ANSD, Dakar
ISE 1

Optimisation

Séquence 5 : Optimisation sous contraintes

Dr. Oumar Diop
oumardiop32@yahoo.fr

16 mai 2025

Généralités

On considère, tout au long de ce séquence, le problème de minimisation suivant :

$$\min_{x \in K} f(x) \tag{1}$$

où K est un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue

Condition d'existence d'un minimum sous contraintes

On donne ici les conditions d'existence d'un minimum pour le problème d'optimisation (1). On distingue deux cas.
Premier cas : K fermé. On donne le résultat suivant.

Théorème 1

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et K un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. Le problème d'optimisation (1) admet une solution si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite.

1. *La contrainte K est un sous ensemble compact de $\mathbb{R}^n$.*
2. *La fonction f est coercive et la contrainte K est un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$.*

Pour le premier cas, la fonction f admet aussi un minimum sur K. Voir le théorème Weirstrass.

Exercice 2

Donner la preuve de ce théorème.

Condition d'existence d'un minimum sous contraintes

Le second cas concerne un problème d'optimisation avec contrainte (1) où K est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. Ce problème est plus compliqué que le cas précédent. On donne la proposition suivante.

Proposition 3

On suppose que

- K *est un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$
- f *une application continue sur* $\bar{K}$.
- *Il existe* $x_0 \in K$ *tel que :* $\forall x \in \partial K, f(x) > f(x_0)$.

Alors le problème (1) admet une solution.

Pour la preuve de cette proposition, on sait que $\bar{K}$ est compact (fermé borné de $\mathbb{R}^n$) alors la fonction f (continue) admet un minimum sur $\bar{K}$. C'est à dire il existe un élément $\bar{x} \in \bar{K}$ vérifiant : $\forall x \in \bar{K},\ f(x) \geq f(\bar{x})$.

Exercice 4

Montrer par absurde que $\bar{x}$ *appartient à* K.

Condition nécessaire

Dans cette partie, nous nous intéressons aux conditions nécessaires d'optimalité c'est à dire les conditions portant sur la dérivée de la fonction f satisfaites par le minimum (ou les minima) du problème (1). On les appelle les conditions de KKT (Karush Kuhn et Tucker).
On donne ici les conditions d'Euler lorsque K est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 5

Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et K un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si $\bar{x}$ est un minimum du problème (1) alors on a :

$$\nabla f(\bar{x}) = 0.$$

Preuve du théorème Soit $v \in \mathbb{R}^n$, puisque $\bar{x} \in K$ (ouvert), il existe alors $h_0 > 0$ tel que

$$\text{pour tout } h \in [0, h_0], \text{ on a } \bar{x} + hv \in K.$$

$\bar{x}$ étant minimum du problème, on a :

$$f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x}) \geq 0.$$

Comme

$$f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x}) = h\langle \nabla f(\bar{x}), v\rangle + h\epsilon(hv).$$

Condition nécessaire

Suite de la preuve
En divisant l'inégalité ci-dessus par $h > 0$ et en faisant tendre h vers 0, on obtient :

$$\langle \nabla f(\bar{x}), v \rangle \geq 0.$$

Cette inégalité étant vrai pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, elle est également vraie pour $-v$. Donc on a aussi

$$\langle \nabla f(\bar{x}), -v \rangle \geq 0.$$

D'où

$$\langle \nabla f(\bar{x}), -v \rangle = 0.$$

On a alors

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \langle \nabla f(\bar{x}), -v \rangle = 0.$$

C'est à dire

$$\nabla f(\bar{x}) = 0.$$

CQFD.

Le théorème de Kuhn et Tucker

Dans le cadre général du théorème de Kuhn & Tucker, la contrainte K du problème (1) est de la forme :

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n, g_i(x) \leq 0, \ \ i \in I \text{ et } h_j(x) = 0, \ \ j \in J\}.$$

avec

$I = \{i = 1, 2, ..., l\}$: indexe les contraintes d'inégalité ;

$J = \{j = 1, 2, ..., m\}$: indexe les contraintes d'égalité ;

Les fonctions g_i et h_i sont de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in K$, on appelle contrainte saturée l'ensemble

$$I(x) = \{i \in I \text{ tel que } g_i(x) = 0\}.$$

Théorème 6 (de Kuhn-Tucker avec lagrangien généralisé)

Si $\bar{x}$ est solution du problème (1), alors il existe $p_0 \in \mathbb{R}_+$, $p \in \mathbb{R}^l_+$ et $q \in \mathbb{R}^m$ avec :

$$\left\{\begin{array}{ll} \sum_i p_i g_i(x) = 0 & \textit{condition d'exclusion} \\ (p_0, p, q) \neq 0 & \\ p_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_i p_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_j q_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0 & \textit{condition nécessaire.} \end{array}\right. \quad (2)$$

Commentaire sur le théorème KKT généralisé

- On appelle Lagrangien généralisé la fonction

$$L(x, p_0, p, q) = p_0 f(x) + \sum_i p_i g_i(x) + \sum_j q_j h_j(x).$$

- La condition nécessaire d'optimalité s'écrit aussi comme suite

$$\frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x}, p_0, p, q) = 0.$$

- Le vecteur (p_0, p, q) est appelé le multiplicateur généralisé associé à la solution $\bar{x}$.
- La condition d'exclusion signifie que si $i \notin I(\bar{x})$, alors $p_i = 0$.

Contraintes qualifiées

Définition 7

On dit que la contrainte non linéaire K est qualifiée en un point $\bar{x} \in K$ si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^l$ et $\mu \in \mathbb{R}^m$ vérifiant

$$\begin{cases} \sum_i \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0 \\ \sum_i \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_j \mu_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

on a nécessairement $\lambda = 0$ et $\mu = 0$.

Si la contrainte K est qualifiée, le théorème de Kuhn & Tucker peut se reformuler de la façon suivante :

Théorème 8 (KKT pour les contraintes qualifiées)

Soit K la contrainte fermé donnée par

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n, g_i(x) \leq 0, \;\; i \in I \text{ et } h_j(x) = 0, \;\; j \in J\}.$$

Si un point $\bar{x}$ est solution du problème (1) et si K est qualifié en $\bar{x}$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^l$ et $\mu \in \mathbb{R}^m$ vérifiant les relations suivantes :

$$\begin{cases} \sum_i \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0 & \text{condition d'exclusion} \\ \nabla f(\bar{x}) + \sum_i \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0 & \text{condition nécessaire} \end{cases} \tag{4}$$

Contraintes qualifiées

La définition de qualification n'a de sens que si l'on peut donner des critères de qualification. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 9

1. *La famille* $\{\nabla h_1(x), \nabla h_2(x), \ldots, h_m(x)\}$ *est libre*
2. *Il existe un vecteur* $v \in \mathbb{R}^n$ *vérifiant*

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}, \langle \nabla h_j(x), v \rangle = 0,$$

et

$$\forall i \in I(x) \ \ \langle \nabla g_i(x), v \rangle < 0.$$

Alors la contrainte K *est qualifiée en* x

- ☐ Le vecteur (p, q) est appelé multiplicateur de Lagrange du problème associé à la solution $\bar{x}$;
- ☐ Le lagrangien du problème est donné par

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_i \lambda_i g_i(x) + \sum_j \mu_j h_j(x);$$

- ☐ La condition nécessaire d'optimalité s'écrit aussi comme suite

$$\frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x}, \lambda, \mu) = 0.$$

Exemple 10 (A traiter en séance synchrone)

Considérons le problème d'optimisation suivant

$$\min_{x^2+y^2=1} 2x+y.$$

1. *La fonction* $f(x,y)=2x+y$ *est-elle continue ?*
2. *Déterminer la contrainte* K.
3. *Montrer que la contrainte est qualifiée.*
4. *Montrer que le théorème de KKT est donné par*

   $$\nabla f(\bar{x},\bar{y})+\mu\nabla h(\bar{x},\bar{y})=0.$$

   C'est à dire

   $$\left\{\begin{array}{rcl} 2+2\mu\bar{x} & = & 0 \\ 1+2\mu\bar{y} & = & 0 \\ \bar{x}^2+\bar{y}^2 & = & 1. \end{array}\right. \quad (5)$$

5. *Montrer que le système (5) admet deux solutions à déterminer.*
6. *Montrer que le minimum est donné par le point* $(\bar{x},\bar{y})=(\frac{-2\sqrt{5}}{5},\frac{-\sqrt{5}}{5})$.

Exemple 11 (A traiter en séance synchrone)

Considérons cette fois-ci le problème d'optimisation suivant

$$\min_{x^2+y^2\leq 1} \quad xy \tag{6}$$

1. *Quelle est la fonction à optimiser ?*
2. *Déterminer l'ensemble K des contraintes.*
3. *Le problème (6) admet-elle une solution ?.*
4. *La contrainte est-elle qualifiée en tout point ? On pourra considérer deux cas :*
   - ☐ *1er cas : $g(x,y) < 0$*
   - ☐ *2nd cas : $g(x,y) \geq 0$. Pour ce cas on peut choisir un vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $\langle \nabla g(x,y), v\rangle < 0$. Prendre par exemple $v = -\nabla g(x,y)$.*
5. *Montrer que l'application du théorème de KKT aboutit à la résolution du système suivant.*

$$\left\{\begin{array}{lcl} y+\lambda x & = & 0 \\ x+\lambda y & = & 0 \\ \lambda(x^2+y^2-1) & = & 0 \end{array}\right. \tag{7}$$

6. *Conclure.*

Exemple 12 (A traiter en séance synchrone)

Considérons le problème d'optimisation suivant

$$\min\ x + 2y + 3z \quad s.c \left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z \leq 0 \end{array} \right. \tag{8}$$

1. *Quelle est la fonction à optimiser ?*
2. *Quelle est la contrainte K ?*
3. *Vérifier que la contrainte est qualifiée.*
4. *Montrer que le théorème de KKT est équivalent à la résolution du système.*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 1 + \lambda + 2\mu x & = & 0 \\ 2 + \lambda + 2\mu y & = & 0 \\ 3 + \lambda + 2\mu z & = & 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & 1 \\ \lambda(x + y + z) & = & 0 \end{array} \right. \tag{9}$$

5. *Vérifier que la solution du problème (8) est donnée par* $\left(\frac{-\sqrt{14}}{14}, \frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{3\sqrt{14}}{14}\right)$

Exercices

Exercice 13

Résoudre le problème d'optimisation suivant

$$\min \ x+z \quad s.c \left| \begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ y^2+z^2=4 \\ x \geq 0 \end{array} \right. \tag{10}$$

Exercice 14

Résoudre le problème d'optimisation suivant

$$\min \ x+y+z \quad s.c \left| \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ x \geq 0 \end{array} \right. \tag{11}$$