Rapport d'Analyse d'Enquête

Ben Idriss SOMA et Aissatou Sega DIALLO

28 avril 2025

Contents

1 Introduction

On considère le problème de minimisation d'une fonction quadratique :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x + c$$

avec :

- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (symétrique définie positive)
- $b \in \mathbb{R}^n$
- $c \in \mathbb{R}$

2 Partie Mathématique

2.1 Condition d'optimalité

Le minimum est atteint lorsque :

$$\nabla f(x^*) = Ax^* - b = 0$$

2.2 Méthode de Relaxation

Voici la méthode de relaxation (Gauss-Seidel) :

1. Initialisation : $x^{(0)} = 0$
2. Pour $k = 0, 1, ...$
   - Pour $i = 1, ..., n$
     - Mettre à jour $x_i^{(k+1)}$
   - Fin pour
   - Si $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \epsilon$, alors arrêter
3. Fin pour

3 Implémentation Python

```python
import numpy as np

def is_spd(A):
    """Vérifie si A est symétrique définie positive"""
    if not np.allclose(A, A.T):
        return False
    return np.all(np.linalg.eigvals(A) > 0)

def relaxation(A, b, max_iter=1000, tol=1e-6):
    """Implémentation de la méthode de relaxation"""
    n = len(b)
    x = np.zeros(n)
    for k in range(max_iter):
        x_old = x.copy()
        for i in range(n):
            x[i] = (b[i] - np.dot(A[i,:i], x[:i]) - np.dot(A[i,i+1:], x_old[i+1:])) / A[i,i]
        if np.linalg.norm(x - x_old) < tol:
            break
    return x
```

4 Application Numérique

Données du problème :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad c = 5$$

```python
A = np.array([[4, 1], [1, 3]])
b = np.array([1, 2])
x_star = relaxation(A, b)
```

5 Conclusion

La méthode de relaxation permet de résoudre efficacement des problèmes quadratiques convexes. Son implémentation est simple mais nécessite que la matrice A soit symétrique définie positive.