27/6/22

EPO/CPGE/MPSI-1A

Année Académique : 2021-2022
Module : Analyse II

Contrôle d'Analyse II

:04 heures

Exercice 1 : Maniement et Connaissance des Concepts Fondamentaux d'Analyse II (06 pts)

$\boxed{1}$ Soient $a, b \in \mathbb{R}$ (avec $a < b$), $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ et f une fonction réelle continue sur $[a, b]$.

Montrer que il existe une fonction en escalier ξ sur $[a, b]$ telle que : $\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - \xi(x)| \leq \omega$. 1 pt

$\boxed{2}$ Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (avec $0 < \alpha < \beta$). On pose : $I(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \theta\sqrt{(\theta - \alpha)(\beta - \theta)}d\theta$.

(a) Montrer que : $\frac{\alpha(\beta - \alpha)^2\pi}{8} \leqslant I(\alpha, \beta) \leqslant \left[\frac{1}{18}(\beta^3 - \alpha^3)(\beta - \alpha)^3\right]^{\frac{1}{2}}$ 0,5 pt

(b) Calculer $I(\alpha, \beta)$ (*on pourra commencer par le changement de variable suivant :* $t = \alpha + \beta - \theta$). 1

$\boxed{3}$ Énoncer, puis démontrer rigoureusement le Théorème de CAUCHY pour les intégrales impropres. 1

$\boxed{4}$ Étudier la nature des intégrales suivantes :

(a) $\int_2^{+\infty} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z\right) e^{\frac{1}{z}}}{(\ln(z^2 + z))^2}dz$; 0,1

(b) $\int_0^1 \frac{1}{\arccos(1 - x)}dx$. 0,1

$\boxed{5}$ Étudier la nature des séries numériques suivantes et calculer leur somme en cas de convergence :

(a) $\sum_{n\geq 0} 2021^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\left(\frac{2021}{2022}\right)^k$; 0,1

(b) $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(2^{n+1}3^{2-n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right)$. 0,1

$\boxed{6}$ Déterminer les fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation :

$$\begin{vmatrix} f' & f'' & f \\ f'' & f & f' \\ f & f' & f'' \end{vmatrix} = 0.$$

1

Exercice 2 : Restitution Organisée de Connaissances (06 pts)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $g \in \mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$, et $f \in \mathscr{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$. Pour tout $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on considère :

$$a_n = \int_0^1 g(t)t^n dt \qquad \text{et} \qquad b_m(\alpha) = \frac{1}{m^\alpha}\int_0^{\frac{1}{m}} g(t^m)dt.$$

(1) Calculer la limite de la suite de terme générale : $u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n+1}\right)f'\left(\frac{k+1}{n+1}\right)$; 1

(2) Pour $0 < \alpha < 1$, on pose $a_n(\alpha) = \int_0^\alpha g(t)t^n dt$. Montrer que la série $\sum a_n(\alpha)$ converge vers $\int_0^\alpha \frac{g(x)}{1-x}dx$ 0,1

(3) On suppose que $g(1) \neq 0$.

27/01/22

a) Montrer que si $g(1) > 0$, alors il existe $\beta \in]0,1[$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad a_n \geqslant a_n(\beta) + \dfrac{g(1)}{2}\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{\beta^n}{n}\right)$. 0,5 + 0,5

b) En déduire la nature de la série $\sum a_n$? 0,5

(4) Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par : $g(0) = 1$, $\quad g(1) = 0$, et $\quad g(x) = \dfrac{-x}{\ln(1-x)}$ si $x \in]0,1[$.

Montrer que $g \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R}_+)$, puis étudier la nature de la série $\sum a_n$ (associée à cette fonction g). 0,5 + 0

(5) Montrer que si g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ alors la série $\sum a_n$ converge si et seulement si $g(1) = 0$. 1

(6) On suppose que $g(0) \neq 0$. Étudier la nature de la série $\sum\limits_{m \in \mathbb{N}^*} b_m(\alpha)$. 1

Problème : Étude d'une Fonction Intégrale (08+10%(Bonus):= 10 pts) +2 = 12 (20%

Soient un réel x et p un entier strictement positif, on pose : $M_p(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^p(t)}$.

1°) Calculer $M_1(x)$ et $M_2(x)$. 0,5 + 0,5

2°) Étudier la fonction $M_1 : x \longrightarrow M_1(x)$ (on tracera sa courbe dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$). 1

3°) (a) Trouver une relation entre $M_{p+2}(x)$ et $M_p(x)$ (on pourra faire des intégrantions par parties). 0,5

(b) En déduire $M_3(x)$ et $M_4(x)$. 0,25 + 0,25

4°) On considère la fonction $M_p : x \longrightarrow M_p(x)$.

(a) Étudier la parité et la périodicité de la fonction M_p. 0,5

(b) Démontrer que M_p est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. 0,5

5°) Montrer que la dérivée première de M_p est une solution de l'équation différentielle suivante :

$$(E) : \operatorname{ch}^2(x)y'' + \frac{p}{2}\operatorname{sh}(2x)y' + py = 0.$$ 1

6°) Donner le développement limité de M_p d'ordre 3 au voisinage de 0. 1

7°) Étudier le sens de variation de M_p. 0,5

8°) On se propose, pour p fixé, d'étudier la convergence de la suite $(I_n)_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = M_p(n)$.

(a) Démontrer que la suite $(I_n)_n$ est monotone. 0,5

(b) Démontrer que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\quad \dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)} \leq 2e^{-t}$. En déduire la nature de la suite $(I_n)_n$. 0,25 + 0,25

9°) On pose, sous réserve d'existence, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $J_n = \lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^n(t)}$. On posera $J_n := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}^n(t)}$.

(a) Démontrer l'existence de J_n. 0,5

(b) Calculer : i) J_1 ; $\quad$ ii) J_2 ; $\quad$ et $\quad$ iii) J_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

0,5 0,5

J_{2n} 0,5

J_{2n+1} 0,5

Proposition de Corrigé du Contrôle d'Analyse II

27/05/22

Exo 1 : Maniement et Connaissance des Concepts Fondamentaux d'Analyse II

1] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ (avec $a < b$), $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$

Montrons qu'il existe une fonction en escalier ξ sur $[a,b]$ telle que : $\forall x \in [a,b], \; |f(x) - \xi(x)| \leq \omega$.

P1) f étant cont sur le segm $[a,b]$ alors elle y est uniformem cont d'après le théorème HEINE (Eduard HEINE (1821-1881)). Par conséquent, il existe $\eta > 0$ tque

$\forall (x,y) \in [a,b]^2, \; (\text{si } |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \omega)$ (E1)

P2) Posons $N = E\left(\frac{b-a}{\eta}\right) + 1$. (E2)

01/44

Par définition de la fonction partie entière, on en déduit que : $\frac{b-a}{N} \leq \eta$ (E3)

Pour $\forall n \in [\![0, N]\!]$, posons $x_n = a + n\frac{b-a}{N}$. (E4)

Ainsi la famille $(x_n)_{n \in [\![0,N]\!]}$ est une subdivision régulière du segm $[a,b]$ de $h = \frac{b-a}{N}$.

(P3) Soit $x \in [a, b[$. Alors $\exists! n \in [\![0, N-1]\!]$ tq $x_n \leq x < x_{n+1}$. Pour $x \in [a, b[$, on pose $\varphi(x) = f(x_n)$ (E5)

27/6/22

. Et $x = b$, on pose $\varphi(x) = \varphi(b) = f(b)$ (E6)

La fonction φ ainsi construit est en escalier sur $[a, b]$

(P4) Soit $x \in [a, b]$.

Cas 1 : Pour $x \in [a, b[$. Coe en (P3) $\exists! n\ [\![0, N-1]\!]$ tq : $x_n \leq x < x_{n+1} \Rightarrow 0 \leq x - x_n < x_{n+1} - x_n$ (E7)

Dans (E4), on trouve : $x_{n+1} - x_n = \frac{b-a}{N}$ (E8)

En combinant (E3), (E7) et (E8), on trouve :

$0 \leq x - x_n < x_{n+1} - x_n = \frac{b-a}{N} \leq \eta$. On en déduit d'après (E1) que $|f(x) - f(x_n)| = |f(x) - \varphi(x)| \leq \omega$ (E9)

Cas 2 : Pour $x = b$, on a : $|f(x) - \varphi(x)| = |f(b) - f(b)| = 0 <$ (E10)

En résumé, (E9) et (E10), on a : $\forall x \in [a, b]$

$|f(x) - \varphi(x)| \leq \omega$. (E11)

Concl : De (P1), (P2), (P3) et (P4) on en déduit qu'il $\exists$ une fcte en escalier φ sur $[a, b] \mid \forall x \in [a, b], |f(x) - \varphi(x)| \leq \omega$.

$\frac{02}{44}$

2] Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ avec $\alpha < \beta$. On pose

$$I(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta \theta\sqrt{(\theta-\alpha)(\beta-\theta)}\,d\theta$$

(a) Montrons que: $\frac{\alpha(\beta-\alpha)^2\pi}{8} \leq I(\alpha,\beta) \leq \left[\frac{1}{18}(\beta^3-\alpha^3)(\beta-\alpha)^3\right]^{\frac{1}{2}}$

a1)

$\forall \theta\ [\alpha,\beta]$ on a: $\alpha\sqrt{(\theta-\alpha)(\beta-\theta)} \leq \theta\sqrt{(\theta-\alpha)(\beta-\theta)}$

$$\Rightarrow \quad J(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta \alpha\sqrt{(\theta-\alpha)(\beta-\theta)}\,d\theta \leq I(\alpha,\beta) \qquad (R1)$$

$$J(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta \alpha\sqrt{-\theta^2+(\alpha+\beta)\theta-\alpha\beta}\,d\theta$$

$$= \alpha\int_\alpha^\beta \left(\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)\sqrt{1-\left(\frac{2\theta-\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\right)^2}\,d\theta$$

03/44

Posons $\quad t = \frac{2\theta-\alpha-\beta}{\beta-\alpha} \Rightarrow dt = \frac{2}{\beta-\alpha}d\theta$

$\Rightarrow d\theta = \frac{\beta-\alpha}{2}dt$ $\quad \begin{cases} \text{si } \theta=\alpha \Rightarrow t=-1 \\ \text{si } \theta=\beta \Rightarrow t=1 \end{cases}$

D'où : $J(\alpha,\beta) = \frac{\alpha(\beta-\alpha)^2}{4}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt$

Soit alors : $J(\alpha,\beta) = \frac{\alpha}{2}(\beta-\alpha)^2 \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt$ (R2)

Faisons le changem de variable $t = \sin(u)$

$\Rightarrow u = \arcsin(t) \Rightarrow du = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

Pour $t=0 \Rightarrow u=0$ et Pour $t=1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-t^2)\, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(u))\, du$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)\, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos(2u))du$$

$$= \frac{1}{2}\left[u + \frac{1}{2}\sin(2u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

0,4
0,4

On en déduit que : $J(\alpha,\beta) = \frac{\alpha(\beta-\alpha)^2 \pi}{8}$ (R3

2)

En appliquant l'Inégalité de Cauchy-Schwa

à l'intégrale $I(\alpha,\beta)$, on obtient :

$$I(\alpha,\beta) \leq \left(\int_\alpha^\beta \theta^2 d\theta\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\alpha^\beta (\theta-\alpha)(\beta-\theta)\, d\theta\right.$$

Scanné avec CamScanner

soit alors : $J(\alpha,\beta) = \frac{\alpha}{2}(\beta-\alpha)^2 \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt$ (R2)

Faisons le changement de variable $t = \sin(u)$

$\Rightarrow u = \arcsin(t) \Rightarrow du = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

Pour $t=0 \Rightarrow u=0$ et pour $t=1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-t^2)\, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(u))\, du$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)\, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos(2u))du$$

$$= \frac{1}{2}\left[u + \frac{1}{2}\sin(2u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

OK 4/4

On en déduit que : $J(\alpha,\beta) = \frac{\alpha(\beta-\alpha)^2\pi}{8}$ (R3)

2.2) En appliquant l'Inégalité de Cauchy-Schwarz à l'intégrale $I(\alpha,\beta)$, on obtient :

$$I(\alpha,\beta) \leq \left(\int_\alpha^\beta \theta^2\, d\theta\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\alpha^\beta (\theta-\alpha)(\beta-\theta)\, d\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

Théorème (Critère de Cauchy pour les Intégrale Génér…

Soit f une application localement intégrable sur $]a,b[$ (où $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a<b$). L'intégrale impropre

$$\int_a^b f \text{ converge} \iff (\forall \varepsilon>0)(\exists A\in\mathbb{R})(\forall u,v\in]a,b[)\left(A<u<v \Rightarrow \left|\int_u^v f(t)\,dt\right| < \varepsilon\right)$$

07/44

■ Ingrédient : La Convergence des suites de Cauchy et les théorèmes de convergence monotone

■ Condition Nécessaire

Supposons que $\int_a^b f$ converge $\Rightarrow F :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$

admet une limite finie l en b c-à-d

$$l = \lim_{x\to b} F(x) = \lim_{x\to b} \int_a^x f \quad (C1) \iff$$

$(\forall \varepsilon>0)(\exists A\in\mathbb{R})(A<x<b \Rightarrow |F(x)-l|<\frac{\varepsilon}{2})$

En particulier avec l'inégalité triangulaire, on a

$(\forall \varepsilon>0)(\exists A\in\mathbb{R})(A<u<v<b \Rightarrow |F(v)-F(u)|<\varepsilon$

Pour $\theta = \alpha \Rightarrow t = \beta$ et pour $\theta = \beta \Rightarrow t = \alpha$

Ainsi, on trouve:

$$I(\alpha,\beta) = \int_{\beta}^{\alpha} (\alpha+\beta-t)\sqrt{(\beta-t)(t-\alpha)}\,(-dt)$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} (\alpha+\beta)\sqrt{(t-\alpha)(\beta-t)}\,dt - \int_{\alpha}^{\beta} t\sqrt{(t-\alpha)(\beta-t)}\,dt$$

$$= (\alpha+\beta)\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(t-\alpha)(\beta-t)}\,dt - I(\alpha,\beta)$$

$$\Rightarrow \quad I(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(t-\alpha)(\beta-t)}\,dt$$

$\frac{06}{44}$

$\Rightarrow$ D'après les calculs effectués en (a), on retrouve que: $I(\alpha,\beta) = \frac{1}{2\alpha}(\alpha+\beta)\,J(\alpha,\beta)$

Il vient alors alors le résultat de (R3) que:

$$\boxed{I(\alpha,\beta) = \frac{\pi}{16}(\alpha+\beta)(\beta-\alpha)^2} \quad (R8)$$

(a2.2) on a : $\int_\alpha^\beta (\theta-\alpha)(\beta-\theta)d\theta = \int_\alpha^\beta (-\theta^2+(\alpha+\beta)\theta-\alpha\beta)d\theta$

$$\int_\alpha^\beta (\theta-\alpha)(\beta-\theta)d\theta = \left[-\frac{1}{3}\theta^3+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\theta^2-\alpha\beta\theta\right]_\alpha^\beta$$

$$\int_\alpha^\beta (\theta-\alpha)(\beta-\theta)d\theta = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \quad (R6)$$

En combinant (R4), (R5) et (R6) on obtient :

$$\Rightarrow \quad I(\alpha,\beta) \leq \left[\frac{1}{18}(\beta^3-\alpha^3)(\beta-\alpha)^3\right]^{\frac{1}{2}} \quad (R7)$$

Concl : (a1), (a2), des relations (R1) - (R7), on

$\frac{05}{44}$

en déduit que :

$$\frac{\alpha(\beta-\alpha)^2\pi}{8} \leq I(\alpha,\beta) \leq \left[\frac{1}{18}(\beta^3-\alpha^3)(\beta-\alpha)^3\right]^{\frac{1}{2}}$$

(b) Calculons $I(\alpha,\beta)$

faisons le changmt $t=\alpha+\beta-\theta \Rightarrow dt=-d\theta$

Par définition $F(v)-F(u) = \int_a^v f(t) - \int_a^u f = \int_u^v f$ D'où

$(\forall \varepsilon>0)(\exists A\in\mathbb{R})\left(A<u<v<b \Rightarrow \left|\int_u^v f(t)\,dt\right|<\varepsilon\right)$

Condition Suffisante

Supposons que : $(\forall\varepsilon>0)(\exists A\in\mathbb{R})\left(A<u<v<b \Rightarrow \left|\int_u^v f\right|<\varepsilon\right)$

Soit (x_n) une suite d'élt de $]a,b[$ tel que $\lim_{n\to+\infty} x_n = b$. (une telle suite est nécessairement $\nearrow$)

Soit $\varepsilon>0$. Alors $\exists N\in\mathbb{N} \mid \forall n\in\mathbb{N},\ n>N$
$\Rightarrow x_n > A \in]a,b[$ car $(x_n \xrightarrow[n\infty]{} b)$.

Ainsi pour $\forall m,p\in\mathbb{N}$ avec $N<m<p$ on a : $A < x_m < x_p$ (En effet la suite $(x_n)_n$ est $\nearrow$),

Par conséquence d'après l'hypothèse, on a : $\left|\int_{x_m}^{x_p} f\right|<\varepsilon$

08/44

En résumé : on a prouvé que :

$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall p,\forall m\in\mathbb{N})\left(N<m<p \Rightarrow \left|\int_{x_m}^{x_p} f\right|<\varepsilon\right)$,

En reprenant les notations précédentes, on en déduit que la suite réelle $(F(x_n))_n$ est de Cauchy donc elle est alors convergente c-à-d

$\exists\, l \in \mathbb{R}$ / $\lim\limits_{n \to +\infty} F(x_n) = l \Rightarrow \int_a^b f = l$ (C3)

Car $\lim x_n = b$ (par construction. voir (C2)).

Concl : (C3) $\Rightarrow$ montre que $\int_a^b f$ converge.

Rmq : Cette preuve a été fait sous l'hypothèse que $\int_a^b f$ admet b comme point incertain.

Dans le cas où a est point incertain se fait de manière analogue.

09/40

. Lorsque a et b sont 2 pts points incertains, on scinde $\int_a^b f$ en deux intégrales de un seul point incertain chacune (avec la relat° de Chasles) ~~et~~ on procède de manière analogue sur chacune de ces intégrales impropres pour étudier leur convergence.

e.

Étude de la nature d'intégrale Impropre

$$A = \int_{2}^{+\infty} R(z)\,dz \quad \text{où} \quad R : [2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$z \longmapsto \frac{\left[e - \left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right] e^{\frac{1}{z}}}{\left(\ln(z^2+z)\right)^2}$$

i) A présent un seul point incertain à savoir : $+\infty$

ii) Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$* \quad e - \left(1+\frac{1}{z}\right)^{z} = e - e^{z\ln(1+z)} = e - e^{z\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2z} + o\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)}$$
$$= e - e^{1 - \frac{1}{2z} + o\left(\frac{1}{z}\right)} = e - e \cdot e^{-\frac{1}{2z} + o\left(\frac{1}{z}\right)}$$
$$= e - e\left(1 - \frac{1}{2z} + o\left(\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{e}{2z} + o\left(\frac{1}{z}\right)$$

Il vient que : $e - \left(1+\frac{1}{z}\right)^{z} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{2z}$ $(\Delta 1)$ $\frac{10}{44}$

* Par ailleurs, au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\ln(z^2+z) = 2\ln(z) + \ln\left(1+\frac{1}{z}\right) = 2\ln(z) + \frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right)$$

D'où : $\ln(z^2+z) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln(z)$ $(\Delta 2)$

* De plus, on a : $e^{\frac{1}{z}} \underset{+\infty}{\sim} 1$ $(\Delta 3)$ car $\frac{1}{z} \xrightarrow[z \to \infty]{} 0$

Ensuite De $(\Delta 1)$, $(\Delta 2)$ et $(\Delta 3)$, on en déduit que :

$$R(z) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{8z^2 \ln^2(z)} \quad (\Delta 4)$$

de la série de terme gle $\frac{\exp(2021/2022)}{2021^n}$

...VERGENTE car Géométrique.

...déduit que la série numérique de gle a_n est convergente d'après le ...ème de Rajaalt (des séries numérique à ...es positifs)

Calcul de la somme de $\sum_{n\geq 0} a_n$.

...r cela, nous allons utiliser la méthode du ...duit de Cauchy des séries numérique.

13/44

...insi, on remarque que l'on peut ré-écrire la série sous les formes suivantes :

$$\sum_{n\geq 0} a_n = \sum_{n\geq 0} 2021^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{2021}{2022}\right)^k = \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} \frac{(2022)^{-k}}{k!}\left(\frac{1}{2021}\right)^{n-k}$$

$$= \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \quad \text{où} \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \\ u_n = \frac{(2022^{-1})^k}{k!} \\ v_n = \left(\frac{1}{2021}\right)^n \end{cases}$$

$$= \left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)\left(\sum_{n\geq 0} v_n\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{2022}\right)\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2021}}\right)$$

Conclusion : $\sum_{n\geq 0} 2021^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\frac{2021}{2022}\right)^k}{k!} = \frac{2021}{2020} e^{\frac{1}{2022}}$!

Σ

$= \ln$

$= \ln($

où $\sum_{n\geq 2}$

Concl : De (

5 Etude de la nature des séries numérique et Calcul de somme.

(a) $$\sum_{n\geq 0} 2021^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{2021}{2022}\right)^k = \sum_{n\geq 0} a_n \text{ où}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 2021^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{2021}{2022}\right)^k$$

$\frac{12}{44}$

<u>a.1</u> : Nature de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$.

La fonct $x \longmapsto e^x$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + o(x^n) \Rightarrow \left|e^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

(on utilise le $DL_n(0, \exp)$).

On trouve alors : $\forall x \in \mathbb{R}$: $e^x = \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$ (I)

En particulier pour $x \leftarrow \frac{2021}{2022}$ avec (I), on a :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{2021}{2022}\right)^k \leq \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\left(\frac{2021}{2022}\right) = \exp\left(\frac{2021}{2022}\right)$$

soit alors $a_n = 2021^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{2021}{2022}\right)^k \leq \frac{\exp\left(\frac{2021}{2022}\right)}{2021^n}$

La Nature de la série de terme gle $\frac{\exp(2021/2022)}{2021^n}$

est CONVERGENTE car Géométrique.

Bertrand intégrable au ...
et $\beta = 2 \in \mathbb{R}$.

Il vient alors que R est intégrable au voisinage de $+\infty$ d'après le Théorème d'Equivalence. Ainsi, on en déduit que l'intégrale Généralisées A converge.

b) $B = \int_0^1 S(x)\,dx$ avec $S : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto S(x) = \frac{1}{\arccos(1-x)}$

11/44

(iii) B présente un seul pt de singularité : 0

(iv) Au voisinage de 0, on a : $\arccos(1-x) \xrightarrow[x \mapsto 0]{} 0$

d'où : $\arccos(1-x) \underset{0}{\sim} \sin(\arccos(1-x)) \underset{0}{\sim} \sqrt{1-(1-x)^2}$

soit alors : $\arccos(1-x) \underset{0}{\sim} \sqrt{2x - x^2} \underset{0}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{x}$

Par conséquent : $S(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{x^{1/2}}$ et $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 < +\infty$

Concl : S est équivalente à une fct intégrable sur $]0,1]$ d'où elle est aussi intégrable sur $]0,1]$

Il s'ensuit que B est convergente.

La somme partielle de cette série est donnée par:

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \beta_k = \sum_{k=2}^{n} \left[\left(\ln(k+1) - \ln(k)\right) - \left(\ln(k) - \ln(k-1)\right) \right]$$

$$= \left[\left(\ln(3) - \cancel{\ln(2)}\right) - \left(\ln(2) - \ln(1)\right)\right] +$$

$$\left[\left(\cancel{\ln(4)} - \cancel{\ln(3)}\right) - \left(\cancel{\ln(3)} - \cancel{\ln(2)}\right)\right] +$$

$$\left[\left(\cancel{\ln(5)} - \cancel{\ln(4)}\right) - \cancel{\left(\ln(4) - \ln(3)\right)}\right] +$$

16/4/4

$$\vdots$$

$$\left[\left(\ln(n+1) - \ln(n)\right) - \cancel{\left(\ln(n) - \ln(n-1)\right)}\right]$$

$$= \ln(n+1) - \ln(n) - \left(\ln(2) - \ln(1)\right)$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln(2) \xrightarrow[n\infty]{} -\ln(2)$$

d'où $\sum_{n\geq 2} \beta_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = -\ln(2)$

Concl 2 : De (b.2.1) et (b.2.2) $\Rightarrow \sum_{n\geq 2} \delta_n = 24 - \ln(2)$

Concl 1 : De (b.1.1) et (b.1.2) on en déduit que la série de terme général $\delta_n = \alpha_n + \beta_n$ est convergente (car somme de telles séries).

(b.2) Calcul de la somme de $\sum_{n\geq 2} \delta_n$

b2.1. Calcul de $\sum_{n\geq 2} \alpha_n$

$$\sum_{n\geq 2} \alpha_n = \sum_{n\geq 2} 2^{n+1} 3^{2-n} = \sum_{n\geq 2} 2^1 . 3^2 . \left(\frac{2}{3}\right)^n = 18 \sum_{n\geq 2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

on trouve ainsi une série géométrique de raison $q = \frac{2}{3} < 1$ et dont la somme est donnée par :

$$\sum_{n\geq 2} \alpha_n = 18 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 24$$

$\frac{15}{44}$

b2.2. Calcul de $\sum_{n\geq 2} \beta_n$

Si $n \geq 2$ $\beta_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln(n-1) + \ln(n+1) - 2\ln n$

$$= \left(\ln(n+1) - \ln(n)\right) - \left(\ln(n) - \ln(n-1)\right)$$

on trouve ainsi une somme télescopique

(b) $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(2^{n+1}3^{2-n}+\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right)$

Posons $n\in\mathbb{N}^*$ et $n\geq 2$: $\begin{cases}\alpha_n = 2^{n+1}3^{2-n} ;\\ \beta_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right).\\ \delta_n = \alpha_n + \beta_n\end{cases}$

Il vient que : $\sum_{n\geq 2}\delta_n$

Converge sssi chacune des série $\sum_{n\geq 2}\alpha_n$ et $\sum_{n\geq 2}\beta_n$ l'est

b.1) Nature de la série $\sum_{n\geq 2}\delta_n$

14/44

b.1.1 La nature de $\sum_{n\geq 2}\alpha_n$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, on a $\alpha_n>0$ et $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\frac{2}{3}\xrightarrow[n\infty]{}\frac{2}{3}<1$

On en déduit d'après la Règle de D'Alembert que la série de terme α_n est convergente.

b.1.2 La nature de $\sum_{n\geq 2}\beta_n$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ au voisinage de $+\infty$ $\beta_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}$
et la série $\sum\frac{1}{n^2}$ est de type Riemann Convergente
on en déduit d'après le Théorème d'équivalence que la série de terme géné β_n est convergente.

$\boxed{6}$ Déterminons les fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle :

(i) <u>Calcul du déterminant</u>

$$(E) \quad \begin{vmatrix} f' & f'' & f \\ f'' & f & f' \\ f & f' & f'' \end{vmatrix} = 0$$

en faisant $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$, $L_2 \leftarrow L_2$, $L_3 \leftarrow L_3$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} f+f'+f'' & f+f'+f'' & f+f'+f'' \\ f'' & f & f' \\ f & f' & f'' \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (f+f'+f'') \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f'' & f & f' \\ f & f' & f' \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} C_1 \leftarrow C_1 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{cases}$$

15/44

$$\Rightarrow (f+f'+f'') \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f'' & f-f'' & f'-f'' \\ f & f'-f & f''-f \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (f+f'+f'') \begin{vmatrix} f-f'' & f'-f'' \\ f'-f & f''-f \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow -(f+f'+f'')(f^2+f'^2+f''^2-ff'-ff''-f'f'')=0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(f+f'+f'')[(f^2-2ff'+f'^2)+(f^2-2ff''+f''^2)$

$+(f'^2-2f'f''+f''^2)]=0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(f+f'+f'')[(f-f')^2+(f-f'')^2+(f'-f'')^2]=0$

$(E) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(f+f'+f'')[(f-f')^2+(f-f'')^2+(f'-f'')^2]=0$ (RF)

ii) Analyse d'equation équivalente à (E) : (RF)

$\frac{18}{44}$

(RF) $\Leftrightarrow \forall x \in D=\mathbb{R}$, on a :

$f(x)+f'(x)+f''(x)=0$ ou $f(x)=f'(x)=f''(x)$ (RF

iii) Analyse des solutions fournies par (RF) : (RF

Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)+f'(x)+f''(x)=0$ (RF

Procédons par absurde, supposons qu'il $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$

tq : $f(x_0)+f'(x_0)+f''(x_0) \neq 0$. (RF4)

Pour $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ alors f, f' et f'' sont continue

par suite, il vient que la somme $f + f' + f''$ est continue.

Par conséquent, compte tenu de (RF4), on en déduit que

$\exists\, U \in V(x_0)$ un ouvert / $\forall x \in U$, on a :

$f(x) + f'(x) + f''(x) \neq 0$ (RF5)

$\frac{19}{44}$

Par conséquent d'après (RF), on en déduit que :

$\forall x \in U$, $f(x) = f'(x) = f''(x) \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{R} \,/\, f(x) = ke^x$ (RF6)

Posons $M = \sup(U) \notin U$ car U est un ouvert.

Par passage à la limite quand $x \longrightarrow M$, on a :

$ke^M + ke^M + ke^M = 3ke^M = 0$ car $M \notin U$

D'où $k = 0 \Rightarrow$ (RF6) $f \equiv 0 \Rightarrow$

$\forall x \in U$ $f(x) + f'(x) + f''(x) = 0$ ce qui est absurde d'après (RF5).

On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f'(x) + f''(x) = 0$ (RF7) la somme de Riemann que :

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n+1}\right) f'\left(\frac{k}{n+1}\right) = \int_0^1 f'(x) f(x)dx$$

$$\lim V_n = \left[\frac{1}{2} f(x)^2\right]_0^1 = \frac{f(1)^2 - f^2(0)}{2} \quad (*)$$

(1.b) Montrons que $\lim V_n = \lim U_n$ $\frac{22}{44}$

$\forall n\in\mathbb{N}$, on a : $U_n - V_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1} f\left(\frac{k}{n+1}\right)\left(f'\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f'\left(\frac{k}{n+1}\right)\right)$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a $\forall x,y\in[0,1]$, $|f'(x) - f'(y)| \leq M_2|x-y|$ où

$M_2 = \max_{[0,1]} |f''| \in\mathbb{R}$ car f'' est continue sur $[0,1]$.

Il s'ensuit $\forall (k,n)\in[\![0,n]\!]\times\mathbb{N}^*$, on a :

$\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}\in[0,1]$, et $\left|f'\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f'\left(\frac{k}{n+1}\right)\right| \leq \frac{M_2}{n+1}$

Il s'ensuit alors avec l'inégalité triangu

$\forall n\in\mathbb{N}$, $|U_n - V_n| \leq \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{M_2}{n+1}\left|f\left(\frac{k}{n+1}\right)\right|\right)$

(3) On suppose que $g(1) \neq 0$.

a) Mq $g(1) > 0 \Rightarrow \exists \beta \in]0,1[\,/\, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geq a_n(\beta) + \frac{g(1)}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{\beta^n}{n}\right)$

- g étant cont sur $[0,1]$ alors elle est cont en $x_0 = 1$, il vient que

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta > 0)(\forall x \in [0,1], |x-1| \leq \eta \Rightarrow |g(x) - g(1)| \leq \varepsilon)$ (C1)

- En particulier pour $\varepsilon = \frac{g(1)}{2} > 0$, on trouve avec (C1):

$(\exists \eta > 0)(\forall x \in [1-\eta, \eta+1] \cap [0,1] \subset [0,1] \Rightarrow \frac{1}{2} g(1) \leq g(x) \leq \frac{3}{2} g(1))$ (C2)

l'intersect° de (C2) vaut: $\begin{cases} [0,1] & \text{si } \eta \geq 1 \\ [1-\eta, 1] & \text{si } \eta \in]0,1[\end{cases}$ (C3)

$\frac{25}{44}$

Il vient alors que :

→ si $\eta \geq 1$ alors $\forall \beta \in]0,1[$, on a: $\forall x \in [\beta, 1]$

on a: $g(x) \geq \frac{1}{2} g(1)$

→ si $\eta \in]0,1[$ alors pour $\beta = 1-\eta$, on a: $\forall x \in [\beta, 1]$

$g(x) \geq \frac{1}{2} g(1)$

En résumé; nous avons montré que: $\exists \beta \in]0,1[\,/$

$/ x \in [\beta, 1]$, $g(x) \geq \frac{1}{2} g(1)$ (C4) soit alors : $\forall N \in \mathbb{N}$; $S_N(\alpha) - \int_0^\alpha \frac{g(t)}{1-t}dt = \int_0^\alpha \frac{g(t)t^{N+1}}{1-t}dt$

* La fct $t \longmapsto g(t)$ est cont sur $[0,1[$ dc sur $[0,\alpha]$

* La fct $t \longmapsto \frac{1}{1-t}$ est cont sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ donc sur $[0,\alpha]$

$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*)$

On en déduit que le quotient $t \longmapsto \frac{g(t)}{1-t}$ est cont sur $[0,\alpha]$ car quotient de telles fonct (et le dénominateur ne s'annulant pas sur $[0,\alpha]$).

$\frac{24}{24}$

On en déduit que $t \longmapsto \frac{g(t)}{1-t}$ est dc bornée sur le segm $[0,\alpha]$. Ainsi $\exists\ B \in \mathbb{R}_+ / \left|\frac{g(t)}{1-t}\right| \leq B$

Il vient alors que : $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\left|S_N(\alpha) - \int_0^\alpha \frac{g(t)}{1-t}dt\right| \leq \int_0^\alpha \left|\frac{g(t)}{1-t}\right| t^{N+1}dt \leq B\int_0^\alpha t^{N+1}dt$$

$$\Rightarrow \left|S_N(\alpha) - \int_0^\alpha \frac{g(t)}{1-t}dt\right| \leq \frac{B}{N+2}\alpha^{N+1} \xrightarrow[N\infty]{} 0$$

car $0 < \alpha < 1$

On en déduit par définition que $\sum u_n(\alpha)$ est convergente et de plus $\sum u_n(\alpha) = \lim\limits_{+\infty} S_N(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{g(t)}{1-t}dt$.

Exo 2 : Restitution Organisée de Connaissances

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $g \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$.

$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on considère :

$$a_n = \int_0^1 g(t)\, t^n\, dt \quad \text{et} \quad b_m(\alpha) = \frac{1}{m^\alpha} \int_0^{\frac{1}{m}} g(t^m)\, dt$$

1) Calcul la limite de $U_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n+1}\right) f'\left(\frac{k+1}{n+1}\right)$

Méthode : Somme de Riemann

Soit $n \in \mathbb{N}$, posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n+1}\right) f'\left(\frac{k}{n+1}\right)$

objectif :

- Calculer $\lim \sigma_n$ avec la somme de Riemann
- Montrer que $\lim |U_n - \sigma_n| = 0$ et déduire $\lim U_n = \lim \sigma_n$.

$\frac{2t}{44}$

(1.a) Calculons $\lim \sigma_n$

Car $f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$, les fonctions f et f' sont continues par conséquent le produit ff' est aussi continue sur $[0,1]$. On en déduit d'après le théorème

(RF7) est une EDO 2nd ordre dont l'équation caractéristique est : (E_c) : $r^2 + r + 1 = 0$

$r_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

D'où les solutions de (RF7) sont les fonctions de la forme :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \left(\mu \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \lambda \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)e^{-\frac{x}{2}}$$

$\frac{20}{44}$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

<u>Conclusion</u> : De (i), (ii) et (iii), on conclut que les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant (E) sont celles de la forme :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \left(\mu \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \lambda \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)e^{-\frac{x}{2}}$$

où $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$.

Scanné avec CamScanner

Par ailleurs $\exists M \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x \in [0,1], |f(x)| \leq M$ (***)

car f étant cont est alors Borné sur $[0,1]$.

En résumé de (*), (**) et (***), on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - V_n| \leq \frac{(n+1)}{(n+1)^2} M M_2 = \frac{M M_2}{(n+1)} \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

d'où $|U_n - V_n| \xrightarrow[n\infty]{} 0 \Leftrightarrow \lim U_n = \lim V_n$ (*V)

$\frac{23}{44}$

<u>Conclusion</u> : de (1.a), (1.b), (*) et (*V), on conclut que : $\lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{f^2(1) - f^2(0)}{2}$ (V)

2) Pour $0 < \alpha < 1$, on pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(\alpha) = \int_0^\alpha g(t) t^n dt$.

Montrons que la série $\sum a_n(\alpha)$ converge vers $\int_0^\alpha \frac{g(x) dx}{1-x}$

$\forall N \in \mathbb{N}$, posons $S_N(\alpha) = \sum_{n=0}^{N} U_n(\alpha) = \sum_{n=0}^{N} \int_0^\alpha g(t) t^n dt$

Avec la relation Chasles et la somme des termes consécutifs d'une suite Géométrique, on obtient que : $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_N(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{1 - t^{N+1}}{1-t} g(t) dt$

• soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $a_n = \int_0^1 g(t) t^n dt = \int_0^\beta g(t) t^n dt + \int_\beta^1 g(t) t^n dt$

Compte tenu de (C4) avec la croissance de $\int$, on a :

$a_n \geq \int_0^\beta g(t) t^n dt + \frac{1}{2} g(1) \int_\beta^1 t^n dt = a_n(\beta) + \frac{1}{2} g(1) \int_\beta^1 t^n dt$

ainsi, on trouve : $a_n \geq a_n(\beta) + \frac{1}{2} g(1) \left(\frac{1-\beta^{n+1}}{n+1} \right)$ (C5)

D'ailleurs $\begin{cases} 0 < \beta < 1 \\ n+1 > n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta^{n+1} < \beta^n \\ \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\beta^{n+1}}{n+1} < \frac{\beta^n}{n} \\ \text{(C6)} \end{cases}$

soit finalement : $-\frac{\beta^{n+1}}{n+1} > -\frac{\beta^n}{n}$ (C7). Car $\frac{g(1)}{2} > 0$, alors

on a : en combinant les inégalités (C5), (C6) et (C7)

$a_n \geq a_n(\beta) + \frac{1}{2} g(1) \left(\frac{1}{n+1} - \frac{\beta^n}{n} \right)$

$\frac{26}{44}$

Concl : $\exists \beta \in]0,1[\,/\, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geq a_n(\beta) + \frac{1}{2} g(1) \left(\frac{1}{n+1} - \frac{\beta^n}{n} \right)$ (C8)

c) La nature de la série $\sum a_n$

on a : $\frac{1}{2} g(1) \left(\frac{1}{n+1} - \frac{\beta^n}{n} \right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{g(1)}{2n}$ car $\beta^n \xrightarrow[n\infty]{} 0$ pour $0<\beta<1$

où la série de terme gle $\frac{1}{2} g(1) \left(\frac{1}{n+1} - \frac{\beta^n}{n} \right)$ est divergente

par conséquent celle de terme gle $a_n(\beta) + \frac{1}{2} g(1) \left(\frac{1}{n+1} - \frac{\beta^n}{n} \right)$

est aussi divergente car $\sum a_n(\beta)$ est convergente d'après (2)

On en déduit avec l'inégalité (C8) que d'après le théorème de majoration la série de terme gle a_n est divergente.

4) soit g la fct définie sur $[0,1]$ par : $\begin{cases} g(0) = 1 \\ g(x) = \dfrac{-x}{\ln(1-x)} \text{ si } x \in]0,1[\\ g(1) = 0 \end{cases}$

<u>4.1</u>. Montrons que $g \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ c-a-d g est cont.

• la fonction $x \longmapsto \dfrac{-x}{\ln(1-x)}$ est cont sur $]0,1[$ car quotient de telles fct (à savoir $\begin{cases} x \longmapsto -x \\ x \longmapsto \ln(1-x) \end{cases}$ et le dénominateur ne s'annulant sur $]0,1[$. Ainsi, on a montré que g est cont sur $]0,1[$.

$\dfrac{27}{44}$

• étude de la continuité en $x=0$.

Avec la règle de l'Hôpital, on trouve que :

$\lim\limits_{0^+} g = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-1}{\frac{-1}{1-x}} = \dfrac{-1}{-1} = 1 = g(0) \Rightarrow g$ est continue en 0.

• étude de la continuité en $x=1$

$\lim\limits_{1^-} g = 0$ car $\left\{ \lim\limits_{x \to 1^-} \ln(1-x) = -\infty \right.$ donc $\lim\limits_{1^-} g = g(1)$

D'où g est cont 1. <u>Concl</u> : g est cont sur $[0,1]$.

4.2

4.2 : Étudions la nature de la $\sum a_n$ où

$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_0^1 g(t)\, t^n \, dt$ avec $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{-x}{\ln(1-x)} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

La fonction $t \longmapsto g(t)\, t^n = \frac{t^{n+1}}{-\ln(1-t)}$ est positive sur $[0,1]$

En effet : $\forall t \in]0,1[$, $t^{n+1} \geq 0$ et $\ln(1-t) \leq 0 \Rightarrow -\ln(1-t) > 0$

Il vient alors que : $a_n = \int_0^1 g(t)\, t^n \, dt \geq \int_0^{1-\frac{1}{n}} g(t)\, t^n \, dt$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

En effet $[0, 1-\frac{1}{n}] \subset [0,1]$ et $t^n g(t) \geq 0$ et $\int$ est $\nearrow$

28

44

(c9)

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geq \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{t^{n+1}}{-\ln(1-t)} \, dt$

Sur $[0,1[$, on a $h : x \longmapsto -\ln(1-x)$ est définie et dérivable

De plus, $\forall x \in [0,1[$, on a : $h'(x) = \frac{1}{1-x} > 0 \Rightarrow h$ est $\nearrow$ sur $[0,1[$.

Il s'ensuit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0, 1-\frac{1}{n}] \subset [0,1[$

on a : $h(x) \leq h(1-\frac{1}{n}) \Rightarrow -\ln(1-x) \leq \ln(n)$

$\Leftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\forall x \in [0, 1-\frac{1}{n}]$, $\frac{1}{-\ln(1-x)} \geq \frac{1}{\ln(n)}$

Scanné avec CamScanner

(C14) $\Rightarrow \left| \int_0^1 (g(t)-g(1)) t^n dt \right| \leq \int_0^1 |g(t)-g(1)| |t|^n dt \leq \int_0^1 k|t-1|$

$\Rightarrow \left| \int_0^1 (g(t)-g(1)) t^n dt \right| \leq K \int_0^1 |t-1| t^n dt$ $\frac{31}{44}$

Pour $t \in [0,1] \Rightarrow 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow -1 \leq t-1 \leq 0 \Rightarrow$
$|t-1| = 1-t$. Ainsi, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left| \int_0^1 (g(t)-g(1)) t^n dt \right| \leq K \int_0^1 (1-t) t^n dt = K \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

(C.15)

La série de terme gle $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ est telescopique de somme partielle d'ordre N S_N donnée par :

$$S_N : \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = 1 - \frac{1}{N+2} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 1$$

On en déduit que la série de terme gle $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ est convergente (vers 1) dc celle de terme gle $K \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$ l'est aussi (avec pour somme K).

Ainsi, avec l'inégalité (C.15), on en déduit d'après le théorème de majorat° que la série de terme gle $\int_0^1 (g(x)-g(1)) x^n dx$ est absolum convergente dc convergente

(5) Montrons que si g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$

Alors $\sum a_n$ cvg $\iff g(1)=0$

Soit $g\in\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n=\int_0^1 g(t)t^n\,dt$

Obj : Montrons que : $\sum a_n$ cvg $\iff g(1)=0$

30/44

$\forall n\in\mathbb{N}$, a :

$$a_n=\int_0^1 g(t)t^n\,dt=\int_0^1 t^n\big(g(1)+g(t)-g(1)\big)dt$$

$$=g(1)\int_0^1 t^n\,dt+\int_0^1 t^n\big(g(t)-g(1)\big)dt$$

$$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\frac{g(1)}{n+1}+\int_0^1 \big(g(t)-g(1)\big)t^n\,dt \quad (C13)$$

Par hypothèse $g\in\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})\Rightarrow g'$ est cont sur $[0,1]$

Ainsi g' est bornée sur le compact $[0,1]$ (et y atteint ses bornes) d'où $\exists K\in\mathbb{R}_+ \,/\, \forall x\in[0,1],\ |g'(x)|\le K$

On en déduit d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis que : $\forall x\in[0,1],\ |g(x)-g(1)|\le K|x-$

(C14)

Imp : $|g'|\le K\Rightarrow g$ est K-lip

$\int_0^1 |g(t)-g(1)||t|^n\,dt \le \int K|t-1|$

Soit alors : $\forall n \geq 2, \forall x \in [0, 1-\frac{1}{n}]$, $g(x)x^n \geq \frac{x^{n+1}}{\ln(n)}$

$$\Rightarrow \int_0^{1-\frac{1}{n}} g(x)\, x^n dx \geq \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{x^{n+1}}{\ln(n)} dx = \frac{1}{(n+2)\ln(n)} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+2} \quad (C10)$$

En combinant les inégalités (C9) et (C10), on trouve :

$$\forall n \geq 2, \quad a_n \geq v_n = \frac{1}{(n+2)\ln(n)} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+2} \quad (C11)$$

$\frac{29}{44}$

On a : $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+2} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\infty]{} 1 \times \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$

On en déduit que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{e(n+2)\ln(n)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{en\ln(n)}$. (C12)

La quantité $\frac{1}{n\ln(n)}$ est le terme gle d'une série de Bertrand divergente ($\alpha = \beta = 1$). On en déduit par équivalence que la série de terme gle v_n DVg.

Concl : De (C11) et (C12), on déduit avec les Théorème d'équivalence et de comparaison que la série numérique de terme gle a_n est divergente.

Scanné avec CamScanner

Par ailleurs, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{g(1)}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{g(1)}{n}$ et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{g(1)}{n} = g(1) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente (Série Harmonique) si $g(1) \neq 0$ et la série nulle sinon.

32/44

Dans l'égalité (C13), on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \underbrace{\frac{g(1)}{n+1}}_{\text{Conv ssi } g(1)=0} + \underbrace{\int_0^1 (g(t) - g(1)) t^n dt}_{\text{Converge Absolument donc Converge}}$$

d'où : $\sum a_n$ converge $\iff g(1) = 0$.

b) On suppose que $g(0) \neq 0$. Étudions la nature de la série $\sum_{n\geq 1} b_n(\alpha)$ avec : $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$b_n(\alpha) = \frac{1}{n^\alpha} \int_0^{\frac{1}{n}} g(x^n) dx$$

soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0, \frac{1}{n}]$ on a : $t^n \in [0, \frac{1}{n}]$.

$g \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \Rightarrow g$ est cont sur le compact $[0,1]$

D'où $\exists B \in \mathbb{R}_+ / \forall x \in [0,1], |g(x)| \leq B$ (C.16)

De (C.16), on en déduit avec l'inégalité triangulaire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, \frac{1}{n}], |g(t^n) - g(0)| \leq 2B$ (C.17)

Avec (C.17), on obtient :

$$\left|\int_0^{\frac{1}{n}} (g(t^n) - g(0))\,dt\right| \leq \int_0^{\frac{1}{n}} |g(t^n) - g(0)|\,dt \leq \int_0^{\frac{1}{n}} 2B\,dt$$

33/44

$$\Rightarrow \left|\int_0^{\frac{1}{n}} g(t^n)\,dt - \frac{1}{n} g(0)\right| \leq \frac{2B}{n} \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

On en déduit que : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} g(t^n)\,dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{g(0)}{n}$ (C.18)

$$\Rightarrow b_n(\alpha) = \frac{1}{n^\alpha}\int_0^{\frac{1}{n}} g(t^n)\,dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{g(0)}{n^{\alpha+1}}$$ (C.1

Avec l'hypothèse $g(0) \neq 0$ et l'équivalence (C.1 on en déduit d'après le critère de convergence d séries de RIEMANN que :

$$\sum_{n\geq 1} b_n(\alpha) \text{ converge} \iff \alpha+1 > 1 \iff \alpha > 0$$

Problème : Etude de fonction, Intégration, $\mathbb{R}(\mathbb{C})$, et Suite Numérique

Soient $x\in\mathbb{R}$, $p\in\mathbb{N}^*$; on pose $M_p(x)=\int_0^x \frac{dt}{ch^p(t)}$.

1. Calculons $M_1(x)$ et $M_2(x)$

$\forall p\in\mathbb{N}^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\longmapsto f_p(t)=\frac{1}{ch^p(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car $\forall t\in\mathbb{R}$, $ch^p(t)\neq 0$) donc sur le $[0,x]$ (si $x\geq 0$) ou sur le segment $[x,0]$ (si $x<0$). Il s'ensuit que l'intégrale $M_p(x)$ existe.

* Calcul de $M_1(x)$ soit $x\in\mathbb{R}$,

$$M_1(x)=\int_0^x \frac{dt}{ch(t)}=\int_0^x \frac{2dt}{e^t+e^{-t}}$$

faisons le chgmt de variable : $u=e^t$

donc $t=\ln u$ et $du=e^t$

D'où $M_1(x)=\int_1^{e^x}\frac{2}{u+\frac{1}{u}}\cdot\frac{1}{u}\,du=\int_1^{e^x}\frac{2du}{u^2+1}=2\left[\text{Arctan}(u)\right]$

Conclusion 1 : $\forall x\in\mathbb{R}$, $M_1(x)=2\text{Arctan}(e^x)-\frac{\pi}{2}$

* Calcul de $M_2(x)$

$$M_2(x)=\int_0^x\frac{dt}{ch^2(t)}=\int_0^x th'(t)\,dt=[th(x)]_0^x=th(x)$$

Conclusion 2 : $\forall x\in\mathbb{R}$, $M_2(x)=th(x)$

b) Déduisons $M_3(x)$ et $M_4(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ M_3(x) = \frac{1}{2} M_1(x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{sh(x)}{ch^2(x)}$$
$$= \frac{1}{2}\left(2 \operatorname{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{sh(x)}{2ch^2(x)}$$

<u>Conclusion 1</u> : $\forall x \in \mathbb{R},\ M_3(x) = \operatorname{Arctan}(e^x) + \frac{sh(x)}{2ch^2(x)} - \frac{\pi}{4}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ M_4(x) = \frac{2}{3} M_2(x) + \frac{1}{3}\frac{sh(x)}{ch^3(x)} = \frac{2}{3} th(x) + \frac{sh(x)}{3ch^{2+1}(x)}$$

<u>Conclusion 2</u> : $\forall x \in \mathbb{R},\ M_4(x) = \frac{2}{3} th(x) + \frac{sh(x)}{3ch^3(x)}$.

4. On considère la fct : $M_p : x \longmapsto M_p(x)$ 37/44

a) - Etude de la Parité de M_p

$\forall x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R}$, et on a : $M_p(-x) = \int_0^{-x} \frac{dt}{ch^p(t)}$

En faisant le changent de variable $\theta = -t \Rightarrow d\theta = -dt$

$$M_p(-x) = \int_0^{x} \frac{-d\theta}{ch^p(-\theta)} = -\int_0^{x} \frac{d\theta}{ch^p(\theta)} = -M_p(x)$$

On en déduit que M_p est impaire (idem en 2°))

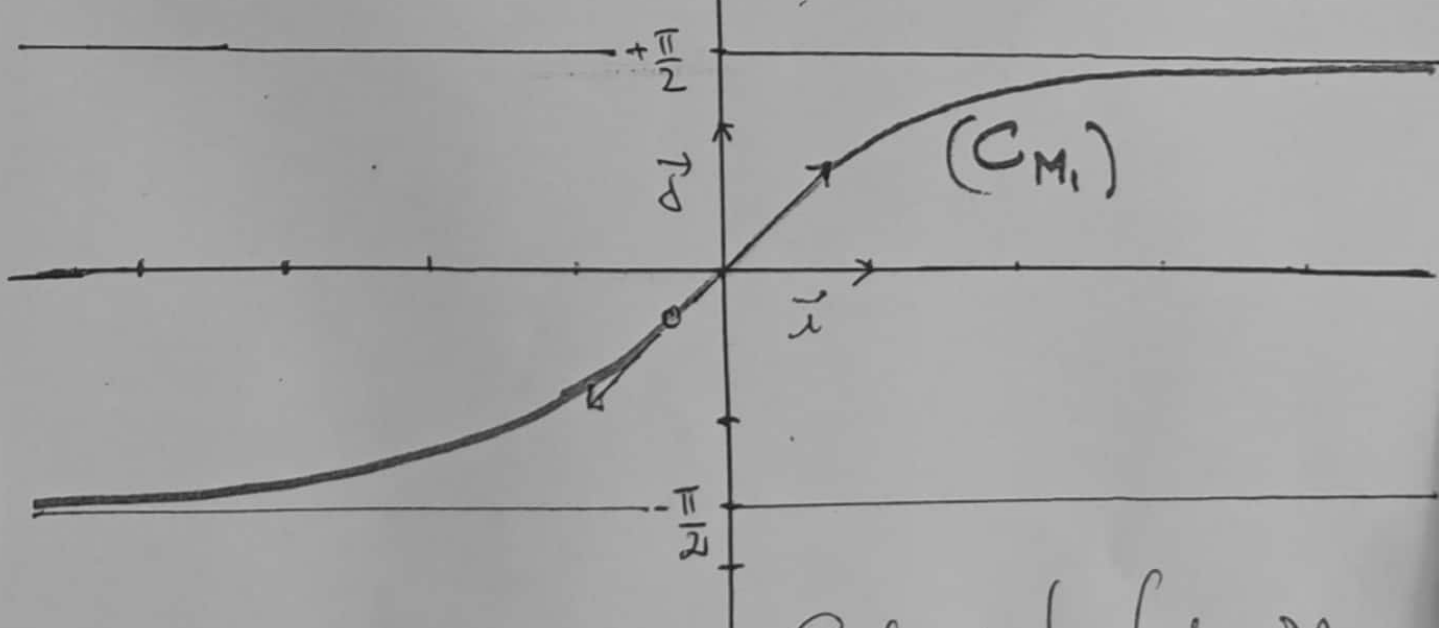
- Périodicité de M_p

Supposons que M_p soit T- périodique $(T \in \mathbb{R}_+^*)$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ M_p(x+T) = M_p(x) \Leftrightarrow \int_0^{x+T} \frac{dt}{ch^p(t)} = \int_0^{x} \frac{dt}{ch^p(t)}$

La tangente en $x=0$ est :

$(T_0) : y = x$



Courbe de la fonction M_1

3) (a) La Relation entre $M_{p+2}(x)$ et $M_p(x)$

36/44

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$M_{p+2}(x) = \int_0^x \frac{dt}{ch^{p+2}(t)}$$ et on a :

$$M_p(x) = \int_0^x \frac{dt}{ch^p(t)} = \int_0^x \underbrace{ch(t)}_{u'} \cdot \underbrace{\frac{1}{ch^{p+1}(t)}}_{v^{-(p+1)}} dt = \int_0^x u'(t)\, v^{-(p+1)}(t)\, dt$$

$$= \left[u(t)\, v^{-(p+1)}(t)\right]_0^x - \int_0^x u(t)\left(-(p+1)\, v'(t)\, v^{-(p+1)-1}(t)\right) dt$$

$$= \left[sh(t)\, \frac{1}{ch^{p+1}(t)}\right]_0^x + \int_0^x sh(t)\, \frac{p+1}{ch^{p+2}}\, sh(t)\, dt$$

$$= \frac{sh(x)}{ch^{p+1}(x)} + \int_0^x (p+1)\frac{sh^2(t)}{ch^{p+2}(t)}\, dt = \frac{sh(x)}{ch^{p+1}(x)} + (p+1)\int_0^x \frac{ch^2(t)-1}{ch^{p+2}(t)}$$

$$= \frac{sh(x)}{ch^{p+1}(x)} + (p+1)\left(M_p(x) - M_{p+2}(x)\right)$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}$, $M_{p+2}(x) = \frac{p}{p+1} M_p(x) + \frac{1}{p+1}\frac{sh(x)}{ch^{p+1}(x)}$

2) Étude de la fonction : M_1

·) $M_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto M_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{ch(t)} = 2\,\text{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{2}$

La fonction M_1 est C^∞ sur $\mathbb{R}$ car composée de telles fonctions à savoir : $x \longmapsto e^x$ et $x \longmapsto \text{Arctan}(x)$) et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$M_1'(x) = 2.\, e^x \frac{1}{1+e^{2x}} = \frac{2e^x}{1+e^{2x}} > 0, \; \forall x \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que M_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

··) Limites / Branche Infinie de M_1 sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{+\infty} M_1 = \lim_{x \to +\infty} \left[2\,\text{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{2}\right] = 2.\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{-\infty} M_1 = \lim_{x \to +\infty} \left[2\,\text{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{2}\right] = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

35/44

Conclusion : (C_{M_1}) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $(\Delta_1) : y = \frac{\pi}{2}$ et au voisinage de $-\infty$, elle admet la droite $(\Delta_2) : y = -\frac{\pi}{2}$ comme asymptote horizontale

Le T.V. de M_1 :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
M_1'		+		+	
M_1	$-\frac{\pi}{2}$	↗	0	↗	$\frac{\pi}{2}$

Rmq : M_1 est une fct impaire.

$$\Leftrightarrow \int_0^x \frac{dt}{ch^p(t)} + \int_x^{x+T} \frac{dt}{ch^p(t)} = \int_0^x \frac{dt}{ch^p(t)} \Leftrightarrow \int_x^{x+1} \frac{dt}{ch^p(t)} = 0$$

Comme $x \longmapsto \frac{1}{ch^p(t)}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$ donc sur le segment $[\min(x, x+T), \max(x, x+T)]$; on en déduit que : $\int_x^{x+T} \frac{dt}{ch^p(t)} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{ch^p(t)} = 0, \forall t \in [\min(x, x+T), \max(x, x+T)]$

Ce qui est <u>absurde</u> car $\frac{1}{ch^p(t)} \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$.

<u>Conclusion</u> : la fonction M_p n'est pas périodique.

32/44

b) • Démontrons que M_p est continue sur $\mathbb{R}$.

$\forall p \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \longmapsto \frac{1}{ch^p(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car la fct : $t \longmapsto ch^p(t)$ l'est et de plus elle est non nulle sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que la fonction M_p est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

• De manière analogue qu'en b) on montre que M_p est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ car la fct ch^p l'est et non nulle sur $\mathbb{R}$ (de même pour ch^{-p}).

Par la suite, on obtient : $ch(t) > \frac{e^t}{2}$

D'où : $\frac{1}{ch(t)} < 2e^{-t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$

* Déduisons la nature de la suite $(I_n)_n$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{ch(t)} < 2e^{-t} \Rightarrow \forall p \in \mathbb{N}^* \left(\frac{1}{ch(t)}\right)^p < (2e^{-t})^p$

$\Rightarrow \frac{1}{ch^p(t)} < 2^p e^{-pt} \Rightarrow \int_0^m \frac{dt}{ch^p(t)} \leq 2^p \int_0^m e^{-pt} = 2^p \left[-\frac{1}{p} e^{-pt}\right]_0^m$

0/4

$\Rightarrow I_m \leq \frac{2^p}{p}\left(1 - e^{-pm}\right) \leq \frac{2^p}{p}$

<u>Conclusion</u> : $\forall m \in \mathbb{N}, 0 \leq I_m \leq \frac{2^p}{p} \Rightarrow (I_n)_n$ est croissante et majorée (par $\frac{2^p}{p}$) donc elle est convergente.

9) On pose sous réserve $\exists$ce, $J_m = \lim_{x \to +\infty} \Pi_n(x)$.

$J_m = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{Ch^n(t)}$

(a) <u>Existence</u> de J_m

$\forall m \in \mathbb{N}^*$, la fonction Π_n est $\nearrow$ et majorée par $\frac{2^m}{m}$ d'où Π_n admet une limite finie qd $x \to +\infty$

d'où l'$\exists$ce de l'intégrale impropre J_m.

... Cf en 8)b),

b) Calcul des Intégrales

(i) Calcul de J_1

$$J_1 = \lim_{x \to +\infty} M_1(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[2 \arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}\right] = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

(ii) Calcul de J_2

$$J_2 = \lim_{x \to +\infty} M_2(x) = \lim_{x \to +\infty} th(x) = 1.$$

42/44

(iii) Calcul de J_n avec $n > 2$

D'après 3(a) on a: $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$M_{n+2}(x) = \frac{n}{n+1} M_n(x) + \frac{1}{n+1} \frac{sh(x)}{ch^{n+1}(x)}$$

Par passage à la limite lorsque $x \longrightarrow +\infty$, on a:

$$J_{n+2} = \lim_{x \to +\infty} M_{n+2}(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{n}{n+1} M_n(x) + \frac{1}{n+1} \frac{sh(x)}{ch^{n+1}(x)}\right]$$

$$\Rightarrow J_{n+2} = \frac{n}{n+1} J_n \quad \text{car} \quad \frac{sh(x)}{ch^{n+1}(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

La relation suivante ci-dessus est récurrente linéaire d'ordre 2 sans terme au milieu Donc on calculera les J_n suivant la parité de n.

Scanné avec CamScanner

$$\Leftrightarrow \int_0^x \frac{dt}{ch^p(t)} + \int_x^{x+T} \frac{dt}{ch^p(t)} = \int_0^x \frac{dt}{ch^p(t)} \Leftrightarrow \int_x^{x+T} \frac{dt}{ch^p(t)} = 0$$

Comme $x \longmapsto \frac{1}{ch^p(t)}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$ donc sur le segment $[\min(x, x+T), \max(x, x+T)]$, on en déduit que : $\int_x^{x+T} \frac{dt}{ch^p(t)} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{ch^p(t)} = 0, \forall t \in [\min(x, x+T), \max(x, x+T)]$

Ce qui est <u>absurde</u> car $\frac{1}{ch^p(t)} \neq 0 \; \forall t \in \mathbb{R}$.

<u>Conclusion</u> : La fonction Π_p n'est pas périodique.

$\frac{38}{44}$

b) • Démontrons que Π_p est continue sur $\mathbb{R}$.

$\forall p \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \longmapsto \frac{1}{ch^p(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car la fct : $t \longmapsto ch^p(t)$ l'est et de plus elle est non nulle sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que la fonction Π_p est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

• De manière analogue qu'en b), on montre que Π_p est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ car la fct ch^p l'est et non nulle sur $\mathbb{R}$ (donc aussi pour ch^{-p}).

5) **5.1** Calcul des dérivées de M_p

* $\forall x \in \mathbb{R}$, $M_p'(x) = \dfrac{1}{ch^p(x)}$

* $\forall x \in \mathbb{R}$, $M_p''(x) = \left(\dfrac{1}{ch^p(x)}\right)' = -\dfrac{p\,sh(x)\,ch^{p-1}(x)}{ch^{2p}(x)} = \dfrac{-p\,sh(x)}{ch^{p+1}(x)}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $M_p'''(x) = M_p^{(3)}(x) = \left(\dfrac{-p\,sh(x)}{ch^{p+1}(x)}\right)'$

$$M_p'''(x) = -p \cdot \frac{ch(x)\,ch^{p+1}(x) - sh(x)\,(p+1)\,sh(x)\,ch^p(x)}{ch^{2(p+1)}(x)}$$

$$M_p'''(x) = -p\,\frac{ch^2(x) - (p+1)\,sh^2(x)}{ch^{p+2}(x)} = -p\,\frac{1 - p\,sh^2(x)}{ch^{p+2}(x)}$$

5.2 Montrons que la dérivée de M_p est une solut° de (E)

$$ch^2(x)\,(M')''(x) + \frac{p}{2}\,sh(2x)\,(M')'(x) + p\,M'(x)$$

$$= ch^2(x)\,M'''(x) + \frac{p}{2}\,sh(2x)\,M''(x) + p\,M'(x)$$

39/44

$$= -\frac{p\,ch^2(x)}{ch^{p+2}(x)}\left(1 - p\,sh^2(x)\right) - \frac{p}{2}\,\frac{sh(2x)}{ch^{p+1}(x)}\,sh(x) + \frac{p}{ch^p(x)}$$

$$= \frac{-p + p\,sh^2(x) - p\,sh^2(x) + p}{ch^p(x)} = \frac{0}{ch^p(x)} = 0$$ car $sh(2x) = 2ch(x)sh$

On en déduit que M_p' est une solution de (E)

6) Je dévelo...

6) Le développement limité d'ordre 3 de Π_p au voisinage de 0.

Par définition le $DL_3(0)$ de Π_p s'écrit

$$\Pi_p(x) \underset{0}{\sim} \Pi_p(0) + \Pi'_p(0)x + \frac{1}{2!}\Pi''_p(0)x^2 + \frac{1}{3!}\Pi^{(3)}_p(0)x^3 + o(x^3)$$

$\Pi_p(0) = 0$; $\Pi'_p(0) = 1$; $\Pi''_p(0) = 0$ et $\Pi^{(3)}_p(0) = -p$

D'où : $\Pi_p(x) \underset{0}{\sim} x - \frac{p}{6}x^3 + o(x^3)$

40/44

7) Le sens de variation de Π_p

Π_p est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (d'après 4) c)) et on a

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\Pi'_p(x) = \frac{1}{ch^p(x)} > 0 \implies \Pi_p$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

8) Etude de la suite $I_n := \Pi_p(n)$ avec $(p \in \mathbb{N}^*)$

a) Monotonie de la suite (I_n)

$\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = \int_0^{n+1} \frac{dt}{ch^p(t)} - \int_0^n \frac{dt}{ch^p(t)} = \int_n^{n+1} \frac{dt}{ch^p(t)} > 0$

On en déduit que la suite $(I_n)_n$ est strictement $\nearrow$.

N.B. si $\Pi_p \nearrow \implies n < n+1 \implies \Pi_p(n) < \Pi_p(n+1) \implies I_n < I_{n+1}$ d'où $(I_n)_n$ est croissante.

(b) Démontrons que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{ch(t)} \leq 2e^{-t}$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{-t} > 0 \implies e^t + e^{-t} > e^t \implies \frac{e^t + e^{-t}}{2} > \frac{e^t}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $J_{2n} = \frac{2n-2}{2n-2+1} J_{2n-2} = \frac{2(n-1)}{2(n-1)+1} J_{2(n-1)}$

$$J_{2n} = \frac{2(n-1)}{2(n-1)+1} J_{2(n-1)} = \frac{2(n-1)}{2(n-1)+1} \times \frac{2(n-2)}{2(n-2)+1} \times J_{2(n-2)} = \cdots\cdots$$

Ainsi, de proche en proche, on obtient :

$$J_{2n} = \frac{2(n-1)\times 2(n-2)\times 2(n-3)\times \cdots \times 6\times 4\times 2}{(2(n-1)+1)\times(2(n-2)+1)\times(2(n-3)+1)\times \cdots \times (7)\times(5)\times(3)} J_2$$

$$= \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(2k)}{\prod_{k=1}^{n-1}(2k+1)} = \frac{\left[\prod_{k=1}^{n-1}(2k)\right]\left[\prod_{k=1}^{n-1}(2k)\right]}{\left[\prod_{k=1}^{n-1}(2k+1)\right]\left[\prod_{k=1}^{n-1}(2k)\right]} \times 1$$

$$= \frac{\left(2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1} k\right)^2}{\prod_{k=1}^{n-1}(2k)(2k+1)} = \frac{2^{2(n-1)}[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}$$

43/44

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_{2n} = \frac{2^{2(n-1)}[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}$$

De manière analogue, on trouve :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $J_{2n+1} = \frac{2n+1-2}{2n+1-2+1} J_{2n+1-2} = \frac{2n-1}{2n} J_{2n-1}$

$$J_{2n+1} = \frac{2n-1}{2n} J_{2n-1} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2(n-1)-1}{2(n-1)} \times J_{2(n-1)-1} = \cdots$$

De proche en proche, on trouve.

$$J_{2n+1} = \frac{(2n-1)\times(2(n-1)-1)\times(2(n-2)-1)\times\cdots\times 3\times 1}{2n\times(2(n-1))\times 2(n-2)\times\cdots\times 4\times 2} J_1$$

$$= \frac{\prod_{k=2}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} J_1 = \frac{\left(\prod_{k=2}^{n}(2k-1)\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(2k)\right)}{\left(\prod_{k=1}^{n}(2k)\right)^2} J_1$$

$$= \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\left(2^n \prod_{k=1}^{n} k\right)^2} J_2 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_{2n+1} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi$$

$\frac{44}{44}$

fin

$\square$.