie non vide et convexe de E.

18-01-2023

Montrons que: $\forall \lambda \in]0,1]$, $\lambda \mathring{C} + (1-\lambda)\bar{C} \subset \mathring{C}$

(a) Pour $\lambda = 1$, alors, on a: $\lambda \mathring{C} + (1-\lambda)\bar{C} = \lambda \mathring{C} = \mathring{C} \subseteq \mathring{C}$.

(b) Si $\lambda \in]0,1[$. Soient $x \in \mathring{C}$ et $y \in \bar{C}$.

- Car $x \in \mathring{C} \Rightarrow \exists r > 0 \,/\, B(x,r) \subset C$.
- Par ailleurs $y \in \bar{C} \Rightarrow C \cap B\left(y, \frac{\lambda r}{1-\lambda}\right) \neq \emptyset$
- Maintenant, soit $z \in C \cap B\left(y, \frac{\lambda r}{1-\lambda}\right) \Longrightarrow$ $\|z-y\| < \frac{\lambda r}{1-\lambda} \Rightarrow \|(1-\lambda)(z-y)\| < \lambda r \Longrightarrow$ $(1-\lambda)(z-y) \in B(0, \lambda r) = \lambda B(0,r)$

02/23

- Par suite C étant convexe alors, $\lambda B(x,r) + (1-\lambda)z$ est un ouvert inclus dans C

De ce qui précède, on écrit:

$$\lambda x + (1-\lambda)y = \underbrace{\lambda x + (1-\lambda)(y-z)}_{} + (1-\lambda)z$$
$$\in \lambda x + \lambda B(0,r) + (1-\lambda)z$$
$$\in \lambda B(x,r) + (1-\lambda)z \subset C$$

$\Longrightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in \mathring{C}$ $\Longrightarrow \lambda \mathring{C} + (1-\lambda)\bar{C} \subset \mathring{C}$

3) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

(a) Montrons que :

f convexe $\Leftrightarrow \forall [a,b] \subset I, \forall \mu \in \mathbb{R} : \varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) + \mu x$

est bornée et atteint sa borne supérieure en a ou en b.

$\frac{03}{23}$

($\Rightarrow$) soit $[a,b]$ un segm de I et $\mu \in \mathbb{R}$.

Considérons $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) + \mu x$

Il vient alors φ est convexe car somme de telles fonction (à savoir $\begin{cases} x \longmapsto f(x) \text{ par hypothè} \\ x \longmapsto \mu x \text{ est linéaire donc convexe} \end{cases}$

* L'un des réels $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ est donc la borne supérieure de φ. En effet Posons $M = \max(\varphi(a), \varphi(b))$. Ainsi on a :

$\forall x \in [a,b], \exists \lambda \in [0,1], x = \lambda a + (1-\lambda) b$ et, on a :

$\varphi(x) = \varphi(\lambda a + (1-\lambda) b) \leq \lambda \varphi(a) + (1-\lambda)\varphi(b) \leq \underbrace{\lambda M + (1-\lambda) M}_{= M}$

Conf : $\forall x \in [a,b],\ \varphi(x) \leq M$

$(\Leftarrow)$ Soient $[a,b] \subset I$ et $\mu \in \mathbb{R}$ telle que l'application $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) + \mu x$ vérifie la condition $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Dans ce cas $f(a) + a\mu = f(b) + b\mu$

on obtient que $\mu = -\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

04/23

Par conséquent φ est définie par :

$\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} x$

Montrons que f est convexe.

. soient $a, b \in I$, avec $a < b$, $\forall \lambda \in [0,1]$, on a :

En hypothèse que : $x = \lambda a + (1-\lambda) b \in [a,b]$, et

on a $\varphi(\lambda a + (1-\lambda) b) \leq \varphi(b) = \varphi(a)$

$\Rightarrow f(\lambda a + (1-\lambda) b) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(\lambda a + (1-\lambda) b) \leq \varphi(a)$

$\Rightarrow f(\lambda a + (1-\lambda) b) \leq \left(\dfrac{(f(b) - f(a))(\lambda a + (1-\lambda) b)}{b - a} + (- \right)$

$$f(\lambda a+(1-\lambda)b) \leq \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)\left((1-\lambda)(b-a)\right)+f(a)$$

$$\Rightarrow f(\lambda a+(1-\lambda)b) \leq (1-\lambda)\left(f(b)-f(a)\right)+f(a)$$

$$\Rightarrow f(\lambda a+(1-\lambda)b) \leq \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$$

18-07-2023

05/20

• Si $\underline{a=b}$, nous avons l'égalité.

<u>Conf</u>: $\forall a,b \in I$, $\forall \lambda \in [0,1]$, ona :

$$f(\lambda a+(1-\lambda)b) \leq \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$$

c-à-d f est convexe sur I.

(b) on suppose que $I=\mathbb{R}$ et f est convexe.
Montrons que f est continue (sur $\mathbb{R}$)
<u>• Soit $b\in\mathbb{R}$</u>. obj: Montrons que f est cont en b.
(i) f étant convexe alors (C_f) est en dessous de chacune de ses cordes (voir figure)

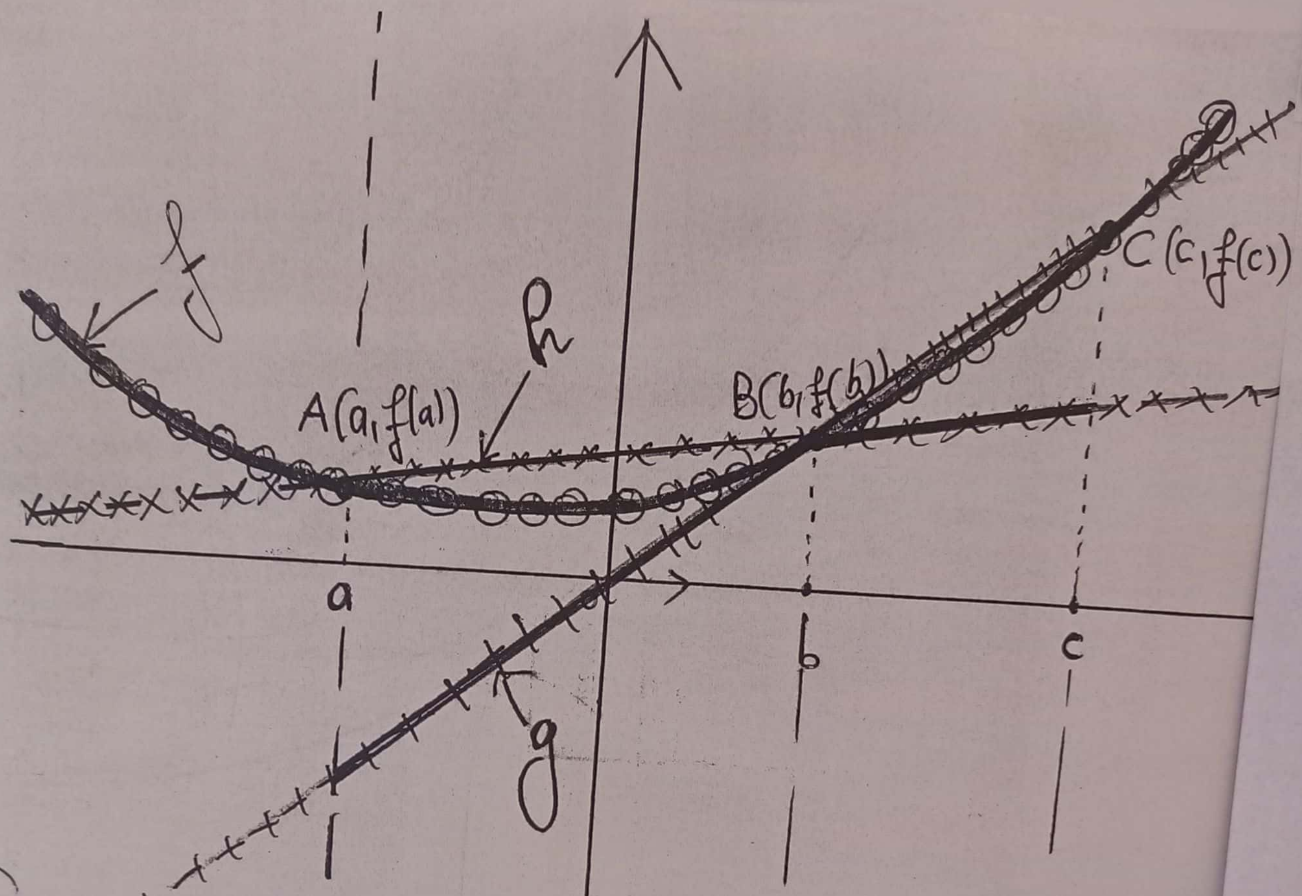

fig: Illustration graphique de f convexe, ses cordes $[A, B]$ et $[B, C]$ et les fonctions affines g et h tq: $g \leq f \leq h$ sur $[a,$ [illegible]

06/23

$$(\Delta_1) := (AB) : y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b) + f(b)$$

$$(\Delta_2) := (BC) : y = \frac{f(c)-f(b)}{c-b}(x-b) + f(b)$$

Considérons les fonctions h et g définies par:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b) + f(b) & \text{si } x \in [a, b] \\ \frac{f(c)-f(b)}{c-b}(x-c) + f(b) & \text{si } x \in]b, c] \end{cases}$$

$\{ f(c) - f(b)$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}(x-b) + f(b) & \text{si } x \in [b, b] \\ \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b) + f(b) & \text{si } x \in]b, c] \end{cases}$$

Par construction, nous avons : $\forall x \in [a, c]$

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad (I.1)$$

$$\lim_{x \to b^-} g(x) = \lim_{x \to b^+} g(x) = f(b) \quad (I.2)$$

$$\lim_{x \to b^-} h(x) = \lim_{x \to b^+} g(x) = f(b) \quad (I.3)$$

07/23

Concl : En combinant (I.1), (I.2) et (I.3) on en déduit ~~que~~ d'après le T des Gendarmes que $\lim_b g = \lim_b h = \lim_b f = f(b)$

D'où f est cont en b ($\forall b \in \mathbb{R}$)

Par conséquent f est cont sur $\mathbb{R}$.

Rmq : En pratique $a = \eta - b$ et $c = \eta + b$

4) Soient $E = \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ et

$F = \mathcal{C}^1([0;1], \mathbb{R})$ muni de la norme suivante :

$\forall f \in F, \|f\|_F = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$

$T : E \to F, \ f \longmapsto T[f] \ / \forall x \in [0;1], \ T[f](x) = \int_0^x f$

18-01-2023

(4.a) Montrons que T est continue

(i) $\forall f \in E$, $T[f]$ est ~~une~~ la primitive de f qui s'annule en 0. D'où $T[f] \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow$ T est bien définie sur E.

08/23

(ii) $\forall f \in E, \forall x \in [0;1]$, on a :

$$|T[f](x)| \leq \int_0^x |f| \leq x \|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty \quad (*)$$

(iii) Par ailleurs, $\forall f \in E$, $T[f]' = f \Rightarrow \|T[f]'\|_\infty = \|f\|_\infty$ $(**)$

(iii) $(*)$ et $(**)$ $\Rightarrow \|T[f]\|_F \leq 2\|f\|_\infty$ $(***)$

Concl : $\forall f \in E, \|T[f]\|_F \leq 2\|f\|_\infty \Rightarrow$ T est cont sur F

Conc : $\forall f \in E, \|T[f]\|_F \leq 2\|f\|_\infty \Rightarrow$ T est cont sur F

(4.b) Calculons la norme de T

D'après (4.a), on a : $\forall f \in E, \|T[f]\|_F \leq 2\|f\|_\infty$

$\Rightarrow \sup\limits_{\|f\|_\infty \leq} \|T[f]\|_F \leq 2\|f\|_\infty \leq 2 \Rightarrow \|T\| \leq 2$ (*v)

(under "sup": [redacted])

Pour $f \equiv 1$, on a : $\|f\|_\infty = 1$ et $T[f](x) = \int_0^x dt$

Soit alors $T[f](x) = x \Rightarrow \|T[f]\|_\infty = 1$

Il vient alors que : $\|T[f]\|_F = 2\|f\|_\infty = 2$ (v)

Conc : (*v) & (v) $\Rightarrow \|T\| = 2$

09/23

Exo 2 : R.O.C sur les Convexes et les pts Extrémaux

1) On suppose ici que C est borné, plus précisément on a $C = \text{Conv}(\{v_1, v_2, \dots, v_k\})$

obj : Montrons qu'un point extrémal de C est nécessairement l'un des v_i.

10/23

Soit x^* un pt extrémal de C.

Si x^* n'est pas l'un des v_i, il y a m vecteurs v_i, $2 \leq m < k$, tel que : $x^* = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$ avec $0 < \alpha_i < 1$ et $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$.

Il s'ensuit que : $x^* = \alpha_{i_0} v_{i_0} + (1 - \alpha_{i_0}) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{m} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{i_0}} v_i$

Par conséquent, x^* n'est pas extrémal pour C.

Concl : Les pts extrémaux de C sont donc nécessairement parmi les v_i (mais tous les v_i ne sont pas extrémaux de C).

Exo 2 : R.O.C sur les Convexes et les pts Extrémaux

1) On suppose ici que C est borné, plus précisém on a $C = \mathrm{Conv}(\{v_1, v_2, \ldots, v_k\})$

obj : Montrons qu'un pointe extrémal de C est nécessairem l'un des v_i.

10/23

soit x^* un pt extrémal de C.

Si x^* n'est pas l'un des v_i, il y a m vecteurs v_i, $2 \leq m \leq k$, tel que : $x^* = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$ avec $0 < \alpha_i < 1$ et $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$.

Il s'ensuit que : $x^* = \alpha_{i_0} v_{i_0} + (1-\alpha_{i_0}) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{m} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{i_0}} v_i$

Par conséquent, x^* n'est pas extrémal pour C.

Concl : Les pts extrémaux de C sont donc nécessairem parmi les v_i (mais tous les v_i ne st pas extrémaux de C).

2) On suppose que C décrit de la manière suivante : $C = C_0 + K$ (♣)

où C_0 est un polyèdre convexe compact et K un cône convexe fermé polyédrique.

(a) Montrons que tout pt extrémal de C est nécessairement dans C_0 et qu'il est aussi extrémal ds C_0

soit $x^* \in C = C_0 + K \Rightarrow \exists (c_0, k) \in C_0 \times K$ /

$x^* = c_0 + k$.

11/23

. si $k \neq 0 \Rightarrow x^* = c_0 + k = \frac{1}{2} c_0 + \frac{1}{2}(c_0 + 2k)$

où $c_0 \in C$, $c_0 + 2k \in C_0 + 2K = C_0 + K = C$

et $c_0 \neq c_0 + 2k$

Il s'ensuit que x^* n'est pas extrémal dans C.

18-07-2023

Concl : Donc, si x^* est extrémal de C, il est donc ds C_0 et cᵉ $C_0 \subset C$, x^* est aussi extrémal ds C_0.

b) Donnons un exemple de C décrit comme est aussi extrémal ds C_0.

b) Donnons un exemple de C décrit comme en (*) mais sans pt extrémal.

Considérons C_0 comme une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ et K comme étant la droite réelle $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$.

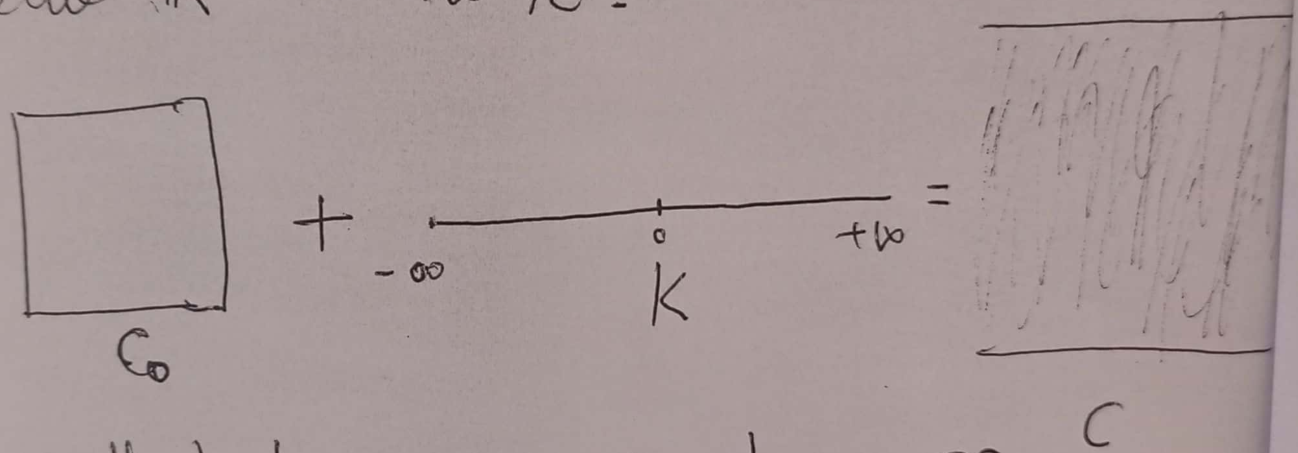

Fig: illustrat° de $C = C_0 + K$ 12/23

Ainsi C n'a pas de point extrémal. En effet C contient une droite entière.

c) C a effectivement au moins un point extrémal si C ne contient pas de droite -a-a-d si $K \cap (-K) = \{0\}$.

Ex 3. Mq

Exo 3 : Métrique sur l'e.v. des fonctions lipschitziennes

1. Montrons que $Lip([0,1],\mathbb{R})$ est un s.e.v. de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$

(i) La fct° nulle appartient à $Lip([0,1],\mathbb{R})$ donc $Lip([0,1],\mathbb{R}) \neq \phi$.

(ii) $\forall f \in Lip([0,1],\mathbb{R})$, $\exists k_f \in \mathbb{R}_+ / \forall x,y \in [0,1]$ tq

$|f(x) - f(y)| \leq k_f |x-y|$ $\Rightarrow$ f est uniform continue

$\Rightarrow$ f est cont sur $[0,1]$ $\Rightarrow$ $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$

d'où $Lip([0,1],\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

$\frac{13}{23}$

(iii) soient $f,g \in Lip([0,1],\mathbb{R})$ alors $\exists k_f, k_g \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{cases} |f(x) - f(y)| \leq k_f |x-y| & , \forall x,y \in [0,1] \\ |g(x) - g(y)| \leq k_g |x-y| & , \forall x,y \in [0,1] \end{cases} \quad (H)$$

$\forall x,y \in [0,1]$, on a : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$|(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(y)| = |\alpha(f(x) - f(y)) + \beta(g(x) - g(y))|$

$\leq |\alpha| |f(x) - f(y)| + |\beta| |g(x) - g(y)|$

en utilisant l'inégalité triangulaire.

⇒ D'après (H), on obtient : $\forall x, y \in [0,1]$

$$|(\alpha f+\beta g)(x) - (\alpha f+\beta g)(y)| \leq (|\alpha| k_f + |\beta| k_g)|x-y|$$

On en déduit que la combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ est aussi lipschitzienne de constante de lipschitz $k := |\alpha| k_f + |\beta| k_g$.

$\frac{14}{23}$

Concl : De (i), (ii), et (iii), on en déduit que $Lip([0,1], \mathbb{R})$ est un s.e.v de $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

18-07-2023

2) Démontrons que les éléments de $Lip([0,1], \mathbb{R})$ et bornés.

Soit $f \in Lip([0,1], \mathbb{R})$ alors $\exists\, k_f \in \mathbb{R}_+ \mid$

$\forall x, y \in [0,1]$, $|f(x) - f(y)| \leq k_f |x-y|$

$\Rightarrow \forall x, y \in [0,1]$, $|f(x)| \leq k_f(|x|+|y|) + |f(y)|$

$\Rightarrow \forall x \in [0,1]$, $|f(x)| \leq 2k_f + |f(0)| = M \Rightarrow f$ est bornée sur $[0,1]$.

Rmq : $f \in Lip([0,1], \mathbb{R}) \Rightarrow f$ est cont sur le segm $[0,1]$ et atteint ses bornes. Donc elle est BORNÉE sur $[0,1]$

3) (a) Soit $f \in Lip([0,1], \mathbb{R})$

Donc elle est BORNÉE sur $[0,1]$ et atteint ses bornes.

3) (a) Soit $f \in Lip([0,1], \mathbb{R})$

(i) Montrons que $\mathcal{L}_f$ admet une borne inf notée K_f.

$\mathcal{L}_f := \{ k \in \mathbb{R}_+, \forall x,y \in [0,1], |f(x) - f(y)| \leq k|x-y| \}$

$\mathcal{L}_f \neq \phi$ car f est lipschitzienne (car $k_f \in \mathcal{L}_f$) et minorée par 0. On en déduit d'après l'axiome de borne inf que $\mathcal{L}_f$ admet une borne inférieure que l'on notera K_f.

15/23

(ii) Justifions que $K_f \in \mathcal{L}_f$.

$K_f = \inf \mathcal{L}_f \Leftrightarrow \exists (k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}_f \ / \ k_n \xrightarrow[n\to\infty]{} K_f$

soit $n \in \mathbb{N}$, alors par définition, on a :

$\forall x,y \in [0,1], \ |f(x) - f(y)| \leq k_n|x-y|$ $\Rightarrow$ Passage à la limite lorsque $n \longrightarrow +\infty$, on obtient que

$\forall x,y \in [0,1]$ $|f(x) - f(y)| \leq \lim k_n|x-y| = K_f|x-y| \Rightarrow K_f \in \mathcal{L}_f$.

(b) Démontrons que si $f \in Lip([0,1], \mathbb{R})$ alors

$$R_{f+g} \leq R_f + R_g.$$

$\forall x,y \in [0,1]$, alors avec l'inégalité triangulaire,

On a : $|(f+g)(x) - (f+g)(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|$ (*)

Puisque $R_f \in \mathcal{L}_f$ et $R_g \in \mathcal{L}_g$ alors avec (*), on

trouve : $|(f+g)(x) - (f+g)(y)| \leq R_f |x-y| + R_g |x-y|$

$\Rightarrow |(f+g)(x) - (f+g)(y)| \leq (R_f + R_g)|x-y|$ 16/23

on en déduit que : $R_f + R_g \in \mathcal{L}_{f+g} \Rightarrow \underline{\underline{R_{f+g} \leq R_f + R_g}}$.

4. Montrons que Ψ est bien définie sur $Lip([0,1],\mathbb{R})$

soit $f \in Lip([0,1],\mathbb{R})$. obj : Mq : $\Psi(f)$ existe.

$\exists k_f \in \mathbb{R}_+$, $\forall x,y \in [0,1]$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$

En particulier, lorsque $0 \leq x < y \leq 1$ on a : $|x-y| \neq 0$

(b) / Démontrons que si $f, g \in Lip([0,1], \mathbb{R})$ alors

$R_{f+g} \leq R_f + R_g$.

$\forall x, y \in [0,1]$, alors avec l'inégalité triangulaire,

On a : $|(f+g)(x) - (f+g)(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|$ (*)

Puisque $R_f \in \mathcal{L}_f$ et $R_g \in \mathcal{L}_g$ alors avec (*), on

trouve : $|(f+g)(x) - (f+g)(y)| \leq R_f|x-y| + R_g|x-y|$

$\Rightarrow |(f+g)(x) - (f+g)(y)| \leq (R_f + R_g)|x-y|$ $\frac{16}{23}$

On en déduit que : $R_f + R_g \in \mathcal{L}_{f+g} \Rightarrow \underline{\underline{R_{f+g} \leq R_f + R_g}}$.

4. Montrons que Ψ est bien définie sur $Lip([0,1], \mathbb{R})$

soit $f \in Lip([0,1], \mathbb{R})$. obj : Mq : $\Psi(f)$ existe.

$\exists k_f \in \mathbb{R}_+, \forall x, y \in [0,1], |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$

En particulier, lorsque $0 \leq x < y \leq 1$ on a : $|x-y| \neq 0$

D'où $\dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq k_f \quad , \forall\ 0 \leq x < y \leq 1$

$\Rightarrow \sup\limits_{0 \leq x < y \leq 1} \dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq k_f$, on en déduit que

$\sup\limits_{0 \leq x < y \leq 1} \dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$ existe , il s'ensuit que la

quantité $\Psi(f) = |f(0)| + \sup\limits_{0 \leq x < y \leq 1} \dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \in \mathbb{R}_+$

c-à-d Ψ est bien définie sur $Lip([0,1],\mathbb{R})$.

18-07-2023

5(i) Montrons que Ψ est une norme sur $Lip([0,1],\mathbb{R})$

(P1) Dans 4., nous avons montré que $\forall f \in Lip([0,1],\mathbb{R})$,

$\Psi(f) \in \mathbb{R}_+$.

17/23

(P2) Soit $f \in Lip([0,1],\mathbb{R})$

. si $f \equiv 0$ (fct° nulle) alors $\Psi(f) = \Psi(0) = 0$

. Réciproquement si $\Psi(f) = 0 \iff \begin{cases} |f(0)| = 0 \\ |f(x)-f(y)| = 0 \\ \forall\ 0 \leq x < y \leq 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} f(0) = 0 \\ |f(x) - f(0)| = 0, \forall x \in]0,1] \end{cases} \iff f(x) = f(0) = 0\ \forall x$

Ainsi, on a : $\Psi(f) = 0 \iff f \equiv 0$ ($f^{ct^{e}}$ nulle)

(P3) $\forall f \in Lip([0,1], \mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\Psi(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \sup_{0 \leq x < y \leq 1} \frac{|(\lambda f)(x) - (\lambda f)(y)|}{|x-y|}$$

$$= |\lambda| \left(|f(0)| + \sup_{0 \leq x < y \leq 1} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \right) = |\lambda| \Psi(f)$$

Donc : $\Psi(\lambda f) = |\lambda| \Psi(f)$

$\frac{18}{23}$

(P4) $\forall f, g \in Lip([0,1], \mathbb{R})$, on a :

$$\Psi(f+g) = |(f+g)(0)| + \sup_{0 \leq x < y \leq 1} \frac{|(f+g)(x) - (f+g)(y)|}{|x-y|}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on trouve :

$$\Psi(f+g) \leq \Psi(f) + \Psi(g)$$

En $\mathcal{C}$: De (P1), (P2), (P3) et (P4) on en déduit que Ψ est une norme sur $Lip([0,1], \mathbb{R})$.

5(ii) Calculons ...

5(iii) Calculons $\Psi(h)$ avec : $h : x \longmapsto \frac{1}{2}\sqrt{x+1}$

En remarquant que $\sup_{0\leq x<y\leq 1} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = \sup_{[0,1]} |f'|$

On en déduit que :

$$\Psi(h) = |h(0)| + \sup_{[0,1]} |h'| = \frac{1}{2} + \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{1}{4\sqrt{x+1}}\right|$$

Concl : $\Psi(h) = \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow$ h appartient à la Boule Unité.

6(a). Montrons qu'il $\exists$ $\alpha>0$ | $\forall f \in Lip([0,1],\mathbb{R})$

$\|f\|_\infty \leq \alpha\, \Psi(f)$.

Soit $f\in Lip([0,1],\mathbb{R})$, on a : $\forall x\in[0,1]$,

$|f(x)| \leq |f(0)| + |f(x)-f(0)|$ 19/23

En particulier pour $x\in]0,1]$, on a :

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \frac{|f(x)-f(0)|}{|x|}|x| \leq |f(0)| + \sup_{0\leq x<y\leq 1}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$$

$\Rightarrow \forall x\in[0,1]$, $|f(x)| \leq \Psi(f)$ $\Rightarrow \sup_{[0,1]}|f| \leq \Psi(f)$

Concl : $\forall f\in Lip([0,1],\mathbb{R})$, $\|f\|_\infty \leq \alpha\,\Psi(f)$ avec $\alpha = 1$

6(b). Existe-t-il une constante $\beta > 0$ telle que : $\forall f \in Lip([0,1], \mathbb{R})$, on ait : $\Psi(f) \leq \beta \|f\|_\infty$.

18-07-2023

Pour cela, procédons par absurde.

Supposons qu'$\exists \beta \in \mathbb{R}_+ / \forall f \in Lip([0,1], \mathbb{R}), \Psi(f) \leq \beta \|f\|_\infty$ (**)

Considérons la suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], f_n(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{n} - x}$

On a : $\forall x \in [0,1]$ $f'_n(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{1+\frac{1}{n} - x}}$

20/23

Par suite, on a : $\|f'_n\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f'_n| = \frac{\sqrt{n}}{2}$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est $\frac{\sqrt{n}}{2}$-lip

Par conséquent $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset Lip([0,1], \mathbb{R})$.

Par ailleurs, on a : $\|f_n\|_\infty = |f_n(0)| = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$ et

$\Psi(f_n) = |f_n(0)| + \|f'_n\|_\infty = \sqrt{1+\frac{1}{n}} + \frac{\sqrt{n}}{2} \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$

(**) $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Psi(f_n) \leq \beta \|f_n\| \xrightarrow[n\infty]{} \beta$ ce qui est absurde.

... la constante $\beta \in \mathbb{R}_+$ telle que ...

$(**) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Psi(f_n) \leq \beta \|f_n\| \xrightarrow[n\infty]{} \beta$ ce qui est absurde.

<u>Concl</u>: Il n'existe pas de constante $\beta \in \mathbb{R}_+$ telle que $\Psi(\cdot) \leq \beta \|\cdot\|_\infty$. On en déduit que $\|\cdot\|_\infty \not\sim \Psi$

c-à-d: $\|\cdot\|_\infty$ et Ψ ne sont pas équivalentes

7. (a) Donnons l'expression analytique de d_Ψ

$$d_\Psi : Lip([0,1],\mathbb{R}) \times Lip([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$(f,g) \longmapsto d_\Psi(f,g) = \Psi(f-g)$$

$$d_\Psi(f,g) = \Psi(f-g) = |(f-g)(0)| + \sup_{0\leq x<y\leq 1} \frac{|(f-g)(x) - (f-g)(y)|}{|x-y|}$$
$$= |f(0) - g(0)| + \sup_{0\leq x<y\leq 1} \frac{|[f(x)-f(y)] - [g(x)-g(y)]|}{|x-y|}$$

(b) (i) <u>Montrons que</u> $P, Q \in Lip([0,1],\mathbb{R})$

21/23

• Pour $P : x \longmapsto 2021\, x^{2022}$

$\forall t \in [0,1]$, on a: $2021 \cdot 2022 \cdot t^{2021} \leq 2021 \cdot 2022$

$0 \leq x < y \leq 1 \Rightarrow \int_x^y 2021 \cdot 2022\, t^{2021} dt \leq 2021 \cdot 2022 \int_x^y dt$

$\leq 2021 \cdot 2022\, (y-x)$

• Pour $P : x \longmapsto 2021\, x$

$\forall\, t \in [0,1]$, on a : $2021 . 2022 . t^{2021} \leq 2021 . 2022$

$\Rightarrow \forall\, x,y \in [0,1]$, $0 \leq x < y \leq 1 \Rightarrow \int_x^y 2021 . 2022\, t^{2021}\, dt \leq \int_x^y 2021 . 2022\, dt$

soit alors : $P(y) - P(x) \leq 2021 . 2022\, (y - x)$

En échangeant le rôle de x et y, on obtient :

$\forall\, x,y \in [0,1]$, $|P(x) - P(y)| \leq 2021 . 2022\, |x - y|$

on en déduit f P est $2021 . 2022$ - lip sur $[0,1]$.

Par conséquent $P \in Lip([0,1], \mathbb{R})$.

Pour $Q : x \longmapsto 2022 \sin\left(\frac{x\pi}{2}\right) - 2023$

$\forall\, x,y \in [0,1]$, on a :

$$|Q(x) - Q(y)| = 2022 \left| \sin\left(\frac{x\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{y\pi}{2}\right) \right|$$

$$= 2022 \left| 2 . \sin\left(\frac{(x-y)\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{(x+y)\pi}{4}\right) \right|$$

$$\Rightarrow |Q(x) - Q(y)| \leq 4044 \left| \sin\left(\frac{\pi}{4}(x-y)\right) \right|$$

$\frac{22}{23}$

car $\cos(a) \leq 1$ $\forall\, a \in \mathbb{R}$.

Par ailleurs : $a \in \mathbb{R}$, on a : $|\sin(a)| \leq |a|$. D'où

on a : $\forall\, x,y \in [0,1]$, $|Q(x) - Q(y)| \leq 1011\pi\, |x - y|$

on en déduit que Q est 1011π-lip .

Concl : $Q \in Lip([0,1], \mathbb{R})$

Rmq : si $\forall\, x \in D_f$, $|f'(x)| \leq k \Rightarrow f$ est k-lip.

Donc, on aurait pu utiliser P' et Q'.

(ii) Calcul de $d_\varphi(P,Q)$

$$(P(x)-Q(x)) = 2021\,x^{2022} - 2022\sin\left(\frac{x\pi}{2}\right) + 2023$$

$$(P-Q)'(x) = 2022 \cdot 2021\,x^{2021} - 1011\pi\cos\left(\frac{x\pi}{2}\right)$$

18-07-2023

$$|P(0)-Q(0)| = 2023$$

$$\sup_{[0,1]} |P'-Q'| = |P'(1)-Q'(1)| = 2022 \cdot 2021$$

23/23

On en déduit que:

$$d_\varphi(P,Q) = 2023 + 2021 \cdot 2022$$

$$\Rightarrow d_\varphi(P,Q) = 4088485$$