EPO/CPGE/PCSI/A1-1C

Année académique : 2020-2021
Module : Analyse II

Contrôle de Routine VI & Éléments de TD 1 (CdR6-PCSI-1C-AN-II)

Durée : 30 min.

Exercice 1 : Question de Cours (09pts)

1. On considère deux subdivisions $\sigma = \left(\frac{k}{2^{10}}\right)_{0\leq k\leq 2^{10}}$ et $\theta = \left(\frac{k}{10^3}\right)_{0\leq k\leq 10^3}$ du segment $[0;1]$.
   (a) Ces subdivisions sont-elles uniformes ? Justifier votre réponse.
   (b) σ est-elle plus fine que θ ? Justifier votre réponse.
   (c) Donner une subdivision du segment $[0;1]$ plus fine que σ et θ.
2. Soit $\varphi \in \mathcal{C}([-1;1], \mathbb{R}_+)$, et $\psi, \phi \in \mathcal{C}([-1;1], \mathbb{R})$. On suppose que $\int_{-1}^{1} \varphi = \int_{-1}^{1} \psi = 0$.
   (a) Démontrer Rigoureusement que φ est nulle sur $[-1;1]$.
   (b) Démontrer Rigoureusement qu'il existe x_0 dans $]-1;1[$ tel que $\psi(x_0) = 0$.
   (c) Montrer que : $\exists x^* \in]0;1[$ tel que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{r=1}^{n} \phi\left(\frac{r}{n}\right) = \phi(x^*)$.

Exercice 2 : Mémo Myrtilles du Calcul d'Intégrales et de Primitives (04 pts)

1. Calcul l'intégral : $\displaystyle\int_{-3}^{5} (x|x| + |x^2 - 1|)dx$.
2. Déterminer l'ensemble des primitive de la fonction, $x \longmapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$.

Exercice 3 : Sommes de Riemann [Bernhard RIEMANN (1826-1866)] (05 pts)

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$;
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} 2k \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 4 : Un Peu de Bourbakisme ! (05 pts)

1. Soient $f, g \in \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$, avec $|fg| \geq 1$. En utilisant l'inégalité de **Cauchy-Schwarz**, montrer que :

$$\left(\int_0^1 |f|\right)\left(\int_0^1 |g|\right) \geq 1.$$

BONUS Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}_+^*)$. Calculer : $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}dx$.

Date : 05 Mais 2021

EPO/CPGE/PCSI/1A

Année académique : 2020-2021
Module : Analyse II

Pré-test d'Analyse II (CdR5-PCSI-1C)

Durée : 25 min.

Exercice 1 : Minimum Vital (sur les intégrales) (12 points)

1. Qu'est-ce qu'une intégrale (en Mathématique) ? (3 points)
2. Quelles sont les techniques d'intégration que vous connaissez ? (2 points)
3. Quelle est la valeur moyenne de la fonction $\varphi : x \longmapsto x - [x]$ sur le segment $[2020; 2021]$? (2 points)
4. **Application :** *Mémo-Myrtilles du BAC 2020*
   (a) Calculer l'intégrale $I = \int_0^{1-\frac{1}{e}} (x-1)\ln(1-x)dx$ (*d'après BAC D 2020 (Burkina Faso)*) (2 points)
   (b) Pour tout $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on définie la fonction $f_m : x \longmapsto \frac{2(1-m)e^x - m - 1}{(m-1)e^{2x}}$, et $(\mathcal{C}_m)$ sa courbe dans un repère orthonormé du plan.
   Calculer la limite suivante : $\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$, où $A(\lambda)$ est l'aire du domaine plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_{-2})$, l'axe des ordonnées, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ (d'après BAC C 2020 2nd Tour (Burkina Faso)). (3 points)

Exercice 2 : Intégrale, inégalité et suite numérique (5 points)

On considère la suite numérique $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[n]{\sin(t)}dt$.

Déterminer la limite de la $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 3 : Equation Différentielle Linéaire d'ordre 1 (CIAM TSM : Chap 15, page-323, exo 1.a)b))

Résoudre sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ l'équation différentielle suivante : $x^3y' + x^2 + 1 = 0$. (3 points)

DEVOIR D'ANALYSE I

04 heures

Exercice 1 : Maniement des Notions Fondamentales d'Analyse I

A. Quelques propriétés élémentaires des fonctions et leurs régularités

1) Donner un exemple de 2 fonctions différentes p et q dont la somme s est une fonction non constante et 2021-périodique. Justifier votre réponse.

2) Montrer en utilisant la définition que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x-1}{x+1}$ est continue en 0.

3) La fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x-1} - \left[\dfrac{1}{x-1}\right]$ est-elle prolongeable par continuité en 1. Justifier la réponse

4) Soient $n \in \mathbb{N}$, et la fonction $h : x \longmapsto (x^2 - nx + 1)e^{-nx}$. Montrez que $h \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et calculer $h^{(n)}(0)$

B. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $(E_1) : |2x - \sqrt{5x-1}| = 0$;

b. $(E_2) : 3^x + 4^x = 5^x$.

C. Calculer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}$;

(b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right)$.

D. Application

Walker parcourt 12 km en une heure. Montrer qu'il existe au moins un intervalle de 30 minutes pendant lequel il parcourt exactement 6 km.

Exercice 2 : Nombres Réels, Propriétés de la Borne Sup Inf

Soient $(a_k)_{1 \leq k \leq 10}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}$, $\mathbf{r}$ un élément de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{E}$ une partie de $\mathbb{R}$ avec :

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{2025\sqrt{2024}+2024\sqrt{2025}},$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \left(\frac{e+p}{e+p+o}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{e+o}{e+p+o}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{p+o}{e+p+o}\right)^{\frac{1}{2}} : e, p, o \in \mathbb{R}_+^* \right\}.$$

1. Montrer que $\mathbf{r}$ est un nombre rationnel

2. Déterminer s'ils existent la borne **inf**, la borne **sup** ainsi que le **min**, le **max** de $\mathcal{E}$.

3. L'ensemble $\mathcal{E} \cup \mathbb{R}_-$ est-il dense dans $\mathbb{R}$? Justifier votre réponse.

4. Montrer que :

(a) Si $(a_k)_{1 \leq k \leq 10} \subset]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \sin^2(a_k) = 1$ alors, on a : $\tan\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{10} a_k \sin^3(a_k)\right) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{10} \tan(a_k)$.

(b) Si $\dfrac{a_1}{5} + \dfrac{a_2}{9} + \dfrac{a_3}{13} + \cdots + \dfrac{a_{10}}{41} = 0$, alors la fonction

$$\Theta : x \longmapsto a_1\cos(5x) + a_2\cos(9x) + \cdots + a_{10}\cos(41x)$$

s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$. Peut-on généraliser ce résultat ? Justifier.

Exercice 3 : Inéquation/Equation Fonctionnelle

1. Soit φ une fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, telles que :

   $\boxed{H1}$ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x+1) - \varphi(x) = 2x + 1$; $\qquad$ $\boxed{H2}$ $\forall x \in [0;1], \quad |\varphi(x)| \leq 1$.

   Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |\varphi(x)| \leq 2 + x^2$.

   (*Indication : on pourra utiliser la fonction* $\gamma(x) = \varphi(x) - x^2$.)

2. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifiant la propriété :

$$\frac{(f(a))^2 + (f(b))^2}{f(u^2) + f(v^2)} = \frac{a^2 + b^2}{u^2 + v^2}, \quad \forall a, b, u, v \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que : } ab = uv.$$

Problème : Etude d'une Fonction et sa Réciproque

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos(x)} & \text{si } \quad x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; 0\right]. \\[2ex] \dfrac{2\cos(x) - 1}{\cos(x)} & \text{si } \quad x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[. \end{cases}$$

On note $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Étudier la parité de f.
2. Montrer que f est continue et dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.
3. Rappeler la définition de la continuité uniforme. puis montrer que f est uniformément continue sur $\left[0; \frac{3}{2}\right]$.
4. f est-elle lipschitzienne sur $\left[0; \frac{3}{2}\right]$? Justifier votre réponse.
5. Vérifier que le point $\Omega(0,1)$ est un centre de symétrie de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.
6. (a) Étudier les variations de f ;
   (b) Tracer la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et placer le point $\Omega(0,1)$ dans le même repère.
7. Montrer que f réalise une bijection de $]0; \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$; On note f^{-1} sa réciproque.
8. Tracer la courbe $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ représentative de f^{-1} dans le même repère que $(\mathscr{C}_f)$.
9. Étudier la dérivabilité de f^{-1}. En déduire son domaine de dérivabilité $\mathscr{D}$.
10. (a) Montrer que : $\forall x \in]1; +\infty[, \quad (f^{-1})'(x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.
    (b) En déduire l'expression de $(f^{-1})'$ sur tout $\mathscr{D}$.
    (c) Déterminer et représenter la tangente à $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ au point d'abscisse $x_0 = 1$.

BM

EPO/CPGE/PCSI/L1

Année académique : 2020-2021
Module : Analyse I

Devoir de Maison n° 2 d'Analyse I (DM1-PCSI-1C&D)
A rendre au plus tard le 05 Mars 2021 à 12h00min GMT à la Scolarité.

Exercice 1 : Fonctions Presque Lip & Application des fonctions usuelles (02pts)

1. Montrer que : si $\psi \in \mathscr{C}([a;b],\mathbb{R})$ alors $\forall \varepsilon > 0, \exists k > 0; \forall (x,y) \in [a,b]^2, |\psi(x) - \psi(y)| \leqslant \varepsilon + k|x-y| (\clubsuit)$.
   Remarque : Si ψ vérifie ($\clubsuit$) alors on dit qu'elle est presque lipschitzienne.
2. Soient $e, p, o \in \mathbb{R}$ avec $0 < e < p < o$. Montrer que : $\dfrac{e}{p+o} + \dfrac{p}{o+e} + \dfrac{o}{e+p} \leq \dfrac{e^2}{p^2+o^2} + \dfrac{p^2}{o^2+e^2} + \dfrac{o^2}{e^2+p^2}$.

Exercice 2 : Déterminer les développements limités à l'ordre demandé au voisinage des points indiqués (03pts) :

i) $\arccos\sqrt{\frac{x}{\tan x}}$ (ordre 3 en 0) **ii)** $(1+2x)^{\frac{1}{x+1}}$ (ordre 4 en 0) **iii)** $\tan\sqrt[3]{4(\pi^3+x^3)}$ (ordre 3 en π).

Exercice 3 : Interaction entre Suites Numériques & Quelques Grands Théorèmes d'Analyse I (05pts)

Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in]0;1[$, $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. On suppose que :

1. $u_0 = u_1 = 1$, et $\forall n \geq 0$, $u_{n+2} = 2(u_{n+1} - u_n)$.
   Exprimer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $(u_n)_n \subset \mathbb{Z}$.
2. n fixé dans $\mathbb{N}^*$ et $\dfrac{u_0}{1-\alpha} + \dfrac{u_1}{1-\alpha^2} + \cdots + \dfrac{u_n}{1-\alpha^{n+1}} = 0$. Montrer que :$\exists \beta \in]0;1[\mid u_0 + u_1\beta + \cdots + u_n\beta^n = 0$.
3. $u_0 = 1$, et $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = \ln(e^{u_n} - u_n)$; on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Étudier la nature de la suite $(S_n)_n$.
4. $\forall n \geq 2$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)}{\cos^2\left(\frac{(k-1)\pi}{2n}\right)\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}$. Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n^3}$.
5. $\forall n \geq 1$, $u_n = \left(\cos\left(\dfrac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\dfrac{n\pi}{6n+1}\right)\right)^n + \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$ (n racine(s)).
   Étudier la nature de la suite $(u_n)_n$.

Problème : Étude d'une suite implicite, Equivalence et Fonction Puissance (10pts)

■Partie 1. Pour tout entier $n \geq 2$, on note (E_n) l'équation donnée par (E_n) : $x^n - x = n$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, (E_n) admet une unique solution notée u_n dans $\mathbb{R}^+$, et justifier que $u_n > 1$.
2. Démontrer que $\forall n \geq 2$, $n^{\frac{2}{n}} \leq n$. En déduire la limite la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.
3. Soit $(v_n)_{n\geq 2}$ une suite définie par : $\forall n \geq 2$, $v_n = u_n - 1$.
   Montrer que : $\forall n \geq 2$, $n\ln(v_n+1) = \ln(v_n+1+n)$. En déduire que : $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

■Partie 2. Soient f et g deux fonctions réelles définies par : $f : x \longmapsto \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x+1}$; et $g : x \longmapsto f(x) - \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{x-1}$

On note $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

A. Étude de la fonction f

1) Déterminer le domaine $\mathscr{D}_f$ de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}_f$.
2) Montrer que f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ et étudier ses variables sur cet ensemble.
3) Tracer la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et ses asymptotes (ou branches asymptotiques).

B. Étude de la fonction g

(1) Déterminer le domaine $\mathscr{D}_g$ de dérivabilité de g et étudier sa parité.
(2) Étudier le prolongement par continuité de g aux bornes réels de $\mathscr{D}_g$.
(3) Étudier les limites de g aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$. Interpréter graphiquement ces résultats.

 Date : **26 Février 2021.**

BM

Devoir de Maison d'Analyse I (DM1-PCS1^{1C})

A rendre au plus tard le 15 Janvier 2021 à 18h30min GMT.

Exercice 1 : Minimum Vital

I. Soient $m \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre exact des solutions dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes :

a. $(E_1) : 4^x n + 6^x m = 9^x$; b. $(E_2) : 2^x + 3^x = 4^x - 5^x$; c. $(E_3) : \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x} + \sqrt[7]{x} = 0$.

II. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$ dans les cas suivants :

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2020 f(x) + 2x^{\frac{1}{2}} f'(x)\right) = 2021$; (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) + \dfrac{1}{|f(x)|}\right) = 0$.

III. Soit ABC un triangle d'angle aux sommets $a, b, c \in]0; \pi[$. Montrer que :

a.) $\cos\left(\dfrac{a}{2}\right) + \cos\left(\dfrac{b}{2}\right) + \cos\left(\dfrac{c}{2}\right) \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$; **b.)** $\sin^2(a) + \sin^2(b) + \sin^2(c) \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 2 : Continuité & Propriétés de la Borne Sup/Inf

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ (avec $a < b$) et $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$.

1. Montrer que pour tout $x \in [a; b]$ l'ensemble $\left\{t \in [a; b] \ : \ f(t) = \dfrac{f(a) + f(x)}{2}\right\}$ est non vide.

   Pour la suite pour tout $x \in [a; b]$, on pose : $\psi(x) = \inf\left\{t \in [a; b] \ : \ f(t) = \dfrac{f(a) + f(x)}{2}\right\}$.

2. Soit $x \in [a; b]$, montrer que $\psi(x) \in [a; b]$ et que $f \circ \psi(x) = \dfrac{f(a) + f(x)}{2}$.
3. Montrer que si f est strictement croissante, $\psi \in \mathcal{C}([a; b], [a; b])$.
4. Donner un exemple de f pour laquelle la fonction ψ n'est pas continue.
5. Dans cette question, on suppose de plus que f est convexe et qu'il existe $c \in]a; b[$ qui est un maximum local. Montrer que f est constante dans un voisinage de c.

Problème : Sur les Théorèmes Fondamentaux d'Analyse

Soient $n > 2, a, b \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction polynomiale $P_n(x) = x^n + ax + b$.

1. Montrer qu'il existe une famille de réels $(\theta_k)_{1 \leq k \leq n}$ deux à deux distingues dans $]0; 1[$ tel que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P_n^{(2)}(\theta_k) = n^2$.
2. En déduire que pour toute famille de réels positifs $(\omega_k)_{1 \leq k \leq n}$, il existe deux réels $\theta, \omega > 0$ tel que :

$$P_n\left(\frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^{n} \theta_k^{n-2} \omega_k\right) \leq n[(\theta\omega)^n + a\theta\omega + b].$$

3. Pour la suite, on prend : $n = 3$, $b = -1$, et $a = \delta > 0$, et on note P_δ le polynôme correspondant, c'est-à-dire : $P_\delta(x) = x^3 + \delta x - 1$.

   (a) Montrer que ce polynôme P_δ admet une unique racine réelle $r(\delta)$.

   Dans ce qui suit, on note r l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ qui a tout δ associe la racine réelle $r(\delta)$.

   (b) Montrer que : $r(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+^*$.

   (c) Montrer que r est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

   (d) Calculer $r(0)$, et déterminer $\lim\limits_{\delta \to +\infty} r(\delta)$, puis montrer que r est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   (e) Déterminer l'application réciproque de r.

   (f) Montrer que r est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $r'(\delta)$, pour tout $\delta \in \mathbb{R}_+$.

   (g) Donner l'allure de la courbe de r dans un repère orthonormal du plan.

Contrôle de Routine VII & Éléments de TD 3 (CdR7-PCSI-1C-AN-II)

Durée : 30 min.

Exercice 1 : Compréhension du Cours (CdC) (04 pts)

1. Qu'est ce qu'une équation différentielle
2. Énoncer clairement le Théorème de Cauchy-Lipschitz.
3. Donner la définition d'une série numérique.

Exercice 2 : Série Numérique (05 pts)

Étudier la nature des séries numériques suivantes et calculer leur somme en cas de convergence.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+1} - 1)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;
2. $\sum \left(\sqrt{7} - \sqrt{5}\right)^n$.

Exercice 3 : Techniques de Résolution de 2 Equations Différentielles Non Linéaires Classiques

❶ **Équation de Bernoulli, $(E_B) : y' + a(x)y + b(x)y^\alpha = 0, \qquad \alpha \in \mathbb{R} - \{0,1\}$** (05 pts)

1) Montrer que la résolution de (E_B) se ramène à une équation linéaire par le changement de fonction $z(x) = 1/y(x)^{\alpha-1}$.
2) Trouver les solutions de l'équation $xy' + y - xy^3 = 0$.

❷ **Équation de Riccati, $(E_R) : y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$** (06 pts)

(1) Montrer que si y_0 est une solution particulière de (E_R) alors la fonction définie par $u(x) = y(x) - y_0(x)$ vérifie une équation de Bernoulli (avec $\alpha = 2$).

(2) Résoudre $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ en vérifiant d'abord que $y_0(x) = \frac{1}{x}$ est une solution.

BM

EPO/CPGE/PCSI/1A

Année académique : 2020-2021
Module : Analyse I

Contrôle de Routine IV d'Analyse I (CdR4-PCSI-1C)

Durée : 30 min.

Exercice 1

Soit f la fonction définie par, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*, x \longmapsto \dfrac{e^x + 2}{e^{-x}}$.

1. Montrer que f est bijective, puis déterminer sa fonction réciproque f^{-1}.
2. Donner un équivalent de f au voisinage de 0.

Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\operatorname{argsh}\left(\dfrac{x^2 - 1}{2x}\right)$,
2. $\arccos(1 - 2x^2) + \arcsin(2x\sqrt{1 - x^2})$.

Exercice 3

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

   (a) $n! \leq \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$;
   (b) $\sqrt[2020]{2020!} < \sqrt[2021]{2021!}$;
   (c) $E(\sqrt{x}) = E(\sqrt{E(x)})$.

2. Calculer la limite de la suite numérique de terme général u_n donné par :

   (a) $u_n = \left(\dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{2^2}\right) + \left(\dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{2^3}\right) + \cdots + \left(\dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{2^n}\right)$;
   (b) $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{9}\right) \times \cdots \times \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

3. Soit (a_n) une suite d'élément de $\mathbb{R}_+$ telle que (a_n) converge vers $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer en utilisant la définition que la suite $(\sqrt{a_n})$ converge vers $\sqrt{a}$. La suite de terme général $\max(a_n, \sqrt{a_n})$ est-elle convergente ? Justifie

4. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définies par : $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 24$, et $\forall n \geq 4$, $b_n = \dfrac{6b_{n-1}^2 b_{n-3} - 8b_{n-1}b_{n-2}^2}{b_{n-2}b_{n-3}}$.

   Exprimer b_n en fonction de n. En déduire la nature de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1 Vrai ou faux ?

a) Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

b) Si une partie A de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure M tout réel inférieur à M appartient à A.

c) La somme de deux irrationnels est un irrationnel.

d) La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.

e) L'ensemble des irrationnels est un intervalle de $\mathbb{R}$.

f) Entre deux rationnels distincts, il existe toujours un irrationnel.

g) La fonction partie entière est croissante.

h) Tout réel possède des approximations rationnelles à 10^{-p} près, quel que soit l'entier p.

Inégalités dans

2 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}_+^3$. Montrer que l'un au moins des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

3 Soit $x_1, x_2, \cdots, x_n$ n réels strictement positifs. Montrer que :

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(x_1^{-1} + x_2^{-1} + \cdots + x_n^{-1}) \geqslant n^2$$

Borne supérieure ou inférieure

4 Déterminer les bornes supérieure et inférieure des ensembles suivants, si elles existent :

a) $\left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$; b) $\left\{(-1)^n(1-\frac{1}{n}),\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$;

c) $\left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{p},\ (n,p) \in \mathbb{N}^{*2}\right\}$.

5 Soit a et b deux réels. Montrer que :

$$(\forall \varepsilon > 0 \quad a \leqslant b + \varepsilon) \quad \Rightarrow \quad a \leqslant b$$

6 Soit A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. Montrer que :

1) $A \subset B \quad \Rightarrow \quad \sup A \leqslant \sup B$.

2) $A \cup B$ est majorée. Déterminer $\sup(A \cup B)$.

3) $A \cap B$ est majorée. Peut-on déterminer $\sup(A \cap B)$?

7 Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (a, b) \in A \times B \quad a \leqslant b$$

Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que

$$\sup A \leqslant \inf B$$

A-t-on égalité ?

8 Soit A une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des distances entre deux éléments quelconques de A possède une borne supérieure. On appelle ce nombre *diamètre* de A et on le note $d(A)$. Montrer que :

$$d(A) \leqslant \sup A - \inf A \qquad \text{et que :}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists (x, y) \in A^2 \quad |x - y| \geqslant \sup A - \inf A - 2\varepsilon$$

Conclure.

9 Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles bornées. Montrer que :

$$|\sup x_n - \sup y_n| \leqslant \sup |x_n - y_n|$$

Nombres rationnels et irrationnels

10 Soit x et y deux rationnels tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont irrationnels. Démontrer que $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ est irrationnel.

11 Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$. Montrer que si $\sqrt[n]{m}$ est rationnel, alors il est entier.

12 Montrer que les nombres suivants sont rationnels :

$$a = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

$$b = \sqrt{2}\sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{2}\sqrt[4]{7 - 4\sqrt{3}}$$

13 Montrer que les nombres $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ et $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ sont irrationnels.

14 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$(1 + \sqrt{2})^n = \sqrt{p} + \sqrt{p - 1}$$

Travaux Dirigés IV : Séries Numériques

Exercice 1 : Nature des Séries Numériques

Etudier la nature de la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ de terme général :

1. $u_n = \dfrac{(n!)^2}{n^2}$;
2. $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha(1+n^\beta)}$, (avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) ;
3. $u_n = \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$;
4. $u_n = \left(\dfrac{e}{\pi}\right)^n \sin(en\pi)$;
5. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!}$;
6. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n}$;
7. $u_n = \left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{2}n}$;
8. $u_n = \dfrac{n^{(-1)^n}}{5^n}$;
9. $u_n = \ln^{10}(n)\dfrac{\arctan(3n^3+2n^2+n)}{n^{\frac{4}{3}}}$;
10. $u_n = \displaystyle\int_0^1 \tan(t^{n^2})dt$;
11. $u_n = \arccos\left(\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{n^2}}\right)$;
12. $u_n = \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$;
13. $u_n = \sin(\pi(4+\sqrt{10})^n)$;
14. $u_n = \dfrac{a^n n!}{n^n}$, (avec $a \in \mathbb{R}_+^*$) ;
15. $u_n = \dfrac{\alpha^{\beta^n}}{\beta^{\alpha^n}}$, (avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$) ;
16. $u_n = (\sqrt[p]{n+q} + \sqrt[q]{n+p})^{-\sqrt{n}}$, (avec $p, q \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 2 : Calcul de Somme de Séries Convergentes

Etudier la nature des séries suivantes et calculer leur somme en cas de convergence.

1. $\sum \dfrac{1}{1+2+3+\ldots+n}$;
2. $\sum \dfrac{n+1}{7^n}$;
3. $\sum_{n>1} \sin^n(\phi)$, (avec $\phi \in [0, 2\pi[$) ;
4. $\sum \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$;
5. $\sum \cos\left(\dfrac{a}{2^n}\right)$, (avec $a \in \mathbb{R}$) ;
6. $\sum \ln\left(\cos\left(\dfrac{a}{2^n}\right)\right)$, (avec $a \in]-\pi/2, \pi/2[$) ;
7. $\sum_{n>1} \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n}$;
8. $\sum_{n \geq 1} \dfrac{n}{(4n^2-1)^2}$;
9. $\sum_{n>1} (-1)^n \left(\dfrac{1}{(2n+1)!} + \dfrac{1}{n}\right)$;
10. $\sum_{n>0} \dfrac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\sqrt{n(n+1)}}$;
11. $\sum (-1)^n \dfrac{\cos^3(3^n\theta)}{3^n}$, (avec $\theta \in \mathbb{R}$) .

Exercice 3 : Nature de Séries Associées

I. Soient λ un réel et P un polynôme à coefficients réels définie par : $P(x) = ax^2 + bx + c$.
Montrer que la série de terme général $P(n)\dfrac{\lambda^n}{n!}$ est convergente et calculer sa somme.

II. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \dfrac{\sqrt{u_n}}{2n+1}$.

(a) Montrer que si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum v_n$ converge.

(b) Montrer que la réciproque est fausse.

III. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries à termes dans $\mathbb{R}_+^*$ et convergentes.

(a) Déterminer la nature des séries de terme général : $\max(x_n, y_n)$, $\sqrt{x_n^2 + y_n^2}$, $ax_n^2 + by_n^2$, $\left[\frac{a}{x_n} + \frac{b}{y_n}\right]^{-1}$, $\frac{x_1y_1 + \dots + x_ny_n}{n}$, $\frac{(x_ny_n)^2}{ax_n^3 + by_n^3}$.

(b) Donner un exemple de suite réelle $(x_n)_n$ (de signe quelconque) telles que : $\sum x_n$ CV et $\sum x_n^3$ DV.

Exercice 4 : Série Harmonique et Constante d'Euler γ

On considère la série Harmonique de terme de général $h_n = \frac{1}{n}$. Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de ses sommes partielles

1. Démontrer que pour tout $k \geq 2$, $\int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leq h_k \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}dt$.
2. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.
3. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} h_n$ diverge et que H_n est equivalente à $\ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $d_n = h_n - \int_n^{n+1} \frac{1}{t}dt$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq d_n \leq h_n - h_{n+1}$. (b) En déduire que la série $\sum_{n>0} d_n$ converge.
5. En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ tel que . $\lim_{n\to+\infty} [H_n - \ln(n)] = \gamma$.

   Application : `Avec Matlab, on trouve :` $n = 10^6 \Longrightarrow H_n - \ln(n) = 0,5772 \simeq \gamma$.
6. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $a_n = (-1)^{n-1}h_n$. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ converge.
7. Montrer que la suite des sommes partielles $(A_n = \sum_{k=1}^{n} a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ vérifie : $A_n = \int_0^1 \frac{1-(-1)^n t^n}{1+t}dt$.
8. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|A_n - \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt\right| \leq \frac{1}{n+1}$. b) En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \ln(2)$.
9. Déterminer la plus petite valeur de n pour que l'on ait $|R_n| = |A_n - \ln(2)| \leq 10^{-3}$.
10. i) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_{2n} = H_{2n} - H_n$. ii) Retrouver la limite de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en utilisant 5.

Exercice 5 : Critère de Convergence d'Abel

On considère deux suites $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On note, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, et on suppose :

(H_1) $\exists M > 0 / \forall n \in \mathbb{N}, |A_n| \leq M$; (H_2) $(b_n)_n \subset \mathbb{R}_+$, décroissante et $\lim b_n = 0$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} a_kb_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_nb_n$; 2. En déduire que la série $\sum a_nb_n$ converge.
3. **Application :** Étudier la nature des séries suivantes : $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{e^{in\sqrt{2}}}{\sqrt{n}}$, $\sum \frac{(1+i)^n}{(n+1)a^n}$ (avec $a \in \mathbb{R}^*$), $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sin(n\theta)}{n}$.

Exercice 6 : Nature de la série $\sum \sin(e\pi n!)$

1. Soient a un réel non nul et $(b_n)_n$ une suite bornées. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{a}{n} + \frac{b_n}{n(n+1)}\right)$.
2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, le réel $p_n = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!}$ est un entier pair.

   (b) En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, il existe $c_n \in]0,1[$ et $q_n \in \mathbb{N}$ tel que : $en! = 2q_n + (n+1) + \frac{1}{n+1} + \frac{e^{c_n}}{(n+1)(n+2)}$.
3. Montrer que la série $\sum \sin(e\pi n!)$ est semi-convergente.

Devoir Surveillé n° 1 d'Analyse II

: 04 heures

Exercice 1 : Compréhension du Cours (CdC) (06 points)

1. **Intégrabilité au sens de Riemann**
   (a) Donner la définition d'une fonction intégrable au sens de Riemann.
   (b) Donner l'exemple d'une fonction non Riemann intégrable sur un segment de $\mathbb{R}$. Justifier votre réponse.
2. **Fonction Continue par Morceaux et son Intégrale Définie**
   Soit f la fonction définie par, $f : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto (x-1)E(x^2)$.
   (a) Montrer que f est continue par morceaux.
   (b) Calculer $\int_1^2 f(t)dt$.
3. **Intégrale et Inégalité**
   (a) Montrer que : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x}\sin(x)dx \leq \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.
   (b) Soient $e, p, o \in \mathbb{R}$ (avec $e < p < o$) et $f : [e, o] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et dérivable sur $]e, o[$.
      i. Démontrer que : $\forall p \in]e, o[, \quad (o - e)\left[f(p) + \frac{1}{2}(e - 2p + o)f'(p)\right] \leq \int_e^o f(\omega)d\omega$.
      ii. En déduire que : $\int_e^o f(p)dp \geq (o-e)f\left(\frac{e+o}{2}\right)$.
      iii. Montrer que : $\exists p^* \in]e, o[\mid \left[f(p) + \frac{1}{2}(e - 2p + o)f'(p)\right] \leq f(p^*)$.
4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de l'intégrale généralisée suivante : $\int_1^{\infty} (x+1)^{\theta}dx$.
5. Montre que l'intégrale impropre $\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est semi-convergente.

Exercice 2 : Concepts de Base de l'Analyse II (04 points)

1. **Intégration définie**
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les intégrales suivantes :
   (a) $I = \int_1^{27} \frac{t + \sqrt[3]{t^2} + \sqrt[6]{t}}{t(1+\sqrt[3]{t})}dt$;
   (b) $I_n = \int_0^{n\pi} (\cos(x))^{2020}\sin(2021\pi - x)dx$.
2. **Somme de Riemann**
   Calculer la limite quand n vers $+\infty$ de la suite de générale $\mathscr{R}_n$ donné par :
   $$\mathscr{R}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2020k(k^2+n^2)\sqrt{505k^4 + 1010(kn)^2 + (n\sqrt{2019})^2}}{n^6}.$$
3. **Calcul de Primitives.** Calculer les primitives suivantes :
   (a) $\int \cos(\ln(x))dx$;
   (b) $\int \frac{1}{1+x+x^2}dx$.

Exercice 3 : Restitution Organisée de Connaissances et Incontournables (R.O.C.I.) (04 points)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{N}$, on définit $\mathfrak{B}(p,q) = \int_a^b (x-a)^p (b-x)^q dx$

1. Montrer que si $q \in \mathbb{N}^*$, alors : $\mathfrak{B}(p,q) = \frac{q}{p+1}\mathfrak{B}(p+1, q-1)$.
2. En déduire $\mathfrak{B}(p,q)$ et $K_{p,q} = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx$
3. En utilisant le cas $a = -1, b = 1, p = q = n$, en déduire la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k(-1)^k}{2k+1}$
4. (a) Calculer $\mathcal{J}(p,q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{2p+1}\cos(t)^{2q+1} dt$.

   (b) Donner la valeur de $I_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(\omega) d\omega$.

Problème : Étude d'une Fonction Intégrale Indéfinie (6+10%(Bonus) : 8 points)

Soit φ et f deux applications définies par, $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = e^{\frac{1}{\sqrt{t}}}$, et $f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t)dt$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

On note (C_f) la courbe de f dans un repère orthogonal du plan.

1. Etudier les variations de φ, puis tracer sa courbe dans un repère orthogonal du plan.
2. Étude des variations de f.
   (a) Justifier clairement que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer sa dérivé f'.
   (c) En déduire que le signe de f' est celui de la fonction $\theta : x \longmapsto 2 - \exp\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$.
   (d) Déterminer les variations de f.
3. Étude de f aux bornes de son domaine de définition.
   (a) Montrer que : $\forall x > 0, \quad x\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right) \leq f(x) \leq x\exp\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.
   (b) En déduire les limites de f en 0 et en $+\infty$. Que peut-on conclure ?
   (c) Déterminer un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.
4. Comportement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$.
   (a) À l'aide d'un développement asymptotique (généralisation des développements limités) de φ en $+\infty$, montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a :

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln(2) + x + 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{x} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{3\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

   (b) Que peut-on conclure sur le comportement asymptotique de (C_f) au voisinage de $+\infty$?
5. Tracer l'allure de la courbe (C_f) dans un repère orthogonal du plan.

(*__Données__ : On prendra :* $\sqrt{2} = 1.41$; $\ln(2) = 0.69$; $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.71$; $\frac{1}{\ln(2)} = 1.44$; $\frac{3}{2\ln(2)} = 2.16$; $\frac{3-2\sqrt{2}}{2\ln(2)} = 0.12$; $\frac{3-2\sqrt{2}}{2(\ln(2))^2} = 0.18$.)

Exercice 3 : Restitution Organisée de Connaissances et Incontournables (R.O.C.I.) (04 points)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{N}$, on définie $\mathscr{B}(p,q) = \int_a^b (x-a)^p(b-x)^q dx$.

1. Montrer que si $q \in \mathbb{N}^*$, alors : $\mathscr{B}(p,q) = \frac{q}{p+1}\mathscr{B}(p+1, q-1)$.
2. En déduire $\mathscr{B}(p,q)$ et $K_{p,q} = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx$.
3. En utilisant le cas $a = -1, b = 1, p = q = n$, en déduire la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k(-1)^k}{2k+1}$.
4. (a) Calculer $\mathscr{J}(p,q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{2p+1}\cos(t)^{2q+1} dt$.

   (b) Donner la valeur de $I_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(\omega)d\omega$.

Problème : Étude d'une Fonction Intégrale Indéfinie (6+10%(Bonus) :=8 points)

Soit φ et f deux applications définies par, $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = e^{\frac{1}{\sqrt{t}}}$, et $f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t)dt$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

On note (C_f) la courbe de f dans un repère orthogonal du plan.

1. Etudier les variations de φ, puis tracer sa courbe dans un repère orthogonal du plan.
2. Étude des variations de f.
   (a) Justifier clairement que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer sa dérivé f'.
   (c) En déduire que le signe de f' est celui de la fonction $\theta : x \longmapsto 2 - \exp\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$.
   (d) Déterminer les variations de f.
3. Étude de f aux bornes de son domaine de définition.
   (a) Montrer que : $\forall x > 0, \quad x\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right) \leq f(x) \leq x\exp\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.
   (b) En déduire les limites de f en 0 et en $+\infty$. Que peut-on conclure ?
   (c) Déterminer un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.
4. Comportement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$.
   (a) À l'aide d'un développement asymptotique (généralisation des développements limités) de φ en $+\infty$, montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a :
   $$f(x) = \frac{1}{2}\ln(2) + x + 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{x} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{3\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$
   (b) Que peut-on conclure sur le comportement asymptotique de (C_f) au voisinage de $+\infty$?
5. Tracer l'allure de la courbe (C_f) dans un repère orthogonal du plan.

(*__Données__ : On prendra :* $\sqrt{2} = 1.41$; $\ln(2) = 0.69$; $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.71$; $\frac{1}{\ln(2)} = 1.44$; $\frac{3}{2\ln(2)} = 2.16$; $\frac{3-2\sqrt{2}}{2\ln(2)} = 0.12$; $\frac{3-2\sqrt{2}}{2(\ln(2))^2} = 0.18$.)

FIN ********

EPO/CPGE/PCSI/A1/1C-&-1D

Année académique : 2020-2021
Module : Analyse II

Travaux Dirigés II : Intégrales Généralisées

Exercice 1 : Natures des Intégrales Impropres/Généralisées
Soient a, b deux réels. Etudier l'existence des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$;
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\omega^4}{\sqrt{\omega(1-\omega)}}d\omega$;
3. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{d\gamma}{\gamma^a \ln^b \gamma}$;
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\arccos(1-x)}dx$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi e^{-t})}{t}dt$;
6. $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)(\ln\ln t)}$;
7. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\tan\theta)^a d\theta$;
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}} - 1dx$;
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} - a - \frac{b}{x}\right)dx$.

Exercice 2 : Calcul de Quelques Intégrales Impropres
Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, avec $a < b$. Après avoir justifié leur convergence, calculer les intégrales généralisées suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$;
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(y))dy$;
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(\frac{1}{t})}{t}dt$;
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{a^x}{1+a^{2x}}dx$.
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}dx$;
6. $\displaystyle\int_a^b \frac{du}{\sqrt{(u-a)(b-u)}}$;

Exercice 3 : Fonction Spéciale Gamma d'EULER(1707-1783), sa valeur $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$

Pout tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

1. Déterminer le domaine de définition (convergence) de Γ, puis calculer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(2)$.
2. Déterminer une relation de récurrence entre $\Gamma(n+1)$ et $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 : Calcul d'Intégrale par Encadrement (TdG)

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a < b$. On pose $I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt$.

1. Justifier l'existence de l'intégrale $I(a,b)$.
2. Soient $0 < x < y$. Démontrer que : $\displaystyle\int_x^y \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t}dt$.
3. Démontrer que, pour tout réel $z > 0$, on a : $e^{-bz}\ln\dfrac{b}{a} \leqslant \displaystyle\int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t}dt \leqslant e^{-az}\ln\dfrac{b}{a}$.
4. En déduire la valeur de $I(a,b)$.

Exercice 5 : Un peu de Théories

1. Soient Ω une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ une application continue.
   On suppose que $\Omega = \mathbb{R}_+$, f est dérivable telle que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3f'(x) = 0$.
   Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f(t)dt$ est convergente.
2. On suppose que $\Omega = [1, +\infty[$, f est décroissante et intégrable sur Ω.
   Justifier l'existence et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x(f(x+1)-f(x))dx$.

BM

Exercice 6 : Fonction définie par une intégrale

Soient trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: f continue, u et v dérivables. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. On pose

$$g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt.$$

1. Exprimer g à l'aide de F, u et v ; en déduire sa dérivée $g'(x)$.

   Dans toute la suite du problème, on pose $g(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\,dt$
2. Montrer que la fonction g est impaire et étudier ses variations.
3. Déterminer le développement limité de g à l'ordre 5 au voisinage de zéro.
4. (a) Démontrer les inégalités $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{t^2+1} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.

   (b) En déduire que : (i) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan(2x) - \arctan(x) \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{1}{2x}$; (ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

   (c) Sachant que $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \simeq 0,39$, donner l'allure de la courbe représentative de la fonction g.
5. On pose $H(X) = \displaystyle\int_0^X (\arctan(2x) - \arctan(x))\,dx$.

   (a) Calculer $H(X)$.

   (b) Démontrer la relation : $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan(y) + \arctan\left(\dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

   En déduire que $H(X) \sim \dfrac{1}{2} ln(X)$ lorsque X tend vers $+\infty$.

Exercice 7 : Equations Fonctionnelles et Calcul Intégrale

$\boxed{\text{A}}$ **Objectif** : *Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ solution de l'équation fonctionnelle intégrale suivantes* :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = x + 1. \qquad (\clubsuit)$$

1) Soit f une solution de $(\clubsuit)$.
   (a) Monter que f est de classe $\mathscr{C}^2$.
   (b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre qu'on déterminera.
   (c) En déduire f.
2) Déterminer l'ensemble des solutions de $(\clubsuit)$.

$\boxed{\text{B}}$ Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f(x))^2 = \int_0^x ((f(t))^2 + (f'(t))^2)dt - x + 1.$$

$\boxed{\text{C}}$ Trouver toutes les applications continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} f(\theta)d\theta.$

Exercice 8 : Etude d'une intégrale généralisée de type Bertrand (1822-1900)

On considère pour tout triplet $(a, r, s) \in]0; 1[\times \mathbb{R}^2$, l'intégrale $K_a(r,s) = \displaystyle\int_a^1 \omega^r \left(\ln\left(\frac{1}{\omega}\right)\right)^s d\omega.$

1. Calculer en fonction des paramètres r, s la limite suivante : $\lim\limits_{\omega\to 0^+} \omega^r \left(\ln\left(\dfrac{1}{\omega}\right)\right)^s$.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \omega^r \left(\ln\left(\frac{1}{\omega}\right)\right)^s d\omega$ converge si et seulement si $r, s > -1$.

   Pour la suite, on notera $K(r,s)$ cette intégrale généralisée pour $r, s > -1$.
3. Calculer $K(0,1)$, $K(1,1)$, et $K(0,2)$.
4. Si $r, s > -1$, dans ce cas montrer que : $K(r,s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(r+1)\omega}\omega^s d\omega = \frac{1}{(r+1)^{s+1}} K(0,s).$
5. Montrer que pour $s > 0$, $K(0,s) = sK(0,s-1)$.
6. En déduire la valeur de $K(r,n)$ pour $r > -1$ et $n \in \mathbb{N}$.

BM

Exercice 6 : Fonction définie par une intégrale

Soient trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; f continue, u et v dérivables. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. On pose

$$g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$$

1. Exprimer g à l'aide de F, u et v ; en déduire sa dérivée $g'(x)$.

   Dans toute la suite du problème, on pose $g(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}dt$

2. Montrer que la fonction g est impaire et étudier ses variations.
3. Déterminer le développement limité de g à l'ordre 5 au voisinage de zéro.
4. (a) Démontrer les inégalités $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{t^2+1} \leq \dfrac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \leq \dfrac{1}{t^2}$.

   (b) En déduire que : (i)$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan(2x) - \arctan(x) \leq g(x) \leq \dfrac{1}{2x}$; (ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

   (c) Sachant que $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0,39$, donner l'allure de la courbe représentative de la fonction g.

5. On pose $H(X) = \displaystyle\int_0^X (\arctan(2x) - \arctan(x))\,dx$.

   (a) Calculer $H(X)$.

   (b) Démontrer la relation : $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan(y) + \arctan\left(\dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

   En déduire que $H(X) \sim \dfrac{1}{2}ln(X)$ lorsque X tend vers $+\infty$.

Exercice 7 : Equations Fonctionnelles et Calcul Intégrale

$\boxed{A}$ **Objectif :** *Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ solution de l'équation fonctionnelle intégrale suivantes :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = x + 1. \qquad (\clubsuit)$$

1) Soit f une solution de ($\clubsuit$).
   (a) Monter que f est de classe $\mathscr{C}^2$.
   (b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre qu'on déterminera.
   (c) En déduire f.
2) Déterminer l'ensemble des solutions de ($\clubsuit$).

$\boxed{B}$ Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f(x))^2 = \int_0^x ((f(t))^2 + (f'(t))^2)dt - x + 1.$$

$\boxed{C}$ Trouver toutes les applications continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} f(\theta)d\theta$.

Exercice 8 : Etude d'une intégrale généralisée de type Bertrand (1822-1900)

On considère pour tout triplet $(a, r, s) \in]0;1[\times\mathbb{R}^2$, l'intégrale $K_a(r,s) = \displaystyle\int_a^1 \omega^r \left(\ln\left(\frac{1}{\omega}\right)\right)^s d\omega$.

1. Calculer en fonction des paramètres r, s la limite suivante : $\lim\limits_{\omega\to 0^+} \omega^r \left(\ln\left(\dfrac{1}{\omega}\right)\right)^s$.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \omega^r \left(\ln\left(\frac{1}{\omega}\right)\right)^s d\omega$ converge si et seulement si $r, s > -1$.

   Pour la suite, on notera $K(r,s)$ cette intégrale généralisée pour $r, s > -1$.
3. Calculer $K(0,1)$, $K(1,1)$, et $K(0,2)$.
4. Si $r, s > -1$, dans ce cas montrer que : $K(r,s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(r+1)\omega}\omega^s d\omega = \frac{1}{(r+1)^{s+1}}K(0,s)$.
5. Montrer que pour $s > 0$, $K(0,s) = sK(0,s-1)$.
6. En déduire la valeur de $K(r,n)$ pour $r > -1$ et $n \in \mathbb{N}$.

BM

Travaux Dirigés 1 : Intégrales de Riemann et Calcul de Primitives

Exercice 1 : Subdivisions de Segments et Fonctions Continues par Morceaux

1. **Subdivision d'un segment**

   On considère deux subdivisions $\sigma = \left(\frac{k}{2^{10}}\right)_{0\leqslant k\leqslant 2^{10}}$ et $\theta = \left(\frac{k}{10^3}\right)_{0\leqslant k\leqslant 10^3}$ du segment $[0,1]$

   (a) Ces subdivisions sont elles uniformes ? Justifier votre réponse

   (b) σ est elle plus fine que θ ? Justifier votre réponse

   (c) Donner une subdivision du segment $[0;1]$ plus fine que σ et θ.

2. **Fonctions Continues par Morceaux**

   Soient $n \in \mathbb{N}$, et $\mathcal{U}$ une fonction causale unité (c'est à dire : $\mathcal{U}(t) = 1$ si $t \geqslant 0$ et $\mathcal{U}(t) = 0$ si $t < 0$). On considère la fonction $t \longmapsto \mathcal{T}_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (\mathcal{U}(t-2k) - \mathcal{U}(t-(2k+1)))$ sur $\mathbb{R}$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{T}_n$ est une fonction continue par morceaux.

   (b) Tracer le graphe de $\mathcal{T}_{10}$.

3. **Cas Pathologique :** soit $f : [0;2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{\sin(x)}\right) & \text{si} \quad x \neq 0, \pi, 2\pi, \\ 0 & \text{si} \quad x \in \{0;\pi;2\pi\}. \end{cases}$

   f est-elle continue par morceaux ?

Exercice 2 : Fonctions Intégrables et Quelques Propriétés

A. Soit f la fonction définie sur $[0,3]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1, \\ 3 & \text{si } x = 1, \\ -2 & \text{si } 1 < x \leqslant 2, \\ 4 & \text{si } 2 < x \leqslant 3. \end{cases}$$

(a) Calculer $\int_0^3 f(t)\,dt$, puis calculer $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \quad \forall x \in [0;3]$.

(b) Montrer que F est une fonction continue sur $[0,3]$. La fonction F est-elle dérivable sur $[0,3]$?

B. Si $\varphi : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction monotone, alors φ est une fonction intégrable.

C. Soit la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $g(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Montrer que g n'est pas Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

Exercice 3 : Calcul d'Intégrale et de Primitives

Soient $n, m \in \mathbb{N}$, et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer les intégrales [1-8] et les primitives [9-12] suivantes :

1. $\int_{-3}^{5} (x|x| + |x^2-1|)dx$;
2. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$;
3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))dx$;
4. $\int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(mt)dt$;
5. $\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$;
6. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(w)}{\sin(w)}dw$;
7. $\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2\theta}{1+\theta^2}\right)d\theta$;
8. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}(2-x^2)}dx$.
9. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$;
10. $\int \frac{1}{1+\cos(x)+\sin(x)}dx$;
11. $\int \left(\frac{x}{e}\right)^x \ln(x)dx$;
12. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}dx$.

(b) les courbes d'équation $y = \dots$ [illegible]

(c) L'ensemble des points $M(x,y)$ dont les coordonnées (x,y) vérifient : $|y| + \frac{\dots}{2} \dots$ [illegible]

(d) la trajectoire ellipsoïdale d'un satellite géostationnaire de paramètres a et b, voir Figure 1.

II Calculer l'aire $\mathscr{A}(\blacklozenge)$ du domaine foncé à l'intérieur d'un carré de coté 1 et représenté sur la Figure 2.

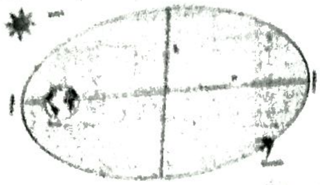

FIGURE 1 – Trajectoire d'un satellite géostationnaire.

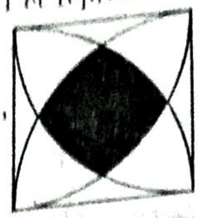

FIGURE 2 – La partie $\mathscr{A}(\blacklozenge)$ dans un carré.

III **Calcul de Volume :** Calculer le volume du solide obtenu par la révolution autour de l'axe des abscisses de la courbe $(\mathscr{C}) : y = \dfrac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$ délimitée par les droites $(\Delta_1) : x = 0$ et $(\Delta_2) : x = 1$.

Exercice 5 : Intégrale de Wallis [John Wallis (1616-1703)]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$, et $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt$.

1. (i) Montrer que :$\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n = I_n$; (ii) Calculer W_0 et W_1, et (iii) Étudier la nature de la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. (i)Établir une relation de récurrence entre W_n et W_{n+2} ; (ii) En déduire que $(n+1)W_nW_{n+1}$ est constante.
3. Calculer les limites suivantes : (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$; (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{W_n}{W_{n+1}}$; (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_n$.
4. Exprimer W_{2n} et W_{2n+1} en fonction de n. En déduire une suite d'éléments de $\mathbb{Q}$ qui converge vers π.

Exercice 6 : Les Incontournables

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{N}$, on définie $\mathscr{B}(p,q) = \displaystyle\int_a^b (x-a)^p(b-x)^q dx$.

1. Montrer que si $q \in \mathbb{N}^*$, alors : $\mathscr{B}(p,q) = \dfrac{q}{p+1}\mathscr{B}(p+1, q-1)$. En déduire $\mathscr{B}(p,q)$ et $K_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$.
2. En utilisant le cas $a = -1, b = 1, p = q = n$, en déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k(-1)^k}{2k+1}$.
3. (a) Calculer $\mathscr{J}(p,q) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{2p+1}\cos(t)^{2q+1}dt$; (b) Donner la valeur de $I_{2n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(\omega)d\omega$.

Exercice 7 : Somme de Riemann

Calculer la limite des sommes/produits suivantes quand n tend vers $+\infty$:

1. $\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2k\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$;
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{n-k}{n^3+n^2k}}$;
3. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$;
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}$;
5. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$;
6. $\sqrt[n]{\dfrac{n!C_{2n}^n}{n^n}}$;
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-)^{k+1}}{k}$;
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)$.

Exercice 8 : Autres Propriétés Remarques des Fonctions Intégrables

Soient $f, g \in \mathscr{C}([0;1], \mathbb{R})$ Démontrer les propriétés suivantes :

1. (a)Montrer que : si $\displaystyle\int_0^1 f = \frac{1}{2}$ alors f admet un point fixe. (b) Montrer que $\left|\displaystyle\int_0^1 (f(x) + x^2f(1-x))dx\right| \leqslant \dfrac{3}{2}\sup\limits_{[0;1]}|f|$.
2. (a) Montrer que : si $|fg| \geqslant 1$, alors $\left(\displaystyle\int_0^1 |f|\right)\left(\displaystyle\int_0^1 |g|\right) \geqslant 1$. (b) Montrer que $\sqrt{\displaystyle\int_0^1 (f+g)^2} \leqslant \sqrt{\displaystyle\int_0^1 f^2} + \sqrt{\displaystyle\int_0^1 g^2}$.
3. (a) Montrer que : si $\forall u, v \in [0;1], uf(v) + vf(u) \leqslant 1$ alors $\displaystyle\int_0^1 f \leqslant \frac{\pi}{4}$. (b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\displaystyle\int_0^1 |f|^n\right]^{\frac{1}{n}}$.

Travaux Dirigés IV : Fonctions Usuelles, Suites Numériques, et Développements Limités

Exercice 1

Soit f la fonction définie par, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*, x \longmapsto \frac{e^x + 2}{e^{-x}}$.

1. Montrer que f est bijective, puis déterminer sa fonction réciproque f^{-1}
2. Donner un équivalent de f au voisinage de 0.
3. Donner le $DL_3(1)$ de f. En déduite une équation de la tangente en $x = 1$ à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice 2

1. Simplifier les expressions suivantes :

(a) $\dfrac{\operatorname{ch}(\ln x) + \operatorname{sh}(\ln x)}{x}$,

(b) $\operatorname{argsh}\left(\dfrac{x^2 - 1}{2x}\right)$,

(c) $\operatorname{argth}\left(\sqrt{\dfrac{\operatorname{ch}x - 1}{\operatorname{ch}x + 1}}\right)$,

(d) $\arccos(1 - 2x^2) + \arcsin(2x\sqrt{1 - x^2})$.

2. Soient x, y et z trois réels tels que : $x + y + z = 1$, et $\arctan x + \arctan y + \arctan z = \frac{\pi}{4}$.
   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1} = 1$.
3. Démontrer la formule de **John Machin** : $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 3

Soient f_1, f_2, f_3, f_4, et f_5 cinq fonctions définies de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$ par :

a. $f_1(x) = \operatorname{argsh}(\tan(x))$;

b. $f_2(x) = \operatorname{argth}(\sin(x))$;

c. $f_3(x) = 2\operatorname{argth}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$;

d. $f_4(x) = \ln\left[\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$;

e. $f_5(x) = \ln\left(\dfrac{1 + \sin(x)}{\cos(x)}\right)$.

1. Calculer la dérivée des fonctions f_i, $i = 1, \dots, 5$. En déduire que : $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_5$.
   Par la suite, on note f cette fonction commune (égale aux f_i pour $i - 1, \dots, 5$).
2. Montrer que f est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$. Déterminer sa bijection réciproque notée g (on pourra donner différentes expressions de g).
3. Calculer la dérivée de la fonction g. Comparer cette dérivée à celle de la fonction f.
4. Donner l'allure de la courbe des fonctions f et g dans un même repère orthonormal.

Exercice 4

1. Soit (a_n) une suite d'élément de $\mathbb{R}_+$ telle que (a_n) converge vers $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer en utilisant la définition que la suite $(\sqrt{a_n})$ converge vers $\sqrt{a}$. La suite de terme général $\max(a_n, \sqrt{a_n})$ est-elle convergente ? Justifier.
2. Soit $(w_n)_n$ une suite numérique telle que : $\exists \rho \in]0, 1[/ \ \forall n \in \mathbb{N}, |w_{n+1} - w_n| \leq \rho^n$.
   Montrer que $(w_n)_n$ est de Cauchy.
3. Soient $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$ trois suite réelles vérifiant : $a_n + b_n + c_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 3$ et $a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 \underset{n\infty}{\longrightarrow} 3$.
   Montrer que chacune des suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$ converge vers 1.
4. Etudier la nature de la suite $(S_n)_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$.

En utilisant le **Lemme de Cesàro**, calculer la limite de la suite de terme général : $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{2}{k}\right)^{\frac{k}{n}}$.

EPO/CPGE/PCSI/L1-IO

Année académique : 2020-2021

Module : Analyse 1

Travaux Dirigés IV : Fonctions Usuelles, Suites Numériques, et Développements Limités

Exercice 1

Soit f la fonction définie par, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $x \longmapsto$ [illegible]

1. Montrer que f est bijective, puis déterminer sa fonction réciproque f^{-1}.
2. Donner un équivalent de f au voisinage de 0.
3. Donner le $DL_3(1)$ de f. En déduire une équation de la tangente en $x = 1$ à la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

Exercice 2

1. Simplifier les expressions suivantes :

(a) $\dfrac{\mathrm{ch}(\ln x) + \mathrm{sh}(\ln x)}{x}$,

(b) $\mathrm{argsh}\left(\dfrac{x^2-1}{2x}\right)$,

(c) $\mathrm{argth}\left(\sqrt{\dfrac{\mathrm{ch}x - 1}{\mathrm{ch}x + 1}}\right)$,

(d) $\arccos(1-2x^2) + \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

2. Soient x, y et z trois réels tels que : $x + y + z = 1$, et $\arctan x + \arctan y + \arctan z = \dfrac{\pi}{4}$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1} = 1$.

3. Démontrer la formule de **John Machin** : $4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 3

Soient f_1, f_2, f_3, f_4, et f_5 cinq fonctions définies de $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$ par :

a. $f_1(x) = \mathrm{argsh}(\tan(x))$;

b. $f_2(x) = \mathrm{argth}(\sin(x))$;

c. $f_3(x) = 2\mathrm{argth}\left(\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$;

d. $f_4(x) = \ln\left[\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right]$;

e. $f_5(x) = \ln\left(\dfrac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right)$.

1. Calculer la dérivée des fonctions f_i, $i = 1, \ldots, 5$. En déduire que : $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_5$.
   Par la suite, on note f cette fonction commune (égale aux f_i pour $i = 1, \ldots, 5$).
2. Montrer que f est une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$. Déterminer sa bijection réciproque notée g (on pourra donner différentes expressions de g).
3. Calculer la dérivée de la fonction g. Comparer cette dérivée à celle de la fonction f.
4. Donner l'allure de la courbe des fonctions f et g dans un même repère orthonormal.

Exercice 4

1. Soit (a_n) une suite d'élément de $\mathbb{R}_+$ telle que (a_n) converge vers $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer en utilisant la définition que la suite $(\sqrt{a_n})$ converge vers $\sqrt{a}$. La suite de terme général $\max(a_n, \sqrt{a_n})$ est-elle convergente ? Justifier.
2. Soit $(w_n)_n$ une suite numérique telle que : $\exists \rho \in]0, 1[/ \ \forall n \in \mathbb{N}, |w_{n+1} - w_n| \leq \rho^n$.
   Montrer que $(w_n)_n$ est de Cauchy.
3. Soient $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$ trois suite réelles vérifiant : $a_n + b_n + c_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 3$ et $a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 \underset{n\infty}{\longrightarrow} 3$.
   Montrer que chacune des suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$ converge vers 1.
4. Etudier la nature de la suite $(S_n)_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\quad S_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

En utilisant le **Lemme de Cesàro**, calculer la limite de la suite de terme général : $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \dfrac{2}{k}\right)^{\frac{k}{n}}$.

Exercice 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!n}$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.
2. On donne : $e = \lim_{n\to+\infty} u_n$. En déduire une valeur approchée de e à $\frac{1}{1000}$.
3. Démontrer que e est irrationnel.

Exercice 6 Déterminer les développements limités à l'ordre demandé au voisinage des points indiqués :

1. $\frac{1}{1-x^2-x^3}$ (ordre 7 en 0)
2. $\frac{1}{\cos x}$ (ordre 7 en 0)
3. $\arccos\sqrt{\frac{x}{\tan x}}$ (ordre 3 en 0)
4. $\tan x$ (ordre 3 en $\frac{\pi}{4}$)
5. $(\operatorname{ch} x)^{1/x^2}$ (ordre 2 en 0)
6. $\tan^3 x(\cos(x^2)-1)$ (ordre 8 en 0)
7. $\frac{\ln(1+x)}{x^2}$ (ordre 3 en 1)
8. $\arctan(\cos x)$ (ordre 5 en 0)
9. $\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$ (ordre 2 en 0)
10. $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\arcsin^2 x}$ (ordre 5 en 0)
11. $\ln\left(\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$ (ordre 100 en 0)
12. $\tan\sqrt[3]{4(\pi^3+x^3)}$ (ordre 3 en π)

Exercice 7

Etudier la nature de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ de terme général :

1. $u_n = \left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n$;
2. $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)(-1)^n + \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$;
3. $u_n = \left(7\sin\left(\frac{1}{3n^2+1}\right) + \frac{1}{7}\cos(n^2+1)\right)^n$;
4. $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$;
5. $u_n = \frac{3(1+2^3+3^3+\ldots+n^3)}{2n(1+2^2+3^2+\ldots+n^2)}$;
6. $u_n = \frac{\ln(n)-(1+\cos(n\pi))n}{\ln(2n)}$;
7. $u_n = \left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right)^n$.

Exercice 8 Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = 2\tan(x) - x$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque notée f^{-1} de classe C^∞. Justifier que f^{-1} est impaire.
2. Donner le développement limité de f^{-1} à l'ordre 6 en 0. *(Rappel :* $\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$*)*.

Exercice 9

1. Exprimer le terme général de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ en fonction de n dans les cas suivants (puis étudier leur nature) :

   (a) $u_0 = 1,\ u_1 = 0,\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

   (b) $u_0 = 1,\ u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2u_n+1}$.

   (c) $u_0 = 1,\ u_1 = 2$ et $u_{n+2} = \sqrt[3]{u_{n+1}u_n}$;

   (d) $u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = 24$, et

   $$\forall n \geq 4,\ u_n = \frac{6u_{n-1}^2 u_{n-3} - 8u_{n-1}u_{n-2}^2}{u_{n-2}u_{n-3}}$$

Exercice 10

I. Pour tout entier $n \geq 2$, on note (E_n) l'équation donnée par $(E_n)\ :\ x^n - x = n$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, (E_n) admet une unique solution notée u_n dans $\mathbb{R}^+$, et justifier que $u_n > 1$.
2. Démontrer que $\forall n \geq 2,\quad n^{\frac{2}{n}} \leq n$. En déduire la limite la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.
3. Soit $(v_n)_{n\geq 2}$ une suite définie par : $\forall n \geq 2,\quad v_n = u_n - 1$.

   Montrer que : $\forall n \geq 2,\quad n\ln(v_n+1) = \ln(v_n+1+n)$. En déduire que : $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$.

II. 1) Montrer que l'équation $\tan x = x$ a une unique solution dans l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$ pour n entier naturel donné. On note x_n cette solution.

2) Trouver un développement asymptotique de x_n à la précision $\frac{1}{n^2}$.

EPO/CPCE/MPCSI/A1 — Année Académique : 2020-2021
Module : Analyse II

Devoir de Maison n° 3 d'Analyse II (DM3 (MP&PC)SI : 1A, 1C & 1D)

A rendre au plus tard le 19 Juin 2021 à 12h00min GMT à la Scolarité

[MP] : exercice (ou question) pour **MPSI uniquement**
[PC] : exercice (ou question) pour **PCSI uniquement**
[Cm] : exercice (ou question) pour les **MPSI et PCSI**

Exercice 1 : Culture Générale Scientifique et Travail Personnel de l'Etudiant

① Cultures Générales Scientifiques [Cm] (02pts)

(a) A quoi sert les Mathématiques ?

(b) Quelles différences y-a-t-il entre l'Analyse et l'Algèbre ?

(c) Quelles sont les difficultés que vous rencontrer en classes préparatoires ?

(d) Quelles différences y-a-t-il entre la notion d'intégrale vue au lycée et celle de Riemann ?

② Calcul de Limite de Sommes (01pt & 01pt)

Soit $\mathcal{U} \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\mathcal{U}(0) = 1$, $\mathcal{U}'(0) = 0$ et $\mathcal{U}''(0) = -1$. Calculer la limite de la suite de terme générale :

[MP] $u_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathcal{U}\left(\frac{k}{n+1}\right)\mathcal{U}'\left(\frac{k+1}{n+1}\right)$; **[PC]** $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\mathcal{U}\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\right)^n}{\sqrt{(n+k)(n+1+k)}}$.

③ Calcul d'Intégrale Définie et Intégrale Impropre

[PC] Calculer l'intégrale : $I = \displaystyle\int_{-2020}^{2020} \frac{2021^{-|\omega|}}{1 + 2020^{\arcsin(\sin^{2021}(\omega))}}\, d\omega$. (01pt)

[MP] Soit $f, \psi \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que ψ tend vers 2021 en $-\infty$, et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \psi(t + 2020\sqrt{2}) - \psi(t + 2021\sqrt{3})$.
On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi(x)dx$ existe. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)dt$, puis calculer sa valeur lorsqu'elle est convergente. (01pt)

④ Calcul de Primitives de Fonctions Irrationnelles [Cm] (02pts)

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$, $(m_i)_{1 \le i \le k} \subset \mathbb{Z}$, $(n_i)_{1 \le i \le k} \subset \mathbb{N}^*$. On suppose que : $ad - bc \neq 0$.
On considère les intégrales (ou primitives) de la forme

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \cdots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx \qquad (\clubsuit)$$

où : R est une fonction rationnelle.

(a) Donner un exemple d'intégrale de la forme ($\clubsuit$).

(b) Proposer un technique de calcul (changement de variable par exemple) pour calculer ($\clubsuit$).

(c) En déduire l'expression analytique des primitives suivantes :

i. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}$; ii. $\displaystyle\int \frac{1 + \sqrt{x\sqrt{7} + 11}}{1 + \sqrt[3]{x\sqrt{7} + 11}}\, dx$.

(ii) Applications aux Calculs Intégrales : Calculer l'aire du domaine plan délimité par :
[MP] les courbes $(\mathcal{C}_1) : y = \sin(x) + \pi$, $(\mathcal{C}_2) : y = \arcsin(|\sin(x)|) + \arccos(\cos(x))$, et les droites d'équations $(\mathcal{D}_1) : x = 0$, et $(\mathcal{D}_2) : x = 4\pi$ (pt.u). (02pts)

[PC] l'ensemble des points $M(x,y)$ dont les coordonnées (x,y) vérifient $|y| + \frac{1}{2} \leq e^{-|x|}$ (02pts)

Exercice 2 : Séries Numériques [Cm] (03pts)

❶ Étudier la nature des séries suivantes (calculer leur somme en cas de convergence) :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \sqrt{n}\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$, (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$; (c) $\displaystyle\sum (-1)^n \frac{\cos^3(3^n\sqrt{\pi})}{3^n}$

❷ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$, arithmétique de raison $r > 0$.
Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 3 : Équations Différentielles/Fonctionnelles

[PC] Trouver toutes les fonctions réelles f continument dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (f(x))^2 = \int_0^x \left((f(t))^2 + (f'(t))^2\right) dt + 2021^2.\text{(01pt)}$$

[MP] Trouver les fonctions $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que : $f'' - |f| = 0;\quad f(0) = 0$, et $f'(0) = 1$. (01pt)

Exercice 4 : Restitution Organisée de Connaissances et Incontournables (R.O.C.I.) [Cm] (06pts)

$\boxed{\text{A}}$ Soient $a > 0$, et $f : [0;a] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement croissante et dérivable sur $]0;a[$ telle que : $f(0) = 0$.

1) Montrer que f est une bijection de $[0;a]$ vers $[0;f(a)]$. On note f^{-1} sa réciproque.

2) Montrer que si $\alpha \in]0;a[$ alors $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)dx + \int_0^{f(\alpha)} f^{-1}(t)dt = \alpha f(\alpha)$.

3) Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

4) En déduire la valeur des intégrales suivantes :

a. $\displaystyle U = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)}dx$; b. $\displaystyle V = \int_0^1 [e^{x^2} + (e-1)\sqrt{\ln((e-1)x+1)}]dx$.

$\boxed{\text{B}}$ On considère pour tout triplet $(a,r,s) \in]0;1[\times\mathbb{R}^2$, l'intégrale $\displaystyle K_a(r,s) = \int_a^1 \omega^r \left(\ln\left(\frac{1}{\omega}\right)\right)^s d\omega$.

(1) Calculer en fonction des paramètres r, s la limite suivante : $\displaystyle\lim_{\omega\to 0^+} \omega^r \left(\ln\left(\frac{1}{\omega}\right)\right)^s$.

(2) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \omega^r \left(\ln\left(\frac{1}{\omega}\right)\right)^s d\omega$ converge si et seulement si $r, s > -1$.

Pour la suite, on notera $K(r,s)$ cette intégrale généralisée pour $r, s > -1$.

(3) Calculer $K(0,1)$, $K(1,1)$, et $K(0,2)$.

(4) Si $r, s > -1$, dans ce cas montrer que : $\displaystyle K(r,s) = \int_0^{+\infty} e^{-(r+1)\omega}\omega^s d\omega = \frac{1}{(r+1)^{s+1}}K(0,s)$.

(5) Montrer que pour $s > 0$, $K(0,s) = sK(0,s-1)$.

(6) En déduire la valeur de $K(r,n)$ pour $r > -1$ et $n \in \mathbb{N}$.

Travaux Dirigés III : Équations Différentielles

Exercice 1 : Compréhension du Cours (CdC) et Quelques Applications

[A] Equation Différentielle du Premier Ordre

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (E) : $\alpha y' - \gamma y = \beta t^2$. Résoudre (E).

[B] Equation Différentielle du Seconde Ordre (à coefficients constants)

Résoudre l'équation différentielle, (E) : $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = x$, avec $f'(0) = f(0) = 0$.

[C] Equation Différentielle du Seconde Ordre (à coefficients variables)

Soit $k \in \mathbb{R}$, on définit l'équation différentielle, $(E_k) : xy'' + 2y' + kxy = 0$.

Résoudre (E_k) sur $\mathbb{R}_+^*$ (on pourra faire le changement de fonction, $z : x \longmapsto xy(x)$.)

[D] Etude de la croissance d'une population

Si la population d'un pays double en 50 ans, en combien de temps triplera-t-elle compte tenu du fait que le taux instantané d'accroissement est proportionnel au nombre d'habitants.

[E] Un corps en chute libre soumis à un frottement quadratique

On lâche un corps de masse m dans un fluide. On suppose que les frottements dû au fluide est modélisé par une loi quadratique donnée par : $F = \beta v^2$ (où v est la vitesse du corps et β est coefficient caractéristique du fluide). On suppose le mouvement du corps rectiligne dans le référentiel terrestre considéré galiléen.

(1) Déterminer la vitesse v du corps en fonction du temps t.

(2) v croît - elle infiniment avec le temps ? Justifier votre réponse.

Exercice 2 : Principe de Superposition

On considère l'équation différentielle : $(E.D.)$ $\quad y'' - 4y' + 4y = d(x)$, où d est une fonction qui sera précisée.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène (ou sans second membre) associée à $(E.D.)$.
2. Trouver une solution particulière de $(E.D.)$ lorsque $d(x) = e^{-2x}$ et lorsque $d(x) = e^{2x}$ respectivement.
3. Donner la forme générale des solutions de $(E.D)$ lorsque $d(x) = \dfrac{e^{-2x} + e^{2x}}{4}$.
4. Résoudre $(E.D.)$ pour $d : x \longmapsto 1 + x^2 + \sin(x) + e^x$.

Exercice 3 : Techniques de Résolution de 2 Equations Différentielles Non Linéaires Classiques

❶ Équation de Bernoulli, $(E_B) : y' + a(x)y + b(x)y^{\alpha} = 0, \qquad \alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

1) Montrer que la résolution de (E_B) se ramène à une équation linéaire par le changement de fonction $z(x) = 1/y(x)^{\alpha - 1}$.

2) Trouver les solutions de l'équation $xy' + y - xy^3 = 0$.

❷ Équation de Riccati, $(E_R) : y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$

(1) Montrer que si y_0 est une solution particulière de (E_R) alors la fonction définie par $u(x) = y(x) - y_0(x)$ vérifie une équation de Bernoulli (avec $\alpha = 2$).

(2) Résoudre $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ en vérifiant d'abord que $y_0(x) = \frac{1}{x}$ est une solution.

Exercice 4 : Étude du Métabolisme d'une Substance

En étudiant l'injection d'une substance S dont le métabolisme fait intervenir des rétroactions, on montre qu'un modèle mathématique simplifié du phénomène fournit l'équation différentielle :

$$(E) : C'''(t) + 2C''(t) + 2C'(t) = 2.$$

où : $C(t)$ représente la concentration de la substance dans l'organisme, en fonction du temps t.

1. (a) Déterminez l'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $(E_0) : C'''(t) + 2C''(t) + 2C'(t) = 0$.
   (b) Déterminez l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
2. (a) Déterminez la solution y de (E) qui vérifie les conditions initiales : $y(0) = 1, \quad y'(0) = \lambda$.
   (b) On suppose $\lambda > 0$ (λ est proportionnel à la quantité totale injectée). Étudiez les variations de la fonction $t \mapsto y(t)$ sur $[0, +\infty[$.
   (c) Déterminez la valeur du minimum global de y sur $[0, +\infty[$. Quelle condition faut-il imposer à λ pour que ce minimum soit supérieur à 0,5 ?

Exercice 5 : Équation différentielle et fonction intégrale indéfinie

Pour tout réel x, on pose $f(x) = e^{-x^2} \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, dt$.

1. Montrer que f est impaire et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 2xf(x) = 1$.
4. Soit $g(x) = \dfrac{e^{x^2}}{2x} f'(x)$. Montrer que g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et que g admet sur $]0, +\infty[$ un unique zéro noté x_0 vérifiant de plus $0 < x_0 < 1$.
5. Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 6 : Dimension de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle

Soient a, et b deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. on considère l'équation différentielle, $(E) : x^2y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$.
On note :

- S^+ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$,
- S^- l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$,
- S l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

: Étudier les valeurs possibles pour la dimension de S.

1. Rappeler la définition de la dimension S^+ et de S^-.
2. On note φ l'application définie par, $\varphi : S \longrightarrow S^+ \times S^-, f \longmapsto \varphi(f) = \left(f_{|\mathbb{R}_+^*}, f_{|\mathbb{R}_-^*}\right)$.
   (a) Montrer que φ est une application linéaire, puis déterminer son noyau.
   (b) En déduire que : $\dim S \leqslant 4$.
3. On suppose que : $\forall x \in \mathbb{R}, a(x) = x$ et b est la fonction nulle. Dans ce cas :
   (a) Déterminer S^+ et S^-.
   (b) En déduire S et sa dimension.
4. On suppose que : (i) $a : x \longmapsto -6x$, et (ii) b est constante égale à 12.
   (a) Déterminer deux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de la forme $x \longmapsto x^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$).
   (b) En déduire S^+, S^-, S et $\dim S$.
5. D'après ce qui précède, donner un exemple d'équation différentielle du type (E) tel que $\dim S = 0$.

EPO/CPGE/PCSI/1.1

Année académique : 2020-2021
Module : Analyse I

Travaux Dirigés II : Limites et Continuité des Fonctions Numériques

Exercice 1 : Généralités et Définition de la limite d'une fonction

Soient $m, \theta \in \mathbb{R}$, $f_{m,\theta}$ et $g_{m,\theta}$ deux fonctions définies par :

$$f_{m,\theta} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f_{m,\theta}(x) = \frac{mx+1}{x-\theta},\ \text{et } g_{m,\theta} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto g_{m,\theta}(x) = m\cos(x) + \theta x.$$

1. Montrer (en utilisant la définition) que $f_{1,1}$ est continue en -1.
2. On suppose que : $m\theta + 1 \neq 0$.
   (a) Montrer que le graphe de la fonction $f_{m,\theta}$ admet un centre de symétrie (que l'on précisera).
   (b) Démontrer (en utilisant la définition) que $f_{m,\theta}$ est continue en tout ~~x~~ point de son domaine de définition.
3. Montrer que la fonction $g_{m,\theta}$ est uniformément continue sur son domaine de définition.
4. On suppose que : $(m, \theta) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$. Dans un repère orthogonal du plan, tracer l'allure de la courbe $(C_{g_{m,\theta}})$

Exercice 2 : Quasi-Césaro-Limite

Soit f une application continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que la fonction $f(x+1) - f(x)$ admet dans $\mathbb{R}$ une limite finie ℓ quand x tend vers $+\infty$. Montrer que : $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exercice 3 : Opérations sur les Limites

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3 \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(x)\right)}{x\sin(\sin(x))}$;
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+\sin(2x)+2\tan(3x)}{\ln\left(1+3x+\sin^2(x)\right)+xe^x}$;
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}$;
6. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin(x)-\cos(x)}$;
7. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \ln(x+\sqrt{1+x^2})$;
8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3^{\frac{1}{x}}\sqrt{2}+5^{\frac{1}{x}}\sqrt{3}+7^{\frac{1}{x}}\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}\right)^x$.

Exercice 4 : Quelques Propriétés des Fonctions Continues

Démontrer les propriétés suivantes :

1. Si la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en x_0, alors $|f|$ est continue en x_0. Mais la réciproque est fausse.
2. La fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$ est 1-lipschitzienne.
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ (avec $a < b$) et $h : [a;b] \longrightarrow [a;b]$ une fonction. Si h est continue alors elle admet un point fixe.
4. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si f admet une limite finie en $+\infty$ alors elle est bornée. Atteint-elle ses bornes ?
5. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est uniformément continue alors il existe deux réels α et β tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad |f(x)| \leq \alpha x + \beta.$$

Peut-on étendre cette propriété sur $\mathbb{R}$?

6. Soient $k \in \mathbb{R}^{*+}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est k-lip alors la fonction $\sin \circ f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 : Prolongement par Continuité

Soient $a \in \mathbb{R}$, et f, g et h 3 fonctions définies par :

$$f : x \longmapsto \frac{\sin(ax)}{x(x^2-1)}, \quad g : x \longmapsto \frac{(x-\sqrt{x})+(x^3-1)}{x-1}, \quad h(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{2}} E\left(\frac{a}{x}\right) & \text{si } x \in]-\infty, 0[, \\ \frac{\sqrt{1-e^{x}} - \sqrt{1-\cos(x)}}{\sqrt{|\sin(x)|}} & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

1. Etudier le prolongement par continuité des fonctions f et g.
2. Déterminer le reel a pour que la fonction h soit prolongeable par continuité en 0.
3. h est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$? (justifer)

Exercice 6 : Equation Fonctionnelle

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 et vérifiant l'équation : $f(x) + f\left(\frac{2}{3}x\right) = x$

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $f \in \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$. Montrer que : $\exists p \in [0;1] \mid \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} f(0) + \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^{n} \binom{n}{k} f(1) = 2^n f(p)$.

Exercice 8 : Continuité de Bijectivité

Soit f la fonction réelle à valeurs réelles définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 < x < 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f.
2. f est elle continue ?
3. Donner la formule définissant f^{-1}.

Exercice 9 : Équivalences & Limites

Calculer les limites suivantes en utilisant les équivalences

1. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan(x)\tan(2x)$;
2. $\lim_{x \to 0} \ln(x)\ln(1+\ln(1+x))$;
3. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$;
4. $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}$

Exercice 10 : Continuité & Propriétés de la Borne Sup/Inf

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ (avec $a < b$) et $f \in \mathcal{C}([a;b], \mathbb{R})$.

1. Montrer que pour tout $x \in [a;b]$ l'ensemble $\left\{t \in [a;b] \ : \ f(t) = \frac{f(a)+f(x)}{2}\right\}$ est non vide.

   Pour la suite pour tout $x \in [a;b]$, on pose : $\psi(x) = \inf\left\{t \in [a;b] \ : \ f(t) = \frac{f(a)+f(x)}{2}\right\}$.
2. Soit $x \in [a;b]$, montrer que $\psi(x) \in [a;b]$ et que $f \circ \psi(x) = \frac{f(a)+f(x)}{2}$.
3. Montrer que si f est strictement croissante, $\psi \in \mathcal{C}([a;b],[a;b])$.
4. Donner un exemple de f pour laquelle la fonction ψ n'est pas continue.

Travaux Dirigés III : Dérivation et les Théorèmes Fondamentaux de l'Analyse 1

Exercice 1

Étudier la dérivabilité et déterminer la dérivée des fonctions suivantes (on précisera leur classe C^k, $k \in \mathbb{N}$)

1. $f(x) = E(x)\sin^2(\pi x)$;
2. $f(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$
3. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$,
4. $f(x) = \int_{a^x}^{x^a}$ [illegible] $a \in \mathbb{R}_+^*$

Exercice 2

Soit f et g deux fonctions dérivables en $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. Pour $x_0 = 1$, $f(x) = x^n$ et $g(x) = x^p$ avec $(p, n) \in \mathbb{N}^2$, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0}$
2. Pour $x_0 = 0$ et $f(x_0) = 0 = g(x_0)$ calculer la limite $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2}$
3. Calculer la limite $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0}$
4. Pour $f(x_0)g'(x_0) \neq 0$, calculer la limite $\lim\limits_{x \to x_0} \ln\left(\frac{f(x)}{f(x_0)}\right)^{\frac{1}{g(x)-g(x_0)}}$
5. Pour $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$ et $g(x) = f(3x^2)$ calculer la limite $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(f(2x))^2 - g(x)}{x^2}$

Exercice 3

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ (avec $\alpha < \beta$) et $f, g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[\alpha, \beta]$ et dérivables sur $]\alpha, \beta[$. Montrer qu'il existe un réel ξ vérifiant $\alpha < \xi < \beta$ et $[f(\alpha) - f(\beta)]g'(\xi) = [g(\alpha) - g(\beta)]f'(\xi)$.

Exercice 4

Soient $n \geq 2$, $a, b \in \mathbb{R}$. On considère la fonction polynomiale $P_n(x) = x^n + ax + b$.

1. Montrer que la fonction P_n possède **au plus trois racines réelles distinctes**.
2. Montrer que l'équation (E) : $P_n(x) = e^x$ admet **au plus $n+1$ solution(s) dans $\mathbb{R}$**.
3. Pour la suite, on prend $n = 3$, $b = -1$ et $a = \delta > 0$ et on note P_δ le polynôme correspondant, c'est-à-dire : $P_\delta(x) = x^3 + \delta x - 1$.
   (a) Montrer que ce polynôme P_δ admet une unique racine réelle $r(\delta)$.
   Dans ce qui suit, on note r l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ qui à tout δ associe la racine réelle $r(\delta)$.
   (b) Montrer que $r(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+^*$
   (c) Montrer que r est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$
   (d) Calculer $r(0)$ et déterminer $\lim\limits_{\delta \to +\infty} r(\delta)$, puis montrer que r est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (e) Déterminer l'application réciproque de r.
   (f) Montrer que r est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $r'(\delta)$, pour tout $\delta \in \mathbb{R}_+$.
   (g) Donner l'allure de la courbe de r dans un repère orthonormal du plan.

Exercice 5

1. Soit $a > 0$. Montrer que $\frac{1}{x+a} < \frac{1}{a}\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) < \frac{1}{x}$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ avec $a < b$. Montrer que $\frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{2b^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{\sqrt{ab}} < \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2a^{\frac{3}{2}}}$.

En déduire que $\frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} < \frac{2}{\pi\sqrt{e} + e\sqrt{\pi}} < \frac{1}{e^{\frac{3}{2}}}$.

Exercice 6

Exercice 7

Soit la fonction ...

1. Montrer que ... se prolonge par continuité sur ℝ en une fonction g.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de g sur ℝ. En déduire son sens de variation et tracer sa courbe.

Exercice 8

Soient ... On considère les fonctions suivantes

1. Calculer la dérivée n-ième de chacune des fonctions suivantes sur leur domaine de dérivabilité.
2. En déduire la somme suivante $\sum_{k=0}^{n}$ ...

Exercice 9

Soient ... Montrer que pour tout ... il existe ... tel que

Exercice 10

On considère la fonction ... définie sur ... par ...

1. Étudier les variations de ...
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que ...

   En déduire la relation entre P_{n+1}, P_n et P_n'.
3. Déterminer le degré de P_n en fonction de n.
4. Vérifier que ... est une solution de l'équation différentielle suivante

5. En déduire à l'aide de la formule de Leibniz que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ldots$$

Exercice 11

1. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n réels positifs ou nuls et ... Montrer que ... En déduire que ...
2. Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

   a) Montrer que pour tous réels a et b positifs ou nuls on a $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ avec égalité si et seulement si $a^p = b^q$.

   b) Soient $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ $2n$ nombres positifs. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1/q} \quad \text{Inégalité de Hölder.}$$

3. Montrer que la fonction $x \mapsto x^p$ est convexe et retrouver ainsi l'inégalité de Hölder.
4. Trouver une démonstration directe et simple dans le cas $p = q = 2$ (inégalité de Cauchy-Schwarz).

1. Soit l'application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in]0,1]$, $f(x) \neq 0$

   (a) Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $\frac{2f'(c)}{f(c)} = \frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$

   (b) Existe-t-il $d \in]0,1[$ tel que $\frac{3f'(d)}{f(d)} = \frac{f'(1-d)}{f(1-d)}$? Conclure

Exercice 7

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{x}}$

1. Montrer que f se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$ en une fonction g.
2. Étudier la parité et la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}$. En déduire son sens de variation et tracer sa courbe.

Exercice 8

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{R}$. On considère les fonctions suivantes

(i) $f(x) = (x^2 - (a+b)x + ab)^n$;

(ii) $g(x) = x^2 \cos^3(3x)$;

(iii) $h_m(x) = \frac{1}{(m-1-x)(m-x)(m+1-x)}$;

(iv) $h(x) = x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}$

1. Calculer la dérivée n^{eme} de chacune des fonctions et ce sur leur domaine de dérivabilité
2. En déduire la somme suivante : $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$.

Exercice 9

Soient $f \in C^3([0;1], \mathbb{R})$Montrer que pour tout $x \in]0;1]$ il existe $\theta_x \in]0,x[$ tel que

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{2}(f'(0) + f'(x)) - \frac{x^3}{12} f^{(3)}(\theta_x).$$

Exercice 10

On considère la fonction f définie sur $]-\infty; 1[$ par : $f(x) = \frac{1}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}}$.

1. Étudier les variations de f.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que : $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}$ $\forall x < 1$.

   En déduire la relation entre P_{n+1}, P_n et P_n'.
3. Déterminer le degré de P_n en fonction de n.
4. Vérifier que f est une solution de l'équation différentielle suivante :

$$\forall x \in]-\infty, 1[, \quad (1-x)^2 y'(x) - (2-x) y(x) = 0.$$

5. En déduire, à l'aide de la **formule de Leibniz**, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x < 1, \quad P_{n+1} = \left((2n+1)X + X^2\right) P_n - n^2 X^2 P_{n-1}.$$

Exercice 11

1. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n réels positifs ou nuls et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, n réels strictement positifs tels que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$. Montrer que $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$. En déduire que $\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$.
2. Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

   (a) Montrer que, pour tous réels a et b positifs ou nuls, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ avec égalité si et seulement si $a^p = b^q$.

   (b) Soient $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$, $2n$ nombres complexes. Montrer que :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q} \quad \text{(Inégalité de HÖLDER)}.$$

   (c) Montrer que la fonction $x \mapsto x^p$ est convexe et retrouver ainsi l'inégalité de HÖLDER.

   (d) Trouver une démonstration directe et simple dans le cas $p = q = 2$ (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)

EPO/CPGE/PCSI/1A : C&D

Année académique : 2020-2021
Module : Analyse I

EXAMEN D'ANALYSE I

: 04 heures

Exercice 1 : Restitution Organisée de Connaissances et Incontournables (R.O.C.I.) (10 points)

① Montrer que l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est dense dans $\mathbb{R}$.

② Déterminer s'ils existent **inf**, **sup**, **min** et **max** de l'ensemble $\mathcal{E} = \{x^2 + y^2 \mid xy = 1, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

③ Donner l'exemple d'une suite dont les suites extraites d'indice pair et d'indice impair sont adjacentes. Justifier votre réponse.

④ Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{Z}$. Montrer que : $(z_n)_n$ converge $\Longleftrightarrow$ $(z_n)_n$ est stationnaire.

⑤ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ et $y \in]0, 1[$ tel que : $\dfrac{x_0}{1-y} + \dfrac{x_1}{1-y^2} + \dots + \dfrac{x_n}{1-y^{n+1}} = 0$.

Montrer que : $\exists u \in]0; 1[\mid x_0 + x_1 u^2 + \dots + x_n u^{2n} = 0$.

⑥ Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. On note $\mathbf{Lip}([a;b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur $[a;b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que : $f, g \in \mathbf{Lip}([a;b], \mathbb{R}) \Longrightarrow fg \in \mathbf{Lip}([a;b], \mathbb{R})$.

Cette implication reste-elle vraie si $f, g \in \mathbf{Lip}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? Justifier votre réponse.

⑦ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $(E_1) : \arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{2}$.

⑧ On considère la fonction φ définie par $\varphi : x \longrightarrow \arctan\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$.

(a) Déterminer sur quel ensemble φ est continue puis indiquer si φ peut être prolongée par continuité.

(b) Étudier la fonction φ (on donnera l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthogonal).

(c) En déduire une expression simple de φ sur chacun des intervalles $]0; 1]$ et $[-1; 0[$.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\alpha_n = \dfrac{n^2}{\sqrt{4 + n^4}}$, et $\beta_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi(\alpha_k)$.

Déterminer la limite de β_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 : Développements Limités et Suites Numériques (03 points)

❶ Déterminer les développements limités à l'ordre demandé au voisinage des points indiqués :

i) $(1+x)^{\frac{1}{1+2x}}$ (ordre 4 en 0)   ii) $\tan\sqrt[3]{1 [illegible] x^3}$ (ordre 3 en [illegible])

❷ Etudier la nature des suites numériques suivantes :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(7\sin\left(\dfrac{1}{3n^2 + 2020}\right) + \dfrac{1}{7}\cos(n^2 + 2021)\right)^n + \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \dfrac{2}{k}\right)^{\frac{k}{n}}$;

b) $v_0 = 1$ et $\forall n \geq 0$, $v_{n+1} = \ln(e^{v_n} - v_n)$. En déduire la limite suivante : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}$ [illegible]

[illegible]

Année académique : 2020-2021
Module : Analyse 1

EXAMEN D'ANALYSE 1

2H 00 minutes

Exercice 1 : Restitution Organisée de Connaissances et Incontournables (R.O.C.I.) (10 points)

1° Montrer que l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est dense dans $\mathbb{R}$.

2° Déterminer s'ils existent inf, sup, min et max de l'ensemble $A = \{x^2 + y^2 \mid xy = 1, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

3° Donner l'exemple d'une suite dont les suites extraites d'indice pair et d'indice impair sont adjacentes [illegible]

4° Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{Z}$. Montrer que : $(x_n)_n$ converge $\Leftrightarrow$ $(x_n)_n$ est stationnaire.

5° Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $q \in]0;1[$ tel que $\frac{a_0}{1-q} + \frac{a_1}{1-q^2} + \cdots + \frac{a_n}{1-q^{n+1}} = 0$.

Montrer que : $\exists x \in]0;1[$, $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$.

6° Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On note $Lip([a;b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions *lipschitziennes* sur $[a;b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que : $f, g \in Lip([a;b], \mathbb{R}) \Rightarrow fg \in Lip([a;b], \mathbb{R})$.

Cette implication reste-t-elle vraie si $f, g \in Lip(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? Justifier votre réponse.

7° Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : (E) : $\arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$.

8° On considère la fonction φ définie par $\varphi : x \mapsto \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$.

(a) Déterminer sur quel ensemble φ est continue puis indiquer si φ peut être prolongée par continuité.

(b) Etudier la fonction φ (on donnera l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthogonal).

(c) En déduire une expression simple de φ sur chacun des intervalles $]0;1]$ et $[-1;0[$.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\alpha_n = \frac{n^2}{\sqrt{4+n^4}}$, et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi(\alpha_k)$.

Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 : Développements Limités et Suites Numériques (03 points)

❶ Déterminer les développements limités à l'ordre demandé au voisinage des points indiqués :

i) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ (ordre 4 en 0) **ii)** $\tan\sqrt[3]{4(\pi^3 + x^3)}$ (ordre 3 en π).

❷ Etudier la nature des suites numériques suivantes :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(7\sin\left(\frac{1}{3n^2+2020}\right) + \frac{1}{7}\cos(n^2+2021)\right)^n + \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2}{k}\right)^{\frac{k}{n}}$;

b) $v_0 = 1$, et $\forall n \geq 0$, $v_{n+1} = \ln(e^{v_n} - v_n)$. En déduire la limite suivante : $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} v_k}{n+1}$.

Problème : Études de Fonctions et de Suites Implicites (07 + 15% de Bonus := 10 points)

Les deux parties ci-dessous sont indépendantes l'une de l'autre.

■ Partie 1. Etude de la fonction f

Soient f la fonction $f : x \longmapsto f(x) = \frac{x}{x-1}\sqrt{x^2+1}$ et (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé.

[1] Étude de f au voisinage de 0.

(a) Determiner le Développement Limité (DL) d'ordre 2 de f au voisinage de 0.

(b) En deduire l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0 et la position de (C_f) par rapport à (T) au voisinage de 0.

[2] Etude de f au voisinage de l'infini. On pose $X = \frac{1}{x}$ et $g(X) = f\left(\frac{1}{X}\right)$

(a) Determiner le DL d'ordre 2 de $|X|\,g(X)$ au voisinage de 0.

(b) Determiner trois réels a, b et c tels qu'au voisinage de $+\infty$ f admet un développement asymptotique de la forme : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

(c) Montrer que (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote (Δ_1) dont on donnera l'équation. Étudier la position de (C_f) par rapport à (Δ_1) au voisinage de $+\infty$.

(d) Montrer que (C_f) admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote (Δ_2) dont on donnera l'équation. Étudier la position de (C_f) par rapport à (Δ_2) au voisinage de $+\infty$.

[3] Étude des variations de f

(a) Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition noté D_f et qu'il existe une fonction polynomiale P telle que : $\forall x \in D_f, \quad f'(x) = \frac{P(x)}{(x-1)^2\sqrt{x^2+1}}$.

(b) Montrer que P admet une seule racine réelle $\theta > 2$, puis vérifier que : $f(\theta) = \frac{\theta^2}{\sqrt{\theta - 1}}$.

(c) En déduire le sens des variations de f sur D_f.

(d) Tracer dans le même repère la coures (C_f) et ses asymptotes, et la tangente (T) en 0.

[4] Étude d'une restriction de f.

On note $I =]-\infty; 1[$ et f_r la restriction le f à l'intervalle I, c'est-à-dire : $\forall x \in I, \quad f_r(x) = f(x)$.

(a) Montrer que f_r réalise une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera.
On note f_r^{-1} sa bijection réciproque.

(b) Montrer que f_r^{-1} admet un $DL_2(0)$, puis déterminer ce développement limité.

(c) Tracer dans le même repère que (C_f) les courbes représentatives des fonctions f_r et f_r^{-1}.

■ Partie 2. Étude d'une suite implicite

Pour tout entier $n \geq 2$, on note (E_n) l'équation donnée par $(E_n) \ : \ x^n - x = n$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, (E_n) admet une unique solution notée u_n dans $\mathbb{R}_+$, et justifier que $u_n > 1$.
2. Démontrer que $\forall n \geq 2, \quad n^{\frac{2}{n}} \leq n$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.
3. Soit $(v_n)_{n\geq 2}$ une suite définie par : $\forall n \geq 2, \quad v_n = u_n - 1$.

   Montrer que : $\forall n \geq 2, \quad n\ln(v_n + 1) = \ln(v_n + 1 + n)$. En déduire que : $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$.

(*__Indication__ : On prendra : $\theta \simeq 2{,}2056$ et $f(\theta) = 4{,}4304$.*)

※※※※※※※※※※...... **FIN** ......※※※※※※※※※※※※※

Date : Mars 2021.

Travaux dirigés

Exercice 1

Répondre par vrai ou faux en justifiant

1) Soit P l'ensemble des entiers naturels pairs. Chacune des propositions suivantes caractérise les éléments de P :

a) $x \in \mathbb{Z}$ et $\frac{x}{2} \in \mathbb{N}$

b) $x \in \mathbb{R}$ et x^2 est un multiple de 4

2) Soient f et g deux fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$. Alors $[\forall x \in \mathbb{R}, f(x)g(x) = 0] \Rightarrow [\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0]$ ou $[\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0]$

3) Soient f et g deux fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$. Alors $[\forall x \in \mathbb{R}, f(g(x)) = 0] \Rightarrow [\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0]$ ou $[\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0]$.

Exercice 2 Soient E et F deux ensembles totalement ordonnés par les relations notées toutes deux $\leq$. Soit la relation notée $\leq$ et définie sur $E \times F$ comme suit : $(x, y) \leq (x', y') \Leftrightarrow (x < x'$ ou $(x = x'$ et $y \leq y'))$

1) Montrer que la relation ainsi définie est une relation d'ordre sur $E \times F$.

2) Peut-on ordonner totalement l'ensemble des points du plan ?

Exercice 3 On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\mathcal{R}$ par : $(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow x - x'$ et $y - y'$ sont deux entiers.

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) Montrer que le carré $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x < 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq y < 1\}$ contient un élément et un seul élément de chaque classe.

3) Quel est l'ensemble des classes d'équivalence ?

Exercice 4 Soient f une application de E dans F , A une partie de E et B une partie de F

1) a) Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A))$.

b) Montrer que : $[\forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A))] \Leftrightarrow f$ injective.

2)) Montrer que pour tout $B \in \mathcal{P}(F), B \subset f(f^{-1}(B))$.

b) Montrer que : $[\forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A))] \Leftrightarrow f$ surjective.

Exercice 5 Soient A, B des parties d'un ensemble E. Soit $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ tel que $\forall X \in \mathcal{P}(E), f(X) = (X \cap A, X \cap B)$. Montrer que : f injective $\Leftrightarrow A \cup B = E$.

A quelle condition est-elle surjective ?

a) Montrer que l'application $\chi : \{0,\dots,d\} \to K$ qui à un entier x associe x^2, est bijective.

b) En déduire que $card(K) = \frac{p+1}{2}$.

c) Montrer que $K - \{\bar{0}\} \subset S$. En déduire que $K = \{\bar{0}\} \cup S$.

Montrer que -1 est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si $p \equiv 1[4]$.

... premiers congrus à 1 modulo 4. On veut montrer que l'en-

... $maxE$, puis on définit $N = (n!)^2 + 1$.

Exercice 6 Soient $(E, \leq)$ et $(F, \prec)$ deux ensembles ordonnés isomorphes par la bijection f (Cela signifie que, $\forall x, y \in E$, on a : $x \leq y \Leftrightarrow f(x) \prec f(y)$). Soit X une partie de E admettant la borne supérieure b pour l'ordre sur E. Montrer que $f(b)$ est la borne supérieure dans F de $f(X)$.

Exercice 7 Soient $E = \{a, b, c, d\}$, $F = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c, d\}, E\}$ des ensembles. On considère la relation d'ordre $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$.

1. F admet-il un plus petit élément, un plus grand éléments ?
2. F admet-il des majorants ? si oui les préciser.
3. F admet-il des minorants ? si oui les préciser.
4. F admet-il une borne supérieure ? si oui la préciser.
5. F admet-il une borne inférieure ? si oui la préciser.
6. F admet-il des éléments minimaux, des éléments maximaux ? si oui les préciser.

a) Montrer que l'application $\chi : \{0, \dots, d\} \to K$, qui à un entier x associe x^2, est bijective.

b) En déduire que $card(K) = \frac{p+1}{2}$.

c) Montrer que $K - \{0\} \subset S$. En déduire que $K = \{0\} \cup S$.

d) Montrer que -1 est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si $p \equiv 1[4]$.

2. On introduit l'ensemble E des nombres premiers congrus à 1 modulo 4. On veut montrer que l'ensemble E est infini. On suppose qu'il est fini et on note $n = maxE$, puis on définit $N = (n!)^2 + 1$.

a) Justifier l'existence de n.

b) Montrer qu'il existe un nombre premier impair p divisant N .

c) Montrer que $p \in E$.

d) Conclure.

Exercice 17 Soit p un nombre premier. On a $x^{p-1} = \bar{1}$ (conséquence du petit théorème de Fermat)pour tout $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, non nul. Soit m un entier.

1. Montrer que, si $p - 1$ ne divise pas m alors il existe $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que $a^m \notin \{\bar{0}, \bar{1}\}$.
2. Calculer $\sum_{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} x^m$.

Exercice 18 On considère dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes $P(X) = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 3X + 1$ et $Q(X) = X^4 + 7X^3 + 18X^2 + 20X + 8$.

1. Montrer que 1 est une racine double de $P(X)$ et donner une factorisation complète de $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que -2 est une racine triple de $Q(X)$ et donner une factorisation complète de $Q(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(x)$ les fractions rationnelles suivantes : $f(X) = \frac{2X^3 - 2X^2 + X + 1}{P(X)}$ et $g(X) = \frac{X^5 + 7X^4 + 15X^3 + 5X^2 - 18X - 15}{Q(X)}$

Exercice 19

On considère dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants : $P(X) = X^4 + X^3 - 2X^2 + 2X - 14$ et $Q(X) = X^3 + X^2 - 5X + 3$.

1. Montrer que 1 est une racine double de $Q(X)$.
2. En déduire une factorisation de $Q(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Déterminer la décomposition en éléments simples de $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 20

1. Décomposer $P(X) = X^{2n} - 2X^n cos\alpha + 1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Décomposer les fractions suivantes en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$: $F(X) = \frac{-2X^6 + X^5 + 3X^4 - 4X^3 - 8X^2 - 10X}{X^5 - X^3 - X^2 + 1}$ $G(X) = \frac{2X^2 - 3X + 1}{X^5 - 6X^4 + 8X^3 + 16X^2 - 48X + 32}$ (on pourra vérifier que 2 est une racine double et -2 est racine du dénominateur) et $H(X) = \frac{x-3}{X^4 - 2X^3 + 2X - 1}$.

Exercice 21 On considère les polynômes $A = X^4 + X^3 + X + 1$ et $B = X^3 + X^2 + X + 1$ de $\mathbb{R}[X]$.

1. Calculer $D = PGCD(A, B)$. et trouver des polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ tels que $UA + VB = D$.
2. Décomposer A et B en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$

Exercice 22

1. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $A = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 2$ (n un entier naturel non nul)par $B = (X-1)(X-2)$ puis par $B = (X-1)^2$, puis enfin par $B = (X-1)^2(X-2)$.
2. Pour quelles valeurs de n, $P = (X+1)^n - X^n - 1$ est il divisible par $X^2 + X + 1$.

3. Soit $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ un polynôme dont les coefficients a_i sont des entiers. Montrer que si $\frac{p}{q}$ écrit sous forme de fraction irréductible ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$) est racine de P, alors p divise a_0 et q divise a_n.

4. Factoriser le polynôme $P_n = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X(X+1)}{2!} + \cdots + \frac{X(X+1)(X+2)\cdots(X+n-1)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 23

On considère la fraction $F = \frac{P}{Q^3}$ où $Q = X^2 + 4X + 5$ et $P = 2X^5 + 19X^4 + 76X^3 + 157X^2 + 165X + 72$

1. Effectuer la division euclidienne de P par Q, puis P_1 et R_1 étant le quotient et le reste de cette division, effectuer la division euclidienne de P_1 par Q.
2. En déduire la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 24

1. Déterminer un PGCD des polynômes P et Q suivants : $P = X^5 + X^4 - X^3 + X^2 + X - 1$, $Q = X^5 + X^4 + 2X^2 - 1$
2. Montrer que le polynôme $P = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ est divisible par $(X-1)^2$ et déterminer le quotient.

Exercice 25 *Nombres de Carmichaël* Le petit théorème de Fermat affirme que si n est premier, on a pour tout entier a : n divise $a^n - a$. On appelle nombre de Carmichaël un entier n ayant la même propriété. On qualifie cet entier de menteur de Fermat si de plus cet entier n'est pas un nombre premier : ainsi 561 est un menteur de Fermat. On peut le vérifier avec le critère suivant que l'on se propose de démontrer.

1. On va démontrer le *théorème de Korselt* : n est un nombre de Carmichaël si et seulement si n est sans facteur carré et pour tout diviseur premier p de n, $p-1$ divise $n-1$.

a Soit n est un nombre de Carmichaël. On considère un nombre premier p qui divise n.

a)i) Justifier que $(p+1)^n \equiv 1[p^2]$.

a ii) En déduire que p^2 ne divise pas n. Indication : remarquer que $(p+1)^n \equiv p+1[n]$.

b) Soit $a \geq 2$.

b i) Justifier que $a^{n-1} \equiv 1[p]$ pour tout entier $1 \leq a \leq p-1$.

b ii) Montrer que $p-1$ divise $n-1$. Indication : faire la division euclidienne.

2. Réciproquement : On suppose que $n = p_1 \cdots p_r$, où les p_i sont tous distincts et $r \geq 2$.

a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $a \equiv a^n[p_i]$

b) Conclure.

Montrer que les menteurs de Fermat ont au moins trois facteurs premiers distincts.

Fiche d'exercices de travaux dirigés

Exercice 1

1. On définit sur l'ensemble $E = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ où $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels, la loi $\star$ par :

$$\forall (x,y) \in E^2, x \star y = x + y + \frac{1}{3}xy.$$

Montrer que $(E, \star)$ est un groupe abélien.

2. On munit $\mathbb{R}$ de l'opération $\perp$ définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x \perp y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ Montrer que $(\mathbb{R}, \perp)$ est un groupe abélien.

Exercice 2

Vous disposez de 282 pommes et de 329 fraises pour préparer des tartelettes. Vous désirez répartir ces fruits en les utilisant tous et en obtenant le maximum de tartelettes identiques.

1. Calculer le nombre de tartelettes.
2. Calculer le nombre de pommes et de fraises contenues dans chaque tartelette.

Exercice 3 Trouver tous les d'entiers naturels (a, b) tels que $PGCD(a, b) = 30$ et $PPCM(a, b) = 600$.

Exercice 4

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est divisible par 24
2. Montrer que pour tout entier naturel n, 49 divise $2^{3n+3} - 7n - 8$.

Exercice 5

1. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ et préciser leurs inverses.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} \dot{3}x + y = \dot{9} \\ \dot{7}x + \dot{2}y = \dot{5} \end{cases}$
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 = \dot{4}$.

Exercice 6

Soit n un entier naturel et $S(n)$ la somme des chiffres $a_0, a_1, \cdots, a_m$ de l'écriture décimale $n = \overline{a_m \cdots a_0} = \sum_{k=0}^{m} a_k 10^k$.

1. Comparer n *modulo* 3 et $S(n)$ *modulo* 3 ; en déduire un critère de divisibilité par 3.
2. Comparer n *modulo*9 et $S(n)$ *modulo* 9 ; en déduire un critère de divisibilité par 9.
3. Donner un critère de divisibilité par 11 en étudiant les puissances de 10 modulo 11.

Exercice 7

1. On considère les polynômes $A = X^4 + X^3 + X + 1$ et $B = X^3 + X^2 + X + 1$ de $\mathbb{R}[X]$.
   (a) Calculer $D = pgcd(A, B)$.
   (b) Trouver des polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ tels que $UA + VB = D$.
   (c) Décomposer A et B en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$
2. Trouver le ou les polynômes P de degré ≤ 5 tels que $(X-1)^3$ divise $P(X)+1$, $(X+1)^3$ divise $P(X) - 1$, en utilisant le polynôme dérivé P'.

Exercice 8 Montrer que :

1. Si un entier est de la forme $6k+5$, alors il est nécessairement de la forme $3k-1$, alors que la réciproque est fausse ;
2. Le carré d'un entier de la forme $5k+1$ est aussi de cette forme ;
3. Le carré d'un entier est de la forme $3k$ ou $3k+1$, mais jamais de la forme $3k+2$;
4. Le carré d'un entier est de la forme $4k$ ou $4k+1$, mais jamais de la forme $4k+2$ ni de la forme $4k+3$;
5. Le cube de tout entier est de la forme $9k$, $9k+1$ ou $9k+8$;

Exercice 9 Nombres de Mersenne.

Soient $(p,q) \in \mathbb{N}$. Montrer que 2^p-1 et 2^q-1 divisent $2^{pq}-1$. En déduire que si 2^n-1 est premier, alors n est premier. Étudier la réciproque pour $n=11$.

Exercice 10

Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

1. 7 divise $2^{2n+1}+3^{2n+2}$,
2. 5 divise $2^{2n+1}+3^{2n+1}$,
3. 6 divise n^3-n.
4. 6 divise $4(4^{2n}-1)$.

Exercice 11 On considère l'anneau $A=\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$.

1) Déterrminer les diviseurs de zéro et les éléments nilpotents dans A.

2) Déterrminer les éléments inversibles dans A et préciser l'inverse de chacun de ces éléments.

3) Résoudre dans A^2 le système suivant $\begin{cases} \dot{7}x+\dot{2}y=\dot{10} \\ \dot{3}x+\dot{5}y=\dot{21} \end{cases}$.

Exercice 12 Déterminer par l'algorithme d'Euclide le pgcd des couples d'entiers (a,b) et en déduire dans chaque cas une identité de bézout :

1) $a=325$ et $b=312$;

2) $a=1225$ et $b=972$;

3) $a=1104$ et $b=1260$.

Exercice 13 On souhaite trouver tous les couples $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ vérifiant l'équation (E) $\quad 325x+299y=39$.

1) Quel est le pgcd de 325 et 299 ? Simplifier l'équation (E) sous la forme $ax+by=c$ où a et b sont premiers entre eux.

2) Trouver une relation de Bézout entre a et b.

3) En déduire une solution particulière de (E).

4) Trouver toutes les solutions de (E).

5) Interprétation géométrique du résultat.

Exercice 14 Quel est le chiffre des unités de 20082008^{10} ?

Exercice 15 Soient a un entier quelconque et p un nombre premier.

1. Montrer que $a^p \equiv a \quad [p]$. (Petit théorème de Fermat)
2. Montrer que si p ne divise pas a, alors $a^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$.

Exercice 16

1. Soit p un nombre premier impair. On se place dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On notera $d=\frac{p-1}{2}$. On considère S l'ensemble des racines du polynôme $X^d-\bar{1}$. On rappelle qu'en raison du degré, le cardinal de S est inférieur à d. Enfin $K=\{a^2 | a\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

BARRY
EL-BARRAS

Année Académique : 2020-2021

Travaux Dirigés D'Algèbre 2

Exercice 1
Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2&2&1&0&1&1\\1&2&1&0&-1&2\\2&3&1&-1&0&1\\-1&0&1&2&3&1\end{pmatrix}.$$

Exercice 2
Déterminer suivant la (ou les) valeur(s) du (des) paramètres le rang des matrices :

$$A=\begin{pmatrix}1-a&0&0\\-1&2-a&1\\2&0&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&\cos\theta&\cos 2\theta\\\cos\theta&\cos 2\theta&\cos 3\theta\\\cos 2\theta&\cos 3\theta&\cos 4\theta\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&1&1\\b+c&c+a&a+b\\bc&ca&ab\end{pmatrix}$$

Exercice 3
Calculer le rang des familles de vecteurs $v=(v_1,v_2,v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ suivants avec :
1. $v_1=(1,1,0),\ v_2=(0,1,1),\ v_3=(1,2,1)$.
2. $v_1=(1,1,1),\ v_2=(1,2,1),\ v_3=(1,-1,1)$.

Exercice 4
Calculer le rang des applications linéaires suivantes :
1. $f\ :\ \mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3,\ (x,y,z)\longmapsto(x+y-z,x,-z)$.
2. $f\ :\ \mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2,\ (x,y,z)\longmapsto(x+y,2x-y,y)$.
3. $f\ :\ \mathbb{R}_3[X]\longrightarrow\mathbb{R}_3[X],\ P\longmapsto XP'-P)$.

Exercice 5
sans calculer, expliquer pourquoi le déterminant des matrices suivantes est nul :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&3\\0&0&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&a&b+c\\1&b&c+a\\1&c&a+b\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-1&2&-3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

Exercice 6
Calculer sous forme factoriser le déterminant des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&\sin a&\cos a\\1&\sin b&\cos b\\1&\sin c&\cos c\end{pmatrix}$$

Exercice 7
Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.
1. Considérons les polynômes $P_a=(X-a)^2,\ P_b=(X-b)^2,\ P_c=(X-c)^2$. Déterminer pour quelles valeurs de (a,b,c) la famille $\mathcal{P}=(P_a,P_b,P_c)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$?
2. À quelle condition sur le réel a la famille $B=((a,1,1),(1,a,a),(1,1,a))$ forme t-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 8

Inverser en utilisant la comatrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9

Pour chacune des applications linéaires suivantes :

1. Déterminer sa matrice dans les bases canoniques des espaces vectoriels considérés.
2. Déterminer son rang
3. Déterminer u^{-1} quand cette application existe.
4. Calculer l'image du vecteur V donné en utilisant cette matrice.

a. $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \longmapsto (x + y + z, x - 2y - 3z)$ et $V = (0, 1, -1)$.

b. $u : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $P \longmapsto (P(0), P(1), P(2))$ et $V = X^2 - X + 1$.

c. $u : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $M \longmapsto EM$ où $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 10

Soit $\varphi : P \longmapsto XP' + P$ un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

1. Calculer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$
2. Démontrer que cette matrice est inversible et calculer son inverse.
3. En déduire que φ est bijective et calculer l'image réciproque de chacun des éléments de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ par φ.

Exercice 11

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ donné par :

$$f(e_1) = e_1 + e_2 \text{ et } f(e_2) = -e_1 + 2e_2.$$

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique $\mathbb{B}$.
2. soit $v = xe_1 + ye_2 \in \mathbb{R}^2$. Calculer les composantes x' et y' de $f(v)$ dans la base canonique $\mathcal{B}$.
3. On pose $\varepsilon_1 = e_2$ et $\varepsilon_2 = e_1 + e_2$. prouver que $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de E.
4. Déterminer le $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ et $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.
5. En déduire la matrice D de f dans la base $\mathcal{C}$ et en déduire les expressions de $f(\varepsilon_1)$ et $f(\varepsilon_2)$ en fonction de ε_1 et ε_2.

Exercice 12

Soient

$$P_1 = X^2 + 1,\ P_2 = X + 1,\ P_3 = 2X^2 - X.$$

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Écrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, puis celle de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
3. Soit $P(X) = X^2 - X + 2$. Donner les composantes de P dans la base $\mathcal{B}'$.
4. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ donné par $\theta(P) = XP'$. Déterminer la matrice de θ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes :

1. $\begin{cases} x + 2y + 3z &= 1 \\ -x - 3y + 5z &= 2 \\ x + y + z &= -1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x + 2y + z &= 2 \\ 2x + y + z &= -1 \\ x - 3y + 2z &= -1 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x + y - z &= 0 \\ x - y &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{cases}$

BARRY

BARRY

École Polytechnique de Ouagadougou Année 2021
PCSI (L_1)

Travaux Dirigés d'algèbre2

EXERCICE1

Sur $\mathbb{R}$ déjà muni de la multiplication et de l'addition, on définit la loi $*$ par : $a * b = ab + a + b$.

1. Montrer que $*$ est associative et commutative, qu'elle possède un élément neutre. Quels sont les éléments symétrisables ?
2. La loi $*$ est-elle distributive par rapport à l'addition et à la multiplication ?
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit a^n pour $n \geq 1$ par :
   $a^1 = a$; $a^2 = a * a$; $a^n = \underbrace{a * a * \ldots * a}_{n \text{ termes}}$.

   Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(3 * x^{(2)}) + (2 * x) = 160$.

EXERCICE2

Les sous ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus 2x + y - z = 0 \} \; ; \; B = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus x \geq 0 \}$$

EXERCICE3

Déterminer lesquels des ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Calculer leurs dimensions.

$$E_1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus x + y - z = 0 \} \; ; \; E_2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus x^2 - z^2 = 0 \}$$

$$E_3 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus 2x - y + z = 1 \} \; ; \; E_4 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus e^x e^y = 0 \}$$

EXERCICE4

1 Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ? sinon, former une relation linéaire liant ces vecteurs.

a) (u, v, w) *avec* $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, -1, 1)$, $w = (1, 1, 3)$

b) (u, v, w) *avec* $u = (1, 2, 1)$, $v = (2, 1, -1)$, $w = (1, -1, -2)$

c) (u, v, w) *avec* $u = (1, -1, 1)$, $v = (2, -1, 3)$, $w = (-1, 1, -1)$

2 Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes de $\mathbb{R}^4$

a) (e_1, e_2, e_3) *avec* $e_1 = (1, 1, 1, 1)$, $e_2 = (1, -1, 1, -1)$, $e_3 = (1, 0, 1, 1)$

b) (e_1, e_2, e_3, e_4) *avec* $e_1 = (1, 1, 0, 1)$, $e_2 = (1, -1, 1, 0)$, $e_3 = (2, 0, 1, 1)$, $e_4 = (0, 2, -1, 1)$

3 On pose $f_1, f_2, f_3, f_4 : [0\ ,\ 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ par :
$f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = x\cos x$, $f_3(x) = \sin x$, $f_4(x) = x\sin x$.
Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.

EXERCICE5

On pose $u = (1,1,1)$, $v = (-1,1,0)$, $w = (1,0,-1)$. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (u,v,w)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées des vecteurs $x = (1,0,0)$, $y = (1,0,1)$, $z = (0,0,1)$ dans la base $\mathcal{B}$. Trouver une condition sur α et β pour que $(\alpha, 1, \beta) \in vect\{\ u, v\ \}$.

EXERCICE6

Soient les fonctions f_1 et f_2 définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f_1(x) = e^{2x}$ et $f_2(x) = xe^{2x}$.

Soit $E = \{\ \alpha f_1 + \beta f_2 \ \ \backslash \ \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\ \}$

1 Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2 Démontrer que (f_1, f_2) est une base de E.

3 Soit φ l'application définie par $\forall\ f \in\ E,\ \ \varphi(f) = f$.
Montrer que φ est un endomorphisme de E et donner la matrice A de φ dans la base (f_1, f_2). Déterminer $Ker\varphi$. Est- elle injective ?

4 Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

5 Soient les suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$$(S)\begin{cases} x_n = 2x_{n-1} + y_{n-1} \\ \\ y_n = 2y_{n-1} \end{cases}$$

a) En posant $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, montrer que (S) peut se mettre sous la forme $X_n = AX_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$ où $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

EXERCICE7

Soient $E = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x + y - 2z = 0\ et\ 2x - y - z = 0\ \}$ et $F = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x + y - z = 0\ \}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$. On admettra que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Soient $a = (1,1,1)$ et $b = (0,1,1)$.

1 Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de E.

2 Montrer que $\{\ a, b\ \}$ est une base de F. Montrer que E et F sont supplémentaires.

T.D : Applications linéaires

Exercice 1

Les applications suivantes ne sont pas linéaires. Pourquoi ?

1. $u_1 : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X], P \mapsto P' - P^2$.
2. $u_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + 1$.
3. $u_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$.

Exercice 2

Dire si les applications suivantes sont linéaires

1. $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2, P \mapsto (P(0), P'(1))$.
2. $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X], P \mapsto P^2$.
3. $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X], P \mapsto AP$, où $A \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme fixé.

Exercice 3

Montrer que les applications suivantes sont linéaires puis déterminer une base de leur noyau et une base de leur image.

1. $f_1 : (x, y) \mapsto (y - 3x, 5x + 2y, x + y)$.
2. $f_2 : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x + 3y + 2z, 3x + y + 2z)$.
3. $f_3 : (x, y, z) \mapsto (2x - y + z, 3x + y - z, x - 3y + 2z, 2x + 4y - 4z)$.
4. $f_4 : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X], P \mapsto P - XP' - P(0)$
5. $f_5 : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X], P \mapsto X(P'(X + 1) - P'(1))$.

Exercice 4

1. Montrer que $(x, y, z) \mapsto (x + 2y, 4x - y + z, 2x + 2y + 3z)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa réciproque.
2. Montrer que $P \mapsto (P(0), P'(0), \cdots, P^{(n)}(0))$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$.

Exercice 5

Soit $E = C^\infty(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ définie par $\varphi(f) = f'$. Déterminer le noyau et l'image de φ. φ est elle injective ? surjective ?

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous espaces vectoriels de E de dimension finie.

1. Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire $\varphi : F \times G \longrightarrow E, (f, g) \mapsto f + g$.

2. Redémontrer ainsi a formule de Grassman.

Exercice 7

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de E défini par la donnée des images des vecteurs de $\mathcal{B}$: $u(e_1) = -2e_1 + 2e_3$, $u(e_2) = 3e_2$ et $u(e_3) = -4e_1 + 4e_3$.

1. Déterminer une base de $Keru$. u est-il injectif ?
2. Déterminer une base de Imu. Quel est le rang de u ?
3. Montrer que $E = Keru \oplus Imu$.

Exercice 8

Soient $\mathcal{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Comparer $Ker(f^p)$ et $Ker(f^q)$, puis $Im(f^p)$ et $Im(f^q)$ pour tous p, $q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$.

Exercice 9

Soient $\mathcal{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f et $g \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f et g commutent. Montrer qu'alors $Ker(g)$ et $Im(g)$ sont stables par f.

Exercice 10

Soient $\mathcal{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f et $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\mathcal{E} = Im(f) + Ker(g)$ si, et seulement si $Im(gf) = Im(g)$.

Exercice 11

Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = \mathbb{R}_1[X] \oplus Vect(X^2 + X + 1)$, puis déterminer une expression de la projection sur $\mathbb{R}_1[X]$ parallèlement à $Vect(X^2 + X + 1)$.

Exercice 12

On pose

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + 2z = 0\}$$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = -y = -z\}$$

Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, puis déterminer la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Exercice 13

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et p et q deux projections de E. On suppose que p et q commutent. Montrer que pq est la projection de E sur $Imp \cap Imq$ de direction $Kerp + Kerq$.

Exercice 14

On considère $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (2x - 2z, y, x - z)$. f est elle une symétrie ? une projection ? Déterminer une base de ses éléments caractéristiques.

E.P.O/CPGE

Année Académique 2020-2021

T.D : Applications linéaires

Exercice 1

Les applications suivantes ne sont pas linéaires. Pourquoi ?

1. $u_1 : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X], P \mapsto P' - P^2$.
2. $u_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + 1$.
3. $u_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$.

Exercice 2

Dire si les applications suivantes sont linéaires

1. $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2, P \mapsto (P(0), P'(1))$.
2. $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X], P \mapsto P^2$.
3. $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X], P \mapsto AP$, où $A \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme fixé.

Exercice 3

Montrer que les applications suivantes sont linéaires puis déterminer une base de leur noyau et une base de leur image.

1. $f_1 : (x, y) \mapsto (y - 3x, 5x + 2y, x + y)$.
2. $f_2 : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x + 3y + 2z, 3x + y + 2z)$.
3. $f_3 : (x, y, z) \mapsto (2x - y + z, 3x + y - z, x - 3y + 2z, 2x + 4y - 4z)$.
4. $f_4 : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X], P \mapsto P - XP' - P(0)$
5. $f_5 : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X], P \mapsto X(P'(X + 1) - P'(1))$.

Exercice 4

1. Montrer que $(x, y, z) \mapsto (x + 2y, 4x - y + z, 2x + 2y + 3z)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa réciproque.
2. Montrer que $P \mapsto (P(0), P'(0), \cdots, P^{(n)}(0))$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$.

Exercice 5

Soit $E = C^\infty(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ définie par $\varphi(f) = f'$. Déterminer le noyau et l'image de φ. φ est elle injective ? surjective ?

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous espaces vectoriels de E de dimension finie.

1. Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire $\varphi : F \times G \longrightarrow E, (f, g) \mapsto f + g$.

[illegible]

Exercice 7

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de E défini par la donnée des images des vecteurs de $\mathcal{B}$: $u(e_1) = -2e_1 + 2e_3$, $u(e_2) = 3e_2$ et $u(e_3) = -4e_1 + 4e_3$.

1. Déterminer une base de $Keru$. u est-il injectif ?
2. Déterminer une base de Imu. Quel est le rang de u ?
3. Montrer que $E = Keru \oplus Imu$.

Exercice 8

Soient E un K-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Comparer $Ker(f^p)$ et $Ker(f^q)$, puis $Im(f^p)$ et $Im(f^q)$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$.

Exercice 9

Soient E un K-espace vectoriel et f et $g \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f et g commutent. Montrer qu'alors $Ker(g)$ et $Im(g)$ sont stables par f.

Exercice 10

Soient E un K-espace vectoriel et f et $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $E = Im(f) + Ker(g)$ si, et seulement si $Im(gf) = Im(g)$.

Exercice 11

Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = \mathbb{R}_1[X] \oplus Vect(X^2 + X + 1)$, puis déterminer une expression de la projection sur $\mathbb{R}_1[X]$ parallèlement à $Vect(X^2 + X + 1)$.

Exercice 12

On pose

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + 2z = 0\}$$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = -y = -z\}$$

Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, puis déterminer la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Exercice 13

Soit E un K espace vectoriel et p et q deux projections de E. On suppose que p et q commutent. Montrer que pq est la projection de E sur $Imp \cap Imq$ de direction $Kerp + Kerq$.

Exercice 14

On considère $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (2x - 2z, y, x - z)$. f est elle une symétrie ? une projection ? Déterminer une base de ses éléments caractéristiques.

Exercice 15

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ les suites réelles définies par les premiers termes u_0, v_0 et pour tout entier naturel n, $\begin{cases} u_{n+1} = 6u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases}$

1. En posant, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}, \forall n \geq 0$, traduire le système précédent par une équation du type $X_{n+1} = MX_n$, $\forall n \geq 0$ où M est matrice que l'on déterminera.
2. Ecrire M sous la forme $M = 5I + J$ où I est la matrice unité d'ordre 2 et J une matrice carrée d'ordre 2 que l'on indiquera. Calculer M^n et en déduire u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 16

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 5 \\ -4 & 3 & 2 \\ -3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer sa matrice inverse A^{-1} par deux methodes distinctes. En déduire la solution du système d'équations linéaires suivant : $\begin{cases} 6x - 2y + 5z = -22 \\ -4x + 3y + 2z = 9 \\ -3x + 7y + 8z = 8 \end{cases}$

Exercice 17

1) Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Vérifier la relation $(M - I)(M + 3I) = 0$ et en déduire M^2 en fonction de M et I.

b) En déduire M^{-1}.

c) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = u_n M + v_n I$ où u_n et v_n vérifient les relations $u_0 = 0, v_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -2u_n + v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 3u_n$$

d) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n = 1$.

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -3u_n + 1$. Exprimer u_n et v_n en fonction de n et en déduire M^n.

2) On se propose de déterminer u_n et v_n par une autre méthode.

a) Déterminer la matrice A telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

b) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer P^2, en déduire P^{-1} puis P^n $(n \in \mathbb{N})$.

c) Calculer $A' = P^{-1}AP$. En déduire A'^n puis A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Retrouver u_n et v_n.

epo-cpge-pcsi
Durée : 3 heures

Année Académique : 2020-2021

Devoir Surveillé D'Algèbre 2

Exercice 1
Soit $E = \mathbb{R}^3$; $F = \{(x, y, z) \in E \mid x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \in E \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.
1. Établir que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminer $F \cap G$.
3. Prouver que $F + G = E$. La somme est-elle directe ?

Exercice 2
dans l'espace $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on considère les fonctions définies par $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$f_k : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sin(kx) \end{cases}$$

1. Pour tous $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, calculer l'intégrale

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(px) \sin(qx) dx$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $S = (f_1, \cdots, f_n)$ est libre.

Exercice 3
Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_4[X]$. On considère l'ensemble

$$F = \{P \in E \mid P(0) = P'(0) = P'(1) = 0\}$$

1. Montrer que F est un K-espace vectoriel, déterminer une base de F et préciser sa dimension.
2. Montrer que le sous-espace vectoriel $G = Vect(1, X, 1 + X + X^2)$ est un supplémentaire de F dans E.

Exercice 4
Soient $P_0 = \frac{1}{2}(X - 1)(X - 2)$, $P_1 = -X(X - 2)$ et $P_2 = \frac{1}{2}X(X - 1)$ trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.
1. Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer P dans la base (P_0, P_1, P_2).
3. Soit $Q = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer Q dans la base $(1, X, X^2)$.
4. Pour tous A, B, C réels montrer qu'il existe polynôme $R \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que : $R(0) = A$, $R(1) = B$ et $R(2) = C$.

BARRY
EL BARROS

epo-cpge-pcsi

Année Académique : 2020-2021

Travaux Dirigés D'Algèbre 2

Exercice 1

Soit M une matrice carrée de taille $n \geq 2$ à coefficient réels de rang 1.

1. Montrer qu'il existe deux vecteurs colonnes U et V tels que $M = U^tV$.
2. Exprimer les puissances entières de M en fonction de M et $tr(M)$.
3. À quelle condition une matrice de rang 1 est-elle une matrice de projection ?
4. Quelle sont les matrices de rang 1 qui sont nilpotentes ?

Exercice 2

Soit A une matrice réelle. Montrer que $rg(A) = rg(A^tA) = rg(AA^t)$.

Exercice 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et $U \in \mathcal{M}^{n,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que $AU = \lambda U$. Montrer que qu'il existe $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nul tal que $A^tV = \lambda V$.

Exercice 4

Soit A une matrice carrée inversible d'ordre $n > 1$. Montrer que $com(com(A)) = \det(A)^{n-2}A$.

Exercice 5

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

1. montrer que $\det(A)$, $\det(B) \in \mathbb{Z}$.
2. On suppose que $\det(A)$ et $\det(B)$ sont premiers entre eux. montrer qu'il existe deux matrices $U, V \in M_n(\mathbb{Z})$ telles que $AU + BV = I_n$.

Exercice 6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Donner le rang de $com(A)$ en fonction de celui de A. On pourra distinguer les cas $rg(A) = n$, $rg(A) < n - 1$ et $rg(A) = n - 1$.

Exercice 7

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $f^3 + f = 0$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus Im(f)$.
2. À partir de mainteneant, on suppose f non nul.
   - *a.* Justifier l'existence d'un vecteur non nul u de $Im(f)$.
   - *b.* Montrer que $f^2(u) = -u$.
   - *c.* montrer que la famille $(u, f(u))$ est libre. Que peut-on déduire sur $rg(f)$.
3. On suppose que $rg(f) = 3$.
   - *a.* Montre que $f^2 = -Id$.
   - *b.* Que peut-on en conclure sur les dimensions de $Im(f)$ et $\ker(f)$?
4. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

BARRY
EL BARROS

epo-cpge-pcsi Année Académique : 2020-2021

Travaux Dirigés D'Algèbre 2

Exercice 1

Soit M une matrice carrée de taille $n \geq 2$ à coefficient réels de rang 1.

1. Montrer qu'il existe deux vecteurs colonnes U et V tels que $M = U^tV$.
2. Exprimer les puissances entières de M en fonction de M et $tr(M)$.
3. À quelle condition une matrice de rang 1 est-elle une matrice de projection ?
4. Quelle sont les matrices de rang 1 qui sont nilpotentes ?

Exercice 2

Soit A une matrice réelle. Montrer que $rg(A) = rg(A^tA) = rg(AA^t)$.

Exercice 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et $U \in \mathcal{M}^{n,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que $AU = \lambda U$. Montrer que qu'il existe $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nul tal que $A^tV = \lambda V$.

Exercice 4

Soit A une matrice carrée inversible d'ordre $n > 1$. Montrer que $com(com(A)) = \det(A)^{n-2}A$.

Exercice 5

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

1. montrer que $\det(A),\ \det(B) \in \mathbb{Z}$.
2. On suppose que $\det(A)$ et $\det(B)$ sont premiers entre eux. montrer qu'il existe deux matrices $U, V \in M_n(\mathbb{Z})$ telles que $AU + BV = I_n$.

Exercice 6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Donner le rang de $com(A)$ en fonction de celui de A. On pourra distinguer les cas $rg(A) = n$, $rg(A) < n-1$ et $rg(A) = n-1$.

Exercice 7

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $f^3 + f = 0$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus Im(f)$.
2. À partir de mainteneant, on suppose f non nul.
   a. Justifier l'existence d'un vecteur non nul u de $Im(f)$.
   b. Montrer que $f^2(u) = -u$.
   c. montrer que la famille $(u, f(u))$ est libre. Que peut-on déduire sur $rg(f)$.
3. On suppose que $rg(f) = 3$.
   a. Montre que $f^2 = -Id$.
   b. Que peut-on en conclure sur les dimensions de $Im(f)$ et $\ker(f)$?
4. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

BARRY
EL BARROS

Travaux Dirigés D'Algèbre 2

Exercice 1

Soit M une matrice carrée de taille $n \geq 2$ à coefficient réels de rang 1.

1. Montrer qu'il existe deux vecteurs colonnes U et V tels que $M = U^tV$.
2. Exprimer les puissances entières de M en fonction de M et $tr(M)$.
3. À quelle condition une matrice de rang 1 est-elle une matrice de projection ?
4. Quelle sont les matrices de rang 1 qui sont nilpotentes ?

Exercice 2

Soit A une matrice réelle. Montrer que $rg(A) = rg(A^tA) = rg(AA^t)$.

Exercice 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et $U \in \mathcal{M}^{n,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que $AU = \lambda U$. Montrer que qu'il existe $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nul tal que $A^tV = \lambda V$.

Exercice 4

Soit A une matrice carrée inversible d'ordre $n > 1$. Montrer que $com(com(A)) = \det(A)^{n-2}A$.

Exercice 5

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

1. montrer que $\det(A),\ \det(B) \in \mathbb{Z}$.
2. On suppose que $\det(A)$ et $\det(B)$ sont premiers entre eux. montrer qu'il existe deux matrices $U, V \in M_n(\mathbb{Z})$ telles que $AU + BV = I_n$.

Exercice 6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Donner le rang de $com(A)$ en fonction de celui de A. On pourra distinguer les cas $rg(A) = n,\ rg(A) < n-1$ et $rg(A) = n-1$.

Exercice 7

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $f^3 + f = 0$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus Im(f)$.
2. À partir de mainteneant, on suppose f non nul.
   a. Justifier l'existence d'un vecteur non nul u de $Im(f)$.
   b. Montrer que $f^2(u) = -u$.
   c. montrer que la famille $(u, f(u))$ est libre. Que peut-on déduire sur $rg(f)$.
3. On suppose que $rg(f) = 3$.
   a. Montre que $f^2 = -Id$.
   b. Que peut-on en conclure sur les dimensions de $Im(f)$ et $\ker(f)$?

Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

BARRY

EL BARRO

epo cpge pcsi — Année Académique : 2020-2021

Travaux Dirigés D'Algèbre 2

Exercice 1

Soit M une matrice carrée de taille $n \geq 2$ à coefficient réels de rang 1.

1. Montrer qu'il existe deux vecteurs colonnes U et V tels que $M = U^tV$.
2. Exprimer les puissances entières de M en fonction de M et $tr(M)$
3. À quelle condition une matrice de rang 1 est-elle une matrice de projection ?
4. Quelle sont les matrices de rang 1 qui sont nilpotentes ?

Exercice 2

Soit A une matrice réelle. Montrer que $rg(A) = rg(A^tA) = rg(AA^t)$.

Exercice 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et $U \in \mathcal{M}^{n,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que $AU = \lambda U$. Montrer que qu'il existe $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nul tal que $A^tV = \lambda V$.

Exercice 4

Soit A une matrice carrée inversible d'ordre $n > 1$. Montrer que $com(com(A)) = \det(A)^{n-2}A$.

Exercice 5

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

1. montrer que $\det(A)$, $\det(B) \in \mathbb{Z}$
2. On suppose que $\det(A)$ et $\det(B)$ sont premiers entre eux. montrer qu'il existe deux matrices $U, V \in M_n(\mathbb{Z})$ telles que $AU + BV = I_n$

Exercice 6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Donner le rang de $com(A)$ en fonction de celui de A. On pourra distinguer les cas $rg(A) = n$, $rg(A) < n-1$ et $rg(A) = n-1$.

Exercice 7

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $f^3 + f = 0$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus Im(f)$
2. À partir de mainteneant, on suppose f non nul.
   a. Justifier l'existence d'un vecteur non nul u de $Im(f)$
   b. Montrer que $f^2(u) = -u$.
   c. montrer que la famille $(u, f(u))$ est libre. Que peut-on déduire sur $rg(f)$.
3. On suppose que $rg(f) = 3$.
   a. Montre que $f^2 = -Id$.
   b. Que peut-on en conclure sur les dimensions de $Im(f)$ et $\ker(f)$?

Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ecole Polytechnique de Ouagadougou
E.P.O

Année 2021
$PCSI_1$: C & D

Durée : 180 minutes

Composition du premier trimestre
Epreuve d'algèbre1

EXERCICE1 : (4 points = 3 + 1)

1 On considère l'équation suivante :

$$74x + 54y = 2000$$

a) Montrer que l'équation admet des solutions dans $\mathbb{Z}$.

b) Résoudre l'équation et donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$.

c) Trouver la solution $(x,\ y)$, telle que $x > 0$ et $y > 0$.

2 Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n,
$12^n \quad 7^n$ est un multiple de 5.

EXERCICE2 : (3 points)

Résoudre le système

$$\begin{cases} pgcd(x,\ y) = 18 \\ ppcm(x,\ y) = 540 \end{cases}$$

où x et y sont des entiers naturels.

EXERCICE3 : (3 points = 1,5 + 1,5)

1 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$ soit divisible par $(X-1)^2$.

2 Déterminer le reste de la division euclidienne de
$P(X) = (X-2)^{n+1} - (X+3)^n$ par $(X-2)^2(X+3)$.

EXERCICE4 : (3 points = 1,5 + 1,5)

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$F = \frac{4X^3}{(X^2-1)^2} \quad ; \quad G = \frac{X^4+1}{(X+1)^2(X^2+1)}$$

EXERCICE8

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure de $\mathbb{R}-espace\ vectoriel$, on considère les trois vecteurs $u_1 = (1,1,2)$, $u_2 = (1,-1,0)$, $u_3 = (0,0,-1)$ et le vecteur $x = (1,1,1)$.

1 Quelles sont les coordonnées de x dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$?

2 Montrer que les vecteurs u_1, u_2 et u_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$.

3 Déterminer les coordonnées du vecteur x dans cette nouvelle base.

EXERCICE9

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure usuelle de $\mathbb{R}-espace\ vectoriel$, on considère les sous-espaces vectoriels suivants :

$F = vect\Big((1,2,0,1),(2,1,3,1),(2,4,0,2)\Big)$;

$G = vect\Big((1,2,1,0),(-1,1,1,1),(2,-1,0,1)\Big)$.

1 Calculer $\dim_{\mathbb{R}}(F)$, $\dim_{\mathbb{R}}(G)$; trouver une base de F et une base de G.

2 Déterminer une base (F + G) et une base de $F \cap G$.