ANSD, Dakar
ISE 1

Optimisation

Chapitre 2 : Optimisation sans contraintes

Dr. Oumar Diop
oumar.diop@unchk.edu.sn

24 avril 2025

Généralités

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$, $x^* \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. On donne les définitions suivantes.

Définition 1

1. *On dit que u^* est un point de minimum global (absolu) de f sur U si*

$$f(u) \geq f(u^*), \ \ \forall u \in U.$$

2. *On dit que u^* est un point de minimum local (relatif) de f sur U s'il existe un voisinage V de u^* dans $\mathbb{R}^n$ tel que*

$$f(u) \geq f(u^*), \ \ \forall u \in U \cap V.$$

3. *On dit que u^* est un point de maximum absolu (resp. relatif) de f sur U si u^* est un point de minimum absolu (resp. relatif) de $-f$ sur U.*
4. *Un point u^* est dit extremum s'il est soit minimum ou maximum.*

On considère tout au long de ce séquence, pour le cas particulier $U = \mathbb{R}^n$, le problème d'optimisation suivant

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x). \qquad (1)$$

Le problème (1) est appelé **minimisation sans contraintes**.

Théorème 2

Soit U un sous ensemble non vide et fermé de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. une fonction continue. On suppose :

- *Soit U est borné*
- *Soit U est non borné et f est une fonction coercive sur U.*

Alors **il existe au moins** *un point minimum de f sur U.*

Pour la preuve de ce théorème, on distingue deux cas.

- **Cas 1 :** l'ensemble U étant borné on en déduit qu'il est compact. Puisque f est continue, le théorème de Weierstrass permet de conclure.
- **Cas 2 :** Si U n'est pas borné, on considère $a \in U$ et $E = \{x \in U, \ f(x) \leq f(a)\}$, E est bien une image réciproque d'un intervalle fermé par f qui est continue. E est alors fermé. Supposons par absurde que E n'est pas borné, alors il existe une suite $(x_n) \in E$ qui diverge ($\|x_k\| \longrightarrow \infty$ pour $k \longrightarrow +\infty$). Comme f est coercive sur U, on en déduit que $f(x_k) \longrightarrow \infty$ ce qui est absurde car $f(x_k) \leq f(a)$. E est alors un ensemble fermé borné donc compact dans $\mathbb{R}^n$. Alors d'après le théorème de Weierstrass :

$$\exists u^* \in E \text{ tel que } f(u^*) \leq f(u), \ \ \forall u \in E.$$

D'autres part, on a

$$f(u^*) < f(u), \ \forall u \in U - E,$$

car

$$f(u^*) \leq f(a) < f(u), \ \ \forall u \in U - E.$$

Unicité

Théorème 3

Soit U un sous ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe. Alors il **existe au plus** *un point minimum de f sur U.*

Pour la preuve de ce théorème, on considère le raisonnement par absurde.
Soient u_1 et u_2 deux points de minimum de f sur U avec $u_1 \neq u_2$. Nous avons alors :

$$f(u_1) = f(u_2) \leq f(u) \;\; \forall u \in U.$$

Puisque f est strictement convexe, on a :

$$f\left(\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2\right) < \frac{1}{2}f(u_1) + \frac{1}{2}f(u_2) \;\; = \;\; f(u_1)$$

Corollaire 4

Soit U un sous ensemble fermé et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction elliptique. Alors il **existe un unique** *point minimum de f sur U.*

Condition de minimalité du premier ordre

Proposition 5

Soit U un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

- *Si $\bar{x} \in U$ est un minimum local de f et f différentiable en $\bar{x}$, alors $\nabla f(\bar{x}) = 0$.*
- *On suppose que U est un sous ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ et f une application convexe sur U, alors les conditions suivantes sont équivalentes.*
  1. *$\bar{x}$ est un minimum (global) de f sur U*
  2. *$\bar{x}$ est un minimum local de f sur U.*
  3. *Et si f est différentiable en $\bar{x}$, on a une troisième condition équivalente : $\nabla f(\bar{x}) = 0$.*

Condition de minimalité du second ordre

Proposition 6

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$.

- *Si $x \in U$ est un minimum local de f et si f est deux fois différentiable en x, alors*
  $$\nabla f(\bar{x}) = 0 \;\; et \;\; \nabla^2 f(\bar{x}) \text{ est semi définie positive}$$
- *Si $x \in U$ est un point où f est deux fois différentiable et si :*
  $$\nabla f(\bar{x}) = 0 \;\; et \;\; \nabla^2 f(\bar{x}) \text{ est semi définie positive.}$$
  Alors $\bar{x}$ est un minimum local strict de f.

Exercice d'application

Exercice 7

1. *Vérifiez que l'origine est un point stationnaire, c'est-à-dire un point pour lequel* $f'(x) = 0$ *de la fonction* $f(x) = x^2 \cos x$. *Déterminez s'il s'agit d'un minimum (local), maximum (local) ou point d'inflexion.*
2. *Même question pour les fonctions suivantes*

   a $f(x) = x^2 \sin x$
   b $f(x) = x^2(1 - \cos x)$
   c $f(x) = x^2(\cos x - 1)$

Exercice 8

On considère une fonction de deux variables

$$f(x, y) = 2x^3 - y^2 + 2xy + 1$$

1. *Déterminer les extréma relatifs de f.*
2. *La fonction f est-elle coercive ?*
3. *Etudier la convexité de la fonction f.*
4. *La fonction f possède-t-elle un maximum absolu sur $\mathbb{R}^2$? un minimum absolu ?*

Exercice 9

Soient $p_1 = 52$ *et* $p_2 = 44$ *les prix respectifs de deux produits . Soient* q_1 *et* q_2 *les quantités respectives de ces produits. Le revenu issu de la vente est donc :*

$$R = p_1 q_1 + p_2 q_2.$$

La fonction coût est :

$$C = q_1 + q_1 q_2 + q_2$$

et le bénéfice réalisé est

$$\Pi = R - C$$

Trouver les quantités q_1 *et* q_2 *maximisant le bénéfice.*

Exercice 10

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - 2(x_1 - x_2)^2.$$

1. *Montrer qu'il existe $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}_+^2$ (et les déterminer) tels que*

   $$f(x_1, x_2) \geq a_1 \|(x_1, x_2)\|^2 - a_2.$$

   pour tous $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, où la notation $\|.\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$. En déduire que le problème

   $$\min_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) \tag{2}$$

   possède au moins une solution.
2. *La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$?*
3. *Déterminer les points critiques de f, et préciser leur nature (minimum local, maximum local, point-selle, ...). Résoudre alors le problème (2).*

Exercice 11

Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la fonction f_a par

$$f_a(x, y) = x^2 + y^2 + axy - 2x - 2y.$$

1. *Pour quelles valeurs de a, la fonction f_a est-elle convexe ? Et strictement convexe ?*
2. *Discuter en fonction des valeurs du paramètre a de l'existence de solutions au problème d'optimisation*

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f_a(x, y). \tag{3}$$

3. *Lorsque $a \in]-2, 2[$, résoudre le problème (3).*

Exercice 12

Déterminer les extréma locaux des fonctions suivantes.

1. $x^4 + y^4 - 4(x - y)^2$
2. $x^3 + y^3 - 3xy$

Exercice 13

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par
$f(x, y, z) = x^4 - 2x^2y + 2y^2 - 2yz + 2z^2 - 4z + 5.$

1. *Déterminer les points critiques de f.*
2. *Montrer que $f(x, y, z)$ peut s'écrire sous la forme de somme de carrés.*
3. *En déduire les extréma de f sur $\mathbb{R}^3$.*