MPSI

Exercices d'analyse

David Delaunay

MPSI

Exercices d'analyse

David Delaunay

- RÉSUMÉS DE COURS
- MÉTHODES
- 3 NIVEAUX D'EXERCICES :
  - apprentissage
  - entraînement
  - approfondissement
- CORRIGÉS DÉTAILLÉS PAS À PAS

deboeck SUPÉRIEUR

MPSI

Exercices d'analyse

David Delaunay

- RÉSUMÉS DE COURS
- MÉTHODES
- 3 NIVEAUX D'EXERCICES :
  - apprentissage
  - entraînement
  - approfondissement
- CORRIGÉS DÉTAILLÉS PAS À PAS

de boeck SUPÉRIEUR

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web : **www.deboecksuperieur.com**

Rue du Bosquet, 7 B-1348 Louvain-la-Neuve

1ère édition, 2017
1er tirage, 2017

Imprimé aux Pays-Bas.

Dépôt légal:
Dépôt légal France : juin 2017
Dépôt légal Belgique : 2017/13647/089

ISBN : 978-2-8073-0623-3

La pratique d'exercices est essentielle à l'apprentissage du cours de mathématiques : il n'est pas de meilleure façon de mémoriser et de comprendre un théorème que d'en faire usage !

Cet ouvrage regroupe sur 11 chapitres 336 exercices portant sur le programme d'analyse en classe de MPSI. Il respecte strictement le programme en cours et vient compléter l'ouvrage d'*algèbre et probabilités* que l'on retrouvera dans la même collection.

Chaque chapitre commence par un rappel des principales définitions et des résultats essentiels du cours. Il se poursuit avec des exercices aux corrigés détaillés regroupés sur trois niveaux :

- *Les exercices d'apprentissage* servent à l'acquisition des concepts fondamentaux du cours. Ce sont souvent des sujets faciles où j'ai choisi volontairement de ne faire figurer que peu de technicité.
- *Les exercices d'entraînement* permettent de poursuivre l'acquisition du cours, trois niveaux d'étoiles servent à anticiper leur difficulté. Ces sujets ont été choisis pour leur intérêt, leur classicisme ou ont été inspirés par des questions rencontrées aux écrits et aux oraux des différents concours.
- *Les exercices d'approfondissement* sont les plus ambitieux, ils nécessitent souvent de passer par une phase de recherche ou entrent en résonance avec d'autres chapitres du programme. Ces sujets sont inspirés de questions rencontrées aux concours les plus ambitieux.

Les corrections des exercices sont accompagnées de *méthodes*. Celles-ci servent à souligner les idées récurrentes ou bien à mettre en exergue la démarche qui va être suivie pour résoudre la question posée. Le lecteur pourra prendre appui sur celles-ci pour amorcer une résolution ou pour reprendre la main lors de sa lecture d'une correction. Afin d'aider le lecteur dans son étude, il est fait référence aux théorèmes utilisés lors de leurs premiers usages. Les notes de bas de pages complètent les résolutions en présentant des démarches alternatives ou font le lien avec d'autres sujets présents dans l'ouvrage.

Je remercie vivement Olivier RODOT d'avoir initié ce projet, François PANTIGNY pour son expertise TeXnique et Pierrick SOLEILLANT pour sa relecture attentive ainsi que les corrections apportées.

Je dédicace cet ouvrage à mon fils Noé.

David DELAUNAY

CHAPITRE 1

Nombres et fonctions réelles

1.1 Les nombres réels

1.1.1 Les ensembles de nombres remarquables

Les nombres *naturels* $0, 1, 2\ldots$ forment l'ensemble $\mathbb{N}$.
Les nombres *entiers* (relatifs) $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$ forment l'ensemble $\mathbb{Z}$.
Les nombres *rationnels* (p/q avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$) forment l'ensemble $\mathbb{Q}$.
Parmi les nombres rationnels, figurent les nombres *décimaux* ($p/10^k$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$) constituant l'ensemble $\mathbb{D}$.
Ces nombres ne suffisent pas aux mathématiques modernes car il émerge naturellement des nombres *irrationnels* tels $\sqrt{2}$ ou π. Cela motive l'introduction des nombres *réels*.

1.1.2 Le corps des réels

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est muni d'une opération d'addition « $+$ » vérifiant pour tous les réels a, b, c :

$$\begin{array}{ll} a+b=b+a & \textit{commutativité} \\ (a+b)+c=a+(b+c) & \textit{associativité} \\ 0+a=a & \textit{0 est élément neutre} \end{array}$$

De plus, pour tout réel a, il existe[1] un réel a' unique tel que $a+a'=0$. Ce réel a' est noté $-a$ et cela permet de définir l'opération de soustraction « $-$ ».

1. On dit que tout réel admet un *opposé*.

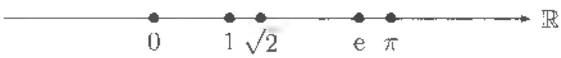
L'ensemble $\mathbb{R}$ est aussi muni d'une opération de multiplication « $\times$ » vérifiant pour tous les réels a, b, c :

$ab = ba$	*commutativité*
$(ab)c = a(bc)$	*associativité*
$1 \times a = a$	*1 est élément neutre*
$a(b+c) = ab + ac$	*distributivité sur +*

De plus, pour tout réel a non nul, il existe[1] un réel a' unique tel que $aa' = 1$. Ce réel est noté $1/a$ et cela permet de définir l'opération de division « / ».
Ces différentes propriétés calculatoires font de $\mathbb{R}$ un corps[2] de neutres 0 et 1.

1.1.3 La droite réelle

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre total $\leqslant$ qui permet d'apparenter cet ensemble à une droite.



La relation d'ordre $\leqslant$ est compatible avec les opérations d'addition et de multiplication dans le sens où, pour tous les réels a, b, c,

$$a \leqslant b \implies a + c \leqslant b + c$$
$$a \geqslant 0 \text{ et } b \geqslant 0 \implies ab \geqslant 0$$

Ces propriétés « minimalistes » suffisent à retrouver les propriétés calculatoires classiques comme par exemple

$$a \leqslant b \implies -b \leqslant -a$$
$$a \leqslant b \text{ et } c \geqslant 0 \implies ac \leqslant bc.$$

1.1.4 Partie minorée, partie majorée

Définition

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite *minorée* (resp. *majorée*) s'il existe un réel M pour lequel $a \geqslant M$ pour tout a de A (resp. $a \leqslant M$). On dit alors que M est un *minorant* de la partie A (resp. un *majorant*).

Une partie de $\mathbb{R}$ à la fois minorée et majorée est dite *bornée*.

Définition

Un majorant d'une partie A qui appartient à celle-ci s'appelle un *maximum* (ou un *plus grand élément*) de la partie A. Lorsqu'il existe, un tel élément est unique, on le note $\max(A)$.

1. On dit que tout réel non nul est *inversible*. Cette propriété ne valant que pour les réels non nuls, on prend toujours garde à ne pas diviser par 0 !

2. Ce concept est présenté dans la section 4.3 du chapitre 4 de l'ouvrage *Exercices d'algèbre et de probabilités MPSI* dans la même collection.

Mutatis mutandis[1], un minorant d'une partie A qui appartient à celle-ci se nomme un *minimum* (ou un *plus petit élément*). Lorsqu'il existe, un tel élément est unique et se note $\min(A)$.

1.1.5 La propriété de la borne supérieure

Définition

On appelle *borne supérieure*[2] d'une partie A de $\mathbb{R}$, lorsqu'elle existe, le plus petit des majorants de A. Celle-ci est notée $\sup(A)$.

Si une partie admet un plus grand élément, autrement dit un maximum, celui-ci est borne supérieure de la partie. En revanche, une partie peut admettre une borne supérieure sans que celle-ci en soit élément[3].
La droite réelle se distingue de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels par la propriété dite de la borne supérieure :

Théorème 1
Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.

Aussi, et sous réserve d'existence, on définit la *borne inférieure*[4] $\inf(A)$ d'une partie A de $\mathbb{R}$ comme étant le plus grand des minorants de A. Il suffit qu'une partie de $\mathbb{R}$ soit non vide et minorée pour admettre une borne inférieure. Cette dernière n'est élément de la partie que s'il s'agit d'un minimum.

1.1.6 La valeur absolue

Définition

On définit la *partie positive* x^+ et la *partie négative* x^- d'un réel x par

$$x^+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad x^- = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition

On définit la *valeur absolue* d'un réel x par

$$|x| = x^+ + x^- = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon.} \end{cases}$$

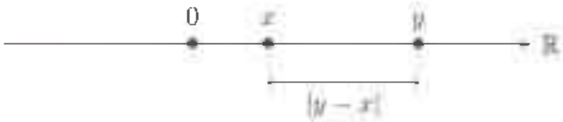
On vérifie que la valeur absolue d'un réel est nulle si, et seulement si, ce réel est nul et que la valeur absolue d'un produit est le produit des valeurs absolues. Aussi :

1. Locution latine signifiant « En modifiant ce qui doit être changé ».
2. On parle aussi de *supremum*.
3. Une borne supérieure est un majorant qui « touche » la partie. Elle ne lui appartient que s'il s'agit d'un maximum.
4. ou *infimum*.

Théorème 2 (Inégalité triangulaire)
Pour tous x et y réels, on a $|x+y| \leqslant |x|+|y|$ avec égalité si, et seulement si, x et y ont le même signe.

La valeur absolue permet de mesurer la distance d'un réel à 0.

Plus généralement, $|y-x|$ définit la *distance* séparant deux réels x et y.



1.1.7 La fonction partie entière

Définition

On appelle *partie entière* d'un réel x le plus grand entier inférieur ou égal à x. Celui-ci est noté $\lfloor x \rfloor$.

La partie entière d'un réel x apparaît comme l'unique $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant l'encadrement [1]

$$n \leqslant x < n+1.$$

La fonction partie entière est croissante : pour $x, y \in \mathbb{R}$

$$x \leqslant y \implies \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor.$$

1.1.8 Congruence réelle

Soit α un réel strictement positif.

Définition

On dit qu'un réel x est congru à un réel y modulo α s'il existe un entier k dans $\mathbb{Z}$ tel que $x = y + k\alpha$. On note alors $x \equiv y \ [\alpha]$.

La congruence modulo un réel strictement positif α définit une relation d'équivalence [2] sur $\mathbb{R}$ compatible avec les opérations additives :

Théorème 3
Si x, x', y et y' sont des réels tels que $x \equiv y \ [\alpha]$ et $x' \equiv y' \ [\alpha]$ alors $x + x' \equiv y + y' \ [\alpha]$ et $-x \equiv -y \ [\alpha]$.

1. L'encadrement $x - 1 < n \leqslant x$ est équivalent.

2. C'est-à-dire une relation réflexive, symétrique et transitive voir : la section 1.4 du chapitre 1 de l'ouvrage *Exercices d'algèbre et de probabilités MPSI*.

La multiplication par un réel nécessite la multiplication du module de congruence :

$$x \equiv y\ [\alpha] \implies \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda x \equiv \lambda y\ [\lambda\alpha].$$

Tout réel est congru modulo α à un unique réel de $[0\,;\alpha[$ en vertu du résultat suivant :

Théorème 4 (Division euclidienne réelle)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times [0\,;\alpha[$ tel que $x = q\alpha + r$.

1.1.9 Les intervalles

Définition

En plus de $\mathbb{R}$ et $\emptyset$, on appelle *intervalle* de $\mathbb{R}$ les ensembles qui suivent (décrits à partir de a et b deux réels vérifiant $a \leqslant b$) :

— les intervalles *fermés* : $[a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$
$[a\,;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}$
et $]-\infty\,;a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$

— les intervalles *ouverts* : $]a\,;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
$]a\,;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
et $]-\infty\,;a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

— les intervalles *semi-ouverts* : $[a\,;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$
et $]a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$

En particulier, les intervalles $[a\,;b]$ sont aussi appelés *segments* de $\mathbb{R}$.

Théorème 5
Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, et seulement si, elle satisfait la propriété :

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad a < b \implies [a\,;b] \subset I.$$

Les intervalles de $\mathbb{R}$ correspondent aux parties « sans trous ». En particulier, $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 6
Tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient des nombres rationnels et des nombres irrationnels.

1.1.10 La droite numérique achevée

On forme un nouvel ensemble noté $\overline{\mathbb{R}}$ en adjoignant à la droite réelle deux nouveaux éléments notés $+\infty$ et $-\infty$.

Définition

L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ est appelée *droite numérique achevée.*

On prolonge partiellement l'addition à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant pour tout x réel

$$\begin{aligned} x + (+\infty) &= +\infty \qquad & x + (-\infty) &= -\infty \\ (+\infty) + (+\infty) &= +\infty & (-\infty) + (-\infty) &= -\infty \end{aligned}$$

On prolonge partiellement la multiplication à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant pour tout x réel

$$x \times (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 0 \\ -\infty & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad x \times (-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$(+\infty) \times (+\infty) = (-\infty) \times (-\infty) = +\infty \quad (-\infty) \times (+\infty) = (+\infty) \times (-\infty) = -\infty$$

Certaines opérations ne sont pas définies, ce sont les *formes indéterminées* :

$$« (+\infty) + (-\infty) », « 0 \times (+\infty) », \ldots$$

Enfin, on prolonge la relation d'ordre $\leqslant$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant pour tout réel x

$$-\infty \leqslant x, \quad x \leqslant +\infty \quad \text{et} \quad -\infty \leqslant +\infty.$$

1.2 Fonctions réelles

1.2.1 Définition

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ (généralement un intervalle).

Définition

Une *fonction réelle* f définie X est une application au départ de X et à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Les fonctions réelles sont fréquemment présentées en décrivant comment est calculée la valeur $f(x)$ à partir de la variable x. Ceci se fait en écrivant

$$f(x) = \ldots \text{ ou } f : x \mapsto \ldots$$

Dans la description d'une fonction, la variable joue un rôle muet : il arrive qu'on la figure seulement par un point. Ainsi, $|\cdot|$ désigne la fonction valeur absolue tandis que $\sqrt{\cdot}$ désigne la fonction racine carrée.

Définition

On dit qu'une fonction définie sur X est *constante* s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(x) = \lambda$ pour tout x de X. Cette fonction est alors dite *constante égale à* λ et est souvent simplement notée λ.

Par exemple, la *fonction nulle* est la fonction constante égale à 0.

1.2.2 Représentation graphique

On suppose le plan géométrique muni d'un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

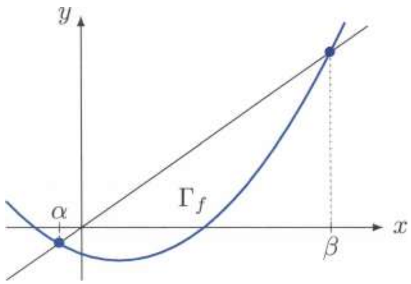
Définition

On appelle *représentation graphique* (ou *graphe*) d'une fonction réelle f définie sur une partie X de $\mathbb{R}$ la courbe du plan d'équation $y = f(x)$, c'est-à-dire l'ensemble des points M dont les coordonnées x et y vérifient

$$x \in X \quad \text{et} \quad y = f(x).$$

Cette courbe est fréquemment notée $\mathcal{C}_f$ ou Γ_f.

Résoudre une équation du type $f(x) = g(x)$ revient à étudier l'intersection des représentations graphiques de f et de g. Résoudre une inéquation $f(x) \leqslant \lambda$ s'interprète aussi graphiquement.



Résolution graphique de l'équation $f(x) = x$

1.2.3 Opérations

Définition

On appelle *somme* et *produit* de deux fonctions réelles f et g définies sur une même partie X de $\mathbb{R}$, les fonctions $f + g$ et fg définies sur X par les relations

$$\forall x \in X, \quad (f+g)(x) \overset{\text{déf}}{=} f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (fg)(x) \overset{\text{déf}}{=} f(x)g(x).$$

En faisant le produit d'une fonction f par une fonction constante de valeur λ, on définit une fonction communément notée λf. On définit aussi de façon entendue la fonction inverse $1/f$ et la fonction quotient f/g sous réserve de non-annulation des dénominateurs.

Définition

Soit f une fonction réelle définie sur une partie X de $\mathbb{R}$ et g une fonction réelle définie sur une partie Y de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction f est *composable* par g si les valeurs prises par f appartiennent au domaine de définition Y de g. On peut alors introduire la *fonction composée* $g \circ f$ définie sur X par

$$\forall x \in X, \quad (g \circ f)(x) \overset{\text{déf}}{=} g\big(f(x)\big).$$

Lorsque l'on compose une fonction f par une fonction présentant une notation remarquable, il est fréquent d'exploiter celle-ci en faisant figurer f en lieu et place de la variable. On peut ainsi considérer les fonctions composées $|f|$, $\sqrt{f}$, e^f, $\ln f$, $\cos f$, etc.

1.2.4 Continuité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Une fonction réelle f définie sur I est dite continue si sa représentation graphique peut être tracée « sans lever le crayon ». Plus exactement, on dit que la fonction f est continue si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{pour tout } a \in I.$$

La notion de limite et la notion de continuité seront étudiées dans le chapitre 7. À ce stade contentons-nous de souligner que les fonctions usuelles[1] sont continues et que les opérations sur les fonctions continues déterminent des fonctions continues.

1.2.5 Parité et périodicité

On suppose que X est une partie de $\mathbb{R}$ *symétrique par rapport à* 0, ce qui signifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in X \iff -x \in X.$$

Définition

On dit qu'une fonction réelle f définie sur X est *paire* (resp. *impaire*) si

$$\forall x \in X, \quad f(-x) = f(x) \quad (\text{resp. } f(-x) = -f(x)).$$

Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées tandis que le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

Soit T un nombre réel. On suppose que X est une *partie T-périodique* de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in X \iff x + T \in X.$$

Définition

On dit qu'une fonction réelle f définie sur X est *T-périodique* si

$$\forall x \in X, \quad f(x+T) = f(x).$$

On dit alors que T est une *période* de la fonction f.

Si f est une fonction T-périodique, on remarque que $f(x+nT) = f(x)$ pour tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbb{Z}$.
Le graphe d'une fonction T-périodique est inchangé par la translation de vecteur $T\vec{\imath}$.
Une fonction *périodique* est une fonction possédant une période non nulle.

1. Hormis la fonction partie entière $\lfloor \cdot \rfloor$.

1.2.6 Monotonies

Soit f une fonction réelle définie sur une partie X de $\mathbb{R}$.

Définition

On dit que la fonction f est *croissante*[1] (resp. *décroissante*) si

$$\forall (x,y) \in X^2, \quad x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y) \quad (\text{resp. } f(x) \geqslant f(y)).$$

On dit que la fonction f est *strictement croissante* (resp. *strictement décroissante*) si

$$\forall (x,y) \in X^2, \quad x < y \implies f(x) < f(y) \quad (\text{resp. } f(x) > f(y)).$$

On peut sommer les monotonies identiques et composer les monotonies. Par exemple, la composée d'une fonction croissante par une fonction décroissante donne une fonction décroissante. En revanche, sans hypothèse sur le signe des fonctions, on ne peut pas multiplier les monotonies.

1.2.7 Fonctions majorées, minorées, bornées

Soit f une fonction réelle définie sur une partie X de $\mathbb{R}$.

Définition

On dit que la fonction f est *majorée*[2] s'il existe un réel M tel que $f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in X$. On dit alors que M est un *majorant* de la fonction f.

Le graphe d'une fonction majorée par M figure en dessous de la droite d'équation $y = M$.

Définition

On dit que la fonction f admet un *maximum* en $a \in X$ si $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout x élément de X.

Une telle fonction est alors majorée par sa valeur en a que l'on appelle *le maximum de la fonction*. Cette valeur $f(a)$ est notée

$$\max f, \quad \max_X f \quad \text{ou} \quad \max_{x \in X} f(x).$$

Lorsqu'une fonction f est majorée, elle n'admet pas pour autant nécessairement un maximum. Cependant, on peut introduire le plus petit de ses majorants :

Définition

Si la fonction f est majorée, on appelle *borne supérieure* de f le plus petit de ses majorants. Cette borne supérieure est notée

$$\sup f, \quad \sup_X f \quad \text{ou} \quad \sup_{x \in X} f(x).$$

1. On dit quelquefois qu'une fonction est *croissante sur* une partie X' pour insister sur le domaine de définition de la fonction ou pour affirmer que c'est sa restriction au départ de X' qui est croissante.

2. On peut aussi dire qu'une fonction est *majorée sur* une partie X' pour insister sur le domaine de définition de la fonction ou pour affirmer que c'est sa restriction au départ de X' qui est majorée.

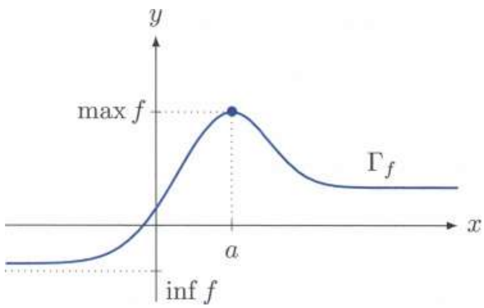
Lorsqu'il existe, le maximum d'une fonction détermine sa borne supérieure. En revanche, la borne supérieure d'une fonction peut ne pas être une valeur prise par cette fonction et donc ne pas être un maximum.
Mutatis mutandis, on définit la notion de *fonction minorée*, de *minorant* et de *borne inférieure* d'une fonction.

Définition

On dit que la fonction f est *bornée* si elle minorée et majorée.

Dire que la fonction f est bornée revient à dire que sa valeur absolue est majorée :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in X, \quad |f(x)| \leqslant M.$$



Une fonction bornée admettant un maximum mais pas de minimum.

1.3 Dérivation

I et J désignent des intervalles non vides et non réduits à des points.

1.3.1 Tangente

On dit qu'une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est *dérivable* en $a \in I$ si le *taux d'accroissement*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie quand x tend vers a (avec $x \neq a$). Cette limite est notée $f'(a)$, on l'appelle *nombre dérivé de f en a*. Lorsqu'une fonction est dérivable en tout point de son intervalle de définition, on la dit simplement *dérivable* et l'on peut alors introduire sa *fonction dérivée*.
La notion de dérivabilité sera étudiée dans le chapitre 8.

Définition

Si f est dérivable en $a \in I$, on appelle *tangente* à la courbe représentative[1] de f au point d'abscisse a la droite d'équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

1.3.2 Opérations

Théorème 7
Si $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions dérivables alors, pour tout réel λ, les fonctions λf, $f+g$ et fg le sont aussi avec

$$(\lambda f)' = \lambda f', \quad (f+g)' = f' + g' \quad \text{et} \quad (fg)' = f'g + fg'.$$

Si de plus la fonction g ne s'annule pas, le quotient f/g est dérivable avec

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Théorème 8
Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ est composable par $g\colon J \to \mathbb{R}$ et si ces fonctions sont dérivables alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable avec

$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f.$$

Ce résultat permet d'énoncer des formules de dérivation de fonctions composées :

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, \left(u^n\right)' = nu'u^{n-1}, \left(\mathrm{e}^u\right)' = u'\mathrm{e}^u, \dots$$

On retrouvera ces formules en annexe p.421

1.3.3 Monotonie par dérivation

Théorème 9
Une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ dérivable est croissante (resp. décroissante) si, et seulement si, sa dérivée est positive.

Étudier le signe de la dérivée permet alors de déterminer les variations d'une fonction. Sur un tableau des variations, on peut lire si une fonction réelle admet un minimum ou un maximum. On peut aussi lire si cette fonction est minorée, majorée et même déterminer ses bornes inf et sup.

Théorème 10
Une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ dérivable est constante si, et seulement si, sa dérivée est nulle.

Le signe de la dérivée permet aussi de justifier une monotonie stricte :

1. On parle aussi de façon abusive de tangente à f en a.

Théorème 11
Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable est strictement croissante si, et seulement si, sa dérivée est positive et ne présente pas de paliers nuls [1].

Par passage à l'opposé, on peut caractériser la stricte décroissance d'une fonction dérivable.

1.3.4 Dérivées successives

Sous réserve d'existence, on peut dériver la fonction dérivée d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On parle alors de *dérivée seconde* : $f'' = (f')'$. Plus généralement, et sous réserve d'existence, on introduit la notion de dérivée n-ième de la fonction f notée $f^{(n)}$.

1.4 Exercices d'apprentissage

1.4.1 Inégalités

Exercice 1 (Inégalité triangulaire renversée)
Montrer l'inégalité qui suit pour tous réels x et y

$$\big||y| - |x|\big| \leqslant |y - x| .$$

Solution

méthode
On exploite l'inégalité triangulaire (Th. 2 p. 6) en écrivant $y = y - x + x$.

On a

$$|y| = |(y - x) + x| \leqslant |y - x| + |x|.$$

En réorganisant les membres

$$|y| - |x| \leqslant |y - x| .$$

En échangeant les rôles de x et y, on peut aussi affirmer

$$|x| - |y| \leqslant |x - y| = |y - x| .$$

Ainsi, que la valeur absolue du premier membre soit égale au réel ou à son opposé, on peut affirmer [2].

$$\big||y| - |x|\big| \leqslant |y - x|.$$

1. Dire qu'une fonction présente un *palier nul*, signifie qu'il existe deux réels $a < b$ tels que la fonction est nulle sur $[a ; b]$.

2. Par cette propriété on dit que la fonction valeur absolue est lipschitzienne (voir p. 259), elle est par conséquent continue.

Exercice 2

Vérifier[1] l'inégalité qui suit pour tous réels a et b

$$ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

Solution

méthode

> Par différence de membres, on se ramène à une comparaison à 0.

L'inégalité étudiée équivaut à

$$\frac{1}{2}a^2 - ab + \frac{1}{2}b^2 \geqslant 0.$$

Par identité remarquable, ce qui précède s'écrit encore

$$\frac{1}{2}(a^2 - 2ab + b^2) = \frac{1}{2}(a-b)^2 \geqslant 0.$$

Cette dernière propriété étant évidemment vraie, l'inégalité voulue l'est aussi.

Exercice 3

Montrer[2] pour tout réel $x > -1$ l'inégalité

$$\ln(1+x) \leqslant x.$$

Solution

méthode

> On étudie les variations de la fonction définie par la différence des deux membres.

Introduisons la fonction auxiliaire $\varphi\colon x \mapsto x - \ln(1+x)$. La fonction φ est définie et dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ avec

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{(1+x)-1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

Le signe de $\varphi'(x)$ est celui de x et l'on peut donc dresser le tableau des variations de φ :

x	-1		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\varphi(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

1. Cette inégalité sera souvent utilisée dans la suite.
2. Cette inégalité aussi sera souvent utilisée.

La fonction φ admet donc un minimum en 0 de valeur $\varphi(0) = 0$; c'est une fonction positive sur $]-1\,;+\infty[$. On obtient ainsi l'inégalité voulue.

Exercice 4

Vérifier

(a) $x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$ pour tout réel x (b) $x\ln x \geqslant -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ pour tout $x > 0$.

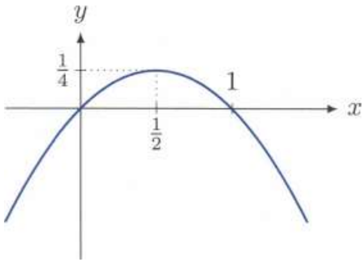
Solution

méthode

Par l'étude de ses variations, on peut déterminer les extremums d'une fonction.

(a) La fonction $f\colon x \mapsto x(1-x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = 1-2x$ pour tout x réel. Cette dérivée s'annule en changeant de signe pour $x = 1/2$.

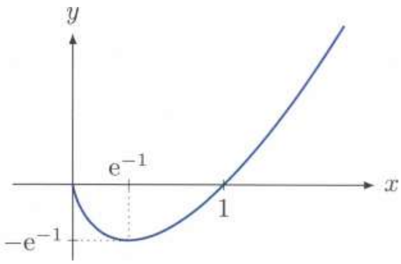
x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\frac{1}{2})$	$\searrow$	$-\infty$



La fonction f admet donc un maximum en $x = 1/2$ de valeur $f(1/2) = 1/4$. On en déduit l'inégalité demandée.

(b) La fonction $g\colon x \mapsto x\ln x$ est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ avec $g'(x) = 1+\ln x$. Cette dérivée s'annule en changeant de signe pour $x = 1/\mathrm{e}$.

x	0		$1/\mathrm{e}$		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$g(\frac{1}{\mathrm{e}})$	$\nearrow$	$+\infty$



La fonction g admet donc un minimum en $x = 1/\mathrm{e}$ de valeur $g(1/\mathrm{e}) = -1/\mathrm{e}$. On en déduit l'inégalité demandée.

1.4.2 Bornes supérieures, bornes inférieures

Exercice 5
Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (a,b) \in A \times B, \quad a \leqslant b.$$

(a) Montrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent.

(b) Justifier $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.

Solution

(a) **méthode**

> On justifie qu'une partie admet une borne supérieure en vérifiant que c'est une partie de $\mathbb{R}$, non vide et majorée (Th. 1 p. 5).

Par hypothèse, on sait que A est une partie non vide de $\mathbb{R}$.

méthode

> On vérifie qu'une partie est majorée en exhibant un majorant de celle-ci.

La partie B étant non vide, on peut introduire un élément b appartenant à B. Par hypothèse, on a $a \leqslant b$ pour tout $a \in A$. La partie A est donc majorée (en l'occurrence, par l'élément b introduit). Ainsi, A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$: elle admet une borne supérieure.

Par un raisonnement symétrique, B est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée, elle admet une borne inférieure.

(b) Si les bornes sup et inf étaient éléments de A et B, la propriété serait évidente. Cependant, il se peut que ces bornes n'appartiennent pas aux parties. Pour manipuler sup et inf, on revient à leur définition :

méthode

> La borne supérieure de A est le plus petit des majorants de A : elle est donc inférieure à tout majorant de A.

Soit $b \in B$. Comme on l'a déjà dit ci-dessus b est un majorant de la partie A. La borne supérieure de A lui est donc inférieure. Ceci permet d'écrire [1]

$$\forall b \in B, \quad \sup(A) \leqslant b.$$

Cette propriété signifie que le réel $\sup(A)$ est minorant de la partie B. La borne inférieure étant le plus grand des minorants, on obtient directement $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.

1. Poursuivre avec un raisonnement symétrique affirmant $a \leqslant \inf(B)$ pour tout $a \in A$ est tentant mais n'apporte rien de décisif.

Exercice 6

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Vérifier l'assertion [1]

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \quad \sup(A) - \varepsilon < x \leqslant \sup(A).$$

Solution

On peut effectivement introduire la borne supérieure de A car il s'agit d'une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée [2].

Soit $\varepsilon > 0$. La deuxième inégalité de l'encadrement souhaité est immédiate à obtenir car une borne supérieure est un majorant de A : tout élément x de A lui est inférieur. L'inégalité de gauche n'est pas aussi facile : elle nécessite de « bien choisir » x dans A.

méthode

On justifie que $\sup(A) - \varepsilon$ n'est pas majorant de A.

La borne supérieure de A est le plus petit des majorants de A. Le réel $\sup(A) - \varepsilon$ qui lui est strictement inférieur n'est donc pas majorant de A.

Dire qu'un réel M est majorant de A s'écrit

$$\forall x \in A, \quad x \leqslant M.$$

Par passage à la négation, dire qu'un réel M n'est pas majorant de A s'exprime

$$\exists x \in A, \quad x > M.$$

Sachant que $M = \sup(A) - \varepsilon$ ne majore pas A, on peut assurer l'existence d'un réel x dans A vérifiant $\sup(A) - \varepsilon < x$.

1.4.3 Fonctions réelles

Exercice 7

Montrer que la fonction partie entière est croissante.

Solution

méthode

Puisqu'il n'est pas possible de dériver la fonction partie entière [3], on revient à la définition de la croissance.

Soit x et y deux réels avec $x \leqslant y$. Montrons $\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$.

1. Lorsque $\varepsilon > 0$ devient petit, cette propriété permet de trouver des éléments de A aussi proches que l'on peut le vouloir de $\sup(A)$. À défaut d'affirmer qu'une borne supérieure appartient à la partie, cette propriété affirme « qu'elle touche la partie ».

2. La partie A est quelconque : ce peut ne pas être un intervalle ! Il n'est pas possible de décrire la partie A.

3. La fonction partie entière n'est pas continue, a *fortiori* elle n'est pas non plus dérivable.

méthode

La partie entière d'un réel est le plus grand entier inférieur à celui-ci.

On a $\lfloor x \rfloor \leqslant x$ et donc $\lfloor x \rfloor \leqslant y$. Or $\lfloor x \rfloor$ est un entier et $\lfloor y \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à y, il est donc supérieur à $\lfloor x \rfloor$. La fonction $\lfloor \cdot \rfloor$ est alors croissante puisque l'on a obtenu l'implication :

$$x \leqslant y \implies \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor.$$

Exercice 8

Calculer les dérivées des fonctions de la variable réelle x dont les expressions suivent :

(a) $(\sin x)^3$ (b) $\cos(x^2)$ (c) $\dfrac{1}{\ln x}$

(d) $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$ (e) $\dfrac{x\mathrm{e}^{-x^2}}{x^2+1}$ (f) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

Solution

Chaque fonction considérée ici est dérivable sur son ou ses intervalles de définition.

(a) **méthode**

On reconnaît une forme u^n avec $n = 3$:

$$(u^n)' = nu'u^{n-1}.$$

Ici $u(x) = \sin x$ donc $u'(x) = \cos x$ puis

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((\sin x)^3\right) = 3\cos x(\sin x)^2.$$

(b) **méthode**

On dérive une forme composée :

$$(v \circ u)' = u' \times v' \circ u.$$

Ici $u(x) = x^2$, $v(t) = \cos t$ donc $u'(x) = 2x$ et $v'(t) = -\sin t$ puis

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\cos(x^2)\right) = 2x \times \left(-\sin(x^2)\right) = -2x\sin(x^2).$$

(c) **méthode**

On dérive une fonction inverse :

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}.$$

Pour $u(x) = \ln x$, on a $u(x) = 1/x$ et donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\ln x}\right) = -\frac{1}{x(\ln x)^2}.$$

(d) **méthode**

> Plutôt que de dériver un inverse, il est préférable de dériver une forme $1/u^2$
> $$\left(\frac{1}{u^2}\right)' = (u^{-2})' = -2u'u^{-3} = -2\frac{u'}{u^3}.$$

Avec $u(x) = x^2 + 1$, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{(x^2+1)^2}\right) = -\frac{4x}{(x^2+1)^3}.$$

(e) **méthode**

> On dérive un quotient
> $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Ici $u(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$ et $v(x) = x^2 + 1$. On a immédiatement $v'(x) = 2x$ et l'on calcule u' en dérivant un produit et une forme composée

$$u'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} + x \times (-2x)\mathrm{e}^{-x^2} = (1 - 2x^2)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Au terme des calculs, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x\mathrm{e}^{-x^2}}{x^2+1}\right) = \frac{1 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2+1)^2}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

(f) **méthode**

> On peut dériver un quotient mais aussi une forme produit $u \times v^{-1/2}$.

Ici $u(x) = x$, $v(x) = x^2 + x + 1$ et l'on obtient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} - x \times \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^{3/2}} = \frac{x+2}{2(x^2+x+1)^{3/2}}.$$

Exercice 9

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

Solution

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On étudie le signe de sa dérivée. Pour tout réel x, on obtient par dérivation d'un quotient

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x + 1 - x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}.$$

Le signe de $f'(x)$ n'est pas évident. On peut être tenté de déduire celui-ci de l'étude des variations de $f'(x)$ mais le calcul de $f''(x)$ conduit à une expression dont le signe est encore plus complexe à obtenir !

méthode

‖ Le dénominateur étant positif, le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur.

On pose $N(x) = \mathrm{e}^x + 1 - x\mathrm{e}^x$. La fonction N est dérivable et pour tout réel x

$$N'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x = -x\mathrm{e}^x.$$

Le signe de $N'(x)$ est celui de $-x$.

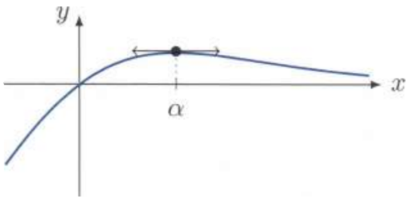
x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$N'(x)$		$+$	0	$-$			
$N(x)$	1	↗	2	↘	0	↘	$-\infty$

Par ce tableau des variations, on peut assurer l'existence[1] d'un réel[2] $\alpha > 0$ annulant N c'est-à-dire

$$\alpha\mathrm{e}^\alpha = \mathrm{e}^\alpha + 1.$$

La fonction N est alors positive sur $]-\infty\,;\alpha]$ et négative sur $[\alpha\,;+\infty[$. On en déduit les variations de f données dans le tableau ci-dessous.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$\mathrm{e}^{-\alpha}$	↘	0



1.5 Exercices d'entraînement

1.5.1 Les nombres

Exercice 10 *

Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

1. Plus précisément, c'est l'emploi du théorème de la bijection Th. 2 p. 40 qui assure cette existence.
2. On ne sait pas exprimer α à l'aide des fonctions usuelles. Numériquement $\alpha = 1{,}278$ à 10^{-3} près.

Solution

Soit x un nombre rationnel et y un nombre irrationnel. Il est possible de décrire le nombre x en écrivant $x = p/q$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. En revanche, il n'est pas possible de décrire y.

méthode

On raisonne par l'absurde.

Supposons par l'absurde $x + y$ rationnel. Par réduction à un dénominateur commun, on peut affirmer que la différence de deux nombres rationnels est un nombre rationnel. Par conséquent,

$$y = (x + y) - x$$

est un nombre rationnel. C'est absurde.

Exercice 11 *

Simplifier $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$.

En déduire l'existence d'un nombre rationnel pouvant s'écrire a^b avec a et b deux nombres irrationnels strictement positifs.

Solution

méthode

Pour $a > 0$ et x, y réels : $(a^x)^y = a^{xy}$.

On a

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2.$$

On sait que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel [1]. Distinguons alors deux cas [2].

Cas : $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel. On obtient la propriété voulue avec $a = b = \sqrt{2}$.

Cas : $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel. On obtient la propriété voulue $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$.

Exercice 12 *

Soit $a \in [1\,;+\infty[$. Simplifier

$$\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}.$$

1. Voir sujet 5 du chapitre 3 de l'ouvrage *Exercices d'algèbre et de probabilités MPSI*.
2. Cette démonstration est quelque peu « frustrante » car on n'y précise pas lequel des deux cas est correct ! En fait, on peut montrer que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel.

Solution

La quantité étudiée existe car les réels $a-1$ et $a+2\sqrt{a-1}$ sont évidemment positifs et $a-2\sqrt{a-1}$ l'est aussi puisque $a^2 \geqslant 4a-4$ sachant $(a-2)^2 \geqslant 0$.

méthode

On simplifie les racines en élevant au carré par $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ pour $x \geqslant 0$.

Posons

$$x = \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}.$$

Par développement d'un carré et identités remarquables

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(a+2\sqrt{a-1}\right) + 2\sqrt{\left(a+2\sqrt{a-1}\right)\left(a-2\sqrt{a-1}\right)} + \left(a-2\sqrt{a-1}\right) \\ &= 2a + 2\sqrt{a^2-4(a-1)} = 2a + 2\sqrt{(a-2)^2}. \end{aligned}$$

méthode

Prendre garde aux valeurs absolues dans la simplification $\sqrt{x^2} = |x|$ pour x réel.

On obtient $x^2 = 2a + 2\,|a-2|$. On simplifie[1] cette expression en discutant selon les valeurs prises par a.

Cas : $a \in [1\,;2]$. On a $x^2 = 2a + 2(2-a) = 4$ et donc $x = 2$.

Cas : $a \in [2\,;+\infty[$. On a $x^2 = 4(a-1)$ puis $x = 2\sqrt{a-1}$.

1.5.2 Inégalités

Exercice 13 *

Montrer pour tous a, b et c réels

$$ab + bc + ca \leqslant a^2 + b^2 + c^2.$$

Solution

méthode

On exploite l'inégalité[2] $2ab \leqslant a^2 + b^2$.

Par l'inégalité proposée

$$ab + bc + ca \leqslant \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right) + \frac{1}{2}\left(b^2+c^2\right) + \frac{1}{2}\left(c^2+a^2\right) = a^2 + b^2 + c^2.$$

1. On peut aussi résoudre ce sujet en observant $(\sqrt{a-1} \pm 1)^2 = a \pm 2\sqrt{a-1}$.
2. Voir sujet 2 p. 15.

Exercice 14 ** (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des réels. En étudiant $\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + b_k)^2$ avec λ réel, montrer

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}.$$

Solution

L'inégalité demandée est immédiate lorsque $a_1 = \cdots = a_n = 0$. On suppose désormais ce cas écarté.

Pour tout réel λ, une somme de carrés étant positive, on peut affirmer

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + b_k)^2 = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)}_{=a} \lambda^2 + 2 \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)}_{=b} \lambda + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)}_{=c} \geqslant 0$$

avec $a \neq 0$.

méthode

‖ La fonction $\lambda \mapsto a\lambda^2 + 2b\lambda + c$ atteint son minimum en $\lambda = -b/a$.

On peut donc écrire

$$a \times \left(-\frac{b}{a}\right)^2 + 2b \times \left(-\frac{b}{a}\right) + c = \frac{ac - b^2}{a} \geqslant 0.$$

On obtient [1] ainsi $b^2 \leqslant ac$. Il suffit ensuite de passer à la racine pour obtenir l'inégalité voulue.

Exercice 15 **

Montrer pour tout réel positif x

$$x - \frac{1}{6}x^3 \leqslant \sin x \leqslant x.$$

Solution

méthode

‖ On étudie les variations des fonctions définies par la différence des membres.

On commence par l'inégalité qui semble la plus simple : celle de droite.

Soit $f : x \mapsto x - \sin x$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$f'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0.$$

1. On peut aussi obtenir directement $\Delta = 4b^2 - 4ac \leqslant 0$ en affirmant que le trinôme $a\lambda^2 + 2b\lambda + c$ ne peut pas admettre deux racines réelles distinctes puisqu'il est de signe constant.

La fonction f est donc croissante et, sachant $f(0) = 0$, la fonction f est positive sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit $x \geqslant \sin x$ pour tout $x \geqslant 0$.

Etudions maintenant l'inégalité de gauche.

La fonction $g\colon x \mapsto \sin x - x + \frac{1}{6}x^3$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$g'(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2.$$

Le signe de g' n'étant pas évident, on étudie ses variations en dérivant à nouveau. On obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$g''(x) = -\sin x + x.$$

Par l'étude qui précède, on peut affirmer $g''(x) \geqslant 0$. La fonction g' est croissante et, sachant $g'(0) = 0$, on peut affirmer que la fonction g' est positive. On en déduit que la fonction g est croissante, et sachant $g(0) = 0$, on conclut que la fonction g est positive et que l'inégalité de gauche est aussi valide[1].

1.5.3 La fonction partie entière

Exercice 16 *

Montrer pour tous x et y réels

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

Solution

méthode

‖ On sait l'encadrement $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

D'une part, $\lfloor x \rfloor \leqslant x$ et $\lfloor y \rfloor \leqslant y$, donc

$$\underbrace{\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor}_{\in \mathbb{Z}} \leqslant x + y.$$

Or $\lfloor x + y \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à $x + y$, on a donc l'inégalité de gauche

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor.$$

D'autre part, $x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $y < \lfloor y \rfloor + 1$ donc

$$x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$$

puis

$$\lfloor x + y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2.$$

Cette inégalité stricte comparant des nombres entiers, on peut la transformer en l'inégalité large suivante :

$$\lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

1. Par imparité, l'encadrement est en sens inverse lorsque x est négatif.

Exercice 17 **

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor .$$

Solution

méthode

On raisonne par double inégalité [1].

D'une part, on sait $\lfloor nx \rfloor \leqslant nx$ et donc

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x.$$

La fonction partie entière étant croissante [2] on obtient déjà

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor .$$

D'autre part, on sait $\lfloor x \rfloor \leqslant x$ donc $n\lfloor x \rfloor \leqslant nx$ puis $n\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor nx \rfloor$ car $n\lfloor x \rfloor$ est un entier. Par suite

$$\lfloor x \rfloor \leqslant \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$$

puis

$$\lfloor x \rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$$

Finalement,

$$\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor .$$

1.5.4 Bornes supérieures, bornes inférieures

Exercice 18 *

Soit

$$A = \left\{ (-1)^n + \frac{2^n + 1}{2^n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Montrer que A est une partie bornée et déterminer ses bornes supérieure et inférieure.

1. On peut aussi montrer $\lfloor x \rfloor \leqslant \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} < \lfloor x \rfloor + 1$.
2. Voir sujet 7 p. 18.

Solution

méthode

Pour tout naturel n,

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On a donc l'encadrement $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$. Aussi, 2^{-n} est positif et inférieur à 1 donc

$$0 \leqslant (-1)^n + \frac{2^n+1}{2^n} = (-1)^n + 1 + \frac{1}{2^n} \leqslant 3.$$

La partie A est minorée par 0 et majorée par 3, elle est donc bornée.

méthode

Si une partie admet un plus grand élément, celui-ci détermine la borne supérieure de cette partie.

En prenant $n = 0$, on obtient que le majorant 3 est élément de A, c'est donc un plus grand élément. On en déduit

$$\sup(A) = \max(A) = 3.$$

méthode

En observant qu'il n'existe pas de minorants plus grands que 0, on peut affirmer que la borne inférieure de A est égale à 0.

Soit m un minorant de A. Pour tout naturel n

$$(-1)^n + \frac{2^n+1}{2^n} \geqslant m.$$

En particulier, lorsque n est impair, $n = 2p + 1$ (avec $p \in \mathbb{N}$)

$$\frac{1}{2^{2p+1}} \geqslant m.$$

Par l'absurde[1], supposons $m > 0$. Par passage à l'inverse, on obtient

$$2^{2p+1} \leqslant \frac{1}{m} \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N}.$$

Ceci est absurde car les nombres 2^{2p+1} peuvent être arbitrairement grands. On en déduit qu'un minorant m de A vérifie nécessairement $m \leqslant 0$.

Finalement, 0 est un minorant de la partie A et il n'existe pas de minorant qui lui soit supérieur. C'est donc le plus grand des minorants de A, autrement dit, sa borne inférieure.

1. On peut conclure avec plus de légèreté par l'emploi du théorème de passage à la limite des inégalités larges Th. 4 p. 231.

Exercice 19 **

Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On forme

$$A+B=\{a+b \mid (a,b)\in A\times B\}.$$

Montrer

$$\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B).$$

Solution

méthode

‖ On commence par justifier l'existence des bornes supérieures introduites.

Les ensembles A et B sont des parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées, on peut donc introduire leurs bornes supérieures $\sup(A)$ et $\sup(B)$ (Th. 1 p. 5). L'ensemble $A+B$ est aussi une partie de $\mathbb{R}$ et elle est non vide car le choix d'un élément a dans A et d'un élément b dans B suffit à déterminer un élément $a+b$ dans $A+B$. Vérifions que $A+B$ est majorée.

Pour tout $x\in A+B$, on peut écrire $x=a+b$ avec $a\in A$ et $b\in B$. Les bornes supérieures étant des majorants, on a

$$a\leqslant \sup(A),\quad b\leqslant\sup(B)\quad\text{donc}\quad x=a+b\leqslant\sup(A)+\sup(B).$$

La partie $A+B$ est majorée. On peut introduire sa borne supérieure et puisque celle-ci est le plus petit des majorants, on a une première inégalité

$$\sup(A+B)\leqslant\sup(A)+\sup(B).$$

méthode

‖ On obtient l'inégalité complémentaire en écrivant $a=(a+b)-b$.

Soit $b\in B$ fixé. Pour tout $a\in A$, on peut écrire

$$a=(a+b)-b\leqslant\sup(A+B)-b\quad\text{car}\quad a+b\leqslant\sup(A+B).$$

La partie A est donc majorée par $\sup(A+B)-b$. Une borne supérieure étant le plus petits des majorants, on obtient

$$\sup(A)\leqslant\sup(A+B)-b.$$

En réordonnant les membres, on peut écrire

$$b\leqslant\sup(A+B)-\sup(A).$$

Cette comparaison valant pour tout b dans B, on peut affirmer que B est majorée par $\sup(A+B)-\sup(A)$ et par conséquent

$$\sup(B)\leqslant\sup(A+B)-\sup(A).$$

En réorganisant de nouveau les membres, il vient

$$\sup(A) + \sup(B) \leqslant \sup(A + B).$$

Finalement, on peut conclure à l'égalité[1] voulue

$$\sup(A) + \sup(B) = \sup(A + B).$$

Exercice 20 **

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Établir

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\inf_{y\in\mathbb{R}} f(x,y)\right) \leqslant \inf_{y\in\mathbb{R}}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x,y)\right).$$

Solution

Introduisons les fonctions φ et ψ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}} f(x,y) \quad \text{et} \quad \psi(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x,y).$$

méthode

‖ Les fonctions φ et ψ encadrent les valeurs prises par f.

Soit x_0 et y_0 réels fixés. On a

$$\varphi(x_0) = \inf_{y\in\mathbb{R}} f(x_0,y) \leqslant f(x_0,y_0) \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x,y_0) = \psi(y_0).$$

Cette propriété valant pour tout x_0 réel, on peut affirmer que $\psi(y_0)$ est un majorant de la fonction φ. On en déduit

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x) \leqslant \psi(y_0).$$

Or ceci vaut pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, la borne supérieure de φ apparaît donc comme un minorant de la fonction ψ et donc

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x) \leqslant \inf_{y\in\mathbb{R}} \psi(y)$$

ce qui correspond à l'inégalité demandée.

Notons que l'inégalité peut être stricte : c'est le cas pour $f(x,y) = \cos(x+y)$ où

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big(\underbrace{\inf_{y\in\mathbb{R}} f(x,y)}_{=-1 \text{ pour tout } x}\Big) = -1 \quad \text{et} \quad \inf_{y\in\mathbb{R}}\Big(\underbrace{\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x,y)}_{=1 \text{ pour tout } y}\Big) = 1.$$

1.5.5 Étude de fonctions

Exercice 21 *

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ strictement décroissante. Étudier la monotonie de f.

1. En revanche, $\sup(f+g)$ peut être strictement inférieur à $\sup f + \sup g$!

Solution

méthode

En l'absence d'hypothèse de dérivabilité, on étudie la monotonie de f en comparant $f(x)$ et $f(y)$ pour x inférieur à y.

Si la fonction f était croissante, la composée $f \circ f \circ f$ le serait aussi ce qui est contraire aux hypothèses. En revanche, la décroissance de f ne semble pas incompatible avec les hypothèses en cours.

Montrons que f est strictement décroissante. Soit x et y deux réels avec $x < y$. Supposons par l'absurde[1] $f(x) \leqslant f(y)$. La croissance de $f \circ f$ donne

$$f \circ f \circ f(x) \leqslant f \circ f \circ f(y).$$

Or la stricte décroissance de $f \circ f \circ f$ donne aussi

$$f \circ f \circ f(x) > f \circ f \circ f(y).$$

C'est absurde et donc

$$x < y \implies f(x) > f(y).$$

Exercice 22 *

Étudier la parité de la fonction f définie par

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right).$$

Solution

méthode

On commence par vérifier que le domaine de définition est symétrique par rapport à 0 avant d'étudier $f(-x)$.

Pour tout x réel, on peut écrire $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$ et donc, même lorsque x est négatif, on a $\sqrt{x^2+1} + x > 0$. La fonction f est par conséquent définie sur $\mathbb{R}$, intervalle symétrique par rapport à 0.

En introduisant la quantité conjuguée

$$f(-x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \ln\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+1} + x}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}\right)$$

donc

$$f(-x) = -\ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = -f(x).$$

La fonction f est impaire.

1. On notera que l'hypothèse absurde est « $f(x) \leqslant f(y)$ » pour les valeurs de x et y en cours et non « f est croissante » : cette dernière n'est pas la négation de l'affirmation « f est strictement décroissante ».

Exercice 23 *

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère les fonctions

$$f_\lambda : x \mapsto \frac{x+\lambda}{x^2+1}.$$

(a) Montrer que les tangentes en 0 aux courbes représentatives des fonctions f_λ sont parallèles.

(b) Observer que les tangentes en 1 sont concourantes.

Solution

(a) Soit λ un réel. La fonction f_λ est dérivable et pour tout x réel

$$f'_\lambda(x) = \frac{-x^2 - 2x\lambda + 1}{(x^2+1)^2}.$$

En particulier, $f'_\lambda(0) = 1$. Les tangentes en 0 ont toutes le même coefficient directeur, elles sont donc parallèles.

(b) **méthode**

> La tangente en a à la courbe représentative d'une fonction dérivable f a pour équation
> $$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Une équation de la tangente en 1 à la courbe représentative de f_λ est

$$y = -\frac{\lambda}{2}(x-1) + \frac{\lambda+1}{2}.$$

méthode

> On peut vérifier que ces tangentes sont concourantes en déterminant l'intersection de deux d'entre elles puis en vérifiant que le point obtenu appartient à chaque tangente[1].

Déterminons l'intersection des tangentes définies pour les paramètres λ égaux à 0 et 1

$$\begin{cases} y = 1/2 \\ y = -(x-1)/2 + 1. \end{cases}$$

La solution de ce système détermine le point de coordonnées $x = 2$ et $y = 1/2$ que l'on vérifie appartenir à chacune des tangentes.

1. On peut aussi exprimer l'équation de la tangente $y = -\frac{\lambda}{2}(x-2) + \frac{1}{2}$ auquel cas le point commun à chacune est apparent.

Exercice 24 *

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$.

(a) Étudier les variations de la fonction f.

(b) Calculer, si possible, la dérivée seconde de f. En quelle valeur x_0 s'annule-t-elle ?

(c) Vérifier que la courbe représentative traverse sa tangente en x_0.

(d) Donner l'allure du graphe de f.

Solution

(a) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

(b) La fonction f est dérivable une deuxième fois et $f''(x) = (x-2)e^{-x}$ pour tout x réel. Cette dérivée seconde s'annule en $x_0 = 2$.

(c) **méthode**

Pour étudier la position relative de la courbe par rapport à sa tangente en x_0, on étudie le signe de

$$g(x) = f(x) - \big(f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\big).$$

La fonction g ainsi définie sur $\mathbb{R}$ est deux fois dérivable et vérifie :

$$g(x_0) = 0, \quad g'(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad g''(x) = f''(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On peut alors dresser le tableau des variations de g en déduire son signe

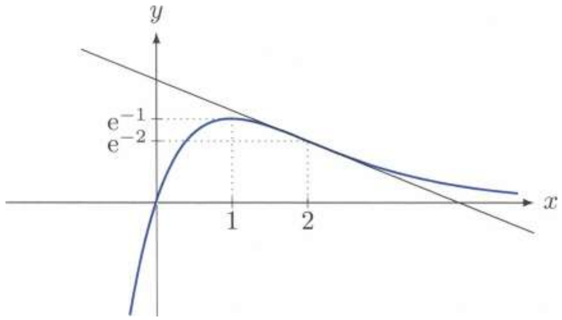
x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

La fonction g est positive sur $[2\,;+\infty[$ et négative sur $]-\infty\,;2]$. Le graphe de f est donc au-dessus de sa tangente sur $[2\,;+\infty[$ et en dessous sur $]-\infty\,;2]$.

(d) La tangente à la courbe représentative de f en 2 a pour équation

$$y = -e^{-2}(x-2) + 2e^{-2}$$

et le graphe de f a l'allure suivante :



1.6 Exercices d'approfondissement

Exercice 25 *

Montrer que pour tous réels $x_1, \dots, x_n > 0$

$$(x_1 + \dots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2.$$

Préciser les cas d'égalité.

Solution

méthode

Pour tout $x > 0$,

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2.$$

On vérifie l'inégalité proposée ci-dessus par réduction au même dénominateur

$$x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geqslant 0. \qquad (*)$$

En développant

$$(x_1 + \dots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}\right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j}\right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{x_i}{x_j}\right).$$

En renommant les indices, on peut écrire

$$2(x_1 + \dots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}\right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{x_i}{x_j}\right) + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_j}{x_i}\right)$$

puis

$$(x_1+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}\right)\right).$$

Pour tout couple $(i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2$, on a

$$\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}\geqslant 2 \tag{$**$}$$

et en sommant

$$(x_1+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}2\right)=n^2.$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si, chacune des inégalités sommées est une égalité. L'inégalité $(*)$ est une égalité seulement lorsque $x=1$. Il y a donc égalité dans $(**)$ si, et seulement si, $x_i=x_j$. Au final, l'inégalité étudiée est une égalité si, et seulement si, les x_i sont tous égaux.

Exercice 26 **

Vérifier que pour tout naturel n

$$\left\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right\rfloor=\left\lfloor\sqrt{4n+2}\right\rfloor.$$

Solution

méthode

On montre que les entiers inférieurs à $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ sont les mêmes que ceux inférieurs à $\sqrt{4n+2}$.

Soit p un entier inférieur à $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$. Par croissance de l'élévation au carré sur les réels positifs

$$p^2\leqslant 2n+1+2\sqrt{n(n+1)}.$$

Sachant

$$2\sqrt{n(n+1)}=\sqrt{4n^2+4n}\leqslant\sqrt{4n^2+4n+1}=2n+1$$

on obtient

$$p^2\leqslant 4n+2.$$

L'entier p est donc inférieur à $\sqrt{4n+2}$.

Inversement, soit p un entier inférieur à $\sqrt{4n+2}$. On a donc $p^2\leqslant 4n+2$.

méthode

Si l'entier p est pair, il s'écrit $p=2k$ (avec $k\in\mathbb{N}$) et alors $p^2=4k^2$.
Si l'entier est impair, il s'écrit $p=2k+1$ (avec $k\in\mathbb{N}$) et alors $p^2=4k(k+1)+1$.
Jamais p^2 ne peut s'écrire $4n+2$ avec n entier [1].

L'entier p^2 est donc inférieur à $4n+1$ et il vient

$$p^2 \leqslant 4n+1 \leqslant 2n+1+\underbrace{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}_{2n\leqslant} = \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2.$$

L'entier p est donc inférieur à $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$.

Exercice 27 **

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ et $b_1 \leqslant \cdots \leqslant b_n$ des réels. Établir

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Solution

méthode

‖ Pour tous k et ℓ de $[\![1\,;n]\!]$, les facteurs $a_k - a_\ell$ et $b_k - b_\ell$ ont le même signe.

Par somme de quantités positives, on a

$$\sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} (a_k - a_\ell)(b_k - b_\ell) = \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} (a_k b_k - a_\ell b_k - a_k b_\ell + a_\ell b_\ell) \geqslant 0.$$

En séparant la somme du second membre en la somme de quatre termes, on obtient

$$n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n} b_\ell\right) + n\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell b_\ell \geqslant 0.$$

En renommant les indices de sommation, il vient

$$n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$$

ce qui donne l'inégalité demandée.

Exercice 28 ***

Soit $f\colon [0\,;1] \to [0\,;1]$ une fonction croissante. Montrer que f admet un point fixe.

Solution

méthode

‖ On introduit [2] par une borne supérieure le plus grand réel x vérifiant $f(x) \geqslant x$.

1. Le carré d'un entier est congru à 0 ou 1 modulo 4.
2. Une résolution par dichotomie de l'équation $f(x) - x = 0$ est aussi possible.

Considérons l'ensemble des x pour lesquels le graphe de f est au-dessus de la droite d'équation $y = x$

$$A = \{x \in [0\,;1] \mid f(x) \geqslant x\}.$$

L'ensemble A est une partie de $\mathbb{R}$, non vide, car 0 en est élément, et majorée par 1. On peut donc introduire sa borne supérieure α.

Pour tout x appartenant à A, on a $x \leqslant \alpha$. Par croissance de f, il vient $f(x) \leqslant f(\alpha)$. Or $x \leqslant f(x)$ car x est choisi dans A et donc $x \leqslant f(\alpha)$. Ainsi, $f(\alpha)$ est un majorant de la partie A. Une borne supérieure étant le plus petit des majorants, on obtient une première inégalité $\alpha \leqslant f(\alpha)$.

Par croissance de f, on poursuit en affirmant $f(\alpha) \leqslant f\big(f(\alpha)\big)$ et donc $f(\alpha)$ est élément de la partie A. On en déduit la deuxième inégalité $f(\alpha) \leqslant \alpha$ car α est un majorant de A.

Finalement[1], par double inégalité, on conclut $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 29 ** (Fonctions additives croissantes)

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y). \qquad (*)$$

Montrer qu'il existe un réel $a \geqslant 0$ tel que[2] $f(x) = ax$ pour tout réel x.

Solution

Si un tel réel a existe, on a nécessairement $a = f(1)$. Considérons donc cette valeur dans la suite.

méthode

> Par la propriété d'additivité $(*)$, on montre l'identité $f(x) = ax$, d'abord pour x entier puis pour x rationnel.

En prenant $x = y = 0$, la propriété $(*)$ donne $f(0) = f(0) + f(0)$ donc $f(0) = 0$. Au passage, la croissance de f donne alors $a = f(1) \geqslant f(0) = 0$.

Pour commencer, montrons par récurrence que l'identité $f(x) = ax$ et vraie lorsque x désigne un naturel n.

On vient de vérifier que la propriété est vraie pour $n = 0$ et l'on peut aussi affirmer qu'elle est vraie pour $n = 1$ puisque l'on a choisi $a = f(1)$.

Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$. Au rang suivant, la relation $(*)$ avec $x = n$ et $y = 1$ donne $f(n+1) = f(n) + f(1)$ et donc $f(n+1) = an + a = a(n+1)$. La récurrence est établie.

Etendons par imparité la relation $f(x) = ax$ aux entiers relatifs. Pour tout x réel, en prenant $y = -x$ dans $(*)$, il vient $f(0) = f(x) + f(-x)$ et donc $f(-x) = -f(x)$. La fonction f est impaire.

Soit x un entier négatif. On peut écrire $x = -n$ avec n naturel et alors

$$f(x) = f(-n) = -f(n) \underset{n\in\mathbb{N}}{=} -an = ax.$$

1. On peut aussi définir un point fixe de f en introduisant la borne inférieure de l'ensemble des x vérifiant $f(x) \leqslant x$.

2. On dit alors que la fonction f est *linéaire*.

Poursuivons par l'extension de l'identité $f(x) = ax$ aux nombres rationnels. Soit $x \in \mathbb{Q}$. On peut écrire $x = p/q$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Comme lors de la récurrence ci-dessus, on peut montrer $f(nx) = nf(x)$ pour tout naturel n. En particulier, pour $n = q$, il vient

$$f(p) = f(qx) = qf(x).$$

Or on a aussi $f(p) = ap$ et donc $f(x) = ap/q = ax$.

méthode

On exploite la croissance de f pour étendre l'identité $f(x) = ax$ des rationnels aux réels.

Soit x un réel. On peut encadrer x par des rationnels voisins grâce à la fonction partie entière. Pour tout naturel n non nul

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x < \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}.$$

Par la croissance de la fonction f, on a

$$a\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = f\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}\right) = a\frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}.$$

Lorsque n tend vers l'infini, les deux membres de cet encadrement tendent vers ax et donc, par passage à la limite des inégalités larges (Th. 4 p. 231), on obtient $ax \leqslant f(x) \leqslant ax$. On conclut $f(x) = ax$.

Exercice 30 * (Approximation de Dirichlet)**

Soit x un nombre irrationnel.

Montrer qu'il existe une infinité de couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ vérifiant

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

Solution

méthode

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on montre qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in [\![1\,;N]\!]$ tels que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leqslant \frac{1}{qN}.$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Considérons la fonction

$$f : \begin{cases} [\![0\,;N]\!] \to [0\,;1[\\ \qquad k \mapsto kx - \lfloor kx \rfloor. \end{cases}$$

Celle-ci est définie sur un ensemble possédant $N+1$ éléments et prend $N+1$ valeurs distinctes car le réel x est irrationnel[1].

1. En effet, s'il existe k et ℓ distincts dans $[\![0\,;N]\!]$ tels que $f(k) = f(\ell)$, on peut affirmer $x = p/q$ avec $p = \lfloor \ell x \rfloor - \lfloor kx \rfloor$ et $q = k - \ell$.

L'intervalle $[0\,;1[$ peut être découpé en N intervalles disjoints de longueur $1/N$:

$$[0\,;1/N[, [1/N\,;2/N[, \dots, [(N-1)/N\,;1[.$$

Au moins deux des valeurs prises par f appartiennent à un même[1] intervalle parmi ceux listés ci-dessus. Notons $k < \ell$ deux valeurs de $[\![0\,;N]\!]$ pour lesquelles $f(k)$ et $f(\ell)$ figurent dans le même intervalle. On a

$$|f(\ell)-f(k)| \leqslant \frac{1}{N}.$$

En posant $q = \ell - k \in [\![1\,;N]\!]$ et $p = \lfloor \ell x \rfloor - \lfloor kx \rfloor \in \mathbb{Z}$, on obtient

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leqslant \frac{1}{Nq} \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

Ceci détermine un premier couple (p,q) solution mais permet aussi d'en construire une infinité ! En effet, si $(p_1,q_1),\dots,(p_n,q_n)$ sont des premiers couples solutions, on peut en déterminer un nouveau en choisissant N tel que

$$\frac{1}{N} < \min\left\{ \underbrace{\left| x - \frac{p_1}{q_1} \right|}_{>0}, \dots, \underbrace{\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right|}_{>0} \right\} \quad \text{car} \quad x \notin \mathbb{Q}.$$

1. Cette idée se nomme *le principe des tiroirs* : si $n+1$ chaussettes sont réparties dans n tiroirs, il existe au moins un tiroir contenant deux chaussettes !

CHAPITRE 2

Fonctions usuelles

2.1 Fonction bijective

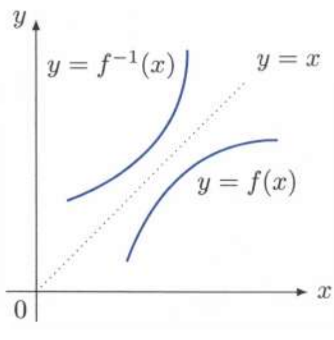
I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à des points.

2.1.1 Définition

On dit qu'une fonction réelle $f: I \to \mathbb{R}$ réalise une *bijection* de l'intervalle I vers un intervalle J lorsque celle-ci prend ses valeurs dans J et que toute valeur de J possède un unique antécédent par f.
On peut alors introduire une application $f^{-1}: J \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in I \times J, \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Celle-ci réalise une bijection de J vers I et se nomme la *bijection réciproque* de f.



Théorème 1
Si f réalise une bijection de I vers J alors les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la *première bissectrice*[1] du plan.

1. Celle-ci désigne la droite d'équation $y = x$.

2.1.2 Théorème de la bijection

Le théorème suivant fournit une condition suffisante (facile à vérifier en pratique) pour affirmer qu'une fonction réelle d'une variable réelle est bijective.

Théorème 2 (Théorème de la bijection)
Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et strictement monotone, f réalise une bijection de l'intervalle I vers un intervalle J.
De plus, sa bijection réciproque f^{-1} est continue et de même stricte monotonie que la fonction f.

On peut être plus précis sur la description de l'intervalle image J. Lorsque la bijection f est strictement croissante, on a (pour a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$) :

$$\text{si } I = [a\,;b] \text{ alors } J = \big[f(a)\,;f(b)\big], \quad \text{si } I = [a\,;b[, \text{ alors } J = \big[f(a)\,;\lim_{b} f\big[,$$
$$\text{si } I =]a\,;b] \text{ alors } J = \big]\lim_{a^+} f\,;f(b)\big], \quad \text{si } I =]a\,;b[\text{ alors } J = \big]\lim_{a^+} f\,;\lim_{b^-} f\big[.$$

Lorsque la bijection est strictement décroissante, on a un résultat analogue exprimé en échangeant les bornes de l'intervalle J.

2.1.3 Dérivation d'une bijection réciproque

Théorème 3
Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue réalisant une bijection de I vers J.
Si f est dérivable en $x \in I$ et si $f'(x) \neq 0$ alors la bijection réciproque f^{-1} est dérivable en $y = f(x)$ et

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

L'hypothèse $f'(x) \neq 0$ est essentielle et simple à comprendre : si le graphe de f présente une tangente horizontale au point d'abscisse x, le graphe de la réciproque f^{-1} présente une tangente verticale au point d'abscisse $y = f(x)$, la fonction f^{-1} n'est alors pas dérivable en y.

Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ est dérivable et si sa dérivée ne s'annule pas, f est strictement monotone [1]. Elle réalise alors une bijection de I vers un intervalle J et sa bijection réciproque est dérivable avec la formule [2]

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

1. Bien qu'une fonction dérivée ne soit pas nécessairement continue, si elle ne s'annule pas, elle est de signe constant : voir sujet 19 p. 277.
2. Cette formule peut être facilement retrouvée en dérivant la composition $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$.

2.2 Puissances et logarithmes

2.2.1 Logarithme et exponentielle népériens

Définition

On appelle *logarithme népérien*[1] la fonction $x \mapsto \ln x$ définie sur $]0\,;+\infty[$ comme la primitive s'annulant en 1 de la fonction inverse :

$$\forall x > 0, \quad \ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Théorème 4

Pour tous réels x et y strictement positifs

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

On en déduit

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x \quad \text{pour tout } x > 0$$

et, plus généralement, $\ln(x^n) = n \ln x$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

La fonction ln est continue et strictement croissante, elle réalise une bijection de $]0\,;+\infty[$ vers $]-\infty\,;+\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	$-\infty$	0	$+\infty$

Définition

On appelle *exponentielle népérienne*[2] la fonction $x \mapsto \exp x$ bijection réciproque du logarithme népérien.

La fonction exp est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est même dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

$$(\exp)'(x) = \exp x.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp x$	0	1	$+\infty$

Théorème 5

Pour tous réels x et y

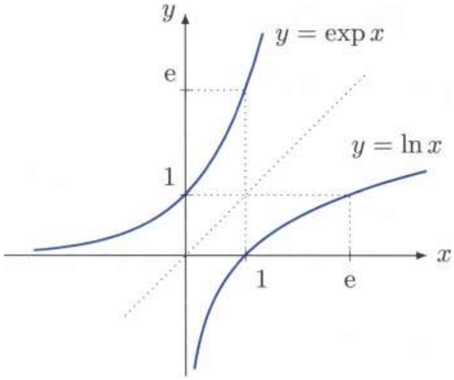
$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

Définition

On appelle *nombre de Néper*, le réel e égal à l'exponentielle de 1. C'est aussi l'unique solution à l'équation $\ln x = 1$.

$$\mathrm{e} = 2{,}718\,28 \text{ à } 10^{-5} \text{ près.}$$

1. On parle aussi de *logarithme naturel* ou tout simplement de *logarithme*.
2. Ou simplement *exponentielle*.



Les fonctions logarithme et exponentielle népériens.

2.2.2 Fonctions puissances

Pour x réel et $n \in \mathbb{N}$, la puissance x^n est définie par la relation [1]

$$x^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ facteurs}} \quad \text{si } n > 0 \quad \text{et} \quad x^0 = 1.$$

Pour x réel non nul et $n \in \mathbb{N}^*$, la puissance x^{-n} est définie par la relation

$$x^{-n} \overset{\text{def}}{=} \underbrace{\frac{1}{x} \times \frac{1}{x} \times \cdots \times \frac{1}{x}}_{n \text{ facteurs}}.$$

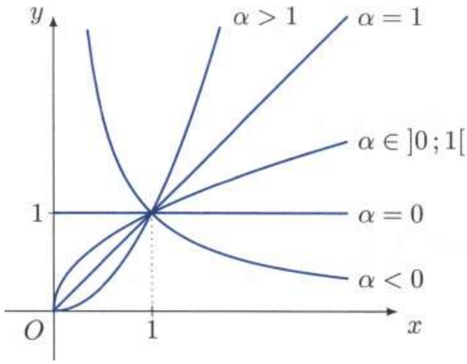
On peut généraliser ces puissances à un exposant réel lorsque x est strictement positif :

Définition

> Pour α réel, on appelle fonction *puissance d'exposant* α, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par la relation
>
> $$x^\alpha \overset{\text{def}}{=} \exp(\alpha \ln x).$$

Il est alors possible d'écrire $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ ce qui conduit à la notation usuelle de l'exponentielle.

Lorsque $\alpha > 0$, on peut prolonger par continuité la fonction puissance en convenant l'égalité $0^\alpha = 0$.



1. En particulier, on pose $0^0 = 1$. Cependant, on dit aussi que 0^0 est une *forme indéterminée analytique* car elle ne permet pas le calcul des limites.

Théorème 6
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x > 0$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Lorsque $\alpha \geqslant 1$, la fonction puissance est aussi dérivable en 0 et la formule qui précède reste valable en 0.

Théorème 7
Pour tous réels x et y strictement positifs et pour tous exposants α et β réels
$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, \quad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta \quad \text{et} \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}.$$

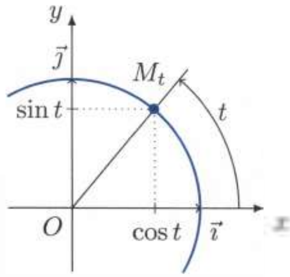
2.2.3 Croissances comparées

Les limites qui suivent résolvent des formes indéterminées fréquemment rencontrées.

Théorème 8
Pour tout $\alpha > 0$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x\to0^+} x^\alpha \ln x = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x} = 0.$$

2.3 Fonctions circulaires

2.3.1 Fonctions sinus et cosinus



On suppose le plan géométrique muni d'un repère orthonormé direct d'origine O et de vecteurs de base $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
Pour t réel, notons M_t le point du cercle trigonométrique repéré par l'angle t mesuré à partir du vecteur $\vec{\imath}$.

Définition
On pose $\cos t$ l'abscisse et $\sin t$ l'ordonnée du point M_t. Ceci définit les fonctions *cosinus* et *sinus* sur $\mathbb{R}$.

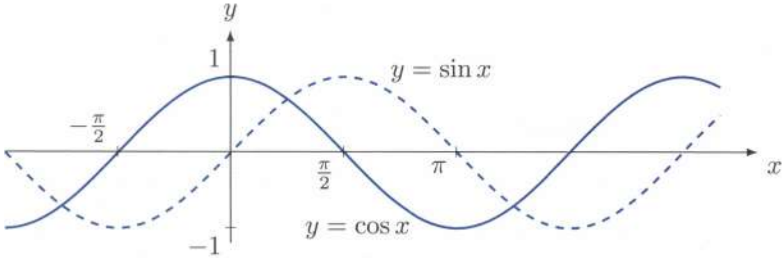
Théorème 9
Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques, dérivables et pour tout t réel
$$(\cos)'(t) = -\sin t \quad \text{et} \quad (\sin)'(t) = \cos t.$$

Les formules de trigonométries sont regroupées en annexe p. 419. Soulignons seulement ici la formule fondamentale

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

On retiendra aussi les valeurs remarquables du tableau suivant :

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos t$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\sin t$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0



Les fonctions sinus et cosinus.

2.3.2 Fonction tangente

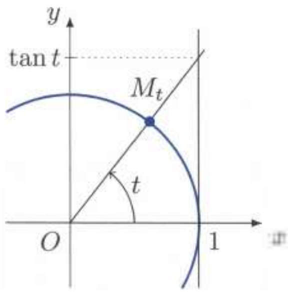
Pour $k \in \mathbb{Z}$, on introduit $I_k = \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$.

Définition

On définit la fonction *tangente* par la relation

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} \quad \text{pour tout} \quad t \in I_k.$$

La tangente de t est l'ordonnée du point d'abscisse 1 de la droite (OM_t).



Théorème 10

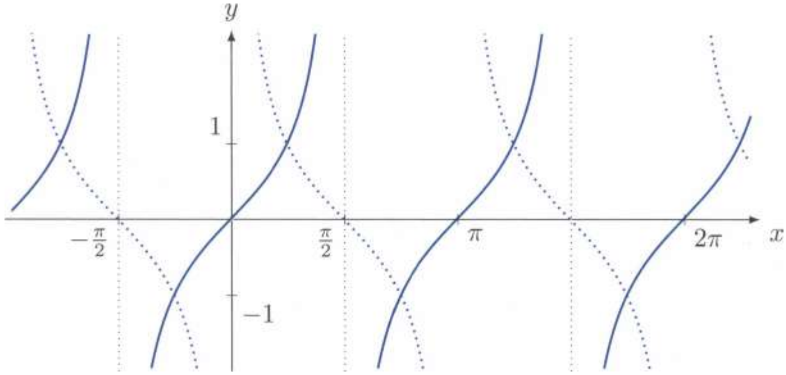
La fonction tangente est π-périodique, dérivable sur chaque intervalle I_k et pour tout t appartenant à I_k

$$(\tan)'(t) = 1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}.$$

Sur les intervalles $J_k =]k\pi\,;(k+1)\pi[$ (avec $k \in \mathbb{Z}$), on définit aussi une fonction *cotangente* par

$$\cot t = \frac{\cos t}{\sin t} \quad \text{pour tout} \quad t \in J_k.$$

Cette dernière correspond simplement à l'inverse de la fonction tan lorsque cela a du sens et est directement liée à la fonction tangente par l'identité $\cot t = \tan(\pi/2 - t)$ pour tout t appartenant à J_k.



Les fonctions tangente (tracé continu) et cotangente (tracé pointillé).

2.4 Fonctions circulaires réciproques

2.4.1 Fonction arc sinus

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-\pi/2\,;\pi/2]$. Elle réalise une bijection de $[-\pi/2\,;\pi/2]$ vers $[-1\,;1]$ ce qui permet d'écrire

$$\forall x \in [-1\,;1],\ \exists! t \in [-\pi/2\,;\pi/2],\quad x = \sin t.$$

Définition

> On appelle *arc sinus* d'un réel x de l'intervalle $[-1\,;1]$ l'unique angle t de $[-\pi/2\,;\pi/2]$ dont le sinus vaut x.

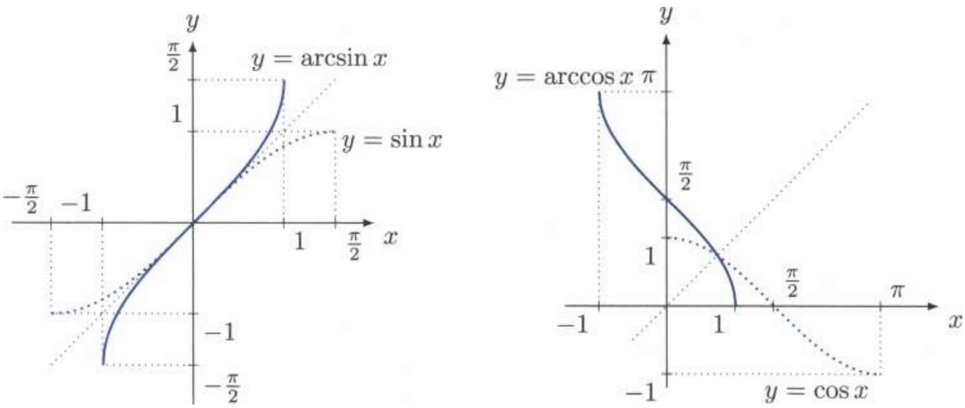
On définit ainsi une *fonction arc sinus* bijection réciproque de la restriction de la fonction sinus au départ de $[-\pi/2\,;\pi/2]$:

$$\forall t \in [-\pi/2\,;\pi/2],\ \arcsin(\sin t) = t \quad \text{et} \quad \forall x \in [-1\,;1],\ \sin(\arcsin x) = x.$$

Théorème 11

La fonction arcsin est définie, impaire, continue et strictement croissante sur $[-1\,;1]$. Elle est aussi dérivable sur $]-1\,;1[$ et pour tout $x \in\ ]-1\,;1[$

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



Les fonctions arc sinus et arc cosinus.

2.4.2 Fonction arc cosinus

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;\pi]$. Elle réalise une bijection de $[0\,;\pi]$ vers $[-1\,;1]$ ce qui permet d'écrire

$$\forall x \in [-1\,;1],\ \exists! t \in [0\,;\pi], \quad x = \cos t.$$

Définition

On appelle *arc cosinus* d'un réel x de l'intervalle $[-1\,;1]$ l'unique angle t de $[0\,;\pi]$ dont le cosinus vaut x.

On définit ainsi une *fonction arc cosinus* bijection réciproque de la restriction de la fonction cosinus au départ de $[0\,;\pi]$:

$$\forall t \in [0\,;\pi],\ \arccos(\cos t) = t \quad \text{et} \quad \forall x \in [-1\,;1],\ \cos(\arccos x) = x.$$

Théorème 12
La fonction arccos est définie, continue et strictement décroissante sur $[-1\,;1]$.
Elle est aussi dérivable sur $]-1\,;1[$ et pour tout $x \in\ ]-1\,;1[$

$$(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2.4.3 Fonction arc tangente

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\pi/2\,;\pi/2[$. Elle réalise une bijection de $]-\pi/2\,;\pi/2[$ vers $\mathbb{R}$ ce qui permet d'écrire

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists! t \in\ ]-\pi/2\,;\pi/2[, \quad x = \tan t.$$

Définition

On appelle *arc tangente* d'un réel x l'unique angle de $]-\pi/2\,;\pi/2[$ dont la tangente vaut x.

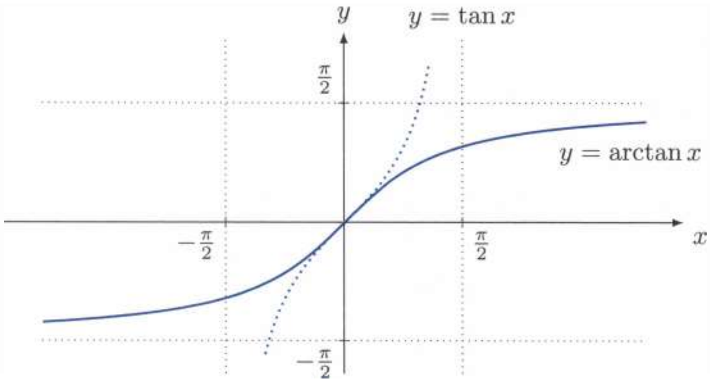
On définit ainsi une *fonction arc tangente* bijection réciproque de la restriction de la fonction tangente au départ de $]-\pi/2\,;\pi/2[$:

$$\forall t \in \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[,\ \arctan(\tan t) = t \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \tan(\arctan x) = x.$$

Théorème 13

La fonction arctan est définie, impaire, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$



2.5 Fonctions hyperboliques

2.5.1 Fonctions cosinus et sinus hyperboliques

Définition

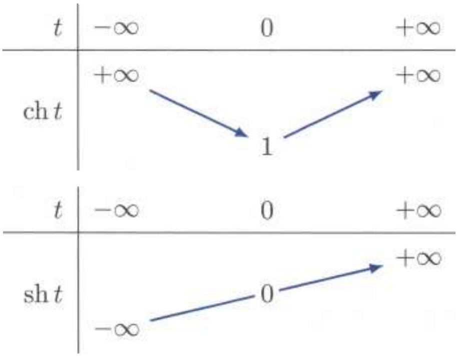
Pour t réel, on définit le *cosinus* et le *sinus hyperboliques* de t par les relations

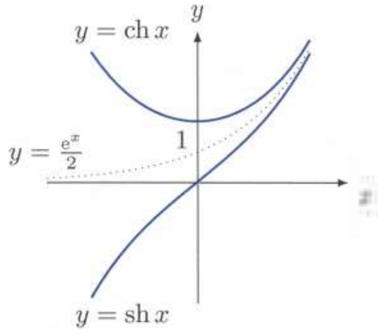
$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Théorème 14

Les fonctions cosinus et sinus hyperboliques, sont respectivement paire et impaire. Elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout t réel

$$(\operatorname{ch})'(t) = \operatorname{sh} t \quad \text{et} \quad (\operatorname{sh})'(t) = \operatorname{ch} t.$$





Il existe des formules de trigonométrie hyperbolique assez analogues à celles de la trigonométrie circulaire. Parmi celles-ci, retenons [1]

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1.$$

2.5.2 Fonction tangente hyperbolique

Définition

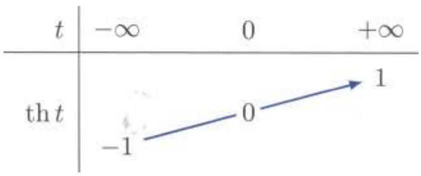
Pour t réel, on définit la *tangente hyperbolique* de t par la relation

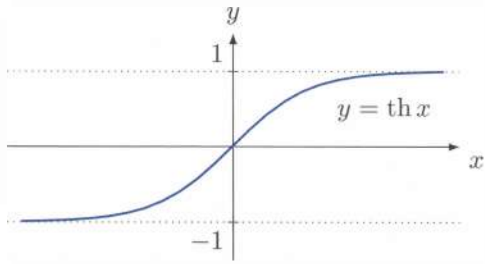
$$\operatorname{th} t = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}$$

Théorème 15

La fonction tangente hyperbolique est impaire et strictement croissante. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout t réel

$$(\operatorname{th})'(t) = 1 - \operatorname{th}^2 t = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}.$$





1. La courbe du plan d'équation $x^2 - y^2 = 1$ est une hyperbole. Les réels $\operatorname{ch} t$ et $\operatorname{sh} t$ sont les abscisses et ordonnées d'un point d'abscisse strictement positive de celle-ci.

2.6 Exercices d'apprentissage

2.6.1 Puissances, exponentielle et logarithme

Exercice 1 *
Calculer si ces limites existent :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x^{\frac{1}{x}}$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\ln x}}}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^x}$.

Solution

(a) Il s'agit de résoudre une forme indéterminée puissance « $(+\infty)^0$ ».

méthode

Pour étudier la limite d'une puissance où la variable apparaît à la fois au niveau de l'exposant et du nombre élevé à la puissance, il est conseillé d'exprimer la puissance sous forme exponentielle : $a^b = e^{b\ln a}$.

On écrit pour tout $x > 0$

$$x^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln x\right).$$

Par limite de référence, on sait

$$\frac{1}{x}\ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

et donc, par composition de limites,

$$x^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^0 = 1.$$

(b) Il s'agit de résoudre une forme indéterminée puissance « 0^0 ».

méthode

L'écriture exponentielle de la puissance permet de simplifier l'expression.

On écrit pour tout $x > 1$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\ln x}}} = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\ln x}}\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \exp(-2\sqrt{\ln x}).$$

Par composition de limites

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\ln x}}} = \exp(-2\underbrace{\sqrt{\ln x}}_{\to+\infty}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

(c) L'écriture a^{b^c} peut être ambiguë. Doit-on comprendre $(a^b)^c$ ou $a^{(b^c)}$?

méthode

En l'absence de parenthèses, on comprend $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

On peut donc écrire pour tout $x > 0$

$$x^{x^x} = x^{(x^x)} = \exp(x^x \ln x) = \exp\big(\exp(x \ln x) \ln x\big).$$

On a donc

$$x^{x^x} = \exp\big(\underbrace{\exp(x \ln x)}_{\to 0} \underbrace{\ln x}_{\to -\infty}\big) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0.$$

2.6.2 Fonctions circulaires

Exercice 2

Exprimer, lorsque cela a un sens, $\tan(a+b+c)$ en fonction de $\tan a$, $\tan b$ et $\tan c$.

Solution

Pour que les tangentes introduites aient chacune un sens, on suppose a, b, c et $a+b+c$ non congrus à $\pi/2$ modulo π.

méthode

On exploite la formule d'addition

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

Si $a + b \not\equiv \pi/2\ [\pi]$, on écrit

$$\tan\big((a+b)+c\big) = \frac{\tan(a+b) + \tan c}{1 - \tan(a+b)\tan c} = \frac{\dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} + \tan c}{1 - \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}\tan c}.$$

En réduisant numérateur et dénominateur au même dénominateur

$$\tan(a+b+c) = \frac{\tan a + \tan b + \tan c - \tan a \tan b \tan c}{1 - \tan a \tan b - \tan b \tan c - \tan c \tan a}.$$

Si $a + b \equiv \pi/2\ [\pi]$, le calcul réalisé ci-dessus n'est plus possible car $1 - \tan a \tan b$ est nul. Cependant,

$$\tan(a+b+c) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + c\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + c)}{\cos(\frac{\pi}{2} + c)} = \frac{\cos c}{-\sin c} = -\frac{1}{\tan c}$$

et la formule précédente reste valable car $\tan a \tan b = 1$.

Exercice 3

Écrire sous la forme $A\cos(x - \varphi)$ les expressions suivantes :

(a) $\cos x + \sin x$ (b) $\cos x - \sqrt{3}\sin x$.

Solution

méthode

En factorisant $A = \sqrt{a^2+b^2}$ devant une expression $a\cos x + b\sin x$, on fait apparaître en facteur $\alpha\cos x + \beta\sin x$ avec $\alpha^2+\beta^2 = 1$. Il est alors possible d'introduire un angle φ tel que $\alpha = \cos\varphi$ et $\beta = \sin\varphi$.

(a) On écrit

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\Bigl(\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{=\cos(\frac{\pi}{4})}\cos x + \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{=\sin(\frac{\pi}{4})}\sin x\Bigr) = \sqrt{2}\cos\Bigl(x - \Bigl(\frac{\pi}{4}\Bigr)\Bigr).$$

(b) On écrit

$$\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\Bigl(\underbrace{\frac{1}{2}}_{=\cos(\frac{\pi}{3})}\cos x - \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{=\sin(\frac{\pi}{3})}\sin x\Bigr) = 2\cos\Bigl(x + \frac{\pi}{3}\Bigr).$$

Exercice 4

Résoudre les équations d'inconnue x réelle qui suivent :

(a) $\sin x = \sin(2x)$ (b) $\cos x = \sin(3x)$ (c) $\cos x - \sin x = 1$.

Solution

(a) **méthode**

$\sin a = \sin b$ si, et seulement si, $a \equiv b\ [2\pi]$ ou $a \equiv \pi - b\ [2\pi]$.

On a donc $\sin x = \sin(2x)$ si, et seulement si, $2x \equiv x\ [2\pi]$ ou $2x \equiv \pi - x\ [2\pi]$.

méthode

Pour résoudre une équation en congruence, on exprime la congruence par l'introduction d'un entier[1] k :

$$a \equiv b\ [2\pi] \iff a = b + 2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} 2x \equiv x\ [2\pi] &\iff 2x = x + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x = 0 + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x \equiv 0\ [2\pi] \end{aligned}$$

1. L'expression « avec $k \in \mathbb{Z}$ » est une façon concise de signifier « il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que ».

et

$$\begin{aligned}
2x \equiv \pi - x\ [2\pi] &\iff 2x = \pi - x + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\\
&\iff x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\\
&\iff x \equiv \frac{\pi}{3}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right].
\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation étudiée est

$$\left\{2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

(b) **méthode**

‖ L'équation étudiée se transforme en l'égalité de deux sinus par la formule

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\cos x = \sin(3x) &\iff \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(3x)\\
&\iff \frac{\pi}{2} - x \equiv 3x\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2} - x \equiv \pi - 3x\ [2\pi].
\end{aligned}$$

La résolution comme au-dessus des équations en congruence conduit à l'ensemble des solutions suivant :

$$\left\{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

(c) **méthode**

‖ On exprime le premier membre sous la forme $A\cos(x - \varphi)$.

On écrit

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

méthode

‖ $\cos a = \cos b$ si, et seulement si, $a \equiv b\ [2\pi]$ ou $a \equiv -b\ [2\pi]$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\cos x - \sin x = 1 &\iff \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\
&\iff x + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x + \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi].
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2.6.3 Fonctions circulaires réciproques

Exercice 5
Simplifier

(a) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ (b) $\arccos\left(\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)\right)$ (c) $\arccos\left(\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$.

Solution

(a) **méthode**

> L'expression $\arcsin(\sin t)$ se simplifie en t si, et seulement si, t appartient à l'intervalle $[-\pi/2\,;\pi/2]$.

Pour simplifier l'expression, on cherche l'angle de l'intervalle $[-\pi/2\,;\pi/2]$ dont le sinus vaut celui de $2\pi/3$. Cet angle est $\pi/3$ et donc

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}.$$

(b) **méthode**

> L'expression $\arccos(\cos t)$ se simplifie en t si, et seulement si, t appartient à l'intervalle $[0\,;\pi]$.

L'angle de $[0\,;\pi]$ dont le cosinus est le même que celui de $6\pi/5$ est $4\pi/5$ et donc

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right) = \frac{4\pi}{5}.$$

(c) **méthode**

> On transforme cosinus en sinus et inversement par les formules
>
> $$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

On a

$$\arccos\left(\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\underbrace{\frac{5\pi}{14}}_{\in[0;\pi]}\right)\right) = \frac{5\pi}{14}.$$

Exercice 6
Simplifier les expressions suivantes :

(a) $\sin(2\arccos x)$ (b) $\cos(2\arcsin x)$ (c) $\cos(\arctan x)$.

Solution

(a) On développe $\sin(2a)$ en $2\sin a\cos a$, il vient

$$\sin(2\arccos x) = 2\sin(\arccos x)\cos(\arccos x).$$

méthode

> Pour tout $x \in [-1\,;1]$, on a [1]
>
> $$\cos(\arccos x) = x \quad \text{et} \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}.$$

On en déduit

$$\sin(2\arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

(b) On développe $\cos(2a)$ en $2\cos^2 a - 1$ ou en $1 - 2\sin^2 a$

$$\cos(2\arcsin x) = 2\cos^2(\arcsin x) - 1 = 1 - 2\sin^2(\arcsin x).$$

méthode

> On exploite l'une ou l'autre des formules
>
> $$\sin(\arcsin x) = x \quad \text{et} \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}.$$

On obtient

$$\cos(2\arcsin x) = 1 - 2x^2.$$

(c) **méthode**

> On peut lier les fonctions cosinus et tangente par l'identité [2]
>
> $$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t.$$

Pour $t = \arctan x$, on peut simplifier $\tan t$ en x et écrire

$$\cos^2 t = \frac{1}{1+x^2}.$$

Sachant $t \in \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$, on a $\cos t > 0$ et donc

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

1. Pour $t \in [0\,;\pi]$, on sait $\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t}$ car $\sin t \geqslant 0$ et $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.
2. Cette identité correspond aux deux expressions usuelles de la dérivée de la fonction tangente.

Exercice 7

Montrer

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{pour tout } x > 0.$$

(a) en étudiant la fonction définie par le premier membre ;

(b) en calculant la tangente d'un angle bien choisi.

Solution

(a) Introduisons f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

méthode

‖ On montre que la fonction est constante en calculant sa dérivée.

La fonction f est dérivable et par dérivation d'une composition de fonctions

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Après simplifications, on obtient $f'(x) = 0$. La fonction f est donc constante sur l'intervalle[1] $]0\,;+\infty[$. La valeur de cette constante peut s'obtenir par le calcul[2] de $f(1)$

$$f(1) = 2\arctan 1 = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Soit $x > 0$. Introduisons l'angle

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = \arctan x.$$

méthode

‖ On vérifie que θ est l'unique angle de $]-\pi/2\,;\pi/2[$ dont la tangente vaut $1/x$.

Puisque $x > 0$, on a $\alpha \in\,]0\,;\pi/2[$ et donc $\theta \in\,]0\,;\pi/2[\, \subset\,]-\pi/2\,;\pi/2[$. La tangente de θ est alors bien définie et

$$\tan(\theta) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\sin(\pi/2-\alpha)}{\cos(\pi/2-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{x}.$$

On a donc

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

1. Sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$, la fonction f est aussi définie et constante mais sa valeur est $-\pi/2$: la fonction f n'étant pas définie en 0, les constantes de part et d'autres peuvent différer ce qui est ici le cas.
2. On peut aussi étudier les limites de f aux extrémités de l'intervalle.

2.6.4 Fonctions hyperboliques

Exercice 8
Montrer

(a) $\forall x \geqslant 0,\ \operatorname{sh} x \geqslant x$ (b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch} x \geqslant 1 + \dfrac{1}{2}x^2$.

Solution

méthode

On étudie les variations de la fonction différence des membres.

(a) La fonction $f : x \mapsto \operatorname{sh} x - x$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $f'(x) = \operatorname{ch} x - 1$ pour tout $x \geqslant 0$. Le cosinus hyperbolique présentant un minimum de valeur 1, on a $f'(x) \geqslant 0$ et la fonction f est croissante. Sachant $f(0) = 0$, on peut affirmer que f est positive sur $\mathbb{R}_+$.

(b) La fonction $g : x \mapsto \operatorname{ch} x - 1 - x^2/2$ est paire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = \operatorname{sh} x - x \geqslant 0$ pour tout x de $\mathbb{R}_+$. La fonction g est donc croissante sur $[0\,;+\infty[$. Sachant $g(0) = 0$, on peut affirmer que c'est une fonction positive, d'abord sur $[0\,;+\infty[$, puis sur $\mathbb{R}$ par parité.

2.7 Exercices d'entraînement

2.7.1 Fonctions bijectives

Exercice 9 *
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue, impaire et strictement monotone.
Justifier que f réalise une bijection de I vers un intervalle J et montrer que sa bijection réciproque est impaire.

Solution
Les hypothèses du théorème de la bijection (Th. 2 p. 40) sont immédiatement réunies. On peut donc affirmer que l'application f réalise une bijection de I vers un intervalle J dont les extrémités sont les limites de f aux extrémités de I.

Étudions la symétrie de l'intervalle J. Puisque la fonction f est impaire, il est entendu que l'intervalle I est symétrique par rapport à 0. Au surplus, les limites de f aux extrémités de I sont opposées. Que l'intervalle I soit de la forme $[-a\,;a]$ ou $]-a\,;a[$ (avec a éventuellement infini), on peut affirmer que l'intervalle image J est symétrique par rapport à 0.

Considérons $y \in J$ et étudions si l'identité $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$ a lieu.

méthode

Pour établir $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$, on vérifie que ces deux valeurs ont même image par f.

D'une part, une simplification directe donne $f\big(f^{-1}(-y)\big) = -y$. D'autre part, l'imparité de f permet d'écrire $f\big(-f^{-1}(y)\big) = -f\big(f^{-1}(y)\big) = -y$. Par unicité de l'antécédent de $-y$ par f, on peut affirmer $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$.

Finalement, la bijection réciproque f^{-1} est impaire.

Exercice 10 ** (Fonction argument tangente hyperbolique)

(a) Montrer que la fonction $x \mapsto \operatorname{th} x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I à préciser.

On note argth sa bijection réciproque appelée *argument tangente hyperbolique*.

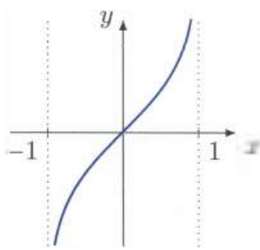
(b) Montrer que la fonction argth est dérivable sur I et exprimer sa dérivée.

(c) En étudiant l'équation $y = \operatorname{th} x$ d'inconnue x réelle, exprimer $\operatorname{argth} t$ à l'aide des fonctions usuelles. Retrouver l'expression de sa dérivée.

Solution

(a) La fonction tangente hyperbolique est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et tend respectivement vers 1 et -1 en $+\infty$ et $-\infty$: elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers l'intervalle $I =]-1\,;1[$.

On peut noter que la fonction argth est impaire car c'est l'application réciproque d'une bijection impaire (voir sujet précédent).



(b) **méthode**

Lorsqu'une bijection $f\colon I \to J$ est dérivable, il suffit [1] que sa dérivée ne s'annule pas pour que sa bijection réciproque soit dérivable (Th. 3 p. 40) avec

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

La bijection th est dérivable et sa dérivée ne s'annule pas car

$$(\operatorname{th})'(x) = 1 - \operatorname{th}^2 x \neq 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Sa bijection réciproque argth est donc dérivable sur $]-1\,;1[$ et, pour tout $t \in]-1\,;1[$,

$$(\operatorname{argth})'(t) = \frac{1}{(\operatorname{th})'(\operatorname{argth} t)} = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2(\operatorname{argth} t)} = \frac{1}{1 - t^2}.$$

(c) Soit $y \in]-1\,;1[$ et $x \in \mathbb{R}$.

méthode

On résout l'équation $y = \operatorname{th} x$ afin d'exprimer x en fonction de y.

1. Cette condition est aussi nécessaire car $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$ avec f et f^{-1} des fonctions dérivables entraîne $f' \times (f^{-1})' \circ f = 1$.

On a

$$\begin{aligned} y = \operatorname{th} x &\iff y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \\ &\iff y(e^{2x}+1) = e^{2x}-1 \\ &\iff e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \\ &\iff x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right). \end{aligned}$$

Pour $t \in]-1\,;1[$, on obtient donc l'expression [1]

$$\operatorname{argth} t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right).$$

Enfin, en écrivant le logarithme du quotient comme une différence, on retrouve aisément la dérivée de la fonction argth. Pour tout $t \in]-1\,;1[$,

$$(\operatorname{argth})'(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\ln(1+t)-\ln(1-t)\big) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right) = \frac{1}{1-t^2}.$$

Exercice 11 **

On considère la fonction $f\colon x \mapsto 1 + x + x^{1/3}$ définie sur $[0\,;+\infty[$.

(a) Justifier que la fonction f induit une bijection de $[0\,;+\infty[$ vers un intervalle I à préciser.

(b) Étudier la dérivabilité de f sur I.

Solution

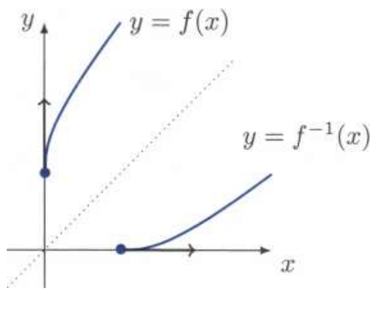
(a) Par somme de fonctions, la fonction f est continue et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. Les limites de f en 0 et $+\infty$ sont respectivement 1 et $+\infty$. La fonction réalise donc une bijection de $[0\,;+\infty[$ vers $I = [1\,;+\infty[$.

(b) La fonction $x \mapsto x^{1/3}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ mais n'est pas dérivable en 0 (il y figure une tangente verticale).

Par opérations, on peut affirmer que la fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{3x^{2/3}}.$$

La dérivée de f ne s'annulant pas sur $]0\,;+\infty[$, on peut affirmer que sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable en chaque point image (Th. 3 p. 40), autrement dit, f^{-1} dérivable sur $]1\,;+\infty[$.



1. On a obtenu l'*expression logarithmique* de la fonction argument tangente hyperbolique.

La fonction f n'étant pas dérivable en 0, le théorème précédent ne s'applique pas et l'on ne peut rien dire *a priori* sur la dérivabilité de f^{-1} en $1 = f(0)$.

méthode

La fonction f présente une tangente verticale en 0. Par symétrie, sa bijection réciproque présente une tangente horizontale en $1 = f(0)$: on établit sa dérivabilité en étudiant la limite du taux d'accroissement.

La fonction f^{-1} est dérivable en 1 si, et seulement si, la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{y \to 1^+} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(1)}{y - 1}$$

méthode

Pour étudier cette limite, on réalise la substitution de variable $x = f^{-1}(y)$.

On sait que la bijection réciproque f^{-1} est continue (Th. 2 p. 40). Lorsque y tend vers 1^+, on peut affirmer que $x = f^{-1}(y)$ tend vers 0 par valeurs supérieures. Sachant de plus que x vérifie $1 + x + x^{1/3} = y$, on peut écrire

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(1)}{y - 1} = \frac{x - 0}{x + x^{1/3}} = \frac{1}{1 + \underbrace{x^{-2/3}}_{\to +\infty}} \xrightarrow[y \to 1^+]{} 0.$$

On peut alors conclure que f^{-1} est dérivable en 1 avec $\left(f^{-1}\right)'(1) = 0$.

2.7.2 Puissances, exponentielle et logarithme

Exercice 12 *

Justifier l'inégalité qui suit pour tout $x \in \,]0\,;1[$

$$\frac{1}{2} \leqslant x^x(1-x)^{1-x}$$

Solution

méthode

Il suffit de dresser le tableau des variations de la fonction $x \mapsto x^x(1-x)^{1-x}$.

Introduisons la fonction φ définie sur $]0\,;1[$ par la relation

$$\varphi(x) = x^x(1-x)^{1-x} = \exp\big(x \ln x + (1-x)\ln(1-x)\big).$$

Par composition, la fonction φ est dérivable sur $]0\,;1[$ et pour tout x de $]0\,;1[$

$$\varphi'(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \underbrace{\varphi(x)}_{>0}.$$

Le signe de $\varphi'(x)$ est déterminé par la position relative du quotient $x/(1-x)$ par rapport à 1.

$$\frac{x}{1-x} \geqslant 1 \iff x \geqslant 1-x \qquad (\text{car } 1-x>0)$$
$$\iff 2x \geqslant 1.$$

On en déduit les variations de la fonction φ :

x	0		$1/2$		1
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	1	$\searrow$	$\varphi(1/2)$	$\nearrow$	1

et l'on peut conclure sachant $\varphi(1/2) = 1/2$.

Exercice 13 *

Résoudre les équations suivantes d'inconnue x réelle :

(a) $x = \sqrt{2x-1} + 2$ (b) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{\,x}$

(c) $2^{2x+3} + 5^{2x} = 5^{2x+1} - 2^{2x+1}$ (d) $\mathrm{e}^x - 4\mathrm{e}^{-x} = 3$.

Solution

(a) L'équation posée a du sens pour $x \geqslant 1/2$.

méthode

On isole la racine carrée avant d'élever au carré.

$$x = \sqrt{2x-1} + 2 \iff x - 2 = \sqrt{2x-1}$$
$$\iff \begin{cases} (x-2)^2 = 2x - 1 \\ x - 2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(la condition de positivité permet de conserver l'équivalence).

L'équation $(x-2)^2 = 2x-1$ s'exprime aussi $x^2 - 6x + 5 = 0$ et a pour racines 1 et 5. Parmi celles-ci, seule 5 vérifie la condition $x - 2 \geqslant 0$ et c'est donc la seule solution de l'équation posée.

(b) L'équation a un sens pour tout $x \geqslant 0$.

méthode

On forme une équation équivalente en passant au logarithme.

On observe que $x = 0$ est solution de l'équation. Supposons pour la suite $x > 0$.

$$\begin{aligned} x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{\,x} &\iff \sqrt{x}\ln x = x\ln\sqrt{x} \\ &\iff \sqrt{x}\ln x = \frac{1}{2}x\ln x \\ &\iff \ln x = 0 \text{ ou } 2\sqrt{x} = x \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = 4. \end{aligned}$$

En résumé, les solutions de l'équation sont $0, 1$ et 4.

(c) **méthode**

> On réorganise les membres en « rapprochant ce qui se ressemble ».

$$\begin{aligned} 2^{2x+3} + 5^{2x} = 5^{2x+1} - 2^{2x+1} &\iff 2^{2x+3} + 2^{2x+1} = 5^{2x+1} - 5^{2x} \\ &\iff 5 \times 2^{2x+1} = 4 \times 5^{2x} \\ &\iff 2^{2x-1} = 5^{2x-1}. \end{aligned}$$

En passant au logarithme, on obtient $(2x-1)\ln 2 = (2x-1)\ln 5$ dont la seule solution est $x = 1/2$.

(d) **méthode**

> On multiplie l'équation par e^x afin de reconnaître une équation du second degré en l'inconnue $X = \mathrm{e}^x$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on maintient l'équivalence en multipliant par $\mathrm{e}^x \neq 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x - 4\mathrm{e}^{-x} = 3 &\iff \mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^x - 4 = 0 \\ &\iff X^2 - 3X - 4 = 0 \quad \text{avec} \quad X = \mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

Les racines de l'équation du second degré sont -1 et 4, donc

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x - 4\mathrm{e}^{-x} = 3 &\iff \underbrace{\mathrm{e}^x = -1}_{\text{impossible}} \text{ ou } \mathrm{e}^x = 4 \\ &\iff x = 2\ln 2. \end{aligned}$$

Exercice 14 **

(a) Établir que $\left|\sqrt{y} - \sqrt{x}\right| \leqslant \sqrt{|y-x|}$ pour tous x et y de $\mathbb{R}_+$.

(b) Pour quels $\alpha > 0$ a-t-on $\left|y^\alpha - x^\alpha\right| \leqslant \left|y - x\right|^\alpha$ pour tous x et y de $\mathbb{R}^+$?

Solution

(a) **méthode**

‖ On simplifie l'étude en échangeant si besoin x et y.

Les paramètres x et y jouent un rôle symétrique dans l'inégalité demandée. Quitte à échanger x et y, on peut supposer $x \leqslant y$. Il s'agit alors d'établir

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y - x}.$$

méthode

‖ Afin de simplifier les racines, on étudie l'inégalité élevée au carré.

Par élévation au carré de membres positifs, l'inégalité demandée équivaut à la suivante

$$y - 2\sqrt{xy} + x \leqslant y - x.$$

Or cette dernière est vraie car, sachant $x \leqslant y$, on peut écrire $\sqrt{xy} \geqslant x$ puis

$$y - 2\sqrt{xy} + x \leqslant y - 2x + x = y - x.$$

(b) Comme au-dessus on suppose $x \leqslant y$ et l'on étudie l'inégalité

$$y^\alpha - x^\alpha \leqslant (y - x)^\alpha.$$

Cette inégalité est assurément vraie lorsque $x = 0$ sans conditions sur α. On suppose par la suite $x > 0$.

méthode

‖ Afin de réduire le nombre de paramètres, on divise l'inégalité par x^α.

L'inégalité étudiée équivaut à la suivante

$$\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha - 1 \leqslant \left(\frac{y}{x} - 1\right)^\alpha \quad \text{c'est-à-dire} \quad t^\alpha - 1 \leqslant (t-1)^\alpha \quad \text{avec} \quad t = \frac{y}{x} \geqslant 1.$$

On étudie alors la fonction définie par la différence des deux membres. Posons

$$f_\alpha(t) = (t-1)^\alpha - (t^\alpha - 1)$$

ce qui définit une fonction continue sur $[1\,;+\infty[$. Cette fonction est aussi dérivable[1] sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ avec

$$f_\alpha'(t) = \alpha\big((t-1)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}\big).$$

méthode

‖ On obtient le signe de $f_\alpha'(t)$ en discutant selon le signe de l'exposant $\alpha - 1$.

Si $\alpha \in \,]0\,;1]$, $(t-1)^{\alpha-1} \geqslant t^{\alpha-1}$ pour tout $t > 1$ et donc $f_\alpha'(t) \geqslant 0$. La fonction f_α est alors croissante et, puisque $f_\alpha(1) = 0$, f_α est positive sur $[1\,;+\infty[$. L'inégalité voulue est alors vraie.

À l'inverse, si $\alpha \in \,]1\,;+\infty[$, on obtient $f_\alpha'(t) < 0$. La fonction f_α est strictement décroissante et l'inégalité est dans l'autre sens.

En résumé, la comparaison $|y^\alpha - x^\alpha| \leqslant |y - x|^\alpha$ est vraie seulement lorsque $\alpha \in \,]0\,;1]$.

1. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ n'est dérivable en 0 que si $\alpha \geqslant 1$.

2.7.3 Fonctions circulaires

Exercice 15 * (Formules de l'angle moitié)
Soit x un réel tel que $x \not\equiv \pi\ [2\pi]$. On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Montrer

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Solution

méthode
On transforme les expressions rationnelles en t en exploitant les formules

$$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos(2a) \quad \text{et} \quad 2\sin a \cos a = \sin(2a).$$

On a

$$1 + t^2 = 1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

On peut alors écrire

$$1 - t^2 = 1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\cos x}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = (1+t^2)\cos x$$

et

$$2t = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) = 2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin x}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = (1+t^2)\sin x.$$

On en déduit les deux formules proposées en divisant par $1 + t^2$ qui est non nul.

Exercice 16 *
Décrire l'ensemble des solutions $x \in \mathbb{R}$ des équations suivantes :

(a) $2\cos^2 x - \sin x = 1$ (b) $\cos^4 x + \sin^4 x = 1$

(c) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ (d) $2\sqrt{3}\cos^2 x - 2\sin x \cos x = 1 + \sqrt{3}$.

Solution

(a) **méthode**
On transforme l'équation en une équation du second degré en l'inconnue $\sin x$.

En écrivant $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, l'équation étudiée devient

$$2t^2 + t - 1 = 0 \quad \text{avec} \quad t = \sin x.$$

Les racines de l'équation en t sont -1 et $1/2$. On résout alors les équations $\sin x = -1$ et $\sin x = 1/2$ pour former l'ensemble des solutions[1] :

$$\left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

1. L'équation peut aussi être résolue en écrivant $2\cos^2 x - 1 = \cos(2x)$ ce qui conduit à l'étude de $\cos(2x) = \sin x$.

(b) **méthode**

‖ On simplifie l'expression de l'équation.

En écrivant le second membre $\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2$, l'équation étudiée se simplifie en

$$2\cos^2 x\sin^2 x=0.$$

L'ensemble des solutions est alors

$$\left\{\frac{k\pi}{2}\;\middle|\;k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

(c) **méthode**

‖ On factorise l'équation en transformant $\sin x+\sin(3x)$.

On peut écrire la factorisation $\sin x+\sin(3x)=2\sin(2x)\cos x$. L'équation étudiée équivaut alors à

$$2\sin(2x)\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)=0.$$

Les solutions sont déterminées par la résolution des équations $\sin(2x)=0$ et $\cos x=-\frac{1}{2}$ ce qui conduit à l'ensemble solution

$$\left\{\frac{k\pi}{2}\;\middle|\;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi\;\middle|\;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{4\pi}{3}+2k\pi\;\middle|\;k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

(d) **méthode**

‖ On transforme l'expression trigonométrique en $A\cos(2x-\varphi)$.

Sachant $\cos(2a)=2\cos^2 a-1$ et $\sin(2a)=2\sin a\cos a$, on peut écrire

$$2\sqrt{3}\cos^2 x-2\sin x\cos x=\sqrt{3}\cos(2x)-\sin(2x)+\sqrt{3}$$

avec

$$\sqrt{3}\cos(2x)-\sin(2x)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x)-\frac{1}{2}\sin(2x)\right)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right).$$

L'équation étudiée équivaut alors à

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}.$$

Les solutions sont déterminées en résolvant les équations

$$2x+\frac{\pi}{6}\equiv\frac{\pi}{3}\;[2\pi]\quad\text{et}\quad 2x+\frac{\pi}{6}\equiv-\frac{\pi}{3}\;[2\pi].$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{\frac{\pi}{12}+k\pi\;\middle|\;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi\;\middle|\;k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Exercice 17 **

Soit x un réel avec $x \neq 0\ [2\pi]$ et $n \in \mathbb{N}$.

(a) Exprimer $\sin(\frac{x}{2})\cos(nx)$ en fonction de $\sin(\frac{2n+1}{2}x)$ et de $\sin(\frac{2n-1}{2}x)$.

(b) En déduire la valeur de

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx).$$

(c) Exprimer de même

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx).$$

Solution

(a) **méthode**

On exploite la formule de factorisation

$$\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

Pour $p = (\frac{2n+1}{2})x$ et $q = (\frac{2n-1}{2})x$, on obtient

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) - \sin\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)\right).$$

(b) **méthode**

On fait apparaître une somme télescopique[1] en calculant $\sin(\frac{x}{2})C_n$.

On a

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{x}{2}\right)C_n &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\sin\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right) - \sin\left(\frac{(2k-1)x}{2}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{(2k-1)x}{2}\right).\end{aligned}$$

On réalise un glissement d'indice sur la première somme et l'on simplifie les portions communes aux deux sommes.

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\sin\left(\frac{(2k-1)x}{2}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{(2k-1)x}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right).\end{aligned}$$

1. Dans une *somme télescopique*, les termes successifs comportent des simplifications, voir section 2.2.2 du chapitre 2 de l'ouvrage *Exercices d'algèbre et de probabilités MPSI*.

Sachant $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$, on conclut

$$C_n = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

(c) **méthode**

> On exploite la factorisation
>
> $$\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin(nx) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2n-1}{2}x\right) - \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\right).$$

On a

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{x}{2}\right)S_n &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\cos\left(\frac{(2k-1)x}{2}\right) - \cos\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)\right)\\ &= \sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right).\end{aligned}$$

On en déduit [1]

$$S_n = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Exercice 18 *

Soit $\theta \in]0\,;\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$. Exprimer à l'aide de la fonction sinus le produit

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right).$$

Solution

méthode

> On fait apparaître un produit télescopique [2] par la formule
>
> $$\sin(2a) = 2\sin a\cos a.$$

On écrit [3]

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^{k-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2^k}\right)}.$$

1. On pourra comparer ces résultats avec ceux obtenus dans le sujet 6 p. 94.
2. Dans un *produit télescopique*, les facteurs successifs comportent des simplifications, voir section 2.2.5 du chapitre 2 de l'ouvrage *Exercices d'algèbre et de probabilités MPSI*.
3. On remarque que les dénominateurs écrits ne s'annulent pas.

On réunit tous les facteurs 2 au dénominateur pour former un terme 2^n et l'on simplifie les facteurs communs au numérateur et au dénominateur

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{1}{2^n} \frac{\sin(\theta) \times \sin(\frac{\theta}{2}) \times \cdots \times \sin(\frac{\theta}{2^{n-1}})}{\sin(\frac{\theta}{2}) \times \sin(\frac{\theta}{4}) \times \cdots \times \sin(\frac{\theta}{2^n})} = \frac{\sin(\theta)}{2^n \sin(\frac{\theta}{2^n})}.$$

2.7.4 Fonctions circulaires réciproques

Exercice 19 *

Quelle relation[1] simple relie les fonctions arcsin et arccos ?

Solution

méthode

Lorsque l'on transforme l'angle θ en $\pi/2 - \theta$, on échange sinus et cosinus.

Soit $x \in [-1\,;1]$ et $\theta = \arcsin x \in [-\pi/2\,;\pi/2]$. On a

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta = x \quad \text{avec} \quad \frac{\pi}{2} - \theta \in [0\,;\pi].$$

On en déduit que $\pi/2 - \theta$ est l'angle de $[0\,;\pi]$ dont le cosinus vaut x, autrement dit, $\pi/2 - \theta = \arccos x$. On en tire la relation[2]

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 20 *

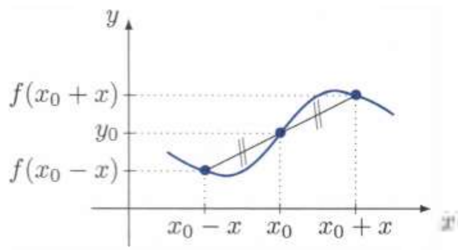
Montrer que la courbe représentative de la fonction arccos est symétrique par rapport au point de coordonnées $(0, \pi/2)$.

Solution

méthode

Le graphe d'une fonction f est symétrique par rapport au point de coordonnées (x_0, y_0) si, et seulement si, pour tout x,

$$f(x_0 - x) + f(x_0 + x) = 2y_0.$$



1. Soulignons que la fonction arctan ne se déduit pas des fonctions arcsin et arccos : $\arctan x$ n'est pas $\frac{\arcsin x}{\arccos x}$!

2. Cette relation peut aussi être obtenue en dérivant la fonction définissant le premier membre. Cependant, il convient alors de traiter séparément les cas $x = 1$ et $x = -1$ où il n'y a pas dérivabilité des fonctions arcsin et arccos (bien que ces non-dérivabilités se compensent).

Soit $x \in [-1\,;1]$. Simplifions $\arccos(x)+\arccos(-x)$. Par la formule de développement $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$, il vient

$$\begin{aligned}\cos\big(\arccos(x)+\arccos(-x)\big) &= x\times(-x)-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(-x)^2}\\ &= -x^2-\big(1-x^2\big)=-1.\end{aligned}$$

Or $\arccos(x)+\arccos(-x)\in[0\,;2\pi]$ donc

$$\arccos(x)+\arccos(-x)=\pi$$

ce qui justifie la symétrie avancée.

Exercice 21 *

Simplifier :

(a) $\arctan(1/2)+\arctan(1/3)$ (b) $\arctan 2+\arctan 3+\arctan\big(2+\sqrt{3}\big)$.

Solution

méthode

Sous réserve d'existence, on calcule la tangente de l'angle proposé puis on détermine la congruence de π qui correspond à l'intervalle où celui-ci évolue.

(a) Posons $\theta=\arctan(1/2)+\arctan(1/3)$.

Puisque $1/2$ et $1/3$ appartiennent à $[0\,;1[$, leurs arcs tangentes appartiennent à $[0\,;\pi/4[$ et donc $\theta\in[0\,;\pi/2[$. Il est possible de calculer la tangente de θ.

$$\tan\theta=\frac{\tan\big(\arctan\frac{1}{2}\big)+\tan\big(\arctan\frac{1}{3}\big)}{1-\tan\big(\arctan\frac{1}{2}\big)\times\tan\big(\arctan\frac{1}{3}\big)}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1.$$

On en déduit $\theta\equiv\pi/4\ [\pi]$. Or on a vu $\theta\in[0\,;\pi/2[$ et donc $\theta=\pi/4$.

(b) Posons $\theta=\arctan 2+\arctan 3+\arctan(2+\sqrt{3})$.

Chacune des trois arcs tangentes appartient à l'intervalle $]\pi/4\,;\pi/2[$ et donc θ appartient à $]3\pi/4\,;3\pi/2[$. Il est alors possible de calculer $\tan\theta$. Par la formule établie dans le sujet 2 p. 50, on obtient

$$\tan\theta=\frac{2+3+(2+\sqrt{3})-2\times3\times(2+\sqrt{3})}{1-2\times3-3\times(2+\sqrt{3})-2\times(2+\sqrt{3})}=\frac{-5-5\sqrt{3}}{-15-5\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

On en déduit $\theta\equiv\pi/6\ [\pi]$. Or $\theta\in]3\pi/4\,;3\pi/2[$ donc $\theta=\pi/6+\pi=7\pi/6$.

Exercice 22 **

Simplifier les expressions qui suivent lorsque celles-ci ont un sens :

(a) $\arccos\big(2x^2-1\big)$ (b) $\arccos\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

Solution

(a) La fonction arccos est définie sur $[-1\,;1]$. L'expression considérée a un sens si, et seulement si, $-1 \leqslant 2x^2 - 1 \leqslant 1$ soit $x^2 \leqslant 1$. On étudie donc l'expression $\arccos(2x^2-1)$ pour $x \in [-1\,;1]$.

méthode

‖ On écrit $x = \cos t$ afin d'exploiter la formule $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$.

Soit $x \in [-1\,;1]$. Posons $t = \arccos x$ de sorte que $x = \cos t$ et $2x^2 - 1 = \cos(2t)$. On a alors

$$\arccos(2x^2-1) = \arccos\bigl(\cos(2t)\bigr).$$

méthode

‖ L'expression $\arccos(\cos\theta)$ se simplifie en θ seulement si $\theta \in [0\,;\pi]$.

On a $t = \arccos x \in [0\,;\pi]$ donc $2t \in [0\,;2\pi]$: on ne peut pas immédiatement simplifier $\arccos\bigl(\cos(2t)\bigr)$ en $2t$.

Si $x \geqslant 0$, $t \in [0\,;\pi/2]$ donc $2t \in [0\,;\pi]$ et l'on peut simplifier

$$\arccos(2x^2-1) = 2t = 2\arccos x.$$

Si $x \leqslant 0$, on se ramène au cas précédent en transformant x en $-x$ car l'expression étudiée apparaît comme une fonction paire de la variable[1].

En résumé, pour tout $x \in [-1\,;1]$

$$\arccos(2x^2-1) = 2\arccos|x|.$$

(b) **méthode**

‖ Après en avoir justifié la définition, on dérive l'expression en la variable x.

L'expression étudiée est bien définie et dérivable pour tout réel x car, d'une part $1 + x^2 > 0$, et d'autre part $|x| < \sqrt{1+x^2}$, ce qui assure que l'arc cosinus est calculé sur un réel strictement compris[2] entre -1 et 1.

On commence par calculer

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \underset{(uv)'=u'v+uv'}{=} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2x^2}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Par dérivation de fonctions composées, on obtient alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

1. On peut aussi rechercher l'angle θ de $[0\,;\pi]$ dont le cosinus est égal à celui de $2t$. Cet angle est $\theta = 2\pi - 2t$ et l'on obtient alors $\arccos(2x^2-1) = 2\pi - 2\arccos x$ ce qui est identique à ce qui est proposé.

2. Rappelons que la fonction arccos est définie en ± 1 sans y être dérivable.

Par intégration sur un intervalle, on en déduit l'existence d'une constante réelle C telle que

$$\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = C - \arctan x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En évaluant en $x = 0$, on obtient $C = \pi/2$ et l'on peut conclure que pour tout x réel

$$\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

Exercice 23 **

Étudier les fonctions suivantes afin de les figurer :

(a) $f : t \mapsto \arcsin(\sin t) + \arccos(\cos t)$ (b) $g : t \mapsto \arccos\sqrt{\dfrac{1+\cos t}{2}}$.

Solution

(a) **méthode**

> On réduit le domaine d'étude par périodicité.

Les fonctions sin et cos sont 2π-périodiques à valeurs dans $[-1\,;1]$. Par opérations, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique : on limite son étude à l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.

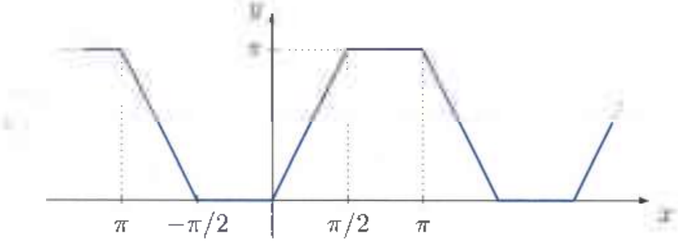
méthode

> On simplifie les expressions $\arcsin(\sin t)$ et $\arccos(\cos t)$ selon l'intervalle où figure la variable.

Sur $[0\,;\pi/2]$, $\arcsin(\sin t) = t$ car $t \in [-\pi/2\,;\pi/2]$ et $\arccos(\cos t) = t$ car $t \in [0\,;\pi]$. On a donc $f(t) = 2t$.

Sur $[\pi/2\,;\pi]$, $\arcsin(\sin t) = \arcsin\big(\sin(\pi - t)\big) = \pi - t$ car $\pi - t \in [-\pi/2\,;\pi/2]$ et $\arccos(\cos t) = t$ car $t \in [0\,;\pi]$. On a donc $f(t) = \pi$.

Par imparité de $t \mapsto \arcsin(\sin t)$ et par parité de $t \mapsto \arccos(\cos t)$, on généralise les calculs ci-dessus aux intervalles $[-\pi/2\,;0]$ et $[-\pi\,;0]$: sur $[-\pi/2\,;0]$, $f(t) = t + (-t) = 0$ et, sur $[-\pi\,;-\pi/2]$, $f(t) = -(t+\pi) + (-t) = -2t - \pi$.



Représentation de $t \mapsto \arcsin(\sin t) + \arccos(\cos t)$.

(b) **méthode**

‖ On simplifie l'expression de la fonction par la factorisation $1+\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2}$.

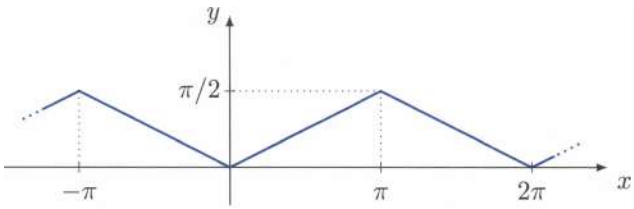
Pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{\frac{1+\cos t}{2}} = \sqrt{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \left|\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right|.$$

La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et paire : on limite son étude à l'intervalle $[0\,;\pi]$.

Pour $t \in [0\,;\pi]$, on a $\cos\left(\frac{t}{2}\right) \geqslant 0$ et $t/2 \in [0\,;\pi]$ donc

$$\arccos\left|\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right| = \arccos\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) = \frac{t}{2}.$$



Représentation de $t \mapsto \arccos\sqrt{\frac{1+\cos t}{2}}$.

Exercice 24 **

Résoudre les équations suivantes d'inconnue x réelle :

(a) $\arctan x + \arctan(3x) = \dfrac{\pi}{2}$

(b) $\arcsin x + \arcsin(3x) = \dfrac{\pi}{2}$

(c) $\arccos(2x) - \arccos x = \dfrac{\pi}{4}$.

Solution

(a) L'équation a du sens pour tout x réel.

La valeur $x = 1/\sqrt{3}$ est solution apparente[1] de l'équation car

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

méthode

‖ On vérifie par étude de fonction qu'il n'existe pas d'autres solutions.

1. On peut aussi résoudre l'équation en observant qu'une solution x est nécessaire strictement positive puis en exploitant la formule $\pi/2 - \arctan x = \arctan(1/x)$.

La fonction $x \mapsto \arctan x + \arctan(3x)$ est strictement croissante par somme de fonctions qui le sont : elle ne peut donc[1] prendre qu'une seule fois la valeur $\pi/2$.

En résumé, l'équation étudiée possède une unique solution : $1/\sqrt{3}$.

(b) L'équation a du sens pour tout x de l'intervalle $[-1/3\,;1/3]$.

méthode

> On simplifie l'équation en exploitant la formule[2]
> $$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

On peut exprimer l'équation étudiée

$$\arcsin x = \arccos(3x).$$

Ainsi, si x est solution, en calculant le sinus des deux membres, il vient

$$x = \sqrt{1 - 9x^2}.$$

On en déduit $x \geqslant 0$ et, après élévation au carré, $10x^2 = 1$ donc $x = 1/\sqrt{10}$.

Réciproquement[3], cette valeur est solution car la fonction définie par la différence des membres $x \mapsto \arcsin x + \arcsin(3x) - \pi/2$ est continue et prend les valeurs $-\pi/2 \leqslant 0$ en 0 et $\arcsin(1/3) \geqslant 0$ en $1/3$: cette fonction s'annule.

En résumé, l'équation étudiée possède une unique solution $x = 1/\sqrt{10}$.

(c) La fonction arccos n'étant définie que sur l'intervalle $[-1\,;1]$, l'équation étudiée a du sens pour $x \in [-1/2\,;1/2]$ seulement.

méthode

> On analyse l'équation en calculant le cosinus des deux membres.

Soit $x \in [-1/2\,;1/2]$ solution de l'équation. On a

$$\cos\big(\arccos(2x) - \arccos x\big) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

En développant par $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$$2x \times x + \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - 4x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

1. On dit d'une fonction qui ne prend jamais deux fois la même valeur qu'elle est injective : les fonctions strictement monotones sont injectives.

2. Voir sujet 19 p. 67.

3. La résolution de l'équation n'a pas été menée par équivalences : de « fausses solutions » peuvent être apparues.

On réorganise les membres afin de simplifier les racines par élévation au carré

$$\left(2x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = (1-x^2)(1-4x^2).$$

Après développement et simplifications, on parvient à l'équation

$$(10-4\sqrt{2})x^2 = 1$$

de racines $x = \pm 1/\sqrt{10-4\sqrt{2}}$.

Inversement [1], considérons la fonction $f : x \mapsto \arccos(2x) - \arccos(x)$. Celle-ci est continue sur $[-1/2\,;1/2]$ et dérivable sur $]-1/2\,;1/2[$ avec $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in\,]-1/2\,;1/2[$. On a donc le tableau de variation

x	$-1/2$		0		$1/2$
$f(x)$	$\pi/3$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\pi/3$

Il apparaît alors que l'équation étudiée admet une solution dans l'intervalle $[-1/2\,;0]$ et aucune dans $[0\,;1/2]$.

Finalement, l'équation proposée possède une unique solution :

$$-\frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{2}}}.$$

2.7.5 Fonctions hyperboliques

Exercice 25 *

(a) Vérifier que pour tout a réel $\operatorname{sh}(2a) = 2\operatorname{sh} a \operatorname{ch} a$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Exprimer à l'aide de la fonction sinus hyperbolique le produit

$$\prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

Solution

(a) En exploitant la formule $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, on écrit [2]

$$2\operatorname{sh} a \operatorname{ch} a = \frac{(e^a - e^{-a})(e^a + e^{-a})}{2} = \frac{e^{2a} - e^{-2a}}{2} = \operatorname{sh}(2a).$$

1. Plusieurs ruptures d'équivalence ont eu lieu lors de l'analyse des solutions : une étude réciproque s'impose afin d'éliminer les « fausses solutions ».

2. Plus généralement, les formules de trigonométrie circulaire peuvent se transposer aux fonctions hyperboliques en remplaçant cos par ch et sin par i sh.

(b) Si $x=0$, le produit vaut 1. Supposons désormais $x \neq 0$.

méthode

On simplifie le produit en exploitant

$$\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{2\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^k}\right)}.$$

Par l'écriture ci-dessus et des calculs[1] en tous points analogues à ceux vus dans le sujet 18 p. 66

$$\prod_{k=1}^{n}\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{\operatorname{sh}(x)}{2\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}{2\operatorname{sh}\left(\frac{x}{4}\right)}\cdots\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}{2\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}=\frac{\operatorname{sh}(x)}{2^n\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}.$$

Exercice 26 *

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $t\in\mathbb{R}$. Exprimer

$$C_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\operatorname{ch}(kt)\quad\text{et}\quad S_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\operatorname{sh}(kt)$$

en fonction de $\operatorname{ch}\frac{t}{2}$, $\operatorname{ch}\frac{nt}{2}$ et $\operatorname{sh}\frac{nt}{2}$.

Solution

méthode

On calcule C_n+S_n et C_n-S_n en exploitant

$$\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x=\mathrm{e}^x\quad\text{et}\quad\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x=\mathrm{e}^{-x}.$$

Par la formule du binôme de Newton

$$C_n+S_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{kt}=\left(1+\mathrm{e}^t\right)^n\quad\text{et}\quad C_n-S_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{-kt}=\left(1+\mathrm{e}^{-t}\right)^n.$$

En factorisant respectivement par $\mathrm{e}^{t/2}$ et $\mathrm{e}^{-t/2}$

$$C_n+S_n=\mathrm{e}^{nt/2}\left(2\operatorname{ch}\left(\frac{t}{2}\right)\right)^n\quad\text{et}\quad C_n-S_n=\mathrm{e}^{-nt/2}\left(2\operatorname{ch}\left(\frac{t}{2}\right)\right)^n.$$

On en déduit les valeurs de C et S

$$C_n=\frac{(C_n+S_n)+(C_n-S_n)}{2}=2^n\operatorname{ch}\left(\frac{nt}{2}\right)\operatorname{ch}^n\left(\frac{t}{2}\right)\quad\text{et}\quad S_n=2^n\operatorname{sh}\left(\frac{nt}{2}\right)\operatorname{ch}^n\left(\frac{t}{2}\right).$$

1. Où l'on remarque que les dénominateurs ne s'annulent pas.

Exercice 27 **

Pour x réel, on pose $t = \arctan(\operatorname{sh} x)$.

(a) Exprimer $\cos t$ et $\sin t$ en fonction de $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{th} x$.

(b) Vérifier

$$x = \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Solution

(a) On a $\tan t = \tan(\arctan(\operatorname{sh} x)) = \operatorname{sh} x$.

méthode

On sait exprimer $\cos^2 t$ en fonction de $\tan^2 t$.

On a

$$\cos^2 t = \frac{1}{1+\tan^2 t} = \frac{1}{1+\operatorname{sh}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \quad \text{car} \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

De plus, $t \in \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$ et donc $\cos t > 0$ puis

$$\cos t = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}} = \frac{1}{\operatorname{ch} x}.$$

Aussi, on peut écrire $\sin t = \tan t \cos t$ et donc

$$\sin t = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x.$$

(b) **méthode**

On calcule le sinus hyperbolique du logarithme proposé.

Posons $x' = \ln(\tan(t/2 + \pi/4))$. On a

$$\exp(x') = \tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \quad \text{et} \quad \exp(-x') = \frac{1}{\exp(x')} = \frac{\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Après réduction au même dénominateur

$$\operatorname{sh}(x') = \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

On simplifie ensuite l'expression sachant $\cos(t+\pi/2) = -\sin t$ et $\sin(t+\pi/2) = \cos t$.

Finalement, $\operatorname{sh} x' = \tan t = \operatorname{sh} x$. Par l'injectivité[1] de la fonction sinus hyperbolique, on peut conclure $x = x'$.

1. La fonction sh est strictement croissante donc injective : elle ne prend jamais deux fois la même valeur.

2.8 Exercices d'approfondissement

Exercice 28 * (Argument principal d'un nombre complexe non nul)
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ un complexe de partie réelle x et de partie imaginaire y. Vérifier

$$\arg(z) \equiv 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)\ [2\pi]\,.$$

Solution
Introduisons θ un argument de z choisi dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi[$ (ce qui est possible car z est un complexe qui n'appartient pas à la demi-droite des réels négatifs).
On a $z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ et l'on en déduit

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

On remarque

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{avec} \quad \frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[.$$

On en déduit

$$\frac{\theta}{2} = \arctan\left(\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)$$

ce qui conduit directement à la formule proposée [1].

Exercice 29 **
Soit $\theta \in \,]0\,;\pi[$. On étudie la fonction f de la variable réelle x déterminée par

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2\sin\theta(x-\cos\theta)}{x^2-2x\cos\theta+1}\right).$$

(a) Justifier que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Vérifier que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ excepté en deux points x_1 et x_2 que l'on précisera. Simplifier l'expression de $f'(x)$ pour $x \neq x_1$ et x_2.

(c) Justifier que la représentation de f présente un centre de symétrie.

(d) En admettant que les pentes des demi-tangentes à la courbe représentative de f en x_1 et x_2 sont déterminées par les limites de f' à droite et à gauche de ces points, donner l'allure de la courbe représentative de f.

1. Cette formule détermine un argument d'un complexe sur la quasi-intégralité de $\mathbb{C}^*$ contrairement à l'expression $\arctan(y/x)$ qui ne vaut que pour $x > 0$. Il n'existe pas de formule « continue » valant sur l'intégralité de $\mathbb{C}^*$: si l'on fait un tour autour de 0, on ajoute 2π à la détermination d'un argument !

Solution

(a) La fonction arcsin n'est définie que sur l'intervalle $[-1\,;1]$.

méthode

> On écrit le trinôme du dénominateur sous forme canonique
> $$x^2 - 2x\cos\theta + 1 = (x-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta.$$

Par l'écriture ci-dessus, le dénominateur ne s'annule pas car il est supérieur à $\sin^2\theta > 0$. De plus, par l'inégalité $2\,|ab| \leqslant a^2 + b^2$ avec $a = x - \cos\theta$ et $b = \sin\theta$, il vient

$$\left|\frac{2\sin\theta(x-\cos\theta)}{x^2-2x\cos\theta+1}\right| = \left|\frac{2\sin\theta(x-\cos\theta)}{(x-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\right| \leqslant 1.$$

La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$. Au surplus, elle est continue par opérations sur les fonctions continues.

(b) La fonction arcsin n'est dérivable que sur l'intervalle $]-1\,;1[$. Or

$$\begin{aligned}\frac{2\sin\theta(x-\cos\theta)}{x^2-2x\cos\theta+1} = 1 &\iff (x-\cos\theta)^2+\sin^2\theta = 2\sin\theta(x-\cos\theta)\\ &\iff \big((x-\cos\theta)-\sin\theta\big)^2 = 0\\ &\iff x = \cos\theta+\sin\theta.\end{aligned}$$

De même, l'égalité à -1 conduit à $x = \cos\theta - \sin\theta$.

On pose $x_1 = \cos\theta - \sin\theta$ et $x_2 = \cos\theta + \sin\theta$. En dehors de ces valeurs, la fonction f est dérivable par opérations sur des fonctions qui le sont. Par dérivation de fonctions composées, on obtient

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} \quad \text{avec} \quad u(x) = \frac{2\sin\theta(x-\cos\theta)}{x^2-2x\cos\theta+1}.$$

D'une part,

$$u'(x) = \frac{2\sin\theta\big(\sin^2\theta-(x-\cos\theta)^2\big)}{\big(x^2-2x\cos\theta+1\big)^2}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\sqrt{1-u^2(x)} &= \frac{\sqrt{\big((x-\cos\theta)^2+\sin^2\theta\big)^2-4\sin^2\theta(x-\cos\theta)^2}}{x^2-2x\cos\theta+1}\\ &= \frac{|x-\cos\theta-\sin\theta|\,|x-\cos\theta+\sin\theta|}{x^2-2x\cos\theta+1}.\end{aligned}$$

Après simplification

$$f'(x) = -\frac{2\sin\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}\,\text{signe}\,(x-x_1)\,\text{signe}\,(x-x_2)$$

où signe(.) est la fonction déterminant le signe d'un réel non nul.

(c) **méthode**

L'abscisse du centre de symétrie est déterminée par le milieu des points x_1 et x_2 de non dérivabilité.

Le milieu de x_1 et x_2 est $\frac{x_1+x_2}{2} = \cos\theta$. Calculons alors[1] $f(\cos\theta - x) + f(\cos\theta + x)$. Par imparité de la fonction arcsin, on obtient

$$f(\cos\theta - x) + f(\cos\theta + x) = \arcsin\left(\frac{-2x\sin\theta}{x^2+\sin^2\theta}\right) + \arcsin\left(\frac{2x\sin\theta}{x^2+\sin^2\theta}\right) = 0.$$

La courbe représentative de f est donc symétrique par rapport au point de coordonnées $(\cos\theta, 0)$.

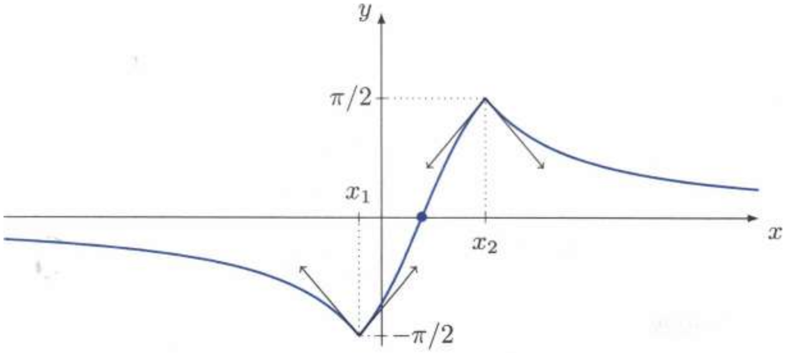
(d) Les variations de f sont figurées ci-dessous

x	$-\infty$		$\cos\theta - \sin\theta$		$\cos\theta + \sin\theta$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\pi/2$	$\nearrow$	$\pi/2$	$\searrow$	0

Les valeurs de f en $\cos\theta \pm \sin\theta$ sont $\pm\pi/2$ et les limites à droite et à gauche de f' en $\cos\theta + \sin\theta$ sont

$$\lim_{x\to(\cos\theta+\sin\theta)^+} f'(x) = -\frac{1}{\sin\theta} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to(\cos\theta+\sin\theta)^-} f'(x) = \frac{1}{\sin\theta}.$$

En particulier, ce sont des limites finies et opposées : il figure un *point anguleux* en l'abscisse $x_2 = \cos\theta + \sin\theta$. Par symétrie, on a une propriété analogue en $x_1 = \cos\theta - \sin\theta$.



Représentation de la fonction étudiée avec $\theta \simeq 57°$.

1. On pourra se référer à la méthode présentée p. 67.

Exercice 30 **

Soit $x_1, \dots, x_{13}$ des réels. Montrer qu'il existe i et j distincts dans $[\![1\,;13]\!]$ tels que

$$0 \leqslant \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} \leqslant 2 - \sqrt{3}.$$

Solution

méthode

L'expression encadrée est similaire au second membre du développement

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

Pour tout $i \in [\![1\,;13]\!]$, on introduit $\alpha_i = \arctan x_i$. Les réels $\alpha_1, \dots, \alpha_{13}$ évoluent chacun dans l'intervalle $]-\pi/2\,;\pi/2[$. En découpant cet intervalle en 12 intervalles contigus de longueur $\pi/12$, on peut affirmer qu'au moins deux éléments parmi les $\alpha_1, \dots, \alpha_{13}$ appartiennent à un même intervalle [1]. Ainsi, il existe $i \neq j$ vérifiant

$$0 \leqslant \alpha_i - \alpha_j \leqslant \frac{\pi}{12}.$$

Par croissance de la fonction tangente, il vient

$$0 \leqslant \tan(\alpha_i - \alpha_j) = \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} \leqslant \tan\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

Il reste à vérifier que la tangente de $\pi/12$ correspond à la valeur $2 - \sqrt{3}$.

méthode

On exploite la formule

$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} \quad \text{avec} \quad a = \frac{\pi}{12}.$$

Puisque la tangente de $\pi/6$ est égale à $1/\sqrt{3}$, la tangente de $\pi/12$ est racine de l'équation

$$x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0.$$

Les solutions de cette équation sont $-2 - \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$. Or la tangente de $\pi/12$ est un réel positif et l'on obtient la conclusion voulue.

Exercice 31 * (Cosinus rationnel d'un multiple rationnel de π)**

Soit n un naturel non nul.

(a) Montrer qu'il existe des entiers $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ tels que, pour tout t réel,

$$2\cos(nt) = 2^0 a_0 + 2^1 a_1 \cos t + \cdots + 2^{n-1} a_{n-1} \cos^{n-1} t + 2^n \cos^n t.$$

(b) En déduire les rationnels r tels que $\cos(r\pi) \in \mathbb{Q}$.

1. C'est le principe des tiroirs déjà évoqué dans le sujet 30 p. 37.

Solution

(a) **méthode**

> On raisonne par récurrence double en exploitant la formule
> $$\cos\big((n+1)t\big)+\cos\big((n-1)t\big)=2\cos(t)\cos(nt).$$

L'écriture voulue est immédiate lorsque $n=1$ ou lorsque $n=2$. Pour tout $t\in\mathbb{R}$

$$2\cos t = 2^0\times 0+2^1\cos t \quad \text{et} \quad 2\cos(2t)=-2^0\times 2+2^1\times 0\times\cos t+2^2\cos^2 t.$$

Supposons la propriété vraie aux rangs n et $n-1$ (avec $n\geqslant 2$). On peut donc écrire

$$2\cos\big((n-1)t\big)=2^0a_0'+2a_1'\cos t+\cdots+2^{n-2}a_{n-2}'\cos^{n-2}t+2^{n-1}\cos^{n-1}t$$
$$2\cos(nt)=2^0a_0''+2a_1''\cos t+\cdots+2^{n-1}a_{n-1}''\cos^{n-1}t+2^n\cos^n t$$

avec des coefficients $a_0',\dots,a_{n-2}'$ et $a_0'',\dots,a_{n-1}''$ entiers.

On a alors

$$\begin{aligned}2\cos\big((n+1)t\big)&=4\cos(t)\cos(nt)-2\cos\big((n-1)t\big)\\&=2^0a_0+2^1a_1\cos t+\cdots+2^{n-1}a_{n-1}\cos^{n-1}t+2^{n+1}\cos^{n+1}t\end{aligned}$$

avec les entiers $a_0=-a_0'$, $a_1=2a_0''-a_1'$, etc.

La récurrence est établie.

(b) Soit $r=m/n$ un nombre rationnel avec $m\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

On suppose que $\cos(r\pi)$ est aussi un nombre rationnel, que l'on écrit sous forme irréductible p/q avec $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}^*$, p et q premiers entre eux.

La relation précédente appliquée à $t=r\pi$ donne l'égalité

$$\underbrace{2\cos(m\pi)}_{=2(-1)^m}=a_0+2a_1\frac{p}{q}+\cdots+2^{n-1}a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}+2^n\frac{p^n}{q^n}.$$

méthode

> Si $x=p/q$ est racine d'une équation $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ à coefficients entiers, on peut montrer[1] que p divise a_0 et q divise a_n.

En réduisant au même dénominateur, il vient

$$q^n\big(a_0-2(-1)^m\big)+2a_1pq^{n-1}+\cdots+2^{n-1}a_{n-1}p^{n-1}q+2^np^n=0$$

et donc

$$q^n\big(a_0-2(-1)^m\big)+2a_1pq^{n-1}+\cdots+2^{n-1}a_{n-1}p^{n-1}q=-2^np^n. \tag{$*$}$$

1. Voir sujet 17 du chapitre 5 de l'ouvrage *Exercices d'algèbre et de probabilités MPSI*.

L'entier q divise tous les termes du premier membre de l'équation $(*)$, il divise donc aussi le second membre. Or q est premier avec p. Par application du théorème de Gauss [1], on peut affirmer que q divise 2^n.

Si q n'est pas égal à 1, c'est un entier pair ce qui permet de l'exprimer $q = 2q'$ avec q' dans $\mathbb{N}^*$. En injectant cette écriture dans $(*)$, on obtient

$$2^n q'^n\big(a_0 - 2(-1)^m\big) + 2^n a_1 p q'^{n-1} + \cdots + 2^n a_{n-1} p^{n-1} q' = -2^n p^n.$$

On peut simplifier par 2^n pour obtenir

$$q'^n\big(a_0 - 2(-1)^m\big) + a_1 p q'^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p^{n-1} q' = -p^n. \qquad (**)$$

L'entier q' divise tous les termes du premier membre de cette équation, il divise donc aussi le second membre. Or q' est premier avec p car q' est un facteur de q. On en déduit que q' vaut 1.

Finalement, on peut affirmer $q = 1$ ou $q = 2$ ce qui signifie

$$\cos(r\pi) = \underbrace{-1, 0, 1}_{\text{lorsque } q=1} \quad \text{ou} \quad \underbrace{-1/2, 1/2}_{\text{lorsque } q=2}.$$

Les angles correspondants sont les

$$r\pi = \frac{k\pi}{3} \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1. Si a, b, c sont trois entiers tels que a divise bc et a est premier avec b alors a divise c.

CHAPITRE 3

Les nombres complexes

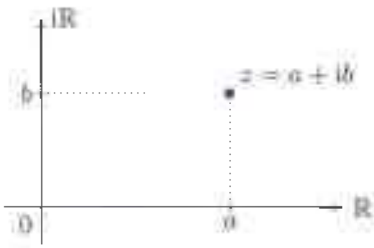
3.1 Généralités sur les nombres complexes

3.1.1 Le corps des complexes

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est une extension de l'ensemble $\mathbb{R}$. Il est muni de deux opérations « + » et « × » prolongeant celles existant sur $\mathbb{R}$ et conservant leurs propriétés [1].
L'ensemble $\mathbb{C}$ ne peut pas être muni d'une relation d'ordre « intéressante [2] » mais en revanche $\mathbb{C}$ possède un élément, noté i, vérifiant $i^2 = -1$. De plus, tout nombre complexe z s'écrit de façon unique $z = a + ib$ avec a et b réels.

Définition

> L'écriture $z = a + ib$ est appelée *forme algébrique* du complexe z. Les réels a et b de cette écriture définissent respectivement la *partie réelle* et la *partie imaginaire* du complexe z.



On note
$$a = \operatorname{Re}(z) \quad \text{et} \quad b = \operatorname{Im}(z).$$

3.1.2 Le plan complexe

Dans la suite, on note $\mathcal{P}$ le plan géométrique rapporté à un repère orthonormé direct.

1. On dit que l'ensemble $\mathbb{C}$ muni des opérations + et × est un corps.
2. Intéressante dans le sens où celle-ci serait compatible avec les opérations sur $\mathbb{C}$.

Tout nombre complexe z d'écriture algébrique $z = a + ib$ peut être identifié avec le point M de coordonnées (a, b) du plan $\mathcal{P}$.

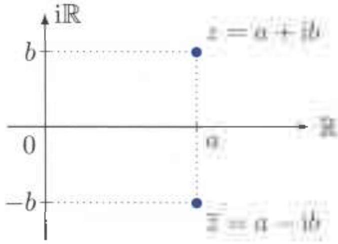
Définition

On dit alors que le complexe z est l'*affixe* du point M.

Par cette notion d'affixe, il est possible de figurer $\mathbb{C}$ comme un plan et de parler du *plan complexe*.

On définit aussi l'*affixe* d'un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x, y) comme étant le nombre complexe $z = x + iy$.

3.1.3 Conjugaison



Définition

On appelle *conjugué* d'un complexe z d'écriture algébrique $z = a + ib$ le complexe $\overline{z} \stackrel{\text{def}}{=} a - ib$.

Si M est le point d'affixe z du plan géométrique, le point M' d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Théorème 1

Pour tous les nombres complexes z et z', on a

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad \text{et} \quad \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}.$$

On peut exprimer la partie réelle et la partie imaginaire d'un complexe z en fonction de z et $\overline{z}$:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Un nombre complexe z est réel si, et seulement si, $\overline{z} = z$. Il est imaginaire pur si, et seulement si, $\overline{z} = -z$.

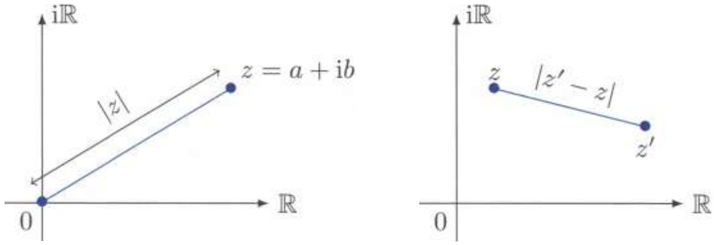
3.1.4 Module

Définition

On appelle *module* d'un complexe z d'écriture algébrique $z = a + ib$ le réel

$$|z| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Si M est le point d'affixe z du plan géométrique, le module de z correspond à la longueur OM.



Module d'un nombre complexe et distance séparant deux nombres complexes.

Le module permet de mesurer la distance d'un complexe au nombre 0. Plus généralement, $|z' - z|$ définit la distance séparant deux nombres complexes.

Théorème 2
Pour tous z et z' complexes

$$|z|^2 = z\bar{z}, \quad |zz'| = |z|\,|z'| \quad \text{et} \quad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \text{ si } z \neq 0.$$

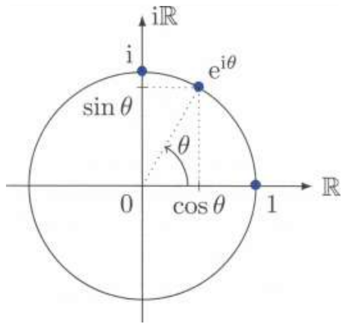
On en déduit le module d'un quotient ou d'une puissance entière.

Théorème 3 (Inégalité triangulaire)
Pour tous z et z' complexes

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|.$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si, les points d'affixes z et z' figurent sur une même demi-droite[1] issue du point O.

3.1.5 Exponentielle imaginaire



Définition

> On appelle *exponentielle imaginaire* d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ le complexe
> $$e^{i\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \cos\theta + i\sin\theta.$$

Le point d'affixe $e^{i\theta}$ du plan géométrique est le point du cercle trigonométrique repéré par l'angle θ mesuré à partir de la demi-droite (Ox) (c'est-à-dire à partir du premier vecteur du repère orthonormé direct introduit).

1. S'ils sont non nuls, cela revient à dire que z et z' ont un même argument.

Théorème 4
Pour tous θ et θ' réels
$$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}.$$

On en déduit $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En particulier,
$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}.$$

3.1.6 Les complexes de module 1

Définition
On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1
$$\mathbb{U} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\right\}.$$

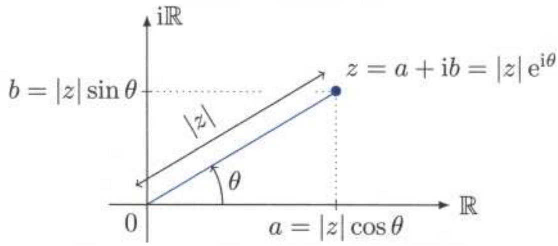
L'ensemble des points d'affixe dans $\mathbb{U}$ correspond exactement au cercle trigonométrique du plan. En particulier, les exponentielles imaginaires sont des complexes de module 1 et ce sont les seuls en vertu du théorème descriptif qui suit :

Théorème 5
Pour tout $z \in \mathbb{U}$, il existe un réel θ, unique à 2π près, tel que $z = e^{i\theta}$.

3.1.7 Arguments d'un nombre complexe non nul

Théorème 6
Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe un réel θ unique à 2π près tel que $z = |z|\,e^{i\theta}$.
Cette écriture se nomme *la forme trigonométrique*[1] du complexe z.

Définition
Un *argument* d'un nombre complexe z non nul est un réel θ permettant d'écrire la *forme trigonométrique* $z = |z|\,e^{i\theta}$. On note
$$\arg(z) \equiv \theta \ [2\pi].$$



Un argument n'étant déterminé qu'à un multiple de 2π près, on opère sur les arguments par calculs en congruence modulo 2π.

Si M est le point d'affixe z du plan géométrique, un argument de z mesure l'angle entre le premier vecteur du repère orthonormé direct introduit et le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

1. Ou encore *forme exponentielle*.

Théorème 7
Pour tous z et z' complexes non nuls

$$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi] \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi].$$

On en déduit le calcul d'un argument d'un quotient ou encore d'une puissance entière.

3.1.8 L'exponentielle complexe

Définition

On appelle *exponentielle* d'un complexe z d'écriture algébrique $z = a + ib$ le nombre

$$\exp z \stackrel{\text{déf}}{=} e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b).$$

Puisque cette exponentielle prolonge l'exponentielle réelle et l'exponentielle imaginaire, on écrit souvent e^z au lieu de $\exp z$.

Théorème 8
Pour tous z et z' complexes

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'} \quad \text{et} \quad \left(e^z = e^{z'} \iff z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}\right).$$

On peut aussi observer $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.

3.2 Équations algébriques

3.2.1 Racines carrées d'un complexe

Définition

On appelle *racine carrée* d'un complexe Z tout complexe z dont le carré est égal à Z.

À moins d'être nul, un complexe Z admet exactement deux racines carrées et celles-ci sont opposées. Comme il n'est pas aisé de privilégier l'une par rapport à l'autre, on évite d'utiliser la notation $\sqrt{Z}$ pour désigner[1] *une* des deux racines carrées de Z.

3.2.2 Résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$

Soit a, b, c trois nombres complexes avec $a \neq 0$. Pour résoudre l'équation

$$(E) : az^2 + bz + c = 0$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, on introduit le *discriminant* $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Sauf à signifier précisément la racine privilégiée, par exemple celle possédant un argument dans $[0 ; \pi[$.

Théorème 9
Si δ est une racine carrée de Δ alors l'équation (E) possède deux solutions[1]

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}.$$

La somme et le produit de ces solutions sont remarquables :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

À l'inverse, si S et P sont deux nombres complexes, les solutions d'un système somme-produit

$$\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases} \quad \text{d'inconnue } (x,y) \in \mathbb{C}^2$$

sont les couples constitués des deux racines de l'équation

$$z^2 - Sz + P = 0.$$

3.2.3 Résolution de l'équation $z^n = 1$

Soit n un naturel non nul.

Définition

On appelle *racine n-ième de l'unité* tout nombre complexe z solution de l'équation

$$z^n = 1.$$

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

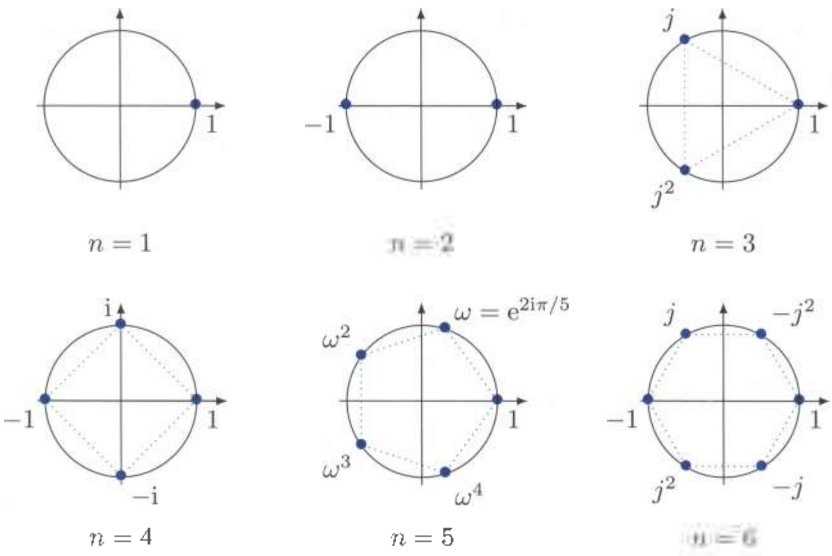
Le nombre 1 est une racine n-ième de l'unité.
Le nombre -1 l'est uniquement quand n est pair.
Le nombre i est une racine n-ième de l'unique lorsque n est un multiple de 4.
Le nombre $j = e^{2i\pi/3}$ vérifie $j^3 = 1$, c'est une *racine troisième* de l'unité.

Théorème 10
Il existe exactement n racines n-ièmes de l'unité qui sont les[2]

$$\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad \text{avec} \quad k \in [\![0\,;n-1]\!].$$

Les racines n-ièmes de l'unité sont les n sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

1. Ces deux solutions sont confondues lorsque $\Delta = 0$.
2. On peut aussi introduire $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$ pour $k \in \mathbb{Z}$ auquel cas on remarque $\omega_k = \omega_\ell$ si, et seulement si, $k \equiv \ell\ [n]$.



Racines n-ièmes de l'unité pour les premières valeurs de n.

3.3 Fonctions complexes d'une variable réelle

3.3.1 Définition

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ (généralement un intervalle).

Définition

Une *fonction complexe* f définie sur X est une application au départ de X et à valeurs dans $\mathbb{C}$:

$$f : \begin{cases} X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ \quad t \mapsto f(t). \end{cases}$$

Comme pour les fonctions réelles, on peut opérer sur les fonctions complexes par somme, produit, passage à l'inverse et quotient.

Les notions de fonctions paires, impaires ou périodiques se transposent aux fonctions complexes.

En revanche, l'absence de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ empêche la définition des notions de fonction monotone et de fonction minorée ou majorée. À l'aide du module, on peut cependant définir la notion de fonction bornée :

Définition

Une fonction complexe f définie sur X est dite bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(t)| \leqslant M$ pour toute valeur de t dans X.

3.3.2 Parties réelles et imaginaires

Définition

Si f est une fonction complexe définie sur une partie X de $\mathbb{R}$, on introduit sa *partie réelle* $\mathrm{Re}(f)$ et sa *partie imaginaire* $\mathrm{Im}(f)$ qui sont les fonctions réelles définies sur X par

$$\big(\mathrm{Re}(f)\big)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Re}\big(f(t)\big) \quad \text{et} \quad \big(\mathrm{Im}(f)\big)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Im}\big(f(t)\big).$$

L'étude d'une fonction complexe peut être ramenée à celle de sa partie réelle et de sa partie imaginaire. Par exemple, une fonction complexe est bornée si, et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.

3.3.3 Continuité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Définition

Une fonction complexe définie sur I est dite *continue* lorsque sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.

Les opérations sur les fonctions continues déterminent des fonctions continues.
Si $t \mapsto f(t)$ est une fonction complexe continue, les fonctions composées $t \mapsto \overline{f(t)}$, $t \mapsto |f(t)|$ et $t \mapsto e^{f(t)}$ sont aussi continues.

3.3.4 Dérivation

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Définition

Une fonction complexe f définie sur I est dite *dérivable* lorsque sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont. On peut alors introduire sa fonction dérivée définie sur I par

$$f'(t) \stackrel{\text{def}}{=} \big(\mathrm{Re}(f)\big)'(t) + \mathrm{i}\big(\mathrm{Im}(f)\big)'(t) \quad \text{pour tout } t \in I.$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$ est dérivable et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathrm{e}^{\lambda t}\big) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Les opérations sur les fonctions dérivables déterminent des fonctions dérivables et l'on retrouve dans le cadre complexe les formules de dérivation

$$(u+v)' = u' + v', \quad (uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}.$$

On peut aussi dériver une composition avec l'exponentielle complexe

$$\big(\mathrm{e}^u\big)' = u'\mathrm{e}^u.$$

Enfin, on peut au besoin enchaîner les dérivations et parler de dérivée seconde, etc.

3.4 Exercices d'apprentissage

3.4.1 Module, argument, conjugaison

Exercice 1

Déterminer module et argument de $z = \dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$.

Solution

Il serait maladroit d'exprimer z sous forme algébrique en multipliant par la quantité conjuguée : il convient plutôt d'étudier séparément numérateur et dénominateur.

méthode

> Le module d'un quotient est le quotient des modules et un argument la différence des arguments.

Étudions $z_1 = \sqrt{3}+\mathrm{i}$. On a $|z_1|^2 = 3+1 = 4$ et donc $|z_1| = 2$.

méthode

> Pour reconnaître un argument d'un complexe z, on l'exprime sous forme trigonométrique en factorisant son module.

On écrit

$$z_1 = |z_1|\Big(\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos(\frac{\pi}{6})} + \mathrm{i}\underbrace{\frac{1}{2}}_{\sin(\frac{\pi}{6})}\Big) = |z_1|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}.$$

Ainsi, $\pi/6$ est un argument [1] de z_1.

On étudie de la même façon $z_2 = 1-\mathrm{i}$. On a $|z_2| = \sqrt{2}$ et

$$z_2 = |z_2|\Big(\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\cos(\frac{\pi}{4})} - \mathrm{i}\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\sin(\frac{\pi}{4})}\Big) = |z_2|\,\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}} = |z_2|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}.$$

Ainsi, $-\pi/4$ est un argument de z_2.

Enfin,

$$|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \arg(z) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2) \equiv \frac{5\pi}{12}\ [2\pi].$$

Exercice 2

Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{U} \setminus \{\mathrm{i}\}$, le complexe $Z = \dfrac{z+\mathrm{i}}{\mathrm{i}z+1}$ est réel.

1. On dit *un* argument et non *l*'argument car il n'y a pas unicité. Un argument est seulement déterminé à une congruence de 2π près.

Solution

On vérifie que le complexe Z est bien défini en constatant

$$\mathrm{i}z + 1 = 0 \iff z = \mathrm{i}.$$

méthode

Un complexe est réel si, et seulement si, il est égal à son conjugué[1].

Puisque z est un complexe de module 1 on a $z\bar{z} = 1$ et donc $\bar{z} = 1/z$. Par conséquent,

$$\overline{Z} = \overline{\left(\frac{z+\mathrm{i}}{\mathrm{i}z+1}\right)} = \frac{\bar{z}-\mathrm{i}}{-\mathrm{i}\bar{z}+1} = \frac{1/z-\mathrm{i}}{-\mathrm{i}/z+1}.$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $\mathrm{i}z$

$$\overline{Z} = \frac{\mathrm{i}+z}{1+\mathrm{i}z} = \frac{z+\mathrm{i}}{\mathrm{i}z+1} = Z.$$

Le nombre Z est donc réel.

Exercice 3

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer module et argument du complexe $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 1$.

Solution

méthode

On fait apparaître la forme trigonométrique du complexe par *factorisation de l'exponentielle imaginaire d'angle moitié.*

En factorisant z par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$, on peut écrire un cosinus

$$z = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}.$$

Pour identifier module et argument, il reste à discuter selon le signe du cosinus.

Si $\cos(\theta/2) > 0$, l'écriture ci-dessus est la forme trigonométrique de z et donc

$$|z| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad \arg(z) = \frac{\theta}{2}\ [2\pi].$$

Si $\cos(\theta/2) < 0$, on opère un passage à l'opposé pour identifier module et argument

$$|z| = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad \arg(z) = \frac{\theta}{2} + \pi\ [2\pi].$$

Enfin, si $\cos(\theta/2) = 0$, le module de z est nul et l'on ne définit pas d'arguments pour le complexe nul.

1. Aussi, un complexe est imaginaire pur lorsque son conjugué lui est opposé.

3.4.2 Application à la trigonométrie

Exercice 4

Soit $a \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3a)$ en fonction de $\cos a$ et $\sin(3a)$ en fonction de $\sin a$.

Solution

On peut résoudre ce sujet en exploitant les formules d'addition développant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ mais il est plus efficace d'utiliser la formule de Moivre.

méthode

> Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{R}$, la formule de Moivre donne
> $$(\cos a + \mathrm{i}\sin a)^3 = \cos(3a) + \mathrm{i}\sin(3a).$$

En développant $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$, on écrit

$$(\cos a + \mathrm{i}\sin a)^3 = \cos^3 a + 3\mathrm{i}\cos^2 a\sin a - 3\cos a\sin^2 a - \mathrm{i}\sin^3 a.$$

En identifiant la partie réelle et la partie imaginaire

$$\cos(3a) = \cos^3 a - 3\cos a\,\underbrace{\sin^2 a}_{=1-\cos^2 a} = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

$$\sin(3a) = 3\underbrace{\cos^2 a}_{=1-\sin^2 a}\sin a - \sin^3 a = 3\sin a - 4\sin^3 a.$$

Exercice 5

Linéariser [1] :

(a) $\cos x \sin^2 x$ (b) $\cos^2 x$ (c) $\cos a \cos b$.

Solution

(a) **méthode**

> Pour linéariser une ligne trigonométrique comportant des produits de sinus et cosinus, on exprime ceux-ci par les formules d'Euler, on développe puis on recombine les exponentielles imaginaires en sinus et/ou cosinus.

Par les formules d'Euler

$$\cos x \sin^2 x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^2.$$

On développe

$$\cos x \sin^2 x = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{4}\right) = -\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\right).$$

1. *Linéariser* une expression trigonométrique consiste en la transformation de celle-ci en une combinaison de cos et de sin où il ne figure plus de produits.

Enfin, on recombine les exponentielles imaginaires, ici en cosinus,

$$\cos x \sin^2 x = \frac{1}{4}\big(\cos x - \cos(3x)\big).$$

(b) **méthode**

> On peut linéariser immédiatement $\cos^2 x$ en exploitant la formule
> $$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1.$$

L'égalité ci-dessus permet d'exprimer $\cos^2 x$ en fonction [1] de $\cos(2x)$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}.$$

(c) **méthode**

> On peut linéariser un produit de deux cosinus [2] à l'aide des formules de développement de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$.

On sait

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

On en déduit la linéarisation

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big).$$

Exercice 6

Soit $\theta \in]0\,;2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$. Exprimer

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

Solution

méthode

> C_n et S_n sont la partie réelle et la partie imaginaire de $C_n + \mathrm{i}S_n$ que l'on sait calculer par sommation géométrique.

Sachant $\cos(k\theta) + \mathrm{i}\sin(k\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}$, on a en combinant les deux sommes

$$C_n + \mathrm{i}S_n = \sum_{k=0}^{n}\big(\cos(k\theta) + \mathrm{i}\sin(k\theta)\big) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} = \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^k.$$

1. On peut aussi linéariser $\sin^2 x$ à l'aide de la formule $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$.

2. De la même façon, on peut linéariser un produit de deux sinus. À l'aide des développements de $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$, on peut aussi linéariser un produit d'un sinus par un cosinus.

Il s'agit alors de calculer une somme géométrique de raison $q = e^{i\theta} \neq 1$

$$C_n + iS_n = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}.$$

méthode

Pour identifier la partie réelle et la partie imaginaire, on opère une factorisation de l'exponentielle imaginaire d'angle moitié au numérateur et au dénominateur.

$$C_n + iS_n = \frac{e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2}} \cdot \frac{e^{i(n+1)\theta/2} - e^{-i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}}.$$

Sachant $e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i\sin\alpha$, on peut reconnaître des sinus et obtenir après simplification

$$C_n + iS_n = e^{in\theta/2}\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

En identifiant la partie réelle et la partie imaginaire, on conclut

$$C_n = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{et} \quad S_n = \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

3.4.3 Racines de l'unité

Exercice 7

Calculer la somme et le produit des racines n-ièmes de l'unité.

Solution

méthode

Les racines n-ièmes de l'unité sont connues : ce sont les $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$ pour k parcourant[1] les entiers allant de 0 à $n-1$.

La somme des racines n-ièmes de l'unité s'exprime

$$\sum_{z\in\mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k = \sum_{k=0}^{n}\left(e^{2i\pi/n}\right)^k.$$

On reconnaît une somme géométrique de raison $\omega = e^{2i\pi/n}$. On poursuit le calcul en étudiant si celle-ci est ou non égale à 1.

1. Ou, au choix les entiers allant de 1 à n. Plus généralement, on obtient l'intégralité des racines n-ièmes de l'unité en faisant parcourir à k un ensemble de n entiers consécutifs.

Cas : $n \neq 1$. La raison ω est différente de 1 et l'on obtient [1]

$$\sum_{z\in\mathbb{U}_n} z = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = 0 \quad \text{car} \quad \omega^n = 1.$$

Cas : $n = 1$. Le calcul de la somme est immédiat puisque $\mathbb{U}_1 = \{1\}$.

Le produit des racines n-ièmes de l'unité s'exprime en exploitant qu'un produit d'exponentielles est l'exponentielle de la somme

$$\prod_{z\in\mathbb{U}_n} z = \prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n} = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}\right) = \exp\left(\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k\right).$$

Sachant

$$\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{2\pi}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2} = \pi(n-1)$$

on achève le calcul

$$\prod_{z\in\mathbb{U}_n} z = \exp\big(\mathrm{i}(n-1)\pi\big) = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\right)^{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

3.4.4 Équations algébriques

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

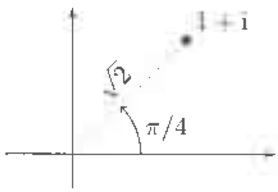
$$z^3 = 4\sqrt{2}(1+\mathrm{i}).$$

Solution

méthode

> On résout une équation $z^n = Z$ (avec $Z \neq 0$) en exprimant Z sous forme trigonométrique afin de déterminer une solution particulière z_0. On ramène ensuite l'équation étudiée à une équation du type $z^n = 1$.

Ici, $n = 3$ et $Z = 4\sqrt{2}(1+\mathrm{i})$. On peut écrire



$$1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$$

et donc $Z = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$.

En considérant la racine cubique du module et le tiers d'un argument, on forme une solution particulière $z_0 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12}$.

1. En particulier, la somme des racines troisièmes de l'unité est nulle ce qui s'exprime $1 + j + j^2 = 0$ avec $j = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$.

L'équation étudiée s'écrit alors $z^3 = z_0^3$ (avec $z_0 \neq 0$), elle équivaut à l'équation

$$\left(\frac{z}{z_0}\right)^3 = 1.$$

Les solutions de l'équation $z^3 = 1$ étant les racines troisièmes de l'unité 1, j et j^2 (avec j le complexe $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$), on peut conclure que les solutions de l'équation posée sont

$$z_0 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12}, \quad z_1 = z_0 j = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4} \quad \text{et} \quad z_2 = z_0 j^2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}17\pi/12}.$$

Exercice 9
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$.

Solution
C'est une équation du second degré de discriminant $\Delta = 4\cos^2\theta - 1 = -4\sin^2\theta$.

méthode
$\delta = 2\mathrm{i}\sin\theta$ détermine une racine carrée complexe de Δ.

Les racines de cette équation (éventuellement confondues) sont (Th. 9 p. 88)

$$z_1 = \frac{2\cos\theta + 2\mathrm{i}\sin\theta}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}.$$

Exercice 10
Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations :
(a) $z^2 - (5+3\mathrm{i})z + 2 + 9\mathrm{i} = 0$ (b) $z^4 + (3-6\mathrm{i})z^2 - 8 - 6\mathrm{i} = 0$.

Solution

(a) C'est une équation du second degré de discriminant $\Delta = 8 - 6\mathrm{i}$. Il s'agit ensuite de déterminer une racine carrée δ de Δ.

méthode
Pour déterminer une racine carrée z d'un complexe Z exprimé sous forme algébrique $a+\mathrm{i}b$, on recherche z sous forme algébrique $z = x+\mathrm{i}y$. On exprime un système en les inconnues x et y en identifiant les parties réelles et imaginaires dans l'équation $z^2 = Z$. En y adjoignant l'équation $|z|^2 = |Z|$, ce système devient facile à résoudre.

En écrivant $\delta = x + \mathrm{i}y$ (avec x et y réels) l'équation $\delta^2 = \Delta$ détermine le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = -6. \end{cases}$$

On y adjoint une troisième équation $|\delta|^2 = |\Delta|$, c'est-à-dire $x^2 + y^2 = 10$. La somme de la première et de la troisième équation donne $x^2 = 9$ donc $x = \pm 3$. La différence de ces équations donne $y^2 = 1$ donc $y = \pm 1$. Enfin, la deuxième équation du système détermine la liaison entre les choix des signes de x et y. Finalement, $\delta = 3 - \mathrm{i}$ est racine carrée de Δ.

On peut alors achever de résoudre l'équation initiale. Ses solutions sont

$$\frac{-b-\delta}{2a} = 1 + 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad \frac{-b+\delta}{2a} = 4 + \mathrm{i}.$$

(b) Il s'agit d'une équation du second degré $aZ^2 + bZ + c = 0$ en l'inconnue $Z = z^2$. On introduit le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 5 - 12\mathrm{i}$. Comme au-dessus, on détermine une racine carrée δ de Δ : $\delta = 3 - 2\mathrm{i}$. On peut alors exprimer les solutions de l'équation en l'inconnue Z :

$$\frac{-b+\delta}{2a} = 2\mathrm{i} \quad \frac{-b-\delta}{2a} = -3 + 4\mathrm{i}.$$

Par de nouvelles extractions de racines carrées, on peut former la liste des solutions de l'équation étudiée

$$1 + \mathrm{i}, \quad -(1+\mathrm{i}), \quad 1 + 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad -(1+2\mathrm{i}).$$

Exercice 11

Résoudre dans le champ complexe le système

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 3. \end{cases}$$

Solution

Par réduction au même dénominateur le système étudié équivaut à un système somme-produit (d'inconnues $x, y \in \mathbb{C}^*$)

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \dfrac{x+y}{xy} = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

méthode

> Les solutions d'un système somme-produit de somme S et de produit P sont les couples formés des deux racines de l'équation $z^2 - Sz + P = 0$.

On introduit l'équation du second degré

$$z^2 - z + \frac{1}{3} = 0$$

de discriminant $\Delta = -1/3$ dont une racine est $\delta = \mathrm{i}\sqrt{3}/3$. Les solutions de l'équation du second degré sont

$$\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{6} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Les solutions (x, y) du système étudié sont alors les couples formés des deux valeurs précédentes.

3.5 Exercices d'entraînement

3.5.1 Les nombres complexes

Exercice 12 *
Déterminer le module et un argument de

$$z = 1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}(1 - \sqrt{3}).$$

Solution
Une factorisation par le module de z ne suffit pas à révéler un argument de z.

méthode
‖ On calcule[1] le module et un argument de z^2.

Par élévation au carré

$$z^2 = 4\sqrt{3} - 4\mathrm{i} = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = 8\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}.$$

On en déduit

$$z = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/12} \quad \text{ou} \quad z = -2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/12}.$$

Sachant $\mathrm{Re}(z) > 0$, c'est la première expression qui convient et donc

$$|z| = 2\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \arg(z) = -\frac{\pi}{12} \ [2\pi].$$

Exercice 13 *
Décrire l'ensemble des

$$Z = \frac{z-1}{z+1} \quad \text{pour } z \text{ parcourant } \mathbb{U} \setminus \{-1\}.$$

Solution

méthode
‖ Les complexes de module 1 s'écrivent $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

On obtient tous les z parcourant $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$ en considérant $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in \left]-\pi\,;\pi\right[$. Par factorisation de l'exponentielle imaginaire d'angle moitié

$$Z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 1} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}} = \frac{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \mathrm{i}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Quand θ parcourt l'intervalle $\left]-\pi\,;\pi\right[$, les valeurs $\tan(\theta/2)$ parcourent l'intégralité de la droite réelle. L'ensemble parcouru par Z est donc la droite $\mathrm{i}\mathbb{R}$ des imaginaires purs.

1. On peut aussi écrire $z = 2\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}\right)$ et factoriser par l'exponentielle équilibrée $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12}$.

Exercice 14 * (Identité du parallélogramme)
Vérifier pour tous a et $b \in \mathbb{C}$

$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2 .$$

Solution

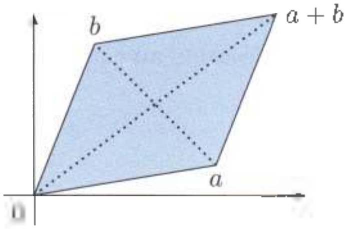
méthode

On développe[1] le carré d'un module par la formule

$$|a+b|^2 = |a|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{a}b) + |b|^2 .$$

On a directement

$$\begin{aligned}|a+b|^2 + |a-b|^2 &= |a|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{a}b) + |b|^2 \\ &\quad + |a|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\overline{a}b) + |b|^2 \\ &= 2|a|^2 + 2|b|^2 .\end{aligned}$$



Cette identité s'interprète : dans un parallélogramme, la somme des carrés des quatre côtés est la somme des carrés des deux diagonales.

Exercice 15 *
Soit $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $f\colon P \to \mathbb{C}$ l'application définie par

$$f(z) = \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$$

(a) Montrer que f prend ses valeurs dans $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

(b) Vérifier que tout élément de D possède un unique antécédent par f.

Solution

(a) Soit z un élément de P d'écriture algébrique $z = x + \mathrm{i}y$ avec $y > 0$. On a

$$|f(z)|^2 = \frac{|z-\mathrm{i}|^2}{|z+\mathrm{i}|^2} = \frac{x^2 + (y-1)^2}{x^2 + (y+1)^2}.$$

Puisque $y > 0$, on a $x^2 + (y-1)^2 < x^2 + (y+1)^2$ donc $|f(z)| < 1$. Ainsi, la fonction f prend ses valeurs dans D.

(b) Soit Z un élément de D. Pour déterminer les éventuels antécédents de Z, on résout l'équation $f(z) = Z$.

1. On peut aussi calculer les modules en introduisant les parties réelles et imaginaires de a et b.

méthode

Pour résoudre une *équation homographique*

$$\frac{az+b}{cz+d} = Z$$

d'inconnue $z \neq -d/c$, on multiplie par $cz+d$ et l'on réorganise les membres afin d'exprimer z en fonction de Z.

Soit $z \in P$ (et donc $z \neq -\mathrm{i}$).

$$\begin{aligned} \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} = Z &\iff (z-\mathrm{i}) = Z(z+\mathrm{i}) \\ &\iff (1-Z)z = \mathrm{i} + \mathrm{i}Z \end{aligned}$$

Sachant $Z \neq 1$ (car Z est élément de D), on peut affirmer

$$\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} \iff z = \mathrm{i}\frac{1+Z}{1-Z}.$$

méthode

Il faut encore vérifier que cette solution est élément de P, pour conclure que tout élément de D possède un unique antécédent par f.

On exprime la partie imaginaire de la solution précédente :

$$\operatorname{Im}\left(\mathrm{i}\frac{1+Z}{1-Z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right) \underset{\operatorname{Re}(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{1+Z}{1-Z} + \frac{1+\overline{Z}}{1-\overline{Z}}\right) = \frac{1-|Z|^2}{|1-Z|^2} > 0.$$

Finalement, f prend ses valeurs dans D et tout élément de D possède un unique antécédent : f réalise une bijection de P vers D.

Exercice 16 *

Soit f une fonction complexe dérivable définie sur un intervalle I. On suppose que la fonction f ne s'annule pas, montrer que la fonction $|f| : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et exprimer sa dérivée.

Solution

Pour tout t dans I, on peut écrire

$$|f(t)| = \sqrt{f(t)\overline{f(t)}}.$$

Les fonctions f et $\overline{f}$ sont dérivables donc, par produit, la fonction $u \colon t \mapsto f(t)\overline{f(t)}$ est dérivable. De plus, cette fonction est valeurs strictement positives et la fonction $\sqrt{\cdot}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, on peut alors affirmer que la fonction $|f|$ est dérivable avec

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(|f(t)|\right) = \frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}} = \frac{f'(t)\overline{f(t)} + f(t)\overline{f'(t)}}{2|f(t)|} = \frac{\operatorname{Re}\left(f'(t)\overline{f(t)}\right)}{|f(t)|}.$$

3.5.2 Inégalités dans $\mathbb{C}$

Exercice 17 *

Vérifier que pour tout réel t

$$|e^{it}-1| \leqslant |t|$$

et donner une interprétation géométrique de cette inégalité.

Solution

méthode

On factorise par l'exponentielle imaginaire d'angle moitié.

En factorisant par $e^{it/2}$ on fait apparaître un sinus

$$\left|e^{it}-1\right| = \left|e^{it/2}\right|\left|e^{it/2}-e^{-it/2}\right| = \left|2i\sin(t/2)\right| = 2\left|\sin(t/2)\right|.$$

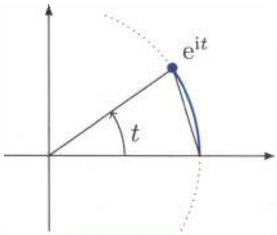
méthode

On sait [1] l'inégalité $\sin x \leqslant x$ pour tout $x \geqslant 0$.

Cas : $t \geqslant 0$. On obtient $\left|e^{it}-1\right| \leqslant 2t/2 = t$.

Cas : $t \leqslant 0$. On peut raisonner par conjugaison ou affirmer que l'inégalité $|\sin x| \leqslant |x|$ est valable pour tout réel x.

Dans la figure ci-contre, l'inégalité s'interprète : « la corde est plus courte que l'arc ».



Exercice 18 **

Soit a et b deux nombres complexes. Montrer

$$|a|+|b| \leqslant |a+b|+|a-b|$$

et préciser les cas d'égalité.

Solution

méthode

On étudie l'inégalité au carré.

D'une part,

$$\left(|a|+|b|\right)^2 = |a|^2 + 2\,|a|\,|b| + |b|^2\,.$$

D'autre part,

$$\left(|a+b|+|a-b|\right)^2 = |a+b|^2 + 2\left|(a+b)(a-b)\right| + |a-b|^2\,.$$

Par l'identité du parallélogramme [2]

$$\left(|a+b|+|a-b|\right)^2 = 2\,|a|^2 + 2\left|a^2-b^2\right| + 2\,|b|^2\,.$$

1. Voir sujet 15 p. 24.
2. Voir sujet 14 p. 100.

On peut alors simplifier la différence

$$\begin{aligned}\big(|a+b|+|a-b|\big)^2-\big(|a|+|b|\big)^2 &= |a|^2-2\,|a|\,|b|+|b|^2+2\big|a^2-b^2\big| \\ &= \big(|a|-|b|\big)^2+2\big|a^2-b^2\big|\geqslant 0\end{aligned}$$

avec égalité si, et seulement si, $a^2=b^2$ soit encore $a=b$ ou $a=-b$.

Exercice 19 **

Soit a et b deux nombres complexes. Établir

$$|a+b|^2\leqslant\big(1+|a|^2\big)\big(1+|b|^2\big).$$

Préciser les cas d'égalité.

Solution

Par l'inégalité triangulaire et la croissance de l'élévation au carré sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$|a+b|^2\leqslant\big(|a|+|b|\big)^2=|a|^2+2\,|a|\,|b|+|b|^2\,.$$

méthode

‖ On exploite l'inégalité $2xy\leqslant x^2+y^2$ valable pour tous x,y réels.

En prenant $x=1$ et $y=|a|\,|b|$, on obtient $2\,|a|\,|b|\leqslant 1+|a|^2\,|b|^2$ puis

$$|a+b|^2\leqslant 1+|a|^2+|b|^2+|a|^2\,|b|^2=\big(1+|a|^2\big)\big(1+|b|\big)^2.$$

De plus, il y a égalité dans l'inégalité si, et seulement si, il y a égalité lors des deux inégalités utilisées :

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|\quad\text{et}\quad 2\,|a|\,|b|\leqslant 1+|a|^2\,|b|^2\,.$$

L'égalité dans l'inégalité triangulaire a lieu si, et seulement si, a et b figurent sur la même demi-droite issue de 0 (Th. 3 p. 85). L'égalité dans la deuxième inégalité a lieu si, et seulement si, $|a|\,|b|=1$. Il y a donc égalité dans l'inégalité demandée si, et seulement si, a est non nul et $b=1/\overline{a}$.

Exercice 20 **

Soit n un naturel et z un nombre complexe de module différent de 1. Montrer

(a) $\left|\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}\right|\leqslant\dfrac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}$.

(b) $\left|\dfrac{1-(n+1)z^n+nz^{n+1}}{(1-z)^2}\right|\leqslant\dfrac{1-(n+1)\,|z|^n+n\,|z|^{n+1}}{(1-|z|)^2}$.

Solution

méthode

Les deux inéquations s'apparentent à une comparaison $|f(z)| \leqslant f(|z|)$. En exprimant $f(z)$ par une somme, il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire !

(a) Par sommation géométrique, on peut écrire

$$\frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \sum_{k=0}^{n} z^k \quad \text{car} \quad z \neq 1.$$

Par l'inégalité triangulaire

$$\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} z^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |z|^k = \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|} \quad \text{car} \quad |z| \neq 1.$$

(b) Pour démasquer la somme définissant f, il suffit de faire la différence de deux valeurs consécutives

$$\frac{1-(k+1)z^k+kz^{k+1}}{(1-z)^2} - \frac{1-kz^{k-1}+(k-1)z^k}{(1-z)^2} = \frac{kz^{k-1}-2kz^k+kz^{k+1}}{(1-z)^2} = kz^{k-1}.$$

On somme cette identité pour k allant de 1 à n et l'on obtient par télescopage

$$\frac{1-(n+1)z^n+nz^{n+1}}{(1-z)^2} - 0 = \sum_{k=1}^{n} kz^{k-1}.$$

On peut alors conclure comme au-dessus

$$\left|\frac{1-(n+1)z^n+nz^{n+1}}{(1-z)^2}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} k\,|z|^{k-1} = \frac{1-(n+1)\,|z|^n+n\,|z|^{n+1}}{\left(1-|z|\right)^2}.$$

3.5.3 Trigonométrie

Exercice 21 *

En considérant les racines cinquièmes de l'unité, calculer

$$\alpha = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

Solution

Les racines cinquièmes de l'unité sont les $\omega_k = e^{2ik\pi/5}$ avec $k \in [\![0;4]\!]$.

méthode

On sait que la somme des racines cinquièmes de l'unité est nulle [1].

On peut donc écrire $1 + e^{2i\pi/5} + e^{4i\pi/5} + e^{6i\pi/5} + e^{8i\pi/5} = 0$. En considérant la partie réelle, on obtient la relation

$$1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 0. \qquad (*)$$

méthode

On emploie les formules de trigonométrie

$$\cos(2\pi - x) = \cos x \quad \text{et} \quad \cos(2a) = 2\cos^2 a - 1.$$

On a

$$\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \alpha \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = 2\alpha^2 - 1.$$

L'équation $(*)$ devient alors

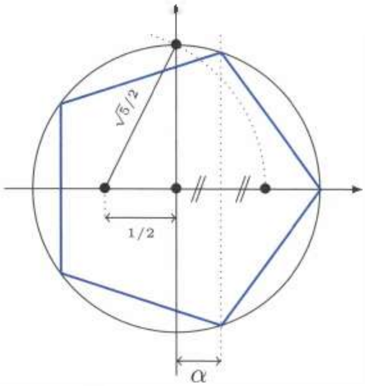
$$4\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$$

dont les solutions sont

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \frac{-1-\sqrt{5}}{4}.$$

Sachant $\cos(2\pi/5) \geqslant 0$ (car $2\pi/5 \in [0;\pi/2]$), on peut conclure

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$



La connaissance de cette valeur permet de tracer un pentagone régulier à la règle et au compas.

Exercice 22 **

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$S = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)\cos^k\theta.$$

---

1. Voir sujet 7 p. 95.

Solution

méthode

On interprète la somme comme la partie réelle d'une somme géométrique.

La somme S est la partie réelle de la somme

$$T = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} \cos^k \theta = \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \cos \theta\right)^k.$$

méthode

Pour appliquer la formule de sommation géométrique, il faut une raison différente de 1.

Cas : $\theta = 0\ [2\pi]$ ou $\theta = \pi\ [2\pi]$. Les termes sommés sont tous égaux à 1 et $S = n + 1$.
Cas : $\theta \neq 0\ [\pi]$. La somme T est géométrique de raison $q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \cos \theta \neq 1$ et donc

$$T = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta} \cos^{n+1} \theta - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \cos \theta - 1}.$$

En écrivant

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \cos \theta - 1 = \left(\cos^2 \theta - 1\right) + \mathrm{i} \sin \theta \cos \theta = \sin \theta(-\sin \theta + \mathrm{i} \cos \theta) = \mathrm{i} \sin \theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

on obtient l'expression « simplifiée »

$$T = \mathrm{i} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \cos^{n+1} \theta}{\sin \theta}$$

dont la partie réelle est

$$S = 1 + \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} \cos^{n+1} \theta$$

Exercice 23 ** (Polynôme de Tchebychev)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer qu'il existe des entiers $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que [1] pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

$$\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos^k(\theta).$$

(b) Exprimer simplement a_0.

1. On dit que $\cos(n\theta)$ est un polynôme en $\cos \theta$.

Solution

(a) **méthode**

‖ On exprime[1] $\cos(n\theta)$ comme la partie réelle de $e^{in\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$.

Pour θ réel, on obtient par la formule du binôme de Newton

$$\cos(n\theta) = \mathrm{Re}\big((\cos\theta + i\sin\theta)^n\big) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} i^k \sin^k\theta\cos^{n-k}\theta\right).$$

Or

$$i^k = \begin{cases}(-1)^p & \text{si } k = 2p\\ (-1)^p i & \text{si } k = 2p+1\end{cases} \quad (\text{avec } p \in \mathbb{N}).$$

Les termes d'indices impairs de la somme sont imaginaires purs et l'on peut simplifier la somme en ne conservant que les termes d'indices pairs[2]

$$\cos(n\theta) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^p\binom{n}{2p}\sin^{2p}\theta\cos^{n-2p}\theta.$$

Sachant $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$, il vient

$$\cos(n\theta) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^p\binom{n}{2p}(1-\cos^2\theta)^p\cos^{n-2p}\theta.$$

Enfin, en développant le terme $(1-\cos^2\theta)^p$, on obtient une expression[3] de $\cos(n\theta)$ sous la forme

$$a_0 + a_1\cos\theta + \cdots + a_n\cos^n\theta \quad \text{avec} \quad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}.$$

(b) **méthode**

‖ Pour une valeur bien choisie de θ, on isole a_0.

Pour $\theta = \pi/2$, il vient

$$\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = a_0 + a_1\times 0 + \cdots + a_n\times 0 = a_0.$$

On a donc

$$a_0 = \begin{cases}(-1)^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair}\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

1. Un raisonnement par récurrence est aussi possible : voir sujet 28 du chapitre 5 de l'ouvrage *Exercices d'algèbre et de probabilités MPSI*.
2. Ceux-ci s'écrivent $k = 2p$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$ donc $0 \leqslant p \leqslant n/2$ puis $p = 0, 1, \ldots, \lfloor n/2\rfloor$.
3. Il est inutile de détailler ce développement pour constater « l'allure » du résultat de celui-ci.

Exercice 24 * (Noyaux de Dirichlet et Fejér)**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et x un réel.

(a) Exprimer simplement

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \quad \text{et} \quad F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) \quad (\text{pour } n \neq 0).$$

(b) Vérifier

$$F_n(x) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}.$$

Solution

(a) La somme définissant $D_n(x)$ est géométrique de raison $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.

Cas : $x \equiv 0\ [2\pi]$. Les termes sommés sont tous égaux à 1 et donc $D_n(x) = 2n+1$.

Cas : $x \not\equiv 0\ [2\pi]$. On peut employer la formule de sommation géométrique

$$D_n(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n+1)x} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 1} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2n+1}{2}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2n+1}{2}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{x}{2}}} = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

méthode

> Pour calculer $F_n(x)$ à partir des $D_k(x)$, on exprime $\sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right)$ par une partie imaginaire.

Cas : $x \equiv 0\ [2\pi]$. Les $D_k(x)$ sont égaux à $2k+1$. Par sommation arithmétique

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{1}{n}\times\left(2\sum_{k=0}^{n-1}k + \sum_{k=0}^{n-1}1\right) = \frac{n(n-1)+n}{n} = n.$$

Cas : $x \not\equiv 0\ [2\pi]$. On écrit

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)D_k(x) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k+1}{2}x}\right)$$

et alors

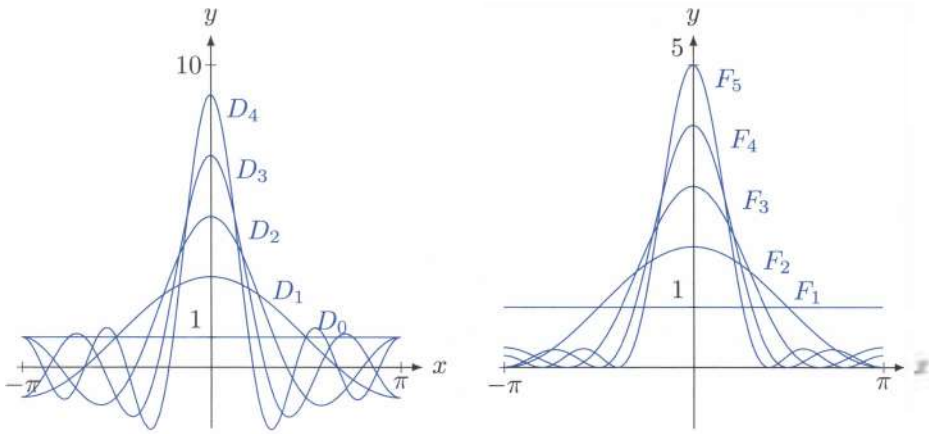
$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)F_n(x) = \frac{1}{n}\,\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k+1}{2}x}\right).$$

Par sommation géométrique de raison $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \neq 1$, il vient

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)F_n(x) = \frac{1}{n}\,\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 1}\right) = \frac{1}{n}\,\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{nx}{2}}\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{n\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

On peut alors conclure

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2.$$



Les premiers noyaux de Dirichlet et de Fejér.

(b) On repart des expressions initiales de $F_n(x)$ et $D_k(x)$

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\left(\sum_{k=-p}^{p} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right)$$

méthode

‖ On échange la somme double.

Les indices de sommation p et k sont contraints par les conditions $0 \leqslant p \leqslant n-1$ et $|k| \leqslant p$. Ces conditions peuvent aussi s'exprimer $|k| \leqslant n-1$ et $|k| \leqslant p \leqslant n-1$ ce qui permet de réaliser l'échange des deux sommes :

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(\sum_{p=|k|}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right).$$

Dans la somme contenue, le terme ne dépend pas de l'indice de sommation p, on peut donc aisément la calculer

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}(n-|k|)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}.$$

On peut étendre la somme en k aux indices n et $-n$ en adjoignant deux zéros et donc obtenir la formule demandée

$$F_n(x) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}.$$

3.5.4 Le plan complexe

Exercice 25 **

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ tels que $|z_0| \neq r$. On note $\mathcal{C}$ le cercle dans $\mathbb{C}$ de centre z_0 et de rayon r.

(a) Pour $z \in \mathbb{C}$, montrer

$$z \in \mathcal{C} \iff |z|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{z}z_0) + |z_0|^2 = r^2.$$

(b) En déduire que l'image de $\mathcal{C}$ par l'application $f\colon z \mapsto 1/z$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon en fonction de z_0 et r.

Solution

(a) Un complexe z appartient à $\mathcal{C}$ si, et seulement si, $|z - z_0|^2 = r^2$. Il suffit ensuite de développer le carré [1] pour obtenir l'équation proposée.

(b) L'hypothèse $|z_0| \neq r$ assure que 0 n'appartient pas à $\mathcal{C}$. On peut donc considérer l'image $f(\mathcal{C})$.

Soit $Z = f(z)$ avec $z \in \mathbb{C}^*$.

méthode

> On retraduit l'appartenance de z à $\mathcal{C}$ par une équation en Z que l'on essaie d'écrire sous une forme analogue à la précédente.

On a

$$\begin{aligned} z \in \mathcal{C} &\iff |z|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{z}z_0) + |z_0|^2 = r^2 \\ &\iff \frac{1}{|Z|^2} - 2\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\bar{Z}}z_0\right) + |z_0|^2 = r^2 \end{aligned}$$

En multipliant par le réel non nul $|Z|^2$

$$z \in \mathcal{C} \iff 1 - 2\operatorname{Re}(Z\,\overline{z_0}) + |z_0|^2\,|Z|^2 = r^2|Z^2|$$

On réorganise les membres

$$z \in \mathcal{C} \iff \left(|z_0|^2 - r^2\right)|Z|^2 - 2\operatorname{Re}(Z\,\overline{z_0}) + 1 = 0$$

En divisant par $|z_0|^2 - r^2$ et en posant $Z_0 = z_0/\left(|z_0|^2 - r^2\right)$ on parvient à

$$z \in \mathcal{C} \iff |Z|^2 - 2\operatorname{Re}(Z\overline{Z_0}) + |Z_0|^2 = R^2$$

1. Voir sujet 14 p. 100.

avec

$$R = \sqrt{|Z_0|^2 - \frac{1}{|z_0|^2 - r^2}} = \frac{r}{\left||z_0|^2 - r^2\right|}$$

On reconnaît l'équation d'un cercle et l'on peut conclure que $f(\mathcal{C})$ est le cercle[1] de centre Z_0 et de rayon R.

Exercice 26 * (Théorème de l'angle au centre)**

Soit M, A, B trois points distincts du plan géométrique d'affixes respectives z, a, b.

(a) Quelle est l'interprétation d'un argument du complexe

$$Z = \frac{z-b}{z-a}?$$

On suppose que A et B sont deux points d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. On note θ une mesure de l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ et φ une mesure de l'angle[2] entre les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$

(b) Montrer que M appartient au cercle $\mathcal{C}$ si, et seulement si, $2\varphi \equiv \theta\ [2\pi]$.

Solution

(a) Le complexe $z - a$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$ et $\arg(z-a)$ mesure l'angle entre $\vec{\imath}$, le premier vecteur du repère, et le vecteur $\overrightarrow{AM}$. Aussi, $\arg(z-b)$ mesure l'angle entre $\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{BM}$. Par opérations sur les arguments et les mesures angulaires

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) &\equiv \arg(z-b) - \arg(z-a)\\ &\equiv (\vec{\imath}; \overrightarrow{BM}) - (\vec{\imath}; \overrightarrow{AM})\\ &\equiv (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM})\ [2\pi].\end{aligned}$$

Ainsi, un argument du complexe Z donne une mesure de l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ ou, ce sont les mêmes, de l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$.

(b) Notons $R > 0$ le rayon du cercle $\mathcal{C}$, α et β des arguments des complexes a et b :

$$a = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \quad b = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} \quad \text{et} \quad \theta \equiv \beta - \alpha\ [2\pi].$$

Puisque φ est un argument de $(z-b)/(z-a)$, on peut écrire

$$\begin{aligned}2\varphi \equiv \theta\ [2\pi] &\iff \arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^2 \equiv \theta\ [2\pi]\\ &\iff \left(\frac{z-b}{z-a}\right)^2 = \left|\frac{z-b}{z-a}\right|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\end{aligned}$$

1. On peut aussi adapter cette étude pour établir que l'image d'un cercle passant par l'origine est une droite ne passant pas par l'origine.

2. On dit que θ mesure l'*angle au centre* et φ l'*angle inscrit*.

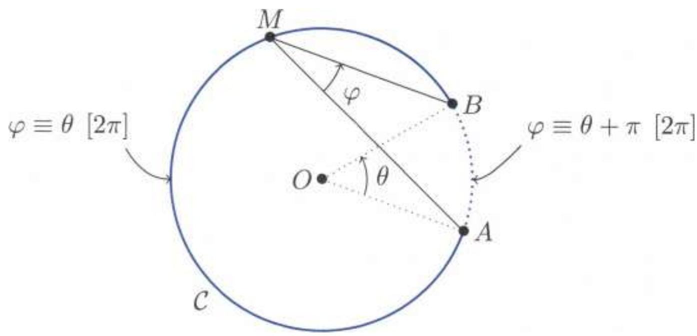
Puisque $|Z|^2 = Z\overline{Z}$, on peut simplifier l'expression de l'équation

$$\begin{aligned}2\varphi \equiv \theta \ [2\pi] &\iff (z-b)(\overline{z}-\overline{a}) = (z-a)(\overline{z}-\overline{b})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \\ &\iff |z|^2 - \overline{a}z - b\overline{z} + \overline{a}b = |z|^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\overline{z} - \overline{b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z + a\overline{b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.\end{aligned}$$

On poursuit la simplification sachant $b = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 1$ car A et B sont distincts

$$\begin{aligned}2\varphi \equiv \theta \ [2\pi] &\iff |z|^2\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) = R^2(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \\ &\iff |z|^2 = R^2.\end{aligned}$$

Finalement, le point M appartient au cercle $\mathcal{C}$ si, et seulement si, $2\varphi \equiv \theta \ [2\pi]$.



Théorème de l'angle au centre.

3.5.5 Équations algébriques

Exercice 27 *
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^n + 1 = 0.$$

Solution

méthode
‖ L'équation étudiée s'apparente à une équation du type $z^n = Z$.

En écrivant, la forme trigonométrique $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, on a

$$\begin{aligned}z^n + 1 = 0 &\iff z^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \\ &\iff \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1\end{aligned}$$

avec $z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}$ solution particulière.

Les solutions de l'équation étudiée sont donc les $z_0\omega$ avec ω racine n-ième de l'unité. On peut alors décrire l'ensemble des solutions :

$$\{z_0\omega_k \mid k \in [\![0\,;n-1]\!]\} = \{e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}} \mid k \in [\![0\,;n-1]\!]\}.$$

Exercice 28 **

Soit $\omega_0, \ldots, \omega_{2n}$ les racines $(2n+1)$-ièmes de l'unité. Calculer

$$S = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{1+\omega_k}.$$

Solution

Les racines $(2n+1)$-ièmes de l'unité sont les $\omega_k = e^{2ik\pi/(2n+1)}$ avec $0 \leqslant k \leqslant 2n$. Le nombre -1 ne figure pas parmi celles-ci et la somme S est donc bien définie.

méthode

On factorise $1+\omega_k$ par l'exponentielle imaginaire d'angle moitié.

Pour $k \in [\![0\,;2n]\!]$, on écrit

$$\frac{1}{1+\omega_k} = e^{-i\frac{k\pi}{2n+1}} \frac{1}{2\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) - i\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{2\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

En sommant

$$S = \frac{2n+1}{2} - \frac{i}{2}\sum_{k=0}^{2n} \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

Or, $\tan(\pi - x) = -\tan x$ pour tout $x \not\equiv \pi/2\ [\pi]$ et donc

$$\tan\left(\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}\right) = -\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

Ainsi, les termes d'indices $2n$ à $n+1$ de la somme des tangentes sont les opposés respectifs des termes d'indices 1 à n. De plus, le terme d'indice 0 est nul et l'on peut conclure[1]

$$S = \frac{2n+1}{2}.$$

Exercice 29 **

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(z+1)^n = (z-1)^n.$$

Observer que celle-ci admet exactement $n-1$ solutions, toutes réelles.

1. On peut aussi simplifier la somme des tangentes en justifiant $S = \overline{S}$ puisque les conjugués des racines n-ièmes de l'unité décrivent aussi les racines n-ièmes de l'unité.

Solution

méthode

Par un quotient, on se ramène à l'équation $Z^n = 1$.

Soit z un complexe. Puisque $z = \mathrm{i}$ n'est pas solution de l'équation, on peut supposer z différent de i et donc diviser par $z - \mathrm{i}$

$$(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n \iff \left(\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^n = 1$$
$$\iff Z^n = 1 \quad \text{avec} \quad Z = \frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}.$$

Les solutions z peuvent dont se déduire des complexes Z racines n-ièmes de l'unité.

Les racines de l'unité sont les $\omega_k = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n}$ avec $k \in [\![0\,;n-1]\!]$. On résout l'équation homographique[1] qui suit

$$Z = \omega_k \iff \frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = \omega_k$$
$$\iff (z+\mathrm{i}) = \omega_k(z-\mathrm{i})$$
$$\iff z(\omega_k - 1) = \mathrm{i}(\omega_k + 1).$$

Lorsque $k = 0$, $\omega_k = 1$ et l'équation précédente ne possède pas de solutions.

Lorsque $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, $\omega_k \neq 1$ et l'on peut poursuivre la résolution :

$$Z = \omega_k \iff z = \mathrm{i}\frac{\omega_k + 1}{\omega_k - 1}.$$

Finalement, les solutions de l'équation étudiée sont les

$$z_k = \mathrm{i}\frac{\omega_k + 1}{\omega_k - 1} \quad \text{avec} \quad k \in [\![1\,;n-1]\!] \text{ et } \omega_k = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}.$$

méthode

On simplifie l'expression de z_k en factorisant par l'exponentielle imaginaire d'angle moitié.

Pour $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, on peut écrire

$$z_k = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}} = \mathrm{i}\frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \cot\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

où cot désigne la fonction cotangente. Les z_k sont donc réels. Ils sont aussi deux à deux distincts car la fonction cotangente est strictement décroissante (donc injective) sur l'intervalle $]0\,;\pi[$ où évoluent les angles $k\pi/n$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

1. On reprend la méthode détaillée dans le sujet 15 p. 100.

Exercice 30 **

Soit $\theta \in]0\,;2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation d'inconnue z complexe

$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 2\cos\theta.$$

Solution

méthode

L'équation est de la forme $Z + \dfrac{1}{Z} = 2\cos\theta$.

Soit z un complexe différent de 1 et -1. Posons Z déterminé par

$$Z = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n \in \mathbb{C}^*$$

z est solution de l'équation étudiée si, et seulement si, Z est solution de l'équation

$$Z^2 - 2\cos(\theta)Z + 1 = 0.$$

Cette équation a déjà été résolue dans le sujet 9 p. 97 : ses racines sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. Pour déterminer z, il reste à résoudre les équations

$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = e^{i\theta} \quad \text{et} \quad \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = e^{-i\theta}.$$

méthode

Il suffit de résoudre la première équation, les solutions de la seconde se déduiront par conjugaison.

En divisant par $e^{i\theta}$, on se ramène aux racines n-ièmes de l'unité $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$

$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = e^{i\theta} \iff \left(\frac{1}{e^{i\theta/n}}\cdot\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 1$$
$$\iff \frac{z-1}{z+1} = e^{i\theta/n}\omega_k \quad \text{avec} \quad k \in [\![0\,;n-1]\!].$$

Il reste à résoudre l'équation homographique[1]

$$\frac{z-1}{z+1} = e^{i\varphi} \quad \text{avec} \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \in]0\,;2\pi[.$$

Après quelques calculs, on obtient (sachant $e^{i\varphi} \neq 1$)

$$z = -\frac{e^{i\varphi}+1}{e^{i\varphi}-1} = -\frac{2\cos(\varphi/2)}{2i\sin(\varphi/2)} = i\cot\frac{\varphi}{2}.$$

Les solutions de l'équation étudiée sont donc les

$$z_k = i\cot\left(\frac{\theta+2k\pi}{2n}\right) \quad \text{avec} \quad k \in [\![0\,;n-1]\!] \text{ et leurs conjugués.}$$

1. La méthode de résolution est détaillée dans le sujet 15 p. 100.

3.6 Exercices d'approfondissement

Exercice 31 *

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$. Montrer $e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$.

Solution

méthode

> On se ramène à la situation $x = 0$ avant de résoudre l'équation exprimant l'hypothèse.

En multipliant la relation $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$ par e^{-ix}, on obtient

$$1 + e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 0 \qquad (*)$$

avec $\alpha = y - x$ et $\beta = z - x$. En montrant $1 + e^{2i\alpha} + e^{2i\beta} = 0$, il suffira de multiplier par e^{2ix} pour obtenir l'identité voulue.

En passant aux parties réelle et imaginaire l'équation $(*)$, on obtient le système

$$\begin{cases} \cos\alpha + \cos\beta = -1 \\ \sin\alpha + \sin\beta = 0. \end{cases}$$

L'équation $\sin\alpha + \sin\beta = 0$ donne

$$\alpha \equiv -\beta \ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \alpha \equiv \pi + \beta \ [2\pi].$$

Le cas $\alpha \equiv \pi + \beta \ [2\pi]$ est à exclure car incompatible avec l'équation des cosinus qui devient $0 = -1$.

Il reste $\alpha \equiv -\beta \ [2\pi]$ et alors $2\cos\alpha = -1$ ce qui donne $\alpha \equiv \pm 2\pi/3 \ [2\pi]$.

Par suite $e^{i\alpha} = j$ et $e^{i\beta} = j^2$, ou l'inverse, $e^{i\alpha} = j^2$ et $e^{i\beta} = j$. Dans les deux cas, on a bien

$$1 + e^{2i\alpha} + e^{2i\beta} = 1 + j + j^2 = 0.$$

Exercice 32 **

Soit $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes. À quelle condition simple a-t-on

$$|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n| \ ?$$

Solution

Le retrait de nombres complexes nuls ne modifie pas l'identité : on suppose pour la suite les complexes z_k tous non nuls.

Si $z_1, \dots, z_n$ ont un même argument θ, on peut écrire

$$z_1 + \dots + z_n = |z_1| e^{i\theta} + \dots + |z_n| e^{i\theta} = \big(|z_1| + \dots + |z_n|\big) e^{i\theta}$$

et donc

$$|z_1 + \dots + z_n| = \big(|z_1| + \dots + \ z_n|\big) |e^{i\theta}| = |z_1| + \dots + |z_n|.$$

Que les complexes possèdent un argument commun est une condition suffisante pour qu'il y ait égalité.

méthode

‖ On montre la réciproque en raisonnant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Le cas $n = 1$ est immédiat et le cas $n = 2$ est connu : c'est le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire (Th. 3 p. 85). Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 1$.

Au rang $n+1$, considérons $z_1, \dots, z_n$ et z_{n+1} des complexes vérifiant

$$|z_1 + \cdots + z_n + z_{n+1}| = |z_1| + \cdots + |z_n| + |z_{n+1}|.$$

Par l'inégalité triangulaire, d'abord appliquée à $z + z'$ avec $z = z_1 + \cdots + z_n$ et $z' = z_{n+1}$, ensuite appliquée à $z_1 + \cdots + z_n$, on écrit

$$\begin{aligned} |z_1 + \cdots + z_n + z_{n+1}| &\leqslant |z_1 + \cdots + z_n| + |z_{n+1}| \\ &\leqslant |z_1| + \cdots + |z_n| + |z_{n+1}|. \end{aligned}$$

Par hypothèse les membres encadrants sont égaux et chacune des deux inégalités écrites est en fait une égalité

$$\begin{cases} |z_1 + \cdots + z_n + z_{n+1}| = |z_1 + \cdots + z_n| + |z_{n+1}| \\ |z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n|. \end{cases}$$

Par hypothèse de récurrence, la deuxième équation assure que les complexes $z_1, \dots, z_n$ ont un même argument et celui-ci est alors argument du complexe non nul $z = z_1 + \cdots + z_n$. Par égalité dans l'inégalité triangulaire, la première équation assure que z et $z' = z_{n+1}$ ont un même argument et l'on peut alors conclure que tous les complexes $z_1, \dots, z_n$ et z_{n+1} ont un même argument.

La récurrence est établie.

Pour résumer, l'égalité $|z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n|$ a lieu si ceux des complexes $z_1, \dots, z_n$ qui sont non nuls ont un même argument. Plus légèrement, cela signifie encore que ces complexes figurent sur la même demi-droite d'origine 0.

Exercice 33 ***

Soit $z_1, \dots, z_n$ des complexes. Établir

$$\frac{\left|\displaystyle\sum_{k=1}^n z_k\right|}{1 + \left|\displaystyle\sum_{k=1}^n z_k\right|} \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{|z_k|}{1 + |z_k|}.$$

Solution

méthode

La fonction $x \mapsto x/(1+x)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et l'on a donc, si x et y sont deux réels positifs,

$$x \leqslant y \implies \frac{x}{1+x} \leqslant \frac{y}{1+y}.$$

Par l'inégalité triangulaire

$$x = \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k| = y$$

et donc

$$\frac{\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|}{1+\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} |z_k|}{1+\sum_{k=1}^{n} |z_k|}.$$

Un indice de sommation étant muet, on peut reprendre l'expression du second membre

$$\frac{\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|}{1+\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} |z_k|}{1+\sum_{j=1}^{n} |z_j|} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{|z_k|}{1+\sum_{j=1}^{n} |z_j|}\right).$$

Enfin, pour chaque indice k, la somme des $|z_j|$ est supérieure au seul $|z_k|$ et l'on peut conclure

$$\frac{\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|}{1+\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{1+|z_k|}.$$

Exercice 34 ***

Soit $z_1, \ldots, z_n$ des complexes et z tels que $z^2 = z_1^2 + \cdots + z_n^2$. Montrer

$$\left|\mathrm{Re}(z)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|\mathrm{Re}(z_k)\right| \quad \text{et} \quad \left|\mathrm{Im}(z)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|\mathrm{Im}(z_k)\right|.$$

Solution

On écrit les complexes $z, z_1, \ldots, z_n$ sous forme algébrique

$$z = a + \mathrm{i}b,\ z_k = a_k + \mathrm{i}b_k \quad \text{avec} \quad a, b, a_k, b_k \in \mathbb{R}.$$

méthode

On commence par établir

$$a^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

En identifiant la partie réelle et la partie imaginaire dans l'hypothèse, on a

$$a^2 - b^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 - \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \quad \text{et} \quad ab = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz [1]

$$a^2 b^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

On a alors

$$a^4 = a^2(a^2 - b^2) + a^2 b^2 \leqslant a^2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 - \sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

En réorganisant les membres

$$\left(a^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)\left(a^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \leqslant 0.$$

Si le premier facteur est non nul, il est strictement positif et l'on peut affirmer

$$a^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

S'il est nul, c'est que $a = 0$ et l'inégalité ci-dessus est encore vraie.

On a de plus

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right)^2$$

car si l'on développe le second membre on fait apparaître tous les termes du premiers membres et quelques autres, tous positifs.

On en déduit

$$a^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right)^2$$

puis l'inégalité demandée sur les parties réelles en passant à la racine.

Enfin, en considérant iz_k au lieu de z_k et iz au lieu de z, on transpose l'inégalité sur les parties réelles en celle sur les parties imaginaires.

1. Voir sujet 14 p. 24.

CHAPITRE 4

Calcul de primitives et d'intégrales

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

4.1 Calcul de primitives

4.1.1 Fonction primitive

Définition

> On appelle *primitive* d'une fonction $f: I \to \mathbb{K}$, s'il en existe, toute fonction $F: I \to \mathbb{K}$ dérivable et vérifiant $F' = f$.

Un tableau de calcul de primitives se déduit d'une inversion d'un tableau de dérivation. Un tel tableau figure en annexe p. 422.

Théorème 1

Si $f: I \to \mathbb{K}$ admet une primitive F, les primitives de f sont toutes les fonctions de la forme $t \mapsto F(t) + C$ avec C une constante élément de $\mathbb{K}$.

Ce résultat n'est valable que pour une fonction définie sur un intervalle. Si la fonction f est définie sur une réunion d'intervalles (par exemple sur le domaine $\mathbb{R}^*$), ses primitives seront déterminées à une constante près par intervalle : « il y a autant de constantes que d'intervalles ».

4.1.2 Intégrale indéfinie

Définition

Pour signifier qu'une fonction $F\colon I \to \mathbb{K}$ est une primitive d'une fonction $f\colon I \to \mathbb{K}$, on exploite la notation d'*intégrale indéfinie*

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) \quad \text{ou encore} \quad \int f = F.$$

Cette écriture est à manipuler avec précaution car une primitive n'est déterminée qu'à une constante[1] près sur l'intervalle d'étude !

Si F et G sont des primitives de fonctions f et g définies sur I, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, λF et $F + G$ sont respectivement primitives de λf et $f + g$. On écrit

$$\int \lambda f = \lambda \int f \quad \text{et} \quad \int f + g = \int f + \int g$$

Si F est une primitive d'une fonction complexe f, la fonction conjuguée $\bar{F}$ est primitive de $\bar{f}$. On en déduit

$$\int \mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}\Big(\int f\Big) \quad \text{et} \quad \int \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}\Big(\int f\Big)$$

Si $u\colon I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable et si F est une primitive d'une fonction f définie sur l'intervalle[2] $u(I)$ la fonction composée $F \circ u = F(u)$ est primitive de la fonction $u' \times f \circ u = u' f(u)$. On obtient ainsi la formule de *primitivation de formes composées*

$$\int u' f(u) = F(u).$$

4.2 Calcul d'intégrales

Nous admettons à ce stade qu'il est possible de donner un sens à l'intégrale d'une fonction continue $f\colon I \to \mathbb{K}$ entre deux bornes a et b arbitrairement choisies dans I. Celle-ci est notée

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{ou encore} \quad \int_a^b f.$$

1. L'égalité écrite n'est donc pas une « véritable » égalité. Il s'agit plutôt d'une égalité *modulo* une constante, c'est-à-dire une égalité moyennant le choix d'une bonne constante.

2. Une fonction dérivable est continue et l'image d'un intervalle par une fonction continue est assurément un intervalle (Th. 14 p. 235).

4.2.1 Théorème fondamental de l'intégration

Théorème 2 (Théorème fondamental de l'intégration)
Si f est une fonction continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et si a est un élément de I, la fonction

$$x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est une primitive de f sur I. Plus précisément, c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

On retient que toute fonction continue possède des primitives[1] et l'on dispose de la formule de dérivation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x).$$

La détermination d'une primitive permet alors le calcul d'intégrales :

Théorème 3
Si f est une fonction continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et si F en est une primitive sur I alors, pour tous réels a et b choisis dans I,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

4.2.2 Changement de variable

Définition

On dit qu'une fonction $f\colon I \to \mathbb{K}$ est de classe C^1 si elle est dérivable et si sa dérivée est une fonction continue.

Théorème 4 (Formule de changement de variable)
Si $u\colon I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 et si f est une fonction continue définie sur l'intervalle $u(I)$ alors, pour tous a et b choisis dans I,

$$\int_{x=u(a)}^{u(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{t=a}^{b} f\big(u(t)\big)u'(t)\,\mathrm{d}t.$$

La transformation d'une intégrale en l'autre (quel que soit le sens dans lequel on opère) s'appelle la *réalisation du changement de variable* définie par la relation $x = u(t)$.
En pratique, on met en place le changement de variable $x = u(t)$ en écrivant le calcul différentiel

$$\mathrm{d}x = u'(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Cela ne signifie pour autant qu'il est possible d'exprimer celles-ci à l'aide des fonctions usuelles. Les fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$, $t \mapsto \mathrm{e}^t/t$, $t \mapsto \sin(t)/t$ et $t \mapsto 1/\ln(t)$ sont des exemples de fonctions continues pour lesquelles il est impossible d'exprimer les primitives à l'aide des fonctions usuelles !

et en tenant compte de la modification des bornes d'intégration :

$$\begin{cases} \text{pour } t = a, & x = u(a) \\ \text{pour } t = b, & x = u(b). \end{cases}$$

Il est possible de réaliser un changement de variable lors d'un calcul de primitive en écrivant directement

$$\int f\big(u(t)\big)u'(t)\,\mathrm{d}t \underset{x=u(t)}{=} \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) = F\big(u(t)\big).$$

Ce protocole peut permettre de révéler une forme composée $u'F'(u)$ sans avoir préalablement reconnu la fonction F.

4.2.3 Intégration par parties

Théorème 5 (Formule d'intégration par parties)
Si u et v sont des fonctions de classe C^1 de I vers $\mathbb{K}$ alors, pour tous réels a et b choisis dans I,

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour réaliser une intégration par parties, il peut être pertinent d'identifier les fonctions u' et v de départ puis les fonctions u et v' associées.
La formule d'intégration par parties peut aussi être mise en place lors d'un calcul de primitive en écrivant simplement

$$\int u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = u(t)v(t) - \int u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

4.3 Exercices d'apprentissage

4.3.1 Calculs d'intégrales

Exercice 1
Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t$ (avec $n \in \mathbb{N}$) (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ (c) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$ (e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ (f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

Solution

méthode

Ces premières intégrales se calculent directement par la détermination d'une primitive (Th. 3 p. 123).

(a)

$$\int_0^1 t^n \, dt = \left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

(b)

$$\int_1^2 \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

(c)

$$\int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_1^4 = 2\sqrt{4} - 2 = 2.$$

(d) **méthode**

On linéarise $\cos^2 t$ par la formule $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$.

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \left(1 + \cos(2t)\right) dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

(e) **méthode**

On reconnaît la dérivée de la fonction arctan.

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \left[\arctan t\right]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

(f) **méthode**

On réécrit le numérateur $t^2 = (1+t^2) - 1$.

$$\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} \, dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = \left[t - \arctan t\right]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 2

Calculer par changement de variable :

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{e^t + 1}$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{2 - \cos^2 t} \, dt$ (c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t + t^3}$.

Solution

(a) On réalise le changement de variable $x = \mathrm{e}^t$.

méthode

On exprime dx en fonction de dt (dans un sens ou dans l'autre) et l'on transpose l'intégrale étudiée en adaptant les bornes d'intégration (Th. 4 p. 123).

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et l'on a $\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ donc[1] $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/x$. Par ce changement de variable

$$\int_{t=0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1} = \int_{x=1}^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}.$$

En écrivant le numérateur $1 = (x+1) - x$, on poursuit le calcul

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1} = \int_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \Big[\ln x - \ln(x+1)\Big]_1^{\mathrm{e}} = 1 - \ln(\mathrm{e}+1) + \ln 2.$$

(b) **méthode**

La présence du facteur $\cos t\,\mathrm{d}t$ invite au changement de variable $x = \sin t$.

La fonction $t \mapsto \cos t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$.

méthode

On exprime le contenu de l'intégrale en fonction de $\cos t\,\mathrm{d}t$ et de $\sin t$ avant de réaliser le changement de variable.

$$\int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\cos t}{2-\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{1+\sin^2 t} = \int_{x=0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \Big[\arctan x\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

(c) On peut écrire

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t+t^3} = \int_1^2 \frac{1}{1+t^2}\,\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

méthode

Le changement de variable $x = 1/t$ transforme $\mathrm{d}t/t$ en $-\mathrm{d}x/x$.

La fonction $t \mapsto 1/t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t/t^2$ donc $\mathrm{d}t/t = -\mathrm{d}x/x$. Par changement de variable

$$\int_{t=1}^{2} \frac{1}{1+t^2}\,\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_{x=1}^{1/2} -\frac{x^2}{1+x^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

méthode

Lorsque le changement de variable est décroissant, les bornes d'intégration sont renversées. On exploite le signe apparu lors du calcul différentiel pour remettre ces bornes en bon ordre.

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t+t^3} = \int_{1/2}^{1} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{5}\right).$$

1. On peut aussi inverser ce changement de variable et écrire $t = \ln x$ donc $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/x$.

Exercice 3

Calculer par intégration par parties :

(a) $\displaystyle\int_0^1 (t-1)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \ln(t^2+1)\,\mathrm{d}t$ (c) $\displaystyle\int_0^{1/2} \arcsin t\,\mathrm{d}t$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin t\,\mathrm{d}t$ (e) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ (f) $\displaystyle\int_0^1 t(\arctan t)^2\,\mathrm{d}t$.

Solution

(a) **méthode**

> On réalise une intégration par parties faisant disparaître le terme polynomial par dérivation.

On pose

$$\begin{cases} u'(t) = \mathrm{e}^{2t} \\ v(t) = t-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} \\ v'(t) = 1. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et par intégration par parties (Th. 5 p. 124)

$$\int_0^1 (t-1)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t-1}{2}\mathrm{e}^{2t}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2t}\right]_0^1 = \frac{3-\mathrm{e}^2}{4}.$$

(b) **méthode**

> On réalise une intégration par parties visant à faire disparaître le terme logarithme par dérivation. On intègre alors le facteur 1 qui le multiplie.

On pose

$$\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \ln(t^2+1) \end{cases} \qquad \begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \frac{2t}{t^2+1}. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et par intégration par parties

$$\int_0^1 \ln(t^2+1)\,\mathrm{d}t = \left[t\ln(t^2+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \ln 2 - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$
$$= \ln 2 - 2\left[t - \arctan t\right]_0^1 = \ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2.$$

(c) **méthode**

> On fait disparaître par dérivation le terme $\arcsin t$ et l'on intègre en contrepartie le facteur 1 qui le multiplie.

On pose

$$\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \arcsin t \end{cases} \qquad \begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et par intégration par parties

$$\int_0^{1/2} \arcsin t \,\mathrm{d}t = \Big[t \arcsin t\Big]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{12} - \int_0^{1/2} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

On reconnaît dans la nouvelle intégrale une forme $u'/\sqrt{u}$ en $u(t) = 1 - t^2$ et l'on peut poursuivre le calcul

$$\int_0^{1/2} \arcsin t \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{12} + \Big[\sqrt{1-t^2}\Big]_0^{1/2} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

(d) **méthode**

> On réalise une intégration par parties faisant disparaître le terme polynomial par dérivation.

On pose

$$\begin{cases} u'(t) = \sin t \\ v(t) = t \end{cases} \qquad \begin{cases} u(t) = -\cos t \\ v'(t) = 1. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et par intégration par parties

$$\int_0^{\pi} t \sin t \,\mathrm{d}t = \Big[-t\cos t\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos t \,\mathrm{d}t = \pi + \Big[\sin t\Big]_0^{\pi} = \pi.$$

(e) **méthode**

> On intègre par parties sachant que $1/\cos^2 t$ est la dérivée de $\tan t$.

On pose

$$\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{\cos^2 t} \\ v(t) = t \end{cases} \qquad \begin{cases} u(t) = \tan t \\ v'(t) = 1. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et par intégration par parties

$$\int_0^{\pi/4} \frac{t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \Big[t\tan t\Big]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan t \,\mathrm{d}t.$$

En écrivant $\tan t$ comme un quotient, on fait apparaître une forme u'/u en $u(t) = \cos t$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + \Big[\ln|\cos t|\Big]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

(f) **méthode**

> On fait ici un calcul par parties qui intègre le facteur t car on ne sait pas intégrer $(\arctan t)^2$.

On pose

$$\begin{cases} u'(t) = t \\ v(t) = (\arctan t)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} u(t) = \frac{t^2}{2} \\ v'(t) = \frac{2}{1+t^2}\arctan t. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 et par intégration par parties

$$\int_0^1 t(\arctan t)^2\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{t^2}{2}(\arctan t)^2\right]_0^1}_{=\pi^2/32} - \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\arctan t\,\mathrm{d}t.$$

En écrivant le numérateur $-t^2 = 1-(1+t^2)$

$$-\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\arctan t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\arctan t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/4} \arctan t\,\mathrm{d}t.$$

La première intégrale fait apparaître une forme $u'u$ en $u(t)=\arctan t$ et la deuxième se calcule par parties en intégrant le facteur 1 qui multiplie l'arc tangente.

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\arctan t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}(\arctan t)^2\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi^2}{32}$$

$$\int_0^{\pi/4} \arctan t\,\mathrm{d}t = \Big[t\arctan t\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Finalement,

$$\int_0^1 t(\arctan t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

4.3.2 Calculs de primitives

Exercice 4

Déterminer sur les intervalles de définition que l'on précisera, une primitive de chacune des fonctions définies par les expressions ci-dessous :

(a) $\dfrac{t}{1+t^2}$ (b) $\dfrac{1}{(1+t)^2}$ (c) $\dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}$

(d) $\dfrac{t^2}{1+t^3}$ (e) $\dfrac{\ln t}{t}$ (f) $\dfrac{1}{t\ln t}$

(g) te^{-t^2} (h) $\cos t \sin t$ (i) $\tan t$.

Solution

méthode

Dans chaque cas, on reconnaît à un facteur près une forme $u'f(u)$ avec u une fonction simple et f une fonction que l'on sait directement intégrer.

(a) On reconnaît une forme u'/u avec $u(t)=1+t^2$ et donc

$$\int \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln|1+t^2| = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

(b) On reconnaît une forme u'/u^2 avec $u(t) = 1 + t$ et donc

$$\int \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{1+t} \quad \text{sur }]-\infty\,;-1[\text{ ou }]-1\,;+\infty[.$$

(c) On reconnaît une forme $u'/\sqrt{u}$ avec $u(t) = t^2 - 1$ et donc

$$\int \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{t^2-1} \quad \text{sur }]1\,;+\infty[\text{ ou }]-\infty\,;-1[.$$

(d) On reconnaît une forme u'/u avec $u(t) = 1 + t^3$ et donc

$$\int \frac{t^2}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\ln(1+t^3) \quad \text{sur }]-1\,;+\infty[.$$

(e) On reconnaît une forme $u'u$ avec $u(t) = \ln t$ et donc

$$\int \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\ln t)^2 \quad \text{sur }]0\,;+\infty[.$$

(f) On reconnaît une forme u'/u avec $u(t) = \ln t$ et donc

$$\int \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t = \ln|\ln t| \quad \text{sur }]0\,;1[\text{ ou }]1\,;+\infty[.$$

(g) On reconnaît une forme $u'e^u$ avec $u(t) = -t^2$ et donc

$$\int te^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}e^{-t^2} \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

(h) On reconnaît une forme $u'u$ avec $u(t) = \sin t$ (ou $u(t) = \cos t$) et donc [1]

$$\int \cos t \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sin^2 t \quad \left(\text{ou } -\frac{1}{2}\cos^2 t\right) \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

(i) On reconnaît une forme u'/u avec $u(t) = \cos t$ et donc

$$\int \tan t\,\mathrm{d}t = \ln|\cos t| \quad \text{sur } \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\frac{\pi}{2} + k\pi\right[\quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 5

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions ci-dessous :

(a) $x \mapsto \sin^4 x$ (b) $x \mapsto \sin x \cos^3 x$ (c) $x \mapsto \cos^5 x$.

1. Les deux expressions proposées sont égales à une constante près. On peut aussi obtenir une primitive par linéarisation en écrivant $\cos t \sin t = \frac{1}{2}\sin(2t)$ ce qui conduit à $\int \sin t \cos t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\cos(2t)$.

Solution

(a) **méthode**

> On linéarise[1] l'expression trigonométrique avant de calculer une primitive.

Par les formules d'Euler et le développement

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

on linéarise l'expression trigonométrique. Pour x réel

$$\begin{aligned}\sin^4 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 &= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} + e^{-4ix}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right) + \frac{3}{8}\\ &= \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}\end{aligned}$$

On peut ensuite facilement intégrer chaque terme

$$\int \sin^4 x \, dx = \frac{1}{32}\sin(4x) - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x.$$

(b) **méthode**

> Inutile de linéariser lorsque l'on reconnaît une forme $u'u^n$.

Pour $u(x) = \cos x$, on reconnaît une forme $u'u^3$ et donc

$$\int \sin x \cos^3 x = -\frac{1}{4}\cos^4 x.$$

(c) **méthode**

> En exploitant $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, on écrit $\cos^5 x$ comme combinaison de termes $\cos x \sin^n x$ facile à intégrer.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos^5 x = \cos x\big(1 - \sin^2 x\big)^2 = \cos x - 2\cos x \sin^2 x + \cos x \sin^4 x$$

et donc

$$\int \cos^5 x \, dx = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x.$$

Exercice 6

Soit $a, \omega \in \mathbb{R}$ non tous deux nuls. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ des fonctions

$$t \mapsto \cos(\omega t)e^{at} \quad \text{et} \quad t \mapsto \sin(\omega t)e^{at}.$$

1. On retrouvera décrite dans le sujet 5 p. 93 la démarche de linéarisation.

Solution

méthode

On détermine une primitive de $e^{\lambda t}$ avec $\lambda = a + i\omega \neq 0$ puis on considère les parties réelle et imaginaire[1].

On a

$$\int e^{\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda t} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

et donc

$$\int \big(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\big)e^{at}\,dt = \frac{a - i\omega}{a^2+\omega^2}\big(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\big)e^{at}.$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire, on obtient

$$\int \cos(\omega t)e^{at}\,dt = \frac{a\cos(\omega t) + \omega\sin(\omega t)}{a^2+\omega^2}e^{at} \text{ et}$$
$$\int \sin(\omega t)e^{at}\,dt = \frac{a\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t)}{a^2+\omega^2}e^{at}.$$

Exercice 7

En intégrant par parties, déterminer une primitive des fonctions suivantes sur leur intervalle de définitions

(a) $t \mapsto \ln t$ (b) $t \mapsto (t^2 - t + 1)e^{-t}$ (c) $t \mapsto t^2 \sin t$.

Solution

(a) **méthode**

La dérivée de la fonction logarithme étant une fonction simple, on opère une intégration par parties dérivant le logarithme. En contrepartie, on intègre le facteur 1 qui le multiplie.

On pose

$$\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \ln t \end{cases} \qquad \begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = 1/t. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et la formule d'intégration par parties

$$\int u'v = uv - \int uv'$$

donne

$$\int \ln t\,dt = t\ln t - \int t \times \frac{1}{t}\,dt = t\ln t - t.$$

Plus généralement, une intégration par parties est pertinente pour calculer des primitives de fonctions dont la dérivée est plus simple que la fonction elle-même. C'est le cas notamment des fonctions arcsin, arccos et arctan.

1. On peut aussi opérer un calcul par parties mais celui-ci est un peu plus long.

(b) **méthode**

> On opère des intégrations par parties qui font disparaître le terme polynomial à force de dérivation.

On pose

$$\begin{cases} u'(t) = \mathrm{e}^{-t} \\ v(t) = t^2 - t + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} u(t) = -\mathrm{e}^{-t} \\ v'(t) = 2t - 1. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et la formule d'intégration par parties donne

$$\int (t^2 - t + 1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -(t^2 - t + 1)\mathrm{e}^{-t} + \int (2t - 1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

On répète une intégration par parties analogue

$$\int (2t - 1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -(2t - 1)\mathrm{e}^{-t} + 2\int \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -(2t + 1)\mathrm{e}^{-t}.$$

Finalement,

$$\int (t^2 - t + 1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -(t^2 + t + 2)\mathrm{e}^{-t}.$$

De façon générale, on peut calculer par intégrations par parties successives une primitive d'une fonction $t \mapsto P(t)\mathrm{e}^{\alpha t}$ avec P une fonction polynomiale et $\alpha \in \mathbb{C}$: à chaque intégration par parties on dérive le terme polynomial jusqu'à ce qu'il disparaisse.

(c) **méthode**

> Comme au-dessus, on intègre par parties afin de faire disparaître le terme polynomial à force de dérivation.

On pose

$$\begin{cases} u'(t) = \sin t \\ v(t) = t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} u(t) = -\cos t \\ v'(t) = 2t. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et la formule d'intégration par parties donne

$$\int t^2 \sin t\,\mathrm{d}t = -t^2\cos t + \int 2t\cos t\,\mathrm{d}t.$$

On répète une intégration par parties analogue

$$\int 2t\cos t\,\mathrm{d}t = 2t\sin t - 2\int \sin t\,\mathrm{d}t = 2t\sin t + 2\cos t.$$

Finalement,

$$\int t^2 \sin t\,\mathrm{d}t = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t.$$

Exercice 8

Soit a un réel strictement positif. Déterminer

(a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2 + u^2}$ (b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2 - u^2}}$.

Solution

(a) **méthode**

En écrivant $u = at$, on peut factoriser $a^2 + u^2$ et faire apparaître $1 + t^2$.

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} \underset{u=at}{=} \int \frac{a\,\mathrm{d}t}{a^2+a^2t^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

On reconnaît la dérivée de la fonction arctan et l'on achève[1] le calcul en revenant à la variable initiale

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\arctan t = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right).$$

(b) On suit le même procédé en faisant apparaître cette fois la dérivée de la fonction arcsin

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} \underset{u=at}{=} \int \frac{a\,\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2}\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right).$$

Exercice 9

Soit p et q deux réels. Déterminer sur ses intervalles de définition une primitive de

$$x \mapsto \frac{1}{x^2+2px+q}$$

en discutant selon le signe de[2] $\Delta' = p^2 - q$.

Solution

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Cas : $\Delta' = 0$. On écrit $x^2 + 2px + q = (x+p)^2$ et il est alors possible d'exprimer immédiatement une primitive

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2px+q} = -\frac{1}{x+p} \quad \text{sur }]-\infty\,;-p[\text{ ou }]-p\,;+\infty[.$$

Cas : $\Delta' > 0$. Le trinôme exprimant le dénominateur possède deux racines réelles distinctes $x_1 = -p - \sqrt{\Delta'}$ et $x_2 = -p + \sqrt{\Delta'}$ et l'on peut écrire la factorisation

$$x^2 + 2px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

méthode

On décompose[3] la fraction en somme de termes $\frac{1}{x-x_1}$ et $\frac{1}{x-x_2}$ faciles à intégrer.

1. La formule obtenue sera retenue.

2. Le réel Δ' correspond au quart du discriminant usuel du trinôme $x^2 + 2px + q$: on l'appelle *discriminant réduit*. Dans le contexte, il permet de proposer une expression simple des racines du trinôme à savoir $-p \pm \sqrt{\Delta'}$ si $\Delta' \geqslant 0$.

3. Il s'agit d'une décomposition en éléments simples, technique étudiée dans le chapitre 5 de l'ouvrage *Exercices d'algèbre et de probabilités MPSI*.

Au numérateur, on fait apparaître $x_2 - x_1 = (x - x_1) - (x - x_2)$ avant de répartir la division par $(x - x_1)(x - x_2)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2 + 2px + q} &= \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{(x - x_1) - (x - x_2)}{(x - x_1)(x - x_2)} \\ &= \frac{1}{x_2 - x_1}\left(\frac{1}{x - x_2} - \frac{1}{x - x_1}\right).\end{aligned}$$

On peut alors calculer une primitive en intégrant chacun des deux termes

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2px + q} = \frac{1}{x_2 - x_1} \ln\left|\frac{x - x_2}{x - x_1}\right| \quad \text{sur }]-\infty\,;x_1[,\ ]x_1\,;x_2[\text{ ou }]x_2\,;+\infty[.$$

Cas : $\Delta' < 0$. Le trinôme du dénominateur ne possède pas de racines réelles.

méthode

On exprime le trinôme sous forme canonique.

On écrit

$$\begin{aligned}x^2 + 2px + q &= \left(x^2 + 2px + p^2\right) + q - p^2 \\ &= (x + p)^2 + a^2 \quad \text{avec} \quad a = \sqrt{-\Delta'}.\end{aligned}$$

méthode

Après translation de la variable, on exploite la formule [1]

$$\int \frac{1}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{u}{a}\right).$$

Par le changement de variable $u = x + p$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2px + q} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x + p}{a}\right) \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Exercice 10

Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ d'écriture algébrique $a + ib$. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de

$$t \mapsto \frac{1}{t - \lambda}.$$

1. Voir sujet 8 p. 133.

Solution

méthode

On intègre séparément la partie réelle et la partie imaginaire.

En multipliant par la quantité conjuguée, on a pour tout t réel

$$\frac{1}{t-\lambda} = \frac{t-a+\mathrm{i}b}{(t-a)^2+b^2} = \frac{t-a}{(t-a)^2+b^2} + \mathrm{i}\frac{b}{(t-a)^2+b^2}.$$

D'une part,

$$\int \frac{t-a}{(t-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left|(t-a)^2+b^2\right| = \ln|t-\lambda|.$$

D'autre part[1],

$$\int \frac{b}{(t-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}t = \arctan\left(\frac{t-a}{b}\right).$$

On en déduit

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t-\lambda} = \ln|t-\lambda| + \mathrm{i}\arctan\left(\frac{t-a}{b}\right) \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

4.4 Exercices d'entraînement

4.4.1 Calculs d'intégrales

Exercice 11 *

Pour $m, n \in \mathbb{N}$, calculer

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t.$$

Solution

méthode

On linéarise l'expression trigonométrique, soit par les formules d'Euler, soit par l'identité

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big).$$

Pour tout $t \in [0\,;2\pi]$, on a

$$\cos(mt)\cos(nt) = \frac{1}{2}\Big(\cos\big((m+n)t\big) + \cos\big((m-n)t\big)\Big).$$

méthode

On intègre $t \mapsto \cos(\alpha t)$ en $t \mapsto \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha t)$ lorsque α n'est pas nul.

1. En posant $u = t-a$ et en exploitant la formule $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+b^2} = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{u}{b}\right)$.

La poursuite du calcul nécessite de discuter selon l'éventuelle nullité de $m+n$ et de $m-n$.

Cas : $m=n=0$. Un calcul direct est possible

$$I_{0,0}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi.$$

Cas : $m=n\neq 0$.

$$I_{n,n}=\int_0^{2\pi}\cos^2(nt)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos(2nt)+1\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n}\sin(2nt)+t\right]_0^{2\pi}=\pi.$$

Cas : $m\neq n$ (donc $m-n\neq 0$ et $m+n\neq 0$).

$$\begin{aligned}I_{m,n}&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos\big((m+n)t\big)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos\big((m-n)t\big)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\big((m+n)t\big)}{m+n}\right]_0^{2\pi}+\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\big((m-n)t\big)}{m-n}\right]_0^{2\pi}=0.\end{aligned}$$

Exercice 12 *

Calculer

$$\int_0^{\pi}t\sin(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Solution

méthode

> L'intégrale étudiée est la partie imaginaire d'une intégrale que l'on peut calculer par parties.

On introduit l'intégrale complexe

$$\int_0^{\pi}t\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\,\mathrm{d}t.$$

On pose

$$\begin{cases}u'(t)=\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\\ v(t)=t\end{cases}\qquad\begin{cases}u(t)=\frac{1}{\mathrm{i}-1}\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\\ v'(t)=1.\end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et la formule d'intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}t\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\,\mathrm{d}t&=\left[\frac{t}{\mathrm{i}-1}\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\right]_0^{\pi}-\frac{1}{\mathrm{i}-1}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{\pi\mathrm{e}^{-\pi}}{1-\mathrm{i}}-\frac{1}{(\mathrm{i}-1)^2}\left[\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi\mathrm{e}^{-\pi}}{1-\mathrm{i}}-\frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

En considérant, la partie imaginaire

$$\int_0^{\pi}t\sin(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\big(1+(1+\pi)\mathrm{e}^{-\pi}\big).$$

Exercice 13 **
Calculer
$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Solution
Notons que l'intégrale étudiée existe car la fonction intégrée est définie et continue sur le segment $[0\,;1]$ puisque le dénominateur ne s'annule pas.

méthode

> On réécrit le numérateur afin de faire apparaître la dérivée du dénominateur à un facteur et une constante additive près :
> $$x = \frac{1}{2}(2x+1) - \frac{1}{2}.$$

L'intégrale étudiée peut alors être décomposée en la somme de deux intégrales que l'on sait chacune calculer
$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x.$$

D'une part,
$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln\big(x^2+x+1\big)\Big]_0^1 = \ln 3.$$

D'autre part, on écrit pour $x \in [0\,;1]$ le trinôme du dénominateur sous forme canonique
$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

et l'on obtient en suivant la démarche présentée dans le sujet 9 p. 134
$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x \underset{a=\frac{\sqrt{3}}{2}}{=} \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Finalement,
$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

Exercice 14 **
Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer
$$\int_0^{\pi/2} \cos(nx)\cos^n x\,\mathrm{d}x.$$

Solution

méthode

L'intégrale étudiée est la partie réelle d'une intégrale complexe que l'on peut exprimer.

On introduit l'intégrale complexe

$$\int_0^{\pi/2} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\cos x\right)^n \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \left(\cos^2 x + \mathrm{i}\sin x\cos x\right)^n \mathrm{d}x.$$

On peut écrire pour $x \in [0\,;\pi/2]$

$$\cos^2 x + \mathrm{i}\sin x\cos x = \frac{1}{2}\big(1 + \underbrace{2\cos^2 x - 1}_{=\cos 2x} + \mathrm{i}\,\underbrace{2\sin x\cos x}_{=\sin 2x}\big)$$

et donc

$$\int_0^{\pi/2} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\cos x\right)^n \mathrm{d}x = \frac{1}{2^n}\int_0^{\pi/2}\left(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\right)^n \mathrm{d}x.$$

On poursuit en appliquant la formule du binôme

$$\int_0^{\pi/2} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\cos x\right)^n \mathrm{d}x = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\underbrace{\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x}_{=I_k}.$$

Lorsque $k = 0$, l'intégrale I_k vaut le réel $\pi/2$. Lorsque $k \neq 0$, l'intégrale I_k est un imaginaire pur et sa partie réelle est donc nulle.

Par passage à la partie réelle, on conclut

$$\int_0^{\pi/2}\cos(nx)\cos^n x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Exercice 15 **

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$I_n = \int_0^{n\pi} t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t.$$

Solution

Il n'est pas possible de d'exprimer directement une primitive de la fonction intégrée à cause de la valeur absolue.

méthode

On résout la valeur absolue en découpant l'intégrale en les $k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Par la relation de Chasles

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} t\,|\sin t|\,\mathrm{d}t\right).$$

Par la translation $t = x + k\pi$, on ramène chaque intégrale sur l'intervalle $[0\,;\pi]$

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_0^{\pi}(x+k\pi)\left|\sin(x+k\pi)\right|\,\mathrm{d}x\right)$$

La fonction sin vérifie[1] $\sin(x+\pi) = -\sin x$ et donc $\left|\sin(x+k\pi)\right| = |\sin x| = \sin x$ pour tout x de $[0\,;\pi]$. On peut alors écrire

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x\right) + \sum_{k=0}^{n-1}\left(k\pi\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x\right).$$

La première intégrale se calcule par parties comme déjà vu dans le sujet 3 p. 127, la seconde est immédiate et l'on peut conclure

$$I_n = n\pi + n(n-1)\pi = n^2\pi.$$

4.4.2 Intégration par parties

Exercice 16 *

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} t^n \ln t\,\mathrm{d}t.$$

Solution

méthode

On réalise une intégration par parties dérivant le logarithme.

On pose

$$\begin{cases} u'(t) = t^n \\ v(t) = \ln t \end{cases} \qquad \begin{cases} u(t) = t^{n+1}/(n+1) \\ v'(t) = 1/t. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et la formule d'intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} t^n\ln t\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\ln t\right]_1^{\mathrm{e}} - \frac{1}{n+1}\int_1^{\mathrm{e}} t^n\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{e}^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\left[t^{n+1}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{n\mathrm{e}^{n+1}+1}{(n+1)^2}.\end{aligned}$$

Exercice 17 **

Calculer

$$\int_0^{1/2} \mathrm{e}^{\arcsin t}\,\mathrm{d}t.$$

1. On dit que la fonction sinus est π-*antipériodique*.

Solution

méthode

‖ Par parties, on intègre le facteur 1 multipliant l'exponentielle.

On pose

$$\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \mathrm{e}^{\arcsin t} \end{cases} \qquad \begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{e}^{\arcsin t}. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et la formule d'intégration par parties donne

$$\int_0^{1/2} \mathrm{e}^{\arcsin t}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\Big[t\mathrm{e}^{\arcsin t}\Big]_0^{1/2}}_{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\pi/6}} - \int_0^{1/2} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{e}^{\arcsin t}\,\mathrm{d}t.$$

On poursuit par une nouvelle[1] intégration par parties avec

$$\begin{cases} u'(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \\ v(t) = \mathrm{e}^{\arcsin t} \end{cases} \qquad \begin{cases} u(t) = -\sqrt{1-t^2} \\ v'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{e}^{\arcsin t}. \end{cases}$$

On obtient alors la relation

$$\int_0^{1/2} \mathrm{e}^{\arcsin t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\pi/6} + \underbrace{\Big[\sqrt{1-t^2}\mathrm{e}^{\arcsin t}\Big]_0^{1/2}}_{\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\pi/6}-1} - \int_0^{1/2} \mathrm{e}^{\arcsin t}\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit

$$\int_0^{1/2} \mathrm{e}^{\arcsin t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\pi/6} - 1\right).$$

Exercice 18 *

Pour $p, q \in \mathbb{N}$, calculer

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t.$$

Solution

méthode

‖ Par intégration par parties, on forme une relation liant $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$.

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$\begin{cases} u'(t) = t^p \\ v(t) = (1-t)^q \end{cases} \qquad \begin{cases} u(t) = \frac{1}{p+1}t^{p+1} \\ v'(t) = -q(1-t)^{q-1}. \end{cases}$$

1. Il importe de ne pas faire l'intégration par parties précédente en sens inverse au risque de ne pas progresser !

Les fonctions u et v sont de classe C^1 et la formule d'intégration par parties donne

$$\int_0^1 t^p(1-t)^q \,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{p+1}t^{p+1}(1-t)^q\right]_0^1 + \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t.$$

Autrement dit

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1}I_{p+1,q-1}. \qquad (*)$$

Par la relation $(*)$, on peut aussi exprimer $I_{p+1,q-1}$ en fonction de $I_{p+2,q-2}$ et donc

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1} \times \frac{q-1}{p+2} I_{p+2,q-2}.$$

On répète l'opération jusqu'à exprimer $I_{p,q}$ en fonction de $I_{n,0}$ avec[1] $n = p+q$.

Sachant que le dernier emploi de la relation $(*)$ est réalisé pour exprimer $I_{p+q-1,1}$ en fonction de $I_{p+q,0}$, on a

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1} \times \frac{q-1}{p+2} \times \cdots \times \underbrace{\frac{1}{p+q} I_{p+q,0}}_{=I_{p+q-1,1}}$$

avec

$$I_{p+q,0} = \int_0^1 t^{p+q}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{p+q+1}t^{p+q+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+q+1}.$$

Enfin, en exprimant le produit d'entiers consécutifs à l'aide de nombres factoriels, on obtient

$$I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!} \quad \text{car} \quad (p+1)(p+2)\dots(p+q+1) = \frac{(p+q+1)!}{p!}.$$

Exercice 19 ** (Intégrales de Wallis)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

(b) Donner une expression de I_n à l'aide de nombres factoriels en discutant selon la parité de l'entier naturel n.

1. On détermine la valeur de n en remarquant que la somme des deux indices reste constante dans la formule $(*)$.

Solution

(a) **méthode**

> Souvent, les relations de récurrence sur les intégrales s'obtiennent par intégration par parties.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On réalise une intégration par parties à partir de l'écriture

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin t \times \sin^{n+1} t \, dt.$$

On pose alors

$$\begin{cases} u'(t) = \sin t \\ v(t) = \sin^{n+1} t \end{cases} \qquad \begin{cases} u(t) = -\cos t \\ v'(t) = (n+1)\cos t \sin^n t. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et la formule d'intégration par parties donne

$$I_{n+2} = \Big[-\cos t \sin^{n+1} t\Big]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^n t \, dt.$$

En écrivant

$$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$$

on obtient l'équation

$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t)\sin^n t \, dt = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}.$$

On en déduit la relation voulue

$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n.$$

(b) **méthode**

> La relation de récurrence obtenue progressant par pas de deux, le calcul de I_n se ramène à celui de I_0 ou de I_1 selon la parité de n.

Cas : n impair.

méthode

> Pour la poursuite du calcul, il importe de signifier l'imparité de n en écrivant $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$.

On exprime I_{2p+1} en fonction de I_{2p-1} puis de I_{2p-3}

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} I_{2p-3}.$$

On peut alors proposer[1] une expression de I_{2p+1} en fonction[2] de I_1.

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \cdots \times \underbrace{\frac{2}{3}I_1}_{=I_3}$$

Le calcul de I_1 est quant à lui immédiat

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt = \Big[-\cos t \Big]_0^{\pi/2} = 1.$$

Enfin, en exprimant les produits d'entiers pairs et impairs à l'aide de nombres factoriels[3], on conclut

$$I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Cas : n pair. On écrit $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$ puis on exprime I_{2p} en fonction de I_{2p-2}, puis de I_{2p-4} et ainsi de suite jusqu'à I_0 :

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} I_{2p-4} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} I_0.$$

Enfin, on a immédiatement $I_0 = \pi/2$ et l'on peut exprimer I_{2p} à l'aide de nombres factoriels

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 20 **

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite exprimer la primitive sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0 de la fonction

$$f_n : x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

(a) Justifier l'existence et l'unicité de la fonction cherchée.

Celle-ci est désormais notée F_n.

(b) Former une relation de récurrence entre F_{n+1} et F_n.

(c) Exprimer $F_2(x)$ et $F_3(x)$ pour tout x réel.

1. On justifie la validité de cette expression en raisonnant par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.
2. Lorsque l'on forme cette expression, le dernier facteur est obtenu par l'expression de I_3 en fonction de I_1.
3. Voir sujet 5 du chapitre 2 de l'ouvrage *Exercices d'algèbre et de probabilités MPSI*.

Solution

(a) **méthode**

> L'existence de primitives est assurée pour toute fonction continue définie sur un intervalle (Th. 2 p. 123).

La fonction f_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Elle possède donc une unique primitive s'annulant en 0. Celle est déterminée par :

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

(b) **méthode**

> Par parties, on intègre le facteur 1 qui multiplie $f_n(t)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose

$$\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^n} \end{cases} \qquad \begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = -2n\dfrac{t}{(1+t^2)^{n+1}} \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et la formule d'intégration par parties donne

$$F_n(x) = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^x + 2n\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t.$$

méthode

> Dans la nouvelle intégrale, on écrit le numérateur $t^2 = (1+t^2) - 1$.

On a

$$\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$F_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\big(F_n(x) - F_{n+1}(x)\big).$$

Finalement, en réorganisant les membres, on obtient

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{2n}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}F_n(x).$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a immédiatement

$$F_1(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \big[\arctan t\big]_0^x = \arctan x$$

et la relation de récurrence donne

$$F_2(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\arctan x$$

$$F_3(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{x}{1+x^2} + \frac{3}{8}\arctan x.$$

4.4.3 Changement de variable

Exercice 21 *
Calculer
$$\int_1^{e^\pi} \sin(\ln t)\, dt.$$

Solution

méthode
‖ L'expression fonctionnelle invite au changement de variable $x = \ln t$.

La fonction $t \mapsto \ln t$ est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut donc réaliser le changement de variable $x = \ln t$. En écrivant $t = e^x$, on observe $dt = e^x\, dx$ et la formule de changement de variable (Th. 4 p. 123) donne

$$\int_{t=1}^{e^\pi} \sin(\ln t)\, dt = \int_{x=0}^{\pi} \sin(x) e^x\, dx.$$

L'intégrale étudiée correspond alors à la partie imaginaire de l'intégrale complexe

$$\int_0^\pi e^{(i+1)x}\, dx = \left[\frac{1}{i+1} e^{(i+1)x}\right]_0^\pi = -\frac{e^\pi + 1}{i+1}$$

et donc

$$\int_1^{e^\pi} \sin(\ln t)\, dt = \frac{1}{2}(e^\pi + 1).$$

Exercice 22 *
Calculer
$$\int_0^1 \frac{dt}{\operatorname{ch} t}.$$

Solution

méthode
‖ On réalise le changement de variable défini par la relation $x = e^t$.

La fonction $t \mapsto e^t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et l'on peut donc réaliser le changement de variable $x = e^t$. Pour celui-ci, $t = \ln x$ et donc $dt = dx/x$. On obtient la transformation

$$\int_0^1 \frac{dt}{\operatorname{ch} t} = \int_{t=0}^1 \frac{2\, dt}{e^t + e^{-t}} = \int_{x=1}^{e} \frac{2}{x + \frac{1}{x}} \cdot \frac{dx}{x} = \int_{x=1}^{e} \frac{2\, dx}{x^2 + 1}.$$

On peut alors achever le calcul

$$\int_0^1 \frac{dt}{\operatorname{ch} t} = \Big[2 \arctan x\Big]_1^e = 2\arctan(e) - \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 23 *

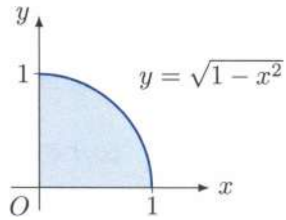
Calculer
$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$
Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Solution

méthode

‖ Afin de simplifier la racine, on réalise le changement de variable[1] $t = \sin x$.

La fonction $x \mapsto \sin x$ est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut donc réaliser le changement de variable proposé, même si celui-ci opère dans le sens inverse du « sens usuel »[2].



On a $\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$ et la formule de changement de variable donne
$$\int_{t=0}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{x=0}^{\pi/2} \cos^2 x\,\mathrm{d}x.$$
Cette dernière intégrale a déjà été calculée dans le sujet 1 p. 124 et l'on conclut
$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$
L'intégrale calculée correspond à l'aire d'un quart de disque de rayon unité.

Exercice 24 **

(a) Observer
$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right)\mathrm{d}t.$$
(b) En déduire
$$\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t.$$

Solution

(a) Le changement de variable $u = \pi/4 - t$ donne directement
$$\int_{t=0}^{\pi/4} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t = \int_{u=\pi/4}^{0} -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right)\mathrm{d}u = \int_{u=0}^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right)\mathrm{d}u.$$

1. On peut aussi réaliser le changement de variable $t = \cos x$ mais celui proposé à l'avantage d'être croissant quand x parcourt $[0\,;\pi/2]$ ce qui le rend « plus simple ».

2. En limitant la variable x à évoluer dans $[-\pi/2\,;\pi/2]$, on peut aussi comprendre ce changement de variable comme défini par la relation $x = \arcsin t$.

Il suffit ensuite de renommer la variable d'intégration et d'utiliser la parité du cosinus pour obtenir l'identité voulue.

(b) On exprime la fonction tangente à l'aide des fonctions sinus et cosinus

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/4} \ln\left(\frac{\cos t+\sin t}{\cos t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/4} \ln(\cos t+\sin t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/4} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

méthode

On transforme[1] l'écriture $a\cos t + b\sin t$ en $A\cos(t-\varphi)$.

Pour $t \in [0\,;\pi/4]$, on écrit

$$\cos t+\sin t = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\right) = \sqrt{2}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$$

puis

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} \ln\sqrt{2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right)\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/4} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t.$$

En simplifiant, on conclut

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi\ln 2}{8}.$$

Exercice 25 ***

Pour $\alpha \in \,]0\,;\pi[$, calculer par le changement de variable $t=\tan(x/2)$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\alpha}{1+\cos x\cos\alpha}\,\mathrm{d}x.$$

Solution

La fonction $x \mapsto \tan(x/2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;\pi/2]$, on peut donc réaliser le changement de variable défini par la relation $t=\tan(x/2)$. Pour celui-ci $x = 2\arctan t$ et donc

$$\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Au surplus, on sait[2]

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

1. La démarche est détaillée dans le sujet 3 p. 50.
2. Voir sujet 15 p. 63.

et donc

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\alpha}{1+\cos x\cos\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sin\alpha}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\cos\alpha}\cdot\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$
$$= \int_0^1 \frac{2\sin\alpha}{(1+\cos\alpha)+(1-\cos\alpha)t^2}\,\mathrm{d}t$$

puis

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\alpha}{1+\cos x\cos\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{2\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}+t^2}.$$

Par la formule $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right)$ avec $a = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\alpha}{1+\cos x\cos\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{2\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\left[\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\,t\right)\right]_0^1$$
$$= \frac{2\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}\arctan\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$
$$= \arctan\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

méthode

> On simplifie la racine en exploitant les formules
>
> $$1+\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{et} \quad 1-\cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

On conclut

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\alpha}{1+\cos x\cos\alpha}\,\mathrm{d}x = 2\arctan\sqrt{\frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}} = 2\arctan\left(\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = \alpha$$

la dernière simplification étant possible car $\alpha/2 \in \left]0\,;\pi/2\right[\subset \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$.

4.5 Exercices d'approfondissement

Exercice 26 *

En exploitant un argument de symétrie, calculer

$$I = \int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

Solution

méthode

> La fonction facteur de t dans l'intégrale est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \pi/2$. On écrit $t = \pi/2 + (t - \pi/2)$ afin d'exploiter cette symétrie[1].

Par l'écriture proposée, on sépare l'intégrale en deux

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} \frac{\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

D'une part,

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \Big[-\arctan(\cos t)\Big]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

D'autre part, la translation de variable $x = t - \pi/2$, donne

$$\int_{t=0}^{\pi} \frac{\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_{x=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x\cos x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Cette dernière intégrale est nulle car il s'agit de l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à 0.

On conclut que l'intégrale I est égale à $\pi^2/4$.

Exercice 27 *

Démontrer que, pour toute fonction polynomiale P,

$$\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t = -\mathrm{i}\int_0^{\pi} P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Solution

On peut être tenté de réaliser un changement de variable complexe $t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Cependant, seul les changements de variable définis par une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles sont possibles.

méthode

> Il suffit de vérifier la relation pour les fonctions $t \mapsto t^n$ avec $n \in \mathbb{N}$: par linéarité de l'intégrale, il sera possible d'étendre la relation à toute fonction polynomiale.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'une part,

$$\int_{-1}^{1} t^n\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_{-1}^{1} = \frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}.$$

1. On trouvera une généralisation dans le sujet 12 p. 351.

D'autre part,

$$\int_0^\pi \left(e^{i\theta}\right)^n e^{i\theta}\,d\theta = \int_0^\pi e^{i(n+1)\theta}\,d\theta = \left[\frac{1}{i(n+1)}e^{i(n+1)\theta}\right]_0^\pi = \frac{e^{i(n+1)\pi}-1}{i(n+1)}.$$

Or, on a $e^{i(n+1)\pi} = \left(e^{i\pi}\right)^{n+1} = (-1)^{n+1}$ et donc

$$-i\int_0^\pi \left(e^{i\theta}\right)^n e^{i\theta}\,d\theta = \frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1} = \int_{-1}^1 t^n\,dt.$$

Exercice 28 **

Soit λ un réel tel que $|\lambda| \neq 1$.

(a) Étudier la fonction f_λ définie sur $\mathbb{R}$ par la relation

$$f_\lambda(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1-2\lambda\cos x+\lambda^2}}.$$

(b) Calculer

$$\int_0^\pi f_\lambda(x)\,dx.$$

Solution

(a) **méthode**

> On peut écrire
> $$1-2\lambda\cos x+\lambda^2 = (\lambda-\cos x)^2+\sin^2 x.$$

On en déduit $1-2\lambda\cos x+\lambda^2 \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, sachant $|\lambda| \neq 1$, on peut affirmer $(\lambda-\cos x)^2+\sin^2 x \neq 0$. La fonction f_λ est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle est de plus 2π-périodique et impaire ce qui nous permet de limiter son étude à l'intervalle $[0\,;\pi]$.

Le cas $\lambda = 0$ est immédiat puisque $f_0(x) = \sin x$. On suppose dans la suite $\lambda \neq 0$.

Par dérivation d'un produit et d'une fonction composée, on a

$$\begin{aligned} f_\lambda'(x) &= \frac{\cos x}{\sqrt{1-2\lambda\cos x+\lambda^2}} - \frac{\lambda\sin^2 x}{\left(1-2\lambda\cos x+\lambda^2\right)^{3/2}} \\ &= \frac{\cos x\left(1-2\lambda\cos x+\lambda^2\right)-\lambda\sin^2 x}{\left(1-2\lambda\cos x+\lambda^2\right)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Le nombre dérivé $f_\lambda'(x)$ est du signe du numérateur que l'on peut écrire

$$\cos x-\lambda\left(1+\cos^2 x\right)+\lambda^2\cos x = (\cos x-\lambda)(1-\lambda\cos x).$$

Par stricte décroissance du cosinus sur $[0\,;\pi]$, cette expression s'annule en changeant de signe pour $\cos x = \lambda$ ou $\cos x = 1/\lambda$.

On obtient les variations suivantes

x	0		x_λ		π
$f_\lambda'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_\lambda(x)$	0	$\nearrow$	$f(x_\lambda)$	$\searrow$	0

Cas : $|\lambda| < 1$. On a $x_\lambda = \arccos \lambda$ et

$$f(x_\lambda) = \frac{\sin(\arccos \lambda)}{\sqrt{1 - 2\lambda\cos(\arccos\lambda) + \lambda^2}} = \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{1-\lambda^2}} = 1.$$

Cas : $|\lambda| > 1$. On a $x_\lambda = \arccos(1/\lambda)$ et

$$f(x_\lambda) = \frac{\sin\left(\arccos \frac{1}{\lambda}\right)}{\sqrt{1 - 2\lambda\cos\left(\arccos\frac{1}{\lambda}\right) + \lambda^2}} = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{\lambda^2}}}{\sqrt{\lambda^2-1}} = \frac{1}{|\lambda|}.$$

(b) Pour $\lambda = 0$, on a

$$\int_0^\pi f_0(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = 2.$$

méthode

Pour $\lambda \neq 0$, on calcule l'intégrale en reconnaissant une forme $u'/\sqrt{u}$.

On obtient

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f_\lambda(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\lambda}\Big[\sqrt{1-2\lambda\cos x+\lambda^2}\Big]_0^\pi = \frac{\sqrt{(1+\lambda)^2} - \sqrt{(1-\lambda)^2}}{\lambda}\\ &= \frac{|1+\lambda| - |1-\lambda|}{\lambda}.\end{aligned}$$

Pour $|\lambda| < 1$,

$$\int_0^\pi f_\lambda(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(1+\lambda)-(1-\lambda)}{\lambda} = 2.$$

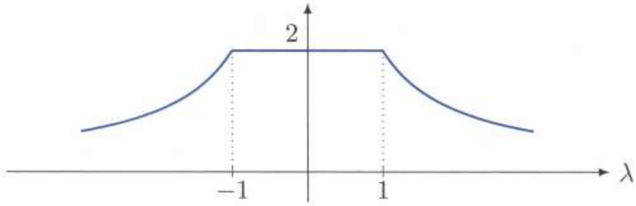
Pour $\lambda > 1$,

$$\int_0^\pi f_\lambda(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(1+\lambda)-(\lambda-1)}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}.$$

Pour $\lambda < -1$,

$$\int_0^\pi f_\lambda(x)\,\mathrm{d}x = \frac{-(1+\lambda)-(1-\lambda)}{\lambda} = -\frac{2}{\lambda}.$$

La fonction $\lambda \mapsto \int_0^\pi f_\lambda(x)\,dx$ est figurée ci-dessous.



Exercice 29 ***

Soit $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et l'application $\varphi : x \mapsto 3x^2 - 2x^3$.

(a) Vérifier que pour tout t réel

$$\varphi\left(\frac{1}{2} + \sin t\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(3t).$$

(b) Montrer

$$\int_{-1/2}^{3/2} f(3x^2 - 2x^3)\,dx = 2\int_0^1 f(3x^2 - 2x^3)\,dx.$$

Solution

(a) On sait [1] $\sin(3a) = 3\sin a - 4\sin^3 a$. Il suffit alors de développer le calcul de $\varphi(1/2 + \sin t)$ pour constater l'identité.

(b) On réalise le changement de variable $x = 1/2 + \sin t$ sur chacune des deux intégrales suivantes :

$$\int_0^1 f(3x^2 - 2x^3)\,dx = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(3t)\right)\cos t\,dt$$

$$\int_{-1/2}^{3/2} f(3x^2 - 2x^3)\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(3t)\right)\cos t\,dt.$$

On poursuit avec le changement de variable $u = 3t$,

$$\int_0^1 f(3x^2 - 2x^3)\,dx = \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin u\right)\cos\left(\frac{u}{3}\right)du$$

$$\int_{-1/2}^{3/2} f(3x^2 - 2x^3)\,dx = \frac{1}{3}\int_{-3\pi/2}^{3\pi/2} f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin u\right)\cos\left(\frac{u}{3}\right)du.$$

En découpant cette dernière intégrale en trois aux valeurs $\pi/2$ et $-\pi/2$ puis en procédant aux changements de variables affines $v = -\pi - u$, $v = u$ et $v = \pi - u$, on obtient

$$\int_{-1/2}^{3/2} f(3x^2 - 2x^3)\,dx = \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin v\right)\left(\cos\frac{v+\pi}{3} + \cos\frac{v}{3} + \cos\frac{\pi - v}{3}\right)dv.$$

1. Voir sujet 4 p. 93.

Enfin,

$$\int_{-1/2}^{3/2} f(3x^2 - 2x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin v\right)\cos\left(\frac{v}{3}\right)\mathrm{d}v$$

car après développement et simplification

$$\cos\left(\frac{v+\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{v}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi - v}{3}\right) = 2\cos\left(\frac{v}{3}\right).$$

On en déduit la relation demandée.

CHAPITRE 5

Équations différentielles linéaires

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

5.1 Équations linéaires du premier ordre

Soit a et b des fonctions continues définies sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

5.1.1 Définition

Définition

On appelle solution sur I de l'*équation différentielle scalaire linéaire du premier ordre* symbolisée par

$$(E)\colon\ y' + a(x)y = b(x)$$

toute fonction $y\colon I \to \mathbb{K}$ dérivable vérifiant

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \quad \text{pour tout } x \in I.$$

La résolution d'une équation différentielle passe par la détermination de primitives[1]. Pour cette raison, il importe que les fonctions paramètres a et b soient continues. Aussi, une primitive sur un intervalle se détermine à une constante près. Si l'on se positionne sur une réunion d'intervalles, « il y a autant de constantes que d'intervalles ». Pour cette raison, la résolution des équations différentielles se limite aux fonctions définies sur un intervalle.

1. On parle aussi de *quadrature*.

5.1.2 Équation homogène

Définition

L'équation différentielle

$$(E_h) : y' + a(x)y = 0$$

est appelée *équation homogène*[1] associée à l'équation

$$(E) : y' + a(x)y = b(x).$$

On sait résoudre une équation homogène par quadrature :

Théorème 1

Si A désigne une primitive de la fonction continue a, les solutions de l'équation homogène (E_h) sont les fonctions définies sur I par

$$y_h(x) = \lambda \mathrm{e}^{-A(x)} \quad \text{avec} \quad \lambda \text{ parcourant } \mathbb{K}.$$

5.1.3 Principe de résolution de l'équation complète

Théorème 2

Si y_p est une solution particulière de l'équation (E) alors la solution générale de cette équation sur I est de la forme

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x)$$

avec y_h la solution générale de l'équation (E_h).

Après avoir résolu l'équation homogène (E_h), il suffit donc de déterminer une solution particulière pour achever de résoudre (E). Lorsque celle-ci n'est pas apparente, on utilise la méthode de la variation de la constante.

5.1.4 Méthode de la variation de la constante

Si A désigne une primitive de la fonction continue a, la solution générale de l'équation homogène (E_h) s'exprime

$$y_h(x) = \lambda \mathrm{e}^{A(x)} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

Théorème 3 (Méthode de la variation de la constante)

Par quadrature, on peut trouver une solution particulière de l'équation (E) sur I de la forme

$$y(x) = \lambda(x)\mathrm{e}^{A(x)} \quad \text{avec} \quad \lambda \text{ une fonction dérivable sur } I.$$

1. On peut aussi parler d'équation *sans second membre*.

5.1.5 Problème et théorème de Cauchy

Définition

Résoudre un *problème de Cauchy* associé à l'équation $(E): y' + a(x)y = b(x)$ consiste à chercher, parmi ses solutions, celles vérifiant la *condition initiale* $y(x_0) = y_0$ pour $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ préalablement choisis.

Théorème 4

Soit $a, b\colon I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Il existe une unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

5.2 Équations du second ordre à coefficients constants

Soit $a, b \in \mathbb{K}$ et $f\colon I \to \mathbb{K}$ une fonction continue.

5.2.1 Définition

Définition

On appelle solution sur I de l'*équation différentielle scalaire linéaire du second ordre à coefficients constants* symbolisée par

$$(E)\colon y'' + ay' + by = f(x)$$

toute fonction $y\colon I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable vérifiant

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in I.$$

5.2.2 Équation homogène

Définition

L'équation différentielle

$$(E_h)\colon y'' + ay' + by = 0$$

est appelée *équation homogène* associée à l'équation

$$(E)\colon y'' + ay' + by = f(x).$$

Afin de résoudre l'équation homogène, on détermine les racines de l'*équation caractéristique* associée

$$r^2 + ar + b = 0$$

de discriminant Δ.

Théorème 5 (Cadre complexe[1] $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)
Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique possède deux racines complexes distinctes α et β et les fonctions complexes solutions de l'équation (E_h) sur $\mathbb{R}$ sont déterminées par

$$y_h(x) = \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \text{ parcourant } \mathbb{C}^2.$$

Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une racine double α et les fonctions complexes solutions de l'équation (E_h) sur $\mathbb{R}$ sont déterminées par

$$y_h(x) = (\lambda x + \mu)e^{\alpha x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \text{ parcourant } \mathbb{C}^2.$$

Théorème 6 (Cadre réel $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)
Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes α et β et les fonctions réelles solutions de l'équation (E_h) sur $\mathbb{R}$ sont déterminées par

$$y_h(x) = \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \text{ parcourant } \mathbb{R}^2.$$

Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une racine double α et les fonctions réelles solutions de l'équation (E_h) sur $\mathbb{R}$ sont déterminées par

$$y_h(x) = (\lambda x + \mu)e^{\alpha x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \text{ parcourant } \mathbb{R}^2.$$

Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\omega$ et $\alpha - i\omega$ et les fonctions réelles solutions de l'équation (E_h) sur $\mathbb{R}$ sont déterminées par

$$y_h(x) = \big(\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)\big)e^{\alpha x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \text{ parcourant } \mathbb{R}^2.$$

5.2.3 Principe de résolution de l'équation complète

Théorème 7
Si y_p est une solution particulière de l'équation (E) alors la solution générale de cette équation sur I est de la forme

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x)$$

avec y_h la solution générale de l'équation (E_h).

1. La résolution des équations du second degré dans le cadre des nombres complexes est présentée dans le Th. 9 p. 88.

5.2.4 Détermination d'une solution particulière

Théorème 8

Lorsque $f(x) = Ae^{\alpha x}$ avec $(A, \alpha) \in \mathbb{K}^2$, on peut trouver une solution particulière de (E) sur I de la forme

$$y_p(x) = \begin{cases} Ce^{\alpha x} & \text{si } \alpha \text{ n'est pas racine de } r^2 + ar + b = 0 \\ Cx\,e^{\alpha x} & \text{si } \alpha \text{ est racine simple de } r^2 + ar + b = 0 \\ Cx^2e^{\alpha x} & \text{si } \alpha \text{ est racine double de } r^2 + ar + b = 0. \end{cases}$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $f(x) = A\cos(\omega x)$ ou $A\sin(\omega x)$ avec $(A, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on peut trouver une solution particulière de l'équation réelle

$$y'' + ay' + by = A\cos(\omega x) \quad (\text{resp. } A\sin(\omega x))$$

en considérant la partie réelle (resp. imaginaire) de l'équation complexe d'inconnue z

$$z'' + az' + bz = Ae^{i\omega x}.$$

5.2.5 Problème et théorème de Cauchy

Définition

Résoudre un *problème de Cauchy* associé à l'équation (E): $y'' + ay' + by = f(x)$ consiste à rechercher, parmi ses solutions, celles vérifiant les *conditions initiales* $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_0'$ pour $x_0 \in I$ et $y_0, y_0' \in \mathbb{K}$ préalablement choisis.

Théorème 9

Soit $a, b \in \mathbb{K}$, $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue, $x_0 \in I$ et $y_0, y_0' \in \mathbb{K}$. Il existe une unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \text{ et } y'(x_0) = y_0'. \end{cases}$$

Pour que ce théorème s'applique, il importe que les deux conditions initiales s'expriment en la même valeur x_0 de la variable x.

5.3 Exercices d'apprentissage

Dans les exercices qui suivent, les solutions cherchées sont à valeurs réelles.

méthode

On commence la résolution d'une équation différentielle en reconnaissant le type de celle-ci : cela justifie le protocole de résolution suivi.

5.3.1 Équations linéaires du premier ordre

Exercice 1
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E)\colon y' - \sin(x)y = 0.$$

Solution
L'équation (E) est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.

méthode
Afin d'éviter les erreurs de signe, on résout une équation homogène par la démarche suivante :

- on exprime y' en fonction de y : $y' = a(x)y$;
- on intègre le facteur de y : $\int a(x)\,\mathrm{d}x = A(x)$;
- on donne la solution générale à l'aide d'une exponentielle de la primitive précédente[1] : $y(x) = \lambda e^{A(x)}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

On transforme l'équation étudiée afin d'exprimer y' en fonction de y

$$y' = \sin(x)y.$$

On intègre le facteur de y

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x.$$

On peut alors exprimer la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$

$$y(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\cos x} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E)\colon y' + 2xy = x.$$

Solution
L'équation (E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre.

méthode
On sait exprimer (Th. 2 p. 156) la solution générale à partir :

- de la solution générale de l'équation homogène y_h ;
- d'une solution particulière y_p.

On résout l'équation homogène associée $y' + 2xy = 0$. Cette équation s'écrit aussi $y' = -2xy$ et l'on a

$$\int -2x\,\mathrm{d}x = -x^2.$$

La solution générale de l'équation homogène s'exprime alors $y_h(x) = \lambda \mathrm{e}^{-x^2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. En vertu de la formule de dérivation $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$, on est assuré de la justesse du calcul précédent.

La fonction y_p donnée par $y_p(x) = 1/2$ est une solution particulière apparente de l'équation (E). La solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ est

$$y(x) = \frac{1}{2} + \lambda e^{-x^2} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3

Résoudre l'équation différentielle

$$(E) : y' + \frac{2x}{1+x^2} y = 1.$$

Solution

L'équation (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur $\mathbb{R}$.
On résout l'équation homogène associée

$$y' = -\frac{2x}{1+x^2} y \quad \text{avec} \quad \int -\frac{2x}{1+x^2}\,dx = -\ln(1+x^2).$$

La solution générale de l'équation homogène s'exprime

$$y_h(x) = \lambda e^{-\ln(1+x^2)} = \frac{\lambda}{1+x^2} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Reste à déterminer une solution particulière.

méthode

> En l'absence de solution apparente, on détermine une solution particulière par la méthode de la variation de la constante (Th. 3 p. 156).

Cherchons une solution particulière y_p de la forme

$$y_p(x) = \frac{\lambda(x)}{1+x^2} \quad \text{avec} \quad \lambda \text{ une fonction définie et dérivable sur } \mathbb{R}.$$

Par dérivation d'un produit (ce qui est ici préférable à la dérivation d'un quotient), on a pour tout x réel

$$y_p'(x) = \frac{\lambda'(x)}{1+x^2} - \frac{2x\lambda(x)}{(1+x^2)^2}.$$

En injectant ces expressions dans l'équation (E) et en simplifiant [1], on obtient que la fonction y_p est solution de l'équation différentielle (E) si, et seulement si, pour tout x réel

$$\frac{\lambda'(x)}{1+x^2} = 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lambda'(x) = 1 + x^2.$$

méthode

> L'objectif étant de déterminer *une* solution particulière, on choisit une primitive λ parmi celles possibles.

1. Sauf erreur de calcul, le terme $\lambda(x)$ se simplifie toujours lors de l'application de la méthode de la variation de la constante.

La fonction λ donnée par $\lambda(x) = x + \frac{1}{3}x^3$ convient.
La fonction y_p déterminée par

$$y_p(x) = \frac{x + \frac{1}{3}x^3}{1 + x^2}$$

est solution particulière[1] et la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ est[2]

$$y(x) = \frac{x + \frac{1}{3}x^3 + \lambda}{1 + x^2} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

5.3.2 Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

Exercice 4

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

(a) $y'' - 3y' + 2y = 0$ (b) $y'' + 4y' + 4y = 0$
(c) $y'' - 2y' + 5y = 0$ (d) $y'' + y = 0$.

Solution

Les quatre équations sont des équations différentielles linéaires homogènes du second ordre à coefficients constants.

méthode

On exprime la solution générale à partir de la résolution de l'équation caractéristique associée (théorèmes 5 et 6 p. 158).

(a) L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ de racines distinctes 1 et 2. La solution générale sur $\mathbb{R}$ s'exprime

$$y(x) = \lambda e^x + \mu e^{2x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

(b) L'équation caractéristique associée est $r^2 + 4r + 4 = 0$ de racine double -2. La solution générale sur $\mathbb{R}$ s'exprime

$$y(x) = (\lambda x + \mu)e^{-2x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

(c) L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 5 = 0$ de racines complexes non réelles $1 \pm 2i$. La solution générale sur $\mathbb{R}$ s'exprime

$$y(x) = \big(\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)\big)e^x \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Une erreur fréquente est d'oublier de multiplier λ par la solution homogène pour exprimer la solution particulière.

2. On voit réapparaître dans cette expression la constante d'intégration qui a été « négligée » lors de la détermination de la fonction λ.

(d) L'équation caractéristique associée est[1] $r^2 + 1 = 0$ de racines i et $-$i. La solution générale sur $\mathbb{R}$ s'exprime

$$y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 5
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
(a) $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{2x}$ (b) $y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^{x}$.

Solution
Les deux équations sont des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

méthode

On sait exprimer (Th. 7 p. 158) la solution générale à partir :
— de la solution générale de l'équation homogène y_h ;
— d'une solution particulière y_p.

(a) L'équation caractéristique associée est $r^2 + 2r + 1 = 0$ de racine double -1. La solution générale de l'équation homogène sur $\mathbb{R}$ est alors

$$y_h(x) = (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^{-x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

méthode

Le second membre est de la forme $A\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec $\alpha = 2$ qui n'est pas racine de l'équation caractéristique. On détermine une solution particulière de la forme $y_p(x) = C\mathrm{e}^{2x}$ avec C constante à déterminer (Th. 8 p. 159).

Posons $y_p(x) = C\mathrm{e}^{2x}$ avec C constante. La fonction y_p est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle si, et seulement si, pour tout x réel

$$4C\mathrm{e}^{2x} + 2 \times 2C\mathrm{e}^{2x} + C\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x} \quad \text{c'est-à-dire} \quad 9C = 1.$$

On obtient donc une solution particulière en choisissant $C = 1/9$.

Finalement, la solution générale de l'équation sur $\mathbb{R}$ s'exprime

$$y(x) = \frac{1}{9}\mathrm{e}^{2x} + (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^{-x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

(b) L'équation caractéristique associée est $r^2 + r - 2 = 0$ de racines 1 et -2. La solution générale homogène s'écrit

$$y_h(x) = \lambda\mathrm{e}^{x} + \mu\mathrm{e}^{-2x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Et non $r^2 + r = 0$ comme on le rencontre parfois...

méthode

> Le second membre est de la forme $Ae^{\alpha x}$ avec $\alpha = 1$ racine simple de l'équation caractéristique. On peut alors déterminer une solution particulière de la forme $y_p(x) = Cx\,e^x$ avec C constante à déterminer (Th. 8 p. 159).

Posons $y_p(x) = Cx\,e^x$ avec C constante. La fonction y_p sur $\mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle si, et seulement si, pour tout x réel

$$C(x+2)e^x + C(x+1)e^x - 2 \times Cx\,e^x = e^x.$$

Ceci donne, après simplifications, l'équation $3C = 1$. On obtient donc une solution particulière en choisissant $C = 1/3$. La solution générale sur $\mathbb{R}$ est alors

$$y(x) = \frac{1}{3}xe^x + \lambda e^x + \mu e^{-2x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

5.4 Exercices d'entraînement

Dans les exercices qui suivent, et sauf mention contraire, les solutions cherchées sont à valeurs réelles.

5.4.1 Équations linéaires du premier ordre

Exercice 6 *

Résoudre sur $]-1\,;1[$ l'équation suivante

$$(E)\colon (1-x^2)y' - xy = \sqrt{1-x^2}.$$

Solution

méthode

> L'équation proposée n'est pas à proprement parler une équation différentielle linéaire du premier ordre car il y a un facteur devant y'. Cependant, ce facteur ne s'annulant pas sur l'intervalle de résolution[1], on peut transformer par division l'équation en une équation équivalente de la forme attendue.

L'équation (E) est équivalente à l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' - \frac{x}{1-x^2}y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On résout l'équation homogène associée

$$y' = \frac{x}{1-x^2}y \quad \text{avec} \quad \int \frac{x}{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right| = -\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right).$$

1. La situation où le facteur de y' s'annule est traitée en seconde année.

La solution générale de l'équation homogène est

$$y_h(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

En l'absence de solution particulière apparente, on applique la méthode de la variation de la constante (Th. 3 p. 156) : on cherche une solution y_p de la forme

$$y_p(x) = \frac{\lambda(x)}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{avec} \quad \lambda \text{ une fonction dérivable sur }]-1\,;1[.$$

En substituant dans l'équation *initiale*, on obtient que y_p est solution si, et seulement si, pour tout x de $]-1\,;1[$

$$\lambda'(x)\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x^2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lambda'(x) = 1.$$

La fonction λ donnée par $\lambda(x) = x$ convient et ceci détermine la solution particulière

$$y_p(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Finalement, la solution générale de (E) sur $]-1\,;1[$ est

$$y(x) = \frac{x+\lambda}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7 *

Résoudre sur les intervalles précisés les équations suivantes :

(a) $y' + \tan(x)y = \sin(2x)$ sur $]-\pi/2\,;\pi/2[$.

(b) $(x^2+1)^2 y' + 2x(x^2+1)y = 1$ sur $\mathbb{R}$.

(c) $(1+\mathrm{e}^x)y' - \mathrm{e}^x y = \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.

(d) $x(1+\ln^2 x)y' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(e) $\mathrm{ch}(x)y' - \mathrm{sh}(x)y = 1$ sur $\mathbb{R}$.

Solution

Dans chaque cas, l'équation étudiée est (ou est équivalente à) une équation différentielle linéaire du premier ordre sur l'intervalle spécifié.

(a) On résout l'équation homogène associée

$$y' = -\tan(x)y \quad \text{avec} \quad \int -\tan x \,\mathrm{d}x = \int -\frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \ln|\cos x| = \ln(\cos x).$$

La solution générale de l'équation homogène est

$$y_h(x) = \lambda \mathrm{e}^{\ln(\cos x)} = \lambda \cos x \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

En l'absence de solution particulière apparente, on utilise la méthode de la variation de la constante en introduisant une fonction y_p définie sur $]-\pi/2\,;\pi/2[$ par

$$y_p(x) = \lambda(x)\cos x \quad \text{avec} \quad \lambda \text{ une fonction dérivable sur }]-\pi/2\,;\pi/2[.$$

La fonction y_p est solution de l'équation différentielle si, et seulement si, pour tout x de $]-\pi/2\,;\pi/2[$

$$\lambda'(x)\cos x = \sin(2x) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lambda'(x) = 2\sin x.$$

La fonction λ donnée par $\lambda(x) = -2\cos x$ convient et la solution générale de l'équation sur $]-\pi/2\,;\pi/2[$ est

$$y(x) = -2\cos^2 x + \lambda\cos x \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(b) On résout l'équation homogène associée

$$y' = -\frac{2x}{x^2+1}y \quad \text{avec} \quad \int -\frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = -\ln\left|x^2+1\right| = -\ln\left(x^2+1\right).$$

La solution générale de l'équation homogène est

$$y_h(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\ln(x^2+1)} = \frac{\lambda}{x^2+1} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

En l'absence de solution particulière apparente, on utilise la méthode de la variation de la constante en introduisant une fonction y_p définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y_p(x) = \frac{\lambda(x)}{x^2+1} \quad \text{avec} \quad \lambda \text{ une fonction dérivable sur } \mathbb{R}.$$

En injectant dans l'équation *initiale*, la fonction y_p est solution de l'équation différentielle si, et seulement si, pour tout x réel,

$$\lambda'(x)(x^2+1) = 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lambda'(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

La fonction λ donnée par $\lambda(x) = \arctan x$ convient et la solution générale de l'équation sur $\mathbb{R}$ est

$$y(x) = \frac{\arctan x + \lambda}{x^2+1} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(c) On résout l'équation homogène associée

$$y' = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}y \quad \text{avec} \quad \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \ln\left|1+\mathrm{e}^x\right| = \ln\left(1+\mathrm{e}^x\right).$$

La solution générale de l'équation homogène est

$$y_h(x) = \lambda \mathrm{e}^{\ln(1+\mathrm{e}^x)} = \lambda\left(1+\mathrm{e}^x\right) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

La fonction y_p donnée par $y_p(x) = -1$ est solution apparente[1] et la solution générale de l'équation sur $\mathbb{R}$ est

$$y(x) = -1 + \lambda\big(1 + e^x\big) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(d) **méthode**

> Il s'agit d'une équation homogène : on résout directement celle-ci sans avoir besoin de rechercher de solution particulière[2] !

$$y' = -\frac{2}{x(1+\ln^2 x)}y \quad \text{avec} \quad \int -\frac{2}{x(1+\ln^2 x)}\,dx = -2\arctan(\ln x).$$

La solution générale de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$$y(x) = \lambda e^{-2\arctan(\ln x)} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(e) On résout l'équation homogène associée

$$y' = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}y \quad \text{avec} \quad \int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\,dx = \ln|\operatorname{ch} x| = \ln(\operatorname{ch} x).$$

La solution générale de l'équation homogène est

$$y_h(x) = \lambda e^{\ln(\operatorname{ch} x)} = \lambda \operatorname{ch} x \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

La fonction y_p donnée par $y_p(x) = \operatorname{sh} x$ est solution particulière car on sait

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad \text{pour tout } x \text{ réel.}$$

La solution générale de l'équation sur $\mathbb{R}$ est donc

$$y(x) = \operatorname{sh} x + \lambda \operatorname{ch} x \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 8 **

Former une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les fonctions solutions sont les fonctions $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ données par

$$f_\lambda(x) = \frac{x+\lambda}{1+x^2} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. Elle peut aussi être découverte par la méthode de la variation de la constante au prix de quelques calculs.
2. Ou, si l'on préfère, la fonction nulle est une solution particulière évidente.

Solution

méthode

On exprime la constante λ en fonction de f et l'on dérive.

Pour tout x réel, on peut écrire

$$(1+x^2)f_\lambda(x) - x = \lambda.$$

En dérivant, on obtient

$$(1+x^2)f_\lambda'(x) + 2xf_\lambda(x) - 1 = 0.$$

Les fonctions f_λ sont donc solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(1+x^2)y' + 2xy - 1 = 0.$$

Inversement, en menant les calculs à rebours, une fonction f solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle vérifie :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big((1+x^2)f(x) - x\Big) = 0$$

et correspond donc à l'une des fonctions f_λ.

Exercice 9 **

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E) : y' - y = \max(x, 0).$$

Solution

L'équation (E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre[1]. La solution générale de l'équation homogène est

$$y_h(x) = \lambda \mathrm{e}^x \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On détermine une solution particulière de la forme $y_p(x) = \lambda(x)\mathrm{e}^x$ avec λ une fonction dérivable. Cette fonction est solution de l'équation (E) si, et seulement si, pour tout x réel

$$\lambda'(x)\mathrm{e}^x = \max(x,0) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lambda'(x) = \max(x,0)\mathrm{e}^{-x} = \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

méthode

On détermine une fonction λ convenable en choisissant une constante sur $\mathbb{R}_-$ et une primitive de $x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+$ prenant la même valeur en 0.

1. La fonction $x \mapsto \max(x, 0)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Par intégration par parties, une primitive de la fonction $x \mapsto x\,e^{-x}$ est $x \mapsto -(x+1)e^{-x}$. La fonction λ déterminée par

$$\lambda(x) = \begin{cases} -(x+1)e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est alors convenable. En effet, cette fonction est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $]-\infty\,;0[$ avec $\lambda'(x) = \max(x,0)e^{-x}$ pour tout x réel non nul. Elle aussi dérivable en 0 car[1] dérivable à droite avec $\lambda'_d(0) = 0$ et dérivable à gauche avec $\lambda'_g(0) = 0$ puisque la valeur de la constante choisie sur $\mathbb{R}_-^*$ correspond à la valeur de la fonction en 0.

La solution générale de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ est alors

$$y(x) = \begin{cases} -(x+1) + \lambda e^{x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ -e^{x} + \lambda e^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

5.4.2 Problème de Cauchy

Exercice 10 *

Déterminer la solution au problème de Cauchy

$$y' - (x+1)(y+1) = 0 \quad \text{et} \quad y(0) = 1.$$

Solution

L'équation étudiée s'exprime

$$y' - (x+1)y = x+1.$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre définie sur $\mathbb{R}$: on est assuré de l'existence et de l'unicité d'une solution au problème de Cauchy posé (Th. 4 p. 157).

méthode

> On exprime la solution générale de l'équation à l'aide d'une constante que l'on détermine par la condition initiale posée.

On résout l'équation homogène associée

$$y' = (x+1)y \quad \text{avec} \quad \int (x+1)\,dx = \frac{1}{2}(x+1)^2.$$

La solution générale homogène est

$$y(x) = \lambda e^{\frac{1}{2}(x+1)^2} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. Une fonction réelle définie sur un intervalle est dérivable en un point intérieur à celui-ci si, et seulement si, elle est dérivable à droite et à gauche en ce point et que les deux nombres dérivés sont égaux.

La fonction $y_p\colon x \mapsto -1$ est une solution particulière apparente et la solution générale sur $\mathbb{R}$ est
$$y(x) = -1 + \lambda e^{\frac{1}{2}(x+1)^2}.$$

La condition initiale $y(0) = 1$ est respectée si, et seulement si,
$$-1 + \lambda e^{1/2} = 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lambda = 2e^{-1/2}.$$

La solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy s'exprime donc
$$y(x) = 2e^{\frac{1}{2}x^2+x} - 1.$$

Exercice 11 **

Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in \mathbb{R}$.
À l'aide d'une intégrale, exprimer la solution du problème de Cauchy
$$y' + ay = g(x) \quad \text{et} \quad y(0) = 0.$$

Solution

L'équation différentielle introduite est linéaire du première ordre définie sur $\mathbb{R}$. La solution générale de l'équation homogène est donnée par $y_h(x) = \lambda e^{-ax}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On détermine une solution particulière de la forme
$$y_p(x) = \lambda(x)e^{-ax} \quad \text{avec} \quad \lambda \text{ une fonction dérivable sur } \mathbb{R}.$$

La fonction y_p est solution de l'équation différentielle si, et seulement si, pour tout x réel
$$\lambda'(x)e^{-ax} = g(x) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lambda'(x) = g(x)e^{ax}.$$

méthode

Lorsque f désigne une fonction continue sur un intervalle I, on peut exprimer une primitive F de celle-ci à l'aide d'une intégrale (Th. 2 p. 123) :
$$F\colon x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{pour } a \text{ choisi arbitrairement dans } I.$$

En choisissant la primitive s'annulant en 0, la fonction λ déterminée par
$$\lambda(x) = \int_0^x g(t)e^{at}\,dt$$
convient [1].

La solution générale de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ est
$$y(x) = \left(\int_0^x g(t)e^{at}\,dt + \lambda\right)e^{-ax} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. Il importe de fixer la borne basse lors de l'expression de la primitive afin que la fonction λ soit explicite.

Parmi celles-ci, celle vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$ est déterminée par $\lambda = 0$, c'est la fonction donnée par

$$y(x) = \left(\int_0^x g(t)\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{-ax} = \int_0^x g(t)\mathrm{e}^{a(t-x)}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 12 **

Soit a_1, a_2 et b_1, b_2 des fonctions continues de I vers $\mathbb{R}$. On considère les équations différentielles :

$$(E_1)\colon y' + a_1(x)y = b_1(x) \quad \text{et} \quad (E_2)\colon y' + a_2(x)y = b_2(x).$$

(a) À quelle(s) condition(s) ces équations différentielles déterminent-elles les mêmes fonctions solutions ?

(b) À quelle(s) condition(s) ces équations différentielles possèdent-elles au moins deux fonctions solutions en commun ?

Solution

(a) Supposons que les équations différentielles (E_1) et (E_2) déterminent les mêmes fonctions solutions.

Soit $x_0 \in I$. En vertu du Th. 4 p. 157, il existe une solution y à l'équation (E_1) vérifiant la condition initiale $y(x_0) = 0$. Cette fonction y étant solution des équations (E_1) et (E_2) on a simultanément

$$y'(x_0) = b_1(x_0) \quad \text{et} \quad y'(x_0) = b_2(x_0).$$

Ce raisonnement pouvant être mené pour tout x_0 appartenant à I, on peut affirmer que les fonctions b_1 et b_2 sont égales. Montrons qu'il en est de même des fonctions a_1 et a_2.

Soit $x_0 \in I$ et y la solution de l'équation (E_1) vérifiant la condition initiale $y(x_0) = 1$. On a simultanément

$$y'(x_0) + a_1(x_0) \times 1 = b_1(x_0) \quad \text{et} \quad y'(x_0) + a_2(x_0) \times 1 = b_2(x_0) = b_1(x_0).$$

On en déduit $a_1(x_0) = a_2(x_0)$ et l'on peut conclure que les fonctions a_1 et a_2 sont égales.

La réciproque étant immédiate, on peut affirmer que les équations (E_1) et (E_2) définissent les mêmes fonctions solutions si, et seulement si, elles sont identiques.

(b) **méthode**

> La connaissance de deux solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre suffit à les déterminer toutes[1].

Soit y_1 et y_2 deux solutions distinctes d'une équation différentielle linéaire du premier ordre définie sur I

$$(E)\colon y' + a(x)y = b(x).$$

1. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre peut s'interpréter comme une droite : connaître deux points de celle-ci suffit à la déterminer toute entière.

Pour tout $x \in I$, on a

$$(y_1 - y_2)'(x) + a(x)\big(y_1(x) - y_2(x)\big) = \big(y_1'(x) + a(x)y_1(x)\big) - \big(y_2'(x) + a(x)y_2(x)\big) = 0.$$

La fonction $y_1 - y_2$ est donc solution non nulle de l'équation homogène. Puisque les solutions de l'équation homogène s'expriment

$$y_h(x) = \lambda \mathrm{e}^{-A(x)} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{et } A \text{ une primitive fixée de } a)$$

la fonction $y_1 - y_2$ est de cette forme pour un certain λ non nul.

La solution générale homogène peut alors s'exprimer

$$y(x) = \mu(y_1 - y_2)(x) \quad \text{avec} \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Au surplus, y_1 est solution particulière de (E) et la solution générale de (E) s'écrit

$$y(x) = y_1(x) + \mu(y_1 - y_2)(x) \quad \text{avec} \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

En conséquence, si les équations (E_1) et (E_2) ont deux solutions distinctes en commun, elles possèdent exactement les mêmes fonctions solutions et sont donc identiques.

Exercice 13 **

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période $T > 0$. On étudie l'équation différentielle

$$(E)\colon y' + ay = \varphi(t).$$

(a) Montrer que si y est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation, la fonction $t \mapsto y(t+T)$ l'est aussi.

(b) En déduire qu'une solution y est T-périodique si, et seulement si, $y(0) = y(T)$.

(c) Montrer que l'équation (E) admet une unique solution T-périodique.

Solution

(a) Notons $z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction déterminée par la relation $z(t) = y(t+T)$. Par composition, la fonction z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t,

$$z'(t) + az(t) = y'(t+T) + ay(t+T) = \varphi(t+T) = \varphi(t).$$

La fonction z est donc solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

(b) Si y est T-périodique, on a évidemment $y(0) = y(T)$.

méthode

> Pour la réciproque, on montre que les fonctions $t \mapsto y(t)$ et $t \mapsto y(t+T)$ sont égales car solutions d'un même problème de Cauchy (Th. 4 p. 157).

Supposons $y(0) = y(T)$. Les fonctions $y\colon t \mapsto y(t)$ et $z\colon t \mapsto y(t+T)$ sont toutes deux solutions de l'équation différentielle (E) et vérifient la même condition initiale en 0 car $z(0) = y(T) = y(0)$. Par unicité de la solution à un problème de Cauchy, ces deux fonctions sont égales et la fonction y est T-périodique.

(c) La solution générale de l'équation homogène est $y_h(t) = \lambda e^{-at}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Si y_p désigne une solution particulière, la solution générale de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ s'exprime

$$y(t) = y_p(t) + \lambda e^{-at} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pour une telle fonction, on a $y(T) = y(0)$ si, et seulement si,

$$y_p(T) + \lambda e^{-aT} = y_p(0) + \lambda \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lambda\big(e^{-aT} - 1\big) = y_p(0) - y_p(T).$$

Sachant $e^{-aT} \neq 1$, cette équation possède une unique solution λ et il existe donc une unique solution T-périodique à l'équation (E).

5.4.3 Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

Exercice 14 *

Déterminer les fonctions complexes solutions de l'équation

$$(E) : y'' - (1 + 3i)y' - 4y = 0.$$

Solution

L'équation (E) est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants définie sur $\mathbb{R}$ et d'équation caractéristique

$$r^2 - (1 + 3i)r - 4 = 0$$

de discriminant $\Delta = 8 + 6i$. On détermine[1] une racine carrée $\delta = 3 + i$ de Δ et l'on peut alors exprimer les deux solutions de l'équation caractéristique $\alpha = -1 + i$ et $\beta = 2 + 2i$.

La solution générale de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ s'écrit alors

$$y(x) = \lambda e^{(-1+i)x} + \mu e^{2(1+i)x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2.$$

Exercice 15 *

Soit ω un réel strictement positif. Exprimer simplement la solution générale de l'équation $y'' - \omega^2 y = 0$ à l'aide des fonctions hyperboliques ch et sh.

Solution

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène du seconde ordre à coefficients constants définie sur $\mathbb{R}$ et d'équation caractéristique $r^2 - \omega^2 = 0$ de racines distinctes $\pm\omega$. La solution générale de cette équation s'exprime

$$y(x) = \lambda e^{\omega x} + \mu e^{-\omega x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

méthode

On exprime $e^{\omega x}$ et $e^{-\omega x}$ à l'aide des fonctions hyperboliques par les identités

$$e^{\omega x} = \operatorname{ch}(\omega x) + \operatorname{sh}(\omega x) \quad \text{et} \quad e^{-\omega x} = \operatorname{ch}(\omega x) - \operatorname{sh}(\omega x).$$

1. Voir méthode du sujet 10 p. 97.

La solution générale de l'équation différentielle s'exprime aussi

$$y(x) = \underbrace{(\lambda+\mu)}_{=\alpha}\operatorname{ch}(\omega x) + \underbrace{(\lambda-\mu)}_{=\beta}\operatorname{sh}(\omega x) \quad \text{avec} \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

Or le couple (λ,μ) parcourant $\mathbb{R}^2$, le couple (α,β) parcourt aussi $\mathbb{R}^2$. En effet, pour (α,β) arbitrairement choisi dans $\mathbb{R}^2$, le couple $(\lambda,\mu) = \left(\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ vérifie $\lambda+\mu=\alpha$ et $\lambda-\mu=\beta$.

On peut donc exprimer la solution générale de l'équation sur $\mathbb{R}$ sous la forme

$$y(x) = \alpha\operatorname{ch}(\omega x) + \beta\operatorname{sh}(\omega x) \quad \text{avec} \quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2.$$

Exercice 16 *

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E) : y'' + y' + y = 1 + 2\mathrm{e}^{-2x}.$$

Solution

L'équation (E) est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants définie sur $\mathbb{R}$ et d'équation caractéristique

$$r^2 + r + 1 = 0$$

dont les solutions sont les racines troisièmes de l'unité $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et j^2.

La solution générale de l'équation homogène s'exprime

$$y_h(x) = \left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)\mathrm{e}^{-x/2} \quad \text{avec} \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

méthode

> Lorsque le second membre $f(x)$ s'exprime comme une somme $f_1(x) + f_2(x)$, on peut déterminer une solution particulière par la somme des solutions particulières que l'on obtient lorsque les seconds membres sont $f_1(x)$ et $f_2(x)$: c'est le *principe de superposition*.

La fonction donnée par $y_1(x) = 1$ est solution particulière de l'équation $y''+y'+y=1$.

On détermine une solution de l'équation $y''+y'+y = 2\mathrm{e}^{-2x}$ de la forme $y_2(x) = C\mathrm{e}^{-2x}$ avec C solution de l'équation $4C - 2C + C = 2$ ce qui donne $C = 2/3$.

Par le principe de superposition, la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ s'exprime

$$y(x) = 1 + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-2x} + \left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)\mathrm{e}^{-x/2} \quad \text{avec} \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

Exercice 17 *

Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

(a) $y'' + 2y' + 2y = \sin x$ (b) $y'' + y = 2\cos^2 x$.

Solution

(a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants définie sur $\mathbb{R}$ et d'équation caractéristique $r^2 + 2r + 2 = 0$ de racines $-1 \pm \mathrm{i}$.

La solution générale homogène est

$$y_h(x) = (\lambda \cos x + \mu \sin x)\mathrm{e}^{-x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

méthode

On détermine une solution particulière en considérant la partie imaginaire de l'équation complexe $z'' + 2z' + 2z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.

On détermine une solution particulière de l'équation $z'' + 2z' + 2z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ de la forme $C\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ avec C solution de l'équation

$$-C + 2\mathrm{i}C + 2C = 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad C = \frac{1}{1+2\mathrm{i}} = \frac{1-2\mathrm{i}}{5}.$$

La partie imaginaire de $C\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ détermine une solution particulière de l'équation initiale

$$y_p(x) = \operatorname{Im}\left(\frac{1-2\mathrm{i}}{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right) = \frac{1}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x.$$

Finalement, la solution générale de l'équation sur $\mathbb{R}$ est

$$y(x) = \frac{1}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x + (\lambda \cos x + \mu \sin x)\mathrm{e}^{-x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

(b) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants définie sur $\mathbb{R}$ et d'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$ de racines $\pm\mathrm{i}$.

La solution générale homogène est

$$y_h(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

méthode

Pour exprimer une solution particulière, on linéarise le second membre.

Par la formule $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$, on peut écrire $2\cos^2 x = 1 + \cos(2x)$.

La fonction donnée par $y_1(x) = 1$ est solution particulière de l'équation au second membre 1. En introduisant l'équation complexe $z'' + z = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$, on détermine une solution particulière de l'équation au second membre $\cos(2x)$ en considérant la partie réelle de $C\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$ avec $-4C + C = 1$ ce qui donne $C = -1/3$. Cette solution particulière est

$$y_2(x) = \operatorname{Re}\left(-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\right) = -\frac{1}{3}\cos(2x).$$

Finalement, la solution générale de l'équation sur $\mathbb{R}$ est

$$y(x) = 1 - \frac{1}{3}\cos(2x) + \lambda \cos x + \mu \sin x \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 18 *

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 2y' + y = 2\,\mathrm{ch}\, x.$$

Solution

L'équation (E) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants définie sur $\mathbb{R}$ et d'équation caractéristique $(r+1)^2 = 0$ de racine double -1. La solution générale homogène s'exprime

$$y_h(x) = (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^{-x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

méthode

> Le second membre de l'équation se décompose $2\,\mathrm{ch}(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$. On détermine une solution particulière pour chacun des deux termes et l'on applique le principe de superposition.

Pour le second membre e^x, on peut trouver une solution particulière de la forme $C\mathrm{e}^x$ avec $C + 2C + C = 1$ ce qui donne $C = 1/4$.

Pour le second membre e^{-x}, on recherche une solution particulière de la forme $Cx^2\mathrm{e}^{-x}$ car -1 est racine double de l'équation caractéristique (Th. 8 p. 159). En injectant cette expression dans l'équation différentielle, la constante est déterminée par $2C = 1$ ce qui donne $C = 1/2$.

Finalement, la solution générale de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ est

$$y(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x} + (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^{-x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 19 ** (Oscillateur linéaire forcé)

Soit ω, ω_0, A et y_0 des réels strictement positifs. Exprimer la solution générale de l'équation

$$y'' + \omega^2 y = A\cos(\omega_0 x)$$

dans chacun des deux cas :

(a) $\omega_0 \neq \omega$ (b) $\omega_0 = \omega$ (résonance).

Solution

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants définie sur $\mathbb{R}$ et d'équation caractéristique $r^2 + \omega^2 = 0$ de racines distinctes $\pm\mathrm{i}\omega$.

La solution générale homogène est donc

$$y_h(x) = \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x) \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

On détermine une solution particulière en introduisant l'équation complexe

$$z'' + \omega^2 z = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x}.$$

(a) Lorsque $\omega_0 \neq \omega$, une solution particulière de cette équation complexe est de la forme $Ce^{i\omega_0 x}$ avec C solution de l'équation

$$-\omega_0^2 C + \omega^2 C = A \quad \text{c'est-à-dire} \quad C = \frac{A}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Une solution particulière de l'équation initiale est alors

$$y_p(x) = \mathrm{Re}\big(Ce^{i\omega_0 x}\big) = \frac{A}{\omega^2 - \omega_0^2}\cos(\omega_0 x)$$

et la solution générale de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ s'exprime

$$y(x) = \frac{A}{\omega^2 - \omega_0^2}\cos(\omega_0 x) + \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x) \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

(b) Lorsque $\omega_0 = \omega$, une solution particulière de l'équation en z est à rechercher de la forme $Cxe^{i\omega x}$ car $i\omega$ est racine simple de l'équation caractéristique (Th. 8 p. 159). En injectant cette expression dans l'équation, la constante C est déterminée par l'équation

$$2i\omega C = A \quad \text{c'est-à-dire} \quad C = -i\frac{A}{2\omega}.$$

Une solution particulière de l'équation initiale est alors

$$y_p(x) = \mathrm{Re}\big(Cxe^{i\omega x}\big) = \frac{A}{2\omega}x\sin(\omega x).$$

La solution générale de l'équation sur $\mathbb{R}$ s'exprime alors

$$y(x) = \frac{A}{2\omega}x\sin(\omega x) + \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x) \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 20 *

On veut déterminer les fonctions y deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant[1] :

$$y''(x) + 2xy'(x) + x^2 y(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et z la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$z(x) = y(x)e^{x^2/2}.$$

Montrer que y est solution du problème posé si, et seulement si, z est solution d'une équation différentielle simple que l'on précisera.

(b) Déterminer les fonctions y solutions du problème posé.

1. Il s'agit ici de résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre *qui n'est pas à coefficients constants*. L'introduction d'une équation caractéristique n'est pas contextuelle. Des éléments de résolution de ces équations seront présentés en seconde année.

Solution

(a) **méthode**

> On exprime les dérivées de z en fonction des dérivées de y et l'on combine celles-ci pour faire apparaître l'équation étudiée [1].

La fonction z est deux fois dérivable et, pour tout x réel, on obtient par dérivation de produits

$$z'(x) = \big(y'(x) + xy(x)\big)e^{x^2/2} \quad \text{et} \quad z''(x) = \big(y''(x) + 2xy'(x) + x^2y(x) + y(x)\big)e^{x^2/2}.$$

On a donc

$$y''(x) + 2xy'(x) + x^2y(x) = \big(z''(x) - z(x)\big)e^{-x^2/2}.$$

Ainsi, la fonction y est solution du problème posé si, et seulement si, z est solution de l'équation différentielle $z'' - z = 0$.

(b) L'équation en z est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2, à coefficients constants définie sur $\mathbb{R}$ et d'équation caractéristique $r^2 - 1$ de racines 1 et -1. La solution générale de l'équation en z est

$$z(x) = \lambda e^{x} + \mu e^{-x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Puisque $y(x) = z(x)e^{-x^2/2}$, on obtient directement l'expression de la solution générale du problème posé

$$y(x) = \lambda e^{x - \frac{x^2}{2}} + \mu e^{-x - \frac{x^2}{2}} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 21 **

Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que les solutions de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ soient toutes bornées sur $\mathbb{R}_+$.

Solution

L'équation étudiée est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ de discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.

méthode

> Selon le signe de Δ, on décrit la solution générale et l'on étudie dans quels cas celle-ci est assurément bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Cas : $\Delta > 0$. L'équation caractéristique possède deux racines réelles α et β et la solution générale de l'équation est de la forme

$$y(x) = \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

1. On peut aussi calculer les dérivées de y en fonction de celles de z et simplement substituer dans l'équation étudiée.

Cette solution est bornée pour toute valeur du couple (λ, μ) si, et seulement si, les racines α et β sont négatives ou nulles.

méthode

> La somme et le produit des racines de l'équation $r^2 + ar + b = 0$ sont [1] respectivement $-a$ et b.

Les racines α et β sont négatives ou nulles lorsque le produit $b = \alpha\beta$ est positif (les racines ont même signe) et que leur somme $-a = \alpha + \beta$ est négatif, soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$

Cas : $\Delta = 0$ (donc $b \geqslant 0$). L'équation caractéristique possède une racine double α égale à $-a/2$ et la solution générale de l'équation s'exprime

$$y(x) = (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^{\alpha x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Cette solution est bornée pour toute valeur de (λ, μ) si, et seulement si, α est strictement négatif, soit $a > 0$.

Cas : $\Delta < 0$ (donc $b > 0$). L'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm \mathrm{i}\omega$ avec $\alpha = -a/2$ et la solution générale de l'équation est

$$y(x) = \big(\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)\big)\mathrm{e}^{\alpha x} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Cette solution est bornée pour toute valeur de (λ, μ) si, et seulement si, α est négatif ou nul, soit $a \geqslant 0$.

En résumé, les solutions de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ sont toutes bornées sur $\mathbb{R}_+$ si, et seulement si, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.

Exercice 22 **

Soit a un réel et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire.

Montrer que pour chaque $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique fonction paire solution de l'équation différentielle $y'' + ay = f(x)$ et vérifiant $y(0) = y_0$.

Solution

Si y est une fonction paire dérivable, sa dérivée est une fonction impaire et donc $y'(0) = 0$. Une fonction solution du problème posé est donc solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + ay = f(x) \\ y(0) = y_0 \text{ et } y'(0) = 0. \end{cases}$$

Ceci assure déjà l'unicité d'une telle solution (Th. 9 p. 159). Inversement, vérifions que la solution y de ce problème de Cauchy est bien une fonction paire.

méthode

> On vérifie que la fonction $z : x \mapsto y(-x)$ est solution du même problème de Cauchy.

1. Il suffit de développer $(x - \alpha)(x - \beta)$ pour s'en convaincre !

La fonction z proposée est deux fois dérivable avec, pour tout x réel, $z'(x) = -y'(-x)$ et $z''(x) = y''(-x)$. Pour tout réel x, on a donc

$$z''(x) + az(x) = y''(-x) + ay(-x) = f(-x) \underset{f \text{ est paire}}{=} f(x).$$

Au surplus, $z(0) = y(0) = y_0$ et $z'(0) = -y'(0) = 0$. La fonction z est donc solution du problème de Cauchy définissant y. Par unicité d'une telle solution, on peut conclure à l'égalité des fonctions z et y. Autrement dit, la fonction y est paire.

5.4.4 Problèmes liés à la résolution d'une équation différentielle

Exercice 23 **

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

(a) On suppose que la fonction f est paire. Étudier la parité de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f'(x) - xf(x)$.

(b) Étudier la réciproque.

(c) Mêmes questions avec la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = xf'(x) - 2f(x)$.

Solution

(a) Si la fonction f est paire, sa dérivée f' est impaire. Aussi, la fonction $x \mapsto xf(x)$ est impaire. On en déduit l'imparité de la fonction g.

(b) Supposons la fonction g impaire.

méthode

La fonction f est solution de l'équation différentielle $y' - xy = g(x)$.

Introduisons, la fonction $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(x) = f(-x)$. La fonction $\tilde{f}$ est dérivable et, pour tout réel x,

$$\tilde{f}'(x) - x\tilde{f}(x) = -\big(f'(-x) - (-x)f(-x)\big) = -g(-x) \underset{g \text{ est impaire}}{=} g(x).$$

Au surplus, $\tilde{f}(0) = f(0)$. Les fonctions f et $\tilde{f}$ sont donc solutions d'un même problème de Cauchy associé à l'équation différentielle $y' - xy = g(x)$. Par unicité de la solution à un tel problème, on peut conclure $f = \tilde{f}$. Ainsi, la fonction f est paire.

(c) Si la fonction f est paire alors la fonction h l'est aussi. La réciproque n'est cependant pas vraie. Pour la fonction dérivable $f\colon x \mapsto x\,|x|$, on a pour tout x réel $f'(x) = 2\,|x|$ puis $h(x) = 0$. La fonction h est paire mais f ne l'est pas.

Exercice 24 **

Déterminer les fonctions réelles f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(-x).$$

Solution

méthode

On analyse l'équation vérifiée par f afin de déterminer « la forme » des solutions possibles.

Soit f une fonction solution (s'il en existe). La dérivée de f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x \mapsto f(-x)$ l'est par composition. Ainsi, la fonction f est deux fois dérivable avec pour tout x réel

$$f''(x) = -f'(-x) = -f(x).$$

La fonction f est donc solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$. La solution générale de cette équation[1] sur $\mathbb{R}$ s'exprime

$$y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Ainsi, les solutions du problème posé figurent parmi les fonctions décrites ci-dessus. Reste à vérifier[2] lesquelles, parmi ces fonctions, sont effectivement solutions.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$. La fonction f est dérivable et pour tout x réel

$$f'(x) - f(-x) = (\mu - \lambda)(\cos x + \sin x).$$

Par conséquent, la fonction f est solution si, et seulement si, $\mu = \lambda$.

Finalement, les fonctions f solutions s'expriment

$$f(x) = \lambda(\cos x + \sin x) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 25 **

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dérivables telles que

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad f(s+t) = f(s)f(t).$$

Solution

méthode

On dérive l'égalité en l'un des deux paramètres.

Soit $s \in \mathbb{R}$ fixé. Par dérivation[3] en le paramètre t de l'équation $f(s+t) = f(s)f(t)$ on obtient

$$f'(s+t) = f(s)f'(t).$$

En particulier, pour $t = 0$, il vient $f'(s) = f'(0)f(s)$. La fonction f apparaît donc solution d'une équation différentielle du type $y' = ay$ avec a un nombre complexe. La solution générale de cette équation différentielle s'exprime

$$y(x) = \lambda e^{ax} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

1. Voir sujet 4 p. 162.

2. Dans l'étude qui précède, il y a eu rupture d'équivalence lors de la dérivation : ceci peut entraîner l'apparition de « fausses solutions » d'où la nécessité d'une vérification.

3. La dérivation a lieu en la variable t pour s fixé : on ne dérive pas en les deux variables en même temps !

Ainsi, la fonction f est de cette forme.

Inversement [1], une fonction f s'exprimant $f(x) = \lambda e^{ax}$ avec a et λ réels vérifie l'équation proposée si, et seulement si, pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$,

$$\underbrace{\lambda e^{a(s+t)}}_{\lambda e^{as}e^{at}} = \underbrace{\lambda e^{as} \times \lambda e^{at}}_{=\lambda^2 e^{as}e^{at}} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lambda^2 = \lambda.$$

La fonction f sera donc solution seulement quand $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

Finalement, en dehors de la fonction nulle, les solutions sont les fonctions $x \mapsto e^{ax}$ avec a un nombre complexe.

Exercice 26 **

Déterminer les fonctions $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in [0\,;1], \quad f'(x) - f(x) = f(0) + f(1).$$

Solution

L'équation étudiée ne correspond pas à une équation différentielle car le second membre dépend de la fonction inconnue.

méthode

> On analyse une fonction solution en observant qu'elle satisfait une équation différentielle $y' - y = C$ pour une certaine constante C.

Soit f une fonction solution. Introduisons $C = f(0) + f(1)$. La fonction f est solution de l'équation différentielle $y' - y = C$ dont la solution générale s'exprime

$$y(x) = \lambda e^x - C \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

En résumé, si f est solution, il existe deux constantes réelles C et λ telles que pour tout x de $[0\,;1]$

$$f(x) = \lambda e^x - C.$$

Inversement, considérons f une fonction comme ci-dessus. Celle-ci est dérivable et l'on a

$$\forall x \in [0\,;1], \quad f'(x) - f(x) = C \quad \text{et} \quad f(0) + f(1) = \lambda(1 + e) - 2C.$$

Cette fonction est donc solution du problème posé si, et seulement si,

$$C = \lambda(1 + e) - 2C$$

Après résolution, on obtient

$$C = \lambda\frac{(1 + e)}{3}.$$

Finalement, les solutions cherchées sont les fonctions [2]

$$f\colon x \mapsto \lambda\left(e^x - \frac{1 + e}{3}\right) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. Le raisonnement qui précède n'étant pas mené par équivalences, une vérification s'impose.

2. Ces fonctions constituent un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions dérivables de $[0\,;1]$ vers $\mathbb{R}$ ce qui pouvait être attendu en interprétant la résolution de l'équation comme la détermination du noyau de l'application linéaire $\varphi\colon f \mapsto f' - f - f(0) - f(1)$.

5.5 Exercices d'approfondissement

Exercice 27 ** (Lemme de Grönwall)

Soit $a\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs positives et A sa primitive s'annulant en 0.

Soit aussi $f\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

(a) On suppose que $f'(x) \leqslant a(x)f(x)$ pour tout $x \geqslant 0$. Montrer qu'alors

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \leqslant f(0)\mathrm{e}^{A(x)}.$$

(b) On suppose que pour tout $x \geqslant 0$

$$f(x) \leqslant f(0) + \int_0^x a(t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer qu'à nouveau

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \leqslant f(0)\mathrm{e}^{A(x)}.$$

Solution

(a) **méthode**

> La solution générale de l'équation différentielle associée à l'inéquation est $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{A(x)}$. On étudie alors les variations de la fonction $\lambda\colon x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$.

La fonction λ est définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ avec pour tout $x \geqslant 0$

$$\lambda'(x) = \underbrace{\big(f'(x) - a(x)f(x)\big)}_{\leqslant 0}\mathrm{e}^{-A(x)} \leqslant 0.$$

La fonction λ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et l'inégalité $\lambda(x) \leqslant \lambda(0)$ détermine celle voulue.

(b) **méthode**

> On étudie la fonction $h\colon x \mapsto f(0) + \int_0^x a(t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

Le terme intégral correspond à l'expression d'une primitive, la fonction h est donc dérivable sur $[0\,;+\infty[$ avec, pour tout $x \geqslant 0$,

$$h'(x) = a(x)f(x).$$

La fonction a étant positive, l'inégalité $f(x) \leqslant h(x)$ entraîne $h'(x) \leqslant a(x)h(x)$. L'étude qui précède donne alors

$$h(x) \leqslant h(0)\mathrm{e}^{A(x)} = f(0)\mathrm{e}^{A(x)} \quad \text{pour tout } x \geqslant 0$$

et il vient donc

$$f(x) \leqslant h(x) \leqslant f(0)\mathrm{e}^{A(x)} \quad \text{pour tout } x \geqslant 0.$$

Exercice 28 ***

Soit a un réel strictement positif et $f\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f' + af$ tend vers 0 en $+\infty$. Montrer que f est de limite nulle en $+\infty$.

Solution

méthode

> En posant $g = f' + af$ et en résolvant l'équation $y' + ay = g$, on peut exprimer f à l'aide d'une intégrale fonction de g.

L'équation différentielle $y' + ay = g$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de solution homogène

$$y_h(x) = \lambda \mathrm{e}^{-ax} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Par la méthode de la variation de la constante, on obtient une solution particulière y_p de la forme

$$y_p(x) = \lambda(x)\mathrm{e}^{-ax} \quad \text{avec} \quad \lambda'(x) = g(x)\mathrm{e}^{ax}.$$

On obtient une fonction λ convenable à l'aide d'une primitive exprimée par une intégrale

$$\lambda(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t.$$

Finalement, la solution générale de l'équation $y' + ay = g$ sur $[0\,;+\infty[$ s'écrit

$$y(x) = \lambda \mathrm{e}^{-ax} + \mathrm{e}^{-ax}\int_0^x g(t)\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t.$$

En particulier, la fonction f est de cette forme. Il reste à étudier sa limite quand x tend vers $+\infty$.

Puisque le réel a est strictement positif, on a déjà

$$\lambda \mathrm{e}^{-ax} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

méthode

> Pour montrer que le terme intégral est de limite nulle, on le coupe en deux afin de pouvoir exprimer par les ε que la fonction g est de limite nulle[1].

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la fonction g est de limite nulle, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $|g(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \geqslant A$.

Pour $x \geqslant A$, on découpe l'intégrale en $t = A$

$$\mathrm{e}^{-ax}\int_0^x g(t)\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-ax}\int_0^A g(t)\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t + \int_A^x g(t)\mathrm{e}^{a(t-x)}\,\mathrm{d}t.$$

1. Pour cette résolution, on prend appui sur définition formelle de limite présentée p. 229.

D'une part, la première intégrale apparaît comme une constante et donc

$$\underbrace{\mathrm{e}^{-ax}}_{\to 0} \int_0^A g(t)\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Pour x assez grand, cette quantité est bornée par ε : il existe $A' \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout x supérieur à A'

$$\left|\mathrm{e}^{-ax} \int_0^A g(t)\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon.$$

D'autre part, on peut borner [1] la seconde intégrale en exploitant $|g(t)| \leqslant \varepsilon$

$$\begin{aligned}\left|\int_A^x g(t)\mathrm{e}^{a(t-x)}\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_A^x |g(t)|\mathrm{e}^{a(t-x)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_A^x \varepsilon\mathrm{e}^{a(t-x)}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \varepsilon\left[\frac{\mathrm{e}^{a(t-x)}}{a}\right]_A^x = \frac{\varepsilon}{a}(1-\mathrm{e}^{a(A-x)}) \leqslant \frac{\varepsilon}{a}.\end{aligned}$$

Finalement, pour $x \geqslant \max(A, A')$, on obtient

$$\left|\mathrm{e}^{-ax} \int_0^x g(t)\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon + \frac{\varepsilon}{a} = C^{te}\varepsilon.$$

On peut alors conclure que f est de limite nulle en $+\infty$.

1. On utilise ici l'inégalité triangulaire intégrale (Th. 4 p. 337).

CHAPITRE 6

Suites numériques

6.1 Les suites réelles

6.1.1 Définitions

Définition

On appelle *suite réelle* toute application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur $u(n)$, usuellement notée u_n, est appelée *terme d'indice* n de la suite. Une suite est indifféremment notée u, (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Une suite (u_n) peut être définie :

— explicitement, en donnant l'expression de son terme général : $u_n = \dots$;

— implicitement, en définissant le terme u_n comme solution d'un problème dépendant du paramètre n ;

— par récurrence, en exprimant u_{n+1} en fonction d'un ou plusieurs rangs précédents.

Plus généralement, si n_0 désigne un naturel, on parle encore de suite lorsque l'on considère une fonction $u : \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant n_0\} \to \mathbb{R}$. Celle-ci est notée $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

Par commodité, le reste de l'étude est présenté dans le cas où $n_0 = 0$. On peut cependant généraliser aisément aux suites définies à partir d'un certain rang.

6.1.2 Constances

Définition

On dit qu'une suite $u = (u_n)$ est *constante*, s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant $u_n = \lambda$ pour tout naturel n. Cette suite est alors dite *constante égale à* λ.

La *suite nulle* est la suite constante égale à 0.

Définition

On dit qu'une suite $u = (u_n)$ est *stationnaire* lorsqu'elle est constante à partir d'un certain rang. Ceci signifie qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $u_n = \lambda$ pour tout n supérieur à N.

6.1.3 Opérations

Définition

Soit deux suites $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$. On définit la *suite somme* $u + v$ et la *suite produit* uv par

$$(u+v)_n = u_n + v_n \quad \text{et} \quad (uv)_n = u_n v_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En particulier, on définit la suite λu en multipliant u par la suite constante égale à λ.

6.1.4 Monotonies

Définition

On dit qu'une suite réelle (u_n) est *croissante* si $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout naturel n.
Elle est dite *strictement croissante* lorsque $u_n < u_{n+1}$ pour tout naturel n.

Mutatis mutandis, on définit les notions de suite *décroissante* voire *strictement décroissante*.
On peut parler aussi de monotonie à partir d'un certain rang : on dit que la suite (u_n) est croissante à partir du rang n_0 si la comparaison $u_n \leqslant u_{n+1}$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

6.1.5 « Bornitude »

Définition

On dit qu'une suite réelle (u_n) est *majorée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ vérifiant $u_n \leqslant M$ pour tout naturel n. Un tel réel M est alors appelé *majorant* de la suite (u_n).

Lorsqu'une suite $u = (u_n)$ est majorée, on peut [1] introduire sa *borne supérieure*, autrement dit, le plus petit de ses majorants. Celle-ci est notée

$$\sup u, \quad \sup u_n \quad \text{ou} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n.$$

La suite (u_n) est dite *minorée* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ vérifiant $u_n \geqslant m$ pour tout naturel n. Un tel réel m est alors appelé *minorant* de la suite et l'on peut introduire la *borne inférieure* de la suite qui est le plus grand de ses minorants.

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est *bornée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ vérifiant $|u_n| \leqslant M$ pour tout naturel n. On dit alors que M est une *borne* de la suite.

1. Si la suite u est majorée, l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, elle admet une borne supérieure (Th. 1 p. 5).

Théorème 1
Une suite réelle est bornée si, et seulement si, elle est minorée et majorée.

En pratique, pour montrer qu'une suite réelle est bornée, il est préférable de majorer la valeur absolue de u_n plutôt que d'encadrer le terme u_n, notamment parce que la valeur absolue rend les facteurs positifs ce qui permet de multiplier les inégalités.

6.2 Limite d'une suite réelle

6.2.1 Limites finies et infinies

Définition

On dit qu'une suite réelle $u = (u_n)$ *tend* vers un réel ℓ lorsque l'on a la propriété [1]

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

L'inégalité $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ peut aussi s'écrire $\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$: elle signifie que u_n est une valeur approchée de ℓ à ε près.

Théorème 2 (Unicité de la limite)
Si une suite (u_n) tend vers les nombres ℓ et ℓ' alors $\ell = \ell'$.

Définition

On dit qu'une suite réelle $u = (u_n)$ *tend* vers $+\infty$ lorsque l'on a la propriété [2]

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \implies u_n \geqslant M.$$

Mutatis mutandis, on définit qu'une suite tend vers $-\infty$ en remplaçant « $u_n \geqslant M$ » par « $u_n \leqslant M$ ».
Une suite réelle qui tend vers un réel ℓ ne peut tendre vers un infini. Plus précisément, lorsqu'il existe, il y a unicité de l'élément $\ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ vers lequel une suite u peut tendre.

Définition

Lorsqu'une suite $u = (u_n)$ tend vers un élément ℓ éventuellement infini, on écrit

$$u \to \ell, \quad u_n \to \ell \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell.$$

Cet élément ℓ étant unique, on l'appelle la *limite* de la suite. Celle-ci est notée

$$\lim u, \quad \lim u_n \quad \text{ou} \quad \lim_{n \to +\infty} u_n.$$

1. On peut proposer une définition équivalente avec les inégalités strictes « $n > N$ » au lieu de « $n \geqslant N$ » et/ou « $|u_n - \ell| < \varepsilon$ » au lieu de « $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ ».
2. On peut aussi proposer une définition en termes d'inégalités strictes.

6.2.2 Vocabulaire de convergence

Définition

> On dit qu'une suite réelle *converge* lorsque celle-ci admet une limite finie ℓ. Sinon, on dit que la suite *diverge*.

Une suite réelle peut présenter trois comportements distincts :

- elle peut converger (c'est-à-dire admettre une limite finie) ;
- elle peut diverger vers un infini ;
- elle peut diverger sans posséder de limite.

La suite de terme général $(-1)^n$ est un exemple de suite entrant dans la dernière catégorie.

> **Théorème 3**
> Toute suite convergente est bornée.

La réciproque est fausse comme l'illustre la suite de terme général $(-1)^n$.

6.2.3 Limites et inégalités

> **Théorème 4 (Passage à la limite des inégalités larges)**
> Si deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont de limites finies[1] ℓ et ℓ' et, si $u_n \leqslant v_n$, au moins à partir d'un certain rang, alors $\ell \leqslant \ell'$.

On dit que les inégalités larges sont stables par passage à la limite.
Ce résultat n'est pas vrai pour les inégalités strictes : par passage à la limite, les inégalités strictes deviennent larges.
En revanche, une inégalité stricte sur la limite produit une inégalité stricte sur les termes de la suite :

> **Théorème 5**
> Si une suite réelle (u_n) tend vers une limite strictement positive alors, à partir d'un certain rang, les termes de la suite sont tous strictement positifs.

6.2.4 Limites par opérations

> **Théorème 6**
> Si deux suites (u_n) et (v_n) sont de limites finies ℓ et ℓ' alors
> $$u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ell' \quad \text{et} \quad u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\ell'.$$

Ce résultat se généralise aux limites infinies sous réserve de ne pas être confronté à une *forme indéterminée* : « $(+\infty) + (-\infty)$ », « $0 \times (+\infty)$ »,...

1. On peut aussi donner un sens à ce résultat lorsque les limites sont infinies.

Théorème 7
Si une suite (u_n) est de limite finie non nulle ℓ alors ses termes sont non nuls à partir d'un certain rang et

$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\ell}$$

Si la suite (u_n) tend vers un infini, on peut encore définir la suite des inverses à partir d'un certain rang et affirmer que celle-ci tend vers 0.
Si la suite (u_n) tend vers 0 et si ses termes sont strictement positifs[1] alors la suite des inverses tend vers $+\infty$.

6.2.5 Limites par comparaison

On peut justifier et calculer une limite par les théorèmes d'opérations qui précèdent. On peut aussi raisonner par comparaison à l'aide des résultats qui suivent :

Théorème 8 (Convergence par encadrement[2])
Soit (a_n), (b_n) et (u_n) trois suites réelles. On suppose que $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$, au moins à partir d'un certain rang.
Si les suites (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite ℓ, la suite (u_n) converge aussi vers ℓ.

En particulier, si $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon_n$ avec (ε_n) de limite nulle, la suite (u_n) tend vers ℓ.

Théorème 9 (Divergence par minoration)
Soit (a_n) et (u_n) des suites réelles. On suppose que $a_n \leqslant u_n$, au moins à partir d'un certain rang.
Si la suite (a_n) diverge vers $+\infty$, la suite (u_n) diverge aussi vers $+\infty$.

On peut énoncer un résultat symétrique montrant la divergence vers $-\infty$ par majoration.

6.3 Comportement des suites monotones

6.3.1 Théorème de la limite monotone

Théorème 10 (Théorème de la limite monotone)
Toute suite réelle monotone possède une limite.

Plus précisément :
- une suite croissante et majorée converge et sa limite est sa borne supérieure ;
- une suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

1. Ou seulement strictement positifs à partir d'un certain rang.
2. On trouve aussi les appellations imagées : *théorème des gendarmes*, de l'*étau*, du *sandwich*,...

Par passage à l'opposé, une suite décroissante et minorée converge vers sa borne inférieure tandis qu'une suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

6.3.2 Suites adjacentes

Définition

On dit que deux suites réelles (a_n) et (b_n) forment un couple de *suites adjacentes* lorsque la première est croissante, que la seconde est décroissante et que leur différence tend vers 0.

Théorème 11 (Théorème des suites adjacentes)
Si (a_n) et (b_n) forment un couple de suites adjacentes, elles convergent vers une même limite ℓ et encadrent celles-ci.

6.4 Suites extraites

6.4.1 Définition

Définition

On appelle *suite extraite* [1] d'une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite $v = (v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe une fonction $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante vérifiant $v_k = u_{\varphi(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

En posant $n_k = \varphi(k)$, une suite extraire peut se comprendre comme une sélection à l'intérieur de la suite u de termes qui se succèdent

$$(v_k) = (u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{avec} \quad n_k < n_{k+1}.$$

Il est par exemple commun de considérer les suites extraites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) des termes d'indices pairs et impairs de la suite u.

Théorème 12
Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite.

Ce résultat est essentiellement utile pour établir la divergence d'une suite par extraction de sous-suites de limites différentes. À l'inverse, on peut établir la limite d'une suite en étudiant les suites extraites des termes d'indices pairs et impairs :

Théorème 13
Si les suites extraites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) possèdent la même limite, la suite (u_n) tend vers celle-ci.

1. On peut aussi parler de *sous-suite*.

6.4.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 14 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)
De toute suite bornée on peut extraire une suite convergente.

6.5 Traductions séquentielles

6.5.1 Réalisation de supremum ou d'infimum

On peut traduire par les suites qu'une borne supérieure « touche la partie » :

Théorème 15
Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée (resp. non majorée), il existe une suite d'éléments de A dont la limite est la borne supérieure de A (resp. $+\infty$).

Ce résultat peut être transposé à l'étude d'une borne inférieure.

6.5.2 Densité

Définition
On dit qu'une partie X de $\mathbb{R}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide :
$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad a < b \implies]a\,; b[\cap X \neq \emptyset.$$

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels et l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des irrationnels sont des parties denses de $\mathbb{R}$ (Th. 6 p. 7). Il en est de même de l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux.

Théorème 16
Une partie X de $\mathbb{R}$ est dense si, et seulement si, tout réel est limite d'une suite d'éléments de X.

6.6 Extension aux suites complexes

6.6.1 Définitions

Définition
Une *suite complexe* est une suite $z = (z_n)$ d'éléments de $\mathbb{C}$. Les suites réelles $\big(\mathrm{Re}(z_n)\big)$ et $\big(\mathrm{Im}(z_n)\big)$ se nomment les *parties réelle* et *imaginaire* de (z_n).

Les opérations sur les suites réelles se transposent en les mêmes termes aux suites complexes.
En l'absence de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$, on ne peut définir les concepts de suites minorées, de suites majorées ou de suites monotones dans le cadre des suites complexes. On peut cependant définir la notion de suite bornée :

Définition

Une suite complexe (z_n) est dite *bornée* lorsqu'il existe un réel M pour lequel $|z_n| \leqslant M$ pour tout naturel n.

6.6.2 Convergence

Définition

On dit qu'une suite complexe $z = (z_n)$ *tend* vers un complexe ℓ si la suite réelle de terme général $|z_n - \ell|$ tend vers 0.

Le complexe ℓ est alors unique, on l'appelle la *limite* de la suite (z_n) et l'on dit que la suite *converge* vers ℓ.

Toute suite convergente est bornée et le calcul sur les limites est compatible avec les opérations sur les suites. De plus, on peut étudier la convergence d'une suite par l'étude de ses parties réelle et imaginaire :

Théorème 17

La suite (z_n) converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si, et seulement si, les suites réelles $\big(\mathrm{Re}(z_n)\big)$ et $\big(\mathrm{Im}(z_n)\big)$ tendent respectivement vers $\mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(\ell)$.

Il n'y a pas de concept de limite infinie pour les suites complexes, tout au plus on peut parler de suite complexe dont le module tend vers $+\infty$.
Enfin, notons que la notion de suite extraite se transpose aux suites complexes et que le théorème de Bolzano-Weierstrass reste valable.

6.7 Suites remarquables

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

6.7.1 Suites arithmético-géométriques

Définition

On appelle *suite arithmético-géométrique* de raisons q et $r \in \mathbb{K}$ toute suite numérique (u_n) vérifiant $u_{n+1} = qu_n + r$ pour $n \in \mathbb{N}$.

On parle de *suite géométrique* de raison q lorsque $r = 0$. On sait en exprimer le terme général : $u_n = q^n u_0$.

On parle de *suite arithmétique* de raison r lorsque $q = 1$. On sait encore exprimer le terme général : $u_n = u_0 + nr$.

Lorsque $q \neq 1$, on détermine α point fixe de la relation de récurrence (autrement dit, on résout l'équation $\alpha = q\alpha + r$) et l'on vérifie que la suite (v_n) de terme général $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique de raison q. On peut alors exprimer le terme général v_n puis u_n.

6.7.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition

On dit qu'une suite numérique (u_n) est *récurrente linéaire d'ordre 2* lorsqu'il existe un couple $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que

$$u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Lorsque $a = b = 0$, la suite (u_n) correspond à une suite nulle à partir du rang 2.
Supposons désormais $(a, b) \neq (0, 0)$.
Afin d'exprimer le terme général de la suite (u_n) on résout l'*équation caractéristique* associée

$$r^2 + ar + b = 0$$

de discriminant Δ.

Théorème 18 (Cadre complexe[1] : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)
Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique possède deux racines distinctes r_1 et r_2 et le terme général s'exprime

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2.$$

Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une racine double r et le terme général s'exprime

$$u_n = (\lambda n + \mu) r^n \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2.$$

Théorème 19 (Cadre réel : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)
Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 et le terme général s'exprime

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une racine réelle double r et le terme général s'exprime

$$u_n = (\lambda n + \mu) r^n \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $re^{\pm i\theta}$ et le terme général s'exprime

$$u_n = \big(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\big) r^n \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Dans les deux cas, les deux premiers termes de la suite permettent de déterminer λ et μ.

1. La résolution des équations du second degré dans le cadre des nombres complexes est présentée dans le Th. 9 p. 88.

6.8 Exercices d'apprentissage

6.8.1 Généralités

Exercice 1
Exprimer le terme général de la suite réelle (u_n) définie par :

(a) $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

(b) $u_0 = 1$, $u_1 = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0$.

(c) $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n = 0$.

Solution

(a) La suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique.

méthode
On introduit $v_n = u_n - \alpha$ avec α point fixe de la relation de récurrence.

L'équation $\alpha = 3\alpha + 1$ a pour solution $\alpha = -1/2$. Considérons alors la suite (v_n) de terme général $v_n = u_n + 1/2$. On a $v_0 = 1/2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} = 3u_n + \frac{3}{2} = 3v_n.$$

La suite (v_n) est géométrique de raison 3 et donc

$$v_n = 3^n v_0 = \frac{3^n}{2} \quad \text{puis} \quad u_n = \frac{3^n - 1}{2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

(b) La suite (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

méthode
On résout l'équation caractéristique afin de proposer la forme générale de l'écriture de u_n (Th. 19 p. 195).

L'équation caractéristique associée à la relation de récurrence est $r^2 + 2r + 1 = 0$ de racine double $r = -1$. Le terme général de la suite (u_n) s'exprime alors

$$u_n = (\lambda n + \mu)(-1)^n$$

avec λ, μ réels. Les conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = -3$ permettent de déterminer λ et μ : on obtient $\lambda = 2$ et $\mu = 1$. Finalement, $u_n = (-1)^n(2n+1)$ pour tout naturel n.

(c) La suite (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - 2r + 2 = 0$ de racines complexes $1 \pm \mathrm{i}$.

méthode
Lorsque les racines sont complexes, on écrit l'une d'elles sous forme trigonométrique $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ afin de pouvoir exprimer [1] le terme général.

On peut écrire $1+\mathrm{i} = re^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r=\sqrt{2}$ et $\theta = \pi/4$. Le terme général de la suite (u_n) s'exprime alors

$$u_n = \left(\lambda\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \mu\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)\sqrt{2}^n.$$

Les conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ déterminent λ et μ tous deux égaux à 1. On conclut

$$u_n = \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)\sqrt{2}^n = \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right)\sqrt{2}^{n+1} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

Exercice 2

Étudier la monotonie de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

(a) $u_n = 2^n \sin\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$ avec $\theta \in [0\,;\pi]$

(b) $u_{n+1} = e^{u_n} - 1$ et $u_0 \in \mathbb{R}$

(c) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ avec $n \geqslant 1$

(d) $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{2k^2}\right)$ avec $n \geqslant 1$.

Solution

(a) **méthode**

On compare les termes successifs u_n et u_{n+1}.

Soit $n\in\mathbb{N}$. Par la formule $\sin(2a) = 2\sin a\cos a$, on écrit

$$u_n = 2^n\sin\left(2\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = 2^n \times 2\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = u_{n+1}\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right).$$

D'une part, le cosinus est inférieur à 1 car l'angle $\theta/2^{n+1}$ appartient à $[0\,;\pi/2]$. D'autre part, u_{n+1} est positif par le même argument. On en déduit $u_n \leqslant u_{n+1}$. La suite (u_n) est croissante.

(b) **méthode**

On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n)$ avec f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 1$.

1. Il y a des similarités entre la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (Th. 6 p. 158) et la résolution d'une relation de récurrence linéaire double. Cependant, ces deux résolutions se distinguent dans le cas des racines complexes conjuguées : pour l'équation différentielle, on exploite l'écriture algébrique $\alpha + \mathrm{i}\omega$ alors que, pour les suites, on utilise l'écriture trigonométrique $re^{\mathrm{i}\theta}$.

La fonction f est dérivable avec $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$ pour tout réel x.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f est positive et la suite (u_n) est donc croissante.

(c) **méthode**

‖ On simplifie $u_{n+1} - u_n$ avant d'en déterminer le signe.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a après simplification des termes communs [1]

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\
&= \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geqslant 0.
\end{aligned}$$

La suite étudiée est croissante.

(d) **méthode**

‖ On compare à 1 le rapport de deux termes successifs.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le terme u_n est strictement positif [2] par produit de facteurs qui le sont et, en simplifiant les facteurs communs,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{2(n+1)^2} \leqslant 1.$$

La suite (u_n) est donc décroissante.

Exercice 3

Soit (u_n) une suite telle que les suites extraites (u_{2p}), (u_{2p+1}) et (u_{3p}) convergent. Montrer que (u_n) converge.

1. Pour exprimer u_{n+1}, on n'oublie pas de remplacer n par $n+1$ dans le terme sommé.
2. Non seulement la non nullité de u_n permet de diviser par u_n mais son signe positif permet de multiplier les inégalités. La comparaison à 1 du quotient u_{n+1}/u_n détermine alors lequel de u_{n+1} ou de u_n est le plus grand.

Solution

méthode

‖ On montre que (u_{2p}) et (u_{2p+1}) convergent vers la même limite (Th. 13 p. 192).

Notons ℓ, ℓ' et ℓ'' les limites des trois suites extraites (u_{2p}), (u_{2p+1}) et (u_{q^2}).

La suite $(u_{(2k)^2})$ est une suite extraite commune aux suites (u_{2p}) et (u_{q^2}). En effet, ses termes ont des indices qui sont à la fois des entiers pairs et des carrés. Celle-ci converge donc à la fois vers ℓ et vers ℓ'' (Th. 12 p. 192). Par unicité de la limite, $\ell = \ell''$.

Aussi, la suite $(u_{(2k+1)^2})$ est une suite extraite commune aux suites (u_{2p+1}) et (u_{q^2}). On en déduit $\ell' = \ell''$ puis, finalement, $\ell = \ell'$. Les suites des termes d'indices pairs et impairs convergeant vers la même limite, la suite complète converge vers cette limite.

6.8.2 Convergence et divergence

Exercice 4

Soit (u_n) une suite croissante de réels strictement positifs. On suppose que la suite (u_n) converge. Montrer que sa limite ℓ est strictement positive.

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$. En passant à la limite, on obtient $\ell \geqslant 0$ car les inégalités strictes deviennent larges par passage à la limite...

méthode

‖ On prend appui par comparaison sur un terme de la suite.

La suite (u_n) étant supposée croissante, on peut écrire $u_n \geqslant u_0$ pour tout naturel n. En passant à la limite, on obtient $\ell \geqslant u_0$ et donc $\ell > 0$ car $u_0 > 0$.

Exercice 5

Étudier la convergence du produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle.

Solution

méthode

‖ On montre par comparaison que le produit tend vers 0.

Soit (u_n) une suite bornée par un certain réel M et (v_n) une suite de limite nulle. Pour tout naturel n, on a [1]

$$|u_n v_n - 0| = \underbrace{|u_n|}_{\leqslant M} \underbrace{|v_n|}_{\geqslant 0} \leqslant M\,|v_n|\,.$$

Par produit de limites, le terme $M\,|v_n|$ tend vers 0 et, par théorème de convergence par encadrement (Th. 8 p. 191), on conclut [2] que $(u_n v_n)$ tend vers 0.

1. Il est plus commode de raisonner par les valeurs absolues plutôt que par encadrement, notamment car le signe du facteur v_n n'est pas connu.

2. La démonstration proposée vaut aussi bien pour une suite réelle que pour une suite complexe : il suffit de lire « module » au lieu de « valeur absolue ».

Exercice 6

Soit u et v deux suites réelles.

(a) On suppose que les suites u et $u+v$ convergent. Montrer que la suite v converge.

(b) On suppose que les suites u et uv convergent. Peut-on affirmer la convergence de la suite v ?

Solution

(a) **méthode**

> On exprime v en fonction de u et $u+v$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit $v_n = (u_n + v_n) - u_n$ et donc, par opérations sur les suites convergentes, on peut affirmer que la suite v converge.

(b) **méthode**

> L'affirmation semble douteuse : on produit un contre-exemple.

Considérons les suites u et v déterminées par $u_n = 1/n$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) et $v_n = n$. La suite u converge vers 0 et la suite produit uv converge vers 1. Cependant, la suite v diverge[1] vers $+\infty$.

Exercice 7

Donner dans chaque cas un exemple de suite (u_n) :

(a) ni minorée, ni majorée ;

(b) minorée, non majorée et qui ne tend pas vers $+\infty$;

(c) positive qui tend vers 0 sans être décroissante.

Solution

méthode

> Il faut avoir en tête que des suites peuvent osciller...

(a) $(u_n) = \big((-1)^n n\big)$ convient[2]. Cette suite n'est pas majorée car la suite extraite des termes d'indices pairs diverge vers $+\infty$. Elle n'est pas minorée car la suite extraite des termes d'indices impairs diverge vers $-\infty$.

(b) $(u_n) = \big((1 + (-1)^n)n\big)$ convient. En effet, ses termes sont positifs, elle n'est pas majorée à cause des termes d'indices pairs, elle ne diverge pas vers $+\infty$ à cause des termes d'indices impairs.

(c) $(u_n) = \left(\frac{1+(-1)^n}{n}\right)$ convient. Cette suite tend vers 0 car c'est le produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle. Cette suite n'est pas décroissante car ses termes d'indices impairs sont nuls alors que ceux d'indices pairs sont strictement positifs.

---

1. Avec $v_n = (-1)^n$, on propose un exemple où la suite diverge sans limite.
2. On peut aussi proposer $u_n = n \sin n$ mais l'argumentation est moins commode.

Exercice 8

Soit $\theta \in \left]0\,;2\pi\right[$. Montrer la divergence des suites de termes généraux u_n avec :

(a) $u_n = (-1)^n$ (b) $u_n = \cos(n\theta)$ (c) $u_n = e^{in\theta}$.

Solution

(a) **méthode**

> On extrait deux suites aux comportements asymptotiques différents.

La suite extraite (u_{2n}) est constante égale à 1 et converge donc vers 1. À l'inverse, la suite (u_{2n+1}) converge vers -1. La suite (u_n) est donc divergente (Th. 12 p. 192).

(b) **méthode**

> On constate que l'existence d'une limite à la suite $\big(\cos(n\theta)\big)$ est incompatible avec les formules de trigonométrie usuelles.

Par l'absurde, supposons la convergence de $\big(\cos(n\theta)\big)$ vers une limite ℓ. Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule de factorisation

$$\cos\big((n+1)\theta\big) + \cos\big((n-1)\theta\big) = 2\cos(n\theta)\cos\theta$$

donne par passage à la limite

$$2\ell = 2\ell\cos\theta.$$

Sachant $\cos\theta \neq 1$, on peut affirmer $\ell = 0$. Or la formule de développement

$$\cos(2n\theta) = 2\cos^2(n\theta) - 1$$

donne alors à la limite l'absurdité $0 = -1$. La suite $\big(\cos(n\theta)\big)$ est donc divergente[1].

(c) Par l'étude qui précède, on a remarqué la divergence de la partie réelle de la suite $\big(e^{in\theta}\big)$: c'est un argument suffisant pour conclure à sa divergence. On peut cependant proposer une démonstration plus directe :

méthode

> On observe que $u_{n+1} - u_n$ ne tend pas vers 0.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En factorisant, on peut écrire

$$u_{n+1} - u_n = \underbrace{e^{in\theta}}_{|.|=1}\underbrace{\left(e^{i\theta} - 1\right)}_{\neq 0}.$$

La différence $u_{n+1} - u_n$ n'est donc pas de limite nulle et la suite (u_n) est divergente.

Notons que la condition $u_{n+1} - u_n \to 0$ est une condition nécessaire de convergence mais celle-ci n'est pas suffisante : voir sujet 16 p. 208.

1. Pour $\theta = \pi$, on retrouve la divergence de la suite $\big((-1)^n\big)$.

6.8.3 Calcul de limites

Exercice 9

Étudier[1] les limites suivantes

(a) $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n - n$ (b) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^3+n+1}{2n^2+1}$ (c) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

(d) $\lim_{n\to+\infty} n^{1/n}$ (e) $\lim_{n\to+\infty} (2+\cos n)^{1/n}$ (f) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

(g) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Solution

(a) Il s'agit de résoudre une forme indéterminée additive « $(+\infty)-(+\infty)$ ».

méthode

‖ On factorise le terme prépondérant.

$$\mathrm{e}^n - n = \underbrace{\mathrm{e}^n}_{\to+\infty} \times \underbrace{\left(1-n\mathrm{e}^{-n}\right)}_{\to 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \quad \text{car on sait } \lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0.$$

(b) Il s'agit de résoudre une forme indéterminée quotient « $(+\infty)/(+\infty)$ ».

méthode

‖ On factorise les termes prépondérants au numérateur et au dénominateur.

$$\frac{n^3+n+1}{2n^2+1} = \frac{n^3}{n^2}\cdot\frac{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{2+\frac{1}{n^2}} = \underbrace{n}_{\to+\infty} \times \underbrace{\frac{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{2+\frac{1}{n^2}}}_{\to\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

(c) Il s'agit de résoudre une forme indéterminée additive « $(+\infty)-(+\infty)$ ».

méthode

‖ On multiplie et l'on divise par la quantité conjuguée.

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(d) Il s'agit de résoudre une forme indéterminée puissance « $+\infty^0$ ».

méthode

‖ On exprime la puissance sous forme exponentielle.

1. *Étudier* une limite consiste à savoir si celle-ci existe (ce qui n'est pas automatique) et déterminer sa valeur si tel est le cas.

On obtient

$$n^{1/n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{car on sait } \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

(e) La suite de terme général $(\cos n)$ est divergente, l'étude se prête mal à un raisonnement par opérations.

méthode

Une limite peut être déterminée par opérations ou par comparaisons.

Pour tout naturel n, le terme $\cos n$ est compris entre -1 et 1 et donc

$$1^{1/n} \leqslant (2+\cos n)^{1/n} \leqslant 3^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Par le théorème de convergence par encadrement (Th. 8 p. 191), on conclut

$$(2+\cos n)^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

(f) Il s'agit de résoudre une forme indéterminée quotient « $(+\infty)/(+\infty)$ ». Le terme général se prête cependant mal au raisonnement par opérations.

méthode

On minore la suite étudiée par une suite de limite $+\infty$.

On exprime les nombres factoriels par des produits et l'on simplifie les portions communes au numérateur et au dénominateur

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{1\times 2\times\cdots\times n\times(n+1)\times\cdots\times(2n)}{(1\times 2\times\cdots\times n)^2} = \frac{(n+1)\times(n+2)\times\cdots\times(2n)}{1\times 2\times\cdots\times n}$$
$$= \frac{(n+1)}{1}\times\underbrace{\frac{(n+2)}{2}}_{\geqslant 1}\times\cdots\times\underbrace{\frac{2n}{n}}_{\geqslant 1} \geqslant n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Par le théorème de divergence par minoration (Th. 9 p. 191), on conclut que la suite étudiée diverge vers $+\infty$.

(g) **méthode**

L'exponentielle imaginaire $\mathrm{e}^{in\theta}$ est bornée car de module 1.

$$\frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n} = \underbrace{\mathrm{e}^{in\theta}}_{\text{bornée}} \times \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Exercice 10

Étudier les limites quand n croît vers l'infini des termes suivants :

(a) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}}$ (b) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$ (c) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{(n+k)^2}$.

Solution

Aucune de ces sommes ne peut être simplement calculées : on étudie leur limite par un argument de comparaison (Th. 8 et 9 p. 191).

(a) **méthode**

> Pour estimer l'ordre asymptotique de la somme, on encadre celle-ci à partir du plus petit et du plus grand terme sommé.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour k allant de 1 à n, on peut affirmer

$$\frac{1}{n+\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{n+\sqrt{k}} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit l'encadrement

$$n \times \frac{1}{n+\sqrt{n}} \leqslant S_n \leqslant n \times \frac{1}{n+1}.$$

Les termes encadrants convergent vers 1, et donc, par le théorème de convergence par encadrement, on conclut que (S_n) tend vers 1.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour k allant de 1 à n, on peut encadrer le terme sommé

$$\frac{1}{\sqrt{2n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

et l'on obtient en sommant

$$\underbrace{n \times \frac{1}{\sqrt{2n}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty} \leqslant S_n \leqslant n \times \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Par le théorème de divergence par minoration, on peut affirmer que (S_n) tend vers $+\infty$.

(c) Le facteur $\sin k$ changeant de signe, il n'est pas simple d'encadrer le terme sommé. Cependant, le dénominateur est au moins égal à $(n+1)^2$ et les nombres sommés paraissent « assez petits ».

méthode

> On majore $|S_n|$ par un terme de limite nulle.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par l'inégalité triangulaire

$$|S_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{|\sin k|}{(n+k)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+1)^2} = n \times \frac{1}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

La suite (S_n) est donc de limite nulle.

6.8.4 Limites monotones

Exercice 11
Montrer la convergence de la suite (u_n) de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Solution

méthode
Lorsqu'il est demandé de justifier une convergence sans calculer la limite, on peut penser à utiliser le théorème de la limite monotone (Th. 10 p. 191).

On étudie la monotonie de la suite (u_n). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En simplifiant les termes communs aux deux sommes

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0.$$

La suite (u_n) est donc croissante. Il suffit alors de montrer qu'elle est majorée pour affirmer qu'elle converge.

Chaque terme de la somme est inférieur à 1 et celle-ci est donc inférieure à n : ceci ne produit pas un majorant satisfaisant, un majorant doit être une constante !

méthode
On compare le terme sommé à un terme proche dont on sait calculer la somme.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![2\,;n]\!]$, on a

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

En sommant ces inégalités (l'indice 1 étant traité à part), on obtient

$$u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} \leqslant 2.$$

La suite (u_n) est donc croissante et majorée : elle converge[1].

Exercice 12 (Approximation décimale d'un réel)
Soit x un réel. On étudie les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminées par

$$a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}.$$

Montrer que celles-ci forment un couple de suites adjacentes convergeant vers x.

1. On peut montrer que sa limite vaut $\pi^2/6$, voir sujet 28 p. 413.

Solution

méthode

On montre que deux suites sont adjacentes en constatant que l'une est croissante, l'autre décroissante et que la différence tend vers 0.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On peut écrire[1] $\lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x$ et donc $10 \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^{n+1}x$. La partie entière désignant le plus grand entier inférieur au nombre, on a

$$10\lfloor 10^n x \rfloor \leqslant \lfloor 10^{n+1} x \rfloor.$$

En divisant par 10^{n+1}, on obtient $a_n \leqslant a_{n+1}$: la suite (a_n) est croissante.

Aussi, $10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$ donc $\lfloor 10^{n+1} x \rfloor \leqslant 10^{n+1}x < 10 \lfloor 10^n x \rfloor + 10$. Les deux membres extrêmes désignant des entiers, on peut transformer l'inégalité stricte en l'inégalité large suivante

$$\lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1 \leqslant 10 \lfloor 10^n x \rfloor + 10.$$

En divisant par 10^{n+1}, on parvient à $b_{n+1} \leqslant b_n$: la suite (b_n) est décroissante.

Enfin, la différence $b_n - a_n$ tend vers 0 car égale à 10^{-n}.

méthode

Le théorème des suites adjacentes (Th. 11 p. 192) assure l'existence d'une limite commune aux suites (a_n) et (b_n).

Pour tout naturel n, l'encadrement $\lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$ donne $a_n \leqslant x < b_n$. En notant ℓ la limite commune aux suites adjacentes (a_n) et (b_n), on obtient par passage à la limite des inégalités larges $\ell \leqslant x \leqslant \ell$ et donc $\ell = x$.

6.9 Exercices d'entraînement

6.9.1 Définitions quantifiées des limites

On préfère généralement utiliser les théorèmes du cours plutôt que de revenir aux définitions quantifiées des limites. Cependant, il est quelquefois nécessaire de faire parler les ε... sous réserve de savoir ce que l'on veut leur faire dire !

Exercice 13 *

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergeant vers ℓ et ℓ' avec $\ell < \ell'$.
Montrer qu'à partir d'un certain rang, u_n est strictement inférieur à v_n.

1. Pour tout réel x, on sait $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Solution

méthode

Bien que cela ne soit pas indispensable à la résolution du problème, nous ramenons celui-ci à 0 en considérant $w_n = v_n - u_n$.

La suite (w_n) converge vers la limite $m = \ell' - \ell$ strictement positive. Par la définition quantifiée de la convergence, exprimée avec des inégalités strictes, on peut écrire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \implies m - \varepsilon < w_n < m + \varepsilon.$$

Cette propriété peut notamment être exploitée avec $\varepsilon = m$ qui est effectivement strictement positif. On peut donc affirmer qu'il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait

$$w_n > m - \varepsilon = 0.$$

La suite (w_n) est donc à termes strictement positifs [1] à partir d'un certain et $u_n < v_n$ à partir du même rang.

Exercice 14 **

Soit (u_n) une suite dont les termes sont tous entiers.

Montrer que (u_n) converge si, et seulement si, (u_n) est stationnaire.

Solution

Si la suite (u_n) est stationnaire égale à λ, il est clair que cette suite converge vers λ.

Inversement, supposons que la suite (u_n) converge et notons ℓ sa limite.

méthode

On étudie la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$.

La suite de terme général (u_{n+1}) converge vers la même limite que la suite (u_n) car elle s'en déduit par un glissement d'indice [2]. Par différence, la suite $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0 et l'on peut donc écrire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \implies |u_{n+1} - u_n| \leqslant \varepsilon.$$

En particulier, pour $\varepsilon = 1/2 > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_{n+1} - u_n| \leqslant 1/2$ pour tout naturel $n \geqslant N$. Or $u_{n+1} - u_n$ est un entier et donc $u_{n+1} - u_n = 0$.

Finalement, la suite (u_n) est constante à partir du rang N.

Exercice 15 * (Lemme de Cesàro)**

Soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$ une suite réelle convergeant vers une limite ℓ.

Montrer que la suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ des moyennes

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

converge aussi vers ℓ.

---

1. On vient ici de reproduire la démonstration du Th. 5 p. 190.
2. On peut aussi dire qu'il s'agit d'une suite extraite et employer le Th. 12 p. 192.

Solution

méthode

‖ On étudie $v_n - \ell$ en commençant par rapprocher ℓ des termes de la suite (u_n).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En écrivant $n\ell = \ell + \ell + \cdots + \ell$ (somme à n termes), il vient

$$v_n - \ell = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n - n\ell}{n} = \frac{(u_1 - \ell) + (u_2 - \ell) + \cdots + (u_n - \ell)}{n}$$

puis par l'inégalité triangulaire

$$|v_n - \ell| \leqslant \frac{|u_1 - \ell| + |u_2 - \ell| + \cdots + |u_n - \ell|}{n}. \tag{$*$}$$

méthode

‖ Par les ε, on exprime à partir d'un certain rang la proximité de u_n et ℓ.

Soit $\varepsilon > 0$. La suite (u_n) convergeant vers ℓ, il existe un rang N tel que $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour tout naturel n supérieur à N. On scinde alors la somme de l'inéquation $(*)$ au niveau du rang N

$$\begin{aligned} |v_n - \ell| &\leqslant \frac{\overbrace{|u_1 - \ell| + \cdots + |u_N - \ell|}^{=C \text{ constante}}}{n} + \frac{\overbrace{|u_{N+1} - \ell|}^{\leqslant \varepsilon} + \cdots + \overbrace{|u_n - \ell|}^{\leqslant \varepsilon}}{n} \\ &\leqslant \frac{C}{n} + \frac{n-N}{n}\varepsilon \leqslant \frac{C}{n} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Le terme C/n est de limite nulle et il existe donc un rang N' tel que $C/n \leqslant \varepsilon$ pour tout naturel n supérieur à N'.

Finalement, on obtient[1] $|v_n - \ell| \leqslant 2\varepsilon$ pour tout $n \geqslant \max(N, N')$. On peut affirmer que (v_n) tend vers ℓ.

6.9.2 Limites monotones

Exercice 16 * (Somme harmonique)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}.$$

(b) En déduire que la suite (H_n) tend[2] vers $+\infty$.

1. L'organisation du raisonnement est subtile : le choix de ε détermine N qui détermine à son tour la valeur de C puis la valeur de N'. Conclure par une comparaison $\leqslant 2\varepsilon$ au lieu de $\leqslant \varepsilon$ est anecdotique, il suffit de modifier le choix du ε initial pour parvenir à la conclusion attendue.

Solution

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En simplifiant les termes communs aux deux sommes

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \qquad (*)$$

car la dernière somme écrite comporte n termes tous au moins égaux à $1/2n$.

(b) **méthode**

‖ On étudie la monotonie de la suite (H_n).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient après simplification des termes communs

$$H_{n+1} - H_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} \geqslant 0.$$

On en déduit que la suite (H_n) est croissante. Elle admet donc une limite, éventuellement égale à $+\infty$ (Th. 10 p. 191).

Par l'absurde, si la suite (H_n) tend vers une limite finie ℓ, la suite extraite (H_{2n}) tend vers la même limite (Th. 12 p. 192). La comparaison $(*)$ donne à la limite l'absurdité $\ell - \ell \geqslant 1/2$.

On peut conclure que la suite (H_n) est de limite[3] $+\infty$.

Exercice 17 **

Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1}).$$

Montrer que la suite (u_n) converge.

On pourra étudier la monotonie de la suite (v_n) avec $v_n = \max(u_{n+1}, u_n)$.

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant v_n$ et $u_{n+1} \leqslant v_n$ donc $u_{n+2} \leqslant v_n$ puis

$$v_{n+1} = \max(u_{n+2}, u_{n+1}) \leqslant v_n.$$

La suite (v_n) est décroissante. Elle est de plus minorée par 0 et donc elle converge.

méthode

‖ On encadre la suite (u_n) à l'aide des termes de la suite (v_n).

2. La suite (H_n) est un exemple fameux de suite divergente dont la différence de deux termes consécutifs $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1}$ tend vers 0.

3. Dans le chapitre 11 sur les séries numériques on dira : « la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente ».

Pour n naturel

$$\begin{aligned} v_{n+1} = \max(u_{n+1}, u_{n+2}) &\leqslant \max\left(\frac{1}{2}(u_{n+1} + u_{n+1}), \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})\right) \\ &= \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}\max(u_{n+1}, u_n) = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}v_n. \end{aligned}$$

On a donc l'encadrement

$$2v_{n+1} - v_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_n.$$

Les deux membres encadrants convergent vers la même limite et donc, par le théorème de convergence par encadrement, la suite (u_n) converge vers cette limite.

Exercice 18 **

Soit (u_n) une suite réelle bornée. On pose

$$a_n = \inf_{p \geqslant n} u_p \quad \text{et} \quad b_n = \sup_{p \geqslant n} u_p.$$

(a) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent.

(b) Montrer que la suite (u_n) converge si, et seulement si, les limites des suites (a_n) et (b_n) sont égales.

Solution

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les termes a_n et b_n sont bien définis car $\{u_p \mid p \geqslant n\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et bornée (Th. 1 p. 5).

méthode

Si A et B sont des parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ avec $A \subset B$ alors

$$\inf(B) \leqslant \inf(A) \quad \text{et} \quad \sup(A) \leqslant \sup(B).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\{u_p \mid p \geqslant n+1\} \subset \{u_p \mid p \geqslant n\}$$

donc

$$a_n \leqslant a_{n+1} \quad \text{et} \quad b_{n+1} \leqslant b_n.$$

Les suites (a_n) et (b_n) sont respectivement croissante et décroissante. Elles sont de plus bornées donc toutes deux convergentes (Th. 10 p. 191).

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n appartient à l'ensemble $\{u_p \mid p \geqslant n\}$ et donc $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$. Si les suites (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite, la suite (u_n) converge vers celle-ci par encadrement.

Inversement, supposons la suite (u_n) convergente et notons ℓ sa limite. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang N tel que $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour tout naturel n supérieur à N. On peut alors écrire l'inclusion

$$\{u_p \mid p \geqslant n\} \subset [\ell - \varepsilon\,; \ell + \varepsilon].$$

On en déduit [1]

$$a_n, b_n \in [\ell - \varepsilon\,;\ell + \varepsilon] \quad \text{c'est-à-dire} \quad |a_n - \ell| \leqslant \varepsilon \text{ et } |b_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Les suites (a_n) et (b_n) convergent donc vers ℓ.

Exercice 19 **
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on étudie l'équation

$$(E_n)\colon x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1.$$

(a) Montrer que l'équation (E_n) possède une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$ et que x_n est élément de $[1/2\,;1]$.

(b) Montrer la convergence de la suite (x_n) et déterminer sa limite.

Solution

(a) **méthode**

‖ On étudie les variations de $f_n\colon x \mapsto x^n + x^{n-1} + \cdots + x$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par somme, la fonction f_n est continue, strictement croissante et vérifie :

$$f_n(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

La fonction f_n réalise donc une bijection de $[0\,;+\infty[$ vers $[0\,;+\infty[$ (Th. 2 p. 40). Par conséquent, l'équation (E_n) possède une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$. De plus, x_n est élément de $[1/2\,;1]$ car

$$f_n(1/2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} < 1 \quad \text{et} \quad f_n(1) = n \geqslant 1.$$

x	0	$\frac{1}{2}$	x_n	1	$+\infty$
$f_n'(x)$			$+$		
$f_n(x)$	0	< 1	1	n	$+\infty$

(b) **méthode**

‖ On positionne x_{n+1} dans le tableau de variation en comparant $f_n(x_{n+1})$ et 1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n + \cdots + x_{n+1}^2 + x_{n+1} = 1 - x_{n+1}^{n+1} < 1.$$

1. La borne inférieure a_n appartient à $[\ell - \varepsilon\,;\ell + \varepsilon]$ non pas car c'est un élément de la suite (ce qui peut être faux) mais parce qu'une borne supérieure est le plus grand des minorants de la partie.

On en déduit $x_{n+1} \leqslant x_n$ car f_n est strictement croissante.

x	0		x_{n+1}		x_n		$+\infty$
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$f_n(x_{n+1})$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

La suite (x_n) est décroissante et minorée donc elle converge. Notons ℓ sa limite.

méthode

Pour déterminer ℓ, on étudie le passage à la limite l'équation (E_n).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour la résolution des calculs, on commence par multiplier l'équation (E_n) par $1 - x_n$

$$1 - x_n = (1 - x_n)(x_n^n + \cdots + x_n) = x_n(1 - x_n^n). \qquad (*)$$

Puisque $x_2 < 1$, la comparaison $x_n \leqslant x_2$ donne $0 \leqslant x_n^n \leqslant x_2^n$ et donc (x_n^n) tend vers 0. On obtient alors $1 - \ell = \ell$ par passage à la limite de la relation $(*)$. On conclut $\ell = 1/2$.

6.9.3 Études de limites par comparaison

Exercice 20 *

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose

$$\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell.$$

(a) Montrer que (u_n) tend vers 0 lorsque $\ell < 1$.

(b) Montrer que (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque $\ell > 1$.

(c) Observer que, dans le cas $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.

Solution

(a) On ne peut pas élever la limite à la puissance n car il ne s'agit pas d'une puissance constante. En revanche une inégalité peut être élevée à la puissance n.

méthode

On transforme l'hypothèse portée par la limite en une inégalité vérifiée par les termes de la suite.

Soit q un réel strictement compris entre ℓ et 1. Puisque la suite de terme général $\sqrt[n]{u_n}$ converge vers ℓ avec $\ell < q$, on peut affirmer qu'à partir d'un rang N, tous les termes de la suite sont strictement inférieurs à q. On écrit alors pour $n \geqslant N$

$$0 \leqslant \sqrt[n]{u_n} < q$$

puis par croissance de l'élévation à la puissance n

$$0 \leqslant u_n \leqslant q^n.$$

On conclut que la suite (u_n) tend vers 0 par le théorème de convergence par encadrement (Th. 8 p. 191) car la suite géométrique (q^n) converge vers 0 sa raison q vérifiant $|q| < 1$.

(b) On suit la même démarche par minoration. On introduit q strictement compris entre 1 et ℓ et l'on peut affirmer qu'il existe un rang N au delà duquel

$$\sqrt[n]{u_n} \geqslant q \quad \text{donc} \quad u_n \geqslant q^n.$$

La suite géométrique (q^n) étant de limite $+\infty$, le théorème de divergence par minoration (Th. 9 p. 191) permet de conclure.

(c) **méthode**

‖ On propose des exemples aux conclusions différentes.

Les suites (n), (1), $(2 + \cos n)$ et $(1/n)$ vérifient $\ell = 1$ mais on des comportements asymptotiques distincts.

Exercice 21 **

Soit (u_n) une suite réelle vérifiant

$$n(u_n - u_{n-1}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \quad \text{avec} \quad \ell \neq 0.$$

Montrer que (u_n) diverge vers un infini.

Solution

Quitte à considérer la suite opposée, on peut supposer[1] $\ell > 0$.

méthode

‖ On transforme l'hypothèse en inégalités que l'on va sommer.

Puisque $n(u_n - u_{n-1})$ tend vers ℓ avec $\ell > \ell/2$, il existe un rang N au delà duquel

$$n(u_n - u_{n-1}) \geqslant \frac{\ell}{2}.$$

En sommant[2], il vient

$$u_n - u_N = \sum_{k=N+1}^{n} (u_k - u_{k-1}) \geqslant \frac{\ell}{2} \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Quitte à diviser par ℓ, on pourrait même supposer $\ell = 1$.

2. L'inégalité ne peut être sommée que pour les indices supérieurs ou égaux à N (c'est seulement pour alléger les calculs que l'on somme au delà du rang $N + 1$).

et donc

$$u_n \geqslant \frac{\ell}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + C^{te} \quad \text{avec} \quad C^{te} = u_N - \frac{\ell}{2} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}.$$

Sachant[1] que le terme défini par la somme tend vers $+\infty$, on conclut que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ par minoration.

6.9.4 Suites adjacentes

Exercice 22 * (Critère spécial des séries alternées[2])

Soit (u_n) une suite réelle décroissante et de limite nulle. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} u_k.$$

Montrer la convergence de la suite (S_n) en étudiant les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}).

Solution

méthode

On montre l'adjacence[3] des suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}).

Soit $n \in \mathbb{N}$. En simplifiant les termes communs aux deux sommes puis en exploitant la décroissance de (u_n), il vient

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^{k+1} u_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{k+1} u_k \\ &= (-1)^{2n+2} u_{2n+1} + (-1)^{2n+3} u_{2n+2} = u_{2n+1} - u_{2n+2} \geqslant 0. \end{aligned}$$

La suite (S_{2n}) est croissante. De même, la suite (S_{2n+1}) est décroissante car

$$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+3} u_{2n+2} + (-1)^{2n+4} u_{2n+3} = u_{2n+3} - u_{2n+2} \leqslant 0.$$

Enfin,

$$S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+2} u_{2n+1} = u_{2n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont donc adjacentes, elles convergent alors vers une même limite (Th. 11 p. 192). Les suites extraites des termes d'indices pairs et impairs convergeant vers une même limite, la suite (S_n) converge vers celle-ci (Th. 13 p. 192).

1. Voir sujet 16 p. 208.
2. Ce résultat figurera au cours de seconde année.
3. Pour étudier la monotonie de (S_{2n}), on étudie le signe de $S_{2n+2} - S_{2n}$.

Exercice 23 **
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}, \quad a_n = nu_n^2 \quad \text{et} \quad b_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)u_n^2.$$

Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite strictement positive.

Solution

méthode
On montre que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Pour tout naturel n non nul, $a_n > 0$ et

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{u_{n+1}^2}{u_n^2} = \frac{n+1}{n}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 = \frac{(2n+1)^2}{2n(2n+2)} = \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+4n} \geqslant 1.$$

La suite (a_n) est donc croissante. Par un calcul analogue, on vérifie que la suite (b_n) est décroissante. On vérifie aussi $a_n \leqslant b_n$ et l'on peut affirmer que les deux suites (a_n) et (b_n) convergent car monotones et bornées. En effet,

$$a_0 \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En introduisant la limite ℓ de la suite (a_n), on peut écrire

$$u_n^2 = \frac{a_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

et affirmer

$$b_n - a_n = \frac{1}{2}u_n^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Finalement, les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et leur limite commune[1] est strictement positive car $a_1 = 1/4 > 0$.

Exercice 24 ** (Irrationalité du nombre de Néper)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n.n!} = a_n + \frac{1}{n.n!}.$$

(a) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont strictement[2] adjacentes.

(b) Montrer que leur limite commune[3] est un nombre irrationnel.

1. On peut exprimer u_n à l'aide de nombres factoriels et, par la formule de Stirling (Th. 9 p. 292), montrer $\ell = 1/\pi$.
2. Les suites sont *strictement adjacentes* quand adjacentes et strictement monotones.
3. Dans le sujet 9 p. 349, on voit que leur limite commune est le nombre de Néper e.

Solution

(a) Après simplifications des portions communes aux sommes, on a pour tout $n \geqslant 1$

$$a_{n+1} - a_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \qquad (*)$$

et

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} = \frac{n(n+2)-(n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} < 0.$$

Les suites (a_n) et (b_n) sont donc strictement monotones et de monotonies contraires. Enfin, il est immédiat que leur différence tend vers 0, ce sont donc des suites strictement adjacentes.

(b) Notons ℓ la limite commune des suites (a_n) et (b_n). Supposons par l'absurde que ℓ est un nombre rationnel. On peut alors écrire $\ell = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

méthode

> Par adjacence, les suites (a_n) et (b_n) encadrent leur limite commune (Th. 11 p. 192). Par stricte monotonie, aucun terme de la suite n'est égal à la limite.

Pour tout naturel $n \geqslant 1$, on a l'encadrement strict $a_n < \ell < b_n$. En multipliant celui-ci par $n.n!$, on obtient l'encadrement

$$n.n!a_n < n.n!\ell < n.n!b_n = n.n!a_n + 1$$

avec

$$n.n!a_n = n \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} = n \sum_{k=0}^{n} \big((k+1) \times (k+2) \times \cdots \times n\big) \in \mathbb{N}.$$

En particulier, pour $n = q$, on obtient l'encadrement strict d'un entier par deux entiers successifs

$$\underbrace{q.q!a_q}_{\in\mathbb{N}} < \underbrace{q!p}_{\in\mathbb{N}} < q.q!a_q + 1.$$

C'est absurde !

6.9.5 Études des suites récurrentes

Exercice 25 *

Étudier la suite (u_n) définie par

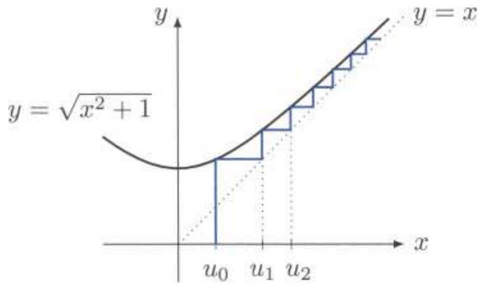
$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}.$$

Solution

La suite (u_n) est une suite récurrente de fonction itératrice $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$. La suite (u_n) est donc parfaitement définie.

méthode

En figurant la fonction itératrice accompagnée de la droite d'équation $y = x$, on peut représenter les premiers termes de la suite récurrente et anticiper son comportement asymptotique.



Pour tout naturel n

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2+1} \geqslant \sqrt{u_n^2} = |u_n| \geqslant u_n$$

La suite (u_n) est donc croissante et possède alors une limite, éventuellement égale à $+\infty$.

méthode

On étudie les limites d'une suite récurrente en calculant les valeurs compatibles avec un passage à la limite de la relation de récurrence.

Supposons que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ finie. Par passage à la limite de la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2+1}$, on obtient l'égalité $\ell = \sqrt{\ell^2+1}$. Celle-ci ne possédant pas de solution, la suite (u_n) ne peut pas tendre vers une limite finie.

Finalement, (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 26 *

Étudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \ln(u_n).$$

Solution

La suite (u_n) est une suite récurrente de fonction itératrice $f : x \mapsto 1 + \ln x$. Cette fonction n'est définie que sur $]0\,;+\infty[$ et prend pour valeurs tout réel : la définition de la suite (u_n) n'est pas immédiatement acquise.

méthode

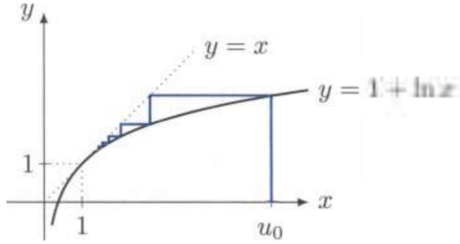
On justifie la bonne définition d'une suite récurrente (u_n) en déterminant un domaine X contenant u_0 et *stable* par la fonction itératrice f :

$$\forall x \in X, \quad f(x) \in X.$$

Le domaine $X = [1\,;+\infty[$ contient u_0 et est stable par f car

$$\forall x \in [1\,;+\infty[, \quad f(x) = 1 + \underbrace{\ln x}_{\geqslant 0} \geqslant 1.$$

La suite (u_n) est donc bien définie et tous ses termes sont supérieurs à 1.



Pour n naturel

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \ln(u_n) - u_n = \varphi(u_n) \quad \text{avec} \quad \varphi(x) = 1 + \ln x - x.$$

Étudions les variations de φ afin d'en déterminer le signe. La fonction φ est définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ (et même sur $]0\,;+\infty[$) et est dérivable avec $\varphi'(x) = 1/x - 1$ pour $x \geqslant 1$.

x	1		$+\infty$
$\varphi'(x)$	0	$-$	
$\varphi(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

La fonction φ est négative et $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. La suite (u_n) est décroissante. De plus elle est minorée par 1, elle converge donc vers un réel $\ell \geqslant 1$. Enfin, en passant la relation de récurrence à la limite, on obtient $\ell = 1 + \ln \ell$, autrement dit $\varphi(\ell) = 0$. Le tableau de variation qui précède assure que $\ell = 1$ est la seule solution[1].

Finalement, la suite (u_n) converge vers 1.

Exercice 27 **

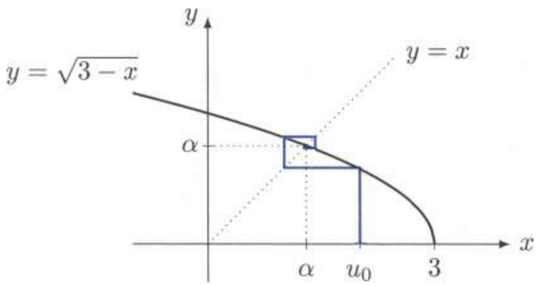
Étudier la suite (u_n) déterminée par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{3 - u_n}.$$

1. Dans ce tableau de variation, la monotonie est stricte.

Solution

La suite (u_n) est une suite récurrente de fonction itératrice $f : x \mapsto \sqrt{3-x}$ définie sur l'intervalle $]-\infty\,;3]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Le segment $[0\,;3]$ est stable par f et contient u_0. La suite (u_n) est donc bien définie et tous ses termes appartiennent à $[0\,;3]$.



méthode

> En figurant l'évolution de la suite (u_n), on observe qu'elle n'est pas monotone mais que ses termes paraissent se rapprocher d'une valeur α point fixe de la fonction itératrice.

Si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ, par passage à la limite dans une inégalité large, on a $\ell \in [0\,;3]$. Le passage à la limite de la relation de récurrence donne aussi $\ell = \sqrt{3-\ell}$. Après résolution, on obtient $\ell = \alpha$ avec [1]

$$\alpha = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \simeq 1{,}303 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

À ce stade, nous connaissons la seule limite possible à la suite (u_n) mais n'avons pas encore montré la convergence vers celle-ci. Observons qu'à chaque itération, le terme u_n se rapproche de α. Pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - \alpha = \sqrt{3-u_n} - \sqrt{3-\alpha}.$$

En introduisant la quantité conjuguée

$$u_{n+1} - \alpha = \frac{\left(\sqrt{3-u_n} - \sqrt{3-\alpha}\right)\left(\sqrt{3-u_n} + \sqrt{3-\alpha}\right)}{\sqrt{3-u_n} + \sqrt{3-\alpha}} = \frac{\alpha - u_n}{\sqrt{3-u_n} + \sqrt{3-\alpha}}$$

On en déduit la majoration

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{|u_n - \alpha|}{\sqrt{3-\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\,|u_n - \alpha|\,.$$

On exploite par récurrence cette *comparaison sous-géométrique* pour affirmer

$$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{\alpha^n}\,|u_0 - \alpha| \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\alpha^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ car } \alpha > 1.$$

Finalement, la suite (u_n) converge vers α.

1. Pour la suite la valeur exacte de α importe peu. En revanche, sa valeur *en intention*, c'est-à-dire la propriété $\alpha = \sqrt{3-\alpha}$, est essentielle.

Exercice 28 ** (Algorithme de Babylone)

Soit $a > 0$ et (u_n) la suite définie par

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

(a) Étudier la convergence de la suite (u_n).

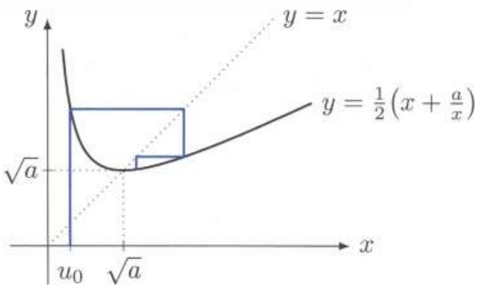
(b) Déterminer, si elle existe,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2}$$

Solution

(a) La suite (u_n) est une suite récurrente de fonction itératrice $f\colon x \mapsto \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$ définie sur $\mathbb{R}^*$. L'étude de ses variations sur $]0\,;+\infty[$ (où figure u_0) donne le tableau suivant :

x	0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{a}$	$\nearrow$	$+\infty$



L'intervalle $]0\,;+\infty[$ est stable par f et la suite (u_n) est donc bien définie. On peut même affirmer que ses termes appartiennent à l'intervalle $[\sqrt{a}\,;+\infty[$ à partir du rang 1.

méthode

Au choix, on peut établir la convergence de (u_n) par monotonie ou constater qu'à chaque itération u_n se rapproche de $\sqrt{a}$ par une comparaison sous-géométrique.

Étudions la monotonie de la suite (u_n). Pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{u_n} - u_n\right) = \frac{a - u_n^2}{2u_n}.$$

Pour $n \geqslant 1$, on a souligné ci-dessus $u_n \geqslant \sqrt{a}$ et donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est alors décroissante. Elle est de plus minorée par $\sqrt{a}$ et converge donc vers une certaine valeur ℓ supérieure[1] à $\sqrt{a}$. En passant à la limite la relation de récurrence, on obtient

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right).$$

Après résolution et sachant $\ell > 0$, on conclut $\ell = \sqrt{a}$.

(b) On fait apparaître une identité remarquable. Pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2u_n}\left(u_n^2 - 2\sqrt{a}u_n + a\right) = \frac{1}{2u_n}\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2$$

et l'on a donc[2]

$$\frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2} = \frac{1}{2u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Exercice 29 ** (Moyenne arithmético-géométrique)

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 = a,\ v_0 = b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies et convergent vers une même limite. Celle-ci est appelée *moyenne arithmético-géométrique* des réels a et b.

Solution

Les termes initiaux u_0 et v_0 sont positifs. On peut donc calculer u_1 et v_1 qui seront aussi positifs, puis u_2 et v_2, etc.

méthode

On pourrait montrer par récurrence que les suites sont bien définies à termes positifs, mais plus élégamment, on détermine un domaine stable par la fonction itératrice associée aux relations de récurrence.

La fonction itératrice du couple de suites est

$$f\colon (x,y) \mapsto \left(\sqrt{xy}, \frac{x+y}{2}\right).$$

Celle-ci est définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et laisse stable ce domaine. Les suites (u_n) et (v_n) sont donc bien définies et leurs termes sont tous positifs.

méthode

On compare u_n et v_n par l'inégalité[3] $ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

1. Lorsqu'une suite converge en décroissant, sa limite est sa borne inférieure, c'est-à-dire son plus grand minorant.

2. Cette propriété entraîne que la convergence de (u_n) vers $\sqrt{a}$ est très rapide car « plus on est proche, plus on se rapproche ». On parle ici de *convergence quadratique*.

Pour $n \geqslant 1$,

$$u_n = \sqrt{u_{n-1}}\sqrt{v_{n-1}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{u_{n-1}}\right)^2 + \left(\sqrt{v_{n-1}}\right)^2\right) = \frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2} = v_n.$$

On a alors

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geqslant \sqrt{u_n^2} = u_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leqslant \frac{2v_n}{2} = v_n.$$

À partir du rang 1, les suites (u_n) et (v_n) sont respectivement croissante et décroissante. De plus, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée par v_1 tandis que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ minorée par u_1. Ces deux suites convergent donc vers des limites que l'on note ℓ et ℓ'.

En passant la relation de récurrence $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ à la limite, on obtient $\ell' = \frac{\ell+\ell'}{2}$ d'où l'on tire $\ell = \ell'$.

6.10 Exercices d'approfondissement

Exercice 30 **

Établir

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}.$$

Solution

méthode

On comprend les « valeurs » présentées comme des limites de suites récurrentes.

Posons (u_n) la suite récurrente déterminée par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$. La suite (u_n) est bien définie avec des termes tous positifs. Si celle-ci converge, c'est vers une limite $\ell \geqslant 0$ vérifiant $\ell = \sqrt{1+\ell}$. Après résolution

$$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}618 \text{ à } 10^{-3} \text{ près} \quad \text{(c'est le nombre d'or).}$$

Montrons que cette convergence a lieu. Soit $n \in \mathbb{N}$. En multipliant par la quantité conjuguée

$$|u_{n+1} - \ell| = \left|\sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+\ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{\underbrace{\sqrt{1+u_n}}_{\geqslant 1} + \underbrace{\sqrt{1+\ell}}_{\geqslant 1}} \leqslant \frac{|u_n - \ell|}{2}.$$

Par récurrence, on obtient

$$|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

3. Voir sujet 2 p. 15.

La suite (u_n) converge donc vers ℓ et l'on peut écrire, un peu abusivement,

$$\ell = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}.$$

Considérons maintenant la suite (v_n) déterminée par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = 1 + 1/v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (v_n) est bien définie avec des termes tous supérieurs à 1. Si celle-ci converge, c'est vers $\ell' \geqslant 1$ vérifiant $\ell' = 1 + 1/\ell'$. Après résolution, on retrouve $\ell' = \ell$.

Montrons la convergence de (v_n) vers ℓ. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a par réduction au même dénominateur

$$|v_{n+1} - \ell| = \left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell}\right| \leqslant \frac{|v_n - \ell|}{\underbrace{|v_n|}_{\geqslant 1}\ell} \leqslant \frac{|v_n - \ell|}{\ell}.$$

Par récurrence, on obtient

$$|v_n - \ell| \leqslant \frac{1}{\ell^n}|v_0 - \ell| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{car} \quad \ell > 1.$$

La suite (v_n) converge donc vers ℓ et l'on peut alors aussi « écrire »

$$\ell = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}.$$

Exercice 31 **

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \left]0\,;\pi\right[$.

(a) Justifier l'existence de

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\cos(nt) - \cos(n\theta)}{\cos t - \cos\theta}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Exprimer $I_{n+1} + I_{n-1}$ en fonction de I_n pour $n \geqslant 1$.

(c) En déduire la valeur de I_n.

Solution

(a) La fonction déterminant l'intégrale est continue en tout point de $[0\,;\pi] \setminus \{\theta\}$ mais n'est pas définie en θ. Nous allons l'y prolonger par continuité ce qui permet alors de donner un sens à l'intégrale définissant I_n.

méthode

> On exploite la formule de factorisation
>
> $$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

Pour $t \in [0\,;\pi] \setminus \{\theta\}$, on écrit

$$\frac{\cos(nt)-\cos(n\theta)}{\cos t-\cos\theta}=\frac{\sin\left(\frac{n(t-\theta)}{2}\right)\sin\left(\frac{n(t+\theta)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t-\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{t+\theta}{2}\right)}.$$

Sachant

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 0}{x}=(\sin)'(0)=\cos 0=1$$

on peut écrire

$$\frac{\sin\left(\frac{n(t-\theta)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t-\theta}{2}\right)}=n\times\frac{\sin\left(\frac{n(t-\theta)}{2}\right)}{\frac{n(t-\theta)}{2}}\times\frac{\frac{t-\theta}{2}}{\sin\left(\frac{t-\theta}{2}\right)}\xrightarrow[t\to\theta]{}n\times 1\times 1=n.$$

Il est donc possible de prolonger la fonction intégrée par continuité en θ et ainsi comprendre l'intégrale définissant I_n comme l'intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0\,;\pi]$.

(b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. En développant les expressions trigonométriques

$$\begin{aligned}I_{n+1}+I_{n-1}&=\int_0^\pi\frac{\cos(n+1)t+\cos(n-1)t-\big(\cos(n+1)\theta+\cos(n-1)\theta\big)}{\cos t-\cos\theta}\,\mathrm{d}t\\&=2\int_0^\pi\frac{\cos(nt)\cos t-\cos(n\theta)\cos\theta}{\cos t-\cos\theta}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On introduit par addition et soustraction le terme intermédiaire[1] $\cos(nt)\cos\theta$

$$\begin{aligned}I_{n+1}+I_{n-1}&=2\int_0^\pi\frac{\cos(nt)\cos t-\cos(nt)\cos\theta}{\cos t-\cos\theta}\,\mathrm{d}t+2\cos\theta\int_0^\pi\frac{\cos(nt)-\cos(n\theta)}{\cos t-\cos\theta}\,\mathrm{d}t\\&=2\int_0^\pi\cos(nt)\,\mathrm{d}t+2\cos(\theta)I_n=2\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi+2\cos(\theta)I_n=2\cos(\theta)I_n.\end{aligned}$$

La suite (I_n) est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique

$$r^2-2\cos(\theta)r+1=0$$

de racines[2] distinctes $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$. Il existe donc deux réels λ et μ tels que

$$I_n=\lambda\cos(n\theta)+\mu\sin(n\theta)\quad\text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

On calcule immédiatement $I_0=0$ et $I_1=\pi$ pour conclure

$$I_n=\pi\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}\quad\text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

Exercice 32 **

Soit (u_n) une suite dont les termes sont deux à deux distincts et appartiennent à $\mathbb{N}$. Étudier son éventuelle limite.

1. Ce terme construit un « pont » entre $\cos(nt)\cos t$ et $\cos(n\theta)\cos\theta$.
2. Voir sujet 9 p. 97.

Solution

Soit A un réel positif arbitrairement grand.

méthode

On montre qu'il n'existe qu'un nombre fini d'indices n tels que $u_n \leqslant A$.

L'application $n \mapsto u_n$ induit une injection de $E_A = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n \leqslant A\}$ vers l'ensemble fini $[\![0\,;\lfloor A\rfloor]\!]$. L'ensemble E_A est alors fini et possède au plus $\lfloor A\rfloor + 1$ éléments. S'il n'est pas vide, cet ensemble possède un plus grand élément. On peut donc introduire N tel que $E_A \subset [\![0\,;N]\!]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} n > N &\implies n \notin E_A \\ &\implies u_n > A. \end{aligned}$$

Finalement, la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 33 * (Critère de Cauchy)**

On dit qu'une suite réelle (u_n) satisfait le critère de Cauchy lorsqu'elle vérifie [1]

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\quad \big(p \geqslant N \text{ et } q \geqslant N\big) \implies |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon.$$

(a) Montrer qu'une suite convergente satisfait le critère de Cauchy.

(b) Inversement, montrer à l'aide du théorème de Bolzano-Weierstrass qu'une suite vérifiant le critère de Cauchy est convergente.

Solution

(a) Supposons qu'une suite réelle (u_n) converge vers un réel ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang N tel que $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon/2$ pour tout naturel n supérieur à N. Pour p et q naturels au moins égaux à N, il vient par l'inégalité triangulaire

$$|u_p - u_q| \leqslant |u_p - \ell| + |\ell - u_q| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

La suite (u_n) satisfait donc le critère de Cauchy.

(b) Supposons qu'une suite réelle (u_n) satisfait le critère de Cauchy.

méthode

On montre que la suite (u_n) est bornée afin d'en extraire une suite convergente. On établit ensuite que l'intégralité de la suite converge.

Pour $\varepsilon = 1 > 0$, il existe un rang N tel que $|u_p - u_q| \leqslant 1$ pour tous naturels p et q supérieurs à N. En particulier, pour tout $n \geqslant N$

$$|u_n| \leqslant |u_n - u_N| + |u_N| \leqslant \underbrace{1 + |u_N|}_{=M}.$$

1. Cette propriété signifie que les termes de la suite sont asymptotiquement proches les uns des autres.

Quitte à grandir la valeur de M pour prendre en compte les premières valeurs de la suite (qui sont en nombre fini), on peut affirmer que la suite (u_n) est bornée.

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de (u_n) une suite $(u_{\varphi(k)})$ convergeant vers une certaine limite ℓ. Montrons que la suite (u_n) converge alors dans son intégralité vers ℓ.

Soit $\varepsilon > 0$. Par le critère de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_p - u_q| \leqslant \varepsilon/2$ pour tous p et q supérieurs à N. Par la convergence de la suite extraite, on peut trouver un indice $\varphi(k)$ vérifiant à la fois $\varphi(k) \geqslant N$ et $|u_{\varphi(k)} - \ell| \leqslant \varepsilon/2$. Pour tout naturel $n \geqslant N$, il vient alors

$$|u_n - \ell| \leqslant |u_n - u_{\varphi(k)}| + |u_{\varphi(k)} - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Finalement, la suite (u_n) converge.

Exercice 34 ***

Soit (u_n) une suite réelle vérifiant

$$u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Montrer qu'il existe une application $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante vérifiant

$$u_{\varphi(n)} - n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Solution

méthode

> On construit les valeurs de φ par récurrence en posant $\varphi(0) = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
>
> $$\varphi(n) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > \varphi(n-1) \text{ et } u_k \geqslant n\}.$$

Sachant que (u_n) tend vers $+\infty$, la valeur $\varphi(n)$ est bien définie en tant que plus petit élément d'une partie non vide de $\mathbb{N}$. De plus, il est immédiat que l'application φ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$. Il reste à vérifier

$$u_{\varphi(n)} - n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par construction, on a $u_{\varphi(n)} \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et, puisque $\varphi(n) - 1$ n'est pas élément de l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid k > \varphi(n-1) \text{ et } u_k \geqslant n\}$, on a

$$\varphi(n) = \varphi(n-1) + 1 \quad \text{ou} \quad u_{\varphi(n)-1} < n. \tag{$*$}$$

Ceci signifie[1] que, si les indices $\varphi(n-1)$ et $\varphi(n)$ ne sont pas successifs, les termes d'indices $\varphi(n)$ et $\varphi(n) - 1$ se situent de part et d'autre de n et seront donc « proches » de n.

1. Lorsque les première valeurs de la suite sont grandes, les $\varphi(n)$ sont simplement des valeurs successives et le terme $u_{\varphi(n)}$ peut ne pas être proche de n. Cependant, la différence $u_{n+1} - u_n$ étant de limite nulle, on observe qu'à partir d'un certain rang, les $\varphi(n)$ ne sont plus successifs et la valeur $u_{\varphi(n)}$ est alors choisie à proximité de n.

Soit $\varepsilon > 0$ choisi inférieur à $1/2$. Il existe un rang N tel que $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. Introduisons $\alpha = u_{\varphi(N)} - N$. Les termes de la suite progressant par pas inférieur à ε au delà du rang N, une récurrence facile permet de vérifier

$$u_{\varphi(N)+p} \leqslant N + \alpha + \varepsilon p \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N}.$$

Pour un indice p suffisamment grand, on obtient

$$u_{\varphi(N)+p} < N + p.$$

Or on a aussi par construction

$$u_{\varphi(N+p)} \geqslant N + p$$

et donc

$$\varphi(N + p) \neq \varphi(N) + p.$$

Il existe alors au moins un entier n compris entre $N + 1$ et $N + p$ pour lequel $\varphi(n - 1)$ et $\varphi(n)$ ne sont pas successifs. Pour cet entier la propriété $(*)$ impose $u_{\varphi(n)-1} < n$. L'écart entre $u_{\varphi(n)-1}$ et $u_{\varphi(n)}$ étant inférieur à ε, on en déduit $u_{\varphi(n)} \in [n\,;n + \varepsilon]$.

Vérifions ensuite que cette propriété demeure pour les indices supérieurs.

Supposons par l'absurde qu'il existe $m > n$ tel que $u_{\varphi(m)} \notin [m\,;m + \varepsilon]$ et considérons le plus petit de ceux-ci. On a donc

$$u_{\varphi(m-1)} \in [m - 1\,;m - 1 + \varepsilon] \quad \text{et} \quad u_{\varphi(m)} > m + \varepsilon.$$

Les termes de la suite ne progressant que par pas inférieur à ε avec ε plus petit que $1/2$, les indices $\varphi(m - 1)$ et $\varphi(m)$ ne peuvent être successifs et la propriété $(*)$ impose alors $u_{\varphi(m)-1} < m$. C'est absurde car l'écart entre $u_{\varphi(m)-1}$ et $u_{\varphi(m)}$ doit être inférieur à ε.

Finalement, on a établi l'existence d'un rang au delà duquel $\left|u_{\varphi(n)} - n\right| \leqslant \varepsilon$.

CHAPITRE 7

Limites et continuité

I et J désignent des intervalles réels non vides et non réduits à des points.

7.1 Limites

Soit a un point de I ou une extrémité finie ou infinie de I.

7.1.1 Limites finies et infinies

Soit f une fonction définie de I vers $\mathbb{R}$.

Définition

On dit que la fonction f *tend vers un réel* ℓ *en* a lorsque l'on a la propriété[1] :
Cas : $a \in \mathbb{R}$. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in I$, $\quad |x - a| \leqslant \alpha \implies \left|f(x) - \ell\right| \leqslant \varepsilon$.
Cas : $a = +\infty$. $\quad \forall \varepsilon > 0$, $\exists A \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$, $\quad x \geqslant A \implies \left|f(x) - \ell\right| \leqslant \varepsilon$.
Cas : $a = -\infty$. $\quad \forall \varepsilon > 0$, $\exists A \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$, $\quad x \leqslant A \implies \left|f(x) - \ell\right| \leqslant \varepsilon$.

Ainsi, lorsque la fonction f tend vers ℓ en a, on peut affirmer qu'au voisinage[2] de a on a l'encadrement $\ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon$ pour toute valeur de ε strictement positive *préalablement* fixée.

1. On peut proposer les définitions équivalentes avec les inégalités strictes « $|x - a| < \alpha$ » au lieu de « $|x - a| \leqslant \alpha$ », « $x > A$ » au lieu de « $x \geqslant A$ » et/ou « $\left|f(x) - \ell\right| < \varepsilon$ » au lieu de « $\left|f(x) - \ell\right| \leqslant \varepsilon$ ».

2. On dit que la fonction f présente une propriété au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ si une restriction de f sur un domaine $I \cap [a - \alpha\,; a + \alpha]$ avec $\alpha > 0$ présente cette propriété. Si $a = +\infty$ ou $-\infty$, on considère une restriction sur $I \cap [A\,; +\infty[$ ou $I \cap]-\infty\,; A]$ avec $A \in \mathbb{R}$.

Théorème 1 (Unicité de la limite en a)
Si f tend vers les réels ℓ et ℓ' en a alors $\ell = \ell'$.

Définition

On dit que la fonction f *tend vers* $+\infty$ *en* a lorsque l'on a la propriété[1] :
Cas : $a \in \mathbb{R}$. $\forall M \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, \quad |x-a| \leqslant \alpha \Longrightarrow f(x) \geqslant M.$
Cas : $a = +\infty$. $\quad \forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad x \geqslant A \Longrightarrow f(x) \geqslant M.$
Cas : $a = -\infty$. $\quad \forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad x \leqslant A \Longrightarrow f(x) \geqslant M.$

De façon analogue, on exprime que f tend vers $-\infty$ en a en remplaçant « $f(x) \geqslant M$ » par « $f(x) \leqslant M$ ».

Si une fonction tend vers un réel ℓ en a, on dit qu'elle admet une *limite finie*. Elle ne peut alors tendre vers une *limite infinie* (c'est-à-dire vers $+\infty$ ou $-\infty$).
Plus précisément, lorsqu'il existe, il y a unicité de l'élément $\ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ vers lequel la fonction f peut tendre en a.

Définition

Si la fonction f tend vers un élément ℓ, éventuellement infini, en a on écrit

$$f \xrightarrow[a]{} \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell.$$

Cet élément ℓ étant unique, on l'appelle la *limite de* f *en* a et on le note

$$\lim_a f \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a} f(x).$$

En résumé, une fonction peut présenter trois comportements distincts en a :
— elle peut admettre une limite finie ;
— elle peut admettre une limite infinie ;
— elle peut ne pas posséder de limite.

Théorème 2
Si $f : I \to \mathbb{R}$ tend vers une limite finie en a, f est bornée au voisinage de a.

7.1.2 Caractérisation séquentielle des limites

Théorème 3
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On a équivalence entre
(i) la fonction f tend vers ℓ en a ;
(ii) pour toute suite (x_n) d'éléments de I :

$$x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a \Longrightarrow f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell.$$

1. On peut à nouveau exprimer des définitions équivalentes avec des inégalités strictes.

Ce résultat permet de justifier l'absence de limite en a à une fonction en déterminant deux suites de limite a dont les images par f ont des comportements incompatibles avec l'existence d'une limite.

7.1.3 Limites et inégalités

Théorème 4 (Passage à la limite des inégalités larges)
Si f et g sont deux fonctions définies de I vers $\mathbb{R}$ admettant des limites finies ℓ et ℓ' en a et si $f(x) \leqslant g(x)$, au moins au voisinage de a, alors $\ell \leqslant \ell'$.

On dit que les inégalités larges sont stables par passage à la limite. Ce résultat n'est pas vrai pour les inégalités strictes : les passages à la limite « élargissent » les inégalités.

7.1.4 Limites et opérations

Théorème 5
Si f et g sont deux fonctions définies de I vers $\mathbb{R}$ admettant des limites finies ℓ et ℓ' en a alors

$$(f+g)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell+\ell' \quad \text{et} \quad (fg)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell\ell'.$$

Ce résultat se généralise aux limites infinies sous réserve de ne pas rencontrer de formes indéterminées : « $(+\infty)+(-\infty)$ », « $(+\infty)\times 0$ », etc.

Théorème 6
Soit f une fonction de I vers $\mathbb{R}$ et g une fonction de J vers $\mathbb{R}$ que l'on peut composer [1]. Si f admet une limite b en a et si g admet [2] une limite ℓ en b alors

$$(g\circ f)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell.$$

En particulier, en composant avec la fonction inverse, on peut énoncer des résultats de passage à l'inverse des limites.

7.1.5 Limites par comparaison

On peut justifier et calculer une limite par les théorèmes d'opérations qui précèdent. On peut aussi raisonner par comparaison :

1. Autrement dit, f prend ses valeurs dans J : $f(I)\subset J$.
2. Lorsque f admet une limite b en a, celle-ci est nécessairement élément ou extrémité de J.

Théorème 7 (Limite finie par encadrement)
Soit f, g et h trois fonctions définies sur I à valeurs réelles. On suppose disposer de l'encadrement $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, au moins au voisinage de a.
Si les fonctions g et h tendent vers un même réel ℓ en a, la fonction f tend aussi vers ℓ en a.

En particulier, si $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon(x)$ avec ε fonction de limite nulle en a, la fonction f tend vers ℓ en a.

Théorème 8 (Limite infinie par minoration)
Soit f et g deux fonctions définies sur I à valeurs réelles. On suppose disposer de la minoration $g(x) \leqslant f(x)$, au moins au voisinage de a.
Si la fonction g tend vers $+\infty$ en a, la fonction f tend aussi vers $+\infty$ en a.

Par passage à l'opposé, on peut aussi énoncer un résultat de limite égale à $-\infty$ par majoration.

7.1.6 Limites latérales et limites épointées

Soit a un point ou une extrémité finie de I et f une fonction définie sur I à valeurs réelles.

Définition

Si $I^+ = I \cap]a\,;+\infty[$ est non vide[1], on appelle *limite à droite*[2] de f en a l'éventuelle limite en a de la restriction de f au départ de I^+. Lorsqu'elle existe, celle-ci est notée

$$\lim_{a^+} f, \quad \lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x).$$

Si $I^- = I \cap]-\infty\,;a[$ est non vide, on définit l'éventuelle *limite à gauche* de f en a en considérant la restriction de f au départ de I^-. Celle-ci est notée

$$\lim_{a^-} f, \quad \lim_{x \to a^-} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x).$$

On peut aussi exprimer de façon quantifiée limite à droite et à gauche. Par exemple, f tend vers ℓ en a par valeurs supérieures s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I, \quad a < x < a + \alpha \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Définition

Si f admet une limite à droite et une limite à gauche en a et si celles-ci sont égales, cette valeur commune est appelée *limite épointée* de f en a. On la note

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x).$$

1. On dit alors que la fonction f est *définie à droite* de a.
2. On parle aussi de limite en a par *valeurs supérieures*.

Lorsque la fonction f est seulement définie sur $I \setminus \{a\}$ ou lieu de I, le concept de limite épointée permet de donner un sens à l'éventuelle limite de f en a. Celle-ci est alors simplement notée

$$\lim_{x \to a} f(x).$$

Puisque les notions de limites latérales et épointées sont définies à partir de fonctions restreintes, les résultats relatifs aux limites qui précèdent se particularisent à ces concepts.

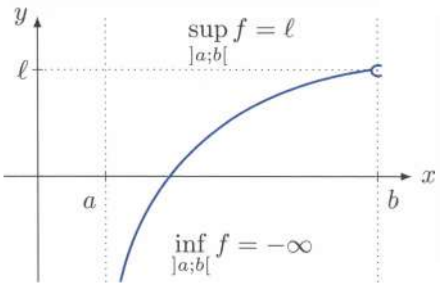
7.1.7 Limites monotones

On suppose l'intervalle I ouvert et l'on note $a < b$ ses extrémités, éventuellement infinies.

Théorème 9 (Théorème de la limite monotone)
Si $f :]a\,;b[\to \mathbb{R}$ est une fonction monotone alors f admet des limites (éventuellement infinies) en a et en b.

Plus précisément, lorsque f est une fonction croissante :

— sa limite en b est sa borne supérieure si f est majorée, $+\infty$ sinon ;
 sa limite en a est sa borne inférieure si f est minorée, $-\infty$ sinon.



Si f est décroissante, les comportements en a et b sont échangés.

La borne supérieure et la borne inférieure d'une fonction monotone peuvent donc être lues sur son tableau de variation.

Une conséquence est qu'une fonction monotone f admet des limites à droite et à gauche en tout point a intérieur à son intervalle de définition. Au surplus, ces limites encadrent la valeur de la fonction au point :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a^-} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim\limits_{x \to a^+} f(x) & \text{si } f \text{ est croissante} \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim\limits_{x \to a^-} f(x) & \text{si } f \text{ est décroissante} \end{cases}$$

7.2 Continuité

Soit f une fonction définie de I vers $\mathbb{R}$.

7.2.1 Continuité en un point

Théorème 10
Si la fonction f admet une limite en un point a où elle est définie, cette limite est nécessairement la valeur de f en a.

On adopte alors le vocabulaire suivant :

Définition

On dit que f est *continue* en $a \in I$ si f admet une limite en a.

Théorème 11 (Caractérisation séquentielle de la continuité)
La fonction f est continue en $a \in I$ si, et seulement si, pour toute suite (x_n) d'éléments de I :

$$x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a \implies f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(a).$$

Si f admet une limite en a par valeurs supérieures et si celle-ci est égale à $f(a)$, on dit que f est *continue à droite* en a. *Mutatis mutandis*, on définit la *continuité à gauche* en a.

Théorème 12
Si $a \in I$ n'est pas une extrémité de l'intervalle I, la fonction f est continue en a si, et seulement si, elle y est continue à droite et à gauche.

Ce résultat est utile pour étudier la continuité d'une fonction définie par une alternative.

7.2.2 Continuité sur un intervalle

Définition

On dit qu'une fonction f définie sur I est *continue*[1] lorsque celle-ci est continue en chaque point de I.

La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ en vertu de l'inégalité triangulaire renversée $\big||x| - |a|\big| \leqslant |x - a|$ pour tous x et a réels (voir sujet 1 p. 14).

On justifie généralement la continuité d'une fonction par opérations algébriques ou de composition sur les fonctions continues.

7.2.3 Image continue d'un intervalle

Théorème 13 (Théorème des valeurs intermédiaires)
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, f prend toutes les valeurs comprises entre deux valeurs prises.

En particulier, si f prend une valeur négative et une valeur positive, elle s'annule. Cette affirmation n'est valable que lorsque le domaine de définition est un intervalle[2].
Une formulation équivalente du théorème des valeurs intermédiaires est la suivante :

1. On dit quelquefois qu'une fonction est *continue sur* un intervalle J pour insister sur le domaine de définition de la fonction ou pour affirmer que c'est sa restriction au départ de J qui est continue.

2. La fonction inverse sur $\mathbb{R}^*$ prend des valeurs positives et négatives sans pour autant s'annuler !

Théorème 14
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires :

Théorème 15
Toute fonction réelle continue et injective sur un intervalle est strictement monotone.

7.2.4 Image continue d'un segment

Théorème 16 (Théorème des bornes atteintes)
Toute fonction réelle définie et continue sur un segment $[a\,;b]$ admet un minimum et un maximum. On dit qu'elle est bornée et qu'elle atteint ses bornes.

En conséquence, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

7.3 Extension aux fonctions complexes

7.3.1 Limites

Soit a un point de I ou une extrémité éventuelle infinie de I.

Définition

On dit qu'une fonction f définie de I vers $\mathbb{C}$ *tend* vers un complexe[1] ℓ en a si

$$\left|f(t)-\ell\right| \xrightarrow[t\to a]{} 0.$$

Cette valeur ℓ est alors unique, on l'appelle la *limite* de f en a. Les théorèmes d'opérations sur les limites se transposent aux fonctions complexes et l'on peut étudier la limite d'une fonction complexe par ses parties réelle et imaginaire :

Théorème 17
La fonction $f : I \to \mathbb{C}$ tend vers $\ell \in \mathbb{C}$ en a si, et seulement si, les fonctions réelles $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ tendent respectivement vers $\mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(\ell)$ en a.

7.3.2 Continuité

Le vocabulaire de continuité se transpose directement aux fonctions complexes et l'on peut étudier la continuité d'une fonction complexe par la continuité de ses parties réelle et imaginaire.

1. Pour une fonction à valeurs complexes, on ne définit pas de limite infinie, tout au plus on peut dire $\left|f(t)\right|$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers a.

Le théorème des valeurs intermédiaires n'a plus de sens dans le cadre complexe[1]. Le théorème des bornes atteintes peut cependant être adapté pour affirmer que toute fonction complexe continue sur un segment y est bornée.

7.4 Exercices d'apprentissage

7.4.1 Limites

Exercice 1
Soit $f\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante de limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Montrer que la valeur $f(x)$ est strictement inférieure à ℓ pour tout $x \in [0\,;+\infty[$.

Solution
Par le théorème de la limite monotone (Th. 9 p. 233), on sait déjà que ℓ est la borne supérieure de f et donc que ℓ majore f. L'enjeu est alors seulement de montrer que ℓ n'est pas une valeur prise par f.

méthode
Par l'absurde, on contredit la stricte monotonie de f.

Si par l'absurde, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = \ell$ alors, par croissance de f, on a $f(x) \geqslant f(a) = \ell$ pour tout $x \in [a\,;+\infty[$. On a alors $f(x) = \ell$ car on a vu ci-dessus que ℓ majore f. Finalement, f est constante sur $[a\,;+\infty[$ ce qui contredit sa stricte monotonie.

Exercice 2
Étudier[2] les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 - \mathrm{e}^x$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}$ (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\cos(\mathrm{e}^x)}{x^2+1}$ (e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\lfloor x \rfloor$ (f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 + x\sin x\right)$.

Solution

(a) Il s'agit de résoudre une forme indéterminée additive « $(+\infty) - (+\infty)$ ».

méthode
On factorise le terme prépondérant.

$$3x^2 - \mathrm{e}^x = \underbrace{\mathrm{e}^x}_{\to+\infty}\underbrace{\left(3x^2\mathrm{e}^{-x} - 1\right)}_{\to-1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty \quad \text{car on sait } \lim_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x} = 0.$$

1. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{it}$ est continue sur $[0\,;\pi]$ prend une valeur positive en 0 et une valeur négative en π sans pour autant s'annuler.

2. *Étudier* une limite consiste à savoir si celle-ci existe et déterminer sa valeur si tel est le cas.

(b) Il s'agit de résoudre une forme indéterminée quotient« $(+\infty)/(+\infty)$ ».

méthode

‖ On factorise le terme prépondérant au numérateur et au dénominateur.

$$\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} = \frac{|x|}{x}\,\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.$$

La même expression étudiée en $-\infty$ donne la limite -1.

(c) Il s'agit de résoudre une forme indéterminée multiplicative « $(+\infty)\times 0$ ».

méthode

‖ On écrit[1] le facteur x sous la forme exponentielle $\mathrm{e}^{\ln x}$.

$$x\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} = \mathrm{e}^{\ln x - \sqrt{x}} \quad \text{pour } x > 0.$$

L'expression contenue dans l'exponentielle présente une forme indéterminée additive que l'on résout en factorisant le terme prépondérant

$$x\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} = \mathrm{e}^{\sqrt{x}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}-1\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0.$$

(d) La fonction cosinus ne possède pas de limite en $+\infty$ mais est cependant bornée.

méthode

‖ Le produit d'une fonction de limite nulle par une fonction bornée est de limite nulle.

$$\frac{x\cos(\mathrm{e}^x)}{x^2+1} = \underbrace{\frac{x}{x^2+1}}_{\to 0}\,\underbrace{\cos(\mathrm{e}^x)}_{\text{bornée}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

(e) Il s'agit de résoudre une forme indéterminée multiplicative « $0\times(+\infty)$ ».

méthode

‖ On raisonne par encadrement.

Pour tout $x > 0$, on a $x-1 < \lfloor x\rfloor \leqslant x$ donc

$$1 - \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{x}\lfloor x\rfloor \leqslant 1.$$

Les termes encadrants tendent vers 1 en l'infini et donc, par le théorème de limite par encadrement (Th. 7 p. 232), on peut affirmer que $\lfloor x\rfloor/x$ tend aussi 1 vers quand x croît vers $+\infty$.

1. On peut aussi poser $X = \sqrt{x}$ afin de reconnaître une forme $X^2\mathrm{e}^{-X}$ avec X de limite $+\infty$.

(f) La fonction sinus ne possède pas de limite en $+\infty$, l'étude se prête mal à un raisonnement par opérations.

méthode

‖ On minore[1] la fonction étudiée par une fonction de limite $+\infty$.

Puisque $\sin x \geqslant -1$, on peut écrire pour $x \geqslant 0$

$$x^2 + x\sin x \geqslant x^2 - x = x(x-1) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Par le théorème de limite infinie par minoration (Th. 8 p. 232), on conclut que la limite étudiée vaut $+\infty$.

Exercice 3

Étudier les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}+\ln x\right)$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} |\ln x|^{\frac{1}{\ln x}}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ (e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\sin(\ln x)$ (f) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}\lfloor x\rfloor$.

Solution

(a) Il s'agit de résoudre une forme indéterminée additive « $(+\infty)+(-\infty)$ ».

méthode

‖ On factorise le terme prépondérant.

$$\frac{1}{x}+\ln x = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to+\infty}\underbrace{\left(1+x\ln x\right)}_{\to 1} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty \quad \text{car on sait } \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0.$$

(b) Il s'agit de résoudre une forme indéterminée puissance « 0^0 ».

méthode

‖ On exprime la puissance sous forme exponentielle.

$$x^{\sqrt{x}} = \mathrm{e}^{\sqrt{x}\ln x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1 \quad \text{car on sait } \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x = 0.$$

(c) Il s'agit de résoudre une forme indéterminée puissance « $(+\infty)^0$ ». Pour $x \in]0\,;1[$

$$|\ln x|^{\frac{1}{\ln x}} = \exp\left(\frac{1}{\ln x}\ln|\ln x|\right).$$

méthode

‖ Par composition de limites, on introduit une « nouvelle variable » $X = \ln x$.

1. On peut aussi factoriser le terme prépondérant x^2 et exploiter que le produit d'une fonction de limite nulle par une fonction bornée est de limite nulle.

$$\exp\left(\frac{1}{\ln x}\ln|\ln x|\right) = \exp\Big(\underbrace{\frac{\ln|X|}{X}}_{\to 0}\Big) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1 \quad \text{car } X \to -\infty.$$

(d) Il s'agit de résoudre une forme indéterminée quotient « 0/0 ».

méthode

‖ On reconnaît un taux d'accroissement.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = (\sin)'(0) = \cos(0) = 1.$$

(e) Le terme en sinus ne possède pas de limite mais est bornée.

$$\underbrace{x}_{\to 0}\ \underbrace{\sin(\ln x)}_{\text{bornée}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0.$$

(f) Il s'agit *a priori* d'une forme indéterminée multiplicative « $(+\infty)\times 0$ » mais, à mieux y regarder, la partie entière est constante égale à 0 sur $[0\,;1[$ et donc, pour $x\in\,]0\,;1[$,

$$\frac{1}{x}\lfloor x\rfloor = \frac{1}{x}\times 0 = 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Exercice 4

Étudier les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\ln(x)\ln(\ln x)$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin(2x)}{\pi-2x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}$.

Solution

(a) **méthode**

‖ On reconnaît une composition.

Pour $X=\ln x$, on a X de limite nulle quand x tend vers 1^+ et donc

$$\ln(x)\ln(\ln x) = X\ln X \xrightarrow[x\to 1^+]{} 0.$$

(b) **méthode**

‖ Lorsque l'on étudie une limite quand x tend vers $a\neq 0$, il est souvent pertinent de translater [1] l'étude en écrivant $x=a+h$ avec h de limite nulle.

On écrit $x=\pi/2+h$ avec $h=x-\pi/2$ de limite nulle quand $x\to\pi/2$ et l'on a

$$\frac{\sin(2x)}{\pi-2x} = \frac{\sin(\pi+2h)}{-2h} = \frac{\sin 2h}{2h} \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}]{} 1 \quad \text{car on a déjà vu } \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1.$$

1. Cela équivaut à raisonner par composition de limites.

L'opération de translation de la variable peut se comprendre comme une composition de limites, h s'interprète comme une fonction de x et c'est pourquoi la flèche ci-dessus est exprimée avec « $x \to \pi/2$ » et non « $h \to 0$ ».

(c) **méthode**

> On reconnaît l'inverse d'un taux d'accroissement.

$$\frac{x-1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x - \ln 1} \xrightarrow[x \to 1]{} \frac{1}{(\ln)'(1)} = 1.$$

7.4.2 Continuité

Exercice 5
Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

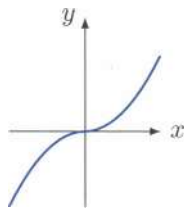
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Solution

méthode

> La continuité d'une fonction sur un intervalle est la continuité de celle-ci en chaque point de l'intervalle.

Étudions la continuité en $a \in \mathbb{R}$.



Cas : $a > 0$. Au voisinage[1] de a, on a $x > 0$ et donc $f(x) = x^2$. Lorsque x tend vers a, $f(x)$ tend vers a^2 qui est la valeur de f en a. La fonction f est donc continue en ce point.

Cas : $a < 0$. C'est analogue sachant $f(x) = -x^2$ au voisinage de a.

Cas : $a = 0$. La démarche ci-dessus ne peut être directement reprise car on ignore le signe de x au voisinage de a.

méthode

> Pour étudier la continuité en un point de jonction d'une alternative, on raisonne par continuité à droite et continuité à gauche (Th. 12 p. 234).

Lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures, $f(x) = x^2$ et donc $f(x)$ tend vers 0 qui est la valeur de f en 0. La fonction f est continue à droite en 0.

Lorsque x tend vers 0 par valeurs inférieures, $f(x) = -x^2$ et à nouveau $f(x)$ tend vers 0. La fonction f est aussi continue à gauche en 0.

Finalement, f est continue en 0 puis f continue[2] sur $\mathbb{R}$.

1. C'est-à-dire sur un intervalle $[a - \alpha\,;a + \alpha]$ pour un certain $\alpha > 0$, même très petit.
2. Un argument rapide est aussi possible : $f : x \mapsto x\,|x|$ est continue par produit de fonctions continues.

Exercice 6
Soit $f: I \to \mathbb{R}$ et $g: I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.
Montrer la continuité de la fonction $\sup(f, g)$ définie sur I par

$$\sup(f, g)(x) = \max\big(f(x), g(x)\big).$$

Solution

méthode
On exploite l'identité $\max(a, b) = \frac{1}{2}\big(a + b + |a - b|\big)$.

On vérifie aisément l'identité proposée ci-dessus en discutant selon que a est ou non supérieur à b.

On peut alors exprimer la fonction $\sup(f, g)$ comme ci-dessous :

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}\big(f + g + |f - g|\big).$$

La fonction $\sup(f, g)$ est alors continue[1] par opérations sur les fonctions continues, notamment par composition avec la fonction valeur absolue qui est continue.

Exercice 7
Soit $f, g\colon [a\,; b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues vérifiant

$$\big(g(a) - f(a)\big)\big(g(b) - f(b)\big) \leqslant 0 \qquad (*)$$

Montrer qu'il existe x dans $[a\,; b]$ tel que $f(x) = g(x)$.

Solution
L'hypothèse $(*)$ signifie que $g(a) - f(a)$ et $g(b) - f(b)$ sont de signes opposés.

méthode
On introduit la fonction auxiliaire définie par la différence des membres et l'on montre que celle-ci s'annule.

La fonction $\varphi = g - f$ est définie et continue sur l'intervalle $[a\,; b]$ et à valeurs réelles. Elle prend des valeurs de signes opposés en a et b et le théorème des valeurs intermédiaires (Th. 13 p. 234) assure alors que cette fonction s'annule en un certain x dans $[a\,; b]$. En cette valeur, on a $f(x) = g(x)$.

Exercice 8
Donner un exemple :

(a) de fonction continue sur $[0\,; +\infty[$ ni minorée, ni majorée.

(b) de fonction continue sur $]0\,; +\infty[$ sans limite en 0 ;

(c) de fonction définie sur $\mathbb{R}$ continue en aucun point.

1. Si f est continue, sa *partie positive* $f^+ = \sup(f, 0)$ et sa *partie négative* $f^- = \sup(-f, 0)$ sont des fonctions continues.

Solution

(a) **méthode**

Il faut savoir qu'une fonction continue peut osciller...

La fonction $f : x \mapsto x \cos x$ convient. C'est en effet une fonction continue et celle-ci n'est pas majorée car, pour $n \in \mathbb{N}$, $f(2n\pi) = 2n\pi$ est de limite $+\infty$. Elle n'est pas non plus minorée puisque $f\big((2n+1)\pi\big) = -(2n+1)\pi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) La fonction $f : x \mapsto \cos(1/x)$ convient. C'est en effet une fonction continue qui n'a pas de limite en 0.

méthode

On montre qu'une fonction n'a pas de limite en a en déterminant des suites de limite a dont l'image par f a un comportement incompatible avec l'existence d'une limite.

Introduisons les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et (v_n) de limite 0 par valeurs supérieures déterminées par

$$u_n = \frac{1}{2n\pi} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}.$$

D'une part, $\cos(1/u_n) = 1$ tend vers 1. D'autre part, $\cos(1/v_n) = -1$ tend vers -1. La fonction f ne possède donc pas de limite en 0 (Th. 3 p. 230).

(c) **méthode**

On considère la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$:

$$\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Celle-ci n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$. En effet, $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue en $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, car en écrivant a comme limite d'une suite (u_n) de nombres rationnels, on a

$$\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(u_n) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq 0 = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(a).$$

De même, on montre que $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue en $a \in \mathbb{Q}$ en introduisant une suite de nombres irrationnels de limite a.

7.5 Exercices d'entraînement

7.5.1 Limites

Exercice 9 *

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique admettant une limite en $+\infty$. Que dire de la fonction f ?

Solution

méthode

On montre que f est constante en projetant le calcul de $f(x)$ à l'infini par périodicité.

Notons ℓ la limite de f en $+\infty$ et $T > 0$ une période de f.

Soit x un réel fixé. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on sait par périodicité $f(x) = f(x + nT)$.

Quand n croît vers l'infini, la suite de terme général $x + nT$ tend vers $+\infty$ et par la caractérisation séquentielle des limites (Th. 3 p. 230) la suite de terme général $f(x+nT)$ tend vers ℓ. Or $f(x + nT)$ est aussi constant égal à $f(x)$ et donc la suite de terme général $f(x+nT)$ tend vers $f(x)$. Par unicité de la limite d'une suite, on obtient $f(x) = \ell$. Cette égalité étant établie pour n'importe quelle valeur de x, la fonction f est constante.

Exercice 10 **

Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left|f(x)\right| = \lim\limits_{x\to-\infty} \left|f(x)\right| = +\infty$;

(ii) $\forall [a\,;b] \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}\big([a\,;b]\big)$ est une partie bornée.

Solution

méthode

On revient à la définition quantifiée de la notion de limite.

Supposons $|f|$ de limite $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Soit $[a\,;b]$ un segment de $\mathbb{R}$. En posant $A = \max(-a, b)$, on a $[a\,;b] \subset [-A\,;A]$. En exploitant la définition de la limite exprimée avec des inégalités strictes, il existe M et M' réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > M \implies \left|f(x)\right| > A \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x < M' \implies \left|f(x)\right| > A.$$

Pour $M'' = \max(M, -M')$, on peut alors écrire

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| > M'' &\implies \left|f(x)\right| > A\\ &\implies f(x) \notin [a\,;b].\end{aligned}$$

Par conséquent, la partie $f^{-1}\big([a\,;b]\big)$ est incluse dans $[-M''\,;M'']$, elle est donc bornée.

Inversement, supposons que l'image réciproque de tout segment $[a\,;b]$ de $\mathbb{R}$ est une partie bornée. Soit $A \in \mathbb{R}_+$ arbitraire. L'image réciproque du segment $[-A\,;A]$ étant une partie bornée, il existe un réel $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$f^{-1}\big([-A\,;A]\big) \subset [-M\,;M].$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si x est strictement supérieur à M, $f(x)$ n'est pas élément du segment $[-A\,;A]$ et donc $\left|f(x)\right| > A$. On vient ainsi d'établir

$$\forall A \in \mathbb{R}_+, \exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, \quad x > M \implies \left|f(x)\right| > A.$$

On peut alors affirmer que $|f|$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. On obtient de même que $|f|$ tend vers $+\infty$ en $-\infty$.

7.5.2 Continuité

Exercice 11 *
Étudier la continuité de
$$f\colon x \mapsto \lfloor x \rfloor + \left(x - \lfloor x \rfloor\right)^2.$$

Solution
Étudions la continuité en $a \in \mathbb{R}$.

méthode
On distingue les cas selon que $a \in \mathbb{Z}$ ou non.

Cas : $a \notin \mathbb{Z}$. Sur un voisinage de a, la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est constante égale à $\lfloor a \rfloor$ et [1]

$$f(x) = \lfloor a \rfloor + \left(x - \lfloor a \rfloor\right)^2 \xrightarrow[x \to a]{} \lfloor a \rfloor + \left(a - \lfloor a \rfloor\right)^2 = f(a).$$

Ainsi, f est continue en a.

Cas : $a \in \mathbb{Z}$. On raisonne par continuité à droite et à gauche.

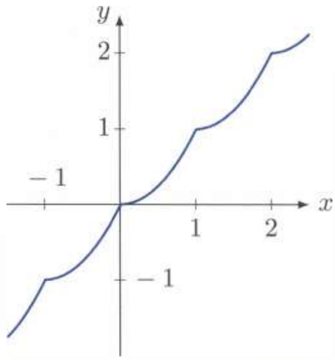
D'une part, quand x tend vers a par valeurs supérieures

$$f(x) = a + (x - a)^2 \to a = f(a).$$

D'autre part, quand x tend vers a par valeurs inférieures

$$f(x) = a - 1 + \left(x - (a-1)\right)^2 \to a - 1 + 1 = a = f(a).$$

La fonction f est donc continue à droite et à gauche donc continue en a (Th. 12 p. 234).



Exercice 12 **
Soit $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $x \mapsto f(x)$ est croissante et $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ décroissante. Montrer que f est continue.

Solution

méthode
On justifie par monotonie l'existence en tout point de limites à droite à gauche que l'on montre égales à la valeur de la fonction au point.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque f est croissante, f admet des limites à droite et à gauche en a encadrant la valeur de la fonction au point (Th. 9 p. 233)

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim_{x \to a^+} f(x). \qquad (*)$$

1. L'égalité qui suit est comprise pour x au voisinage de a.

De même, la décroissance de $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ permet d'écrire

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{f(a)}{a} \leqslant \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{x}. \tag{$**$}$$

Par produit de limites, on a

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{a} \lim_{x\to a^+} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{a} \lim_{x\to a^-} f(x).$$

L'encadrement $(**)$ se relit alors

$$\frac{1}{a} \lim_{x\to a^+} f(x) \leqslant \frac{f(a)}{a} \leqslant \frac{1}{a} \lim_{x\to a^-} f(x)$$

et en multipliant par le facteur a qui est strictement positif, on obtient

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim_{x\to a^-} f(x). \tag{$\triangle$}$$

Les encadrements $(*)$ et $(\triangle)$ permettent de conclure : la fonction f est continue à droite et à gauche en a, donc continue en a.

7.5.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 13 *

Soit f une fonction réelle, définie et continue sur un intervalle I.

On suppose que f n'est ni minorée, ni majorée. Montrer que f est surjective.

Solution

méthode

> L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle (Th. 14 p. 235).

L'ensemble $f(I)$ est un intervalle et celui-ci ni minoré ni majoré car f ne l'est pas. Le seul intervalle de ce type est la droite réelle $\mathbb{R}$. La fonction f est donc surjective.

Exercice 14 * (Théorème des valeurs intermédiaires généralisé [1])

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue possédant des limites ℓ et ℓ' (finies ou infinies) en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer que toute valeur strictement comprise entre ℓ et ℓ' est une valeur prise par f.

1. On peut proposer et établir de la même façon que si $f :]a\,;b[\to \mathbb{R}$ est une fonction (avec $a < b$ réels ou infinis) possédant des limites finies ou infinies en a et en b, celle-ci prend toutes les valeurs strictement comprises entre ces deux limites.

Solution

Si $\ell = \ell'$, il n'y a rien à montrer. Supposons alors $\ell \neq \ell'$ et, quitte à considérer $-f$ au lieu de f, on peut même supposer $\ell < \ell'$. Introduisons y une valeur de l'intervalle $]\ell\,;\ell'[$.

méthode

La fonction f n'est ni minorée, ni majorée, par y.

En effet, si par l'absurde nous avons $f(x) \geqslant y$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors, en passant à la limite quand x tend vers $-\infty$, il vient $\ell \geqslant y$ ce qui contredit le choix de y. Ainsi, f n'est pas minorée par y et il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) < y$. De même, on obtient l'existence de $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(b) > y$. Enfin [1], la fonction f est continue entre a et b et prend donc toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$ (Th. 13 p. 234), en particulier la valeur y.

Exercice 15 *

Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ continue.

(a) Montrer que si $f\big([a\,;b]\big) \subset [a\,;b]$ alors f admet un point fixe [2].

(b) Montrer que si $[a\,;b] \subset f\big([a\,;b]\big)$ alors f admet un point fixe.

Solution

méthode

On montre que la fonction auxiliaire $\varphi\colon x \mapsto f(x) - x$ s'annule car continue et change de signe.

La fonction réelle $\varphi\colon x \mapsto f(x) - x$ est définie et continue sur l'intervalle $[a\,;b]$ par différence de fonctions continues.

(a) Par l'hypothèse $f\big([a\,;b]\big) \subset [a\,;b]$, la valeur $f(a)$ appartient à l'intervalle $[a\,;b]$ puis $\varphi(a) = f(a) - a$ est positif. Aussi, $f(b)$ est élément de $[a\,;b]$ donc $\varphi(b) \leqslant 0$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires (Th. 13 p. 234), on peut affirmer que φ s'annule et qu'il existe donc x dans $[a\,;b]$ tel que $f(x) = x$.

(b) Par l'hypothèse $[a\,;b] \subset f\big([a\,;b]\big)$, on peut affirmer que a et b sont des valeurs prises par f. Il existe donc α et β dans $[a\,;b]$ tels que $f(\alpha) = a$ et $f(\beta) = b$. On a alors

$$\varphi(\alpha) = a - \alpha \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \varphi(\beta) = b - \beta \geqslant 0.$$

Encore une fois, on peut conclure que φ s'annule.

Exercice 16 **

Soit $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(0) = f(1)$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_0 \in [0\,;1 - 1/n]$ tel que

$$f(x_0) = f\Big(x_0 + \frac{1}{n}\Big).$$

1. Lorsque ℓ et ℓ' sont des valeurs finies, une variante élégante consiste à introduire la fonction composée $g = f \circ \tan$ définie sur $]-\pi/2\,;\pi/2[$ et la prolonger par continuité sur $[-\pi/2\,;\pi/2]$ afin de lui appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

2. Un *point fixe* est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Solution

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Introduisons la fonction réelle φ définie sur $[0\,;1-1/n]$ par

$$\varphi(x) = f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x).$$

La fonction φ est continue par opérations sur les fonctions qui le sont.

méthode

On montre que φ s'annule en calculant $\varphi(0)+\varphi(1/n)+\cdots+\varphi(1-1/n)$.

Par simplification des termes communs aux deux sommes du membre intermédiaire

$$\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = f(1)-f(0).$$

Si la fonction φ ne prend que des valeurs strictement positives alors $f(1)-f(0)>0$ ce qui contredit l'hypothèse $f(1)=f(0)$. De même, il n'est pas possible que la fonction ne prenne que des valeurs strictement négatives. La fonction φ prend donc des valeurs négatives et positives (au sens large). En rappelant qu'il s'agit d'une fonction réelle continue sur un intervalle, le théorème des valeurs intermédiaires assure que la fonction φ s'annule[1].

7.5.4 Théorème des bornes atteintes

Exercice 17 *

Soit $f\colon [0\,;+\infty[\, \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que la fonction f est bornée.

Solution

méthode

Par sa limite finie en $+\infty$, on borne la fonction f sur un voisinage de $+\infty$ avant de la borner par continuité sur le domaine restant.

Soit $\varepsilon = 1 > 0$. Il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f(x)-\ell| \leqslant 1$ pour tout $x \geqslant A$. En particulier, on a alors

$$|f(x)| \leqslant |f(x)-\ell| + |\ell| \leqslant 1+|\ell|.$$

La fonction f est bornée sur $[A\,;+\infty[$ par $M_1 = 1+|\ell|$. Aussi, la fonction f est continue sur le segment $[0\,;A]$ et donc bornée sur celui-ci par un certain réel M_2 (Th. 16 p. 235).

Par conséquent, quelle que soit la valeur de x choisie dans $[0\,;+\infty[$, on peut affirmer $|f(x)| \leqslant M$ avec $M = \max(M_1, M_2)$. La fonction f est donc bornée[2].

1. Ce résultat peut être généralisé : voir sujet 19 p. 248.

2. Une alternative élégante à ce raisonnement est de considérer la fonction continue $g = f\circ\tan$ définie sur $[0\,;\pi/2[$. La limite finie de f en $+\infty$ permet de prolonger g par continuité en $\pi/2$. La fonction g est alors continue sur un segment, donc bornée. La fonction f l'est alors aussi.

Exercice 18 **

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue périodique de période $T > 0$.

(a) Montrer que f est bornée.

(b) Justifier l'existence d'un réel x pour lequel $f\big([x\,;x+T/2]\big) = \operatorname{Im}(f)$.

Solution

(a) Puisque f est T-périodique, les valeurs prises par f sur $\mathbb{R}$ se confondent avec celles prises sur la période $[0\,;T]$. Or f est continue donc bornée sur $[0\,;T]$ et aussi sur $\mathbb{R}$.

(b) **méthode**

> On détermine x tel que les valeurs minimales et maximales de f soient prises sur le segment $[x\,;x+T/2]$.

L'image d'un segment par une application continue est un segment. On peut donc écrire $f\big([0\,;T]\big) = [f(a)\,;f(b)]$ avec $a, b \in [0\,;T]$.

Quitte à remplacer b par $b+T$, on peut supposer $a \leqslant b \leqslant a+T$.

Si $b \in [a\,;a+T/2]$ alors $f(a)$ et $f(b)$ appartiennent à $f\big([a\,;a+T/2]\big)$ auquel cas $x = a$ convient puisque

$$\operatorname{Im}(f) = f(\mathbb{R}) = f\big([0\,;T]\big) = f\big([a\,;a+T/2]\big).$$

Sinon, $b \in [a+T/2\,;a+T]$ et $x = a+T/2$ convient.

Exercice 19 **

Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(a) = f(b)$ (avec $a < b$).

Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall t \in [0\,;\alpha],\ \exists x \in [a\,;b-\alpha],\quad f(x+t) = f(x).$$

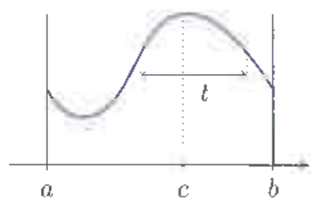
Solution

Si la fonction f est constante, c'est évident.

méthode

> La propriété voulue est vérifiée au voisinage d'un point intérieur à l'intervalle de définition où f admet un extremum.

La fonction f est continue sur le segment $[a\,;b]$ donc y admet un minimum et un maximum. La fonction f n'étant pas constante, on peut supposer, quitte à considérer $-f$, que le maximum est atteint en $c \in\,]a\,;b[$. Posons alors



$$\alpha = \min\{c-a, b-c\} > 0$$

de sorte que $[c-\alpha\,;c+\alpha] \subset [a\,;b]$.

Soit $t \in [0\,;\alpha]$. La fonction $g\colon x \mapsto f(x+t) - f(x)$ est définie et continue sur l'intervalle $[c-t\,;c]$. On a $g(c-t) \geqslant 0$ et $g(c) \leqslant 0$ car f est maximale en c. Le théorème des valeurs intermédiaires assure alors que g s'annule et qu'il existe donc $x \in [a\,;b-\alpha]$ tel que $f(x+t) = f(x)$.

Exercice 20 **

Soit $f\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout réel x positif, on pose

$$g(x) = \max_{t\in[0;x]} f(t).$$

Montrer que la fonction g est définie, continue et croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Solution

Soit $x \in [0\,;+\infty[$. La fonction f étant continue, elle admet un maximum sur le segment $[0\,;x]$ et l'on peut donc introduire le max définissant $g(x)$. Au surplus, la fonction g est croissante car pour chaque x et y dans $[0\,;+\infty[$,

$$\begin{aligned} x \leqslant y &\implies [0\,;x] \subset [0\,;y] \\ &\implies g(x) \leqslant g(y). \end{aligned}$$

Il reste à établir la continuité de g.

méthode

> On étudie la continuité de g en $a \in [0\,;+\infty[$ en discutant selon que $g(a)$ est, ou non, égale à $f(a)$.

Soit $a \in]0\,;+\infty[$. On a assurément $f(a) \leqslant g(a)$.

Cas : $f(a) < g(a)$. Par continuité de la fonction f en a, il existe $\alpha > 0$ assez petit[1] tel que $f(x) < g(a)$ pour tout $x \in [a-\alpha\,;a+\alpha]$. Pour de tels x, on a alors

$$g(x) = \max_{t\in[0;x]} f(t) = g(a).$$

La fonction g est constante au voisinage de a donc continue en a.

Cas : $f(a) = g(a)$. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en a, il existe $\alpha > 0$ assez petit tel que $f(x)$ soit encadré par $f(a)-\varepsilon$ et $f(a)+\varepsilon$ pour tout $x \in [a-\alpha\,;a+\alpha]$.

En particulier, $f(a-\alpha) \geqslant f(a)-\varepsilon$ et donc $g(a-\alpha) \geqslant f(a)-\varepsilon = g(a)-\varepsilon$.

Aussi, pour tout $x \in [0\,;a+\alpha]$, on a $f(x) \leqslant f(a)+\varepsilon$ car l'inégalité est vraie pour $x \leqslant a$ et pour $x \in [a\,;a+\alpha]$. Ainsi, $g(a+\alpha) \leqslant f(a)+\varepsilon = g(a)+\varepsilon$.

Par croissance de g, on a alors

$$\forall x \in [a-\alpha\,;a+\alpha], \quad g(a)-\varepsilon \leqslant g(x) \leqslant g(a)+\varepsilon.$$

On peut à nouveau conclure que g est continue en a.

Reste à évoquer la continuité en $a = 0$ qui se résout comme dans le cas ci-dessus en se limitant à l'étude d'une limite à droite.

1. On choisit α de sorte que $[a-\alpha\,;a+\alpha] \subset]0\,;+\infty[$ afin d'assurer la définition de $f(x)$.

7.5.5 Équations fonctionnelles

Exercice 21 *
Déterminer les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 vérifiant

$$f(2x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \text{ réel.}$$

Solution
Analysons une fonction f solution.

méthode
‖ On exprime $f(x)$ en fonction de $f(x/2)$, $f(x/4)$, etc.

Par l'équation fonctionnelle $f(2x) = f(x)$, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = f(x).$$

Soit x un réel fixé. Par une récurrence facile, on montre que pour tout naturel n

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x).$$

Lorsque n tend vers l'infini, le terme $x/2^n$ tend vers 0 et, par continuité de f en 0, on obtient

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0).$$

Or $f(x/2^n)$ est constant égal à $f(x)$ et l'on a donc aussi

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

Par unicité de la limite d'une suite, on conclut $f(x) = f(0)$.

Ce résultat valant pour toute valeur de x arbitrairement choisie dans $\mathbb{R}$, on peut conclure que la fonction f est constante. La réciproque est immédiate.

Exercice 22 ** (Fonctions additives et continues)
Déterminer les fonctions continues $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2. \qquad (*)$$

Solution

Soit f une fonction solution.

méthode

> On calcule $f(x)$ lorsque $x \in \mathbb{Q}$.

En prenant $x = y = 0$ dans $(*)$, on obtient $f(0) = 0$. En prenant $y = -x$, on constate que la fonction f est impaire. Enfin, en prenant $x \in \mathbb{R}$ et $y = nx$ avec $n \in \mathbb{N}$, on montre

$$f\big((n+1)x\big) = f(nx) + f(x)$$

de sorte que la suite $\big(f(nx)\big)$ est arithmétique de raison $f(x)$. Ces résultats combinés permettent d'affirmer

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(nx) = nf(x). \tag{$**$}$$

Posons alors $a = f(1)$ et vérifions $f(x) = ax$ pour tout x rationnel.

Soit $x \in \mathbb{Q}$. On peut écrire $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. En exploitant $(**)$, on obtient à la fois

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(p \times \frac{1}{q}\right) \underset{p\in\mathbb{Z}}{=} pf\left(\frac{1}{q}\right) \quad \text{et} \quad f(1) = f\left(q \times \frac{1}{q}\right) \underset{q\in\mathbb{N}^*}{=} qf\left(\frac{1}{q}\right).$$

On en tire

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}f(1) \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(x) = ax.$$

méthode

> On étend la relation à $x \in \mathbb{R}$ en écrivant x comme limite d'une suite de nombres rationnels[1].

Soit $x \in \mathbb{R}$. On peut écrire

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \quad \text{avec} \quad \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \in \mathbb{Q}.$$

Par continuité de f en x et par un calcul direct, on a simultanément

$$f\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) \quad \text{et} \quad f\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right) = a\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} ax.$$

Par unicité de la limite d'une suite, on conclut $f(x) = ax$.

En résumé, si f est solution, il existe[2] un réel a pour lequel $f(x) = ax$ pour tout x réel. La réciproque est immédiate.

Exercice 23 **

Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. On exploite en fait la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Cette étude peut être rapprochée de celle du sujet 29 p. 36.

Solution

Soit f une fonction solution. Celle-ci est à valeurs positives car, pour tout réel x,

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geqslant 0.$$

méthode

‖ Après avoir isolé le cas de la fonction nulle, on introduit $g = \ln \circ f$.

Si la fonction f s'annule en un certain $x_0 \in \mathbb{R}$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(x - x_0 + x_0) = f(x - x_0)\underbrace{f(x_0)}_{=0} = 0.$$

La fonction f désigne alors la fonction nulle.

Sinon, la fonction f prend des valeurs toutes strictement positives et l'on peut introduire la fonction composée $g = \ln \circ f$. La fonction g est continue et vérifie, pour tous x et y réels,

$$\begin{aligned} g(x+y) &= \ln\big(f(x+y)\big) = \ln\big(f(x)f(y)\big) \\ &= \ln\big(f(x)\big) + \ln\big(f(y)\big) = g(x) + g(y). \end{aligned}$$

En vertu de l'étude du sujet précédent, on peut affirmer l'existence d'une constante a réelle pour laquelle $g(x) = ax$ puis $f(x) = \exp\big(g(x)\big) = e^{ax}$ pour tout x réel.

La réciproque est immédiate.

Exercice 24 **

Déterminer les fonctions $f : [0\,;+\infty[\to [0\,;+\infty[$ continues vérifiant

$$f\big(f(x)\big) = x \quad \text{pour tout } x \in [0\,;+\infty[.$$

Solution

Soit f une fonction solution.

méthode

‖ On montre que f est strictement monotone.

La fonction f est bijective (d'application réciproque elle-même) et continue donc strictement monotone (Th. 15 p. 235). Elle ne peut être décroissante car alors elle ne serait pas surjective sur $[0\,;+\infty[$, elle est donc strictement croissante.

Soit $x \in [0\,;+\infty[$. Si $f(x) < x$, on a par stricte croissance $f\big(f(x)\big) < f(x)$ et donc

$$f\big(f(x)\big) < f(x) < x.$$

Ceci contredit l'hypothèse $f\big(f(x)\big) = x$. De même, $f(x) > x$ est impossible.

On conclut que l'application est nécessairement l'identité. La réciproque est entendue.

7.6 Exercices d'approfondissement

Exercice 25 **

Soit $f\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant

$$f(x+1)-f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}.$$

Montrer

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell.$$

Solution

Quitte à considérer la fonction $x \mapsto f(x) - \ell x$, on peut supposer $\ell = 0$ ce que nous ferons pour la suite.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un réel $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f(x+1) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout réel $x \geqslant A$.

méthode

> Par décrément d'unité, on rapporte le calcul de $f(x)$ à celui d'une valeur prise par f sur le segment $[A\,;A+1]$.

Soit $x \geqslant A$ et l'entier $n = \lfloor x - A \rfloor$ tel que $x - n \in [A\,;A+1]$. On peut écrire par télescopage

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\big(f(x-k) - f(x-k-1)\big) + f(x-n).$$

Par l'inégalité triangulaire

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{\big|f(x-k)-f(x-k-1)\big|}_{\leqslant\varepsilon} + \frac{|f(x-n)|}{x} \leqslant \frac{n\varepsilon}{x} + \frac{|f(x-n)|}{x}.$$

Puisque la fonction f est continue sur le segment $[A\,;A+1]$, elle y est bornée par un certain réel M. Sachant de plus $n \leqslant x$, on écrit

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \varepsilon + \frac{M}{x}.$$

Le terme M/x étant de limite nulle quand x tend vers $+\infty$, on peut introduire un réel A' strictement positif pour lequel $M/x \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \geqslant A'$.

On a alors, pour tout réel $x \geqslant \max(A, A')$,

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant 2\varepsilon.$$

On peut conclure que $f(x)/x$ est de limite nulle[1] quand x croît vers $+\infty$.

1. On peut mettre cette étude en parallèle avec celle du sujet 15 p. 207.

Exercice 26 **

Soit $f\colon [a\,;b] \to [a\,;b]$ vérifiant [1]

$$\forall (x,y) \in [a\,;b]^2, \quad \left|f(y) - f(x)\right| \leqslant |y - x|.$$

On considère la suite récurrente définie par

$$u_0 \in [a\,;b] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + f(u_n)}{2}.$$

Montrer que (u_n) converge vers un point fixe de f.

Solution

La suite (u_n) est bien définie. En effet, le premier terme u_0 est choisi dans $[a\,;b]$ et, pour tout $x \in [a\,;b]$, on peut affirmer

$$\frac{x + f(x)}{2} \in [a\,;b]$$

car c'est le milieu de deux éléments de $[a\,;b]$.

méthode

‖ On étudie la monotonie de la suite (u_n).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\big(f(u_n) - f(u_{n-1})\big) + (u_n - u_{n-1})}{2}.$$

Or par l'hypothèse sur f

$$\left|f(u_n) - f(u_{n-1})\right| \leqslant \left|u_n - u_{n-1}\right|$$

et donc $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $u_n - u_{n-1}$. La suite (u_n) est donc monotone [2]. De plus, la suite (u_n) est bornée, elle converge donc vers un réel ℓ. Sachant que tous les termes de la suite vérifient $a \leqslant u_n \leqslant b$, la limite vérifie aussi $a \leqslant \ell \leqslant b$.

Enfin, la fonction f est continue et en passant la relation de récurrence à la limite, on obtient

$$\ell = \frac{\ell + f(\ell)}{2} \quad \text{donc} \quad f(\ell) = \ell.$$

Exercice 27 **

Soit $f, g\colon [a\,;b] \to [a\,;b]$ deux fonctions continues vérifiant

$$f \circ g = g \circ f.$$

Montrer qu'il existe x_0 dans $[a\,;b]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

1. On dit que f est 1-*lipschitzienne*. De telles fonctions sont évidemment continues.
2. Sa monotonie est déterminée par le signe de $u_1 - u_0$.

Solution

Par l'absurde, supposons que la fonction $f - g$ ne s'annule pas. Puisque c'est une fonction continue sur un intervalle, cette fonction est de signe constant. Quitte à échanger f et g, on suppose $g - f > 0$.

La fonction f admet un point fixe[1] x dans $[a\,;b]$.

méthode

On considère la suite des itérés $x, g(x), g\big(g(x)\big), \dots$

On a $f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big) = g(x)$ et donc $g(x)$ est un point fixe de f. De plus, $g(x) > x$ car $g(x) - f(x) > 0$. De même $g\big(g(x)\big)$ est un point fixe de f supérieur à $g(x)$, etc.

Étudions la suite récurrente (u_n) déterminée par

$$u_0 = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n).$$

La suite (u_n) est constituée de points fixes de f. C'est aussi une suite croissante d'éléments de $[a\,;b]$, elle converge donc vers une limite $\ell \in [a\,;b]$. En passant à la limite les égalités

$$f(u_n) = u_n \quad \text{et} \quad u_{n+1} = g(u_n)$$

on obtient $f(\ell) = \ell = g(\ell)$. C'est absurde.

Exercice 28 ***

Déterminer les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$f \circ f = 2f - \mathrm{Id}. \qquad (*)$$

Solution

méthode

On commence par montrer qu'une fonction solution réalise une bijection strictement croissante.

Soit f une fonction solution du problème posé. La fonction f est injective. En effet, si x et x' sont deux réels tels que $f(x) = f(x')$ alors $f\big(f(x)\big) = f\big(f(x')\big)$ et la relation $f \circ f = 2f - \mathrm{Id}$ entraîne $x = x'$. La fonction f étant continue, elle est alors strictement monotone.

La fonction f est nécessairement croissante. En effet, si par l'absurde, la fonction f est décroissante, $f \circ f$ est croissante puis $\mathrm{Id} = 2f - f \circ f$ est décroissante !

Si la limite de f en $+\infty$ est finie égale à ℓ, on obtient par continuité l'absurdité

$$\lim_{x \to +\infty} x = \lim_{x \to +\infty} 2f(x) - f\big(f(x)\big) = 2\ell - f(\ell) \in \mathbb{R}.$$

Nécessairement f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et de même f tend vers $-\infty$ en $-\infty$.

Finalement, f réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1. Voir sujet 15 p. 246.

méthode

‖ On exprime[1] le terme général de la suite $\big(f^n(x)\big)$.

Soit x un réel et (u_n) la suite de terme général $u_n = f^n(x)$. On a

$$u_{n+2} = f^{n+2}(x) = 2f^{n+1}(x) - f^n(x) = 2u_{n+1} - u_n.$$

La suite (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$ de racine double 1. Le terme général de la suite (u_n) est donc de la forme $u_n = \lambda n + \mu$ avec λ, μ réels. Sachant $u_0 = x$ et $u_1 = f(x)$, on obtient

$$f^n(x) = n\big(f(x) - x\big) + x.$$

On en déduit

$$f(x) - x = \lim_{n\to+\infty} \frac{f^n(x)}{n}.$$

méthode

‖ On vérifie que cette limite ne dépend pas de x.

Si la fonction f n'est pas l'identité, il existe un réel x tel que $f(x) \neq x$. Pour fixer les idées, supposons $f(x) > x$ (le cas symétrique est analogue). Pour y un autre réel, il existe un entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que

$$p\big(f(x) - x\big) \leqslant y - x < (p+1)\big(f(x) - x\big)$$

c'est-à-dire

$$f^p(x) \leqslant y < f^{p+1}(x).$$

Par croissance de f, on a pour tout naturel n

$$f^{n+p}(x) \leqslant f^n(y) \leqslant f^{n+p+1}(x).$$

En divisant par n, on obtient

$$\underbrace{\frac{n+p}{n}}_{\to 1} \cdot \frac{f^{n+p}(x)}{n+p} \leqslant \frac{f^n(y)}{n} \leqslant \underbrace{\frac{n+p+1}{n}}_{\to 1} \cdot \frac{f^{n+p+1}(x)}{n+p+1}.$$

Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on conclut

$$f(x) - x \leqslant f(y) - y \leqslant f(x) - x.$$

Finalement, la fonction $x \mapsto f(x) - x$ est constante.

En résumé, si f est solution, il existe une constante C réelle telle que $f(x) = x + C$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La réciproque est immédiate.

---

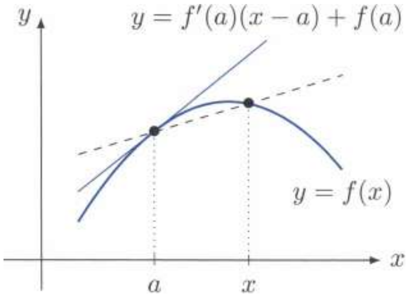
1. L'exposant est ici à comprendre comme un exposant de composition et non comme une puissance : $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ produit de composition à n facteurs.

CHAPITRE 8

Dérivabilité

I et J désignent des intervalles réels non vides et non réduits à des points et a un élément de I.

8.1 Dérivabilité



8.1.1 Nombre dérivé

Définition

> On dit qu'une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est *dérivable en a* si le *taux d'accroissement* de f entre a et x admet une limite finie quand x tend vers a avec $x \neq a$. Cette limite est notée $f'(a)$ et se nomme le *nombre dérivé* de f en a.

Ainsi, et sous réserve d'existence,

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Théorème 1 (Développement limité à l'ordre 1)
Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ est dérivable en a, on peut écrire [1]

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$$

avec ε une fonction de limite nulle en a.

En particulier, une fonction dérivable en a y est continue.

8.1.2 Dérivées latérales

En étudiant, lorsque cela a un sens, la limite du taux d'accroissement quand x tend vers a par valeurs supérieures (resp. par valeurs inférieures), on définit la notion de *nombre dérivé à droite* (resp. *à gauche*) en a.

Théorème 2
Une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est dérivable en un point intérieur à I si, et seulement si, elle y est dérivable à droite et à gauche et que les nombres dérivés correspondants sont égaux.

Ce résultat est utile pour étudier la dérivabilité des fonctions définies par une alternative.

8.1.3 Fonction dérivée

Définition
On dit qu'une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est *dérivable*[2] si celle-ci est dérivable en tout point a de I. On peut alors introduire sa *fonction dérivée* $f'\colon I \to \mathbb{R}$.

La notation de la dérivée avec un « prime » est utilisée pour dériver une fonction. Si l'on veut dériver une expression de la variable x, on emploie la notation différentielle $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. On peut ainsi écrire

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigl(f(x)\bigr).$$

On justifie généralement la dérivabilité et l'on obtient l'expression de la dérivée d'une fonction par les théorèmes d'opérations présentés dans les chapitres précédents p. 13 et p. 40.

8.2 Théorème de Rolle et des accroissements finis

8.2.1 Extremum local

Définition
On dit qu'une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ présente un *maximum local* en a s'il existe $\alpha > 0$ tel que $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout x de I vérifiant $|x - a| \leqslant \alpha$.

Mutatis mutandis, on définit la notion de *minimum local*.

1. Inversement, lorsque $f(x) = f(a) + \ell(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$ avec ε de limite nulle en a, la fonction f est dérivable en a avec $f'(a) = \ell$.

2. On dit quelquefois qu'une fonction est *dérivable sur* un intervalle J pour insister sur le domaine de définition de la fonction ou pour affirmer que c'est sa restriction au départ de J qui est dérivable.

Théorème 3
Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ présente un extremum local en un point a intérieur à I et si f est dérivable en a alors[1] $f'(a) = 0$.

Si f admet un maximum en a extrémité gauche de I, on peut seulement affirmer $f'(a) \leqslant 0$. On affirme $f'(a) \geqslant 0$ lorsque a est extrémité droite.

8.2.2 Théorème de Rolle

Théorème 4 (Théorème de Rolle)
Soit a, b deux réels avec $a < b$. Si f est une fonction réelle continue sur $[a\,;b]$, dérivable sur $]a\,;b[$ et si $f(a) = f(b)$ alors il existe un réel c dans $]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

8.2.3 Égalité des accroissements finis

Théorème 5 (Théorème des accroissements finis)
Soit a, b deux réels avec $a < b$. Si f est une fonction réelle continue sur $[a\,;b]$, dérivable sur $]a\,;b[$ alors il existe un réel c dans $]a\,;b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Une application importante de l'égalité des accroissements finis est la justification des théorèmes de monotonie[2] déjà énoncés p. 13.

8.2.4 Inégalité des accroissements finis

Définition

> On dit qu'une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est *lipschitzienne* s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ vérifiant $|f(y) - f(x)| \leqslant M\,|y - x|$ pour tous x et y dans I. Plus précisément, on dit alors que la fonction f est *M-lipschitzienne*.

Les fonctions lipschitziennes sont continues.

Théorème 6
Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable et si $|f'|$ est majorée par un réel M alors la fonction f est M-lipschitzienne.

1. On dit que a est *point critique* de f.
2. Ceux-ci demeurent valables pour une fonction continue et dérivable sauf en un nombre fini de points.

8.2.5 Limite de la dérivée

Théorème 7 (Théorème de la limite de la dérivée)
Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ est continue, dérivable sur les intervalles formant $I \setminus \{a\}$ et si

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

alors

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} \ell.$$

En particulier, si ℓ est une limite finie, f est dérivable en a avec $f'(a) = \ell$. En revanche, si ℓ est une limite infinie, le graphe de f présente une tangente verticale en a.

8.3 Classe d'une fonction

8.3.1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Soit une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Définition

On pose $f^{(0)} = f$ appelée *dérivée d'ordre* 0 de f.
Si f admet une dérivée d'ordre n, notée $f^{(n)}$, et si celle-ci est dérivable, sa dérivée est appelée *dérivée d'ordre* $n+1$ de f et est notée $f^{(n+1)}$.

Si l'on veut dériver à l'ordre n une expression de la variable x, on emploie la notation différentielle $\frac{d^n}{dx^n}$.

Définition

On dit que f est de *classe*[1] $\mathcal{C}^n$ si f admet une dérivée d'ordre n et si celle-ci est continue. On dit que f est de *classe* $\mathcal{C}^\infty$ si f admet une dérivée jusqu'à n'importe quel[2] ordre n.

En particulier, les fonctions de classe $\mathcal{C}^0$ sont les fonctions continues, les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sont les fonctions dérivables de dérivées continues.

8.3.2 Opérations sur les fonctions $\mathcal{C}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. On dit aussi qu'une fonction est de *classe* $\mathcal{C}^n$ *sur* un intervalle J pour insister sur son domaine de définition ou pour affirmer que c'est la restriction de la fonction au départ de J qui est de classe $\mathcal{C}^n$.
2. On dit aussi que f est *indéfiniment dérivable*. Une telle fonction est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout n.

Théorème 8
Si $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, alors pour tout réel λ, les fonctions λf, $f+g$ et fg le sont aussi avec [1]

$$(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)},\quad (f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \quad \text{et} \quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Théorème 9
Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ est composable par $g\colon J \to \mathbb{R}$ et si ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^n$ alors la fonction composée $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$.

En composant avec la fonction inverse, on montre que l'inverse d'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ ne s'annulant pas est de classe $\mathcal{C}^n$. On peut aussi considérer le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$.

Théorème 10
Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (avec $n \geqslant 1$) et si sa dérivée ne s'annule pas alors f réalise une bijection de I vers un intervalle J et sa bijection réciproque est aussi de classe $\mathcal{C}^n$.

Notons enfin que ces différents résultats se généralisent aux fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

8.3.3 Théorème du prolongement $\mathcal{C}^n$

Théorème 11 (Théorème du prolongement $\mathcal{C}^n$)
Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur les intervalles constituant $I \setminus \{a\}$ et si $f^{(k)}$ possède une limite finie quand x tend vers a pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$ alors f peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

8.4 Extension aux fonctions complexes

Le vocabulaire précédent (dérivabilité, fonction dérivée, classe d'une fonction) et les théorème d'opérations algébriques se transposent aux fonctions complexes. En particulier, on peut étudier la dérivabilité à n'importe quel ordre d'une fonction complexe en considérant sa partie réelle et sa partie imaginaire. En revanche le théorème de Rolle [2] ou le théorème des accroissement finis ne sont pas valables dans le cadre complexe. Seule demeure l'inégalité des accroissements finis :

1. L'égalité exprimant la dérivée d'ordre n d'un produit se nomme la *formule de Leibniz*.
2. La fonction $t \mapsto e^{it}$ est dérivable sur $[0\,;2\pi]$ prend les mêmes valeurs en 0 et en 2π et pourtant sa dérivée ne s'annule pas.

Théorème 12
Si $f: I \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et si $|f'|$ est majorée par un réel M sur I alors la fonction f est M-lipschitzienne :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(y) - f(x)| \leqslant M\,|y - x|\,.$$

8.5 Exercices d'apprentissage

8.5.1 Dérivabilité

Exercice 1
Étudier la dérivabilité de la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

Solution

méthode
La fonction valeur absolue n'étant pas dérivable, on commence par déterminer la valeur de celle-ci en discutant selon le signe de la variable.

Étudions la dérivabilité de f en $a \in \mathbb{R}$.
Cas : $a > 0$. Pour x au voisinage de a, on a $|x| = x$ et donc

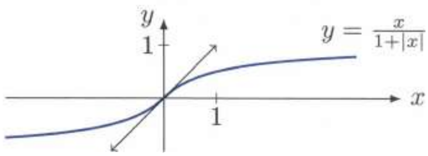
$$f(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}.$$

La fonction f est alors dérivable en a avec

$$f'(a) = \frac{1}{(1+a)^2}.$$

Cas : $a < 0$. Cette fois-ci, $|x| = -x$. Un calcul analogue donne

$$f'(a) = \frac{1}{(1-a)^2}.$$



Cas : $a = 0$.

méthode
La dérivabilité en 0 s'étudie par la limite d'un taux d'accroissement [1].

Pour $x \neq 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{1+|x|} \xrightarrow[x \to 0]{} 1.$$

La fonction f est donc aussi dérivable en 0 avec $f'(0) = 1$.

1. La fonction f étant continue en 0, on peut aussi utiliser le théorème de la limite de la dérivée (Th. 7 p. 260) : f' est clairement de limite égale à 1 en 0.

Exercice 2

Pour quels $n \in \{0,1,2,3\}$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ suivante est-elle continue, dérivable, de classe $\mathcal{C}^1$?

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} x^n \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Solution

Par opérations sur les fonctions, f_n est assurément de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur les intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$ avec, pour tout $x > 0$,

$$f_n'(x) = nx^{n-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Reste à étudier sa régularité en 0.

Dans le cas $n = 0$, la fonction f_0 n'est pas continue[1] en 0 (*a fortiori* ni dérivable, ni de classe $\mathcal{C}^1$).

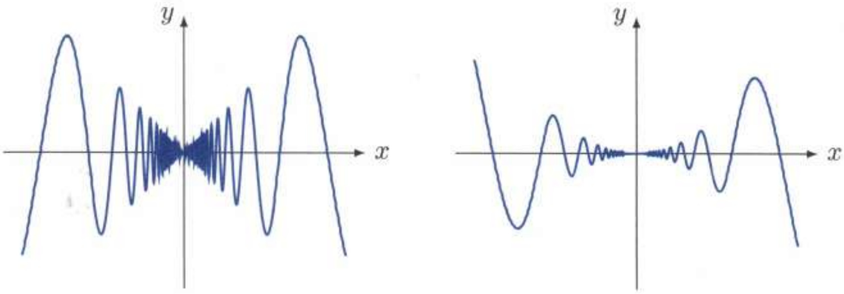
Supposons désormais $n \geqslant 1$. La fonction f_n est continue en 0 car

$$f_n(x) = \underbrace{x^n}_{\to 0} \times \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{bornée}} \xrightarrow[x \to 0]{} 0 = f_n(0).$$

Étudions, maintenant sa dérivabilité en 0. Pour $x \neq 0$

$$\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} = x^{n-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Si $n = 1$, ce taux d'accroissement ne possède pas de limite quand x tend vers 0 : la fonction f_1 n'est alors pas dérivable en 0.



Allure au voisinage de 0 des fonctions f_1 à gauche et f_2 à droite.

1. Le terme général $u_n = 1/(2n\pi + \pi/2)$ tend vers 0 tandis que $f_0(u_n) = 1$ ne tend pas vers $f_0(0)$.

En revanche, si $n \geqslant 2$, ce taux d'accroissement tend vers 0 car produit d'un facteur borné par un facteur de limite nulle. Dans ce cas, f_n est dérivable avec $f_n'(0) = 0$.

méthode

> Pour étudier si une fonction dérivable est de classe C^1, on étudie la continuité de sa dérivée.

Pour $x \neq 0$

$$f_2'(x) = \underbrace{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} - \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{sans limite en } 0}.$$

La dérivée de f_2 n'est donc pas continue en 0. En revanche

$$f_3'(x) = \underbrace{3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} - \underbrace{x\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = f_3'(0).$$

La dérivée de la fonction f_3 est donc continue en 0.

En résumé : f_0 n'est pas continue, f_1 est continue mais pas dérivable, f_2 est dérivable mais pas de classe C^1 et f_3 est de classe C^1.

Exercice 3

Déterminer un exemple :

(a) de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ mais de dérivée discontinue en 0.

(b) de fonction dérivable sur $]0\,;+\infty[$ de limite $+\infty$ en 0 mais dont la dérivée n'est pas de limite $+\infty$ en 0.

(c) de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, de nombre dérivé strictement positif en 0 mais non croissante sur un voisinage de 0.

Solution

(a) La fonction $f\colon x \mapsto x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ prolongée par continuité en 0 convient : c'est la fonction f_2 de l'étude précédente.

(b) La fonction $g\colon x \mapsto \frac{1}{x} + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ convient. Elle est bien de limite $+\infty$ en 0 mais sa dérivée n'est pas de limite infinie en 0 car, pour tout $x > 0$,

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}\left(1 + \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \quad \text{donc} \quad g'\left(\frac{1}{(2n+1)\pi}\right) = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

(c) La fonction $h\colon x \to x + 2x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ prolongée par continuité en 0 convient. En effet, $h'(0) = 1 > 0$ et pour $x \neq 0$

$$h'(x) = \underbrace{1 + 4x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 1} - \underbrace{2\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{oscille entre } -2 \text{ et } 2}.$$

La dérivée h' est strictement négative (et donc h strictement décroissante) sur des intervalles aussi proches de 0 que l'on peut le vouloir.

8.5.2 Théorème de Rolle et des accroissements finis

Exercice 4

Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une application n fois dérivable.

On suppose que f s'annule en au moins $n+1$ points distincts de I. Montrer que la dérivée n-ième de f s'annule au moins une fois sur I.

Solution

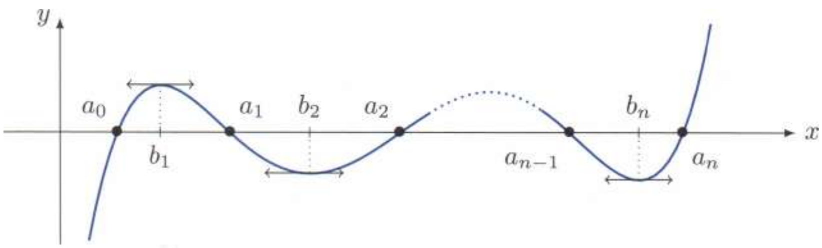
méthode

> On applique le théorème de Rolle (Th. 4 p. 259) entre des annulations successives de f afin de produire des annulations pour la fonction f'.

Notons $a_0, a_1, \dots, a_n$ les $n+1$ points distincts où f s'annule. Quitte à redéfinir l'indexation, on peut supposer ceux-ci organisés par ordre croissant :

$$a_0 < a_1 < \dots < a_n.$$

Soit $i \in [\![1\,;n]\!]$. La fonction réelle f est continue sur $[a_{i-1}\,;a_i]$, dérivable sur $]a_{i-1}\,;a_i[$ et prend les mêmes valeurs en a_{i-1} et a_i puisqu'elle s'y annule. Par le théorème de Rolle, on peut affirmer l'existence de b_i dans $]a_{i-1}\,;a_i[$ annulant f'.



Par construction, les b_i sont entrelacés dans les a_i :

$$a_0 < b_1 < a_2 < b_2 < a_3 < \dots < a_{n-1} < b_n < a_n.$$

Les b_i sont donc deux à deux distincts et l'on peut affirmer que f' s'annule au moins n fois sur I.

En reprenant ce raisonnement [1], on obtient que f'' s'annule au moins $n-1$ fois ou encore que $f^{(k)}$ s'annule au moins $n-k+1$ fois pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$. Au final, $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

1. Le plus élégant serait cependant de raisonner par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la démarche ci-dessus fournissant l'hérédité de celle-ci.

Exercice 5

Montrer l'encadrement

$$\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Solution

méthode

On applique le théorème des accroissements finis (Th. 5 p. 259) à la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ entre 0 et x.

Soit $x > 0$. La fonction $f : t \mapsto \ln(1+t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1\,;+\infty[$ et donc *a fortiori* continue sur $[0\,;x]$ et dérivable sur $]0\,;x[$. Le théorème des accroissements finis assure alors l'existence d'un élément c de $]0\,;x[$ tel que

$$f(x) - f(0) = f'(c)(x-0) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \ln(1+x) = \frac{x}{1+c}.$$

Sachant $1 < 1+c < 1+x$, on obtient directement l'encadrement strict voulu.

Exercice 6

Montrer que pour tous x et y réels

$$\left|\sin y - \sin x\right| \leqslant |y-x|.$$

Solution

méthode

Par l'inégalité des accroissements finis (Th. 6 p. 259), on montre qu'une fonction est lipschitzienne en bornant sa dérivée.

La fonction $x \mapsto \sin x$ est dérivable avec pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\left|(\sin)'(x)\right| = |\cos x| \leqslant 1.$$

La fonction sin est donc 1-lipschitzienne [1].

8.5.3 Dérivées successives

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que les dérivées n-ièmes des fonctions cos et sin s'expriment

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\cos x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\sin x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

1. On montre de même que les fonctions cos ou arctan sont 1-lipschitziennes.

Solution

méthode

On peut valider les formules proposées en raisonnant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. On peut aussi effectuer un calcul dans le champ complexe.

Les fonctions cos et sin sont les parties réelles et imaginaires de la fonction complexe $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$. Celle-ci est indéfiniment dérivable et l'on peut affirmer aisément

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right) = \mathrm{i}^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\right)^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x+n\frac{\pi}{2}}.$$

En passant à la partie réelle et à la partie imaginaire, on valide simultanément les deux formules proposées.

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les dérivées n-ièmes des fonctions suivantes

(a) $x \mapsto x^p$ (avec $p \in \mathbb{N}$) (b) $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ (c) $(x^2 - x + 1)\mathrm{e}^{-x}$

(d) $x \mapsto \cos^3 x$ (e) $x \mapsto \cos(x)\mathrm{e}^x$ (f) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$.

Solution

Par opérations sur les fonctions, chacune des fonctions proposées est indéfiniment dérivable.

(a) **méthode**

On calcule les premières dérivées jusqu'à voir apparaître le « schéma général ».

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^p) = px^{p-1}, \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(x^p) = p(p-1)x^{p-2}, \dots$$

Tant que l'ordre de dérivation est inférieur à l'exposant p, on obtient [1]

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^p) = p(p-1)\times\cdots\times(p-n+1)x^{p-n} = \frac{p!}{(p-n)!}x^{p-n}$$

et la dérivée n-ième est nulle si $n > p$.

(b) **méthode**

Pour calculer les premières dérivées successives, on préfère dériver une forme en $1/u^k$ plutôt qu'en $1/u$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{1}{x}\right) = +\frac{2}{x^3}, \quad \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{2\times 3}{x^4}, \dots$$

On peut alors proposer [2] la formule générale

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}.$$

1. Pour exprimer la formule générale, on observe qu'après n dérivations l'exposant de x est égal à $p-n$ tandis que le dernier facteur est $(p-n+1)$ car provient de l'ultime dérivation de x^{p-n+1}.

2. On pourra justifier l'exactitude de cette formule en raisonnant par récurrence.

(c) **méthode**

‖ La formule de Leibniz (Th. 8 p. 261) permet de dériver un produit à l'ordre n.

Introduisons les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x + 1$ et $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Ces fonctions sont de classe C^n et l'on peut appliquer la formule de Leibniz

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

avec, pour tout x réel,

$$f'(x) = 2x - 1,\ f''(x) = 2,\ f^{(k)}(x) = 0 \text{ pour } k \geqslant 3 \quad \text{et} \quad g^{(n-k)}(x) = (-1)^{n-k}\mathrm{e}^{-x}.$$

On en déduit

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Big((x^2 - x + 1)\mathrm{e}^{-x}\Big) = (-1)^n\big(x^2 - (2n+1)x + n^2 + 1\big)\mathrm{e}^{-x}.$$

(d) **méthode**

‖ On linéarise l'expression trigonométrique avant de dériver.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a[1] $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ et l'on peut donc proposer la linéarisation

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\big(3\cos x + \cos(3x)\big).$$

On sait[2]

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\cos x) = \cos\Big(x + \frac{n\pi}{2}\Big) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big(\cos(3x)\big) = 3^n\cos\Big(3x + \frac{n\pi}{2}\Big).$$

On obtient donc

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\cos^3 x) = \frac{1}{4}\bigg(3\cos\Big(x + \frac{n\pi}{2}\Big) + 3^n\cos\Big(3x + \frac{n\pi}{2}\Big)\bigg).$$

(e) **méthode**

‖ On interprète[3] la fonction comme la partie réelle d'une fonction complexe simple à dériver.

Pour tout x réel, on peut écrire

$$\cos(x)\mathrm{e}^x = \mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{(1+i)x}\big)$$

1. Voir sujet 4 p. 93. On peut aussi simplement linéariser $\cos^3 x$ par les formule d'Euler.
2. Voir sujet 7 p. 266.
3. On peut aussi utiliser la formule de Leibniz.

avec

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\right) = (1+\mathrm{i})^n \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} = 2^{n/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/4}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$$

car $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$. On en déduit

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\cos(x)\mathrm{e}^x\right) = 2^{n/2}\cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)\mathrm{e}^x.$$

(f) **méthode**

> On décompose la fraction rationnelle en éléments simples [1].

La fraction $1/(X^2-1)$ est de partie entière nulle et son dénominateur X^2-1 se factorise $(X-1)(X+1)$. Sa décomposition en éléments simples s'écrit

$$\frac{1}{X^2-1} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

On calcule

$$a = \left.\frac{1}{X+1}\right|_{X=1} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad b = \left.\frac{1}{X-1}\right|_{X=-1} = -\frac{1}{2}.$$

Chaque élément simple se dérive à l'ordre n comme on l'a vu pour le terme $1/x$ ci-dessus et l'on obtient

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{1}{x^2-1}\right) = \frac{(-1)^n n!}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right).$$

8.6 Exercices d'entraînement

8.6.1 Généralités

Exercice 9 *
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Étudier

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}.$$

1. La démarche de calcul d'une décomposition en éléments simples est présentée dans le chapitre 5 de l'ouvrage *Exercices d'algèbre et de probabilités MPSI*.

Solution

méthode

On introduit[1] par addition et soustraction le terme « pont » $af(a)$.

Pour x réel différent de a

$$\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=\frac{xf(a)-af(a)+af(a)-af(x)}{x-a}=f(a)+a\frac{f(a)-f(x)}{x-a}.$$

Dans le deuxième terme de la somme, on reconnaît l'opposé d'un taux d'accroissement et donc

$$\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}\xrightarrow[x\neq a]{x\to a}f(a)-af'(a).$$

Exercice 10 *

Soit $f\colon[0\,;1]\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable et $\varphi\colon[0\,;1]\to\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x)=\begin{cases}f(2x) & \text{si } x\in[0\,;1/2]\\ f(2x-1) & \text{sinon.}\end{cases}$$

À quelle(s) condition(s) la fonction φ est-elle dérivable ?

Solution

Par composition, la fonction φ est dérivable en chaque point des intervalles $[0\,;1/2[$ et $]1/2\,;1]$. Reste à étudier la dérivabilité au point de jonction $x=1/2$. Commençons par étudier les continuités à gauche et à droite de φ en $1/2$.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\varphi(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}f(2x)=f(1)=\varphi(1/2)\text{ et}$$
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\varphi(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}f(2x-1)=f(0).$$

La fonction φ est donc continue en $1/2$ si, et seulement si, $f(0)=f(1)$. Supposons par la suite cette condition vérifiée.

méthode

On étudie par les limites des taux d'accroissement les dérivées latérales en $1/2$.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{\varphi(x)-\varphi(1/2)}{x-1/2}=2\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{f(2x)-f(1)}{2x-1}=2f'(1)\text{ et}$$
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(1/2)}{x-1/2}=2\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{f(2x-1)-f(0)}{2x-1}=2f'(0).$$

1. Ou introduire le terme $xf(x)$.

La fonction φ est donc dérivable à droite et à gauche en $1/2$ avec les nombres dérivés $\varphi'_d(1/2) = 2f'(1)$ et $\varphi'_g(1/2) = 2f'(0)$. La fonction φ est alors dérivable en $1/2$ si, et seulement si, $f'(0) = f'(1)$ (Th. 2 p. 258).

En résumé, φ est dérivable si, et seulement si, $f(0) = f(1)$ et $f'(0) = f'(1)$.

Exercice 11 *

Soit $f\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$f(0) < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{+\infty} f = +\infty.$$

Montrer que si f s'annule au moins deux fois alors f' aussi.

Solution

méthode

On étudie les variations de f en supposant que f' s'annule au plus une fois.

Par l'absurde. Si f' ne s'annule pas alors f' est de signe strict constant car continue. La fonction f est alors strictement monotone (en fait strictement croissante) et donc injective : elle ne s'annule qu'une seule fois.

Si f' ne s'annule qu'une fois en un certain $x_0 \in \mathbb{R}$, à nouveau f' est de signe strict constant sur $[0\,;x_0[$ et $]x_0\,;+\infty[$ car continue. La fonction f' est nécessairement strictement positive sur $]x_0\,;+\infty[$ car f est de limite $+\infty$ en $+\infty$ et les variations de f correspondent à l'un ou l'autre des deux tableaux suivants :

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Les flèches signifiant une stricte monotonie sur l'intervalle considéré, on peut affirmer dans les deux cas que f s'annule une seule fois.

Exercice 12 **

Soit φ et ψ les fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi(x) = \begin{cases} e^{\frac{2}{x^2-1}} & \text{si } x \in \,]-1\,;1[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(b) En déduire que la fonction ψ est elle aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Solution

(a) La fonction φ est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur chacun des deux intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$. Elle est aussi continue en 0 car continue à droite et à gauche puisque

$$\varphi(x)=0 \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0=\varphi(0) \quad\text{et}\quad \varphi(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0=\varphi(0).$$

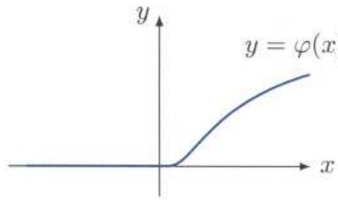
Étudions sa dérivabilité en 0.

méthode

On utilise le théorème de la limite de la dérivée (Th. 7 p. 260).

Lorsque x tend vers 0 par valeurs inférieures, $\varphi'(x)$ est égal à 0 et tend vers 0.
Lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures, on a aussi

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \underset{X=\frac{1}{x}}{=} X^2\mathrm{e}^{-X}\to 0 \quad\text{car}\quad X\xrightarrow[x\to 0^+]{}+\infty.$$



La fonction φ est donc dérivable en 0 avec $\varphi'(0)=0$.

méthode

On répète l'utilisation du théorème de la limite de la dérivée.

Pour tout naturel n, on vérifie par récurrence

$$\varphi^{(n)}(x)=0 \text{ si } x<0 \quad\text{et}\quad \varphi^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x>0$$

avec (P_n) une suite de fonctions polynômes déterminée par les conditions

$$P_0=1 \quad\text{et}\quad \forall n\in\mathbb{N},\ P_{n+1}(X)=X^2\big(P_n(X)-P_n'(X)\big)$$

Comme au-dessus, on constate

$$\varphi^{(n)}(x)=0\xrightarrow[x\to 0^-]{}0 \quad\text{et}\quad \varphi^{(n)}(x)\underset{X=\frac{1}{x}}{=}P_n(X)\mathrm{e}^{-X}\xrightarrow[x\to 0^+]{}0.$$

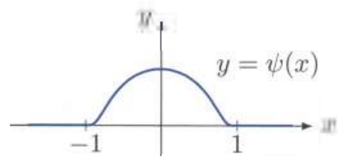
La fonction φ est donc indéfiniment dérivable en 0 avec[1] $\varphi^{(n)}(0)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Finalement, φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(b) **méthode**

On exprime ψ à l'aide de la fonction φ.

On a par décomposition en éléments simples

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$$



et

$$x\in\,]-1\,;1[\iff 1-x>0 \text{ et } 1+x>0.$$

1. On dit que la fonction φ est *plate* en 0.

Par conséquent, $\psi(x) = \varphi(1-x)\varphi(1+x)$ pour tout x réel. La fonction ψ est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ par produit de fonctions qui le sont.

Exercice 13 ***

Soit $f\colon [0\,;+\infty[\ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que f est dérivable en 0 si, et seulement si, le quotient

$$\frac{f(2x)-f(x)}{x}$$

admet une limite finie quand x tend vers 0^+.

Solution

Si f est dérivable en 0, on fait intervenir $f(0)$ dans le calcul du quotient

$$\frac{f(2x)-f(x)}{x} = 2\frac{f(2x)-f(0)}{2x} + \frac{f(0)-f(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 2f'(0) - f'(0) = f'(0).$$

Inversement, supposons que le quotient possède une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en 0^+ et montrons que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = \ell$. Quitte à considérer la fonction $x \mapsto f(x) - \ell x$, on peut supposer $\ell = 0$.

méthode

Par une somme télescopique, on rapproche $f(x)$ de $f(0)$ en transitant par $f\left(\frac{x}{2}\right)$, $f\left(\frac{x}{4}\right)$,..., $f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On écrit

$$f(x) - f(0) = \sum_{k=1}^{n}\left(f\left(2\times\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) + f\left(\frac{x}{2^n}\right) - f(0).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in\ ]0\,;\alpha]$

$$\left|\frac{f(2x)-f(x)}{x}\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left|f(2x)-f(x)\right| \leqslant \varepsilon x.$$

Pour de telles valeurs de x, $x/2^k \in\ ]0\,;\alpha]$ pour chaque indice k de la somme et donc

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right| &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x}\underbrace{\left|f\left(2\times\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right|}_{\leqslant \varepsilon\frac{x}{2^k}} + \frac{1}{x}\left|f\left(\frac{x}{2^n}\right) - f(0)\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2^k} + \frac{1}{x}\left|f\left(\frac{x}{2^n}\right) - f(0)\right| = \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{x}\left|f\left(\frac{x}{2^n}\right) - f(0)\right|.\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient par continuité de f en 0

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right| \leqslant \varepsilon.$$

On peut alors conclure que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.

8.6.2 Calculs de dérivée n-ième

Exercice 14 *
Soit $f\colon]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction indéfiniment dérivable. Établir pour tout $x \neq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$ l'identité

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Solution

méthode

On raisonne par récurrence en dérivant par la formule de Leibniz le produit

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = x \times x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Pour $n = 0$, l'identité est immédiate car la dérivée d'ordre 0 désigne la fonction. Supposons la propriété vérifiée au rang $n \geqslant 0$. On applique la formule de Leibniz[1] (Th. 8 p. 261)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\left(x^n f\left(\frac{1}{x}\right)\right) &= \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\left(x \times x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\ &= \binom{n+1}{0}x \times \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \binom{n+1}{1}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right).\end{aligned}$$

Par l'hypothèse de récurrence, on poursuit le calcul et l'on simplifie

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\left(x^n f\left(\frac{1}{x}\right)\right) &= x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\right) + (n+1) \times \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

La récurrence est établie.

Exercice 15 **
Déterminer les points d'annulation de la dérivée n-ième de la fonction arc tangente.

1. La somme se limite à deux termes car les dérivées successives du facteur x sont nulles au delà de l'ordre 2.

Solution

Pour $n = 0$, la fonction arc tangente s'annule en 0 et seulement en ce point. Considérons maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ et rappelons

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

méthode

On calcule la dérivée n-ième de la fonction arc tangente en exploitant la décomposition en éléments simples complexe

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{(x+\mathrm{i})-(x-\mathrm{i})}{(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{x-\mathrm{i}} - \frac{1}{x+\mathrm{i}}\right).$$

En dérivant cette identité à l'ordre $n-1$, il vient

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\arctan x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{(x-\mathrm{i})^n} - \frac{1}{(x+\mathrm{i})^n}\right).$$

Les annulations de cette dérivée n-ième se déduisent de la résolution de l'équation

$$(x+\mathrm{i})^n = (x-\mathrm{i})^n.$$

Cette résolution a déjà été menée dans le sujet 29 p. 113, on y a obtenu $n-1$ solutions qui sont les $\cot\frac{k\pi}{n}$ avec k allant de 1 à $n-1$.

8.6.3 Théorème de Rolle

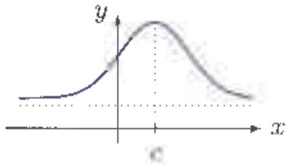
Exercice 16 * (Théorème de Rolle généralisé [1])

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable admettant des limites finies et égales en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Solution

méthode

On réunit [2] les hypothèses d'application du théorème de Rolle (Th. 4 p. 259).



Si f est constante la propriété est immédiate. Sinon, f prend en un certain $x \in \mathbb{R}$ une valeur différente de la valeur ℓ de la limite de f en $\pm\infty$. Soit y une valeur strictement comprise entre ℓ et $f(x)$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires généralisé [3] à f, il existe, d'une part $a < x$, d'autre part $b > x$, tels que $f(a) = f(b) = y$.

Les réels a et b étant distincts, on peut appliquer le théorème de Rolle entre a et b et affirmer que la dérivée de f s'annule.

1. On peut proposer et établir de la même façon un énoncé général : pour $a < b$ réels ou infinis, si $f :]a\,;b[\to \mathbb{R}$ est dérivable et présente des limites égales en a et b alors la dérivée de f s'annule.

2. Une alternative élégante consiste à introduire la fonction composée $g = f \circ \tan$ définie sur $]-\pi/2\,;\pi/2[$. On prolonge celle-ci par continuité en $\pm\pi/2$ puis on lui applique le théorème de Rolle pour obtenir une annulation de g' donc de f'.

3. Voir sujet 14 p. 245.

Exercice 17 * (Règle de L'Hôpital)

Soit $f, g\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. On suppose que la dérivée de g ne s'annule pas.

(a) Montrer que $g(a) \neq g(b)$.

(b) Montrer qu'il existe $c \in \left]a\,;b\right[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Solution

(a) Par l'absurde, si $g(a) = g(b)$, l'application du théorème de Rolle à la fonction g entre a et b contredit l'hypothèse de non-annulation de g'.

(b) L'identité voulue équivaut à

$$\big(f(b)-f(a)\big)g'(c) - \big(g(b)-g(a)\big)f'(c) = 0.$$

méthode

> L'annulation de la dérivée de la fonction
>
> $$\varphi\colon x \mapsto \big(f(b)-f(a)\big)g(x) - \big(g(b)-g(a)\big)f(x)$$
>
> semble résoudre le problème.

La fonction φ proposée est dérivable sur $[a\,;b]$ et prend la valeur $f(b)g(a) - g(b)f(a)$ en a en b. Par le théorème de Rolle, la dérivée de la fonction φ s'annule ce qui résout la question posée.

Exercice 18 **

Soit $f\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}.$$

Montrer qu'il existe un point autre que l'origine en lequel la tangente à la courbe représentative de f passe par l'origine.

Solution

Pour $a \in [0\,;+\infty[$, la tangente au graphe de f en a a pour équation

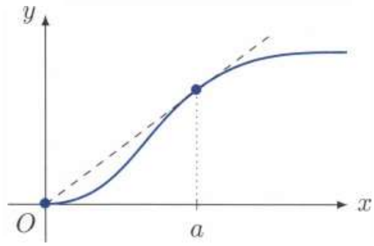
$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Celle-ci passe par l'origine si, et seulement si, $af'(a) - f(a) = 0$.

méthode

> On remarque que $xf'(x) - f(x)$ est le numérateur de la dérivée de $f(x)/x$: on applique le théorème de Rolle à la fonction correspondante.

Soit $\varphi\colon]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par la relation $\varphi(x) = f(x)/x$. La fonction φ est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et l'on peut la prolonger par continuité en posant $\varphi(0) = 0$ car



$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0^+]{} f'(0) = 0.$$

Au surplus, la fonction φ tend vers 0 en $+\infty$.

En exploitant une version généralisée du théorème de Rolle[1], on peut affirmer qu'il existe $a > 0$ tel que $\varphi'(a) = 0$. La tangente au graphe de f au point d'abscisse a passe alors par l'origine.

Exercice 19 ** (Théorème de Darboux)

Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable

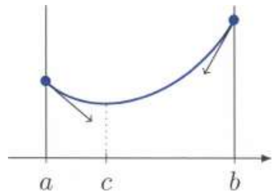
(a) On suppose $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Montrer que la dérivée de f s'annule.

(b) Plus généralement, on considère y un réel strictement compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. Montrer que la dérivée de f prend la valeur y.

Solution

(a) **méthode**

‖ On vérifie que f admet un minimum dans $]a\,;b[$.



La fonction f est continue sur le segment $[a\,;b]$, elle y admet donc un minimum en un certain $c \in [a\,;b]$. Montrons que c n'est ni en a, ni en b.

Puisque $f'(a) < 0$, la fonction f prend des valeurs strictement inférieures à $f(a)$ à droite de a. On en déduit $c \neq a$. De même, $f'(b) > 0$ permet d'affirmer $c \neq b$.

Ainsi, c est un point intérieur à l'intervalle $]a\,;b[$. De plus f est dérivable en c et y admet un extremum : la dérivée de f s'annule en c (Th. 3 p. 259).

(b) **méthode**

‖ Par l'introduction d'une fonction auxiliaire on se ramène à l'étude précédente.

Quitte à considérer $-f$, on peut supposer $f'(a) < f'(b)$. Soit y strictement compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$ et φ la fonction définie sur $[a\,;b]$ par $\varphi(t) = f(t) - yt$. La fonction φ est dérivable sur $[a\,;b]$ avec $\varphi'(a) = f'(a) - y < 0$ et $\varphi'(b) = f'(b) - y > 0$. L'étude ci-dessus assure que la dérivée de φ s'annule et qu'il existe donc $c \in]a\,;b[$ tel que $f'(c) = y$.

1. Voir sujet 16 ci-dessus.

Exercice 20 ** (Écart à la corde)
Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $\varphi\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ la fonction affine prenant les mêmes valeurs que f en a et b.

(a) Montrer que, pour tout $x_0 \in [a\,;b]$, il existe $c \in \,]a\,;b[$ tel que

$$f(x_0) - \varphi(x_0) = \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2} f''(c).$$

(b) En déduire que pour tout $x \in [a\,;b]$

$$\left|f(x) - \varphi(x)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{8} \sup_{[a;b]} |f''|\,.$$

Solution

(a) Si $x_0 = a$ ou $x_0 = b$ n'importe quelle valeur de c convient. Supposons désormais[1] x_0 élément de $]a\,;b[$.

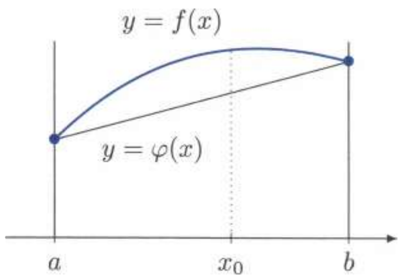
méthode

> On applique le théorème de Rolle à la fonction
>
> $$g\colon x \mapsto f(x) - \varphi(x) - \frac{(x-a)(x-b)}{2} K$$
>
> où la constante K est choisie de sorte que $g(x_0) = 0$.

On peut effectivement introduire un réel K tel que voulu : il suffit de résoudre l'équation $g(x_0) = 0$ pour déterminer la valeur de K :

$$K = 2\frac{f(x_0) - \varphi(x_0)}{(x_0 - a)(x_0 - b)}.$$

La fonction g alors introduite est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a\,;b]$ et s'annule en les trois points distincts a, x_0 et b. On applique alors le théorème de Rolle entre a et x_0 d'une part, et entre x_0 et b d'autre part. Ceci détermine deux réels $\alpha < \beta$ dans $]a\,;b[$ où g' s'annule. On applique ensuite le théorème de Rolle à g' entre α et β afin de déterminer $c \in \,]a\,;b[$ tel que $g''(c) = 0$. Puisque la fonction φ est affine, $\varphi''(c) = 0$ et l'égalité $g''(c) = 0$ donne $K = f''(c)$. L'égalité $g(x_0) = 0$ exprime alors la relation voulue.



1. On écarte les cas $x_0 = a$ ou b de la suite de l'étude afin notamment de pouvoir diviser par $(x_0 - a)(x_0 - b)$.

(b) Notons que la borne supérieure introduite existe car la fonction f'' est continue sur le segment $[a\,;b]$. Par l'étude ci-dessus, on a pour tout $x \in [a\,;b]$

$$\left|f(x) - \varphi(x)\right| \leqslant \frac{(x-a)(b-x)}{2} \sup_{[a;b]} |f''|\,.$$

Or la fonction $x \mapsto (x-a)(b-x)$ est maximale en $x = \frac{a+b}{2}$ et donc

$$\left|f(x) - \varphi(x)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{8} \sup_{[a;b]} |f''|\,.$$

8.6.4 Accroissements finis

Exercice 21 *

Soit $f : [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction bornée et dérivable. On suppose que la dérivée f' admet une limite ℓ en $+\infty$. Déterminer la valeur de celle-ci.

Solution

méthode

On applique le théorème des accroissements finis (Th. 5 p. 259) entre deux valeurs s'échappant à l'infini.

Soit x un réel strictement positif. La fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ donc continue sur $[x\,;2x]$ et dérivable sur $]x\,;2x[$. Par le théorème des accroissements finis, il existe[1] c_x strictement compris entre x et $2x$ tel que

$$f(2x) - f(x) = f'(c_x) \times (2x - x).$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, l'élément c_x tend aussi vers $+\infty$ car il est minoré par x et donc, par composition de limites, $f'(c_x)$ tend vers ℓ. Cependant,

$$f'(c_x) = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \times \underbrace{\big(f(2x) - f(x)\big)}_{\text{bornée}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

Par unicité de la limite, on conclut $\ell = 0$.

Exercice 22 **

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que pour tout réel x, il existe $c > 0$ vérifiant

$$f(x) - f(-x) = x\big(f'(c) + f'(-c)\big).$$

1. La valeur de c_x est fonction de x : pour souligner cette dépendance, on adopte une notation indicée.

Solution

méthode

On applique le théorème des accroissements finis à une fonction auxiliaire bien choisie.

Soit $\varphi\colon [0\,;+\infty[\ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par la relation $\varphi(x) = f(x) - f(-x)$. La fonction φ est dérivable avec $\varphi'(x) = f'(x) + f'(-x)$.

Soit x un réel.

Cas : $x = 0$. N'importe quelle valeur de c convient.

Cas : $x > 0$. On applique le théorème des accroissements finis à l'application φ entre 0 et x et l'on peut affirmer qu'il existe $c \in \,]0\,;x[$ tel que

$$\varphi(x) - \varphi(0) = x\varphi'(c) \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(x) - f(-x) = x\big(f'(c) + f'(-c)\big).$$

Cas : $x < 0$. Par passage à l'opposé, on prend la valeur de c déterminée pour $-x$.

Exercice 23 **

Soit $f\colon [a\,;b] \to [a\,;b]$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\left|f'(x)\right| < 1$ pour tout $x \in [a\,;b]$.

(a) Montrer que f admet un point fixe unique α.

(b) Montrer, pour tout $u_0 \in [a\,;b]$, la convergence vers α de la suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Solution

(a) On montre l'existence d'un point fixe en constatant l'annulation[1] de la fonction auxiliaire $x \mapsto f(x) - x$.

Montrons l'unicité en raisonnant par l'absurde. Supposons que f possède deux points fixes α et β avec $\alpha < \beta$. Par application du théorème des accroissements finis, il existe un réel c strictement compris entre α et β tel que

$$f(\beta) - f(\alpha) = f'(c)(\beta - \alpha) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \beta - \alpha = f'(c)(\beta - \alpha).$$

On en déduit $f'(c) = 1$ ce qui contredit l'hypothèse $\left|f'(x)\right| < 1$ pour tout x de $[a\,;b]$.

(b) Par application du théorème des accroissements finis, on peut établir

$$|u_{n+1} - \alpha| = \left|f(u_n) - f(\alpha)\right| < |u_n - \alpha| \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

mais cette inégalité stricte ne suffit pas pour conclure...

méthode

Par argument de continuité, on « renforce » l'hypothèse $\left|f'(x)\right| < 1$.

La fonction $x \mapsto \left|f'(x)\right|$ est continue sur le segment $[a\,;b]$, elle y admet donc un maximum en un point $c \in [a\,;b]$. En posant $M = \left|f'(c)\right|$, on peut affirmer $\left|f'(x)\right| \leqslant M$

1. Voir sujet 15 p. 246.

pour tout $x \in [a\,;b]$ avec $M \in [0\,;1[$: ceci est notoirement plus fort que l'hypothèse de départ.

Par l'inégalité des accroissements finis, la fonction f est M-lipschitzienne et l'on a pour tout naturel n

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant M|u_n - \alpha|.$$

Par récurrence, on obtient $|u_n - \alpha| \leqslant M^n\,|u_0 - \alpha|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec (M^n) de limite nulle quand n tend vers l'infini. On peut conclure que (u_n) tend vers α.

Exercice 24 **

Soit $f\colon [0\,;1] \to [0\,;1]$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de dérivée strictement positive et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'on peut trouver une famille $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ vérifiant

$$\forall k \in [\![1\,;n]\!],\ \frac{k-1}{n} < f(x_k) < \frac{k}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(x_k)} = n.$$

Solution

On peut introduire la bijection réciproque f^{-1} et celle-ci est dérivable car la dérivée de f ne s'annule pas (Th. 3 p. 40). De plus, on sait

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

méthode

On applique le théorème des accroissements finis à f^{-1} entre $\frac{k-1}{n}$ et $\frac{k}{n}$.

Soit $k \in [\![1\,;n]\!]$. Il existe y_k strictement compris entre $\frac{k-1}{n}$ et $\frac{k}{n}$ tel que

$$f^{-1}\left(\frac{k}{n}\right) - f^{-1}\left(\frac{k-1}{n}\right) = (f^{-1})'(y_k) \times \underbrace{\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right)}_{=1/n}.$$

Posons alors $x_k = f^{-1}(y_k)$, on a

$$\frac{k-1}{n} \leqslant f(x_k) \leqslant \frac{k}{n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{f'(x_k)} = (f^{-1})'(y_k)$$

donc

$$\underbrace{f^{-1}(1) - f^{-1}(0)}_{=1-0} = \sum_{k=1}^{n}\left(f^{-1}\left(\frac{k}{n}\right) - f^{-1}\left(\frac{k-1}{n}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(x_k)} \cdot \frac{1}{n}$$

ce qui permet de conclure.

8.7 Exercices d'approfondissement

Exercice 25 **

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-x^2}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme réel P_n tel que

$$f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que P_n possède exactement n racines réelles.

Solution

Par composition de fonctions qui le sont, la fonction f est indéfiniment dérivable. On montre l'existence du polynôme P_n exprimant sa dérivée d'ordre n en raisonnant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, le polynôme $P_0(X) = 1$ convient.

Supposons l'existence du polynôme P_n vraie au rang $n \geqslant 0$. On peut donc écrire

$$f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En dérivant, on obtient

$$f^{(n+1)}(x) = \big(P_n'(x) - 2xP_n(x)\big)e^{-x^2}.$$

Le polynôme $P_{n+1}(X) = P_n'(X) - 2XP_n(X)$ convient alors au rang $n+1$. La récurrence est établie.

La formule de récurrence exprimant P_{n+1} en fonction de P_n permet d'établir que le polynôme P_n est de degré n exactement. Il possède donc au plus n racines réelles.

méthode

> On montre par récurrence que P_n possède au moins n racines réelles en appliquant le théorème de Rolle entre les infinis et les racines obtenues au rang précédent.

Pour $n = 0$, le polynôme P_0 possède au moins 0 racines.

Au rang $n \geqslant 0$, supposons que le polynôme P_n possède au moins n racines. La dérivée $f^{(n)}$ s'annule alors au moins n fois en des réels $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. De plus, par croissances comparées, cette fonction est de limite nulle en $+\infty$ et en $-\infty$. En appliquant le théorème de Rolle entre les x_k et x_{k+1} (pour $k \in [\![1\,;n-1]\!]$) on obtient $n-1$ annulations pour $f^{(n+1)}$. En appliquant le théorème de Rolle dans sa version généralisée[1] entre $-\infty$ et x_1 d'une part, et entre x_n et $+\infty$ d'autre part, on obtient deux nouvelles annulations de $f^{(n+1)}$. Chacune de ces annulations correspond à une racine de P_{n+1} car le facteur exponentiel ne s'annule pas. Au final, P_{n+1} possède au moins $n+1$ racines.

La récurrence est établie.

1. Voir sujet 16 p. 275.

Exercice 26 **

Soit $f\colon]0\,;1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose

$$f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \ell \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad xf'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \ell' \in \mathbb{R}.$$

Que dire de ℓ' ?

Solution

méthode

‖ On étudie[1] la fonction $x \mapsto xf(x)$ au voisinage de 0.

Posons $g :]0\,;1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = xf(x)$. Puisque la fonction f admet une limite finie en 0^+, on peut prolonger g par continuité en posant $g(0) = 0$. Aussi, la fonction g est dérivable sur $]0\,;1]$ avec

$$g'(x) = f(x) + xf'(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} \ell + \ell'.$$

Par le théorème de la limite de la dérivée, on peut affirmer que ce prolongement est dérivable en 0 avec $g'(0) = \ell + \ell'$. On a alors

$$\frac{g(x)}{x} = f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \ell \quad \text{et} \quad \frac{g(x)}{x} = \frac{g(x) - g(0)}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} g'(0) = \ell + \ell'.$$

On en déduit $\ell' = 0$.

Exercice 27 ** (Fonction höldérienne)

Une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est dite *höldérienne d'exposant* $\alpha > 0$ s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \left|f(y) - f(x)\right| \leqslant M\left|y - x\right|^{\alpha}.$$

(a) Montrer qu'une fonction $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ est höldérienne d'exposant 1.

(b) Démontrer que les fonctions höldériennes d'exposant > 1 sont constantes.

(c) On considère la fonction $f\colon x \mapsto x\ln x$ définie sur $]0\,;1]$.
Montrer que la fonction f n'est pas höldérienne d'exposant 1.

(d) Vérifier cependant que f est höldérienne d'exposant α pour tout $\alpha \in]0\,;1[$.

Solution

(a) **méthode**

‖ Une fonction höldérienne d'exposant 1 est une fonction lipschitzienne.

La fonction f' est continue sur le segment $[a\,;b]$ donc bornée. En introduisant M la borne supérieure de $|f'|$ sur $[a\,;b]$, l'inégalité des accroissements finis assure que f est M-lipschitzienne et donc höldérienne d'exposant $\alpha = 1$.

1. On peut aussi appliquer le théorème des accroissements finis à f entre x et $2x$ ce qui introduit c_x compris entre x et $2x$ tel que $xf'(c_x)$ tend vers 0.

(b) Supposons $f\colon I \to \mathbb{R}$ höldérienne d'exposant $\alpha > 1$. Pour tout $x \in I$

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \leqslant M\,|h|^{\alpha-1} \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

La fonction f est donc dérivable et sa dérivée est nulle sur l'intervalle I. C'est une fonction constante.

(c) **méthode**

On raisonne par l'absurde en constatant que la lipshitzianité de $x \mapsto x \ln x$ est incompatible avec les propriétés connues du logarithme.

Par l'absurde, supposons $f\colon x \mapsto x\ln x$ höldérienne d'exposant 1. On peut donc introduire $M \in \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \left]0\,;1\right]^2, \quad \left|y\ln y - x\ln x\right| \leqslant M\,|y-x|$$

En particulier, pour $y = 2x$, on obtient

$$\forall x \in \left]0\,;1/2\right], \quad |x\ln x + 2x\ln 2| \leqslant Mx.$$

En simplifiant par x puis en faisant tendre x vers 0 par valeurs supérieures, on conclut à l'absurdité $+\infty \leqslant M$.

(d) Soit $\alpha \in \left]0\,;1\right[$ et $x, y \in \left]0\,;1\right]$. Quitte à échanger, on peut supposer $x \leqslant y$ et écrire

$$y\ln y - x\ln x = (y-x)\ln y + x\ln\left(1 + \frac{y-x}{x}\right).$$

méthode

On fait apparaître le facteur $y - x$ puis $(y-x)^\alpha$.

Or, on sait[1] $\ln(1+u) \leqslant u$ pour tout $u > -1$, et donc

$$|y\ln y - x\ln x| \leqslant (y-x)\big(|\ln y| + 1\big)$$

puis on fait apparaître l'exposant α

$$|y\ln y - x\ln x| = \underbrace{|y-x|^{1-\alpha}\,\big(1 + |\ln y|\big)}_{=M(x,y)} \times |y-x|^\alpha\,.$$

Puisque $0 \leqslant y - x \leqslant y$ et $1 - \alpha \geqslant 0$, on obtient

$$M(x,y) \leqslant \underbrace{y^{1-\alpha}\big(1 + |\ln y|\big)}_{=\varphi(y)}.$$

1. Voir sujet 3 p. 15.

La fonction φ ainsi introduite est définie et continue sur $]0\,;1]$. Elle se prolonge par continuité en 0 par la valeur 0 car $1-\alpha>0$. Cette fonction est donc bornée car continue sur un segment et l'on peut introduire $M\in\mathbb{R}_+$ vérifiant $\varphi(y)\leqslant M$ pour tout y. On obtient alors la propriété attendue

$$\forall(x,y)\in\,]0\,;1]^2,\quad \left|f(y)-f(x)\right|\leqslant M\,|y-x|^\alpha\,.$$

Exercice 28 **

Déterminer les fonctions $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables vérifiant $f\circ f=f$.

Solution

méthode

‖ Les fonctions solutions sont égales à l'identité sur leur image.

Soit f une fonction solution. Pour $x\in\operatorname{Im}(f)$, on peut introduire un antécédent a de x par f et alors $f(x)=f\big(f(a)\big)=f(a)=x$. Ainsi, f est égale à l'identité sur son image.

Dans la suite, nous allons montrer que si $\operatorname{Im}(f)$ n'est pas singleton, alors $\operatorname{Im}(f)=\mathbb{R}$.

En tant qu'image d'un intervalle par une fonction continue, on sait que $\operatorname{Im}(f)$ est un intervalle. Supposons que celui-ci ne soit pas un singleton et introduisons x_0 un élément intérieur à $\operatorname{Im}(f)$. Si l'intervalle image de f est majoré, on peut introduire son extrémité droite b.

méthode

‖ On montre que b est élément de $\operatorname{Im}(f)$.

On peut affirmer $[x_0\,;b[\,\subset\operatorname{Im}(f)$ car $\operatorname{Im}(f)$ est un intervalle. On a alors $f(x)=x$ pour tout $x\in[x_0\,;b[$ et donc, par passage à la limite et continuité, cette identité vaut aussi pour $x=b$. Ainsi, $b\in\operatorname{Im}(f)$.

Mais alors, d'une part $f'(b)=1$ car on a $f(x)=x$ au voisinage à gauche de b et, d'autre part, on a $f'(b)=0$ car f est maximale en b. C'est absurde et l'on peut affirmer que l'intervalle $\operatorname{Im}(f)$ n'est pas majoré. On montre de même qu'il n'est pas minoré et c'est donc l'intervalle $\mathbb{R}$.

En résumé, si l'intervalle $\operatorname{Im}(f)$ est un singleton, la fonction f est constante, sinon $\operatorname{Im}(f)=\mathbb{R}$ et f est l'application identité de $\mathbb{R}$. La réciproque est immédiate.

Exercice 29 ***

Soit $h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application[1] déterminée par $h(x)=\omega+a(x-\omega)$ avec $a,\omega\in\mathbb{R}$ et $a\notin\{0,1\}$.

On note S l'ensemble des fonctions $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables et telles que $f\circ f=h$.

(a) Vérifier que si $f\in S$ alors ω est point fixe de f.

(b) Montrer que S est vide lorsque $a<0$.

On suppose désormais $a>0$ (et toujours $a\neq1$).

(c) Soit $f\in S$. Montrer $h^{-1}\circ f\circ h=f$. En déduire une expression de f en commençant par le cas $0<a<1$.

1. L'application h se comprend comme une homothétie de centre ω et de rapport a définie sur la

Solution

(a) On vérifie aisément que le réel ω est l'unique point fixe de h. Si f admet un point fixe alors celui-ci est aussi point fixe de $f \circ f = h$ et est donc égal à ω.

méthode

Il suffit de montrer l'existence d'un point fixe à la fonction f.

Par l'absurde, si $f(x) < x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f\big(f(x)\big) < f(x) < x$ et donc $h(x) < x$. Ceci contredit l'égalité $h(\omega) = \omega$. De même, $f(x) > x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est impossible. La fonction continue $x \mapsto f(x) - x$ change donc de signe et par conséquent s'annule. Ainsi, la fonction f admet un point fixe qui, comme on l'a vu plus haut, est nécessairement ω.

(b) Soit f une solution de l'équation $f \circ f = h$. En dérivant cette relation, on obtient

$$f'(x)f'\big(f(x)\big) = a.$$

En particularisant en $x = \omega$, il vient $a = f'(\omega)^2$ et donc $a > 0$. En conséquence, si $a < 0$, il n'existe[1] pas de solutions dérivables à l'équation $f \circ f = h$.

(c) Puisque $f \circ f = h$, on a

$$h^{-1} \circ f \circ h = h^{-1} \circ f \circ (f \circ f) = h^{-1} \circ (f \circ f) \circ f = h^{-1} \circ h \circ f = f.$$

En répétant le calcul précédent, il vient[2] pour tout naturel n

$$f = \left(h^{-1}\right)^n \circ f \circ h^n$$

avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h^n(x) = \omega + a^n(x - \omega) \quad \text{et} \quad \left(h^{-1}\right)^n(x) = \omega + a^{-n}(x - \omega).$$

méthode

Lorsque $a \in \left]0\,;1\right[$, la relation $f = \left(h^{-1}\right)^n \circ f \circ h^n$ permet d'exprimer globalement f à partir de sa connaissance au voisinage de ω.

Supposons $a \in \left]0\,;1\right[$. Pour x réel, on peut écrire

$$f(x) = \Big(\left(h^{-1}\right)^n \circ f \circ h^n\Big)(x) = \left(h^{-1}\right)^n \circ f\big(\omega + a^n(x - \omega)\big).$$

Par dérivabilité de la fonction f en ω, on a le développement limité à l'ordre 1

$$f(\omega + t) = \underbrace{f(\omega)}_{=\omega} + tf'(\omega) + t\varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad \varepsilon \text{ une fonction de limite nulle en } 0.$$

---

droite réelle.

1. Un raisonnement sans dérivation est possible : la fonction h étant bijective, la fonction f l'est aussi et, puisque continue, elle est strictement monotone. L'application $h = f \circ f$ est alors strictement croissante et donc $a > 0$.

2. Ici, h^n désigne le produit de composition $h \circ h \circ \cdots \circ h$ à n facteurs.

On en déduit par substitution

$$f\big(\omega + a^n(x-\omega)\big) = \omega + a^n(x-\omega)f'(\omega) + a^n(x-\omega)\varepsilon\big(a^n(x-\omega)\big)$$

puis

$$f(x) = \omega + (x-\omega)f'(\omega) + (x-\omega)\varepsilon\big(\underbrace{a^n(x-\omega)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}\big).$$

En passant à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient l'écriture

$$f(x) = \omega + f'(\omega)(x-\omega)$$

avec, comme on l'a vu ci-dessus, $\big(f'(\omega)\big)^2 = a$ ce qui donne $f'(\omega) = \pm\sqrt{a}$.

Finalement, la fonction f vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \omega + \sqrt{a}(x-\omega) \quad \text{ou} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \omega - \sqrt{a}(x-\omega).$$

La réciproque est immédiate.

Le cas $a > 1$ se résout selon le même principe en partant de la relation $h \circ f \circ h^{-1} = f$. On parvient à la même conclusion.

Exercice 30 ***

Soit $f\colon [a\,;b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable à droite en tout point.

(a) Montrer que f est strictement croissante si $f'_d(x) > 0$ pour tout $x \in [a\,;b[$.

(b) Montrer que f est croissante si $f'_d(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a\,;b[$.

Solution

(a) Soit x et y dans $[a\,;b[$ avec $x < y$. On veut montrer $f(x) < f(y)$.

méthode

‖ On introduit le maximum de f sur $[x\,;y]$.

La fonction f est continue sur le segment $[x\,;y]$, elle y admet donc un maximum en un certain $c \in [x\,;y]$. Si $c \neq y$ alors la fonction f prend des valeurs inférieures à $f(c)$ à droite de c et donc $f'_d(c) \leqslant 0$. C'est absurde. On en déduit que le maximum de f sur $[x\,;y]$ est atteint en y et seulement en y. En particulier, $f(x) < f(y)$.

(b) **méthode**

‖ On se ramène à la situation précédente en considérant $f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon x$ avec $\varepsilon > 0$ petit.

Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f_ε introduite vérifie les hypothèses de la question précédente, elle est donc strictement croissante. Ainsi, pour $x < y$ dans $[a\,;b[$, on a $f_\varepsilon(x) < f_\varepsilon(y)$. Cette propriété valant pour tout $\varepsilon > 0$, on peut faire tendre ε vers 0 par valeurs supérieures et affirmer $f(x) \leqslant f(y)$. Finalement, f est croissante.

CHAPITRE 9

Calcul asymptotique

9.1 Comparaisons des suites numériques

Les suites (u_n), (v_n) et (w_n) introduites ici sont des suites réelles ou complexes définies à partir d'un certain rang.

9.1.1 Négligeabilité

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est *négligeable devant une suite*[1] (w_n) lorsqu'il existe une suite (ε_n) de limite nulle permettant d'écrire $u_n = \varepsilon_n w_n$ à partir d'un certain rang. On note alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(w_n)$$

ou encore $u_n = \mathrm{o}(w_n)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le paramètre n décrivant les suites.

Ecrire $u_n = \mathrm{o}(1)$ signifie que la suite (u_n) est de limite nulle.

Théorème 1

Lorsque la suite (w_n) est à termes non nuls à partir d'un certain rang

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(w_n) \iff \frac{u_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

1. On dit à l'inverse que (w_n) est *prépondérante* sur (u_n).

Dans l'écriture $u_n = o(w_n)$ l'égalité est à manier avec précaution, elle se comprend comme une appartenance : « (u_n) fait partie de l'ensemble des suites négligeables devant (w_n) ». Pour cette raison, si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, on ne peut pas affirmer que les suites (u_n) et (v_n) sont égales. Pour cette raison aussi, les négligeabilités ne se simplifient jamais lors des calculs.

9.1.2 Domination

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est *dominée par une suite* (w_n) lorsqu'il existe une suite (φ_n) bornée permettant d'écrire $u_n = \varphi_n w_n$ à partir d'un certain rang. On note alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n) \quad \text{ou} \quad u_n = O(w_n).$$

Écrire $u_n = O(1)$ signifie que la suite (u_n) est bornée.

Théorème 2

Lorsque la suite (w_n) est à termes non nuls à partir d'un certain rang

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n) \iff \left(\frac{u_n}{w_n}\right) \text{ est une suite bornée.}$$

Si $u_n = o(w_n)$ alors $u_n = O(w_n)$.

9.1.3 Opérations sur les comparaisons

Théorème 3

Si $u_n = o(v_n)$ et si $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.
Si $u_n = O(v_n)$ et si $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.
Si $u_n = o(v_n)$ et si $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.
Si $u_n = O(v_n)$ et si $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = O(w_n)$.

Ces transitivités permettent de simplifier les contenus des $o(.)$ et $O(.)$. Par exemple, il n'est pas usuel d'écrire $o(2n)$ ou $o\big((-1)^n n\big)$, on préférera écrire simplement $o(n)$.

Théorème 4

Si $u_n = o(w_n)$ alors $\lambda u_n = o(w_n)$ pour tout λ réel ou complexe.
Si $u_n = o(w_n)$ et si $v_n = o(w_n)$ alors $u_n + v_n = o(w_n)$.
Si $u_n = o(w_n)$ alors $u_n v_n = o(v_n w_n)$.
Si $u_n = o(w_n)$ et si ces suites ne s'annulent pas alors $1/w_n = o(1/u_n)$.

Ces propriétés peuvent aussi s'énoncer en termes de domination.

9.1.4 Comparaisons usuelles

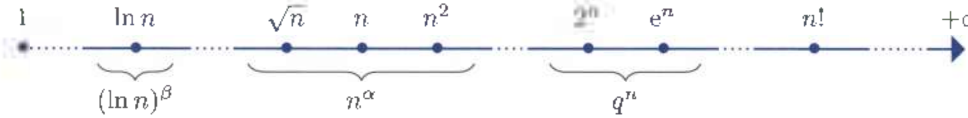
Comparaison d'expressions similaires ($\alpha < \beta \in \mathbb{R}$, $0 < q < r$) :

$$n^\alpha = \mathrm{o}(n^\beta), \quad (\ln n)^\alpha = \mathrm{o}\big((\ln n)^\beta\big) \quad \text{et} \quad q^n = \mathrm{o}(r^n).$$

Comparaison d'expressions de limites infinies ($\alpha, \beta > 0$ et $q > 1$) :

$$(\ln n)^\beta = \mathrm{o}(n^\alpha), \quad n^\alpha = \mathrm{o}(q^n) \quad \text{et} \quad q^n = \mathrm{o}(n!).$$

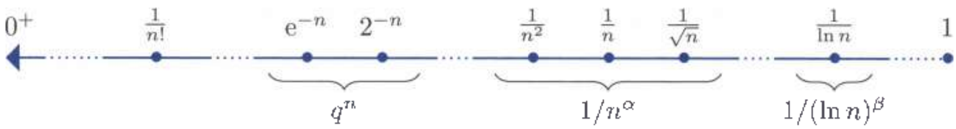
On peut visualiser ces comparaisons par l'échelle asymptotique figurée ci-dessous :



Comparaison d'expressions de limites nulles ($\alpha, \beta > 0$ et $q \in]0\,;1[$) :

$$\frac{1}{n!} = \mathrm{o}(q^n), \quad q^n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{n^\alpha} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{(\ln n)^\beta}\right).$$

On peut visualiser :



9.1.5 Équivalence

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est *équivalente* à une suite (v_n) lorsque

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + \mathrm{o}(v_n).$$

On note alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \text{ou} \quad u_n \sim v_n.$$

L'équivalence de suites définit une relation d'équivalence[1] sur l'ensemble des suites numériques.

Théorème 5

Lorsque la suite (v_n) est à termes non nuls à partir d'un certain rang

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Les équivalents usuels sont listés p. 423.

1. En particulier, c'est une relation symétrique et donc $u_n = v_n + \mathrm{o}(v_n) \iff v_n = u_n + \mathrm{o}(u_n)$.

9.1.6 Propriétés des équivalents

Théorème 6
Si deux suites sont équivalentes et si l'une d'elles admet une limite, les deux suites possèdent la même limite.

À l'inverse, deux suites possédant la même limite *finie* et *non nulle* sont équivalentes.

En revanche, deux suites de limites nulles (ou de limites infinies) ne sont pas *a priori* équivalentes.

Théorème 7
Si deux suites réelles sont équivalentes, leurs termes sont de même signe à partir d'un certain rang.

Si deux suites sont équivalentes, elles se dominent mutuellement. La réciproque n'est pas vraie.

9.1.7 Opérations sur les équivalents

L'équivalence des suites est compatible avec les opérations multiplicatives :

Théorème 8
Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n w_n \sim v_n w_n$ pour toute suite (w_n).
Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ pour tout exposant α pour lequel ceci a un sens [1].

L'équivalence des suites n'est pas compatible avec l'addition :

$$u_n \sim v_n \not\Rightarrow u_n + w_n \sim v_n - w_n.$$

9.1.8 Formule de Stirling

Théorème 9 (Formule de Stirling)

$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

9.2 Comparaisons des fonctions numériques

I désigne un intervalle réel non vide et non réduit à un point et a désigne une extrémité de I éventuellement infinie. Les fonctions f, g et h considérées ici sont définies sur I et à valeurs réelles ou complexes.

1. Lorsque α est un réel non entier, on suppose les suites à termes positifs. Lorsque α est négatif, on suppose que les suites ne s'annulent pas.

9.2.1 Négligeabilité et domination

Définition

On dit qu'une fonction f est *négligeable devant une fonction* h en a s'il existe une fonction ε de limite nulle en a permettant d'écrire $f(x) = \varepsilon(x)h(x)$ au voisinage[1] de a. On note alors

$$f \underset{a}{=} \mathrm{o}(h) \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\big(h(x)\big).$$

Écrire $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(1)$ signifie que f tend vers 0 en a.

Théorème 10

Lorsque la fonction h ne s'annule pas sur un voisinage de a, sauf peut-être en a et concomitamment à f

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\big(h(x)\big) \iff \frac{f(x)}{h(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0.$$

Définition

On dit qu'une fonction f est *dominée par une fonction* h en a s'il existe une fonction φ bornée permettant d'écrire $f(x) = \varphi(x)h(x)$ au voisinage de a. On note alors

$$f \underset{a}{=} \mathrm{O}(h) \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}\big(h(x)\big).$$

Écrire $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}(1)$ signifie que f est bornée au voisinage de a.

Les propriétés énoncées dans le cadre des suites se généralisent au cadre des fonctions. En particulier, lors de l'usage des notations $\mathrm{o}(.)$ et $\mathrm{O}(.)$ l'égalité n'est pas symétrique. Écrire $\mathrm{o}(h) = \mathrm{O}(h)$ signifie qu'une fonction négligeable devant h est *a fortiori* dominée par h et non l'inverse !

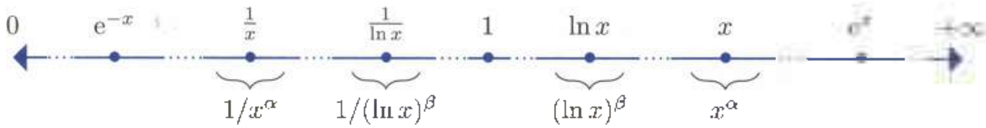
9.2.2 Comparaisons usuelles en $+\infty$

Les comparaisons quand x tend vers $+\infty$ sont similaires à celles vues pour les suites. Pour $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$

$$(\ln x)^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\big((\ln x)^\beta\big) \quad \text{et} \quad x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\big(x^\beta\big).$$

Pour $\alpha, \beta > 0$

$$\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right),\quad \frac{1}{x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{(\ln x)^\beta}\right),\quad (\ln x)^\beta \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\big(x^\alpha\big) \quad \text{et} \quad x^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\big(\mathrm{e}^x\big).$$



1. Lorsque $a \in \mathbb{R}$, l'égalité est vérifiée sur un intervalle de la forme $I \cap [a-\alpha\,;a+\alpha]$ pour un certain $\alpha > 0$. Lorsque $a = +\infty$, c'est un intervalle $I \cap [A\,;+\infty[$ pour $A \in \mathbb{R}$. Lorsque $a = -\infty$, c'est $I \cap]-\infty\,;A]$.

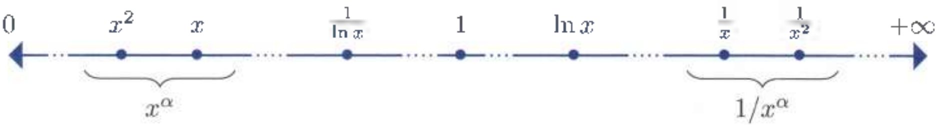
9.2.3 Comparaisons usuelles en 0^+

Les comparaisons quand x tend 0^+ ne sont pas les mêmes qu'en $+\infty$.
Pour $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$

$$x^\beta \underset{x \to 0^+}{=} \mathrm{o}(x^\alpha).$$

Pour $\alpha > 0$

$$x^\alpha \underset{x \to 0^+}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{\ln x}\right) \quad \text{et} \quad \ln x \underset{x \to 0^+}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right).$$



9.2.4 Équivalence

Définition

> On dit qu'une fonction f est équivalente à une fonction g en a si l'on peut écrire
>
> $$f(x) \underset{x \to a}{=} g(x) + \mathrm{o}\big(g(x)\big).$$
>
> On note alors
>
> $$f \underset{a}{\sim} g \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x).$$

Théorème 11

Lorsque la fonction g ne s'annule pas sur un voisinage de a, sauf peut-être en a et concomitamment à f

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 1.$$

Les propriétés de l'équivalence des fonctions sont les mêmes que celles de l'équivalence des suites. En particulier, l'équivalence de fonctions est une relation d'équivalence compatible avec les opérations multiplicatives mais pas avec les opérations additives.

Les équivalents usuels en 0 sont listés p. 423.

9.2.5 Propriétés des équivalents

Théorème 12

Si deux fonctions sont équivalentes en a et si l'une d'elles admet une limite, les deux fonctions possèdent la même limite en a.

Inversement, deux fonctions admettant la même limite *finie* et *non nulle* en a sont équivalentes en a.
Deux fonctions de limites nulles (ou infinies) peuvent ne pas être équivalentes.

Théorème 13
Si deux fonctions réelles f et g sont équivalentes en a, il existe un voisinage de a sur lequel les valeurs $f(x)$ et $g(x)$ sont de même signe.

9.3 Développements limités

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I désigne un intervalle réel non vide et non réduit à un point. Enfin, n désigne un entier naturel.

9.3.1 Définition

Définition

On dit qu'une fonction $f\colon I \to \mathbb{K}$ admet un *développement limité à l'ordre* n en $a \in I$ s'il existe des scalaires $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ permettant d'écrire

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big).$$

Lorsqu'elle existe, cette écriture est unique ce qui permet de parler *du* développement limité à l'ordre n de f en a :

$$\begin{cases} f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big) \\ f(x) \underset{x \to a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_0 = b_0 \\ \quad\vdots \\ a_n = b_n. \end{cases}$$

Lorsque f admet un développement limité à l'ordre n en a, on peut former par *troncature* un développement limité à tout p ordre inférieur à n :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_p(x-a)^p + \mathrm{o}\big((x-a)^p\big).$$

Lors d'un calcul de développement limité, on ne développe jamais les puissances du terme $(x-a)$: les expressions $(x-a)^k$ sont intéressantes car on sait les hiérarchiser les unes vis-à-vis des autres au voisinage de a.

Un développement limité en 0 s'exprime sous la forme remarquable

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \mathrm{o}\big(x^n\big).$$

Par translation de la variable, ce sont essentiellement des développements limités en 0 qui sont étudiés [1].

On retrouvera les développements limités usuels en 0 dans le formulaire p. 423.

1. On remplaçant x par $1/x$, on parle parfois de *développements limités en l'infini*. Ceux-ci s'expriment $f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \mathrm{o}\big(\frac{1}{x^n}\big)$.

9.3.2 Formule de Taylor-Young

Théorème 14 (Formule de Taylor-Young)
Si $f : I \to \mathbb{K}$ est de classe C^n, f admet un développement limité à l'ordre n en tout point a de I de la forme

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big).$$

Ce résultat permet de justifier l'existence de développements limités voire de calculer ceux-ci lorsque les dérivées successives sont simples ou en raisonnant par coefficients inconnus.

9.3.3 Calcul de développements limités

On peut calculer le développement limité d'une combinaison linéaire de fonctions, d'un produit, d'une composition, d'un quotient, etc. Les techniques associées sont illustrées dans le sujet 7 p. 307.

Lors d'un calcul de développement limité le terme en o(.) est essentiel car c'est celui-ci qui détermine la précision des calculs (et donc les coefficients qui sont significatifs). On sera attentif, non seulement à ne pas éluder ce terme, mais aussi à étudier comment celui-ci évolue lors des calculs.

9.3.4 Intégration des développements limités

Théorème 15
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue définie en a admettant un développement limité à l'ordre n en a de la forme

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big).$$

Si F désigne une primitive de f, F admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en a de la forme

$$F(x) \underset{x \to a}{=} F(a) + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + o\big((x-a)^{n+1}\big).$$

Le développement de F est obtenu en « intégrant formellement » celui de f sans négliger la valeur de F en a comme « constante d'intégration ».

S'il est possible d'intégrer des développements limités, il n'est pas possible[1] de dériver ceux-ci !

1. Voir sujet 19 p. 322.

9.3.5 Notion de développement asymptotique

Un développement limité en $a \in \mathbb{R}$ est la décomposition d'une fonction sur l'*échelle* des termes $(x-a)^k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Cette décomposition est ordonnée de sorte que chaque nouveau terme soit négligeable devant celui qui précède. En élargissant le champ des fonctions sur lesquelles on autorise la décomposition, on obtient la notion de développement asymptotique :

Définition

> Soit $a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$. On appelle *développement asymptotique* d'une fonction définie au voisinage de a la décomposition de son expression en somme d'expressions « simples » ordonnées en négligeabilité croissante.

Un développement asymptotique se calcule de la même façon qu'un développement limité, seule l'échelle des fonctions selon laquelle on exprime le résultat est élargie.

9.3.6 Applications des développements limités

Équivalent, limite, signe

Le premier terme non nul d'un développement limité ou asymptotique constitue un équivalent simple de la fonction considérée. Celui-ci permet d'en étudier la limite et aussi le signe s'il s'agit d'une fonction réelle.

Prolongement d'une fonction

Théorème 16

Soit a un point de I ou une extrémité finie de I. Si une fonction f définie sur $I \setminus \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ admet un développement limité en a de la forme

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \mathrm{o}(x-a)$$

alors f peut être prolongée par continuité en a en posant $f(a) = a_0$ et ce prolongement est dérivable en a avec $f'(a) = a_1$.

Étude locale d'une fonction

Théorème 17

Si f est une fonction réelle définie sur I admettant en $a \in I$ un développement limité de la forme

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \mathrm{o}(x-a)$$

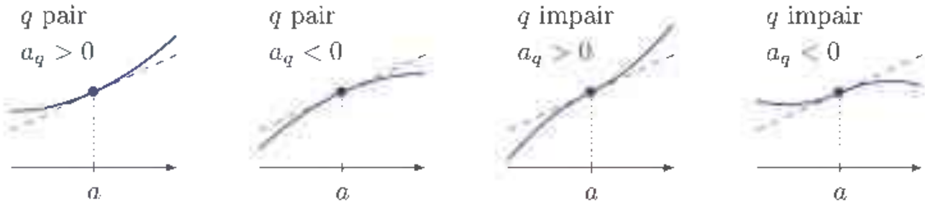
alors la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse a qui est la droite d'équation

$$y = a_0 + a_1(x-a).$$

S'il est possible d'approfondir le développement de f afin d'écrire

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_q(x-a)^q + \mathrm{o}\big((x-a)^q\big) \quad \text{avec} \quad q \geqslant 2 \text{ et } a_q \neq 0$$

on peut positionner la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de a :



En particulier, pour que f présente un extremum local en a, il faut $a_1 = 0$ et, si tel est le cas, il suffit que a_2 soit non nul pour qu'il y ait un extremum [1] en a.

Étude asymptotique

De façon analogue à ce qui précède, si l'on peut écrire pour une fonction réelle

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} a_0 x + a_1 + \mathrm{o}(1)$$

la courbe représentative de f tend à se rapprocher en l'infini de la droite d'équation

$$y = a_0 x + a_1.$$

On dit que celle-ci est *asymptote* à la courbe en $+\infty$.
En poursuivant le développement de f avec un troisième terme significatif, on peut préciser la position relative de la courbe vis-à-vis de cette asymptote.

9.4 Exercices d'apprentissage

9.4.1 Comparaisons de suites numériques

La relation de négligeabilité étant transitive, on peut utiliser la notation $u_n \ll v_n$ pour signifier que u_n est négligeable devant v_n et enchaîner les comparaisons. Par exemple, il est possible d'écrire $\ln n \ll n \ll \mathrm{e}^n$.

Exercice 1
En exploitant la notation $\ll$ classer par négligeabilité les termes généraux qui suivent :
(a) $n, n^2, \ln n, \mathrm{e}^n, n\ln n$ et $\dfrac{n^2}{\ln n}$ (b) $\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{\ln n}, \dfrac{\ln n}{n}, \dfrac{\ln n}{n^2}$ et $\dfrac{1}{n\ln n}$.

1. Plus précisément, ce sera un minimum local si $a_2 > 0$ et un maximum local si $a_2 < 0$.

Solution

(a) Les termes proposés sont tous de limite $+\infty$. Il s'agit ici de hiérarchiser ces infinis.

Grâce aux comparaisons présentées p. 291, on peut positionner les termes n, n^2, $\ln n$ et e^n les uns par rapport aux autres :

$$\ln n \ll n \ll n^2 \ll e^n.$$

Reste à insérer les termes produits $n \ln n$ et $\frac{n^2}{\ln n}$

méthode

‖ Les termes produits se positionnent « à proximité » du facteur dominant.

Dans le produit $n \ln n$, le facteur dominant est n. Puisque celui-ci est multiplié par $\ln n$ de limite $+\infty$, le terme $n \ln n$ prépondère sur n. Cependant, il ne va pas au delà du terme n^2 : il s'insère entre n et n^2

$$n \ll n \ln n \ll n^2.$$

On justifie cette comparaison, soit en étudiant les limites des quotients :

$$\frac{n}{n \ln n} = \frac{1}{\ln n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{n \ln n}{n^2} = \frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

soit en multipliant par n la comparaison connue $1 \ll \ln n \ll n$.

Le terme $\frac{n^2}{\ln n}$ s'insère à proximité de n^2, il est devant celui-ci car le facteur $\frac{1}{\ln n}$ est de limite nulle mais il n'est pas devant $n \ln n$ car ce dernier est « à proximité » de n alors que $\frac{n^2}{\ln n}$ l'est de n^2. Ainsi,

$$n \ln n \ll \frac{n^2}{\ln n} \ll n^2.$$

Ces comparaisons se justifient en étudiant, par exemple, la limite des quotients.

Finalement,

$$\ln n \ll n \ll n \ln n \ll \frac{n^2}{\ln n} \ll n^2 \ll e^n.$$

(b) Les termes proposés sont tous de limite nulle. Il s'agit ici de comparer les « vitesses » avec lesquelles ces suites tendent vers 0.

Grâce aux comparaisons usuelles on sait déjà

$$\frac{1}{n^2} \ll \frac{1}{n} \ll \frac{1}{\ln n}.$$

Le terme $\frac{\ln n}{n}$ se positionne à proximité de $\frac{1}{n}$ et lui est « supérieur » car $\ln n$ est de limite infinie. Le facteur $\frac{1}{n \ln n}$ figure aussi à proximité de $\frac{1}{n}$ mais lui est « inférieur » car $\frac{1}{\ln n}$ est de limite nulle. Enfin, $\frac{\ln n}{n^2}$ est voisin et plus grand que $\frac{1}{n^2}$. Au final,

$$\frac{1}{n^2} \ll \frac{\ln n}{n^2} \ll \frac{1}{n \ln n} \ll \frac{1}{n} \ll \frac{\ln n}{n} \ll \frac{1}{\ln n}.$$

Ces comparaisons se justifient en étudiant la limite des quotients des termes successifs.

Exercice 2

Réduire l'écriture des expressions asymptotiques suivantes :

(a) $\mathrm{o}(2n) - 2\mathrm{o}\big((-1)^n n\big)$ (b) $n\ln n + \mathrm{o}(n+1) + \mathrm{o}(n^2)$ (c) $2\mathrm{o}(n)\mathrm{O}(n) - n\mathrm{O}(n)$.

Solution

Les o(.) et O(.) sont compatibles avec les opérations algébriques.

(a) **méthode**

> Les constantes multipliant les o(.) ou à l'intérieur de ceux-ci peuvent être simplifiées. Il en est de même pour le facteur borné $(-1)^n$.

En prenant garde de ne pas simplifier[1] les o(.) on peut écrire

$$\mathrm{o}(2n) - 2\mathrm{o}\big((-1)^n n\big) = \mathrm{o}(n) - \mathrm{o}(n) = \mathrm{o}(n).$$

(b) **méthode**

> Les contenus de o(.) et O(.) peuvent être remplacés par des équivalents.

On peut écrire $\mathrm{o}(n+1) = \mathrm{o}(n)$ et puisque $n\ln n$ est négligeable devant n^2, on obtient

$$n\ln n + \mathrm{o}(n+1) + \mathrm{o}\big(n^2\big) = \mathrm{o}\big(n^2\big) + \mathrm{o}(n) + \mathrm{o}\big(n^2\big) = \mathrm{o}\big(n^2\big)$$

car un terme négligeable devant n l'est aussi devant n^2.

(c) **méthode**

> On peut multiplier les contenus des o(.) et O(.) par les facteurs qui les précèdent.

$$2\mathrm{o}(n)\mathrm{O}(n) - n\mathrm{O}(n) = \mathrm{o}\big(n^2\big) - \mathrm{O}\big(n^2\big) = \mathrm{O}\big(n^2\big).$$

Exercice 3

Déterminer des équivalents simples quand n tend vers l'infini des termes suivants :

(a) $\ln n + 2n - 1$ (b) $\dfrac{(1+\ln n)(3n^2+1)}{\sqrt{n^2+2n}}$ (c) $\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$

(d) $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$ (e) $\ln\big(2n^3+1\big)$ (f) $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

(g) $n\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ (h) $\ln(n+1) - \ln(n-1)$ (i) $(n+1)^n$.

1. Dans la notation o(.), la lettre o est là pour rappeler la présence d'un facteur ε qui tend vers 0. Ce facteur n'est pas exprimé et pour cette raison ne peut être simplifié.

Solution

(a) **méthode**

> Pour déterminer un équivalent d'une somme on cherche parmi ses termes celui qui l'emporte, c'est-à-dire celui devant lequel les autres sont négligeables. On obtient ainsi l'écriture
> $$v_n + \mathrm{o}(v_n) \sim v_n.$$

Le terme $\ln n$ est négligeable devant n, aussi l'est la constante 1. On peut donc écrire

$$\ln n + 2n - 1 \underset{n\to+\infty}{=} 2n + \mathrm{o}(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n.$$

Il importe dans cette expression de conserver le facteur 2 : les constantes multiplicatives ne se simplifient [1] pas dans la description d'un équivalent.

(b) **méthode**

> Le calcul des équivalents est compatible avec la multiplication et l'élévation aux puissances constantes : on détermine un équivalent en étudiant séparément chaque facteur.

On a

$$1 + \ln n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \mathrm{o}(\ln n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n, \quad 3n^2 + 1 \underset{n\to+\infty}{=} 3n^2 + \mathrm{o}(n^2) \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n^2$$

et

$$n^2 + 2n \underset{n\to+\infty}{=} n^2 + \mathrm{o}(n^2) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2 \quad \text{donc} \quad \sqrt{n^2+n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$

Par conséquent,

$$\frac{(\ln n + 1)(3n^2+1)}{\sqrt{n^2+2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3n^2 \ln n}{n} = 3n \ln n.$$

(c) Les termes $\frac{1}{n-1}$ et $\frac{1}{n+1}$ sont tous deux équivalents à $\frac{1}{n}$. Si l'on effectuait la différence, on affirmerait que celle-ci est équivalente à 0 ce qui est absurde [2] : les équivalents ne sont pas compatibles avec les opérations additives !

méthode

> Avant de calculer cet équivalent, on exprime autrement le terme étudié. Ici, on réduit au même dénominateur.

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2}{n^2-1} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{2}{n^2+\mathrm{o}(n^2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$$

1. Il y a équivalence lorsque le rapport tend 1 : les constantes multiplicatives sont essentielles.
2. Seule une suite stationnaire égale à 0 peut s'écrire à partir d'un certain comme le produit par 0 d'une suite ε de limite nulle.

(d) Les deux termes $\sqrt{n+1}$ et $\sqrt{n-1}$ sont équivalents à $\sqrt{n}$ et, lorsque l'on somme, ce terme principal ne se simplifie pas. Il n'est pas possible de sommer les équivalents, cependant le résultat de cette somme semble ici « crédible ».

méthode

> On exprime les équivalents qui précèdent avec un o(.) et l'on somme les expressions associées.

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n}+o(\sqrt{n})+\sqrt{n}+o(\sqrt{n}) = 2\sqrt{n}+o(\sqrt{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}.$$

(e) **méthode**

> On factorise le terme prépondérant du logarithme.

$$\ln(2n^3+1) = \underbrace{\ln 2}_{\text{constante}} + \underbrace{3\ln n}_{\to+\infty} + \underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{2n^3}\right)}_{\to 0} \underset{n\to+\infty}{=} 3\ln n + o(\ln n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 3\ln n.$$

(f) **méthode**

> Lorsque (u_n) est de limite nulle, on a $\ln(1+u_n)\sim u_n$.

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \quad \text{car} \quad \frac{1}{n}\to 0.$$

(g) **méthode**

> Lorsque (u_n) est de limite nulle[1], on a $\sin(u_n)\sim u_n$.

$$n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\times\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \quad \text{car} \quad \frac{1}{n^2}\to 0.$$

(h) On combine les deux logarithmes afin d'obtenir un équivalent de leur différence

$$\ln(n+1)-\ln(n-1) = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right).$$

méthode

> Le contenu du logarithme étant de limite 1, on peut l'écrire $1+u_n$ avec u_n de limite nulle auquel cas $\ln(1+u_n)\sim u_n$.

$$\ln(n+1)-\ln(n-1) = \ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n-1} \sim \frac{2}{n} \quad \text{car} \quad \frac{2}{n-1}\to 0.$$

1. Sous la même hypothèse, on peut aussi citer $e^{u_n}-1\sim u_n$, $1-\cos u_n\sim\frac{1}{2}u_n^2$, $(1+u_n)^\alpha-1\sim\alpha u_n$. Ces équivalents sont tous inspirés des premiers termes des développements limités usuels.

(i) Le terme $n+1$ est équivalent à n. On pourrait être tenté d'affirmer que $(n+1)^n$ est équivalent à n^n mais la puissance n'est pas constante : cette affirmation est fausse.

méthode

On ne peut pas élever un équivalent à une puissance non constante, ni le passer à l'exponentielle.

On factorise n^n et l'on étudie la limite du facteur introduit

$$(n+1)^n = n^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

On résout la forme indéterminée « $1^{+\infty}$ » en passant en écriture exponentielle

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{avec} \quad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

On a donc par produit d'équivalents

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

puis, par composition[1] de limites,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}.$$

méthode

Une limite finie non nulle exprime aussi un équivalent (Th. 6 p. 292).

On peut alors conclure

$$(n+1)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}n^n.$$

Exercice 4

Calculer les limites quand n tend vers l'infini des termes suivants :

(a) $n\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{27}-1\right)$ (b) $(n+1)(n^{1/n}-1)$ (c) $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ avec $x\in\mathbb{R}$.

1. On opère par composition de limites et non par « composition d'équivalents ». Notamment pour la fonction exponentielle il n'est pas correct de composer les équivalents !

Solution

Les trois études conduisent ici à la résolution de « formes indéterminées ».

méthode

‖ Un équivalent simple a même limite que le terme étudié (Th. 6 p. 292).

(a) Lorsque (u_n) est de limite nulle, on sait $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ pour tout α réel [1]

$$n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{27}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\times\frac{27}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 27.$$

(b) On écrit le terme $n^{1/n}$ sous forme exponentielle et l'on exploite $\mathrm{e}^{u_n}-1 \sim u_n$ quand u_n est de limite nulle

$$n^{1/n}-1 = \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n} \quad \text{car} \quad \frac{\ln n}{n} \to 0.$$

On en déduit

$$(n+1)\big(n^{1/n}-1\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\times\frac{\ln n}{n} = \ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

(c) On exprime la puissance sous forme exponentielle. Pour n assez grand, $1 + x/n$ est strictement positif et l'on peut écrire

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right).$$

On détermine ensuite la limite du contenu de l'exponentielle [2]. Puisque x/n est de limite nulle

$$n\times\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\times\frac{x}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x.$$

Par composition de limites, on peut conclure

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^x.$$

9.4.2 Comparaisons de fonctions numériques

Exercice 5

Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes quand $x \to +\infty$:

(a) $(x+1)\mathrm{e}^{x+1}$ (b) $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ (c) $(x+1)\ln x - x\ln(x+1)$.

1. Ici, α est naturel et l'on pourrait employer la formule du binôme, ou du moins le début de celle-ci, pour proposer la même affirmation.
2. On ne peut pas composer les équivalents par la fonction exponentielle.

Solution

On reprend les mêmes démarches que dans le cadre des suites.

(a) Quand x tend vers $+\infty$, on a $x+1 \sim x$ et donc[1]

$$(x+1)\mathrm{e}^{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} x\mathrm{e}^{x+1} = \mathrm{e} \times x\mathrm{e}^{x}.$$

(b) **méthode**

‖ On introduit la quantité conjuguée.

$$\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

avec

$$\sqrt{x^2+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} x \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} x.$$

Puisque l'on ne peut pas sommer les équivalents, on poursuit l'expression des calculs avec des o(.)

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1} \underset{x\to+\infty}{=} x + \mathrm{o}(x) + x + \mathrm{o}(x) = 2x + \mathrm{o}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x.$$

Finalement,

$$\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

(c) On a

$$(x+1)\ln x \underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln x \quad \text{et} \quad x\ln(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln x.$$

En effet, on peut écrire en factorisant x dans le logarithme

$$\ln(x+1) = \ln x + \underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} \underset{x\to+\infty}{=} \ln x + \mathrm{o}(1) = \ln x + \mathrm{o}(\ln x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x.$$

Cependant, il y a simplification des termes principaux lors de la différence : on ne peut pas réaliser de calculs à partir de ces seuls équivalents.

méthode

‖ On mène un calcul plus précis du terme $x\ln(x+1)$.

$$x\ln(x+1) = x\ln x + x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \quad \text{avec} \quad x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \times \frac{1}{x} \to 1$$

1. On ne « simplifie » pas le 1 contenu dans l'exponentielle, il correspond d'ailleurs à une constante multiplicative et celles-ci sont conservées lors d'un calcul d'équivalent.

et donc

$$x\ln(x+1) \underset{x\to+\infty}{=} x\ln x + 1 + \mathrm{o}(1).$$

On en déduit

$$\begin{aligned}(x+1)\ln x - x\ln(x+1) &\underset{x\to+\infty}{=} (x+1)\ln x - \big(x\ln x + 1 + \mathrm{o}(1)\big)\\ &\underset{x\to+\infty}{=} \ln x - \underbrace{1+\mathrm{o}(1)}_{=\mathrm{o}(\ln x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x.\end{aligned}$$

Exercice 6

Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes quand $x \to 0^+$:

(a) $\sqrt{x} - x + 2x^{3/2}$ (b) $\dfrac{2\ln x + \sqrt{x}}{\frac{1}{x} - 2\ln x}$ (c) $\ln(\sin x)$.

Solution

méthode

On retrouve les démarches d'au-dessus mais les comparaisons asymptotiques ne sont plus les mêmes. Pour $\alpha < \beta$ réels :

$$x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} x^\beta \quad \text{et} \quad x^\beta \underset{x\to0^+}{=} \mathrm{o}(x^\alpha).$$

(a) Lorsque $x \to 0^+$, le terme prépondérant de cette somme est $\sqrt{x}$ et donc

$$\sqrt{x} - x + 2x^{3/2} \underset{x\to0^+}{=} \sqrt{x} + \mathrm{o}(\sqrt{x}) \underset{x\to0^+}{\sim} \sqrt{x}.$$

(b) On étudie séparément numérateur et dénominateur

$$\frac{2\ln x + \sqrt{x}}{\frac{1}{x} - 2\ln x} \underset{x\to0^+}{=} \frac{2\ln x + \mathrm{o}(\ln x)}{\frac{1}{x} + \mathrm{o}(\frac{1}{x})} \underset{x\to0^+}{\sim} 2x\ln x.$$

(c) **méthode**

Afin de simplifier l'expression contenue dans le logarithme, on écrit

$$\sin x = x \times \frac{\sin x}{x}.$$

$$\ln(\sin x) = \underbrace{\ln x}_{\to-\infty} + \underbrace{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}_{\to1} \underset{x\to0^+}{=} \ln x + \mathrm{o}(\ln x) \underset{x\to0^+}{\sim} \ln x.$$

9.4.3 Calculs de développements limités et asymptotiques

Exercice 7

Calculer les développements limités suivants :

(a) $\dfrac{e^x}{x}$ à l'ordre 2 en 1

(b) $\ln(1+e^x)$ à l'ordre 3 en 0

(c) $\dfrac{1}{1+\cos x}$ à l'ordre 4 en 0

(d) $\sqrt{3+\operatorname{ch} x}$ à l'ordre 3 en 0

(e) $\sin(x)e^x$ à l'ordre 2 en 0

(f) $\dfrac{\operatorname{sh} x}{\ln(1+x)}$ à l'ordre 2 en 0.

Solution

(a) **méthode**

> Les développements limités usuels sont présentés en 0. Lorsque l'on étudie un développement limité en un point différent, on translate la variable afin de se ramener en 0.

On écrit $x = 1 + h$ de sorte que h tend vers 0 quand x tend vers 1.

$$\frac{e^x}{x} = \frac{e^{1+h}}{1+h} = e \times e^h \times \frac{1}{1+h}.$$

On développe à l'ordre 2 les facteurs

$$\frac{e^x}{x} \underset{x\to 1}{=} e \times \left(1 + h + \frac{1}{2}h^2 + o(h^2)\right) \times \left(1 - h + h^2 + o(h^2)\right).$$

Enfin, on développe le produit. Lors de ce développement, il apparaît un $o(h^2)$ et d'autres termes négligeables devant celui-ci : on n'écrit pas ces derniers puisqu'ils peuvent être incorporés au $o(h^2)$ qui détermine la précision des calculs.

$$\frac{e^x}{x} \underset{x\to 1}{=} e\left(1 + \frac{1}{2}h^2 + o(h^2)\right) = e + \frac{e}{2}h^2 + o(h^2).$$

Enfin, on revient à la variable d'origine

$$\frac{e^x}{x} \underset{x\to 1}{=} e + \frac{e}{2}(x-1)^2 + o\big((x-1)^2\big).$$

On ne développe pas les carrés : l'étude asymptotique a lieu en 1 où l'on sait hiérarchiser entre elles les puissances de $(x-1)$ mais pas celles de x.

(b) Il s'agit de calculer une composition de développements limités où interviennent la fonction logarithme et la fonction exponentielle.

méthode

> On développe la fonction « au plus proche de la variable ».

On commence par développer l'exponentielle à l'ordre 3

$$\ln(1+\mathrm{e}^x) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(2+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\mathrm{o}(x^3)\right).$$

On poursuit le calcul grâce au développement connu de $\ln(1+u)$.

méthode

On transforme l'écriture afin de faire apparaître $\ln(1+u)$ avec $u \to 0$.

En factorisant 2 dans le logarithme, on écrit

$$\ln(1+\mathrm{e}^x) = \ln 2 + \ln(1+u) \quad \text{avec} \quad u \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3+\mathrm{o}(x^3) \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

méthode

On calcule les puissances de u à l'ordre 3 en x jusqu'à obtenir une puissance de u assurant la précision voulue en x.

On écrit

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3+\mathrm{o}(x^3) \\ u^2 &= \frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x^3+\mathrm{o}(x^3) \\ u^3 &= \frac{1}{8}x^3+\mathrm{o}(x^3). \end{aligned}$$

Un terme en $\mathrm{o}(u^3)$ devient un terme en $\mathrm{o}(x^3)$.

méthode

Il suffit de développer $\ln(1+u)$ à l'ordre 3 en u pour obtenir, par substitution, le développement voulu en x.

On sait

$$\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3+\mathrm{o}(u^3).$$

Par substitution, les calculs ayant été organisés de façon à ce que cette substitution soit très rapide, on obtient

$$\ln(1+\mathrm{e}^x) \underset{x\to 0}{=} \ln 2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+\mathrm{o}(x^3).$$

Le coefficient de x^3 est nul, cependant c'est bien un développement limité à l'ordre 3 qui a été réalisé puisque l'on a obtenu la précision $\mathrm{o}(x^3)$.

(c) **méthode**

On calcule le développement limité d'un inverse par une composition à partir du développement connu de $\frac{1}{1+u}$ quand $u \to 0$.

On développe la fonction au plus proche de la variable

$$\frac{1}{1+\cos x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\mathrm{o}(x^4)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+u} \quad \text{avec} \quad u \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

On a

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{48}x^4 + \mathrm{o}(x^4) \\ u^2 &= \qquad\quad \frac{1}{16}x^4 + \mathrm{o}(x^4). \end{aligned}$$

Un terme en $\mathrm{o}(u^2)$ devient un terme en $\mathrm{o}(x^4)$, un développement à l'ordre 2 de $\frac{1}{1+u}$ suffit à la poursuite des calculs

$$\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 + \mathrm{o}(u^2).$$

On obtient

$$\frac{1}{1+\cos x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{48}x^4 + \mathrm{o}(x^4).$$

(d) **méthode**

> On calcule le développement limité d'une racine par une composition à partir du développement connu de $\sqrt{1+u}$ quand $u \to 0$.

On développe la fonction au plus proche de la variable

$$\sqrt{3+\operatorname{ch} x} \underset{x\to 0}{=} \sqrt{4+\frac{1}{2}x^2+\mathrm{o}(x^3)} = 2\sqrt{1+u} \quad \text{avec} \quad u \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

On a

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{8}x^2 + \mathrm{o}(x^3) \\ u^2 &= \qquad\ \ \mathrm{o}(x^3). \end{aligned}$$

Un terme en $\mathrm{o}(u^2)$ devient un terme en $\mathrm{o}(x^3)$, un développement [1] limité à l'ordre 2 en u suffit à la poursuite des calculs

$$\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \mathrm{o}(u^2).$$

On obtient [2]

$$\sqrt{3+\operatorname{ch} x} \underset{x\to 0}{=} 2 + \frac{1}{8}x^2 + \mathrm{o}(x^3).$$

1. Un développement limité à l'ordre 1 ne suffit pas car le $\mathrm{o}(u)$ déterminera un $\mathrm{o}(x^2)$ trop court... Tout au plus, on peut anticiper que le coefficient de u^2 dans les calculs à venir sera sans importance.

2. Le développement limité d'une fonction paire ne contient que des puissances paires de la variable : on pouvait anticiper la nullité du coefficient de x^3.

(e) On calcule simplement le produit de deux développements.

méthode

Puisque le développement de $\sin x$ s'amorce par un x, un développement à l'ordre 1 du terme exponentiel suffit à la réalisation des calculs.

$$\sin(x)e^x \underset{x\to 0}{=} \left(x+o(x^2)\right)\left(1+x+o(x)\right) = x+x^2+o(x^2).$$

(f) **méthode**

Les développements du numérateur et du dénominateur s'amorcent tous deux par un x. La simplification par cet x réduit d'une unité l'ordre des développements.

En anticipant cette simplification, on amorce le calcul par des développements à l'ordre 3 du numérateur et du dénominateur

$$\frac{\operatorname{sh} x}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)} = \frac{1+\frac{1}{6}x^2+o(x^2)}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)}.$$

Le dénominateur s'écrit $1+u$ avec $u = -\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)$. Un développement à l'ordre 2 de l'expression $\frac{1}{1+u}$ permet la poursuite du calcul

$$\frac{\operatorname{sh} x}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{=} \left(1+\frac{1}{6}x^2+o(x^2)\right)\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^2+o(x^2)\right) = 1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2+o(x^2).$$

Exercice 8

Calculer les trois premiers termes des développements asymptotiques de :

(a) $\dfrac{1}{e^x-1}$ quand $x\to 0$ (b) $\ln(x+1)$ quand $x\to+\infty$.

Solution

méthode

On reproduit les techniques de calculs vues pour les développements limités : seule l'échelle de fonctions sur laquelle on exprime le développement change.

(a) On amorce le calcul à partir de développements des fonctions au plus proche de la variable.

méthode

On développe à un ordre suffisant pour qu'il reste trois termes à la fin des calculs[1].

Pour $x\neq 0$, on écrit en développant l'exponentielle à l'ordre 3

$$\frac{1}{e^x-1} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}.$$

1. Et l'on espère qu'il n'y aura pas trop de simplifications...

En factorisant $\frac{1}{x}$, on fait apparaître en facteur une expression du type $\frac{1}{1+u}$ avec $u \to 0$ que l'on sait développer

$$\frac{1}{e^x - 1} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)\right).$$

Il suffit ensuite de développer le facteur $\frac{1}{x}$ pour former le développement asymptotique[1] cherché

$$\frac{1}{e^x - 1} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}x + o(x).$$

(b) **méthode**

> On factorise x dans le logarithme afin de pouvoir exploiter le développement limité connu de $\ln(1+u)$ quand $u \to 0$.

Pour $x > 0$

$$\ln(x+1) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \ln x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{car} \quad \frac{1}{x} \to 0.$$

9.5 Exercices d'entraînement

9.5.1 Études asymptotiques de suites numériques

Exercice 9 *

Calculer les développements asymptotiques des suites dont les termes généraux suivent :

(a) $\sqrt{n^2+1}$ à 3 termes (b) $\sqrt[n]{n}$ à 3 termes (c) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ à 3 termes.

Solution

Il est entendu qu'ici le paramètre n tend vers l'infini. On réalise les développements de ces expressions comme s'il s'agissait d'expression fonctionnelle.

(a) **méthode**

> Le contenu de la racine équivaut à n^2. En factorisant celui-ci, on fait apparaître $\sqrt{1+u}$ avec $u \to 0$.

$$\sqrt{n^2+1} = n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} = n\sqrt{1+u} \quad \text{avec} \quad u = \frac{1}{n^2} \to 0.$$

Sachant

$$\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2)$$

1. Lors des calculs, on a conservé l'organisation des termes en « négligeabilité croissante ». L'expression obtenue correspond donc bien à un développement asymptotique.

on conclut

$$\sqrt{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{=} n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

(b) **méthode**

> On écrit la puissance sous forme exponentielle et l'on exploite le développement connu de e^u quand $u \to 0$.

$$\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = \exp\Big(\underbrace{\frac{\ln n}{n}}_{\to 0}\Big) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln n}{n} + \frac{(\ln n)^2}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{(\ln n)^2}{n^2}\right).$$

(c) On écrit la puissance sous forme exponentielle

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).$$

méthode

> On développe le logarithme à trois termes puis on calcule une composition avec la fonction exponentielle.

Puisque $1/n$ est de limite nulle quand n tend vers l'infini

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

puis

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}\times\mathrm{e}^u \quad \text{avec} \quad u \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

En développant e^u à la précision $\mathrm{o}(u^2)$, on obtient au terme des calculs

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2n} + \frac{11\mathrm{e}}{24n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 10 *

Soit (u_n) une suite décroissante de réels telle que

$$u_n + u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Donner un équivalent simple de (u_n).

Solution

On peut avoir l'intuition que u_n équivaut $\frac{1}{2n}$ mais, d'une part, la propriété $u_{n+1} \sim u_n$ n'est pas toujours vraie[1], d'autre part, il ne faut pas sommer les équivalents !

méthode

> Par l'hypothèse de monotonie, on encadre u_n à l'aide des quantités connues $u_{n+1} + u_n$ et $u_n + u_{n-1}$.

Par décroissance de la suite, on peut écrire $u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant u_{n-1}$ puis

$$u_{n+1} + u_n \leqslant 2u_n \leqslant u_{n-1} + u_n$$

avec

$$u_{n+1} + u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad u_{n-1} + u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n}$$

On en déduit[2]

$$2u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \quad \text{puis} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Exercice 11 **

Soit des réels positifs a et b. Trouver la limite quand n croît vers l'infini

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n.$$

Solution

Si $a = 0$, un calcul direct est possible :

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n = \frac{b}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

De même, on obtient une limite nulle lorsque $b = 0$. On suppose désormais a et b strictement positifs.

méthode

> On développe $a^{\frac{1}{n}}$ en exploitant une écriture exponentielle.

$$a^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln a} = \mathrm{e}^u \quad \text{avec} \quad u = \frac{1}{n}\ln a \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par le développement limité $\mathrm{e}^u = 1 + u + \mathrm{o}(u)$ quand u tend vers 0, on écrit

$$a^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n}\ln a + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

1. Si $u_n = \mathrm{e}^{-n}$, on a $u_{n+1} \sim \mathrm{e}^{-1}u_n$, si $u_n = \mathrm{e}^{-n^2}$, on a $u_{n+1} = \mathrm{o}(u_n)$.

2. On peut énoncer un théorème d'encadrement : si u_n est encadré par deux termes généraux équivalents à une même expression alors u_n équivaut aussi à cette expression.

On procède au même calcul avec $b^{\frac{1}{n}}$ et l'on en déduit

$$\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2} \underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{2n}\ln(ab)+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Enfin, par $\ln(1+u)=u+\mathrm{o}(u)$ quand u tend vers 0

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\ln(ab)+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)=\exp\left(\frac{1}{2}\ln(ab)+\mathrm{o}(1)\right)$$

et l'on peut conclure

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{ab}.$$

Exercice 12 ** (Intégrales de Wallis)

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n.$$

(b) Établir que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$(n+1)I_nI_{n+1}=\frac{\pi}{2}\quad\text{et}\quad 0\leqslant I_{n+1}\leqslant I_n.$$

(c) Déterminer un équivalent de I_n.

Solution

(a) Cette question a déjà été résolue par intégration par parties dans le sujet 19 p. 142.

(b) **méthode**

‖ On montre la constance de la suite (u_n) avec $u_n=(n+1)I_nI_{n+1}$.

Soit n un naturel. La formule ci-dessus donne

$$u_{n+1}=(n+2)I_{n+2}I_{n+1}=(n+1)I_nI_{n+1}=u_n.$$

La suite (u_n) est donc constante. Par un calcul direct, on a $I_0=\pi/2$ et $I_1=1$. La suite (u_n) est donc constante égale à $u_0=\pi/2$.

Pour tout $t\in[0\,;\pi/2]$, on a $0\leqslant\sin t\leqslant 1$. En multipliant par $\sin^n t$ qui est positif, on obtient

$$0\leqslant\sin^{n+1}t\leqslant\sin^n t.$$

En intégrant en bon ordre, on conclut $0\leqslant I_{n+1}\leqslant I_n$.

(c) **méthode**

‖ On encadre I_n^2 par les produits connus I_nI_{n-1} et I_nI_{n+1}.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, par ce qui précède on sait $I_{n+1} \leqslant I_n \leqslant I_{n-1}$. En multipliant par le facteur positif I_n, on obtient

$$\underbrace{I_nI_{n+1}}_{=\frac{\pi}{2(n+1)}} \leqslant I_n^2 \leqslant \underbrace{I_{n-1}I_n}_{=\frac{\pi}{2n}}.$$

Les termes encadrants sont tous deux équivalents à $\pi/2n$, donc aussi le terme encadré, puis en passant à la racine

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \quad \text{car} \quad I_n \geqslant 0.$$

Exercice 13 **

Soit $r > 0$ et $\theta \in]0\,;\pi[$. Déterminer la limite de la suite complexe (z_n) définie par

$$z_0 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}.$$

Solution

méthode

‖ On exprime le terme général de la suite à l'aide d'un produit.

Par la technique de factorisation de l'exponentielle imaginaire d'angle moitié, on fait apparaître un cosinus

$$z_1 = \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + r}{2} = r\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}.$$

En répétant ce calcul

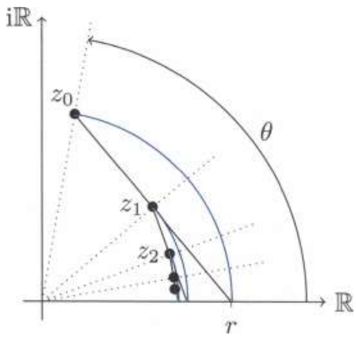
$$z_2 = r\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{4}}$$

puis

$$z_n = r\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2^n}}.$$

Comme déjà vu dans le sujet 18 p. 66, on a

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{\sin\theta}{2^n\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$$



Lorsque n tend vers l'infini, $\theta/2^n$ est de limite nulle et donc $\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \sim \frac{\theta}{2^n}$ tandis que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2^n}$ tend vers 1. On en déduit

$$z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} r\frac{\sin\theta}{2^n \times \frac{\theta}{2^n}} \times 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} r\frac{\sin\theta}{\theta}.$$

Exercice 14 ***

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$:

$$x + \sqrt[3]{x} = n.$$

(a) Montrer que cette équation possède une unique solution x_n.

(b) Déterminer la limite puis un équivalent simple de la suite (x_n).

(c) Donner un développement asymptotique à trois termes de la suite (x_n).

Solution

(a) La fonction $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \sqrt[3]{x}$ est continue et strictement croissante. Elle réalise donc une bijection de $[0\,;+\infty[$ vers $[f(0)\,;\lim\limits_{+\infty} f[= [0\,;+\infty[$. L'équation étudiée possède donc une unique solution : $x_n = f^{-1}(n)$.

(b) **méthode**

> Le tableau de variation de f^{-1} se déduit de celui de f par symétrie.

On a les variations suivantes

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

x	0	$+\infty$
$f^{-1}(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que la suite $(x_n) = \left(f^{-1}(n)\right)$ croît vers $+\infty$.

méthode

> On détermine un équivalent de x_n en ne conservant que les termes principaux dans l'équation définissant x_n.

Puisque (x_n) tend vers $+\infty$, on peut affirmer $\sqrt[3]{x_n} = \mathrm{o}(x_n)$. L'équation définissant x_n se relit alors

$$x_n + \mathrm{o}\left(\sqrt[3]{x_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} n \quad \text{donc} \quad x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$

(c) **méthode**

> On détermine un développement asymptotique de (x_n) au « compte-gouttes » : après avoir déterminé un équivalent de x_n, on calcule un équivalent de la différence puis on recommence. On fait ainsi apparaître successivement les termes du développement asymptotique cherché.

On introduit $y_n = x_n - n$ avec, en vertu de ce qui précède, $y_n = o(n)$. Par l'équation définissant x_n, on peut affirmer

$$y_n = -\sqrt[3]{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\sqrt[3]{n} \quad \text{car} \quad x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$

On peut ainsi écrire un premier développement asymptotique à deux termes

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \sqrt[3]{n} + o(\sqrt[3]{n}).$$

On introduit ensuite $z_n = x_n - n + \sqrt[3]{n} = y_n + \sqrt[3]{n}$. L'équation $y_n = -\sqrt[3]{x_n}$ se relit

$$-\sqrt[3]{n} + z_n \underset{n\to+\infty}{=} -\sqrt[3]{n - \sqrt[3]{n} + o(\sqrt[3]{n})}.$$

On réalise le développement asymptotique du second membre en factorisant n de la racine cubique et en exploitant le développement connu de $(1+u)^\alpha$ quand $u \to 0$ avec $\alpha = 1/3$. On obtient

$$-\sqrt[3]{n} + z_n \underset{n\to+\infty}{=} -\sqrt[3]{n} + \frac{1}{3\sqrt[3]{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right).$$

Après simplification, il vient

$$z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3\sqrt[3]{n}}.$$

Finalement, on conclut au développement asymptotique

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \sqrt[3]{n} + \frac{1}{3\sqrt[3]{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right).$$

Exercice 15 ***

Soit n un naturel non nul et (E_n) l'équation : $x^n \ln x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.

(a) Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution x_n et que $x_n > 1$.

(b) Montrer que la suite (x_n) est décroissante et déterminer sa limite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $y_n = x_n - 1$.

(c) Justifier $ny_n \sim -\ln y_n$ et en déduire un équivalent de y_n.

Solution

(a) **méthode**

On étudie les variations de la fonction $f_n : x \mapsto x^n \ln x$.

La fonction f_n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x > 0$, $f_n'(x) = (n \ln x + 1)x^{n-1}$ est du signe de $n \ln x + 1$ qui s'annule en $x = e^{-1/n}$.

x	0		$e^{-1/n}$		1		x_n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0			$+$			
$f(x_n)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{ne}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Ce tableau de variation (où les flèches signifient que la fonction est continue et strictement monotone) assure l'existence et l'unicité d'une solution x_n à l'équation $f_n(x) = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on observe que cette solution vérifie $x_n > 1$.

(b) **méthode**

> On positionne x_{n+1} dans le tableau précédent en comparant $f_n(x_{n+1})$ et 1.

Sachant $x_{n+1}^{n+1}\ln x_{n+1} = 1$, on a $x_{n+1}f_n(x_{n+1}) = 1$ et donc $f_n(x_{n+1}) = \frac{1}{x_{n+1}} \leqslant 1$. On en déduit $x_{n+1} \leqslant x_n$ car f est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.

x	1		x_{n+1}		x_n		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f_n(x_{n+1})$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

La suite (x_n) étant décroissante et minorée par 1, elle converge. Notons ℓ sa limite. Sachant $x_n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a à la limite $\ell \geqslant 1$.

méthode

> On montre que $\ell = 1$ est la seule valeur compatible avec un passage à la limite de la relation $x_n^n \ln x_n = 1$.

Par l'absurde, supposons $\ell > 1$. La suite décroissante (x_n) étant minorée par sa limite, on a

$$1 = x_n^n \ln x_n \geqslant \ell^n \ln \ell \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Ceci est absurde et $\ell = 1$ est la seule limite possible.

(c) Par l'étude qui précède, le terme y_n tend vers 0 par valeurs strictement supérieures. L'équation définissant x_n exprimée en y_n et passée au logarithme donne

$$n\ln(1+y_n) + \ln\big(\ln(1+y_n)\big) = 0. \qquad (*)$$

D'une part, $n\ln(1+y_n) \sim ny_n$ car on sait $\ln(1+u) \sim u$ lorsque u tend vers 0.
D'autre part,

$$\ln\big(\ln(1+y_n)\big) \underset{n\to+\infty}{=} \ln\big(y_n + o(y_n)\big) = \underbrace{\ln y_n}_{\to-\infty} + \underbrace{\ln\big(1+o(1)\big)}_{\to 0} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln y_n.$$

L'équation $(*)$ se relit

$$ny_n + o(ny_n) + \ln y_n + o(\ln y_n) \underset{n\to+\infty}{=} 0$$

et en réordonnant les membres, on en déduit l'affirmation $ny_n \sim -\ln y_n$.

méthode

On passe l'équivalent qui précède au logarithme afin de déterminer un équivalent de $\ln y_n$ qu'il suffira de réinjecter dans la relation précédente.

On écrit $ny_n = -\ln y_n + o(\ln y_n) = -\ln y_n \times \big(1+o(1)\big)$ et l'on passe au logarithme

$$\ln n + \ln y_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(-\ln y_n) + \ln\big(1+o(1)\big).$$

D'une part, $\ln\big(1+o(1)\big)$ tend vers 0 et est donc négligeable devant le terme $\ln n$.
D'autre part, $\ln y_n$ tend vers $-\infty$ et donc $\ln(-\ln y_n)$ est négligeable devant $\ln y_n$.
On peut alors affirmer

$$\ln n + \ln y_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln y_n) + o(\ln n).$$

En réorganisant les membres, il vient $\ln y_n \sim -\ln n$ et l'on peut conclure

$$y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}.$$

9.5.2 Études asymptotiques de fonctions numériques

Exercice 16 *

Calculer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^{x}}{x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(3.2^{\frac{1}{x}}-2.3^{\frac{1}{x}}\right)^{x}$.

Solution

(a) **méthode**

On translate le problème en 0 en écrivant $x = 1+h$ avec $h\to0$.

$$\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln(1+h)}{h} \underset{x\to1}{\sim} \frac{h}{h} = 1.$$

On pouvait aussi calculer cette limite comme un nombre dérivé limite d'un taux d'accroissement associé à la fonction logarithme entre 1 et x.

(b) **méthode**

On calcule un développement limité du numérateur.

On a

$$e^{2x} \underset{x\to0}{=} 1+2x+o(x) \quad\text{et}\quad e^{x} \underset{x\to0}{=} 1+x+o(x)$$

donc

$$\frac{e^{2x}-e^{x}}{x} \underset{x\to0}{=} \frac{x+o(x)}{x} \xrightarrow[x\to0]{} 1$$

(c) **méthode**

> On réduit au même dénominateur et l'on cherche un équivalent simple pour le numérateur et le dénominateur.

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{(x - \sin x)(x + \sin x)}{x^2 \sin^2 x}.$$

Par le développement limité de la fonction sinus, on a

$$x - \sin x \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3) \quad \text{et} \quad x + \sin x \underset{x\to 0}{=} 2x + \mathrm{o}(x).$$

On en déduit

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{1}{6}x^3 \times 2x}{x^2 \times x^2} = \frac{1}{3} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{3}.$$

(d) **méthode**

> On exprime la puissance en écriture exponentielle.

$$\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \exp\left(x^2 \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)\right).$$

Puisque $1/x$ est de limite nulle, on peut écrire le développement

$$x^2 \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} x^2 \ln\left(1 - \frac{1}{2x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x^2 \times \left(-\frac{1}{2x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\frac{1}{2}.$$

On conclut

$$\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

(e) **méthode**

> On développe $2^{\frac{1}{x}}$ et $3^{\frac{1}{x}}$ en passant par l'écriture exponentielle.

$$2^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln 2\right) \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln 2}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad 3^{\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln 3}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

On en déduit

$$\begin{aligned}(3.2^{\frac{1}{x}} - 2.3^{\frac{1}{x}})^x &\underset{x\to+\infty}{=} \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{3\ln 2 - 2\ln 3}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} \exp\big(3\ln 2 - 2\ln 3 + \mathrm{o}(1)\big) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{8}{9}.\end{aligned}$$

Exercice 17 *

Former le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \arctan(\mathrm{e}^x)$.

Quelle est l'allure de cette fonction autour du point d'abscisse 0 ?

Solution

méthode

On développe à l'ordre 2 la fonction dérivée.

Par dérivation de fonctions composées

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\arctan(\mathrm{e}^x)\Big) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}.$$

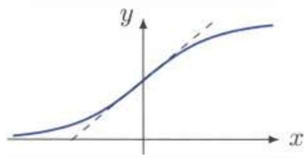
Par développement d'un quotient, on a

$$\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}} \underset{x\to 0}{=} \frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+\mathrm{o}(x^2)}{1+1+2x+\frac{1}{2}(2x)^2+\mathrm{o}(x^2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+\mathrm{o}(x^2)}{1+x+x^2+\mathrm{o}(x^2)}$$

$$\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\mathrm{o}(x^2)\right)\left(1-x+\mathrm{o}(x^2)\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}x^2+\mathrm{o}(x^2).$$

En intégrant (Th. 15 p. 296), sans oublier la constante d'intégration qui est la valeur de la fonction en 0, ici $\arctan(1)$, on obtient le développement à l'ordre 3 voulu

$$\arctan(\mathrm{e}^x) \underset{x\to 0}{=} \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^3+\mathrm{o}(x^3).$$



La tangente en 0 a pour équation $y=\pi/4+x/2$ (Th. 17 p. 297). Puisque le terme qui suit dans le développement limité change de signe, la courbe traverse cette tangente : il s'agit d'un *point d'inflexion*.

Exercice 18 *

Former le développement asymptotique à trois termes au voisinage de $+\infty$ de la fonction $x\mapsto x\arctan x$. Quelle est l'allure de cette fonction en $+\infty$?

Solution

méthode

On rapporte le problème en 0 par la formule[1] valable pour tout $x>0$

$$\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

On écrit

$$x\arctan x = \frac{\pi}{2}x - x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}x - x\arctan u \quad \text{avec} \quad u=\frac{1}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

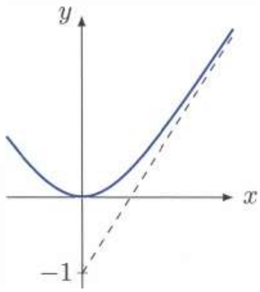
On connaît le développement limité de la fonction arc tangente en 0

$$\arctan u \underset{u\to 0}{=} u-\frac{1}{3}u^3+\mathrm{o}(u^3).$$

1. Voir sujet 7 p. 55.

On en déduit le développement asymptotique cherché

$$x \arctan x \underset{x \to +\infty}{=} \frac{\pi}{2}x - 1 + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$



La fonction $x \mapsto x \arctan x$ présente une asymptote en $+\infty$ qui est la droite d'équation $y = \frac{\pi}{2}x - 1$. Puisque le terme qui suit dans le développement est positif, la courbe se positionne au-dessus de l'asymptote au voisinage de l'infini.

Exercice 19 *

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = 1 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

(a) Montrer à l'aide d'un développement limité que l'on peut prolonger f en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) La fonction dérivée de f admet-elle un développement limité en 0 ?

Solution

(a) La fonction f est évidemment dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

La fonction sinus étant bornée, on peut écrire le développement limité à l'ordre 1

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} 1 + O(x^2) = 1 + 0.x + o(x).$$

On en déduit qu'il est possible de prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ et que ce prolongement est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$ (Th. 16 p. 297).

(b) Pour $x \neq 0$, on a

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

méthode

Le coefficient constant d'un développement limité est la limite de la fonction au point.

Ici, $f'(x)$ n'admet pas de limite en 0 et *a fortiori* pas de développement limité[1].

1. La même étude avec $f(x) = 1 + x^{n+1}\sin(1/x^n)$ donne un exemple de fonction admettant un développement limité à l'ordre n en 0 sans même que sa dérivée possède un développement limité à l'ordre 0 en 0. Ceci illustre que l'on ne peut pas dériver les développements limités !

Exercice 20 *

Soit f et g deux fonctions définies sur I à valeurs réelles strictement positives. On suppose que f et g sont équivalentes en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ point ou extrémité de I.

(a) Montrer que si f et g tendent en a vers une limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ différente de 1 alors $\ln f$ et $\ln g$ sont équivalentes en a.

(b) Cette propriété est-elle encore vraie lorsque $\ell = 1$?

Solution

(a) **méthode**

‖ On écrit $f(x) = g(x)\varphi(x)$ avec φ de limite en 1 en a.

Pour $x \in I$

$$\ln f(x) = \ln g(x) + \ln \varphi(x).$$

Or $\ln \varphi(x)$ est négligeable devant $\ln g(x)$ quand x tend vers a car $\ln \varphi(x)$ tend vers 0 tandis que $\ln g(x)$ tend vers une limite non nulle, éventuellement infinie. On a ainsi

$$\ln f(x) \underset{x \to a}{=} \ln g(x) + \mathrm{o}\big(\ln g(x)\big) \underset{x \to a}{\sim} \ln g(x).$$

(b) Un contre-exemple suffit à vérifier que la propriété n'est plus vraie lorsque $\ell = 1$. Prenons $f(x) = 1 + x$ et $g(x) = 1 + x^2$ et menons l'étude en $a = 0$.

D'une part, les fonctions f et g tendent vers 1 en 0 ce qui est une limite finie non nulle donc un équivalent :

$$f(x) \underset{x \to 0}{\sim} 1 \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \to 0}{\sim} 1.$$

D'autre part, on a

$$\ln f(x) = \ln(1 + x) \underset{x \to 0}{\sim} x \quad \text{et} \quad \ln g(x) = \ln\big(1 + x^2\big) \underset{x \to 0}{\sim} x^2.$$

Ainsi, les fonctions f et g sont équivalentes mais leurs logarithmes ne le sont pas.

Exercice 21 **

(a) Former le développement limité à l'ordre 3 en 0 de

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

(b) Prolonger ce développement limité à l'ordre 5 en exploitant

$$\tan(\arctan x) = x.$$

(c) Prolonger ce développement limité à l'ordre 7 en exploitant

$$(\tan)'(x) = 1 + \tan^2 x.$$

Solution

(a) Par quotient de développements limités, on a

$$\begin{aligned}\tan x &\underset{x\to 0}{=} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x-\frac{1}{6}x^3+\mathrm{o}(x^3)}{1-\frac{1}{2}x^2+\mathrm{o}(x^2)}\\ &\underset{x\to 0}{=} \Big(x-\frac{1}{6}x^3+\mathrm{o}(x^3)\Big)\Big(1+\frac{1}{2}x^2+\mathrm{o}(x^2)\Big) = x+\frac{1}{3}x^3+\mathrm{o}(x^3).\end{aligned}$$

(b) **méthode**

> On justifie l'existence d'un développement limité par le calcul de celui-ci ou encore en appliquant la formule de Taylor-Young (Th. 14 p. 296).

La fonction tangente est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\pi/2\,;\pi/2[$, elle admet donc un développement limité à l'ordre 5 en 0. De plus, la fonction étant impaire, ce développement ne comporte que des puissances impaires de x. On peut donc écrire en introduisant un paramètre inconnu $a \in \mathbb{R}$

$$\tan x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + ax^5 + \mathrm{o}(x^5).$$

méthode

> On détermine la valeur de a en calculant de deux façons le développement de $\tan(\arctan x)$.

D'une part,

$$\tan(\arctan x) = x \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}(x^5)$$

ce qui produit un premier développement limité à l'ordre 5.

D'autre part,

$$\tan(\arctan x) = \tan(u) \quad \text{avec} \quad u = \arctan(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

On opère une composition de développements avec

$$\begin{aligned} u &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \mathrm{o}(x^5)\\ u^3 &= \phantom{x - {}} x^3 - x^5 + \mathrm{o}(x^5)\\ u^5 &= \phantom{x - x^3 - {}} x^5 + \mathrm{o}(x^5).\end{aligned}$$

On obtient

$$\tan(\arctan x) \underset{x\to 0}{=} x + \Big(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + a\Big)x^5 + \mathrm{o}(x^5)$$

ce qui produit un second développement limité à l'ordre 5.

Par unicité des coefficients d'un développement limité, il vient

$$a = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}.$$

(c) **méthode**

> On intègre le développement à l'ordre 6 de $1+\tan^2 x$ (Th. 15 p. 296).

Par produit de développements limités

$$1+\tan^2 x \underset{x\to 0}{=} 1+\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\mathrm{o}(x^5)\right)^2 = 1+x^2+\frac{2}{3}x^4+\frac{17}{45}x^6+\mathrm{o}(x^6).$$

En intégrant ce développement (avec une constante d'intégration nulle car $\tan 0 = 0$), on conclut

$$\tan x \underset{x\to 0}{=} x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\mathrm{o}(x^7).$$

Exercice 22 **

On pose $f(x) = x+\ln x - 1$ pour $x>0$.

(a) Justifier que f réalise une bijection de $]0\,;+\infty[$ vers un intervalle à préciser.

(b) Former le développement limité à l'ordre 2 de f^{-1} en 0.

(c) Donner un équivalent simple à $f^{-1}(y)$ quand $y\to+\infty$.

(d) Donner un équivalent simple à $f^{-1}(y)$ quand $y\to-\infty$.

Solution

(a) Par somme de fonctions, f est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

La fonction f réalise une bijection $]0\,;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

(b) **méthode**

> On justifie l'existence d'un développement limité et l'on exprime celui-ci à coefficients inconnus. On détermine ceux-ci par la relation $f\big(f^{-1}(y)\big) = y$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sa dérivée ne s'annule pas sur $]0\,;+\infty[$. La bijection réciproque f^{-1} est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (Th. 10 p. 261). Par la formule de Taylor-Young, on peut affirmer que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 2 :

$$f^{-1}(y) \underset{y\to 0}{=} a+by+cy^2+\mathrm{o}(y^2).$$

Le coefficient constant de ce développement est la valeur de la fonction au point. Sachant $f(1)=0$, on a $f^{-1}(0)=1$ et donc $a=1$.

La relation $y = f\big(f^{-1}(y)\big)$ donne

$$y \underset{y\to 0}{=} 1 + by + cy^2 + o(y^2) + \ln\Big(1 + by + cy^2 + o(y^2)\Big) - 1.$$

Après quelques calculs, il vient

$$y \underset{y\to 0}{=} 2by + \left(2c - \frac{1}{2}b^2\right)y^2 + o(y^2).$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité, on conclut [1]

$$b = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad c = \frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{16}.$$

(c) Commençons par déterminer la limite de f^{-1} en $+\infty$. Le tableau de variation de f détermine par symétrie celui de f^{-1}

y	$-\infty$	0	$+\infty$
$f^{-1}(y)$	0 $\nearrow$	1 $\nearrow$	$+\infty$

La fonction f^{-1} croît donc vers $+\infty$ en $+\infty$.

méthode

> On détermine un équivalent de f^{-1} en ne conservant que les termes principaux dans l'équation $y = f\big(f^{-1}(y)\big)$.

L'égalité $y = f\big(f^{-1}(y)\big)$ donne $y = f^{-1}(y) + \ln\big(f^{-1}(y)\big) - 1$. Le terme $\ln\big(f^{-1}(y)\big)$ est négligeable devant $f^{-1}(y)$ car ce dernier tend vers l'infini et la relation précédente se relit

$$y \underset{y\to+\infty}{=} f^{-1}(y) + o\big(f^{-1}(y)\big).$$

On en déduit

$$f^{-1}(y) \underset{y\to+\infty}{\sim} y.$$

(d) Quand y tend vers $-\infty$, $f^{-1}(y)$ est de limite nulle et la relation $f\big(f^{-1}(y)\big) = y$ permet d'écrire

$$\ln\big(f^{-1}(y)\big) = -f^{-1}(y) + y + 1.$$

En passant à l'exponentielle, on conclut

$$f^{-1}(y) = \underbrace{\mathrm{e}^{-f^{-1}(y)}}_{\to 1}\mathrm{e}^{y+1} \underset{y\to-\infty}{\sim} \mathrm{e}^{y+1}.$$

---

1. La valeur de b pouvait aussi s'obtenir en calculant $(f^{-1})'(0)$.

Exercice 23 **

En calculant de deux façons le développement limité à l'ordre n en 0 de $(e^x - 1)^n$, établir que pour tout $0 \leqslant \ell \leqslant n$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k} k^\ell}{\ell!} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell < n \\ 1 & \text{si } \ell = n. \end{cases}$$

Solution

méthode

Un premier développement se déduit de $e^x - 1 \sim x$ quand x tend vers 0.

En élevant à la puissance n l'équivalent ci-dessus, il vient $(e^x - 1)^n \sim x^n$. Cette équivalence peut aussi s'interpréter comme le développement limité à l'ordre n suivant :

$$(e^x - 1)^n \underset{x \to 0}{=} x^n + o(x^n).$$

méthode

Un second calcul exploite la formule du binôme.

On a

$$(e^x - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} e^{kx}.$$

On peut développer chaque terme exponentiel

$$e^{kx} \underset{x \to 0}{=} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{k^\ell}{\ell!} x^\ell + o(x^n).$$

En échangeant les deux sommes, on forme un nouveau développement de $(e^x - 1)^n$

$$(e^x - 1)^n \underset{x \to 0}{=} \sum_{\ell=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k} k^\ell}{\ell!} \right) x^\ell + o(x^n).$$

L'unicité des coefficients d'un développement limité entraîne la relation proposée.

9.6 Exercices d'approfondissement

Exercice 24 **

Soit $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f(1) \neq 0$.

(a) Déterminer un équivalent simple de

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,dt.$$

(b) Même question avec f continue au lieu de $\mathcal{C}^1$.

Solution

(a) **méthode**

> Les hypothèses posées invitent à la réalisation d'une intégration par parties.

Pour les fonctions u et v de classe C^1 déterminées par $u(t) = \frac{1}{n+1}t^{n+1}$ et $v(t) = f(t)$, la formule d'intégration par parties donne

$$I_n = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}f(t)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

méthode

> On montre par comparaison que le terme intégral introduit est de limite nulle.

La fonction f' est continue sur le segment $[0\,;1]$, elle y est donc bornée par un certain M. L'inégalité triangulaire intégrale (Th. 4 p. 337) donne alors

$$\left|\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 t^{n+1}\left|f'(t)\right|\mathrm{d}t \leqslant M\int_0^1 t^{n+1}\,\mathrm{d}t = \frac{M}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On peut ensuite écrire (sachant $f(1) \neq 0$)

$$I_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{f(1)}{n+1} + \frac{1}{n+1}\times \mathrm{o}(1) = \frac{f(1)}{n+1} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f(1)}{n}.$$

(b) On montre que $(n+1)I_n - f(1)$ tend vers 0.

méthode

> On rapproche les écritures des termes de la différence.

$$\begin{aligned}(n+1)I_n - f(1) &= (n+1)\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t - (n+1)\int_0^1 t^n f(1)\,\mathrm{d}t\\ &= (n+1)\int_0^1 t^n\big(f(t)-f(1)\big)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

méthode

> On exprime par les ε la continuité de f en 1 afin de signifier que la portion de l'intégrale voisine de 1 est petite.

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en 1, il existe $a \in [0\,;1[$ tel que $\left|f(t) - f(1)\right| \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \in [a\,;1]$. En découpant l'intégrale par la relation de Chasles

$$\left|(n+1)I_n - f(1)\right| \leqslant (n+1)\int_0^a t^n\left|f(t)-f(1)\right|\mathrm{d}t + (n+1)\int_a^1 t^n\varepsilon\,\mathrm{d}t.$$

On poursuit en introduisant la borne supérieure M de $|f|$ sur $[0\,;1]$

$$\left|(n+1)I_n - f(1)\right| \leqslant 2(n+1)M\int_0^a t^n\,\mathrm{d}t + \varepsilon(n+1)\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = 2Ma^{n+1} + \varepsilon.$$

Puisque a est strictement inférieur à 1, on a $\left(a^{n+1}\right)$ de limite nulle et il existe un rang N au delà duquel $2Ma^{n+1} \leqslant \varepsilon$. Au delà de ce même rang $\left|(n+1)I_n - f(1)\right| \leqslant 2\varepsilon$.

On peut alors conclure au même équivalent qu'au-dessus.

Exercice 25 **

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, établir

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(z).$$

Solution

méthode

On étudie séparément module et argument de $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$.

Posons $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$. On a

$$Z = 1 + \frac{z}{n} = \left(1+\frac{x}{n}\right) + \mathrm{i}\frac{y}{n}.$$

D'une part,

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = |Z|^n = \underbrace{\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right)^{n/2}}_{=r_n}.$$

D'autre part, pour n assez grand, on a $1+\frac{x}{n} > 0$ et l'on peut exprimer un argument de Z par une arc tangente

$$\arg\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right) \equiv n\arg(Z) = \underbrace{n\arctan\left(\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)}_{=\theta_n}\ [2\pi].$$

Quand $n \to +\infty$, sachant $\ln(1+u) \sim u$ quand $u \to 0$, on a

$$r_n = \exp\left(\frac{n}{2}\ln\Big(1+\underbrace{\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}}_{\to 0}\Big)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{n}{2}\times\left(\frac{2x}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(x)$$

et, sachant $\arctan u \sim u$ quand $u \to 0$,

$$\theta_n = n\arctan\Big(\underbrace{\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}}_{\to 0}\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} y.$$

On peut alors conclure

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \exp(z).$$

Exercice 26 **

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $f''(0) \neq 0$.

(a) Montrer que, pour chaque $x \in \mathbb{R}^*$, il existe $\theta \in \left]0\,;1\right[$ vérifiant la relation

$$f(x) = f(0) + xf'(x\theta).$$

(b) Montrer qu'au voisinage de 0 ce θ est unique.

(c) Déterminer la limite de θ quand $x \to 0$.

Solution

(a) Soit $x \neq 0$. Par le théorème des accroissements finis, il existe c strictement compris entre 0 et x tel que $f(x) - f(0) = f'(c)(x-0)$ c'est-à-dire $f(x) - f(0) = xf'(c)$. On détermine θ convenable en posant $\theta = c/x$.

(b) Si θ et θ' sont deux solutions distinctes, on peut appliquer le théorème de Rolle à la fonction f' et affirmer que la fonction f'' s'annule entre $x\theta$ et $x\theta'$. Or f'' est continue et $f''(0) \neq 0$, il existe donc un voisinage de 0 sur lequel f'' ne s'annule pas. En choisissant x dans ce voisinage, il ne peut exister deux valeurs θ et θ' convenables et distinctes.

(c) Lorsque x varie, θ varie aussi et ainsi se comporte comme une fonction de x : on écrit $\theta = \theta(x)$ afin de souligner cette dépendance.

méthode

> Par la formule de Taylor-Young, on exprime de deux façons un développement limité à l'ordre 2 de f en 0.

La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^2$, on sait, d'une part,

$$f(x) \underset{x\to0}{=} f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2}x^2 f''(0) + \mathrm{o}(x^2).$$

D'autre part, la fonction f' étant de classe $\mathcal{C}^1$, on a aussi

$$f'(x) \underset{x\to0}{=} f'(0) + xf''(0) + \mathrm{o}(x).$$

En évaluant en $x\theta(x)$, il vient

$$f'\big(x\theta(x)\big) \underset{x\to0}{=} f'(0) + x\theta(x)f''(0) + \mathrm{o}\big(x\theta(x)\big) = f'(0) + x\theta(x)f''(0) + \mathrm{o}(x).$$

En effet, la fonction θ étant bornée, une fonction négligeable devant $x\theta(x)$ l'est aussi devant x. L'égalité $f(x) = f(0) + xf'\big(x\theta(x)\big)$ donne alors après simplification

$$x^2\theta(x)f''(0) + \mathrm{o}(x^2) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}x^2 f''(0) + \mathrm{o}(x^2).$$

En divisant par x^2 et en passant à la limite quand x tend vers 0, on conclut que $\theta(x)$ tend vers $1/2$ car $f''(0) \neq 0$.

Exercice 27 ***

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on introduit le polynôme

$$P_n(X) = X(X-1)\dots(X-n).$$

(a) Montrer que le polynôme P_n' possède une unique racine dans l'intervalle $]0\,;1[$.

Cette racine est notée x_n et l'on détermine une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ en faisant varier n.

(b) Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$.

(c) Former la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$F_n = \frac{P_n'}{P_n}.$$

(d) On donne [1]

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.$$

Déterminer un équivalent de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$.

Solution

(a) La fonction polynôme P_n est de degré $n+1$ et s'annule en chacun des $n+1$ entiers : $0, 1, \dots, n$. Par application du théorème de Rolle sur chacun des intervalles $[k\,;k+1]$ (avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$), on obtient que le polynôme P_n' admet au moins une racine dans chacun des intervalles $]k\,;k+1[$. Puisque le polynôme P_n' est de degré n, il possède au plus n racines et donc il ne possède pas d'autres racines que celles qui précèdent. En particulier, le polynôme P_n' possède exactement une racine dans l'intervalle $]0\,;1[$.

(b) **méthode**

‖ On positionne x_n dans le tableau de signe de P_{n+1}' sur $[0\,;1]$.

On a $P_{n+1}(X) = P_n(X)\big(X-(n+1)\big)$. En dérivant et en évaluant en x_n, on obtient $P_{n+1}'(x_n) = P_n(x_n)$ avec

$$P_n(x_n) = \prod_{k=0}^{n}(x_n - k) = \underbrace{x_n}_{>0} \underbrace{\prod_{k=1}^{n}(x_n-k)}_{<0} \text{ du signe de } (-1)^n.$$

1. Voir sujet 6 p. 391.

On a aussi

$$P'_{n+1}(0) = \prod_{k=1}^{n+1}(-k) = (-1)^{n+1}(n+1)! \text{ du signe de } (-1)^{n+1}.$$

La fonction polynôme P'_{n+1} possédant autant de racines distinctes que son degré, elle change de signe à chaque racine. On en déduit que x_n est dans l'intervalle $]0\,;1[$ de l'autre côté de 0 vis-à-vis de x_{n+1}, autrement dit $x_n \geqslant x_{n+1}$. La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

(c) **méthode**

> On forme la décomposition en éléments simples de F_n en dérivant une factorisation de P.

Par dérivation d'un produit en la somme des produits où l'on dérive un seul facteur, on obtient

$$P'_n = \sum_{j=0}^{n}\left(\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(X-k)\right) \quad \text{donc} \quad F_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{X-k}.$$

(d) Sachant $F_n(x_n) = 0$, on obtient en ordonnant les membres l'identité

$$\frac{1}{x_n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k-x_n}.$$

méthode

> On forme un encadrement de $\frac{1}{x_n}$ par des expressions équivalentes.

Puisque $0 < x_n < 1$, on a $k-1 < k - x_n < k$. On isole le premier terme de la somme lors de la majoration pour obtenir l'encadrement

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{x_n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k-x_n} \leqslant \frac{1}{1-x_n} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1} = \frac{1}{1-x_n} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

La suite (x_n) décroissant, le terme $\frac{1}{1-x_n}$ admet une limite finie tandis que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.$$

Par encadrement, on conclut

$$\frac{1}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n \quad \text{puis} \quad x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln n}.$$

CHAPITRE 10

Intégration sur un segment

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et $[a\,;b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$.

10.1 Définition de l'intégrale

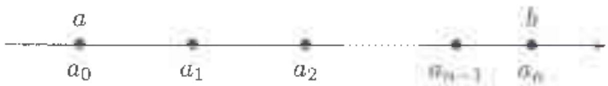
10.1.1 Subdivision

Définition

On appelle *subdivision* du segment $[a\,;b]$ toute suite finie $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de réels vérifiant

$$a_0 = a, \quad a_0 < a_1 < \cdots < a_n \quad \text{et} \quad a_n = b.$$

Les réels a_i sont appelés *points de subdivision* et les intervalles ouverts $]a_{i-1}\,;a_i[$ sont appelés *intervalles de subdivision*.



Une subdivision du segment $[a\,;b]$.

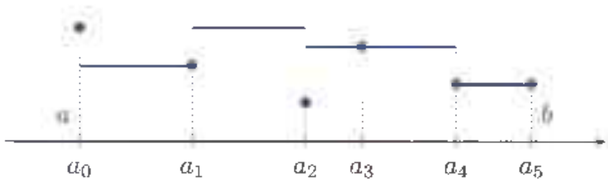
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la subdivision de $[a\,;b]$ *à pas constant* de longueur n est déterminée par les points

$$a_k = a + k\frac{b-a}{n} \quad \text{avec} \quad k \in [\![0\,;n]\!].$$

10.1.2 Fonctions en escalier

Définition

On dit qu'une fonction $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{K}$ est *en escalier* lorsqu'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de $[a\,;b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle de subdivision $]a_{k-1}\,;a_k[$. On dit alors qu'une telle subdivision σ est *adaptée* à la fonction en escalier f.



Une fonction en escalier accompagnée d'une subdivision adaptée.

Si f et g sont des fonctions en escalier définies sur $[a\,;b]$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$, les fonctions λf, $f+g$, fg et $|f|$ sont aussi en escalier.

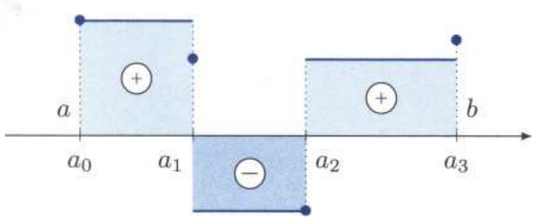
On définit l'intégrale sur $[a\,;b]$ d'une fonction en escalier comme étant « l'aire algébrique sous la courbe »[1].

Définition

Si $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{K}$ est une fonction en escalier et si σ est une subdivision de $[a\,;b]$ adaptée à f, on définit l'*intégrale* de f sur $[a\,;b]$ par la formule

$$\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(a_k - a_{k-1})}_{\text{largeur}} \times \underbrace{h_k}_{\text{hauteur}}$$

avec h_k la valeur de f sur $]a_{k-1}\,;a_k[$



Intégrale d'une fonction en escalier.

1. Lorsque la fonction f est à valeurs réelles, l'aire est comptée positivement lorsque la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses et négativement sinon. Lorsque la fonction f est à valeurs complexes, l'interprétation n'a plus de sens mais la formule demeure !

10.1.3 Fonctions continues par morceaux

Définition

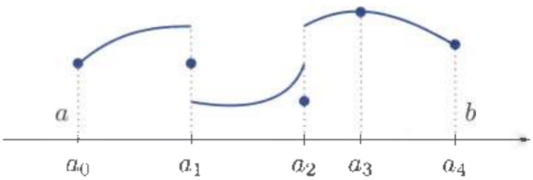
On dit qu'une fonction $f : [a\,;b] \to \mathbb{K}$ est *continue par morceaux* lorsqu'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $[a\,;b]$ telle que, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$:

— f est continue en chaque point de $]a_{k-1}\,;a_k[$;

— f admet une limite finie en a_{k-1}^+ et en a_k^-.

On dit alors qu'une telle subdivision σ est *adaptée* à la continuité par morceaux de f.

Les deux conditions ci-dessus signifient que les restrictions de f aux intervalles ouverts de subdivision $]a_{k-1}\,;a_k[$ peuvent être prolongées en des fonctions continues sur les intervalles fermés $[a_{k-1}\,;a_k]$.



Une fonction continue par morceaux
accompagnée d'une subdivision adaptée.

Définition

On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est *continue par morceaux* lorsque, pour tout segment $[a\,;b]$ inclus dans I, la restriction de f au départ de $[a\,;b]$ est continue par morceaux.

Une fonction continue par morceaux au départ d'un segment $[a\,;b]$ ne peut présenter qu'un nombre fini de discontinuités. Une fonction continue par morceaux au départ d'un intervalle quelconque I peut présenter une infinité de discontinuités.

10.1.4 Continuité uniforme

Définition

Une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est dit *uniformément continue* si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall (x,y) \in I^2, \quad |y - x| \leqslant \alpha \implies \big|f(y) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Les fonctions uniformément continues sont continues. En revanche, il existe des fonctions continues qui ne sont pas uniformément continues [1].

Les fonctions lipschitziennes sont uniformément continues.

1. La différence entre continuité et uniforme continuité se situe au niveau de la valeur relative de α vis-à-vis du point x. Pour une fonction continue, en chaque point x, il existe un α. Pour une fonction uniformément continue, il existe un α qui convient pour chaque x : ceci est notoirement plus exigeant.

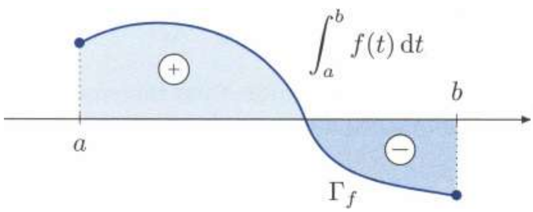
Théorème 1 (Théorème de Heine)
Toute fonction réelle ou complexe définie et continue sur un segment $[a\,;b]$ y est uniformément continue.

10.1.5 Intégrale sur un segment

Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. En approchant uniformément [1] la fonction f par des fonctions en escalier, on définit l'intégrale de f sur $[a\,;b]$ comme la limite des intégrales des fonctions en escalier approchantes. Cette intégrale est notée

$$\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{ou} \quad \int_{[a;b]} f.$$

Lorsque la fonction f est à valeurs réelles, l'intégrale se comprend comme l'aire algébrique comprise entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f.



Intégrale d'une fonction continue sur un segment.

10.2 Propriétés de l'intégrale

10.2.1 Linéarité

Théorème 2
Si f et $g\colon [a\,;b] \to \mathbb{K}$ sont des fonctions continues par morceaux, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\int_{[a;b]} \lambda f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{[a;b]} \big(f(t)+g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{[a;b]} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

En conséquence, lorsqu'une fonction f est à valeurs complexes, l'intégrale de f se déduit des intégrales de la partie réelle et de la partie imaginaire de f :

$$\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a;b]} \mathrm{Re}(f)(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i} \int_{[a;b]} \mathrm{Im}(f)(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. On dit qu'une fonction en escalier φ approche uniformément f sur $[a\,;b]$ à $\varepsilon > 0$ près si l'inégalité $|f(t) - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon$ est vraie pour tout $t \in [a\,;b]$.

10.2.2 Croissance

Théorème 3
Si f et $g\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues par morceaux,

$$f \leqslant g \implies \int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{[a;b]} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

En particulier, l'intégrale d'une fonction positive est positive.

Théorème 4 (Inégalité triangulaire intégrale)
Si $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{K}$ est une fonction continue par morceaux,

$$\left|\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{[a;b]} \left|f(t)\right|\mathrm{d}t.$$

10.2.3 Stricte positivité

Théorème 5
Si $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue [1] et positive,

$$\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \implies \forall t \in [a\,;b],\ f(t) = 0.$$

En particulier, si $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{K}$ est une fonction continue

$$\int_{[a;b]} \left|f(t)\right|\mathrm{d}t = 0 \implies \forall t \in [a\,;b],\ f(t) = 0.$$

Si une fonction continue est d'intégrale nulle, soit il s'agit de la fonction nulle, soit elle change de signe. Dans les deux cas, on peut affirmer :

Théorème 6
Si $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue d'intégrale nulle sur $[a\,;b]$ alors cette fonction s'annule.

1. Ce résultat n'est pas vrai pour une fonction seulement continue par morceaux car il est possible par des discontinuités de définir une fonction positive, d'intégrale nulle mais non nécessairement nulle en tout point.

10.2.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 7 (Inégalité de Cauchy-Schwarz intégrale)
Si f et $g\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues par morceaux,

$$\left|\int_{[a;b]} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(\int_{[a;b]} f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_{[a;b]} g(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

10.2.5 Intégrale entre deux bornes

Définition

Soit $f\colon I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. Pour tous a et b choisis dans I, on définit l'*intégrale de f de la borne a à la borne b* par

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \displaystyle\int_{[a;b]} f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a = b \\ \displaystyle -\int_{[b;a]} f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } a > b. \end{cases}$$

La propriété de linéarité est encore vraie pour les intégrales entre deux bornes. En revanche, les propriétés de croissance et d'inégalité triangulaire ne sont conservées que si $a \leqslant b$: on parle alors d'*intégration en bon ordre*.

Théorème 8 (Relation de Chasles)
Soit $f\colon I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. Pour tous a, b et c choisis dans I,

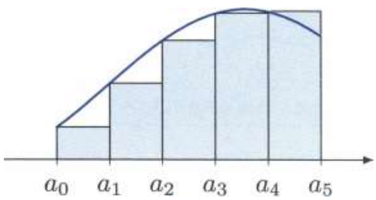
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

10.2.6 Sommes de Riemann

Définition

Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. On appelle *somme de Riemann* associée à la méthode des rectangles à gauche la quantité

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$



La somme S_n constitue une approximation de l'aire sous la courbe.

Théorème 9
Si $f : [a\,;b] \to \mathbb{K}$ est une fonction continue par morceaux,

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On définit aussi les sommes de Riemann associées à la méthode des rectangles à droite et l'on dispose de la même conclusion

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

10.3 Calcul intégral

10.3.1 Primitives et intégrales

Comme déjà présenté dans le chapitre 4, toute fonction f continue sur un intervalle y admet des primitives (Th. 2 p. 123). Si F désigne une primitive de f, on dispose de l'identité suivante permettant le calcul pratique d'intégrales

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_a^b.$$

Notamment cette identité permet de justifier la formule d'intégration par parties (Th. 5 p. 124) ou de changement de variable[1] (Th. 4 p. 123).

10.3.2 Formules de Taylor

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in I$. La fonction f est une primitive de sa dérivée f' et donc

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cette identité est utile lorsque l'on dispose de propriétés sur f' et que l'on souhaite transposer celles-ci à la fonction f. Cette identité se généralise de la façon suivante :

Théorème 10 (Formule de Taylor avec reste intégral)
Si $f : I \to \mathbb{K}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et si a désigne un élément arbitraire de I, on a l'identité suivante pour tout x dans I

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. La formule de changement de variable reste valable lorsque la fonction f n'est que continue par morceaux.

On peut aussi généraliser l'inégalité des accroissements finis :

Théorème 11 (Inégalité de Taylor-Lagrange)
Si $f\colon I \to \mathbb{K}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ dont la dérivée d'ordre $n+1$ est bornée par un réel M alors, pour tous a et x choisis dans I, on a [1]

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M.$$

10.4 Exercices d'apprentissage

10.4.1 Généralités

Exercice 1 (Égalité de la moyenne [2])
Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $c \in [a\,;b]$ tel que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = f(c).$$

Solution

méthode

On exploite que toute fonction continue d'intégrale nulle s'annule (Th. 6 p. 337).

Posons [3]

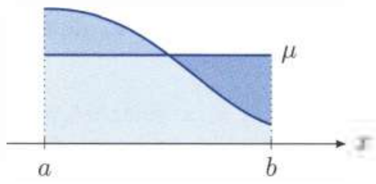
$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction $\varphi\colon t \mapsto f(t) - \mu$ est définie et continue sur $[a\,;b]$. De plus, par linéarité

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b \mu\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \mu(b-a) = 0.$$

La fonction φ s'annule et il existe donc $c \in [a\,;b]$ tel que $\varphi(c) = 0$, c'est-à-dire $\mu = f(c)$.

1. Le majorant exprimé peut se retenir en observant qu'il correspond à la majoration du terme qui serait d'indice $n+1$ dans la somme.
2. Ce résultat se comprend aussi comme une « version intégrale » du théorème des accroissements finis (Th. 5 p. 259).
3. Le réel μ définit la *valeur moyenne* de la fonction f sur $[a\,;b]$.



Égalité de la moyenne.

Exercice 2
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \ln(1 + t^n)\,dt.$$

(a) Montrer que la suite (u_n) est à termes strictement positifs.

(b) Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

(c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Solution

(a) La fonction $f_n : t \mapsto \ln(1 + t^n)$ est continue et positive sur $[0\,;1]$, son intégrale est donc au moins positive.

méthode

> On montre que l'intégrale n'est pas nulle en exploitant que seule la fonction nulle est continue, de signe constant et d'intégrale nulle (Th. 5 p. 337).

La fonction f_n est continue, positive et n'est pas la fonction nulle[1], son intégrale est donc strictement positive.

(b) **méthode**

> On obtient $u_{n+1} < u_n$ en étudiant le signe de l'intégrale exprimant la différence des membres.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a par linéarité.

$$u_n - u_{n+1} = \int_0^1 \underbrace{\Big(\ln(1 + t^n) - \ln(1 + t^{n+1})\Big)}_{=g_n(t)}\,dt.$$

La fonction g_n est continue. Elle est aussi positive car pour tout $t \in [0\,;1]$, on a l'inégalité $t^{n+1} \leqslant t^n$ et par croissance du logarithme, il vient

$$\ln(1 + t^{n+1}) \leqslant \ln(1 + t^n).$$

Enfin, la fonction g_n n'est pas la fonction nulle et donc $u_n - u_{n+1} > 0$.

1. Cependant, cette fonction s'annule lorsque $t = 0$: il n'est donc pas possible d'écrire $f_n(t) > 0$ sur l'intégralité du segment $[0\,;1]$.

(c) Il n'est pas possible de calculer facilement u_n de façon générale.

méthode

En exploitant $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ valable[1] pour tout $x \geqslant 0$, on réalise un encadrement du terme u_n par des intégrales faciles à calculer.

Pour $t \in [0\,;1]$, on a $0 \leqslant \ln(1+t^n) \leqslant t^n$. Par intégration en bon ordre (Th. 3 p. 337), il vient

$$0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par le théorème de convergence encadrement, on conclut que la suite (u_n) tend vers 0.

Exercice 3

Soit $a > 0$ et $f\colon [-a\,;a] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Vérifier

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } f \text{ est paire} \\ 0 & \text{si } f \text{ est impaire.} \end{cases}$$

Solution

méthode

Par changement de variable on transforme l'intégrale de f sur $[-a\,;0]$ en une intégrale sur $[0\,;a]$.

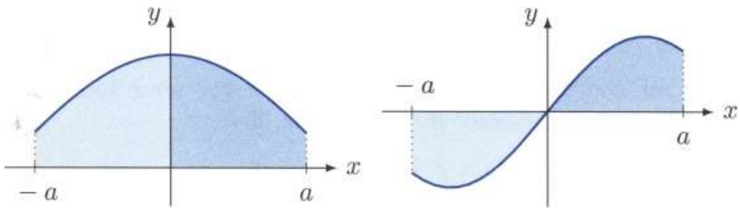
Le changement de variable $u = -t$ avec $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u$ permet d'écrire

$$\int_{t=-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u=a}^{0} f(-u) \times (-\,\mathrm{d}u) = \int_0^a f(-u)\,\mathrm{d}u.$$

Par la relation de Chasles et en renommant la variable d'intégration

$$\int_{t=-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t=0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{a} \big(f(-t)+f(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Si f est paire, $f(-t)+f(t) = 2f(t)$ et si f est impaire, $f(-t)+f(t) = 0$. Dans les deux cas, l'identité proposée est vérifiée.



Intégrale sur $[-a\,;a]$ d'une fonction paire ou impaire.

1. Voir sujet 3 p. 15.

Exercice 4

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $T > 0$. Montrer que la fonction f est T-périodique si, et seulement si, la fonction suivante est constante

$$g\colon x \mapsto \int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Solution

méthode

On exprime g à partir d'une primitive F de la fonction f.

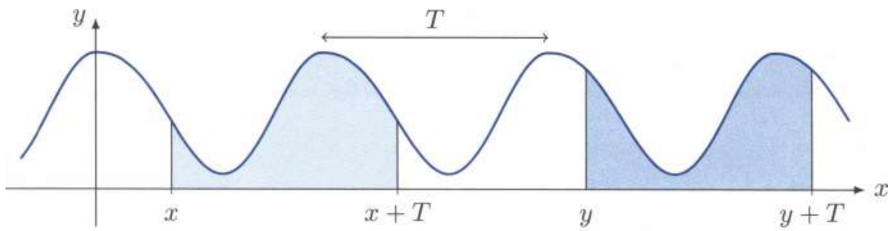
Puisque la fonction f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, on peut introduire une primitive F de celle-ci (Th. 2 p. 123). On peut alors écrire

$$g(x) = \int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_x^{x+T} = F(x+T) - F(x).$$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel

$$g'(x) = F'(x+T) - F'(x) = f(x+T) - f(x).$$

La fonction g est donc constante sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, sa dérivée est nulle, ce qui revient à dire que la fonction f est T-périodique.



Constance de l'intégrale sur une période.

Exercice 5

Soit $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Solution

méthode

On borne l'intégrale par le terme général d'une suite de limite nulle.

Les bornes étant bien ordonnées, on peut employer l'inégalité triangulaire intégrale (Th. 4 p. 337)

$$\left|\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \left|t^n f(t)\right|\mathrm{d}t = \int_0^1 t^n \left|f(t)\right|\mathrm{d}t.$$

méthode

La fonction f est continue sur un segment donc bornée (Th. 16 p. 235).

On peut introduire le réel M égal à la borne supérieure de la fonction [1] $|f|$ sur le segment $[0\,;1]$ et alors

$$\left|\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = M\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{M}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par encadrement, on conclut [2]

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

10.4.2 Sommes de Riemann

Exercice 6

Calculer les limites quand n croît vers l'infini de :

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{n}{k^2}$ (c) $\displaystyle\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}$.

Solution

(a) **méthode**

On transforme l'écriture de la somme afin de faire apparaître une somme de Riemann

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

On factorise $1/n$ devant la somme puis on fait apparaître k/n dans celle-ci

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}.$$

1. On notera que l'on ne se contente pas de majorer f : en majorant la valeur absolue de f on réalise un encadrement de la fonction f.

2. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut aussi rapidement borner l'intégrale par une suite de limite nulle.

On peut alors reconnaître le terme sommé de la forme $f(k/n)$ avec $f(t) = 1/(1+t)$. La fonction f est continue sur $[0\,;1]$ et l'on a donc (Th. 9 p. 339)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \Big[\ln(1+t)\Big]_0^1 = \ln 2.$$

(b) **méthode**

> Par glissement d'indice, on se ramène à une somme indexée de 1 à n que l'on transforme en somme de Riemann comme au-dessus.

En posant $k = n + \ell$

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{n}{(n+\ell)^2} = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{(1+\ell/n)^2}.$$

Le terme sommé s'écrit $f(\ell/n)$ avec $f(t) = 1/(1+t)^2$. La fonction f étant continue sur le segment $[0\,;1]$, on peut écrire

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} = \left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

(c) **méthode**

> Par un logarithme, on transforme les produits en sommes.

Le terme étudié est strictement positif, on peut donc en calculer le logarithme

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k) - \ln n$$

On fait apparaître k/n dans la somme puis on simplifie

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)+\ln n\right) - \ln n\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right).\end{aligned}$$

Le terme sommé est de la forme $f(k/n)$ avec $f(t) = \ln(1+t)$. La fonction f est continue et donc

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t.$$

On calcule l'intégrale par une intégration par parties [1]

$$\int_0^1 1\times\ln(1+t)\,\mathrm{d}t = \Big[(t+1)\ln(1+t)\Big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{d}t = 2\ln 2 - 1.$$

1. Lors de cette intégration par parties, on a choisi $t \mapsto t+1$ pour primitive de $t \mapsto 1$ afin de simplifier la poursuite des calculs.

Enfin, par continuité de l'exponentielle, on conclut

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{2\ln 2-1} = \frac{4}{\mathrm{e}}$$

10.4.3 Intégration des fonctions rationnelles

Exercice 7

Déterminer des primitives des expressions réelles proposées en indiquant les intervalles de validité :

(a) $\dfrac{1}{x^3-x}$ (b) $\dfrac{x-2}{x(x+1)^2}$ (c) $\dfrac{x+1}{x^3+x}$

(d) $\dfrac{x-1}{x^2+2x+2}$ (e) $\dfrac{x}{x^3-1}$ (f) $\dfrac{x}{x^4+1}$.

Solution

méthode

On peut calculer une primitive d'une fonction rationnelle en décomposant celle-ci en éléments simples [1].

(a) La fraction $1/(X^3-X)$ est de partie entière nulle et son dénominateur se factorise sur $\mathbb{R}[X]$ en

$$X^3-X = X(X-1)(X+1).$$

Sa décomposition en éléments simples s'écrit

$$\frac{1}{X^3-X} = \frac{1}{X(X-1)(X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1} \quad \text{avec} \quad a,b,c\in\mathbb{R}.$$

On calcule

$$a = \left.\frac{1}{X^2-1}\right|_{X=0} = -1,\quad b = \left.\frac{1}{X(X+1)}\right|_{X=1} = \frac{1}{2},\quad c = \left.\frac{1}{X(X-1)}\right|_{X=-1} = \frac{1}{2}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-x} &= -\int\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}\\ &= -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| = \frac{1}{2}\ln\left|1-\frac{1}{x^2}\right|\end{aligned}$$

sur chacun des intervalles [2] $]-\infty\,;-1[$, $]-1\,;0[$, $]0\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$.

1. On trouvera le détail des démarches de décomposition en éléments simples dans le chapitre 5 de l'ouvrage *Exercices d'algèbre et de probabilités MPSI*.

2. Une primitive se détermine à une constante près sur un intervalle. Sur une réunion d'intervalles, il y a autant de constantes que d'intervalles.

(b) La fraction $(X-2)/\big(X(X+1)^2\big)$ est de partie entière nulle. Sa décomposition en éléments simples s'écrit

$$\frac{X-2}{X(X+1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{c}{X+1} \quad \text{avec} \quad a,b,c \in \mathbb{R}.$$

On a

$$a = \frac{X-2}{(X+1)^2}\bigg|_{X=0} = -2 \quad \text{et} \quad b = \frac{X-2}{X}\bigg|_{X=-1} = 3.$$

En multipliant par X et en étudiant la limite en $+\infty$, on obtient $c=2$. On a alors

$$\begin{aligned}\int \frac{x-2}{x(x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= -2\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1}\\ &= -2\ln|x| - \frac{3}{x+1} + 2\ln|x+1|\end{aligned}$$

sur chacun des intervalles $]-\infty\,;-1[$, $]-1\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

(c) La fraction $(X+1)/\big(X^3+X\big)$ est de partie entière nulle et son dénominateur se factorise sur $\mathbb{R}[X]$ en

$$X^3 + X = X\big(X^2+1\big).$$

Sa décomposition en éléments simples réelles s'écrit

$$\frac{X+1}{X^3+X} = \frac{a}{X} + \frac{bX+c}{X^2+1} \quad \text{avec} \quad a,b,c \in \mathbb{R}.$$

On a

$$a = \frac{X+1}{X^2+1}\bigg|_{X=0} = 1 \quad \text{et} \quad b\mathrm{i} + c = \frac{X+1}{X}\bigg|_{X=\mathrm{i}} = 1-\mathrm{i}$$

et donc $b=-1$ et $c=1$. On a alors

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^3+x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int \frac{-x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\big(x^2+1\big) + \arctan x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) + \arctan x\end{aligned}$$

sur les intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

(d) La fraction $(X-1)/\big(X^2+2X+2\big)$ est déjà un élément simple réel.

méthode

> On réécrit le numérateur afin de faire apparaître la dérivée du dénominateur à un facteur près et une constante additive près.

On écrit

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-2}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

D'une part, par intégration d'une forme u'/u

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \ln\bigl|\underbrace{x^2+2x+2}_{>0}\bigr| = \ln\bigl(x^2+2x+2\bigr).$$

D'autre part, en écrivant le dénominateur sous forme canonique,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1} \underset{u=x+1}{=} \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \arctan(x+1).$$

Finalement, on obtient sur $\mathbb{R}$

$$\int \frac{x-1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\bigl(x^2+2x+2\bigr) - 2\arctan(x+1).$$

(e) La fraction $X/(X^3-1)$ est de partie entière nulle et son dénominateur se factorise sur $\mathbb{R}[X]$ en

$$X^3-1 = (X-1)\bigl(X^2+X+1\bigr).$$

Sa décomposition en éléments simples s'écrit

$$\frac{X}{X^3-1} = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+X+1} \quad \text{avec} \quad a,b,c\in\mathbb{R}.$$

On calcule

$$a = \frac{X}{X^2+X+1}\bigg|_{X=1} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad bj+c = \frac{X}{X-1}\bigg|_{X=j} = \frac{j}{j-1} = \frac{j(\bar{j}-1)}{|j-1|^2} = \frac{1-j}{3}$$

et donc $b=-1/3$ et $c=1/3$. On a alors

$$\int \frac{x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x.$$

En suivant la même démarche qu'au-dessus

$$\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$$

avec [1]

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \ln\bigl|x^2+x+1\bigr| = \ln\bigl(x^2+x+1\bigr)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\bigl(x+\frac{1}{2}\bigr)^2+\frac{3}{4}} \underset{u=x+\frac{1}{2}}{=} \int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+a^2} \underset{a=\frac{\sqrt{3}}{2}}{=} \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\Bigl(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Bigr).$$

Finalement, sur les intervalles $]-\infty\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$,

$$\int \frac{x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\bigl(x^2+x+1\bigr) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\Bigl(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Bigr).$$

1. On retrouvera détaillée la démarche du deuxième calcul dans le sujet 9 p. 134.

(f) **méthode**

> Une décomposition en éléments simples n'est pas toujours nécessaire !

On reconnaît une forme $u'/(1+u^2)$ en $u(x)=x^2$ qu'il est facile d'intégrer

$$\int \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arctan\left(x^2\right) \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

10.4.4 Formules de Taylor

Exercice 8

Établir que pour tout x dans $[0\,;\pi/2]$

$$x-\frac{1}{6}x^3 \leqslant \sin x \leqslant x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5.$$

Solution

méthode

> On reconnaît les premiers termes du développement de Taylor de la fonction sinus.

Soit $x\in[0\,;\pi/2]$. Par la formule de Taylor avec reste intégral (Th. 10 p. 339) appliquée à la fonction sinus à l'ordre $n=4$, on peut écrire

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}\cos t\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout t compris entre 0 et x, on a $0\leqslant \cos t\leqslant 1$. Par intégration en bon ordre

$$0\leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}\cos t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}\,\mathrm{d}t=\frac{x^5}{120}.$$

On en déduit l'encadrement[1] demandé

$$x-\frac{1}{6}x^3 \leqslant \sin x \leqslant x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5.$$

Exercice 9

Montrer en appliquant une formule de Taylor

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}.$$

1. De nombreux encadrements peuvent être obtenus ainsi comme $1-\frac{x^2}{2}\leqslant \cos x\leqslant 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ pour x dans $[0\,;\pi/2]$.

Solution

méthode

> Les termes sommés sont les premiers coefficients du développement de Taylor de la fonction exponentielle.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la fonction exponentielle, on écrit

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t.$$

En particulier, pour $x = 1$, il vient

$$\mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$$

avec [1]

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \underbrace{\mathrm{e}^t}_{\leqslant \mathrm{e}} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e} \, \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

On peut alors conclure [2]

$$\mathrm{e} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

10.5 Exercices d'entraînement

10.5.1 Généralités

Exercice 10 *

Soit $f : [a\,; b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe une unique primitive F de f vérifiant

$$\int_a^b F(t) \, \mathrm{d}t = 0.$$

Solution

méthode

> Les primitives de f sont déterminées à une constante additive près, on adapte celle-ci pour que la condition intégrale soit vérifiée.

1. Plus directement, on pourrait aussi employer l'inégalité de Taylor-Lagrange.
2. Plus généralement, on montre aussi $\mathrm{e}^x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ pour tout réel x.

La fonction f est continue sur l'intervalle $[a\,;b]$, elle y admet donc au moins une primitive G (Th. 2 p. 123). Les autres primitives de f sont alors les fonctions $F = G + C$ avec C une constante réelle. Par linéarité

$$\int_a^b F(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \big(G(t) + C\big)\,\mathrm{d}t = \int_a^b G(t)\,\mathrm{d}t + C(b-a).$$

Cette intégrale est nulle si, et seulement si,

$$C = -\frac{1}{b-a}\int_a^b G(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, il existe une unique primitive F de f d'intégrale nulle sur $[a\,;b]$.

Exercice 11 *

Soit $f, g\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et positives. On suppose $f(t)g(t) \geqslant 1$ pour tout $t \in [0\,;1]$. Montrer

$$\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right) \geqslant 1.$$

Solution

méthode

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz (Th. 7 p. 338).

Les fonctions f et g étant positives, on peut introduire les fonctions composées $\sqrt{f}$ et $\sqrt{g}$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_0^1 \sqrt{f(t)}\sqrt{g(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Par élévation au carré puis croissance l'intégrale bien ordonnée

$$\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right) \geqslant \left(\int_0^1 \underbrace{\sqrt{f(t)g(t)}}_{\geqslant 1}\,\mathrm{d}t\right)^2 \geqslant \left(\int_0^1 \mathrm{d}t\right)^2 = 1.$$

Exercice 12 *

Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(a+b-x) = f(x)$ pour tout $x \in [a\,;b]$. Montrer

$$\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Solution

méthode

On réalise le changement de variable $t = a + b - x$.

On obtient

$$\int_{x=a}^{b} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_{t=b}^{a} (a+b-t)f(t) \times (-\,\mathrm{d}t) = \int_{a}^{b} (a+b-t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En renommant la variable d'intégration et en sommant les deux intégrales, on obtient la simplification

$$2\int_{a}^{b} xf(x)\,\mathrm{d}x = (a+b)\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On en déduit l'identité demandée [1].

Exercice 13 *

Soit α un réel strictement positif. En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer un équivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}.$$

Solution

méthode

On factorise par une bonne puissance de n afin de faire apparaître une somme de Riemann.

On peut écrire

$$S_n = n^{\alpha+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha}\right).$$

Le terme sommé correspond à la valeur en k/n de la fonction $f : t \mapsto t^{\alpha}$ définie et continue sur $[0\,;1]$. Par le théorème sur les sommes de Riemann (Th. 9 p. 339), on obtient

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{0}^{1} t^{\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{\alpha+1}.$$

Cette limite étant finie et non nulle, c'est aussi un équivalent (Th. 6 p. 292) et l'on peut conclure [2]

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

1. L'hypothèse $f(a+b-x) = f(x)$ signifie que le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe d'équation $x = (a+b)/2$. L'intégrale de $x \mapsto \big(x - (a+b)/2\big)f(x)$ se comprend après translation de la variable comme l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à 0.

2. On pourra comparer cette méthode à celle du sujet 8 p. 393.

10.5.2 Croissance et positivité de l'intégrale

Exercice 14 *
Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(b-a)(b+a)}{2}.$$

Montrer qu'il existe $x \in [a\,;b]$ tel que $f(x) = x$.

Solution

méthode

> En calculant son intégrale, on établit que la fonction $x \mapsto f(x) - x$ s'annule.

La fonction différence $x \mapsto f(x) - x$ est continue et d'intégrale nulle car par linéarité

$$\int_a^b \big(f(t) - t\big)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b^2-a^2}{2} = 0.$$

On peut donc affirmer que cette fonction s'annule (Th. 6 p. 337) ce qui assure l'existence d'un point fixe à la fonction f.

Exercice 15 ** (Formule de la moyenne [1])
Soit $f, g\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues avec $g \geqslant 0$. Montrer qu'il existe $x \in [a\,;b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(x)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Solution

méthode

> Lorsqu'il est défini, on encadre le quotient des intégrales par les valeurs extrêmes de f.

Si l'intégrale de g sur $[a\,;b]$ est nulle, la fonction g est nulle car il s'agit d'une fonction continue et positive (Th. 5 p. 337). N'importe quel x de l'intervalle $[a\,;b]$ convient

Sinon, on peut introduire le quotient

$$q = \frac{\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Puisque la fonction f est continue sur le segment $[a\,;b]$, elle admet un minimum et un maximum en des points c et d (Th. 16 p. 235). Posons $m = f(c)$ et $M = f(d)$.

1. Ce résultat généralise celui du sujet 1 p. 340.

Par positivité de la fonction g, on a pour tout $t \in [a\,;b]$

$$mg(t) \leqslant f(t)g(t) \leqslant Mg(t).$$

En intégrant en bon ordre (Th. 3 p. 337), il vient

$$m\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Le quotient q est donc compris entre m et M. Il suffit ensuite d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction continue f entre c et d pour conclure.

Exercice 16 **

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

(a) À quelle condition portant sur f a-t-on l'égalité suivante ?

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

(b) Même question pour une fonction f à valeurs complexes.

Solution

(a) Si la fonction f est positive, l'égalité est immédiate. Si la fonction f est négative, l'identité est encore vraie. Montrons que ce sont les deux seuls cas possibles.

méthode

> Dans le cas où l'intégrale est positive, on montre $f = |f|$ en étudiant l'intégrale de la différence.

Supposons

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

On a donc

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \quad \text{puis} \quad \int_a^b \Big(|f(t)| - f(t)\Big)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Or la fonction $|f| - f$ est continue et positive. C'est donc la fonction nulle (Th. 5 p. 337). Ainsi, la fonction f est positive.

De façon semblable, on conclut que f est négative en étudiant l'intégrale de $|f| + f$ lorsque l'intégrale de f est négative.

(b) **méthode**

> On écrit l'intégrale de f sous la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et l'on étudie l'intégrale de la fonction $g : t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

Supposons
$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$
On écrit
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad \text{avec} \quad r = \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$
La fonction $g\colon t \to f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ vérifie :
$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \in \mathbb{R}$$
et donc
$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}\big(g(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$
De plus $|g| = |f|$ et l'on peut écrire
$$\int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t = r = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}\big(g(t)\big)\,\mathrm{d}t$$
puis
$$\int_a^b \Big(|g(t)| - \mathrm{Re}\big(g(t)\big)\Big)\,\mathrm{d}t = 0.$$
Puisque la fonction réelle $|g| - \mathrm{Re}(g)$ est continue, positive et d'intégrale nulle, c'est la fonction nulle. On en déduit $\mathrm{Re}(g) = |g|$ et la fonction g est donc une fonction réelle et positive.

Finalement, la fonction f est de la forme $t \mapsto g(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec g fonction réelle et positive. La réciproque est immédiate.

Exercice 17 **

Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $n \in \mathbb{N}$ vérifiant :
$$\int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{pour tout } k \in [\![0\,;n]\!].$$
Montrer que la fonction f s'annule au moins $n+1$ fois dans l'intervalle $[a\,;b]$.

Solution

Par linéarité de l'intégrale, on a
$$\int_a^b P(t)f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
pour toute fonction polynomiale de degré inférieur à n.

méthode

Par l'absurde, on détermine une fonction polynôme P telle que la fonction $t \mapsto P(t)f(t)$ soit de signe constant.

Supposons par l'absurde que la fonction f ne s'annule pas plus de n fois dans $[a\,;b]$. Notons $x_1 < \cdots < x_p$ (avec $p \leqslant n$) les points où f s'annule tout en changeant de signe. Considérons ensuite la fonction polynomiale P définie par

$$P(x) = (x - x_1)\dots(x - x_p).$$

La fonction P s'annule en changeant de signe en exactement les mêmes points $x_1, \dots, x_p$. La fonction produit $t \mapsto P(t)f(t)$ est donc de signe constant. Or cette fonction est continue et d'intégrale nulle, c'est donc la fonction nulle. Il en découle que la fonction f est nulle sur $[a\,;b]$ ce qui est absurde car celle-ci était supposée ne s'annuler qu'au plus n fois.

10.5.3 Limites d'intégrales

Exercice 18 **

Étudier les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_0^x \frac{\sin t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \int_x^{x+1} \arctan t\,\mathrm{d}t$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

Solution

Dans chaque cas, il n'est pas possible (ou pas nécessaire) de calculer la valeur de l'intégrale.

(a) On intègre une fonction bornée sur un intervalle de plus en plus petit, il est raisonnable de présumer que l'intégrale tend vers 0.

méthode

On majore la valeur absolue de l'intégrale par une intégrale plus facile à calculer.

Pour $x > 0$, on a par l'inégalité triangulaire intégrale

$$\left|\int_0^x \frac{\sin t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x \underbrace{\frac{|\sin t|}{1+t^2}}_{\leqslant 1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \mathrm{d}t = x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0.$$

Effectivement, l'intégrale étudiée est de limite nulle[1].

1. On peut aussi introduire une primitive F et affirmer $F(x) - F(0) \to 0$ par continuité de F en 0.

(b) L'intervalle d'intégration est toujours de longueur 1 et la fonction intégrée se rapproche de $\pi/2$. On peut présumer que l'intégrale tend vers $\pi/2$.

méthode

> On encadre la fonction intégrée en prenant appui sur les bornes d'intégration.

Pour tout $t \in [x\,;x+1]$, on peut affirmer par croissance de la fonction arctan

$$\arctan x \leqslant \arctan t \leqslant \arctan(x+1).$$

En intégrant en bon ordre, il vient

$$\int_x^{x+1} \arctan x \,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x+1} \arctan t \,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x+1} \arctan(x+1)\,\mathrm{d}t.$$

Les intégrales encadrantes sont faciles à calculer car il s'agit d'intégrales de fonctions constantes :

$$\arctan x \leqslant f(x) \leqslant \arctan(x+1).$$

Les deux membres encadrants tendent vers $\pi/2$ quand x tend vers $+\infty$. Par le théorème de limite finie par encadrement, on conclut que f tend vers $\pi/2$ en $+\infty$.

(c) La longueur de l'intervalle d'intégration tend vers $+\infty$ mais la fonction intégrée y est de plus en plus petite. On est confronté à la résolution d'une forme indéterminée du type « $(+\infty) \times 0$ ».

méthode

> Pour cerner l'ordre de grandeur asymptotique, on encadre de nouveau la fonction intégrée en prenant appui sur les bornes d'intégration.

Soit $x > 1$. Pour $t \in [x\,;2x]$, on a l'encadrement

$$\frac{1}{\ln(2x)} \leqslant \frac{1}{\ln t} \leqslant \frac{1}{\ln x}.$$

En intégrant en bon ordre, il vient

$$\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(2x)} \leqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \leqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln x}.$$

On obtient alors l'encadrement

$$\underbrace{\frac{x}{\ln(2x)}}_{x\to+\infty} {}_{+\infty} \leqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \leqslant \frac{x}{\ln x}.$$

Finalement, par le théorème de limite infinie par minoration

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = +\infty.$$

(d) La longueur de l'intervalle d'intégration tend vers 0 mais la fonction intégrée y est de plus en plus grande. On est confronté à la résolution d'une forme indéterminée du type « $0 \times (+\infty)$ ».

Pour cerner l'ordre de grandeur asymptotique, on commence par encadrer la fonction intégrée par des constantes. Soit $x > 0$. Pour $t \in [x\,;2x]$, on a

$$e^x \leqslant e^t \leqslant e^{2x} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2x} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{x}$$

donc

$$\frac{e^x}{2x} \leqslant \frac{e^t}{t} \leqslant \frac{e^{2x}}{x}.$$

Par intégration en bon ordre

$$\underbrace{\int_x^{2x} \frac{e^x}{2x}\,dt}_{=\frac{e^x}{2}\xrightarrow[x\to 0^+]{}\frac{1}{2}} \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt \leqslant \underbrace{\int_x^{2x} \frac{e^{2x}}{x}\,dt}_{=e^{2x}\xrightarrow[x\to 0^+]{}1}.$$

L'encadrement est trop large pour conclure autre chose que « la fonction est bornée au voisinage de 0 ».

méthode

> On encadre la fonction intégrée non plus par des constantes mais par des fonctions qui lui sont proches et dont on sait calculer les intégrales.

Dans l'étude ci-dessus, c'est l'encadrement du facteur $1/t$ qui a introduit l'écart entre les deux membres encadrants : on ne va encadrer que le terme exponentiel. Pour tout t de $[x\,;2x]$, on a

$$\frac{e^x}{t} \leqslant \frac{e^t}{t} \leqslant \frac{e^{2x}}{t}.$$

En intégrant en bon ordre

$$\int_x^{2x} \frac{e^x}{t}\,dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^{2x}}{t}\,dt.$$

Les intégrales encadrantes sont immédiates à calculer et l'on obtient

$$\underbrace{e^x \ln 2}_{\xrightarrow[x\to 0^+]{}\ln 2} \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt \leqslant \underbrace{e^{2x} \ln 2}_{\xrightarrow[x\to 0^+]{}\ln 2}.$$

Finalement, on conclut par le théorème d'existence de limite par encadrement

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt = \ln 2.$$

(e) La longueur de l'intervalle d'intégration tend vers 0 mais la fonction intégrée y tend vers l'infini : on doit résoudre une forme indéterminée du type « $0 \times (+\infty)$ ».

Comme au-dessus, l'encadrement de la fonction intégrée par deux constantes déterminées à partir des bornes d'intégration se révèle trop large.

méthode

> On sait intégrer la fonction $t \mapsto \frac{1}{t\ln t}$ et cette fonction est proche de $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ au voisinage de 1.

Soit $x > 1$. Pour tout $t \in [x\,;x^2]$, on a $x \leqslant t \leqslant x^2$ et $t\ln t > 0$ donc

$$\frac{x}{t\ln t} \leqslant \frac{t}{t\ln t} = \frac{1}{\ln t} \leqslant \frac{x^2}{t\ln t}.$$

Par intégration en bon ordre

$$\int_x^{x^2} \frac{x\,\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{x^2\,\mathrm{d}t}{t\ln t}.$$

Les intégrales encadrantes peuvent être calculées en reconnaissant une forme u'/u

$$\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \Big[\ln|\ln t|\Big]_x^{x^2} = \ln 2.$$

On obtient ainsi

$$x\ln 2 \leqslant \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \leqslant x^2\ln 2.$$

Par le théorème de limite finie par encadrement, on conclut que l'intégrale étudiée tend vers $\ln 2$ quand x tend vers 1 par valeurs supérieures.

(f) L'étude quand x tend vers 1 par valeurs inférieures est analogue, mais l'encadrement de départ est inversé, on divise par $t\ln t < 0$ ce qui renverse l'encadrement et l'on intègre en mauvais ordre ce qui inverse une dernière fois l'encadrement. La limite obtenue demeure cependant la même.

Exercice 19 **

Soit a et b deux réels strictement positifs. Pour $f\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue dérivable en 0, étudier

$$\lim_{x\to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Solution

Lorsque x tend vers 0^+, l'intervalle d'intégration se réduit mais parallèlement la fonction intégrée est susceptible de devenir de plus en plus grande : il y a une indétermination à résoudre.

méthode

Afin d'exploiter la dérivabilité en 0, on écrit le numérateur $f(t) - f(0) + f(0)$.

Par linéarité

$$\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt + \int_{ax}^{bx} \frac{f(0)}{t}\,dt.$$

La seconde intégrale est immédiate à calculer

$$\int_{ax}^{bx} \frac{f(0)}{t}\,dt = \Big[f(0)\ln t\Big]_{ax}^{bx} = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Pour étudier la limite de la première intégrale, on introduit la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par

$$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

et prolongée par continuité en 0 en posant $g(0) = f'(0)$. La fonction g est continue sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, on peut donc en introduire une primitive G sur cet intervalle et écrire

$$\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt = \Big[G(t)\Big]_{ax}^{bx} = G(bx) - G(ax) \xrightarrow[x\to 0^+]{} G(0) - G(0) = 0.$$

Finalement,

$$\lim_{x\to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,dt = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Exercice 20 ** (Lemme de Lebesgue)

Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = 0.$$

Solution

méthode

Par intégration par parties, on fait apparaître un facteur $1/n$ qui sera à l'origine de la nullité de la limite.

On réalise l'intégration par parties déterminée par les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies par

$$u(t) = -\frac{\cos(nt)}{n} \quad \text{et} \quad v(t) = f(t).$$

On obtient

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = \left[-\frac{f(t)}{n}\cos(nt)\right]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)\,dt.$$

D'une part,

$$\frac{1}{n} f(a) \underbrace{\cos(na)}_{\text{bornée}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} f(b) \underbrace{\cos(nb)}_{\text{bornée}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'autre part, l'inégalité triangulaire intégrale donne

$$\left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b \left|f'(t)\cos(nt)\right|\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b \left|f'(t)\right|\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

car le terme intégral dans le dernier membre est une constante [1].

On peut conclure

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 21 ***

Soit $f\colon [0\,;\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Déterminer la limite quand n tend vers l'infini de

$$\int_0^\pi f(t)\left|\sin(nt)\right|\mathrm{d}t.$$

Solution

méthode

On découpe l'intégrale en les $k\pi/n$ (avec k entier) afin de résoudre la valeur absolue du sinus.

Par la relation de Chasles

$$\int_0^\pi f(t)\left|\sin(nt)\right|\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} f(t)\left|\sin(nt)\right|\mathrm{d}t\right).$$

Par la translation de variable $t = u + k\pi/n$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(t)\left|\sin(nt)\right|\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_0^{\pi/n} f\left(u+\frac{k\pi}{n}\right)\left|\sin(nu+k\pi)\right|\mathrm{d}u\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_0^{\pi/n} f\left(u+\frac{k\pi}{n}\right)\underbrace{\sin(nu)}_{\geqslant 0}\mathrm{d}u\right).\end{aligned}$$

méthode

Sur l'intervalle d'intégration les valeurs prises par f sont voisines de la constante $f(k\pi/n)$.

1. Il est inutile de vouloir exprimer plus simplement cette constante et cela n'est d'ailleurs pas possible de façon générale à cause de la valeur absolue.

Pour exploiter cette idée, on écrit

$$\int_0^{\pi} f(t)\left|\sin(nt)\right| \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_0^{\pi/n}\left(f\left(u+\frac{k\pi}{n}\right)-f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)\sin(nu)\,\mathrm{d}u\right)$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_0^{\pi/n} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin(nu)\,\mathrm{d}u\right).$$

D'une part,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_0^{\pi/n} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin(nu)\,\mathrm{d}u\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\left[-\frac{\cos(nu)}{n}\right]_0^{\pi/n} = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

On reconnaît une somme de Riemann et donc

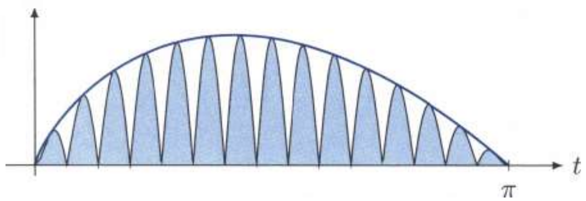
$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_0^{\pi/n} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin(nu)\,\mathrm{d}u\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\int_0^1 f(\pi x)\,\mathrm{d}x \underset{t=\pi x}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'autre part, la fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$, sa dérivée est continue donc bornée sur le segment $[0\,;\pi]$. La fonction f est alors M-lipschitzienne (Th. 6 p. 259) avec M le max de $|f'|$ sur $[0\,;\pi]$. On en déduit

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_0^{\pi/n}\left(f\left(u+\frac{k\pi}{n}\right)-f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)\sin(nu)\,\mathrm{d}u\right)\right|$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_0^{\pi/n}\left|f\left(u+\frac{k\pi}{n}\right)-f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|\underbrace{\sin(nu)}_{\leqslant 1}\,\mathrm{d}u\right)$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_0^{\pi/n} Mu\,\mathrm{d}u\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{M\pi^2}{2n^2} = \frac{M\pi^2}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On peut conclure [1]

$$\int_0^{\pi} f(t)\left|\sin(nt)\right| \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t.$$



Une fonction f accompagnée de $t \mapsto f(t)\left|\sin(nt)\right|$.

1. Ce résultat peut également être obtenu pour une fonction f seulement continue en exploitant son uniforme continuité sur le segment $[0\,;\pi]$.

10.5.4 Fonctions dont la variable définit une borne d'intégration

Exercice 22 *

Pour $x > 0$, on pose

$$I(x) = \int_{1/x}^{x} \frac{t}{1+t+t^2+t^3}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que la fonction I est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

(b) Calculer $I'(x)$ et en déduire une expression simple de $I(x)$ pour tout $x > 0$.

Solution

(a) **méthode**

On exprime $I(x)$ en introduisant une primitive de la fonction intégrée.

La fonction de l'intégrale est définie et continue sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, on peut donc en introduire une primitive[1] F (Th. 2 p. 123). On a alors pour tout x strictement positif

$$I(x) = \Big[F(t)\Big]_{1/x}^{x} = F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right).$$

La fonction F étant de classe $\mathcal{C}^1$ (car primitive d'une fonction continue), la fonction I est de classe $\mathcal{C}^1$ par opérations sur les fonctions.

(b) Sachant dériver la primitive F, on obtient par dérivation de fonctions composées

$$\begin{aligned}
I'(x) &= F'(x) + \frac{1}{x^2}F'\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{x}{1+x+x^2+x^3} + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} \\
&= \frac{x}{1+x+x^2+x^3} + \frac{1}{x^3+x^2+x+1} = \frac{1}{x^2+1}
\end{aligned}$$

car on a la factorisation $x^3+x^2+x+1 = (x+1)(x^2+1)$.

On en déduit l'existence d'une constante C telle que, pour tout $x > 0$,

$$I(x) = \arctan x + C.$$

Puisque $I(1) = 0$, on conclut $C = -\pi/4$.

1. Par décomposition en éléments simples, il est possible de calculer $F(x)$ mais cela n'est pas nécessaire pour cette étude.

Exercice 23 **

On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par la relation

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t^2}}{t}\,dt.$$

(a) Montrer que la fonction f est bien définie et étudier sa parité.

(b) Déterminer, si elle existe, la limite de f en 0.

On prolonge f par continuité en 0 à l'aide de la valeur précédemment obtenue.

(c) Montrer que f est de dérivable sur $\mathbb{R}$.

(d) Étudier la limite de f en $+\infty$.

Solution

(a) La fonction intégrée n'est pas définie en 0. Cependant, pour chaque $x > 0$, la fonction intégrée est parfaitement définie et continue sur le segment $[x\,;2x]$. L'intégrale définissant $f(x)$ est donc bien définie dans ce cas. Il en est de même lorsque $x < 0$.

méthode

On étudie la parité de f en réalisant le changement de variable $t = -s$.

$$f(-x) = \int_{t=-x}^{2x} \frac{e^{-t^2}}{t}\,dt = \int_{s=x}^{2x} \frac{e^{-s^2}}{-s} \times (-\,ds) = \int_x^{2x} \frac{e^{-s^2}}{s}\,ds = f(x).$$

On en déduit que la fonction f est paire.

(b) L'étude de la limite de f en 0 conduit à la résolution d'une forme indéterminée du type « $0 \times (+\infty)$ ». En effet, si l'intervalle d'intégration est de plus en plus petit, la fonction intégrée y est de plus en plus grande !

méthode

Il n'est pas possible d'exprimer simplement l'intégrale définissant $f(x)$. Pour en étudier la limite, on encadre la fonction intégrée en prenant appui sur des fonctions proches dont on sait calculer des primitives [1].

Pour $x > 0$, on peut écrire par croissance de la fonction exponentielle

$$e^{-4x^2} \leqslant e^{-t^2} \leqslant e^{-x^2}$$

pour tout t de l'intervalle d'intégration $[x\,;2x]$. En divisant par le facteur positif t, on obtient après intégration en bon ordre

$$\int_x^{2x} \frac{e^{-4x^2}}{t}\,dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^{-t^2}}{t}\,dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^{-x^2}}{t}\,dt.$$

1. On voit dans le sujet 19 p. 359 une alternative à cette démarche.

Les intégrales encadrantes sont faciles à calculer car le facteur exponentiel y est constant. On obtient ainsi

$$\mathrm{e}^{-4x^2}\ln 2 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}\ln 2. \qquad (*)$$

Par le théorème d'existence de limite par encadrement, on peut affirmer que $f(x)$ tend vers $\ln 2$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Par parité, on obtient la même limite par valeurs inférieures.

On pose alors $f(0) = \ln 2$ afin de prolonger f par continuité en 0.

(c) **méthode**

> En introduisant une primitive, on montre que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des deux intervalles constituant $\mathbb{R}^*$.

Soit F une primitive de la fonction continue $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}/t$ sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction F est dérivable et $f(x) = F(2x) - F(x)$. La fonction f est donc aussi dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, par dérivation de fonctions composées,

$$f'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-4x^2} - \mathrm{e}^{-x^2}}{x}.$$

L'étude sur l'intervalle[1] $\mathbb{R}_-^*$ est identique et conduit à la même expression de $f'(x)$.

méthode

> On résout l'étude en 0 par le théorème de la limite de la dérivée (Th. 7 p. 260).

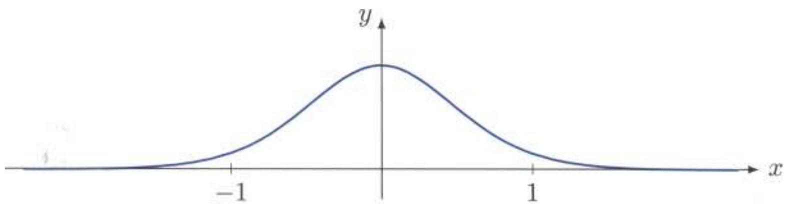
En écrivant les développements limités

$$\mathrm{e}^{-x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + o(x^2) \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{-4x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - 4x^2 + o(x^2)$$

on obtient

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{-3x^2 + o(x^2)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

La fonction f est continue en 0 et sa dérivée sur $\mathbb{R}^*$ admet une limite finie en 0, c'est donc une fonction dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.



Allure de la fonction $x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. L'étude n'a pas été directement réalisée sur $\mathbb{R}^*$ car ce domaine n'est pas un intervalle : ceci empêche d'utiliser le théorème calculant une intégrale à partir d'une primitive (Th. 3 p. 123).

(d) **méthode**

‖ On reprend l'encadrement $(*)$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, les deux membres encadrants sont de limites nulles et la fonction f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 24 **

Soit $f\colon [0\,;+\infty[\,\to\mathbb{R}$ une fonction continue et $g\colon]0\,;+\infty[\,\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que la fonction g est dérivable et solution de l'équation différentielle

$$xy'+y=f(x).$$

(b) Déterminer, si elle existe, la limite de g en 0.

On suppose que f tend vers une limite finie ℓ en $+\infty$.

(c) Étudier la limite de g en $+\infty$.

Solution

La valeur $g(x)$ se comprend comme la valeur moyenne de la fonction f sur $[0\,;x]$.

(a) La fonction g est le produit de la fonction inverse et d'une fonction décrivant une primitive, c'est donc une fonction dérivable sur $]0\,;+\infty[$. De plus, en dérivant la relation

$$xg(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

on obtient immédiatement

$$xg'(x)+g(x)=f(x).$$

(b) Lorsque x tend vers 0^+, l'étude de la limite de $g(x)$ conduit à la résolution d'une forme indéterminée du type « 0/0 ». Cependant, le segment $[0\,;x]$ tend à se rapprocher du singleton $\{0\}$, il est alors raisonnable de présumer que la valeur moyenne $g(x)$ se rapproche de la valeur de f en 0.

méthode

‖ On introduit une primitive de f puis on exprime g comme un taux d'accroissement [1].

Soit F une primitive de la fonction continue f sur $[0\,;+\infty[$. Pour tout $x>0$

$$g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_0^x=\frac{F(x)-F(0)}{x}.$$

1. On peut aussi exploiter l'égalité de la moyenne (sujet 1 p. 340) ou raisonner par les ε.

La fonction F étant dérivable en 0, on obtient directement

$$g(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} F'(0) = f(0).$$

(c) Lorsque x tend vers $+\infty$, il est raisonnable de présumer que la valeur moyenne $g(x)$ se rapproche de la limite ℓ de f en $+\infty$. Pour cette raison, on étudie

$$g(x) - \ell = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \ell.$$

méthode

> On exprime ℓ comme une intégrale afin de rapprocher l'écriture des termes de la différence.

On écrit

$$g(x) - \ell = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x}\int_0^x \ell\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x \big(f(t) - \ell\big)\,\mathrm{d}t.$$

méthode

> On signifie par les ε la proximité de f à sa limite au voisinage de l'infini.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un réel $A \geqslant 0$ tel que $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour tout réel $x \geqslant A$. On découpe alors l'intégrale en A.

$$\frac{1}{x}\int_0^x \big(f(t) - \ell\big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^A \big(f(t) - \ell\big)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_A^x \big(f(t) - \ell\big)\,\mathrm{d}t.$$

D'une part, on a par l'inégalité triangulaire

$$\left|\frac{1}{x}\int_A^x \big(f(t) - \ell\big)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{x}\int_A^x \underbrace{\big|f(t) - \ell\big|}_{\leqslant \varepsilon}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x - A}{x}\varepsilon \leqslant \varepsilon.$$

D'autre part,

$$\frac{1}{x}\underbrace{\int_0^A \big(f(t) - \ell\big)\,\mathrm{d}t}_{\text{constante}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

Il existe donc un réel $A' \geqslant 0$ tel que cette quantité soit elle aussi bornée par ε.

Pour $x \geqslant \max(A, A')$, on a alors $|g(x) - \ell| \leqslant 2\varepsilon$. Finalement, la fonction g tend vers ℓ en $+\infty$.

Exercice 25 **

Soit $g\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ continue. On définit $F\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^1 \min(x,t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer $F''(x)$.

(b) En déduire

$$F(x) = \int_0^x \left(\int_t^1 g(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t.$$

Solution

(a) **méthode**

> On découpe l'intégrale en $t = x$ afin de pouvoir évaluer $\min(x,t)$.

Par la relation de Chasles, on a pour tout x de $[0\,;1]$

$$F(x) = \int_0^x \underbrace{\min(x,t)}_{=t} g(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 \underbrace{\min(x,t)}_{=x} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x tg(t)\,\mathrm{d}t - x\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit que F est dérivable sur $[0\,;1]$ avec, par dérivation de primitives et d'un produit,

$$F'(x) = \underbrace{xg(x) - xg(x)}_{=0} - \int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t = -\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction F est donc une nouvelle fois dérivable avec $F''(x) = -g(x)$ pour tout x du segment $[0\,;1]$.

Finalement, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$.

(b) **méthode**

> Lorsqu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut exprimer celle-ci à partir de sa dérivée en écrivant
>
> $$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Puisque F' est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut écrire pour tout t dans $[0\,;1]$

$$F'(t) = \underbrace{F'(1)}_{=0} + \int_1^t F''(u)\,\mathrm{d}u = -\int_1^t g(u)\,\mathrm{d}u = \int_t^1 g(u)\,\mathrm{d}u.$$

Sachant $F(0) = 0$, on obtient ensuite

$$F(x) = \underbrace{F(0)}_{=0} + \int_0^x F'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\int_t^1 g(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t.$$

10.5.5 Formules de Taylor

Exercice 26 **
Soit $g\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Déterminer les fonctions $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$, deux fois dérivables, telles que

$$f(0) = f(1) = 0 \quad \text{et} \quad f'' = g.$$

Solution

méthode

Par la formule de Taylor avec reste intégral, il est possible d'exprimer f à partir de sa dérivée seconde.

Analyse : Si f est solution du problème posé, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ car deux fois dérivable et de dérivée seconde g continue. On peut alors appliquer la formule de Taylor avec reste intégral et écrire pour tout x de $[0\,;1]$

$$f(x) = \underbrace{f(0)}_{=0} + xf'(0) + \int_0^x (x-t)\underbrace{f''(t)}_{=g(t)}\,\mathrm{d}t = xf'(0) + \int_0^x (x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or $f(1) = 0$ et donc

$$f'(0) = \int_0^1 (t-1)g(t)\,\mathrm{d}t$$

puis

$$f(x) = x\int_0^1 (t-1)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x (x-t)g(t)\,\mathrm{d}t. \tag{$*$}$$

Cette relation détermine entièrement la fonction f.

Synthèse : Considérons la fonction f définie par la relation $(*)$ ci-dessus.

On vérifie immédiatement $f(0) = f(1) = 0$. De plus, on peut écrire pour x dans $[0\,;1]$

$$f(x) = x\int_0^1 (t-1)g(t)\,\mathrm{d}t + x\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x tg(t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction f est donc une première fois dérivable avec

$$f'(x) = \int_0^1 (t-1)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t + \underbrace{xg(x) - xg(x)}_{=0}.$$

La fonction f est donc une seconde fois dérivable avec

$$f''(x) = g(x).$$

Finalement, le problème posé possède une unique solution, celle déterminée par la relation $(*)$.

Exercice 27 ** (Égalité de Taylor-Lagrange[1])

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ alors, pour tout $x \in I$, il existe un réel c compris entre a et x vérifiant

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Solution

Soit $x \in I$. Le cas $x = a$ est immédiat. Pour fixer les idées, supposons $x > a$ pour la suite (le cas symétrique se résout de façon analogue).

méthode

> On exprime le reste intégral de la formule de Taylor par la formule de la moyenne[2] dont on reprend ici la démonstration.

Par la formule de Taylor avec reste intégral

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction $f^{(n+1)}$ étant continue sur $[a\,;x]$, le théorème des bornes atteintes (Th. 16 p. 235) permet d'introduire

$$m = \min_{[a;x]} f^{(n+1)} \quad \text{et} \quad M = \max_{[a;x]} f^{(n+1)}.$$

Par croissance de l'intégrale, on peut écrire

$$m\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{m \leqslant \cdot \leqslant M} \mathrm{d}t \leqslant M\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Enfin, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction continue $f^{(n+1)}$, il existe c compris entre a et x tel que

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = f^{(n+1)}(c)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

10.5.6 Continuité uniforme

Exercice 28 **

Les fonctions suivantes sont-elles uniformément continues ?

(a) $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$ (b) $x \mapsto x\ln x$ sur $]0\,;1]$ (c) $x \mapsto \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Ce résultat constitue une généralisation de l'égalité des accroissements finies (Th. 5 p. 259).
2. Voir sujet 15 p. 353.

Solution

(a) **méthode**

On exploite l'inégalité[1] $\left|\sqrt{y}-\sqrt{x}\right| \leqslant \sqrt{|y-x|}$ valable pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$.

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Pour $\alpha = \varepsilon^2 > 0$, on a par l'inégalité ci-dessus

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, \quad |y-x| \leqslant \alpha \implies \left|\sqrt{y}-\sqrt{x}\right| \leqslant \varepsilon.$$

La fonction racine carrée est donc uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) **méthode**

Après prolongement par continuité en 0, on peut appliquer le théorème de Heine (Th. 1 p. 336).

La fonction $f : x \mapsto x \ln x$ est définie et continue sur $]0\,;1]$ et se prolonge par continuité en posant

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0.$$

La fonction prolongée est alors continue sur le segment $[0\,;1]$ et y est donc uniformément continue. *A fortiori*, cette fonction est aussi uniformément continue sur $]0\,;1]$.

(c) **méthode**

Une fonction uniformément continue sur $]a\,;b]$ est nécessairement bornée en l'extrémité finie a.

Supposons par l'absurde que la fonction ln soit uniformément continue sur $]0\,;+\infty[$. Pour $\varepsilon = 1 > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \,]0\,;+\infty[^2, \quad |y-x| \leqslant \alpha \implies |\ln y - \ln x| \leqslant 1.$$

En choisissant $y = \alpha$, on obtient $|\ln \alpha - \ln x| \leqslant 1$ pour tout $x \in \,]0\,;\alpha]$. On en déduit que la fonction ln est bornée au voisinage de 0^+ ce qui est absurde.

Exercice 29 **

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer qu'il existe des réels positifs a et b tels que $\left|f(x)\right| \leqslant ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Solution

Soit $\varepsilon = 1 > 0$. L'uniforme continuité de f assure l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, \quad |y-x| \leqslant \alpha \implies \left|f(y)-f(x)\right| \leqslant 1. \qquad (*)$$

méthode

La propriété $(*)$ permet de contrôler l'ordre de grandeur de $f(n\alpha)$ pour $n \in \mathbb{N}$ puis de $f(x)$ pour $x \in [n\alpha\,;(n+1)\alpha]$.

1. Voir sujet 14 p. 61.

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on montre $\left|f(n\alpha) - f(0)\right| \leqslant n$. La propriété est en effet évidente si $n = 0$ et, si elle est vérifiée au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$ car

$$\left|f\big((n+1)\alpha\big) - f(0)\right| \leqslant \underbrace{\left|f\big((n+1)\alpha\big) - f(n\alpha)\right|}_{\leqslant 1 \text{ via } (*)} + \underbrace{\left|f(n\alpha) - f(0)\right|}_{\leqslant n} \leqslant n+1.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Posons $n = \lfloor x/\alpha \rfloor$ de sorte que $x \in [n\alpha\,;(n+1)\alpha[$. On a alors

$$\left|f(x)\right| = \underbrace{\left|f(x) - f(n\alpha)\right|}_{\leqslant 1 \text{ via } (*)} + \underbrace{\left|f(n\alpha) - f(0)\right|}_{\leqslant n} + \left|f(0)\right| \leqslant n + 1 + \left|f(0)\right|.$$

Enfin, sachant $n \leqslant x/\alpha$, on peut conclure

$$\left|f(x)\right| \leqslant ax + b \quad \text{avec} \quad a = 1/\alpha \text{ et } b = 1 + \left|f(0)\right|.$$

Exercice 30 ***

Soit $f\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ continue et possédant une limite finie en l'infini.
Montrer que f est uniformément continue.

Solution

Soit $\varepsilon > 0$. On veut établir l'existence d'un $\alpha > 0$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in [0\,;+\infty[^2, \quad |y - x| \leqslant \alpha \implies \left|f(y) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

méthode

La limite nulle à l'infini permet d'obtenir $\left|f(y) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$ pour x et y assez grands qu'ils soient ou non proches l'un de l'autre. Pour les valeurs plus petites, on exploite le théorème de Heine.

La fonction f étant de limite finie ℓ, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $\left|f(x) - \ell\right| \leqslant \varepsilon/2$ pour tout x supérieur à A. Par l'inégalité triangulaire

$$\left|f(y) - f(x)\right| \leqslant \left|f(y) - \ell\right| + \left|\ell - f(x)\right|$$

et l'on en déduit

$$\left|f(y) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } (x,y) \in [A\,;+\infty[^2 \tag{$*$}$$

De plus, la fonction f est continue sur $[0\,;A]$ et donc uniformément continue en vertu du théorème de Heine. Il existe alors $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [0\,;A]^2, \quad |y - x| \leqslant \alpha \implies \left|f(y) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon. \tag{$**$}$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$ avec $|y - x| \leqslant \alpha$. Quitte à échanger, on peut supposer $x \leqslant y$.
Si $x, y \in [0\,;A]$, on a $\left|f(y) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$ en vertu de $(**)$.
Si $x, y \in [A\,;+\infty[$, on a à nouveau $\left|f(y) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$, cette fois-ci en vertu de $(*)$.

Enfin, il ne faut pas oublier de traiter le cas $x \in [0\,;A]$ et $y \in [A\,;+\infty[$. Dans cette situation, on a nécessairement $|x-A| \leqslant \alpha$ puis

$$\bigl|f(x)-f(y)\bigr| \leqslant \underbrace{\bigl|f(x)-f(A)\bigr|}_{\leqslant \varepsilon \text{ via } (**)} + \underbrace{\bigl|f(A)-f(y)\bigr|}_{\leqslant \varepsilon \text{ via } (*)} \leqslant 2\varepsilon.$$

Quitte à reprendre la valeur ε du début de l'étude, on obtient la propriété voulue [1].

10.6 Exercices d'approfondissement

Exercice 31 **

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'égalité

$$X^{2n}-1 = (X^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2 - 2X\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right).$$

(b) Soit un réel $a \neq \pm 1$. Déduire du calcul qui précède la valeur de

$$\int_0^{\pi} \ln\bigl(a^2 - 2a\cos t + 1\bigr)\,\mathrm{d}t.$$

Solution

(a) Après résolution [2], les racines du trinôme $X^2 - 2X\cos\bigl(\frac{k\pi}{n}\bigr) + 1$ sont les $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}k\pi/n}$. Les racines du polynôme

$$P_n = (X^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2 - 2X\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)$$

sont donc exactement les racines $2n$-ièmes de l'unité. De plus, P_n est unitaire de degré $2n$, il s'agit donc [3] du polynôme $X^{2n}-1$.

(b) La fonction de l'intégrale est définie et continue sur $[0\,;\pi]$ car

$$a^2 - 2a\cos t + 1 = (a-\cos t)^2 + \sin^2 t > 0 \quad \text{pour tout } t \in [0\,;\pi].$$

En effet, $a - \cos t$ et $\sin t$ ne peuvent être simultanément nuls car $a \neq \pm 1$.

1. Une alternative élégante à ce raisonnement consiste à introduire la fonction $g = f \circ \tan$ définie sur $[0\,;\pi/2[$ que l'on prolonge par continuité en $\pi/2$. Ce prolongement est continu sur un segment donc uniformément continu. Puisque $f = g \circ \arctan$ avec arctan lipschitzienne, on obtient f uniformément continue.

2. Voir sujet 9 p. 97.

3. Le polynôme $(X^{2n}-1) - P_n$ est de degré inférieur à $2n-1$ et possède au moins $2n$ racines, c'est donc le polynôme nul.

méthode

‖ On fait apparaître une somme de Riemann.

On peut écrire[1]

$$\int_0^\pi \ln\left(a^2 - 2a\cos t + 1\right) \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(a^2 - 2a\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right).$$

Le calcul qui précède permet d'écrire sachant $a \neq \pm 1$

$$\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(a^2 - 2a\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right) = \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{a^{2n}-1}{a^2-1}\right).$$

Si $|a| < 1$ alors

$$\frac{\pi}{n}\underbrace{\ln\left(\frac{a^{2n}-1}{a^2-1}\right)}_{\to 1/(1-a^2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et donc

$$\int_0^\pi \ln\left(a^2 - 2a\cos t + 1\right) \mathrm{d}t = 0.$$

En revanche, si $|a| > 1$

$$\frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{a^{2n}-1}{a^2-1}\right) = \underbrace{\frac{\pi}{n}\ln\left(a^{2n}\right)}_{=\pi\ln(a^2)} + \frac{\pi}{n}\underbrace{\ln\left(\frac{1-1/a^{2n}}{a^2-1}\right)}_{\to \frac{1}{a^2-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\pi\ln|a|$$

et donc

$$\int_0^\pi \ln\left(a^2 - 2a\cos t + 1\right) \mathrm{d}t = 2\pi\ln|a|.$$

Exercice 32 **

Soit f et g deux fonctions croissantes et continues sur $[0\,;1]$. Montrer

$$\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right) \times \left(\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Par commodité, le terme d'indice $k = 0$ de la somme de Riemann a été omis. Ceci est possible car il est multiplié par π/n qui est de limite nulle.

Solution

Soit $t \in [0\,;1]$. Par produit de deux facteurs de même signe, on a pour tout s dans le segment $[0\,;1]$

$$\big(f(s) - f(t)\big)\big(g(s) - g(t)\big) \geqslant 0.$$

Par intégration en bon ordre

$$\int_0^1 \big(f(s) - f(t)\big)\big(g(s) - g(t)\big)\,\mathrm{d}s \geqslant 0.$$

En développant, on en déduit

$$\int_0^1 f(s)g(s)\,\mathrm{d}s + f(t)g(t) \geqslant \left(\int_0^1 f(s)\,\mathrm{d}s\right)g(t) + f(t)\left(\int_0^1 g(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

En intégrant cette comparaison pour t allant de 0 à 1 on obtient

$$\int_0^1 f(s)g(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \left(\int_0^1 f(s)\,\mathrm{d}s\right)\left(\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right) + \left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1 g(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

Enfin, en renommant t la variable d'intégration s, on conclut [1]

$$2\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 2\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Exercice 33 ** (Inégalité de Poincaré)

Soit $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f(0) = 0$.

(a) Montrer

$$\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

(b) On suppose $f(1) = 0$. Montrer

$$\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{8}\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

Solution

(a) **méthode**

> À l'aide d'une intégrale, on exprime f en fonction de sa dérivée.

1. Cette démonstration est très analogue à celle du sujet 27 p. 35. On peut d'ailleurs lier les deux résultats par les sommes de Riemann.

La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$, on peut écrire pour tout x de $[0;1]$

$$f(x) = \underbrace{f(0)}_{=0} + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

méthode

La présence de carrés invite à utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$|f(x)| = \left|\int_0^x 1 \times f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(\int_0^x \mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_0^x f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

et donc

$$f(x)^2 \leqslant x\int_0^x f'(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant x\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

Enfin, en intégrant de 0 à 1

$$\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x\underbrace{\left(\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right)}_{\text{constante}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

(b) **méthode**

On reprend l'étude qui précède en rapprochant la variable de 0 lorsqu'elle est inférieure à $1/2$ et en la rapprochant de 1 quand elle est supérieure.

Comme ci-dessus, on obtient

$$f(x)^2 \leqslant x\int_0^{1/2} f'(t)^2\,\mathrm{d}t \quad \text{pour } x \in [0;1/2]$$

et

$$f(x)^2 \leqslant (1-x)\int_{1/2}^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t \quad \text{pour } x \in [1/2;1].$$

En intégrant

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^{1/2} f(x)^2\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant \frac{1}{8}\int_0^{1/2} f'(t)^2\,\mathrm{d}t + \frac{1}{8}\int_{1/2}^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Exercice 34 ** (Inégalité de Young)

Soit $f\colon [0\,;a] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(x) > 0$ pour tout x de $[0\,;a]$.

(a) Montrer que pour tout réel x de $[0\,;a]$

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = xf(x).$$

(b) En déduire que pour tous réels x et y de $[0\,;a]$

$$xy \leqslant \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^y f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Solution

(a) **méthode**

> On vérifie l'identité par dérivation après avoir justifié que celle-ci a un sens et que la dérivation est possible.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0\,;a]$, elle réalise donc une bijection de $[0\,;a]$ vers $[0\,;f(a)]$. De plus, son application réciproque est continue et l'on peut donc intégrer la fonction f^{-1}.

Introduisons $\varphi\colon [0\,;a] \to \mathbb{R}$ la fonction différence des membres de l'identité voulue

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t - xf(x).$$

Dérivons celle-ci.

D'une part, on sait par dérivation d'une primitive

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x).$$

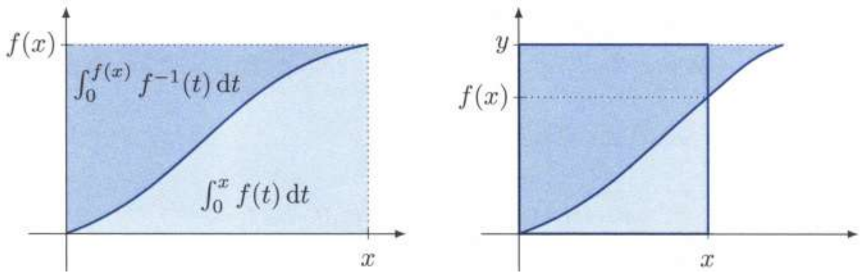
D'autre part, en introduisant une primitive G de l'application continue f^{-1} et en dérivant une fonction composée

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(G\big(f(x)\big) - G(0)\Big) = f'(x)\underbrace{G'\big(f(x)\big)}_{=f^{-1}(f(x))} = xf'(x).$$

Ainsi, la fonction φ est dérivable sur $[0\,;a]$ et

$$\varphi'(x) = f(x) + xf'(x) - \big(f(x) + xf'(x)\big) = 0.$$

La fonction φ est donc constante égale à $\varphi(0) = 0$ et l'identité demandée est établie.



Inégalité de Young.

(b) **méthode**

‖ On discute selon les positions relatives de y et $f(x)$.

Cas : $f(x) \leqslant y$. On écrit

$$xy = xf(x) + x\big(y - f(x)\big) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t + x\big(y - f(x)\big).$$

Par croissance de f^{-1} sur $[f(x)\,;y]$, on a

$$\int_{f(x)}^{y} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{f(x)}^{y} \underbrace{f^{-1}\big(f(x)\big)}_{=x}\,\mathrm{d}t = \big(y - f(x)\big)x$$

et l'on obtient l'inégalité voulue.

Cas : $f(x) \leqslant y$. On opère un calcul analogue en écrivant

$$xy = f^{-1}(y)y + \big(x - f^{-1}(y)\big)y.$$

Exercice 35 ***

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ (avec $n \in \mathbb{N}$). On suppose

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad f^{(n+1)}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

Montrer que pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$

$$f^{(k)}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

Solution

La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, on peut employer la formule de Taylor avec reste intégral et écrire, pour $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$,

$$f(x+h) = f(x) + \underbrace{f'(x)h + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n}_{=S_h(x)} + \int_x^{x+h} \frac{(x+h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Fixons h. Lorsque x tend vers $+\infty$, les quantités $f(x)$ et $f(x+h)$ sont de limites nulles. De plus,

$$\left|\int_x^{x+h} \frac{(x+h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^{x+h} \frac{(x+h-t)^n}{n!} \max_{x\leqslant t\leqslant x+h} \left|f^{(n+1)}(t)\right| \mathrm{d}t$$
$$= \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \underbrace{\max_{x\leqslant t\leqslant x+h} \left|f^{(n+1)}(t)\right|}_{\to 0} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

On en déduit

$$S_h(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

méthode

En choisissant différentes valeurs de h, on peut former un système d'équations permettant d'exprimer $f^k(x)$ à partir d'expressions de limites nulles.

Choisissons arbitrairement $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs deux à deux distincts. Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} f'(x) \\ \frac{f''(x)}{2!} \\ \vdots \\ \frac{f^n(x)}{n!} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} S_{a_1}(x) \\ S_{a_2}(x) \\ \vdots \\ S_{a_n}(x) \end{pmatrix}.$$

On a l'équation matricielle $AX = Y$ avec A matrice inversible[1]. On peut donc écrire $X = A^{-1}Y$ et chaque $f^{(k)}(x)$ s'exprime alors comme combinaison linéaire des $S_{a_j}(x)$. Or ces derniers sont chacun de limite nulle quand x tend vers $+\infty$ et l'on en déduit que $f^k(x)$ est aussi de limite nulle.

1. En factorisant a_i sur chaque ligne, on fait apparaître une matrice de Vandermonde.

CHAPITRE 11

Séries numériques

11.1 Généralités sur les séries numériques

$(u_n)_{n \geqslant n_0}$ désigne une suite numérique, c'est-à-dire une suite de nombres réels ou complexes, définie à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

11.1.1 Séries numériques

Définition

On appelle *série* de terme général u_n la suite $(S_n)_{n \geqslant n_0}$ avec

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

Cette série est notée

$$\left(\sum u_n\right)_{n \geqslant n_0}, \quad \sum_{n \geqslant n_0} u_n \quad \text{ou} \quad \sum u_n.$$

Le terme S_n est appelé *somme partielle de rang* n de cette série.

Une série numérique est un cas particulier de suite : c'est une suite de sommes partielles.

Sans perte de généralité, on suppose dans la suite $n_0 = 0$ (quitte à définir égaux à 0 les premiers termes de la suite (u_n) s'ils ne sont pas définis).

11.1.2 Convergence

Définition

On dit que la série de terme général u_n *converge* lorsqu'il y a convergence de la suite (S_n) de ses sommes partielles. Sinon, on dit que la série *diverge*.

Lorsque la série $\sum u_n$ converge, on peut introduire sa *somme* :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

Il importe de savoir distinguer la série $\sum u_n$ de sa somme. La série s'apparente à une suite, la somme est son éventuelle limite : elle ne peut être introduite qu'une fois la convergence de la série justifiée.

Théorème 1

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries numériques convergentes alors, pour tout λ scalaire, les séries $\sum \lambda u_n$ et $\sum (u_n + v_n)$ convergent avec

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

La somme d'une série convergente et d'une série divergente donne une série divergente. La nature de la somme de deux séries divergentes ne peut pas être déterminée *a priori*.

11.1.3 Reste

Définition

Lorsque la série $\sum u_n$ converge, on introduit pour tout $n \in \mathbb{N}$ son *reste* de rang n défini par

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Le reste d'une série ne peut être introduit qu'une fois la convergence de la série justifiée.

Le reste R_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini et il permet d'écrire la décomposition[1] $S = S_n + R_n$, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

1. On sera attentif à ne pas compter deux fois le terme u_n en amorçant la deuxième somme à partir du rang $n+1$ et non du rang n.

11.1.4 Divergence grossière

Théorème 2
Si la série $\sum u_n$ converge alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ceci produit une condition nécessaire de convergence. Cette condition n'est pas suffisante : la série $\sum 1/n$ diverge alors que son terme général tend vers 0.

Définition
Lorsque le terme général u_n d'une série $\sum u_n$ ne tend pas vers 0, on dit que la série *diverge grossièrement*.

11.1.5 Lien suite-série

Les sommes partielles de la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ sont aisément calculables par télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)=u_{n+1}-u_0.$$

On en déduit le résultat suivant :

Théorème 3
La série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ et la suite (u_n) ont la même nature[1].

11.1.6 Séries de référence

Définition
Lorsque α est un réel, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est appelée *série de Riemann* de paramètre α.

Théorème 4

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1.$$

Le calcul de la somme d'une série de Riemann convergente n'est pas aisé. Seules les valeurs sur les entiers pairs sont bien connues. Parmi celles-ci, citons la fameuse constante de Bâle[2] :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Définition
Lorsque q est un nombre complexe, la série $\sum q^n$ est appelée *série géométrique* de raison q.

1. Cela signifie que lorsque l'une converge, l'autre aussi.
2. Cette somme est calculée dans le sujet 28 p. 413.

Théorème 5

$$\sum q^n \text{ converge} \iff |q| < 1.$$

De plus, lorsqu'il y a convergence,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

11.2 Séries à termes positifs

11.2.1 Convergence

Lorsque les termes d'une série sont positifs, la suite de ses sommes partielles est croissante. Ce constat entraîne le résultat suivant :

Théorème 6
Une série $\sum u_n$ à termes positifs converge si, et seulement si, la suite de ses sommes partielles est majorée.

Lorsqu'une série à termes positifs diverge, la suite de ses sommes partielles croît vers $+\infty$.

11.2.2 Théorèmes de comparaison

Lorsqu'il n'est pas possible de calculer de façon exacte les sommes partielles d'une série afin d'en déterminer la nature, il est fréquent de raisonner par comparaison en exploitant l'un ou l'autre des résultats qui suivent :

Théorème 7 (Comparaison à une série à termes positifs)
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs vérifiant $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge.
Si la série $\sum u_n$ diverge alors la série $\sum v_n$ diverge.

Ce résultat reste valable si l'inégalité $u_n \leqslant v_n$ n'est vraie qu'à partir d'un certain rang.

Théorème 8 (Équivalence de séries à termes positifs)
Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à termes positifs vérifiant

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Ces deux résultats ne permettent la comparaison que de séries à termes positifs. Ils peuvent néanmoins être utilisés lorsque la positivité n'a lieu qu'à partir d'un certain rang. En effet, on ne change pas la nature d'une série lorsque l'on change la valeur d'un nombre fini de ses termes[1]. Par un passage à l'opposé, on peut aussi énoncer des théorèmes relatifs aux séries à termes négatifs.

11.3 Convergence absolue

11.3.1 Définition

Définition

On dit que la série $\sum u_n$ *converge absolument* lorsqu'il y a convergence de la série des valeurs absolues[2] $\sum |u_n|$.

Lorsque la série $\sum u_n$ est une série à termes réels positifs (ou négatifs), l'absolue convergence équivaut à la convergence. Lorsque la série $\sum u_n$ est à termes complexes ou réels de signe non constant, on dispose d'une implication :

Théorème 9

Si la série $\sum u_n$ converge absolument alors celle-ci converge et

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Étudier la convergence absolue conduit à comparer des séries à termes positifs.

11.3.2 Comparaison

Puisque la série $\sum |u_n|$ est à termes positifs, il est possible d'adapter les outils de comparaison relatifs aux séries positives avec le vocabulaire de la convergence absolue :

Théorème 10

Si $\sum u_n$ est une série à termes complexes et si $\sum v_n$ une série à termes positifs vérifiant

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$$

alors

$$\sum v_n \text{ converge} \implies \sum u_n \text{ converge absolument.}$$

En opérant des comparaisons aux séries de Riemann, on pourra déterminer la nature de nombreuses séries !

1. Cela modifie en revanche la valeur de sa somme.
2. Ou de la série des modules selon le contexte.

11.4 Exercices d'apprentissage

11.4.1 Natures

Déterminer la *nature* d'une série consiste à savoir si celle-ci est ou non convergente. Ce problème peut être résolu conjointement au calcul de la somme de la série ou préalablement, souvent par un argument de comparaison.

Exercice 1

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

(a) $\sum \cos n$ (b) $\sum \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ (c) $\sum \frac{1}{n+n^2}$

(d) $\sum \frac{(-1)^n}{n!}$ (e) $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ (f) $\sum \frac{\ln \sqrt{n}}{n+1}$

Solution

méthode

Pour étudier la nature d'une série, on étudie souvent son terme général. Il est alors commode de commencer par dénommer celui-ci !

Dans chaque cas étudié ci-dessous, on note u_n le terme général de la série considérée.

(a) La suite (u_n) n'est pas de limite nulle[1], la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

(b) La suite (u_n) est de limite nulle, mais ce n'est pas décisif !

méthode

La condition $u_n \to 0$ est une condition nécessaire, mais pas suffisante de convergence : il faut savoir avec « quelle vitesse » la suite tend vers 0. On peut pour cela comparer à une série de Riemann.

On a l'équivalence

$$u_n = \frac{1}{n+\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{n} \geqslant 0 \text{ et } \sum \frac{1}{n} \text{ divergente.}$$

Par équivalence de séries à termes positifs (Th. 8 p. 384), on peut affirmer la divergence de la série $\sum u_n$.

(c) Encore une fois la suite (u_n) est de limite nulle mais cette fois-ci :

$$u_n = \frac{1}{n+n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{n^2} \geqslant 0 \text{ et } \sum \frac{1}{n^2} \text{ convergente car } \alpha = 2 > 1.$$

Par équivalence de séries à termes positifs, on peut assurer la convergence de la série de terme général u_n.

1. En effet, si $\cos n$ tend vers 0, le passage à la limite de la formule $\cos(2n) = 2\cos^2 n - 1$ induit une absurdité !

(d) **méthode**

> On ne peut pas proposer un équivalent du type « Riemann », on observe cependant que la suite (u_n) tend très vite vers 0 et l'on montre que son terme est négligeable devant la série absolument convergente des $1/n^2$.

Pour $n \geqslant 3$, on peut écrire

$$0 \leqslant n^2 |u_n| = \frac{n^2}{n!} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{(n-2)!} \leqslant \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par théorème d'encadrement, on obtient $n^2 u_n$ de limite nulle et donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{n^2} \geqslant 0 \text{ et } \sum \frac{1}{n^2} \text{ convergente car } \alpha = 2 > 1.$$

Par comparaison (Th. 10 p. 385), on peut affirmer que la série $\sum u_n$ converge absolument et donc converge (Th. 9 p. 385).

(e) **méthode**

> Lorsqu'il n'y a pas négligeabilité devant $1/n^2$, il peut suffire d'adapter l'exposant et d'établir une négligeabilité devant $1/n^\alpha$ pour $\alpha > 1$ bien choisi, par exemple $\alpha = 3/2$ ou $\alpha = 1{,}01$.

Pour $\alpha = 1{,}01 > 1$, on a

$$n^\alpha u_n = \frac{\ln n}{n^{0,99}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{car} \quad \ln n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n^\gamma) \text{ pour tout } \gamma > 0.$$

Ainsi, on a

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{n^\alpha} \geqslant 0 \text{ et } \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ convergente car } \alpha > 1.$$

On peut donc affirmer la convergence absolue, et donc la convergence, de la série $\sum u_n$.

(f) Encore une fois le terme général de la série étudiée tend vers 0 mais cette convergence est un peu lente... On a

$$nu_n = n\frac{\ln\sqrt{n}}{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{n+1} \ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

À partir d'un certain rang, on a $nu_n \geqslant 1$ et donc

$$u_n \geqslant \frac{1}{n} \geqslant 0 \quad \text{avec} \quad \sum \frac{1}{n} \text{ divergente.}$$

Par comparaison de séries à termes positifs (Th. 7 p. 384), on peut affirmer la divergence de la série $\sum u_n$.

méthode

En guise de bilan, on retient :

— si (u_n) ne tend pas vers 0, la série diverge ;
— s'il existe $C \neq 0$ tel que $u_n \sim \frac{C}{n^\alpha}$, alors la série converge si, et seulement si, $\alpha > 1$ (auquel cas elle converge même absolument) ;
— s'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \to 0$, la série converge absolument ;
— si $nu_n \to \ell$ avec $\ell \neq 0$ (éventuellement ℓ infinie), la série diverge.

Ces critères ne sont pas exhaustifs [1] mais suffisent à résoudre de nombreuses situations.

Exercice 2

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \begin{cases} 1/n & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 1/n^2 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Solution

méthode

En constatant que les sommes partielles d'une série à termes positifs sont majorées, on peut affirmer sa convergence (Th. 6 p. 384).

Introduisons E l'ensemble des $n \in \mathbb{N}^*$ qui sont des carrés d'entiers $E = \{1, 4, 9, \dots\}$. En séparant, les termes sommés selon que l'indice est ou non le carré d'un entier, on peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{\substack{k=1\\k\notin E}}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{\substack{k=1\\k\in E}}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{\substack{k=1\\k\notin E}}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{\ell=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \frac{1}{\ell^2} \leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = M.$$

La série étudiée est une série à termes positifs aux sommes partielles majorées, elle converge.

Exercice 3

(a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n}.$$

(b) En déduire la nature de la série de terme général $1/n$.

1. Il figure notamment un espace entre le deux derniers critères dans lequel s'engouffre la série de terme général $u_n = 1/(n \ln n)$.

Solution

(a) **méthode**

> On exploite l'inégalité $\ln(1+u) \leqslant u$ valable pour tout $u > -1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En combinant les deux logarithmes

$$\ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}.$$

(b) **méthode**

> Une série télescopique a la nature de la suite associée (Th. 3 p. 383).

La série de terme général $\ln(n+1) - \ln n$ diverge car la suite $(\ln n)$ diverge[1]. Par comparaison de séries à termes positifs (Th. 7 p. 384), on peut affirmer la divergence[2] de la série $\sum \frac{1}{n}$.

11.4.2 Calculs de somme

Exercice 4

Déterminer la nature et la somme de la série

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}.$$

Solution

méthode

> Lorsque l'on sait calculer les sommes partielles, on peut obtenir la convergence d'une série tout en calculant sa somme.

Pour $n \geqslant 2$, on peut écrire la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{n-(n-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Les sommes partielles de la série étudiée sont télescopiques. Pour $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geqslant 2$

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n}.$$

On opère un glissement d'indice puis on simplifie la portion commune aux deux sommes

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{N}.$$

1. On peut aussi simplement calculer les sommes partielles pour affirmer la divergence de la série.
2. On pourra comparer cette méthode à celle suivie dans le sujet 16 p. 208.

On peut alors obtenir la convergence de la série étudiée tout en calculant sa somme

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n-1)} = \lim_{N\to+\infty}\left(1-\frac{1}{N}\right) = 1.$$

Exercice 5

Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{sachant} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Solution

méthode

En étudiant les sommes partielles, on peut calculer la somme d'une série tout en justifiant sa convergence. Souvent on peut aussi établir la convergence préalablement au calcul.

La série étudiée est une série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$: elle est convergente.

méthode

En raisonnant par les sommes partielles, on peut séparer les termes d'indices pairs de ceux d'indices impairs dans la somme étudiée.

Pour $N \geqslant 1$, on peut écrire

$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(2p)^2} = \sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p^2}.$$

En passant à la limite[1] quand N tend vers l'infini, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

11.4.3 Étude asymptotique

Lorsque $f\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux monotone, on peut estimer les sommes partielles et les éventuels restes de la série $\sum f(n)$ en sommant les encadrements du terme $f(n)$ par les intégrales

$$\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{n}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Ce passage à la limite est possible car on sait la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$.

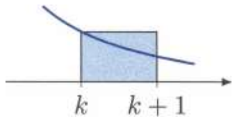
Exercice 6

Déterminer un équivalent quand n tend vers l'infini de

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Solution

La fonction $t \mapsto 1/t$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
Pour $k \geqslant 1$, on a

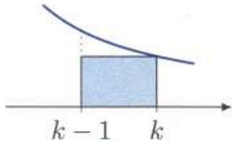


$$\frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k} \quad \text{pour tout } t \in [k\,;k+1].$$

En intégrant en bon ordre cette inégalité, on obtient

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k} = \left[\frac{t}{k}\right]_k^{k+1} = \frac{1}{k}.$$

En opérant de même avec $t \in [k-1\,;k]$ pour $k \geqslant 2$, on justifie



$$\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

En sommant ces deux inégalités (quitte à isoler le terme d'indice 1 lors de la majoration), on obtient

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right).$$

méthode

> Dans les termes encadrants, les intégrales sommées sont contiguës : on peut les raccorder par application de la relation de Chasles.

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Enfin, en calculant l'intégrale, on parvient à l'encadrement

$$\ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln n.$$

Les deux membres encadrants étant équivalents à $\ln n$, on peut conclure

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.$$

Exercice 7

Soit α un réel strictement supérieur à 1. Déterminer un équivalent quand n tend vers l'infini de

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Solution

méthode

Il faut commencer par justifier l'existence du terme étudié.

Le terme R_n est bien défini car c'est le reste d'une série de Riemann convergente ($\alpha > 1$). La fonction $t \mapsto 1/t^\alpha$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$ et l'on peut affirmer[1], par comparaison série-intégrale

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

(la minoration valant pour $k \geqslant 1$ et la majoration pour $k \geqslant 2$ seulement).

En sommant ces encadrements pour k allant de $n+1$ à N, on obtient

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^N \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$

Il reste à calculer les intégrales encadrantes

$$\int_n^N \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \int_n^N t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_n^N = \frac{n^{1-\alpha} - N^{1-\alpha}}{\alpha - 1}.$$

méthode

Inutile de répéter le calcul avec la seconde intégrale, il suffit de remplacer n et N par $n+1$ et $N+1$ dans le résultat.

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - (N+1)^{1-\alpha}}{\alpha - 1}.$$

En faisant tendre N vers l'infini (sachant $1 - \alpha < 0$), on obtient l'encadrement

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \leqslant R_n \leqslant \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha - 1}.$$

Enfin, puisque $(n+1)^{1-\alpha}$ équivaut à $n^{1-\alpha}$, on peut conclure

$$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha - 1} = \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

1. Il arrive parfois que l'on inverse par mégarde les intégrales lors de cet encadrement. Il suffit cependant de vérifier que la comparaison des intégrales est compatible avec la monotonie de la fonction pour éviter cette erreur !

Exercice 8

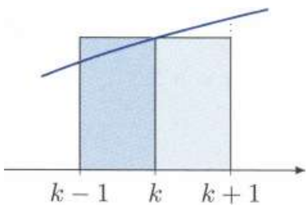
Soit α un réel positif. Déterminer un équivalent quand n tend vers l'infini de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha.$$

Solution

La fonction $t \mapsto t^\alpha$ est croissante et l'on peut affirmer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ l'encadrement

$$\int_{k-1}^{k} t^\alpha \,\mathrm{d}t \leqslant k^\alpha \leqslant \int_{k}^{k+1} t^\alpha \,\mathrm{d}t.$$



En sommant, on obtient

$$\int_{0}^{n} t^\alpha \,\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant \int_{1}^{n+1} t^\alpha \,\mathrm{d}t$$

avec

$$\int_0^n t^\alpha \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^n = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad \text{et} \quad \int_1^{n+1} t^\alpha \,\mathrm{d}t = \frac{(n+1)^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

On peut conclure [1]

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

11.5 Exercices d'entraînement

11.5.1 Convergence

Exercice 9 *

Déterminer les natures des séries numériques suivantes :

(a) $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ (b) $\displaystyle\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ (c) $\displaystyle\sum \left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$.

Solution

méthode

Il importe de déterminer l'ordre de grandeur du terme général définissant la série, par exemple en recherchant un équivalent ou en l'exprimant plus simplement.

1. On pourra comparer cette démarche à celle du sujet 13 p. 352.

(a) Sachant $\sin(u) \sim u$ lorsque u tend vers 0, on a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{donc} \quad |u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Par équivalence de séries à termes positifs (Th. 8 p. 384), la série étudiée converge absolument et donc converge (Th. 9 p. 385).

(b) **méthode**

> Une expression $a_n^{b_n}$ est souvent plus « parlante » lorsqu'elle est écrite sous forme exponentielle.

Pour $n \geqslant 2$

$$u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = e^{-\ln(n)\ln(\ln n)}$$

donc

$$n^2 u_n = e^{2\ln(n) - \ln(n)\ln(\ln n)} = \exp\Big(\ln(n)\underbrace{\big(2 - \ln(\ln n)\big)}_{\to -\infty}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Le terme général u_n est négligeable devant $1/n^2$. Or $1/n^2$ est positif et terme général d'une série convergente. Par conséquent, la série étudiée converge absolument (Th. 10 p. 385) et donc converge.

(c) Par le développement limité $\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$ lorsque u tend vers 0, on peut écrire

$$u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e - e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e - e^{1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Par le développement limité $e^u = 1 + u + o(u)$ lorsque u tend vers 0, on poursuit le calcul

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} e - e \times e^{-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = e - e\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{2n}.$$

Par équivalence de séries à termes positifs, on peut conclure à la divergence de la série étudiée.

Exercice 10 *

Soit (u_n) une suite de réels positifs et (v_n) la suite déterminée par

$$v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}.$$

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Solution

Notons que la série $\sum v_n$ est à termes positifs. Si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ converge aussi par comparaison de séries à termes positifs (Th. 7 p. 384) car $v_n \leqslant u_n$ pour tout naturel n.

Inversement, supposons la convergence de $\sum v_n$.

méthode

‖ En résolvant l'équation définissant v_n, on peut exprimer u_n en fonction de v_n.

Après résolution,

$$u_n = \frac{v_n}{1 - v_n} \quad \text{avec} \quad v_n \neq 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Puisque la série $\sum v_n$ converge, la suite (v_n) tend vers 0 et l'on a donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{v_n}{1 + \mathrm{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n.$$

Par équivalence de séries à termes positifs (Th. 8 p. 384), on peut conclure à la convergence de la série $\sum u_n$.

Finalement, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature [1].

Exercice 11 *

Soit (u_n) une suite réelle décroissante. On suppose que la série $\sum u_n$ converge et l'on note S_n sa somme partielle de rang n.

(a) Déterminer la limite de $S_{2n} - S_n$ quand n croît vers l'infini.

(b) En déduire la limite de la suite (nu_{2n}) puis celle de (nu_n).

Solution

(a) En notant S la somme de la série,

$$S_{2n} - S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S - S = 0.$$

(b) En simplifiant les termes communs

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=0}^{2n} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k.$$

méthode

‖ La décroissance de la suite (u_n) assure que u_{2n} est le plus petit terme de la somme précédente.

On a donc l'inégalité

$$S_{2n} - S_n \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_{2n} = nu_{2n}.$$

1. On vient d'établir que la convergence de l'une entraîne la convergence de l'autre. Par conséquent, la divergence de l'une entraîne la divergence de l'autre !

De plus, la suite (u_n) tend vers 0 (car la série converge). Étant décroissante, sa limite est sa borne inférieure et cette suite est positive. On dispose alors de l'encadrement

$$0 \leqslant nu_{2n} \leqslant S_{2n} - S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par théorème d'encadrement, on peut affirmer que la suite (nu_{2n}) tend vers 0.

méthode

> Si les suites extraites des termes d'indices pairs et impairs ont la même limite alors la suite tend vers cette limite commune (Th. 13 p. 192).

Les suites extraites des termes d'indices pairs et impairs de (nu_n) sont les suites $(2nu_{2n})$ et $\big((2n+1)u_{2n+1}\big)$. Par ce qui précède, on peut déjà affirmer que la suite extraite $(2nu_{2n})$ tend vers 0. De plus, par décroissance

$$0 \leqslant (2n+1)u_{2n+1} \leqslant (2n+1)u_{2n} = 2nu_{2n} + u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

La suite extraite $\big((2n+1)u_{2n+1}\big)$ tend aussi vers 0 et l'on peut donc conclure que la suite (nu_n) est de limite nulle.

Exercice 12 **

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On suppose que

$$\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}_+.$$

(a) Montrer que si $\ell > 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.

(b) Montrer que si $\ell < 1$ alors la série $\sum u_n$ est converge.

(c) Observer que dans le cas $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.

Solution

(a) **méthode**

> Lorsqu'une suite réelle tend vers une limite ℓ avec $\ell > a$ alors, à partir d'un certain rang, ses termes sont supérieurs à a.

On suppose $\ell > 1$. À partir d'un certain rang, on a $\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1$ et donc $u_n \geqslant 1$. La suite (u_n) n'est pas de limite nulle : il y a divergence grossière.

(b) **méthode**

> On compare la suite (u_n) à une suite géométrique de raison bien choisie.

On suppose $\ell < 1$. On peut introduire un réel $q \in \,]\ell\,;1[$ et affirmer qu'à partir d'un certain rang $\sqrt[n]{u_n} \leqslant q$ et donc $u_n \leqslant q^n$. Or la série géométrique de terme général q^n est convergente car $q \in [0\,;1[$ et donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge.

(c) **méthode**

Pour montrer que l'on ne peut rien conclure, on exhibe des exemples !

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_n = 1/n^\alpha$. La série de Riemann $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$ alors que, pour tout réel α,

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)^{1/n} = n^{-\alpha/n} = \mathrm{e}^{-\alpha\frac{\ln n}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Exercice 13 **

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante de réels de limite nulle.
Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum n(u_n - u_{n+1})$ ont même nature et que leurs sommes sont égales en cas de convergence.

Solution

Notons que la suite (u_n) est à termes positifs car, étant décroissante, sa limite est sa borne inférieure.

méthode

On exprime les sommes partielles de la série $\sum n(u_n - u_{n+1})$ en fonction de celles de $\sum u_n$.

Posons $v_n = n(u_n - u_{n+1})$. En séparant la somme et en opérant un glissement d'indice, on peut écrire pour tout $n \geqslant 1$

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} ku_k - \sum_{k=1}^{n} ku_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} ku_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)u_k$$
$$= \sum_{k=1}^{n} ku_k - \sum_{k=2}^{n+1} ku_k + \sum_{k=2}^{n+1} u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k - nu_{n+1}.$$

Si la série $\sum u_n$ converge, on peut introduire sa somme et ses termes étant tous positifs, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} u_k.$$

La série $\sum v_n$ est alors convergente car à termes positifs et aux sommes partielles majorées (Th. 6 p. 384).

Inversement, supposons la convergence de $\sum v_n$. Montrons que la suite (nu_n) est de limite nulle[1].

méthode

Puisque la suite (u_n) est de limite nulle, on peut écrire son terme général comme un reste de série télescopique.

1. Une démarche alternative à celle qui suit est possible en s'inspirant du sujet 11 p. 395.

Pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{v_k}{k}.$$

Les termes étant tous positifs, on a l'encadrement

$$0 \leqslant nu_n = n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{v_k}{k} = \sum_{k=n}^{+\infty} \underbrace{\frac{n}{k}}_{\leqslant 1} v_k \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} v_k \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Ainsi, la suite (nu_n) est de limite nulle et la relation initiale entre les sommes partielles donne

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} v_k + \underbrace{(n+1)u_{n+1}}_{\to 0} - \underbrace{u_{n+1}}_{\to 0} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sum_{k=1}^{+\infty} v_k.$$

On peut donc affirmer la convergence de la série $\sum u_n$ ainsi que l'égalité des sommes des séries.

11.5.2 Calculs de sommes

Exercice 14 *

Existence et valeur de

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Solution

méthode

On calcule sommes partielles en faisant apparaître un télescopage. En observant que les sommes partielles convergent vers une limite finie, on justifie la convergence tout en calculant la somme.

Pour $N \geqslant 2$

$$\sum_{n=2}^{N} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{N} \big(\ln(n-1) + \ln(n+1) - 2\ln n\big).$$

On peut séparer la somme en deux et faire apparaître deux sommes télescopiques

$$\sum_{n=2}^{N} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{N} \big(\ln(n-1) - \ln n\big) + \sum_{n=2}^{N} \big(\ln(n+1) - \ln n\big)$$

$$= (\ln 1 - \ln N) + (\ln(N+1) - \ln 2) = \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) - \ln 2.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on peut affirmer la convergence de la série et déterminer sa somme

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2.$$

Exercice 15 **

Justifier la convergence et calculer la somme de

$$\sum_{k \geq 1} \frac{\lfloor\sqrt{k+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{k}\rfloor}{k}.$$

Solution

Notons u_k le terme général de la série étudiée.

méthode

> Le terme général de la série peut être simplifié : si $k+1$ n'est pas un carré, les deux parties entières exprimées au numérateur sont égales !

Si $k+1$ n'est pas le carré d'un entier, $u_k = 0$.
Si $k+1$ est le carré d'un entier p, $\lfloor\sqrt{k+1}\rfloor = p$ et $\lfloor\sqrt{k}\rfloor = p-1$ de sorte que

$$u_k = \frac{1}{p^2-1}.$$

On peut alors simplifier la somme partielle

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{p=2}^{N} \frac{1}{p^2-1} \quad \text{avec} \quad N = \lfloor\sqrt{n+1}\rfloor.$$

En réalisant une décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{p^2-1} = \frac{1}{(p-1)(p+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{(p+1)-(p-1)}{(p-1)(p+1)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right)$$

on poursuit le calcul

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{p=2}^{N}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{p=2}^{N}\frac{1}{p-1} - \sum_{p=2}^{N}\frac{1}{p+1}\right).$$

Après glissement d'indices, on simplifie les portions communes aux deux sommes

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\sum_{p=1}^{N-1}\frac{1}{p} - \sum_{p=3}^{N+1}\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right).$$

Quand n tend vers l'infini, N tend aussi vers l'infini et

$$S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{3}{4}.$$

Finalement, la série étudiée converge et sa somme est égale à $3/4$.

Exercice 16 **

Justifier la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum_{n\geqslant 0} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right).$$

Solution

méthode

On peut percevoir le terme sommé sous une forme télescopique $u_n - u_{n+1}$.

Considérons $v_0 = \arctan(1)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Par la formule

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \quad \text{pour} \quad a, b, a+b \not\equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi]$$

on obtient pour $n \geqslant 1$

$$\tan v_n = \frac{1}{n^2+n+1}.$$

Sachant $v_n \in \,]0\,;\pi/2[$, on peut affirmer[1]

$$v_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

On peut alors exprimer les sommes partielles et étudier leur convergence

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} v_n &= \arctan(1) + \sum_{n=1}^{N}\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)\\ &= 2\arctan(1) - \arctan\left(\frac{1}{N+1}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

On peut conclure que la série étudiée converge et est de somme égale à $\pi/2$.

Exercice 17 **

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}\right).$$

Calculer sa somme lorsqu'il y a convergence.

1. Pour reconnaître la valeur d'une arc tangente, on doit disposer d'un angle de $]-\pi/2\,;\pi/2[$.

Solution

méthode

> On détermine un équivalent du terme général de la série en fonction des valeurs des paramètres.

Notons u_n le terme général de la série étudiée. On sait

$$\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2).$$

On obtient après quelques calculs

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n}\left(1 + a\sqrt{1+\frac{1}{n}} + b\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} (1+a+b)\sqrt{n} + \frac{a+2b}{2\sqrt{n}} - \frac{a+4b}{8n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

Cas : $a+b+1 \neq 0$.

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (1+a+b)\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } 1+a+b>0 \\ -\infty & \text{si } 1+a+b<0. \end{cases}$$

La série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Cas : $a+b+1=0$ et $a+2b \neq 0$.

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a+2b}{2\sqrt{n}}.$$

Par équivalence de séries à termes de signe constant, la série $\sum u_n$ diverge car on connaît la divergence de la série de Riemann $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Cas : $a+b+1=0$ et $a+2b=0$. On a alors $a=-2$, $b=1$ et

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{4n^{3/2}}.$$

Par équivalence de séries à termes de signe constant, la série $\sum u_n$ converge.

Calculons alors sa somme en étudiant ses sommes partielles. Par translations d'indices, on a pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\right) = \sum_{n=1}^{N}\sqrt{n} - 2\sum_{n=2}^{N+1}\sqrt{n} + \sum_{n=3}^{N+2}\sqrt{n}.$$

En simplifiant les portions communes aux trois sommes[1], il reste

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\right) = \sqrt{1} - \sqrt{2} + \sqrt{N+2} - \sqrt{N+1}.$$

1. En fait, le terme étudié est télescopique de la forme $v_{n+1} - v_n$ pour $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Enfin, en multipliant par la quantité conjuguée

$$\sqrt{N+2}-\sqrt{N+1}=\frac{1}{\sqrt{N+2}+\sqrt{N+1}}\xrightarrow[N\to+\infty]{}0.$$

On peut alors conclure

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)=1-\sqrt{2}.$$

11.5.3 Lien suite-série

Exercice 18 **

Soit (u_n) la suite récurrente définie par

$$u_0\in\,]0\,;1[\quad\text{et}\quad\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n-u_n^2.$$

(a) Étudier la convergence de la suite (u_n).

(b) Étudier la convergence et donner la somme de la série $\sum u_n^2$.

(c) Étudier la convergence de la série $\sum\ln(1-u_n)$.

(d) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Solution

(a) **méthode**

> On vérifie que (u_n) est monotone et bornée.

On constate

$$x-x^2=x(1-x)\in\,]0\,;1[\quad\text{pour tout } x\in\,]0\,;1[.$$

Le terme initial u_0 appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$, tous les termes de la suite (u_n) appartiennent aussi à l'intervalle $]0\,;1[$. De plus, la suite (u_n) est décroissante car

$$u_{n+1}-u_n=-u_n^2\leqslant 0\quad\text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

La suite (u_n) étant décroissante et minorée par 0, elle converge vers une limite $\ell\geqslant 0$. En passant la relation de récurrence $u_{n+1}=u_n-u_n^2$ à la limite, on obtient $\ell=\ell-\ell^2$ et la seule solution de cette équation est $\ell=0$.

Finalement, la suite (u_n) décroît vers 0.

(b) Soit $n\in\mathbb{N}$. On constate l'écriture télescopique $u_n^2=u_n-u_{n+1}$. On a donc après simplification

$$\sum_{n=0}^{N}u_n^2=\sum_{n=0}^{N}(u_n-u_{n+1})=u_0-u_{N+1}\xrightarrow[N\to+\infty]{}u_0.$$

La série $\sum u_n^2$ converge et sa somme vaut u_0.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a vu ci-dessus $u_n > 0$ et l'on peut écrire

$$\ln(1-u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n).$$

On a donc après simplification télescopique

$$\sum_{n=0}^{N} \ln(1-u_n) = \sum_{n=0}^{N} \left(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)\right) = \ln(u_{N+1}) - \ln(u_0) \xrightarrow[N\to+\infty]{} -\infty.$$

La série $\sum \ln(1-u_n)$ diverge.

(d) Puisque (u_n) est de limite nulle, on peut affirmer

$$\ln(1-u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n.$$

Par équivalence de séries à termes de signe constant, on peut conclure que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 19 **

Soit (a_n) une suite positive et (u_n) la suite définie par

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}.$$

Montrer que la suite (u_n) converge si, et seulement si, la série de terme général a_n converge.

Solution

Notons que la suite (u_n) est croissante à termes strictement positifs.

méthode

|| On compare $u_{n+1} - u_n$ et le quotient a_n/u_n.

Si (u_n) converge alors sa limite ℓ est strictement positive et

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell(u_{n+1} - u_n).$$

La série de terme général $u_{n+1} - u_n$ étant convergente, on obtient la convergence de la série de terme général a_n par équivalence de séries à termes positifs (Th. 8 p. 384).

Inversement, si la série de terme général a_n converge alors, par croissance de (u_n), on a pour tout naturel n

$$0 \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant \frac{a_n}{u_0}.$$

Par comparaison de séries à termes positifs (Th. 7 p. 384), la série télescopique de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge et donc la suite (u_n) converge.

Exercice 20 * (Séries de Bertrand[1])**

Dans ce sujet, on souhaite déterminer selon les valeurs de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la nature de la série $\sum u_n$ avec

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \quad \text{pour} \quad n \geqslant 2.$$

(a) On suppose $\alpha < 1$. Déterminer la limite de nu_n quand n tend vers l'infini. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

(b) On suppose $\alpha > 1$ et l'on introduit $\lambda \in]1\,;\alpha[$. Déterminer la limite de $n^\lambda u_n$ quand n tend vers l'infini. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

(c) On suppose $\alpha = 1$ et $\beta \neq 1$ et l'on introduit

$$v_n = (\ln n)^{1-\beta} \quad \text{pour } n \geqslant 2.$$

Déterminer un équivalent de $v_{n+1} - v_n$ quand n croît vers l'infini. En déduire la nature de la série de terme général u_n en fonction de β.

(d) On suppose pour finir $\alpha = \beta = 1$. Déterminer la nature de $\sum u_n$ en introduisant

$$w_n = \ln(\ln n) \quad \text{pour } n \geqslant 2.$$

Solution

(a) **méthode**

> Pour résoudre cette limite, on écrit nu_n sous forme exponentielle et l'on exploite
> $$\ln(\ln n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\ln n).$$

$$nu_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}(\ln n)^\beta} = \exp\big(\underbrace{(1-\alpha)}_{>0}\ln n - \beta\,\underbrace{\ln(\ln n)}_{=\mathrm{o}(\ln n)}\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

À partir d'un certain rang on a $nu_n \geqslant 1$ et donc $u_n \geqslant 1/n$. Par comparaison de séries à termes positifs, on peut conclure que la série étudiée diverge.

(b) Par des calculs analogues

$$n^\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{=} \exp\big(\underbrace{(\lambda-\alpha)}_{<0}\ln n + \mathrm{o}(\ln n)\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Cette fois-ci on obtient que le terme u_n est négligeable devant $1/n^\lambda$ quand n tend vers l'infini. Sachant $\lambda > 1$, on peut affirmer que la série de terme général u_n converge absolument par comparaison à une série de Riemann convergente.

1. Cette étude généralise celle des séries de Riemann (qui correspond au cas $\beta = 0$).

(c) **méthode**

On développe $\ln(n+1)$ en écrivant

$$\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \big(\ln(n+1)\big)^{1-\beta} - (\ln n)^{1-\beta} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} (\ln n)^{1-\beta}\left(1+\frac{1}{n\ln n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)^{1-\beta} - (\ln n)^{1-\beta}. \end{aligned}$$

En exploitant le développement

$$(1+u)^{1-\beta} \underset{u\to 0}{=} 1 + (1-\beta)u + \mathrm{o}(u)$$

on obtient

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &\underset{n\to+\infty}{=} (\ln n)^{1-\beta}\left(1+(1-\beta)\frac{1}{n\ln n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right) - (\ln n)^{1-\beta} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} (1-\beta)\frac{1}{n(\ln n)^{\beta}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1-\beta}{n(\ln n)^{\beta}}. \end{aligned}$$

On en déduit l'équivalence

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1-\beta}(v_{n+1}-v_n).$$

méthode

Par le lien suite-série, la suite (v_n) et la série de terme général $v_{n+1}-v_n$ ont la même nature.

Par équivalence de séries à termes positifs[1], la série de terme général u_n a la nature de la série de terme général $v_{n+1}-v_n$, c'est-à-dire la nature de la suite (v_n). On peut alors affirmer que $\sum u_n$ converge pour $\beta > 1$ et diverge pour $\beta < 1$.

(d) Par un calcul analogue au précédent

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n = \ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln(\ln n) &\underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(\ln n + \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \ln(\ln n) \\ &= \ln(\ln n) + \ln\left(1+\frac{1}{n\ln n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right) - \ln(\ln n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\ln n}. \end{aligned}$$

Par équivalence de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ a la nature de la série télescopique de terme général $w_{n+1}-w_n$, c'est-à-dire la nature de la suite (w_n). La série $\sum u_n$ diverge.

1. Par définition, il est clair que u_n est positif.

Exercice 21 ***

Soit α dans $\mathbb{R}^*$, a et b dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. On considère la suite (u_n) déterminée par

$$u_0 = \alpha \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{n-a}{n-b} u_n.$$

(a) Montrer l'existence d'un réel $A \neq 0$ tel que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{A}{n^{a-b}}.$$

(b) Déterminer la nature de la série de terme général u_n et calculer sa somme lorsqu'elle converge.

Solution

(a) Commençons par observer que la suite (u_n) est bien définie car $b \notin \mathbb{N}$. De même, on peut souligner que ses termes sont tous non nuls car $a \notin \mathbb{N}$ et $\alpha \neq 0$. La question posée conduit à établir la convergence de la suite $\left(n^{a-b} u_n\right)$.

méthode

> Afin de pouvoir exploiter la relation de récurrence qui est de nature multiplicative, on introduit la série télescopique associée à la suite (v_n) déterminée par $v_n = \ln\left(n^{a-b} u_n\right)$.

Pour n assez grand, le rapport $\frac{n-a}{n-b}$ est strictement positif et le signe des termes u_n ne change plus. Quitte à considérer la suite opposée en choisissant $-\alpha$ au lieu de α, on peut supposer ce signe strictement positif ce qui permet d'introduire à partir d'un certain rang $v_n = \ln\left(n^{a-b} u_n\right)$. On a alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (a-b)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= (a-b)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{b-a}{n-b}\right) \end{aligned}$$

Sachant $\ln(1+u) = u + \mathrm{O}\left(u^2\right)$ quand u tend vers 0, on peut poursuivre le développement

$$v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{=} (a-b)\frac{1}{n} + \frac{b-a}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série télescopique de terme général $v_{n+1} - v_n$ converge absolument et donc la suite (v_n) converge. En posant ℓ sa limite, on obtient

$$n^{a-b} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{\ell}$$

et donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{A}{n^{a-b}} \quad \text{avec} \quad A = \mathrm{e}^{\ell} > 0.$$

(b) Par l'équivalent de signe constant qui précède, on peut affirmer que la série de terme général u_n converge si, et seulement si, $a - b > 1$.

Supposons cette condition remplie et calculons la somme S de la série. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(n-b)u_{n+1} = (n-a)u_n$ et donc

$$(b+1)u_{n+1} - au_n = (n+1)u_{n+1} - nu_n.$$

En sommant cette relation, on obtient pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{N}\big((b+1)u_{n+1} - au_n\big) = \sum_{n=0}^{N}\big((n+1)u_{n+1} - nu_n\big) = (N+1)u_{N+1}.$$

En passant à la limite quand N tend vers l'infini

$$(b+1)(S - u_0) - aS = 0$$

car $u_n = \mathrm{o}(1/n)$ en vertu de l'équivalent obtenu au-dessus. On en déduit

$$S = \frac{(b+1)\alpha}{b+1-a}.$$

11.5.4 Comparaison série-intégrale

Exercice 22 *

Déterminer un équivalent quand n croît vers l'infini de

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}.$$

Solution

méthode

On opère une comparaison série-intégrale après étude de la monotonie de la fonction exprimant le terme sommé.

On introduit la fonction réelle f définie sur $]1\,;+\infty[$ par la relation

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}.$$

La fonction f est décroissante car c'est l'inverse d'une fonction croissante et positive. On peut alors encadrer le terme $f(k)$ par des intégrales de f sur $[k-1\,;k]$ et $[k\,;k+1]$

$$\int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

(la minoration vaut pour $k \geqslant 2$ et la majoration pour $k \geqslant 3$ seulement).

En sommant ces encadrements tout en isolant le terme d'indice $k = 2$ lors de la majoration :

$$\sum_{k=2}^{n}\Big(\int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t\Big) \leqslant \sum_{k=2}^{n} f(k) \leqslant f(2) + \sum_{k=3}^{n}\Big(\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t\Big).$$

En raccordant les intégrales

$$\int_{2}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{n} f(k) \leqslant \frac{1}{2\ln 2} + \int_{2}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Il reste à calculer les intégrales en constatant une forme u'/u en $u(t) = \ln t$

$$\int_{2}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(\ln t)\Big]_{2}^{n} = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) \text{ et}$$
$$\int_{2}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln(\ln 2).$$

Les deux membres encadrants sont équivalents à $\ln(\ln n)$ quand n tend vers l'infini et l'on peut conclure

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln n).$$

Exercice 23 **

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Solution

méthode

Il ne faut pas se méprendre sur la question posée : on veut la nature de la série $\sum u_n$ et non la convergence de la série dont u_n est le reste !

Le terme u_n est bien défini car c'est le reste d'une série de Riemann convergente. La fonction $x \mapsto 1/x^2$ est décroissante sur $[1\,;+\infty[$ et l'on peut affirmer l'encadrement qui suit pour tout $k \geqslant 2$

$$\int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

Soit $n \geqslant 1$ et $N > n$. En sommant ces encadrements pour k allant de $n+1$ à N

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{n}^{N} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

On calcule les intégrales en introduisant la primitive $x \mapsto -1/x$ et l'on fait tendre N vers l'infini pour obtenir

$$\frac{1}{n+1} \leqslant u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Les deux membres encadrants sont équivalents à $1/n$ quand n tend vers l'infini et donc u_n aussi[1].

Par équivalence de séries à termes positifs, on peut conclure à la divergence de la série de terme général u_n.

Exercice 24 ***

Soit $\sum u_n$ une série divergente de réels strictement positifs. On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que, pour tout $\alpha > 1$, il y a convergence de la série

$$\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}.$$

Solution

méthode

> Lorsque la suite (u_n) est constante égale à 1, on retrouve la situation des séries de Riemann. On peut calquer à la situation en cours la démonstration de convergence des séries de Riemann par comparaison à une intégrale.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto 1/t^\alpha$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$ et $u_n = S_n - S_{n-1}$ donc

$$\frac{u_n}{S_n^\alpha} = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{S_n^\alpha} \leqslant \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$

En sommant, on obtient pour tout $N \geqslant 1$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{S_n^\alpha} \leqslant \int_{S_0}^{S_N} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = -\frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_{S_0}^{S_N} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{S_0^{\alpha-1}}.$$

La série étudiée est à termes positifs et convergente car ses sommes partielles sont majorées.

1. Cette étude correspond au cas particulier $\alpha = 2$ du sujet 7 p. 392.

11.6 Exercices d'approfondissement

Exercice 25 *

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier l'identité

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k\right) \mathrm{d}t = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

(b) En déduire la convergence et la somme de la *série harmonique alternée*

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Solution

(a) **méthode**

La somme en premier membre est géométrique : on sait la calculer !

Soit $t \in [0\,;1]$. Par sommation géométrique de raison $-t \neq 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k = \frac{1-(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t} = \frac{1}{1+t} + (-1)^n \frac{t^{n+1}}{1+t}.$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k\right) \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité, on peut exprimer le premier membre de l'identité précédente comme une somme partielle

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k\right) \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k \int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t\right) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Il ne reste plus qu'à étudier la limite du terme intégral restant.

méthode

Pour déterminer la limite d'une intégrale, on peut encadrer la fonction intégrée par des fonctions dont on sait calculer des primitives.

Pour tout $t \in [0\,;1]$, on a

$$0 \leqslant \frac{t^{n+1}}{1+t} \leqslant t^{n+1}.$$

En intégrant en bon ordre cet encadrement, on obtient

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{n+1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par le théorème de convergence par encadrement, on affirme

$$\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On peut alors conclure à la convergence de la série étudiée tout en obtenant la valeur de sa somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\right) = \ln 2.$$

Exercice 26 **

Déterminer une suite réelle (u_n) telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et telle que la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$ diverge sans limite.

Solution

méthode

Puisqu'il est délicat de calculer les sommes partielles d'une série quelconque, il est préférable de chercher les sommes partielles S_n puis de poser u_n égal à $S_n - S_{n-1}$ pour constituer un exemple.

On veut ici une suite (S_n) qui diverge sans limite et telle que ses termes successifs soient de plus en plus proches. La suite de terme général $S_n = \sin n$ vérifie la première condition sans vérifier la seconde : nous allons « ralentir la fréquence d'oscillation ».

Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons $S_n = \sin(\sqrt{n})$ et introduisons la suite (u_n) définie par

$$u_n = S_n - S_{n-1} = \sin(\sqrt{n}) - \sin(\sqrt{n-1}) \quad \text{avec} \quad n \geqslant 1.$$

Vérifions que la suite (u_n) est de limite nulle.

méthode

On exploite la formule de factorisation

$$\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

Pour $n \geqslant 1$, on peut écrire

$$u_n = 2\sin\left(\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{2}\right).$$

Or en introduisant la quantité conjuguée

$$\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{2}=\frac{1}{2\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

Par composition de limites on peut conclure que la suite (u_n) est de limite nulle.

Exercice 27 *

Soit $f\colon [1\,;+\infty[\,\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ strictement positive telle que

$$\frac{xf'(x)}{f(x)}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ell\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}\,.$$

(a) On suppose $\ell>-1$. Montrer la divergence de la série $\sum f(n)$.

(b) On suppose $\ell<-1$. Montrer la convergence de la série $\sum f(n)$.

Solution

(a) **méthode**

> On retraduit l'hypothèse exprimée par la limite en terme d'inégalité.

Pour x assez grand, la quantité $xf'(x)/f(x)$ est supérieure à -1. Il existe donc un réel A dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$ tel que pour tout réel x au delà de A

$$\frac{f'(x)}{f(x)}\geqslant-\frac{1}{x}.$$

En intégrant cette inégalité pour $x\geqslant A$,

$$\ln\bigl(f(x)\bigr)-\ln\bigl(f(A)\bigr)=\int_A^x\frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t\geqslant\int_A^x-\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln A-\ln x.$$

Ainsi,

$$f(x)\geqslant\frac{C}{x}\quad\text{avec}\quad C=Af(A)>0.$$

Par comparaison de séries à termes positifs, on peut affirmer la divergence de $\sum f(n)$.

(b) **méthode**

> On retraduit à nouveau l'hypothèse en terme d'inégalité mais en prenant cette fois appui sur une valeur strictement inférieure à -1.

Soit un réel $\alpha>1$ tel que $\ell<-\alpha$. Pour x assez grand, on a

$$\frac{f'(x)}{f(x)}\leqslant-\frac{\alpha}{x}.$$

En intégrant cette inégalité, on obtient l'existence d'un réel $C>0$ tel que pour x assez grand

$$f(x)\leqslant\frac{C}{x^\alpha}.$$

Par comparaison de séries à termes positifs, on peut affirmer cette fois-ci la convergence de la série $\sum f(n)$ car $\alpha>1$.

Exercice 28 **

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit le polynôme réel

$$P_n(X) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} X^{n-p}$$

et les nombres

$$\alpha_k = \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \quad \text{pour} \quad k \in [\![1\,;n]\!].$$

(a) Soit $x \in \left]0\,;\pi/2\right[$. En calculant de deux façons la partie imaginaire de

$$\left(\frac{e^{ix}}{\sin x}\right)^{2n+1}$$

établir l'identité

$$\frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin^{2n+1} x} = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} \left(\frac{1}{\tan^2 x}\right)^{n-p}.$$

(b) En déduire que les α_k sont exactement les racines du polynôme P_n.

(c) Établir les identités

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{n(2n-1)}{3} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{2n(n+1)}{3}.$$

(d) En exploitant l'encadrement

$$\forall x \in \left]0\,;\pi/2\right[, \quad \frac{1}{\tan^2 x} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Déterminer la valeur de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Solution

(a) D'une part,

$$\operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix}}{\sin x}\right)^{2n+1} = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{i(2n+1)x}}{(\sin x)^{2n+1}}\right) = \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin^{2n+1} x}.$$

D'autre part,

$$\left(\frac{e^{ix}}{\sin x}\right)^{2n+1} = \left(\frac{\cos x}{\sin x} + i\right)^{2n+1}.$$

En développant par la formule du binôme [1]

$$\left(\frac{\cos x}{\sin x}+\mathrm{i}\right)^{2n+1}=\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\left(\frac{1}{\tan x}\right)^{2n+1-k}\mathrm{i}^k.$$

La partie imaginaire est obtenue pour les termes d'indices impairs $k=2p+1$:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\sin x}\right)^{2n+1}=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{2n+1}{2p+1}\left(\frac{1}{\tan^2 x}\right)^{n-p}.$$

(b) Notons que les α_k sont bien définis car, pour $k\in[\![1\,;n]\!]$, le réel $k\pi/(2n+1)$ est élément de l'intervalle $]0\,;\pi/2[$. Par la formule qui précède

$$P_n\left(\frac{1}{\tan^2 x}\right)=\frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin^{2n+1}x}$$

et donc, pour tout entier k compris entre 1 et n,

$$P_n(\alpha_k)=0\quad\text{car}\quad\sin(k\pi)=0.$$

Les α_k sont donc racines du polynôme P_n.

Le polynôme P_n est de degré n et les α_k constituent n racines deux à deux distinctes de celui-ci car la fonction $x\mapsto 1/\tan^2(x)$ est strictement décroissante donc injective sur $]0\,;\pi/2[$. Le polynôme P_n ne possède alors pas d'autres racines et celles-ci sont des racines simples.

(c) En factorisant le polynôme P_n à partir de ses racines, on peut écrire

$$P_n=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_0=a_n(X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_n).$$

En identifiant le coefficient de X^{n-1} de part et d'autre, on obtient la relation

$$\alpha_1+\cdots+\alpha_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Ici

$$a_n=\binom{2n+1}{1}=2n+1\quad\text{et}\quad a_{n-1}=-\binom{2n+1}{3}=-\frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6}.$$

On obtient donc

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}=\frac{n(2n-1)}{3}.$$

Sachant

$$\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x}=1+\frac{1}{\tan^2 x}.$$

1. Il est commode d'appliquer la formule du binôme en portant la puissance k sur le terme i plutôt que sur le terme en tangente.

On obtient aussi

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}.$$

(d) Par étude des fonctions définies par les différences de membres successifs, on justifie l'encadrement

$$0 < \sin x \leqslant x \leqslant \tan x \quad \text{pour tout } x \in \left]0\,;\pi/2\right[$$

dont découle celui proposé :

$$\frac{1}{\tan^2 x} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2 x}.$$

En appliquant celui-ci pour $x = k\pi/(2n+1)$ et en sommant pour k allant de 1 à n

$$\frac{n(2n-1)}{3} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leqslant \frac{2n(n+1)}{3}.$$

En réorganisant les membres, on parvient à l'encadrement suivant :

$$\frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2}\pi^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{2n(n+1)}{3(2n+1)^2}\pi^2.$$

Les deux membres encadrants convergent vers la même limite et l'on peut conclure

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}.$$

Finalement, la série $\sum 1/n^2$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 29 **

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive et strictement croissante.
Déterminer la nature de la série de terme général

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}.$$

Solution

Posons
$$v_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$
Si la suite (u_n) converge, sa limite ℓ est strictement positive et l'on peut écrire
$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ell}(u_{n+1} - u_n).$$
La série à termes positifs $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge car elle a la nature de la suite (u_n). Par équivalence de séries à termes positifs, la série $\sum v_n$ converge aussi.

Si la suite (u_n) diverge alors, par croissance, la suite (u_n) tend vers $+\infty$. Par la décroissance de la fonction $t \to 1/t$, on peut affirmer l'inégalité [1]
$$\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} = \int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{\mathrm{d}t}{u_n} \geqslant \int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n).$$
Puisque la suite $(\ln u_n)$ croît vers l'infini, la série télescopique $\sum(\ln u_{n+1} - \ln u_n)$ diverge et, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum v_n$ diverge aussi.

Finalement, la série $\sum v_n$ a la nature de la suite (u_n).

Exercice 30 ***

On énumère en ordre croissant les nombres premiers par une suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$:
$$p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5, \dots$$
(a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Vérifier
$$\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - 1/p_n} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$
(b) En déduire la nature de la série $\sum 1/p_n$.

Solution

(a) **méthode**

‖ On peut exprimer $\frac{1}{1-1/p_n}$ par une somme géométrique.

Puisque les termes $1/p_n$ sont éléments de $[0\,;1[$, on peut écrire
$$\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - 1/p_n} = \prod_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_n^k}\right).$$
Les termes sommés étant positifs, on peut minorer le produit en introduisant $M \in \mathbb{N}$ arbitraire
$$\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - 1/p_n} \geqslant \prod_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=0}^{M} \frac{1}{p_n^k}\right).$$

1. Cette inégalité est aussi une conséquence de l'inégalité « classique » $\ln(1+x) \leqslant x$ pour $x > -1$.

Lorsque l'on développe le terme en second membre, on fait apparaître les inverses de tous les entiers pouvant s'écrire $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_N^{\alpha_N}$ avec $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_N$ éléments de $[\![0\,;M]\!]$. En choisissant M suffisamment grand [1], tous les entiers compris entre 1 et N figurent dans la liste précédente. Puisque les autres termes sommés sont positifs, on peut affirmer la minoration voulue

$$\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-1/p_n}\geqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}.$$

(b) Par la minoration qui précède, le produit tend vers $+\infty$ quand N croît vers l'infini. En passant au logarithme

$$\ln\left(\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-1/p_n}\right)=\sum_{n=1}^{N}\left(-\ln\left(1-\frac{1}{p_n}\right)\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$$

ce qui signifie la divergence de la série de terme général $-\ln\bigl(1-1/p_n\bigr)$.

Or, la suite (p_n) étant de limite $+\infty$, on peut affirmer l'équivalent

$$-\ln\left(1-\frac{1}{p_n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{p_n}.$$

Par équivalence de séries à termes positifs, on conclut à la divergence de $\sum\frac{1}{p_n}$.

1. Prendre M tel que $2^M\geqslant N$ suffit.

Formulaire

Trigonométrie

Transformations angulaires

Pour x réel

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos x & \sin(-x) &= -\sin x \\ \cos(\pi + x) &= -\cos x & \sin(\pi + x) &= -\sin x \\ \cos(\pi - x) &= -\cos x & \sin(\pi - x) &= \sin x \\ \cos(\pi/2 - x) &= \sin x & \sin(\pi/2 - x) &= \cos x \end{aligned}$$

Formules de développement

Pour a et b deux réels

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

En particulier,

$$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a \quad \text{et} \quad \sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

Sous réserve d'existence

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}, \quad \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \quad \text{et} \quad \tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Formules de linéarisation

Pour a et b deux réels

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) + \cos(a-b)\big)$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big)$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\big)$$

En particulier,

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

Formules de factorisation

Pour p et q deux réels

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Formules d'Euler et de Moivre

Pour tout réel t

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \text{et} \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

et pour tout entier n

$$(\cos t + i \sin t)^n = \cos(nt) + i \sin(nt)$$

Dérivation

Dérivées des fonctions usuelles

Pour $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et x évoluant dans un intervalle convenable

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^x\right) = \mathrm{e}^x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^n\right) = nx^{n-1} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^\alpha\right) = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\cos)'(x) = -\sin x \qquad (\sin)'(x) = \cos x$$

$$(\tan)'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\mathrm{ch})'(x) = \mathrm{sh}\, x \qquad (\mathrm{sh})'(x) = \mathrm{ch}\, x$$

Dérivation des formes composées

Pour u fonction dérivable convenable et $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\left(\mathrm{e}^u\right)' = u'\mathrm{e}^u \qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$\left(u^n\right)' = nu'u^{n-1} \qquad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \qquad \left(u^\alpha\right)' = \alpha u'u^{\alpha-1}$$

$$(\cos u)' = -u'\sin u \qquad (\sin u)' = u'\cos u \qquad (\tan u)' = u'\left(1+\tan^2 u\right)$$

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad (\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$(\mathrm{ch}\, u)' = u'\,\mathrm{sh}\, u \qquad (\mathrm{sh}\, u)' = u'\,\mathrm{ch}\, u$$

Calcul intégral

Primitives usuelles

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et t évoluant dans un intervalle convenable

$$\int t^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} t^{n+1} \qquad \int t^\alpha \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1}$$

$$\int \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t = \ln|t| \qquad \int \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t$$

$$\int \sin t \,\mathrm{d}t = -\cos t \qquad \int \cos t \,\mathrm{d}t = \sin t$$

$$\int \operatorname{sh} t \,\mathrm{d}t = \operatorname{ch} t \qquad \int \operatorname{ch} t \,\mathrm{d}t = \operatorname{sh} t$$

$$\int \frac{1}{1+t^2} \,\mathrm{d}t = \arctan t \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t = \arcsin t$$

Intégration des formes composées

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et u fonction dérivable convenable

$$\int u'u^n = \frac{1}{n+1} u^n \qquad \int u'u^\alpha = \frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1}$$

$$\int \frac{u'}{u} = \ln|u| \qquad \int u'\mathrm{e}^u = \mathrm{e}^u$$

$$\int u' \sin(u) = -\cos(u) \qquad \int u' \cos(u) = \sin(u)$$

$$\int \frac{u'}{1+u^2} = \arctan(u) \qquad \int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u$$

Calcul asymptotique

Équivalents usuels en 0

Lorsque x tend vers 0

$$\ln(1+x) \sim x \qquad e^x - 1 \sim x$$
$$\sin x \sim x \qquad 1 - \cos x \sim \tfrac{1}{2}x^2$$
$$\tan x \sim x \qquad \arctan x \sim x$$
$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad (\text{avec } \alpha \in \mathbb{R})$$

Ces équivalents peuvent aussi être considérés en remplaçant x par le terme u_n d'une suite de limite nulle : $\ln(1+u_n) \sim u_n$, $e^{u_n} - 1 \sim u_n$, etc.

Développements limités usuels

Lorsque u tend vers 0

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \cdots + u^n + o(u^n)$$

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + \cdots + (-1)^n u^n + o(u^n)$$

$$\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}u^n + o(u^n)$$

$$e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + \cdots + \frac{1}{n!}u^n + o(u^n)$$

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}u^n + o(u^n)$$

$$\cos u = 1 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{24}u^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}u^{2n} + o(u^{2n+1})$$

$$\sin u = u - \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{120}u^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}u^{2n+1} + o(u^{2n+2})$$

$$\operatorname{ch} u = 1 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{24}u^4 + \cdots + \frac{1}{(2n)!}u^{2n} + o(u^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh} u = u + \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{120}u^5 + \cdots + \frac{1}{(2n+1)!}u^{2n+1} + o(u^{2n+2})$$

$$\tan u = u + \frac{1}{3}u^3 + o(u^3)$$

$$\arctan u = u - \frac{1}{3}u^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}u^{2n+1} + o(u^{2n+1})$$

Table des matières

Collection Prépas scientifiques

Dirigée par Olivier Rodot

C. ANTONINI, Algèbre MP/MP*

N. BASBOIS et P. ABBRUGIATI, Algèbre MPSI/PCSI, 2e édition

G. COSTANTINI, Analyse MPSI/PCSI, 2e édition

K. DAO DUC et D. DELAUNAY, Probabilités

D. DELAUNAY, Exercices d'analyse MP/MP*

D. DELAUNAY, Exercices d'analyse MPSI

D. DELAUNAY, Exercices d'algèbre et de probabilités MP/MP*

D. DELAUNAY, Exercices d'algèbre et de probabilités MPSI

O. RODOT, Analyse MP/MP*

Chez le même éditeur

T. RIBEYRE, Chimie PC/PC*

M.-A. SCHOTT, J. VALENTIN, G. MAGADUR, S. CLÈDE, A.-L. LEFEVRE, A. ALTMAYER-HENZIEN, Chimie PCSI/MPSI

Cet ouvrage propose 336 exercices d'analyse regroupés par chapitre et accompagnés de résumés de cours. Il est destiné aux élèves de CPGE scientifiques de première année en filière MPSI. Il pourra aussi intéresser les étudiants préparant le CAPES de mathématiques.

Les **résumés de cours** présentent de façon synthétique les définitions et les théorèmes conformément au programme de la filière. Ils seront utiles pour une **révision rapide et efficace** et pourront servir de formulaire.

Les **exercices** proposés sont de niveaux variés et regroupés en trois catégories :

- les **exercices d'apprentissage** permettent l'acquisition des fondamentaux du cours ;
- les **exercices d'entraînement** conduisent à la maîtrise des concepts du chapitre ;
- les **exercices d'approfondissement** invitent les étudiants à une recherche plus fouillée par la mise en résonance de notions présentées dans différents chapitres.

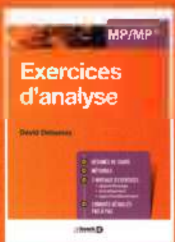
Les corrections des exercices sont **détaillées** pas à pas et accompagnées de **méthodes** mettant en lumière les démarches suivies et les idées récurrentes.

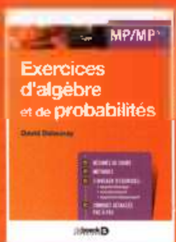
LES +

- des résumés de cours
- des méthodes
- 336 exercices de niveaux variés
- des corrigés très détaillés
- strictement conforme au programme officiel

David DELAUNAY, ancien élève de l'École normale supérieure de Cachan, est professeur agrégé de mathématiques en classes préparatoires au lycée Dupuy de Lôme de Lorient.

Collection dirigée par Olivier RODOT





ISBN 978-2-8073-0623-3

de boeck SUPÉRIEUR

Conception graphique · Primo&Primo