Höhere Mathematik III (BCI/BW/MLW)

Dr. Andreas Langer

technische universität dortmund

fakultät für mathematik

WS 2019-2020

Organisatorisches

- Vorlesungen: Mo, 10-12 Uhr, Audimax; Di, 16-18 Uhr, HG II/HS **1**
- Übungen HM3a (BCI/BW)
  - Mo 08:00 BCI, ZE04
  - Di 08:00 SRG1, 3.008
  - Di 10:00 SRG1, 3.008
  - Do 08:00 BCI, ZE04
  - Fr 12:00 BCI, ZE01
  - Fr 12:00 BCI, ZE15
- Übungen HM3 (MB)
  - Mo 08:00 SRG1, 1.001
  - Mo 10:00 SRG1, 1.004
  - Mo 16:00 SRG1, 2.010
  - Mo 16:00 HGI, HS4
  - Di 08:00 HGI, HS5
  - Mi 16:00 SRG1, 2.010
  - Do 14:00 Pav8, 0.21
  - Fr 08:00 SRG1, 1.004

Organisatorisches

- Globalübung: Di, 18-20 Uhr, HG II, HS 1
- Moodle-Arbeitsraum:
  `https://moodle.tu-dortmund.de/course/view.php?id=17066`

  Bezeichnung: **HM III WS 2019/20 (für BCI/BW/MB)**
  - Vorlesungsgrundlage
  - Übungen
  - Termine
  - Forum
  - ...
- Leistungsnachweise
- Dernière

Kapitel 19 — Gewöhnliche Differentialgleichungen

Motivation: Mechanik

Gedämpfter harmonischer Oszillator: $x = x(t)$ Auslenkung aus der Ruhelage

$$\underbrace{m\,x''(t)}_{\text{Trägheit}} + \underbrace{r\,x'(t)}_{\text{Reibung}} + \underbrace{D\,x(t)}_{\text{Rückstellkraft}} = \underbrace{F_0\,\cos(\beta\,t)}_{\text{äußere Kraft}}, \quad x(0) = 0, x'(0) = 0$$

Kapillarströmung: $v = v(r)$ Geschwindigkeit im Radialabstand von der zentralen Achse

$$r^2\,v'' + r\,v' = \frac{p_2 - p_1}{\eta\,L}\,r^2, \quad v(R) = 0, |v(r)| < \infty$$

Definition [Gewöhnliche Differentialgleichung (Dgl.) der Ordnung n]

- $F(x, y(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0:$ **implizite Form**
- $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)):$ **explizite Form**
- höchste vorkommende Ableitungsstufe n: **Ordnung** der Dgl.
- i.d.R. Verzicht auf das Argument x bei Ableitungsstufen von y:

$$F(x, y, \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)})$$

Definition [Gewöhnliche Differentialgleichung (Dgl.) der Ordnung n]

- $F(x, y(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0:$ **implizite Form**
- $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)):$ **explizite Form**
- höchste vorkommende Ableitungsstufe n: **Ordnung** der Dgl.
- i.d.R. Verzicht auf das Argument x bei Ableitungsstufen von y:

$$F(x, y, \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)})$$

Beispiele

- $(y')^2 - 2x\,y\,\cos(x\,y) = 0$: implizite Dgl.
- $x\,y^{(3)} - x^2 y'' + 2\,y = 4\,\sin x$ $(x > 0)$: implizite Dgl.
- $x\,y^{(3)} - x^2 y'' + 2\,y = 4\,\sin x \iff y^{(3)} = x\,y'' - \frac{2}{x}\,y + \frac{4}{x}\,\sin x$
- explizit $\to$ implizit: immer ✓, implizit $\to$ explizit: Auflösbarkeit!

Definition [Lösungsbegriff, Anfangswertproblem (AWP)]

- Vor.: $f : \Omega \to \mathbf{R}$ stetig für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}$
- $\varphi : I \to \mathbf{R}$ ist Lösung von $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) :\iff$
  - $\varphi \in C^n(I)$,
  - $\{(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x))^T \mid x \in I\} \subset \Omega$,
  - für alle $x \in I$ ist $\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x))$.
- analog für implizite Gleichungen
- Anfangswertproblem n-ter Ordnung: Suche einer Lösung φ der Dgl., die folgende **Anfangsbedingung** erfüllt:

$$\varphi(x_0) = a_0, \quad \varphi'(x_0) = a_1, \quad \ldots, \quad \varphi^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$$

mit

$$(x_0, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \overset{!}{\in} (I \times \mathbf{R}^n) \cap \Omega.$$

Beispiele (Anfangswertprobleme für skalare Dgl. n-ter Ordnung)

- $y'' + y' - y = \sin x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$
- $x\,y' + \frac{1}{x}\,y = e^x,\ y(1) = 3$
- $y^{(4)} = 3\,y''' - x^2\,y,\ y^{(k)}(-1) = -k,\ k = 0, \ldots, ???$
- $\sin(x\,y'') = y'' - x\,y' + 2\,y,\ y(0) = y'(0) = 0$
- $y^{(3)} = 2\,y'' + 4\,y' - y,\ y(2) = y'(2) = 2,\ y''(2) = 3$
- **kein** AWP: $y'' = x\,y' - 2\,y,\ y(1) = 0,\ y'(2) = 1$

Definition [Systeme 1. Ordnung]

- **System gewöhnlicher Dgl. 1. Ordnung**: n Gleichungen mit n unbekannten Funktionen $y_1, \dots, y_n$ **einer** Veränderlichen und ihren ersten Ableitungen
- Nur in expliziter Schreibweise ($\to$ (2)):

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n). \end{aligned} \tag{1}$$

- **Lösungsbegriff**: n univariate Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n : I \to \mathbf{R}$ mit

  $\varphi_i'(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)), \quad i = 1, \dots, n, \quad x \in I.$
- **Anfangswertaufgabe**: System 1. Ordnung plus - bei gegebenem $x_0 \in I$ - n **Anfangsbedingungen** der Form

  $y_1(x_0) = a_1, \dots, y_n(x_0) = a_n, \quad a_k \in \mathbf{R}$ vorgegeben, $k = 1, \dots, n$.

Fortsetzung Definition [Systeme 1. Ordnung]

- Vektorielle Schreibweise:

$$y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad y' := \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix},$$

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ \vdots \\ f_n(x,y) \end{pmatrix}, \quad y_0 := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

  Kompaktschreibweise:

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Beispiele (Anfangswertprobleme bei Systemen 1. O.)

- $$\begin{aligned} y_1' &= x\,(y_1+y_2), \\ y_2' &= 2\,y_1\,y_2 + y_2^2, \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- $$\begin{aligned} y_1' &= x\,(y_1 - y_2 - y_3) + x^2, \\ y_2' &= 2\,y_1 + y_2 - x^2\,y_3 - \sin x, \\ y_3' &= y_1 - x\,y_2 + \tfrac{1}{x}\,y_3, \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ bzw.}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}}_{y'} = \underbrace{\begin{pmatrix} x & -x & -x \\ 2 & 1 & -x^2 \\ 1 & -x & 1/x \end{pmatrix}}_{A(x)} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{y} + \underbrace{\begin{pmatrix} x^2 \\ -\sin x \\ 0 \end{pmatrix}}_{b(x)}$$

Korollar: Transformation skalarer AWP n-ter O. in Systeme 1. O.

Gegeben:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \quad y(x_0) = a_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = a_n$$

Transformation: $Y := (y_1, \ldots, y_n)^T$ definiert durch

$$y_1 := y, \quad y_2 := y', \quad \ldots, \quad y_{n-1} := y^{(n-2)}, \quad y_n := y^{(n-1)}.$$

Dann:

$$Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ y^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ f(t, Y) \end{pmatrix} =: F(x, Y).$$

Forts. Korollar: Skalare AWP n-ter O. $\rightarrow$ System 1. O.

Anfangsbedingungen:

$$\begin{array}{lclcl} y(x_0) & = & y_1(x_0) & = & a_1 \\ y'(x_0) & = & y_2(x_0) & = & a_2 \\ & \vdots & & & \\ y^{(n-1)}(x_0) & = & y_n(x_0) & = & a_n \end{array}$$

Vektoriell:

$$Y(x_0) = \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ \vdots \\ y_{n-1}(x_0) \\ y_n(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} =: a \in \mathbf{R}^n.$$

Beispiele (Trafo skalarer AWP n-ter O. $\rightarrow$ Systeme 1. O.)

$$y''' = x^2\, y'' - 2\, y' + y + e^x, \quad y(1) = y'(1) = 1, \quad y''(1) = 2$$

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad Y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ x^2\, y_3 - 2\, y_2 + y_1 + e^x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & x^2 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^x \end{pmatrix}$$

Qualitative Theorie (kurz)

- skalares o. vektorielles AWP: $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ (AWP)
- **Existenzsatz von Peano:** f stetig auf einem kompakten Rechteck R um den Anfangswert (x_0, y_0) impliziert die Existenz einer Lösung von (AWP) $y' = f(x,y)$, $y(x_0)$
- **Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf:** f_y stetig auf R impliziert die Eindeutigkeit der Lösung
  Iterative Berechnung der Lösung durch Picard-Iteration:

$$\varphi_n(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))\, dt, \quad n \in \mathbf{N}, \quad x \in I, \quad \varphi_0(x) = y_0.$$

Beispiel (Picard-Iteration)

AWP: $y' = y$, $y(0) = 2 =: \varphi_0(x)$.

$$\varphi_1(x) = 2 + \int_0^x f(t,2)\, dt = 2 + \int_0^x 2\, dt = 2 + 2\,x$$

$$\varphi_2(x) = 2 + \int_0^x (2 + 2\,t)\, dt = 2 + 2\,x + 2\,\frac{1}{2}\,x^2 = 2\sum_{k=0}^{2} \frac{x^k}{k!}$$

$$\varphi_3(x) = 2 + 2\int_0^x \sum_{k=0}^{2} \frac{t^k}{k!}\, dt = 2 + 2\sum_{k=0}^{2} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\, dt = 2\sum_{k=0}^{3} \frac{x^k}{k!}$$

Vermutung:

$$\varphi_n(x) = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \text{ (Induktionsbeweis!)}$$

mit

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 2\,e^x \qquad (\checkmark)$$

Definition (Dgl. mit getrennten Variablen)

Wir betrachten Differentialgleichungen der Form

$$y'(x) = f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$$

mit

- $g : I \to \mathbf{R}$ stetig,
- $h : J \to \mathbf{R}$ stetig,
- $h(y) \neq 0$ für alle $y \in J$.

Definition (Dgl. mit getrennten Variablen)

Wir betrachten Differentialgleichungen der Form

$$y'(x) = f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$$

mit

- $g : I \to \mathbf{R}$ stetig,
- $h : J \to \mathbf{R}$ stetig,
- $h(y) \neq 0$ für alle $y \in J$.

Lösung:

$H(z) = \int \frac{dz}{h(z)}$, $G(z) = \int g(z)\, dz$

$$\frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x) \qquad \Longleftrightarrow$$

$$H(y(x)) = \int \frac{y'(x)\, dx}{h(y(x))} = \int g(x)\, dx + C = G(x) + C, \quad C \in \mathbf{R}$$

Fortsetzung Lösung Dgl. mit getrennten Variablen:

- Falls H umkehrbar:

$$H(y(x)) = G(x) + C \iff y(x) = H^{-1}\,(G(x) + C)$$

Bezeichnung: **allgemeine Lösung** in impliziter bzw. expliziter Form

- Falls AW $y(x_0) = y_0$ gegeben: C bestimmen aus

$$H(y_0) = G(x_0) + C.$$

Beispiel 1: Dgl. mit getrennten Variablen

$$y' = a\,y,\; y(x_0) = y_0 \qquad (0 \neq a \in \mathbf{R})$$

Existenz+Eindeutigkeit der Lösung: $f_y = a$ stetig: ✓

$y_0 > (<)\ 0$, d.h. $y(x) > (<)\ 0$ in $U_\epsilon(x_0)$:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = a \overset{\text{Int.}}{\iff} \ln[\pm y(x)] = a\,x + \tilde{C} \iff y(x) = \pm C\,e^{a\,x}.$$

$y_0 = 0$: Division durch $y(x)$ nicht erlaubt! Betrachte $f(x) = y(x)\,e^{-a\,x}$:

$$f'(x) = [y'(x) - a\,y(x)]\,e^{-a\,x} = 0 \iff f(x) = C \iff y(x) = C\,e^{a\,x}.$$

AB: $y(x_0) = y_0 \rightsquigarrow C = y_0\,e^{-a\,x_0} \rightsquigarrow y(x) = y_0\,e^{a\,(x-x_0)}$.

Beispiel 2: Dgl. mit getrennten Variablen

$$y' = x\,y^3,\; y(1) = -2$$

Existenz+Eindeutigkeit der Lösung: $f_y = 3\,x\,y^2$ stetig als Polynom: ✓

$$\frac{y'}{y^3} = x \iff -\frac{1}{2}\frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}x^2 + \tilde{C} \iff y(x) = -\frac{1}{\sqrt{C - x^2}}.$$

AB: $y(1) = -2 \Longrightarrow C = 5/4 \Longrightarrow y(x) = -\frac{1}{\sqrt{5/4 - x^2}}$.

y existiert in $(-\sqrt{5}/2, +\sqrt{5}/2)$.

Beispiel 3: Fallgeschwindigkeit mit Luftwiderstand aus Ruhelage

$$v' = g - k\,v^2, \quad v(0) = 0, \quad k = \frac{1}{2m}\,c_w\,A\,\rho.$$

Existenz+Eindeutigkeit der Lösung: $f_v = -2\,k\,v$ stetig als Polynom: ✓

$$1 = \frac{v'}{g - k\,v^2} \iff t{+}C = \int \frac{v'\,dt}{g - k\,v^2} = \int \frac{v'\,dt}{\left(\sqrt{g} - \sqrt{k}\,v\right)\,\left(\sqrt{g} + \sqrt{k}\,v\right)}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{A}{\sqrt{g} - \sqrt{k}\,v} + \frac{B}{\sqrt{g} + \sqrt{k}\,v} = \frac{A\,\left(\sqrt{g} + \sqrt{k}\,v\right) + B\,\left(\sqrt{g} - \sqrt{k}\,v\right)}{\left(\sqrt{g} - \sqrt{k}\,v\right)\,\left(\sqrt{g} + \sqrt{k}\,v\right)}$$

$$\Longrightarrow A = B = \frac{1}{2\,\sqrt{g}}$$

Fortsetzung Beispiel 3: Fallgeschwindigkeit mit Luftwiderstand aus Ruhelage

$$\begin{aligned}\int \frac{v'\,dt}{g - k\,v^2} &= \frac{1}{2\sqrt{g}} \left[\int \frac{v'\,dt}{\sqrt{g} - \sqrt{k}\,v} + \int \frac{v'\,dt}{\sqrt{g} + \sqrt{k}\,v} \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{g\,k}} \left[\ln\left(\sqrt{g} + \sqrt{k}\,v\right) - \ln\left(\sqrt{g} - \sqrt{k}\,v\right) \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{g\,k}} \ln \frac{\sqrt{g} + \sqrt{k}\,v}{\sqrt{g} - \sqrt{k}\,v} = \frac{1}{2\sqrt{g\,k}} \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{k}{g}}\,v}{1 - \sqrt{\frac{k}{g}}\,v}.\end{aligned}$$

Verwende

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \qquad |x| < 1.$$

$$t + C = \frac{1}{\sqrt{g\,k}} \operatorname{artanh}\left(\sqrt{\frac{k}{g}}\,v\right), \quad \left(\sqrt{\frac{k}{g}}\,v < 1 \leadsto \text{s. Skript}\right)$$

Fortsetzung Beispiel 3: Fallgeschwindigkeit mit Luftwiderstand aus Ruhelage

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}} \tanh\left(\sqrt{g\,k}\,(t + C)\right).$$

$$v(0) = 0 \Longrightarrow C = 0 \Longrightarrow v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}} \tanh\left(\sqrt{g\,k}\,t\right)$$

Transformation von Dgl.: Zurückführung auf bekannte Typen

Exemplarisch für sog. **homogene Dgl.**:

$$y' = f(x,y) = \Phi\left(\frac{y}{x}\right), \quad \Phi \text{ gegeben}, \quad x > 0 \ (x < 0)$$

Etwa: $y' = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)$.

Lösung durch Substitution: $u(x) = \frac{y(x)}{x}$

$$y(x) = x\,u(x) \Longrightarrow y' = \underset{\sim\sim\sim}{u + x\,u'} \stackrel{!}{=} \Phi\left(\frac{y}{x}\right) = \underset{\sim\sim}{\Phi(u)}$$

Ergebnis: Dgl. mit getrennten Variablen

$$u' = \frac{1}{x}\left(\Phi(u) - u\right)$$

Beispiel: Transformation von Dgl.

$$y' = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right), \quad x > 0, \quad y(1) = 2$$

Subst.: $y(x) = x\,u(x)$

$$y' = u + x\,u' = \frac{1}{2}(1 + u^2) \iff u' = \frac{1}{2\,x}(u-1)^2$$

$$\frac{1}{2}\ln x + C = \ln\sqrt{x} + C = \int \frac{u'\,dx}{(u-1)^2} = \frac{1}{1-u}$$

$$u(x) = \frac{y(x)}{x} = 1 - \frac{1}{C + \ln\sqrt{x}} \iff y(x) = x - \frac{x}{C + \ln\sqrt{x}}.$$

$$y(1) = 2 \Longrightarrow 2 = 1 - \frac{1}{C} \iff C = -1 \iff y(x) = x + \frac{x}{1 - \ln\sqrt{x}}$$

Lineare Dgl. 1. Ordnung

$$y' + q(x)\,y = s(x), \quad q, s \in C(I) \text{ gegeben}, \quad x \in I$$

Bezeichnung: **Lineare Dgl. 1. Ordnung**

- Bezeichnungen:

  s: **Störfunktion, Inhomogenität, rechte Seite**

  $s = 0$: **homogene Dgl.**, $s \neq 0$: **inhomogene Dgl.**

- Bsp.: $y' + \frac{y}{x} = x^2$
- Warum „linear"? Betrachte sog. **Differentialoperator**
  $L : C^1(I) \to C(I)$, $L(y) := y' + q(x)\,y$

$$L(y_1 + y_2) = (y_1 + y_2)' + q(x)\,(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$$
$$L(\alpha\,y) = (\alpha\,y)' + q(x)\,(\alpha\,y) = \alpha\,L(y)$$

Linearitätsgesetze sind stets erfüllt!

- Lineare Probleme $L : U \to V$ mit $L(u) = v$ im Allgemeinen:

$$\text{kern } L := \{u \in U \,|\, L(u) = 0\}$$

  bildet stets einen Unterraum von U! Ist $\dim U = k < \infty$, dann ex. $u_1, \ldots, u_k$ mit

$$U = \left\{ u = \sum_{l=1}^{k} t_l\,u_l, \; t_1 \ldots, t_k \in \mathbf{R} \right\}.$$

- Allgemeine Lösungsstruktur von $L(u) = v$: u_0 sei irgendeine (bekannte) Lösung von $L(u) = v$, dann gilt:

$$\boxed{u \text{ löst } L(u) = v \iff u = u_0 + u_h}$$

  - Bez.: u_0 mit $L(u_0) = v$ heißt **partikuläre Lösung**
  - $u_h \in$ kern L, d.h. $u_h = \sum_{l=1}^{k} t_l\,u_l$ (s.o.)

Beweis:

$$\boxed{u \text{ löst } L(u) = v \iff u = u_0 + u_h,\ L(u_0) = v,\ L(u_h) = 0}$$

$\Longleftarrow$: $L(u_0 + u_h) = L(u_0) + L(u_h) = v$

$\Longrightarrow$: $u = u_0 + (u - u_0)$ mit $L(u - u_0) = L(u) - L(u_0) = v - v = 0$,

also

$$u = u_0 + u_h \quad u_h = u - u_0 \in \text{ kern } L.$$

$\square$

Arbeitsprogramm:

- Bestimmung von kern L
- Bestimmung von u_0

Bestimmung von kern L:

$$\begin{aligned} y' + q(x)\,y = 0 &\iff \frac{y'}{y} = -q(x) \\ &\iff \ln|y| = -\int q(x)\,dx + \tilde{C} = -Q(x) + \tilde{C} \\ &\iff y(x) = C\,e^{-Q(x)}. \end{aligned}$$

Also:

$$\text{kern } L = \{y_h \in C^1(I) \,|\, y_h(x) = C\,e^{-Q(x)}, C \in \mathbf{R}, Q = \int q\,dx\}$$

Bezeichnung für $e^{-Q(x)}$: **Fundamentallösung**, Basisfunktion von kern L, $\dim \text{kern } L = 1$.

Berechnung einer partikulären Lösung: Variation der Konstanten

Voraussetzung: $e^{-Q(x)}$ sei Fundamentallösung, $Q = \int q\,dx$

Ansatz:

$$y_p(x) = C(x)\,e^{-Q(x)} \Longrightarrow y_p' = C'\,e^{-Q} + C\,(-q)\,e^{-Q}$$

Also:

$$y_p' + q\,y_p = C'\,e^{-Q} + C\,(-q)\,e^{-Q} + q\,C\,e^{-Q} = C'\,e^{-Q} \stackrel{!}{=} s$$

Bestimme

$$C(x) = \int s(x)\,e^{Q(x)}\,dx,$$

dann ist

$$y_p(x) = C(x)\,e^{-Q(x)}$$

partikuläre Lösung der (inhomogenen) Dgl. !

Beispiel 1: lineare Dgl. 1. Ordnung

$$y' + \frac{y}{x} = x^2, \quad y(1) = 1/2.$$

Homogenes Problem:

$$y' + \frac{y}{x} = 0 \iff \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} \iff \int \frac{y'}{y}\,dx = -\int \frac{dx}{x} + c$$
$$\iff \ln|y| = -\ln|x| + c \iff y(x) = \frac{c}{x}, \quad c \in \mathbf{R}.$$

Partikuläre Lösung durch VdK:

$$y_p = \frac{c(x)}{x} \Longrightarrow y_p' = \frac{c'\,x - c}{x^2} \Longrightarrow y_p' + \frac{y_p}{x} = \frac{c'\,x - c}{x^2} + \frac{c}{x^2} = \frac{c'}{x} \stackrel{!}{=} x^2$$
$$\Longrightarrow c'(x) = x^3 \Longrightarrow c(x) = \frac{1}{4}\,x^4 \Longrightarrow y_p(x) = \frac{1}{4}\,x^3$$

Fortsetzung Beispiel 1: lineare Dgl. 1. Ordnung

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = \frac{1}{4}\,x^3 + \frac{c}{x}, \quad c \in \mathbf{R}$$

Bestimmung der Konstanten aus AB:

$$1/2 = y(1) = 1/4 + c \Longrightarrow c = 1/4$$

Lösung des AWP:

$$y(x) = \frac{1}{4}\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)$$

Beispiel 2: lineare Dgl. 1. Ordnung

$$y' - 2y = \sin x, \quad y(0) = 1$$

Homogenes Problem:

$$\frac{y'}{y} = 2 \iff \ln|y| = 2\,x + \tilde{c} \iff y(x) = c\,e^{2\,x}, \quad c \in \mathbf{R}.$$

Partikuläre Lösung durch VdK:

$$\begin{aligned} y_p = c(x)\,e^{2\,x} &\Longrightarrow y_p' = (c' + 2\,c)\,e^{2\,x} \Longrightarrow y_p' - 2\,y_p = c' e^{2\,x} \stackrel{!}{=} \sin x \\ &\Longrightarrow c'(x) = e^{-2\,x}\,\sin x \\ &\Longrightarrow c(x) = -\frac{1}{5}\,e^{-2\,x}\,(2\,\sin x + \cos x) \\ &\Longrightarrow y_p(x) = -\frac{1}{5}\,(2\,\sin x + \cos x) \end{aligned}$$

Fortsetzung Beispiel 2: lineare Dgl. 1. Ordnung

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = c\,e^{2\,x} - \frac{1}{5}\,(2\,\sin\,x + \cos\,x), \quad c, x \in \mathbf{R}$$

Bestimmung der Konstanten aus AB:

$$1 = y(0) = c - \frac{1}{5} \Longrightarrow c = 6/5$$

Lösung des AWP:

$$y(x) = \frac{6}{5}\,e^{2\,x} - \frac{1}{5}\,(2\,\sin\,x + \cos\,x)$$

Bernoulli-Dgl.: Transformationen auf lineare Dgl. 1. Ordnung

Hatten: Homogene Dgl. $\overset{\text{Trafo}}{\rightsquigarrow}$ Dgl. mit getrennten Variablen

Analog: Bernoulli-Dgl. $\overset{\text{Trafo}}{\rightsquigarrow}$ lin Dgl. 1. Ordnung

Bernoulli-Dgl: $y' = p(x)\,y + q(x)\,y^\alpha$, $p, q \in C([a,b])$, $\alpha \notin \{0,1\}$

$$u(x) := y(x)^{1-\alpha}$$

$$u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = (1-\alpha)y^{-\alpha}(p\,y + q\,y^\alpha) = (1-\alpha)\,p\,u + (1-\alpha)\,q.$$

Bernoulli-Dgl. in $y \rightsquigarrow$ inhomogene, lineare Dgl. 1. Ordnung in u:

$$u' + (\alpha - 1)\,p(x)\,u = (1-\alpha)\,q(x)$$

Beispiel: Bernoulli-Dgl.

$$y' = \frac{1}{1+x}\,y - \frac{1}{1+x}\,y^2, \quad y(0) = 1.$$

Substitution: $u(x) = [y(x)]^{-1} = 1/y(x)$

$$u' = -y^{-2}\,y' = -y^{-2}\left(\frac{1}{1+x}\,y - \frac{1}{1+x}\,y^2\right) = -\frac{1}{1+x}\,u + \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{u'}{u} = -\frac{1}{1+x} \Longrightarrow \ln u = -\ln(1+x) + \tilde{c} \Longrightarrow u_h = \frac{c}{1+x}$$

Partikuläre Lösung mit VdK: $u_p = \frac{c}{1+x}$

$$u_p' + \frac{u_p}{1+x} = \frac{c'\,(1+x) - c}{(1+x)^2} + \frac{c}{(1+x)^2} = \frac{c'}{1+x} \overset{!}{=} \frac{1}{1+x} \Longrightarrow c(x) = x$$

Allgemeine Lösung: $u(x) = \frac{c+x}{1+x}$, d.h. $y(x) = \frac{1+x}{c+x}$.

AB: $y(0) = 1 \Longrightarrow c = 1 \Longrightarrow y(x) = 1$

Lineare Dgl. der Ordnung n

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\,y = s(x), \quad a_k, s \in C(I) \text{ gegeben}$$

Bezeichnung: Lineare Dgl. n-ter Ordnung

- Bezeichnungen:

  s: Störfunktion, Inhomogenität, rechte Seite

  $s = 0$: homogene Dgl., $s \neq 0$: inhomogene Dgl.

- Bsp.: $y''' + x\,y'' - e^x\,y' - 2\,y = x^2$
- Warum „linear"?
  Betrachte Differentialoperator $L : C^n(I) \to C(I)$ mit

  $$L(y) := y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\,y$$

  Linearitätsgesetze sind stets erfüllt!

Lineare Dgl. der Ordnung n

- Allgemeine Lösungsstruktur von $L(u) = v$: u_0 sei irgendeine (bekannte) Lösung von $L(u) = v$. Dann gilt:

$$\boxed{u \text{ löst } L(u) = v \iff u = u_0 + u_h,\, u_h \in \text{ kern } L}$$

- Also gesucht:
  - Basis von kern L
  - partikuläre Lösung u_0
- Wichtige Aussage:

$$\boxed{\dim \text{ kern } L = n}$$

Der Kern eines linearen Differentialoperators der Ordnung n wird also auch von n Basisfunktionen, den sog. Fundamentallösungen, aufgespannt! Das gesamte Basissystem heißt dann auch Fundamentalsystem.

Aufgabe 1: Bestimmung eines Fundamentalsystems

Wichtig: Die Aufgabe ist sehr schwierig für allg. lin. Dgl. n-ter Ordnung mit beliebigen stetigen $a_k \in C(I)$. Wir schränken das Problem ein:

$$L(y) = y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n\, y = s(x), \; \boxed{a_k \in \mathbf{R}}, s \in C(I) \text{ geg.}$$

Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbf{C} \quad \Longrightarrow \quad y^{(k)} = \lambda^k\, e^{\lambda x}, k \in \mathbf{N}_0$

Einsetzen:

$$L(e^{\lambda x}) = \lambda^n\, e^{\lambda x} + \sum_{k=1}^{n} a_k\, \lambda^{n-k}\, e^{\lambda x} = e^{\lambda x}\left(\lambda^n + \sum_{k=1}^{n} a_k\, \lambda^{n-k}\right).$$

Wegen $e^{\lambda x} \neq 0$ für alle x:

$$L(e^{\lambda x}) = 0 \iff 0 = \lambda^n + \sum_{k=1}^{n} a_k\, \lambda^{n-k} =: p(\lambda)$$

Aufgabe 1: Bestimmung eines Fundamentalsystems

Bezeichnung: $p = p(\lambda) \in \mathbf{P}_n$ heißt **charakteristisches Polynom (von L)**

Folgerung:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} e^{\lambda\,x} \text{ löst die hom. Dgl.} & \Longleftrightarrow & \lambda \text{ ist Nullstelle des char. Polynoms} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ L(e^{\lambda\,x}) = 0 & \Longleftrightarrow & p(\lambda) = 0 \end{array}}$$

Aufgabe 1: Bestimmung eines Fundamentalsystems

Bezeichnung: $p = p(\lambda) \in \mathbf{P}_n$ heißt **charakteristisches Polynom (von L)**

Folgerung:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} e^{\lambda\,x} \text{ löst die hom. Dgl.} & \Longleftrightarrow & \lambda \text{ ist Nullstelle des char. Polynoms} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ L(e^{\lambda\,x}) = 0 & \Longleftrightarrow & p(\lambda) = 0 \end{array}}$$

Sinnvolle Fragen: Nullstellenkonstellation und Basisfunktionen von kern L

- Fall: n einfache Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \rightsquigarrow$ Sind die n Lösungen $e^{\lambda_1\,x}, \ldots, e^{\lambda_n\,x}$ des hom. Problems linear unabhängig?
- Fall: λ mehrfache Nullstelle der Vielfachheit $r > 1 \rightsquigarrow$ Wie erhält man r Nullstellen?
- Fall: λ im Allg. komplex $\rightsquigarrow$ Wie erhält man reelle Fundamentallösungen?

Fortsetzung Aufgabe 1: Bestimmung eines Fundamentalsystems

Voraussetzung: Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbf{C}$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von p der Vielfachheit $r_1, \ldots, r_s$

Aussage 1: $\boxed{p^{(k)}(\lambda_j) = 0, \quad k = 0, \ldots, r_j - 1, \quad j = 1, \ldots, s}$

Beweis: Sei $\lambda \in \mathbf{C}$ r-fache Nullstelle von $p \in \mathbf{P}_n$, $r \leq n$. Also:

$$p(x) = (x - \lambda)^r q(x), \quad q \in \mathbf{P}_{n-r}$$

Leibnizsche Produktregel:

$$p^{(k)}(x) = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \underbrace{\frac{d^l}{dx^l} [(x-\lambda)^r]}_{= r \ldots (r-l+1)\,(x-\lambda)^{r-l}} \frac{d^{k-l}}{dx^{k-l}} q \Longrightarrow \text{Beh.}$$

Beachte: $0 \leq l \leq k \leq r - 1$ □

Fortsetzung Aufgabe 1: Bestimmung eines Fundamentalsystems

Voraussetzung: Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbf{C}$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von p der Vielfachheit $r_1, \ldots, r_s$

Aussage 2: $\boxed{L(x^l\, e^{\lambda_j x}) = 0,\ l = 0, \ldots, r_j - 1,\ j = 1, \ldots, s}$

Beweis: $\lambda \in \mathbf{C}$ sei r-fache Nullstelle von p, betrachte $e^{\lambda x}$ als Funktion von x und λ und L als partiellen Differentialoperator

$$L(f(x,\lambda)) = \frac{\partial^n}{\partial x^n} f + \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial^{n-k}}{\partial x^{n-k}} f$$

Satz von Schwarz:

$$\begin{aligned} L(x^l\, e^{\lambda x}) &= L\left(\frac{d^l}{d\lambda^l} e^{\lambda x}\right) = \frac{d^l}{d\lambda^l} L\left(e^{\lambda x}\right) \\ &= \frac{d^l}{d\lambda^l} \left[\lambda^n e^{\lambda x} + \sum_{k=1}^{n} a_k\, \lambda^k\, e^{\lambda x}\right] = \frac{d^l}{d\lambda^l} [p(\lambda)\, e^{\lambda x}] \end{aligned}$$

Fortsetzung Aufgabe 1: Bestimmung eines Fundamentalsystems

Leibnizsche Produktregel:

$$L(x^l\, e^{\lambda\, x}) = \frac{d^l}{d\lambda^l}\,[p(\lambda)\, e^{\lambda\, x}] = \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}\, p(\lambda)\, \frac{\partial^{l-k}}{\partial \lambda^{l-k}}\, e^{\lambda\, x}$$

$$= \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k}\, p^{(k)}(\lambda)\, x^{l-k}\, e^{\lambda\, x} = 0, \text{ da } k \le l \le r-1.$$

□

Konsequenz

Zu jeder r-fachen Nullstelle $\lambda \in \mathbf{C}$ sind r (ggf. komplexe) Funktionen bekannt, die die homogene Dgl. $L(y) = 0$ lösen:

$$e^{\lambda\, x}, x\, e^{\lambda\, x}, x^2\, e^{\lambda\, x}, \ldots, x^{r-1}\, e^{\lambda\, x}$$

Fortsetzung Aufgabe 1: Bestimmung eines Fundamentalsystems

Voraussetzung: Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbf{C}$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von p der Vielfachheit $r_1, \ldots, r_s$

Aussage 3: $\boxed{\{x^l\, e^{\lambda_j\, x}, l = 0, \ldots, r_j - 1, j = 1, \ldots, s\}}$ sind lin. unabh.!

Beweis: per Ind. nach s (Skript). Bsp. für 1 einf., 1 dopp. Nullstelle:

$$0 = t_1\, e^{\lambda_1\, x} + t_2\, e^{\lambda_2\, x} + t_3\, x\, e^{\lambda_2\, x} \qquad \text{für alle } x$$

$$0 = t_1\, \lambda_1\, e^{\lambda_1\, x} + t_2\, \lambda_2\, e^{\lambda_2\, x} + t_3\, [e^{\lambda_2\, x} + x\, \lambda_2\, e^{\lambda_2\, x}]$$

$$0 = t_1\, \lambda_1^2\, e^{\lambda_1\, x} + t_2\, \lambda_2^2\, e^{\lambda_2\, x} + t_3\, [\lambda_2\, e^{\lambda_2\, x} + \lambda_2\, e^{\lambda_2\, x} + \lambda_2^2\, x\, e^{\lambda_2\, x}]$$

$$x = 0: \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 2\,\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}, \quad \det A = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$$

Fortsetzung Aufgabe 1: Bestimmung eines Fundamentalsystems

Voraussetzung: Sei $\lambda = \alpha + i\,\beta \in \mathbf{C}$ $(\beta \neq 0)$ Nullstelle von p der Vielfachheit r

Aussage 4: $\boxed{\text{Konstruktion eines reellen Fundamentalsystems}}$

Bekannt:

- $x^l e^{\lambda\,x}$, $l = 0, \dots, r-1$, komplexe Fundamentallösungen zu λ
- $a_k \in \mathbf{R} \Longrightarrow \overline{\lambda}$ Nullstelle von p der Vielfachheit r
- $x^l e^{\overline{\lambda}\,x}$, $l = 0, \dots, r-1$, komplexe Fundamentallösungen zu $\overline{\lambda}$

Basisaustauschsatz:

$$\frac{1}{2}\,x^l e^{\lambda\,x} + \frac{1}{2}\,x^l e^{\overline{\lambda}\,x} = x^l\,e^{\alpha\,x}\,\cos(\beta\,x)$$
$$\frac{1}{2\,i}\,x^l e^{\lambda\,x} - \frac{1}{2\,i}\,x^l e^{\overline{\lambda}\,x} = x^l\,e^{\alpha\,x}\,\sin(\beta\,x)$$

Beispiel 1: Bestimmung eines Fundamentalsystems

$y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = 0$

$p(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda+1)^3 \stackrel{!}{=} 0.$

Fundamentalsystem:

$$\boxed{y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = x\,e^{-x}, \quad y_3(x) = x^2\,e^{-x}}$$

Beispiel 2: Bestimmung eines Fundamentalsystems

$y^{(5)} - 5\,y^{(4)} + 2\,y''' - 10\,y'' + y' - 5\,y = 0$

$p(\lambda) = \lambda^5 - 5\,\lambda^4 + 2\,\lambda^3 - 10\,\lambda^2 + \lambda - 5 = (\lambda+i)^2(\lambda-i)^2(\lambda-5) \stackrel{!}{=} 0.$

Komplexes Fundamentalsystem:

$$\boxed{y_1 = e^{5\,x}, y_2 = e^{i\,x}, y_3 = x\,e^{i\,x}, y_4 = e^{-i\,x}, y_5 = x\,e^{-i\,x}}$$

Reelles Fundamentalsystem:

$$\boxed{y_1 = e^{5\,x}, y_2 = \cos x, y_3 = x\cos x, y_4 = \sin x, y_5 = x\sin x}$$

Beispiel 3: Bestimmung eines Fundamentalsystems

$y^{(3)} + 5y'' + 8y' + 6y = 0$

$p(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 8\lambda + 6 \stackrel{!}{=} 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -3, \quad \lambda_{2,3} = -1 \pm i.$

Komplexes Fundamentalsystem:

$$\boxed{y_1(x) = e^{-3\,x}, \quad y_2(x) = e^{(-1+i)\,x}, \quad y_3(x) = e^{(-1-i)\,x},}$$

Reelles Fundamentalsystem:

$$\boxed{y_1(x) = e^{-3\,x}, \quad y_2(x) = e^{-x}\,\cos x, \quad y_3(x) = e^{-x}\,\sin x.}$$

Beispiel 4: Bestimmung eines Fundamentalsystems

$y^{(4)} + 4\,y''' + 14\,y'' + 20\,y' + 25\,y = 0$

$p(\lambda) = \lambda^4 + 4\,\lambda^3 + 14\,\lambda^2 + 20\,\lambda + 25 = (\lambda^2 + 2\,\lambda + 5)^2$

Nullstellen: $\lambda_{1,2} = -1 + 2\,i, \quad \lambda_{3,4} = -1 - 2\,i$

Komplexes Fundamentalsystem:

$$\boxed{\begin{array}{ll} y_1(x) = e^{(-1+2\,i)\,x}, & y_2(x) = x\,e^{(-1+2\,i)\,x}, \\ y_3(x) = e^{(-1-2\,i)\,x}, & y_4(x) = x\,e^{(-1-2\,i)\,x} \end{array}}$$

Reelles Fundamentalsystem:

$$\boxed{\begin{array}{ll} y_1(x) = e^{-x}\,\cos(2\,x), & y_2(x) = x\,e^{-x}\,\cos(2\,x), \\ y_3(x) = e^{-x}\,\sin(2\,x), & y_4(x) = x\,e^{-x}\,\sin(2\,x) \end{array}}$$

Aufgabe 2: Bestimmung einer partikulären Lösung

Methode 1: Variation der Konstanten

- Voraussetzung: Fundamentalsystem $y_1, \ldots, y_n$ sei bekannt
- Ansatz:

$$y_p(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)\, y_k(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} =: y \cdot c$$

- Beachte: es ex. nur 1 Bedingung zur Bestimmung der n unbekannten Funktionen $c_1, \ldots, c_n$, nämlich die inhomogene Dgl. selbst:

$$y_p^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} a_k\, y_p^{(n-k)} \overset{!}{=} s(x)$$

- Zur eindeutigen Bestimmung der n Funktionen stellen wir $n-1$ neue (prinzipiell frei wählbare) Bedingungen auf!

Aufgabe 2: Bestimmung einer partikulären Lösung

Methode 1: Variation der Konstanten

- Berechnung der Ableitungen von y_p, Aufstellen von $n-1$ zus. Forderungen:

$$\begin{aligned}
y_p' &= y' \cdot c + \cancel{y \cdot c'}, \quad \text{Forderung: } y \cdot c' \overset{!}{=} 0 \\
y_p'' &= y'' \cdot c + \cancel{y' \cdot c'}, \quad \text{Forderung: } y' \cdot c' \overset{!}{=} 0 \\
&\vdots \\
y_p^{(n-1)} &= y^{(n-1)} \cdot c + \cancel{y^{(n-2)} \cdot c'}, \quad \text{Forderung: } y^{(n-2)} \cdot c' \overset{!}{=} 0 \\
y_p^{(n)} &= y^{(n)} \cdot c + y^{(n-1)} \cdot c'.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Bestimmung einer partikulären Lösung

Methode 1: Variation der Konstanten

- Einsetzen in die Dgl. (n-te Forderung):

$$
\begin{aligned}
y_p^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} a_k\, y_p^{(n-k)} &= y^{(n)} \cdot c + y^{(n-1)} \cdot c' + \sum_{k=1}^{n} a_k\, y^{(n-k)} \cdot c \\
&= y^{(n-1)} \cdot c' + \underbrace{\left[y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} a_k\, y^{(n-k)} \right]}_{=0} \cdot c \\
&= y^{(n-1)} \cdot c' \overset{!}{=} s(x).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2: Bestimmung einer partikulären Lösung

Methode 1: Variation der Konstanten

Nutze $a \cdot b = a^T\, b$, dann stellen sich die n Forderungen dar als:

$$
\left.
\begin{array}{rcl}
y \cdot c' &=& 0 \\
y' \cdot c' &=& 0 \\
& \vdots & \\
y^{(n-2)} \cdot c' &=& 0 \\
y^{(n-1)} \cdot c' &=& s
\end{array}
\right\} \Leftrightarrow
\begin{pmatrix}
y_1 & \cdots & y_n \\
y_1' & \cdots & y_n' \\
\vdots & & \vdots \\
y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ s \end{pmatrix}
$$

Name der Systemmatrix: Wronski-Matrix $V = V(x)$

Programm:

- Löse LGS (Vorsicht: Matrixeinträge sind Funktionen, Gauß-Algorithmus nicht möglich)
- Integriere den Lösungsvektor c' (komponentenweise)
- Bilde $y_p = \sum_{k=1}^{n} c_k\, y_k$

Aufgabe 2: Bestimmung einer partikulären Lösung

Methode 1: Beispiel 1 VdK

$$y'' + y' - 6\,y = -4\,e^x, \quad p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3) \overset{!}{=} 0$$

Fundamentallösungen: $y_1(x) = e^{2\,x}, \quad y_2(x) = e^{-3\,x}$
VdK:

$$V(x)\,c' = \begin{pmatrix} e^{2\,x} & e^{-3\,x} \\ 2\,e^{2\,x} & -3\,e^{-3\,x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4\,e^x \end{pmatrix}$$

Zu beachten speziell für $n = 2$:

$$V(x)\,c' = \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} \iff c' = \frac{1}{\det V(x)} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\det V(x)} \begin{pmatrix} -y_2\,s \\ y_1\,s \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Bestimmung einer partikulären Lösung

Hier:

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = -\frac{e^x}{5} \begin{pmatrix} -3\,e^{-3\,x} & -e^{-3\,x} \\ -2\,e^{2\,x} & e^{2\,x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -4\,e^x \end{pmatrix} = \frac{4}{5} \begin{pmatrix} -e^{-x} \\ e^{4\,x} \end{pmatrix}.$$

Integration:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4\,e^{-x} \\ e^{4\,x} \end{pmatrix}$$

$$y_p(x) = c_1(x)\,y_1(x) + c_2(x)\,y_2(x) = \frac{4}{5}\,e^{-x}\,e^{2\,x} + \frac{1}{5}\,e^{4\,x}\,e^{-3\,x} = e^x.$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = e^x + c_1\,e^{2\,x} + c_2\,e^{-3\,x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

Aufgabe 2: Bestimmung einer partikulären Lösung

Methode 1: Beispiel 2 VdK

$$y''' - y'' + y' - y = 1 - x.$$

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = (\lambda - 1)(\lambda + i)(\lambda - i).$$

Fundamentalsystem: $y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = \cos x, \quad y_3(x) = \sin x$

VdK:

$$\begin{pmatrix} e^x & \cos x & \sin x \\ e^x & -\sin x & \cos x \\ e^x & -\cos x & -\sin x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - x \end{pmatrix}$$

Lösung mit Cramerscher Regel:

$$\begin{vmatrix} e^x & \cos x & \sin x \\ e^x & -\sin x & \cos x \\ e^x & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \ldots = 2\,e^x = \det V$$

Aufgabe 2: Bestimmung einer partikulären Lösung

$$\begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 1 - x & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \ldots = 1 - x = \det V_1,$$

$$\begin{vmatrix} e^x & 0 & \sin x \\ e^x & 0 & \cos x \\ e^x & 1 - x & -\sin x \end{vmatrix} = \ldots = (x - 1)\,e^x\,(\cos x - \sin x) = \det V_2,$$

$$\begin{vmatrix} e^x & \cos x & 0 \\ e^x & -\sin x & 0 \\ e^x & -\cos x & 1 - x \end{vmatrix} = \ldots = -(1 - x)\,e^x\,(\sin x + \cos x) = \det V_3$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 - x)\,e^{-x} \\ (1 - x)\,(\sin x - \cos x) \\ (x - 1)\,(\sin x + \cos x) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Bestimmung einer partikulären Lösung

Integration:

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \\ c_3(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x\, e^{-x} \\ x\,(\sin x + \cos x) - 2\, \sin x \\ x\,(\sin x - \cos x) + 2\, \cos x \end{pmatrix}.$$

Partikuläre Lösung (Reihenfolge beachten!):

$$\begin{aligned} y_p(x) = \frac{1}{2}\, x &+ \left[\frac{1}{2}\, x\,(\sin x + \cos x) - \sin x\right] \cos x \\ &+ \left[\frac{1}{2}\, x\,(\sin x - \cos x) + \cos x\right] \sin x = \ldots = x \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = x + c_1\, e^x + c_2\, \cos x + c_3\, \sin x, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}.$$

Aufgabe 2: Bestimmung einer partikulären Lösung

Methode 2:

Ansatz vom Typ der Rechten Seite, Methode der unbest. Koeffizienten

3 Typen für s:

- $s \in \mathbf{P}_m$
- $s(x) = p_m(x)\, e^{\alpha\, x}$, $p_m \in \mathbf{P}_m$, $\alpha \in \mathbf{C}$
- $s_1(x) = e^{\alpha\, x}\, p_m(x)\, \cos(\beta\, x)$ oder $s_2(x) = e^{\alpha\, x}\, p_m(x)\, \sin(\beta\, x)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $p_m \in \mathbf{P}_m$

Bem.: Die Typen bauen aufeinander auf. Mit dem richtigen Verständnis von Typ 3 sind Typ 1 und 2 überflüssig.
Trotzdem behandeln wir die Typen in der obigen Reihenfolge.

Aufgabe 2: Bestimmung einer partikulären Lösung

Methode 2:

Ansatz vom Typ der Rechten Seite, Methode der unbest. Koeffizienten

Typ 1: $s \in \mathbf{P}_m$, d.h. $s(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k\, x^{m-k}$, $a_k, b_k \in \mathbf{C}$, $b_0 \neq 0$

Sei r die Vielfachheit von $\lambda = 0$ als Nullstelle im charakteristischen Polynom p von L, dann lautet der Ansatz vom Typ der Rechten Seite:

$$y_p(x) = x^r \sum_{k=0}^{m} A_k\, x^{m-k}$$

- Ansatz mit gleichem Polynomgrad wie s mit unbestimmten Koeffizienten $A_0, \ldots, A_m$
- ggf. Erhöhung um r Potenzen, falls $\lambda = 0$ r-fache Nullstelle von p

Aufgabe 2: Bestimmung einer partikulären Lösung

Methode 2:

Ansatz vom Typ der Rechten Seite, Methode der unbest. Koeffizienten

Beispiele zu Typ 1:

- $y''' - 2\,y'' + 3\,y' - y = x^2 + x^3$,
  Ansatz: $y_p = A_0\, x^3 + A_1\, x^2 + A_2\, x + A_3$
- $y^{(4)} - y'' = 2 - x + x^2$,
  Ansatz: $y_p(x) = x^2\,(A_0\, x^2 + A_1\, x + A_2)$
- $y'' - y = 1$,
  Ansatz: $y_p(x) = A_0$
- $\sum_{k=1}^{n} k\, y^{(k)} = x$,
  Ansatz: $y_p(x) = x\,(A_0\, x + A_1)$

Aufgabe 2: Bestimmung einer partikulären Lösung

Methode 2:

Ansatz vom Typ der Rechten Seite, Methode der unbest. Koeffizienten

$$\boxed{\text{Typ 2: } s(x) = e^{\alpha\, x} \sum_{k=0}^{m} b_k\, x^{m-k},\ \alpha, a_k, b_k \in \mathbf{C},\ b_0 \neq 0}$$

Sei r die Vielfachheit von α als Nullstelle im charakteristischen Polynom p von L, dann lautet der Ansatz vom Typ der Rechten Seite:

$$y_p(x) = x^r\, e^{\alpha\, x} \sum_{k=0}^{m} A_k\, x^{m-k}$$

- Ansatz mit gleichem Polynomgrad wie in s mit unbestimmten Koeffizienten $A_0, \dots, A_m$
- ggf. Erhöhung um r Potenzen, falls α r-fache Nullstelle von p (keine Nullstelle: $r = 0$)
- identischer Exponentialterm

Aufgabe 2: Bestimmung einer partikulären Lösung

Methode 2:

Ansatz vom Typ der Rechten Seite, Methode der unbest. Koeffizienten

Beispiele zu Typ 2:

- $y''' - 2\,y'' + 3\,y' - y = e^{2\,x}\,(x^2 + x^3)$,
  Ansatz: $y_p = e^{2\,x}\,(A_0\,x^3 + A_1\,x^2 + A_2\,x + A_3)$
- $y^{(4)} - y'' = 2 - x + x^2$,
  Ansatz: $y_p(x) = x^2\,(A_0\,x^2 + A_1\,x + A_2)$
- $y'' - y = e^x$,
  Ansatz: $y_p(x) = A_0\,e^x$
- $\sum_{k=1}^{n} k\,y^{(k)} = x\,e^{-x}$,
  Ansatz: $y_p(x) = x\,e^{-x}\,(A_0\,x + A_1)$

Methode 2:

Ansatz vom Typ der Rechten Seite, Methode der unbest. Koeffizienten

$$\boxed{\text{Typ 3: } s_1(x) = e^{\alpha\, x}\, \cos(\beta\, x)\, p_m(x) \text{ oder } s_2(x) = e^{\alpha\, x}\, \sin(\beta\, x)\, p_m(x)}$$

Achtung: p_m ist hier ein **reelles** Polynom, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$!!!

$$\lambda := \alpha + i\,\beta, \quad \tilde{s}(x) := e^{\lambda\, x}\, p_m(x) \rightsquigarrow y_p \text{ mit } L(y_p) = \tilde{s} \quad \text{(Typ 2!)}$$

Linearität von L und Euler-Formel (beachte: y_p komplexe Funktion!):

$$\begin{aligned} L(y_p) &= L(\text{Re}\ y_p) + i\, L(\text{Im}\ y_p) = e^{(\alpha+\beta\, i)\, x}\, p_m(x) \\ &= e^{\alpha\, x} p_m(x)\, [\cos(\beta\, x) + i\, \sin(\beta\, x)]\,. \end{aligned}$$

Vergleich von Real- und Imaginärteil:

$$L(\text{Re}\ y_p) = e^{\alpha\, x} p_m(x)\, \cos(\beta\, x), \quad L(\text{Im}\ y_p) = e^{\alpha\, x} p_m(x)\, \sin(\beta\, x).$$

Methode 2:

Ansatz vom Typ der Rechten Seite, Methode der unbest. Koeffizienten

Beispiele zu Typ 3:

- $y''' - 2\, y'' + 3\, y' - y = e^{2\, x}\, (x^2 + x^3)\, \cos x$
  - Bilde $\tilde{s} = e^{(2+i)\, x}\, (x^2 + x^3)$
  - $2 + i$ ist keine Nullstelle von $p(\lambda) = \lambda^3 - 2\, \lambda^2 + 3\, \lambda - 1$
  - Ansatz $y_p = e^{(2+i)\, x}\, (A_0\, x^3 + A_1\, x^2 + A_2\, x + A_3)$ einsetzen in $L(y_p) = \tilde{s}$ und $A_0, \ldots, A_3$ berechnen
  - gesuchte partikuläre Lösung: Re y_p
- $y^{(4)} + y'' = (2 - x + x^2)\, \sin x$
  - Bilde $\tilde{s} = e^{i\, x}\, (2 - x + x^2)$
  - i ist einfache Nullstelle von $p(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2 = \lambda^2\, (\lambda^2 + 1)$
  - Ansatz $y_p = e^{i\, x}\, x\, (A_0\, x^2 + A_1\, x + A_2)$ einsetzen in $L(y_p) = \tilde{s}$ und A_0, A_1, A_2 berechnen
  - gesuchte partikuläre Lösung: Im y_p

Aufgabe 2: Bestimmung einer partikulären Lösung

Wichtig: L linear, d.h. gilt

$$L(y) = s(x) = \sum_{k=1}^{m} s_k(x),$$

dann bestimmt man m partikuläre Lösungen $y_1, \ldots, y_m$ mit

$$L(y_k) = s_k(x), \quad k = 1, \ldots, m, \qquad y_p := \sum_{k=1}^{m} y_k.$$

Dann gilt:

$$L(y_p) = L\left(\sum_{k=1}^{m} y_k\right) = \sum_{k=1}^{m} L(y_k) = \sum_{k=1}^{m} s_k(x) = s(x).$$

Aufgabe 2: Bestimmung einer partikulären Lösung

Beispiel 1: $y'' + y' - 6\,y = -4\,e^x$

- $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)\,(\lambda - 2)$
- Fundamentalsystem: $y_1 = e^{-3\,x}$, $y_2 = e^{2\,x}$
- $\lambda = 1$ ist keine Nullstelle von p
- Ansatz: $y_p(x) = A_0\,e^x$, $y_p' = y_p'' = A_0\,e^x$
- Einsetzen: $y_p'' + y_p' - 6\,y_p = -4\,A_0\,e^x \stackrel{!}{=} -4\,e^x$, also $A_0 = 1$, $y_p = e^x$
- Allgemeine Lösung: $y(x) = e^x + c_1\,e^{-3\,x} + c_2\,e^{2\,x}$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$

Aufgabe 2: Bestimmung einer partikulären Lösung

Beispiel 2: $y''' - y'' + y' - y = 1 - x$

- $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$
- Fundamentalsystem: $y_1 = e^x$, $y_2 = \cos x$, $y_3 = \sin x$
- $\lambda = 0$ ist keine Nullstelle von p
- Ansatz: $y_p(x) = A_0 + A_1 x$, $y_p' = A_1$, $y_p'' = y_p''' = 0$
- Einsetzen: $y_p''' - y_p'' + y_p' - y_p = A_1 - A_0 - A_1 x \stackrel{!}{=} 1 - x$, also $A_1 = 1$, $A_0 = 0$, $y_p = x$
- Allgemeine Lösung: $y(x) = x + c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$

Aufgabe 2: Bestimmung einer partikulären Lösung

Beispiel 3: $y'' + 2y' + y = 6 x e^{-x}$

- $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$
- Fundamentalsystem: $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = x e^{-x}$
- $\lambda = -1$ ist doppelte Nullstelle von p
- Ansatz:

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= x^2 (A_0 + A_1 x) e^{-x} = (A_0 x^2 + A_1 x^3) e^{-x}, \\
y_p'(x) &= (2 A_0 x + 3 A_1 x^2) e^{-x} - (A_0 x^2 + A_1 x^3) e^{-x} \\
&= (2 A_0 x + [3 A_1 - A_0] x^2 - A_1 x^3) e^{-x} \\
y_p''(x) &= \ldots = (A_1 x^3 - [6 A_1 - A_0] x^2 + [6 A_1 - 4 A_0] x + 2 A_0) e^{-x}
\end{aligned}$$

- Einsetzen: $y_p'' + 2 y_p' + y_p = \ldots = [6 A_1 x + 2 A_0] e^{-x} \stackrel{!}{=} 6 x e^{-x}$
  $\Longrightarrow A_1 = 1$, $A_0 = 0$, $y_p = x^3 e^{-x}$
- Allgemeine Lösung: $y(x) = (x^3 + c_1 + c_2 x) e^{-x}$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$

Aufgabe 2: Bestimmung einer partikulären Lösung

Beispiel 4: $y'' - 2\,y' + 5\,y = e^x\,\sin(2\,x)$

- $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\,\lambda + 5 = (\lambda - 1)^2 + 4,\ \lambda_{1,2} = 1 \pm 2\,i$
- Fundamentalsystem: $y_1 = e^x\,\cos(2\,x)$, $y_2 = e^x\,\sin(2\,x)$
- $\lambda = 1 + 2\,i$ ist einfache Nullstelle von p
- Bilde komplexe Rechte Seite $\tilde{s}(x) = e^{(1+2\,i)\,x}$
- Ansatz:
$$\begin{aligned} z_p(x) &= A_0\,x\,e^{(1+2\,i)\,x}, \\ z_p'(x) &= A_0\,[1 + (1+2\,i)\,x]\,e^{(1+2\,i)\,x} \\ z_p''(x) &= A_0\,[2\,(1+2\,i) + (-3+4\,i)\,x]\,e^{(1+2\,i)\,x} \end{aligned}$$
- Einsetzen: $z_p'' - 2\,z_p' + 5\,z_p = \ldots = 4\,i\,A_0\,e^{(1+2\,i)\,x} \stackrel{!}{=} e^{(1+2\,i)\,x}$
  $\Longrightarrow A_0 = 1/(4\,i) = -i/4$

Aufgabe 2: Bestimmung einer partikulären Lösung

Beispiel 4: $y'' - 2\,y' + 5\,y = e^x\,\sin(2\,x)$

- $y_p = -\frac{i}{4}\,x\,e^{(1+2\,i)\,x} = -\frac{x}{4}\,e^x\,[-\sin(2\,x) + i\cos(2\,x)]$ ist partikuläre Lösung zur komplexen Rechten Seite $\tilde{s}$
- partikuläre Lösung zu s ist dann:
$$\mathrm{Im}\ y_p = -\frac{x}{4}\,e^x\,\cos(2\,x)$$
- Allgemeine Lösung:
  $y(x) = -\frac{x}{4}\,e^x\,\cos(2\,x) + c_1\,e^x\,\cos(2\,x) + c_2\,e^x\,\sin(2\,x),\ c_1, c_2 \in \mathbf{R}$

Aufgabe 2: Bestimmung einer partikulären Lösung

Beispiel 5: $y'' - 2\,y' + 5\,y = e^x\,\sin(2\,x) + x$

- partikuläre Lösung zu $s_1(x) = e^x\,\sin(2\,x)$: $y_{p,1} = -\frac{x}{4}\,e^x\,\cos(2\,x)$
- partikuläre Lösung zu $s_2(x) = x$ mit Ansatz $y_{p,2} = A_0\,x + A_1$:

$$y''_{p,2} - 2\,y'_{p,2} + 5\,y_{p,2} = -2\,A_0 + 5\,(A_0\,x + A_1) = 5\,A_1 - 2\,A_0 + 5\,A_0\,x \overset{!}{=} x$$

- $A_0 = 1/5$, $A_1 = \frac{2}{5}\,A_0 = 2/25$, $y_{p,2} = \frac{1}{5}\,x + \frac{2}{25}$
- Allgemeine Lösung:
  $y(x) = \frac{1}{5}\,x + \frac{2}{25} - \frac{x}{4}\,e^x\,\cos(2\,x) + c_1\,e^x\,\cos(2\,x) + c_2\,e^x\,\sin(2\,x)$,
  $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$

Lineare Dgl. mit nicht-konstanten Koeffizienten: Eulersche Differentialgleichung

Eulersche Differentialgleichung:
$a_k \in \mathbf{R}$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbf{N}, x > 0$ bzw. $x < 0, s \in C(0,\infty)$ bzw. $s \in C(-\infty, 0)$

$$a_n\,x^n\,y^{(n)} + a_{n-1}\,x^{n-1}\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1\,x\,y' + a_0\,y = s(x)$$

Beobachtungen:

- $L(y) = a_n\,x^n\,y^{(n)} + a_{n-1}\,x^{n-1}\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1\,x\,y' + a_0\,y = \sum_{k=0}^{n} a_k\,x^k\,y^{(k)}$ ist offenbar linear (in y)
- Lösungsstruktur: $y = y_p + y_h$, $\dim$ kern $L = n$
- Falls Basis $y_1, \ldots, y_n$ von kern L bekannt, ist y_p mit VdK berechenbar! Vorsicht: VdK geht von der Form $y^{(n)} + \ldots$ aus!
- Also Hauptproblem: Bestimmung des Fundamentalsystems

Lineare Dgl. mit nicht-konstanten Koeffizienten: Eulersche Differentialgleichung

- **Bestimmung eines Fundamentalsystems** per Ansatz

$$y(x) = x^\lambda \quad \text{mit} \quad y^{(k)}(x) = \lambda\,(\lambda-1)\ldots(\lambda-k+1)\,x^{\lambda-k}.$$

- **Einsetzen:**

$$0 = L(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,x^k\,y^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k\,\lambda\,(\lambda-1)\ldots(\lambda-k+1)\,x^\lambda \iff$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} a_k\,\lambda\,(\lambda-1)\ldots(\lambda-k+1) =: p(\lambda) \in \mathbf{P}_n$$

- **Fallunterscheidung:** $\lambda \in \mathbf{C}$ Nullstelle von p der Vielfachheit r.
  - $\lambda \in \mathbf{R}$: $y_k(x) = (\ln x)^k\,x^\lambda, \quad k = 0, \ldots, r-1.$
  - $\lambda = \alpha + i\,\beta \in \mathbf{C}$, $\beta \neq 0$, $\quad k = 0, \ldots, r-1$:

$$y_k(x) = (\ln x)^k\,x^\alpha\,\cos(\beta\,\ln x), \ldots,$$
$$y_{r+k}(x) = (\ln x)^k\,x^\alpha\,\sin(\beta\,\ln x),$$

Beispiel: Eulersche Differentialgleichung

$$x^2\,y'' + x\,y' - y = 1 + x^2.$$

Homogenes Problem: Ansatz $y(x) = x^\lambda \rightsquigarrow$

$$p(\lambda) = \lambda\,(\lambda-1) + \lambda - 1 = \lambda^2 - 1 \overset{!}{=} 0 \iff \lambda_{1,2} = \pm 1$$

Fundamentalsystem: $y_1(x) = x, \quad y_2(x) = 1/x$

Inhomogenes Problem: VdK

$$\begin{pmatrix} x & 1/x \\ 1 & -1/x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{1 + 1/x^2} \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = -\frac{x}{2} \begin{pmatrix} -1/x^2 & -1/x \\ -1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + 1/x^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{x^2} \\ -(1 + x^2) \end{pmatrix}.$$

Beispiel: Eulersche Differentialgleichung

Integration:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - 1/x \\ -x^3/3 - x \end{pmatrix}$$

Partikuläre Lösung:

$$y_h(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) \cdot x + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^3}{3} - x\right) \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{3}\,x^2 - 1.$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = \frac{1}{3}\,x^2 - 1 + c_1\,x + c_2\,x^{-1}, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

Lineare Randwertprobleme 2. Ordnung

Lineares Randwertproblem (RWP) 2. Ordnung:

$$L(y) := y'' + a_1\,y' + a_0\,y = s, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B \qquad (a < b).$$

- Dgl. offenbar linear, wir werden uns auf **konstante** Koeffizienten beschränken!
- Entscheidend: Vorgabe von Funktionswerten oder Werten für die gewisse Ableitungen an zwei **verschiedenen** Stellen
- Suche nach einer Lösung für $a \leq x \leq b$.

Lineare Randwertprobleme 2. Ordnung

Annahme: y_1, y_2 bilden ein Fundamentalsystem, y_p sei partikuläre Lösung

Allgemeine Lösung:

$$y(t) = c_1\, y_1(t) + c_2\, y_2(t) + y_p(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} A = y(a) &= c_1\, y_1(a) + c_2\, y_2(a) + y_p(a) \\ B = y(b) &= c_1\, y_1(b) + c_2\, y_2(b) + y_p(b) \end{aligned}$$

$$\iff \begin{pmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - y_p(a) \\ B - y_p(b) \end{pmatrix}$$

Eindeutige Lösbarkeit:

$$\Delta := \det \begin{pmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{pmatrix} = y_1(a)\, y_2(b) - y_1(b)\, y_2(a) \overset{!}{\neq} 0$$

Lineare Randwertprobleme 2. Ordnung

Fallunterscheidung: Es sei $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\, \lambda + a_0 = (\lambda - \lambda_1)\,(\lambda - \lambda_2)$

Fall 1: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$

Fundamentalsystem: $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$

$\Delta = e^{\lambda_1 a} e^{\lambda_2 b} - e^{\lambda_1 b} e^{\lambda_2 a} = e^{\lambda_1 a + \lambda_2 b} - e^{\lambda_1 b + \lambda_2 a}.$

$$\begin{aligned} \Delta = 0 \iff\ & e^{\lambda_1 a + \lambda_2 b} = e^{\lambda_1 b + \lambda_2 a} \iff \lambda_1\, a + \lambda_2\, b = \lambda_1\, b + \lambda_2\, a \\ & \iff \lambda_1\,(a - b) = \lambda_2\,(a - b) \iff \lambda_1 = \lambda_2. \quad \lightning \end{aligned}$$

Lineare Randwertprobleme 2. Ordnung

Fall 2: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbf{R}$

Fundamentalsystem: $y_1(t) = e^{\lambda t}, \quad y_2(t) = t\, e^{\lambda t}$

$\Delta = e^{\lambda a} \cdot b\, e^{\lambda b} - e^{\lambda b} \cdot a\, e^{\lambda a} = (b - a)\, e^{\lambda\,(a+b)} \neq 0$

Lineare Randwertprobleme 2. Ordnung

Fall 3: $\lambda_1 = \alpha + i\,\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\,\beta \in \mathbf{C}, \quad \beta \neq 0$

Fundamentalsystem: $y_1(t) = e^{\alpha\,t}\,\cos(\beta\,t), \quad y_2(t) = e^{\alpha\,t}\,\sin(\beta\,t),$

$$\begin{aligned}\Delta &= e^{\alpha\,a}\,\cos(\beta\,a)\cdot e^{\alpha\,b}\,\sin(\beta\,b) - e^{\alpha\,b}\,\cos(\beta\,b)\cdot e^{\alpha\,a}\,\sin(\beta\,a)\\ &= e^{\alpha\,(a+b)}\,[\cos(\beta\,a)\,\sin(\beta\,b) - \cos(\beta\,b)\,\sin(\beta\,a)]\\ &= e^{\alpha\,(a+b)}\,\sin[\beta\,(b-a)] = 0 \iff \beta\,(b-a) = n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}\end{aligned}$$

In diesem Fall ist das RWP also gar nicht oder nicht eindeutig lösbar.

Merkregel: Nur im Falle komplexer Nullstellen $\alpha \pm \beta\,i$ des charakteristischen Polynoms ist das lineare Randwertproblem 2. Ordnung (mit konstanten, reellen Koeffizienten) nicht eindeutig lösbar, und zwar unter der Bedingung: $\beta\,(b-a) = n\,\pi, \quad n \in \mathbf{Z}$.

Beispiel 1: Lineare Randwertprobleme 2. Ordnung

$$y'' + 2\,y' + y = 6\,t\,e^{-t}, \quad y(0) = 1,\, y(1) = 3/e.$$

Allgemeine Lösung wegen $p(\lambda) = (\lambda+1)^2$:

$$y(t) = t^3\,e^{-t} + c_1\,\underbrace{e^{-t}}_{=y_1} + c_2\,\underbrace{t\,e^{-t}}_{=y_2}.$$

Eindeutige Lösbarkeit klar wegen $\lambda_{1,2} \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned}\Delta &= y_1(0)\,y_2(1) - y_1(1)\,y_2(0) = 1\cdot e^{-1} - e^{-1}\cdot 0 = \frac{1}{e} \neq 0\\ 1 &= y(0) = c_1\\ 3/e &= y(1) = e^{-1} + e^{-1} + c_2\,e^{-1} \iff c_2 = 1.\end{aligned}$$

Eindeutig bestimmte Lösung der RWA:

$$y(t) = t^3\,e^{-t} + e^{-t} + t\,e^{-t} = (1 + t + t^3)\,e^{-t}.$$

Beispiel 2: Lineare Randwertprobleme 2. Ordnung

$$y'' + y = \sin t, \quad y(0) = 2, y(\pi) = \pi/2.$$

Allgemeine Lösung:

$$y(t) = c_1 \underbrace{\cos t}_{y_1} + c_2 \underbrace{\sin t}_{y_2} - \frac{t}{2} \cos t.$$

Eindeutige Lösbarkeit?

$$\Delta = y_1(0) \cdot y_2(\pi) - y_2(0) \cdot y_1(\pi) = 1 \cdot 0 - 0 \cdot (-1) = 0.$$

Explizit erhalten wir die Bedingungen

$$2 = y(0) = c_1, \quad \frac{\pi}{2} = y(\pi) = -c_1 + \frac{\pi}{2} \iff c_1 = 0. \quad ↯$$

Beispiel 3: Lineare Randwertprobleme 2. Ordnung

$$y'' + y = \sin t, \quad y(0) = 2, y(\pi) = \frac{\pi}{2} - 2.$$

Allgemeine Lösung: $y(t) = c_1 \underbrace{\cos t}_{y_1} + c_2 \underbrace{\sin t}_{y_2} - \frac{t}{2} \cos t.$

Eindeutige Lösbarkeit?

$$\Delta = y_1(0) \cdot y_2(\pi) - y_2(0) \cdot y_1(\pi) = 1 \cdot 0 - 0 \cdot (-1) = 0.$$

Explizit erhalten wir die Bedingungen

$$2 = y(0) = c_1, \quad \frac{\pi}{2} - 2 = y(\pi) = -c_1 + \frac{\pi}{2} \iff c_1 = 2$$

Unendlich viele Lösungen:

$$y(t) = \left(2 - \frac{t}{2}\right) \cos t + c_2 \sin t. \quad c_2 \in \mathbf{R}.$$

Eigenwertwertprobleme für lin. RWA 2. Ordnung

Lin. Eigenwertproblem mit hom. RB

$$L(y) = y'' + a_1\, y' + a_0\, y = -\mu\, y, \quad y(a) = y(b) = 0, \quad a_0, a_1, \mu \in \mathbf{R}$$

Eigenwerte $\mu \in \mathbf{R}$ unbekannt ($-\mu$ nur aus technischen Gründen)

Eigenfunktionen $y \neq 0$ zu bestimmen zu jedem EW μ

Lösung:

- $p(\lambda) = 0 = \lambda^2 + a_1\,\lambda + a_0 + \mu$
- Nullstellenbestimmung: $\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0 - \mu}$.
- Fallunterscheidung:
  - $\frac{a_1^2}{4} - a_0 - \mu \geq 0$: Reelle Nullstellen implizieren (wegen $\Delta \neq 0$) eine eindeutige Lösung y der RWA, somit muss $y = 0$ sein
  - $\frac{a_1^2}{4} - a_0 - \mu < 0 \iff \mu + a_0 - \frac{a_1^2}{4} =: \omega^2 > 0$: nur dieser Fall kann nicht-triviale Lösungen liefern

Eigenwertwertprobleme für lin. RWA 2. Ordnung: Lösung

- $\frac{a_1^2}{4} - a_0 - \mu < 0 \iff \mu + a_0 - \frac{a_1^2}{4} =: \omega^2 > 0 \quad \rightsquigarrow$
  - Nullstellen: $\lambda_1 = -\frac{a_1}{2} + i\,\omega, \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1}$
  - Fundamentallösungen:
    $y_1(t) = e^{-\frac{a_1}{2}\,t}\,\cos(\omega\,t), \quad y_2(t) = e^{-\frac{a_1}{2}\,t}\,\sin(\omega\,t)$
- Eindeutigkeitskriterium:

$$\begin{aligned}\Delta &= y_1(a)\,y_2(b) - y_1(b)\,y_2(a)\\ &= e^{-\frac{a_1}{2}\,(a+b)}\,[\cos(\omega\,a)\,\sin(\omega\,b) - \cos(\omega\,b)\,\sin(\omega\,a)]\\ &= e^{-\frac{a_1}{2}\,(a+b)}\,\sin[\omega\,(b-a)] = 0 \iff \omega\,(b-a) = n\,\pi, \quad n \in \mathbf{Z}\end{aligned}$$

Eigenwertwertprobleme für lin. RWA 2. Ordnung: Lösung

- Auflösen:

$$\omega = \frac{n\,\pi}{b-a} \Longrightarrow \mu_n = \omega^2 + \frac{a_1^2}{4} - a_0 = \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2} + \frac{a_1^2}{4} - a_0, n \in \mathbf{N}_0$$

- Eigenfunktionen:

$$y_n(t) = e^{-\frac{a_1}{2}\,t}\,[c_1\,\cos(\omega_n\,t) + c_2\,\sin(\omega_n\,t)], \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}_0$$

- Randbedingungen:

$$\begin{aligned} 0 = y_n(a) &\iff 0 = c_1\,\cos(\omega_n\,a) + c_2\,\sin(\omega_n\,a) \\ 0 = y_n(b) &\iff 0 = c_1\,\cos(\omega_n\,b) + c_2\,\sin(\omega_n\,b) \end{aligned}$$

Eigenwertprobleme für lin. RWA 2. Ordnung: Lösung

- $\cos(\omega_n\,a)$ und $\sin(\omega_n\,a)$ können nicht gleichzeitig Null werden, Annahme: $\cos(\omega_n\,a) \neq 0$
- $c_1 = -c_2\,\tan(\omega_n\,a)$

  Bedingung 2 ist dann automatisch erfüllt:

$$\begin{aligned} c_1\,\cos(\omega_n\,b) + c_2\,\sin(\omega_n\,b) &= -c_2\,\tan(\omega_n\,a)\,\cos(\omega_n\,b) + c_2\,\sin(\omega_n\,b) \\ &= \frac{c_2}{\cos(\omega_n\,a)}\,\underbrace{[\cos(\omega_n\,a)\,\sin(\omega_n\,b) - \cos(\omega_n\,b)\,\sin(\omega_n\,a)]}_{=0} \end{aligned}$$

- Eigenfunktionen:

$$y_n(t) = \frac{c}{\cos(\omega_n a)}\,e^{-\frac{a_1}{2}t}\,[\sin(\omega_n t)\cos(\omega_n a) - \sin(\omega_n a)\cos(\omega_n t)], c \in \mathbf{R}$$

- Superposition: $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\,y_k(t)$ löst EW-Problem mit hom. RB

Beispiel: Eigenwertwertprobleme für lin. RWA 2. Ordnung

- Zu lösen: $y'' - 2\,y' + y = -\mu\, y, \quad y(0) = y(1) = 0.$
- Char. Polynom: $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\,\lambda + 1 + \mu = 0 \iff (\lambda - 1)^2 = -\mu$
- Nicht-triviale Lösungen existieren nur für $\mu > 0$: $\lambda_{1,2} = 1 \pm i\,\sqrt{\mu}$
- Allg. Lösung: $y(t) = e^t\,(c_1\,\cos(\sqrt{\mu}\,t) + c_2\,\sin(\sqrt{\mu}\,t)), \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}$
- Randbedingungen: $0 = y(0) = c_1$, $0 = y(1) = e\,c_2\,\sin(\sqrt{\mu})$
- Folgerung: $\sqrt{\mu} \overset{!}{=} n\,\pi$, $n \in \mathbf{Z} \Rightarrow \mu_n = n^2\pi^2$, $n \in \mathbf{N}_0$, EW: ✓
- Eigenfunktionen: $y_n(t) = e^t\,\sin(n\,\pi\,t)$, $n \in \mathbf{N}_0$
- Gesamtlösung durch Superposition: $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,e^t\,\sin(n\,\pi\,t)$

Kapitel 20 — Lineare Differentialgleichungssysteme

Lineare Differentialgleichungssysteme

Wir betrachten Differentialgleichungssysteme - s. (1) -

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n), \end{aligned} \tag{2}$$

mit Funktionen f_i, die linear in y_j sind mit konstanten Koeffizienten, d.h. Probleme der Form

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1(x) \\ s_2(x) \\ \vdots \\ s_n(x) \end{pmatrix}.$$

Kurz und vektoriell: $y' = A\,y + s$ bzw. $y' - A\,y = s$, $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $s \in [C(I)]^n$

Lineare Differentialgleichungssysteme

- $s = 0$: homogenes Problem, $s \neq 0$: inhomogenes Problem
- $y' = A\,y + s$ zusammen mit der Vorgabe $y(x_0) = y_0 \in \mathbf{R}^n$ heißt Anfangswertproblem
- $L(y) := y' - A\,y$ ist linear in y, wir erhalten die bekannte Lösungsstruktur: $u = u_0 + u_h$, $u_h \in$ kern L
- Es gilt: $\dim$ kern $L = n$
- die Basisfunktionen von kern L heißen Fundamentallösungen, n Fundamentallösungen zusammen bilden ein Fundamentalsystem
- Fragen:
  - Wie bestimmt man ein Fundamentalsystem?
  - Wie ermittelt man eine partikuläre Lösung u_0?

Lineare Differentialgleichungssysteme: Fundamentalsystem

Ansatz: $y = v\, e^{\lambda x}, \quad v \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}, \quad \lambda \in \mathbf{C}$

Einsetzen: $y' = \lambda\, v\, e^{\lambda x} \stackrel{!}{=} A\, v\, e^{\lambda x} \iff A\, v = \lambda\, v$
Der Exponentialansatz führt also auf das Eigenwertproblem für A!

Unmittelbare Beobachtungen

- n (paarweise) verschiedene Eigenwerte λ_i mit zugehörigen Eigenvektoren v_i liefern n Fundamentallösungen. EV zu paarweise verschiedenen EW sind lin. unabhängig, also sind auch die Funktionen
$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}\, v_1, \ldots, y_n(x) = e^{\lambda_n x}\, v_n$$
linear unabhängig!
- Verallgemeinerung: Gilt $\dim\ \text{Eig}(\lambda) = m_a(\lambda)$ (geom. Vielfachheit des EW = algebr. Vielfachheit), sind insgesamt n Funktionen konstruierbar, die lin. unabhängig sind und ein Fundamentalsystem bilden. Insbesondere gilt das für sym. Matrizen!!!

Lineare Differentialgleichungssysteme: Fundamentalsystem

Günstige Fälle:

- n verschiedene EW
- A symmetrisch
- Allgemein: $\dim\ \text{Eig}(\lambda) = m_a(\lambda)$

Ungünstiger Fall:

- $\dim\ \text{Eig}(\lambda) < m_a(\lambda)$: Was dann?

Weiteres Problem:

$$\lambda \in \mathbf{C} \rightsquigarrow v \in \mathbf{C}^n \rightsquigarrow y = v\, e^{\lambda x} \text{ komplexe Funktion}$$

Wie bekommen wir wieder ein reelles Fundamentalsystem?

Beispiele zu den günstigen Fällen: n versch. EW

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} y, \qquad p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ -2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$p(\lambda) = -(1+\lambda)\,[-\lambda\,(3-\lambda)+2] = -(\lambda+1)\,(\lambda-1)\,(\lambda-2).$$

EV:

$$\lambda_1 = 1 : \ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda_2 = -1 : \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda_3 = 2 : \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fundamentalsystem:

$$y_1(x) = e^{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y_2(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y_3(x) = e^{2\,x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiele zu den günstigen Fällen: A sym.

$$y' = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 & -1 \\ \sqrt{2} & -1 & -2 \end{pmatrix} y, \qquad p(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-\lambda & -1 \\ \sqrt{2} & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$p(\lambda) = -(3+\lambda)\,[\lambda^2 + 4\,\lambda + 3] + 4\,(1+\lambda) = \ldots = -(\lambda+1)^2\,(\lambda+5)$$

EV:

$$\lambda_{1,2} = -1 : \ v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \ \lambda_2 = -5 : \ v_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Fundamentalsystem:

$$y_1(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ y_2(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \ y_3(x) = e^{-5\,x} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Beispiele zu den günstigen Fällen: A nicht sym., aber $\dim$ Eig$(\lambda) = m_a(\lambda)$

$$y' = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} y, \qquad p(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$p(\lambda) = (5-\lambda)\,(\lambda^2-4) + 6\,(\lambda-2) - 6\,(3\,\lambda-6) = \ldots = -(\lambda-2)^2\,(\lambda-1)$$

EV: $\lambda_{1,2} = 2: \; v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \lambda_3 = 1: \; v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Fundamentalsystem:

$$y_1(x) = e^{2\,x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; y_2(x) = e^{2\,x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; y_3(x) = e^{x} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Beispielproblem: $\dim$ Eig$(\lambda) < m_a(\lambda)$

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} y, \qquad p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$p(\lambda) = \ldots = -(\lambda-2)^2\,(\lambda-1)$$

EV: $A - 2\,I \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_{1,2} = 2: \; v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; \lambda_3 = 1: \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Fundamentalsystem:

$$y_1(x) = e^{2\,x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; y_2(x) = ???, \; y_3(x) = e^{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmung **einer** zusätzlichen Basisfunktion

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} y, \quad y_1 = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; y_2 = ???, \; y_3 = e^{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ansatz: $y_2(x) = (a\,x + b)\,e^{2\,x}, \quad a, b \in \mathbf{R}^n$

Einsetzen:

$$y_2' - A\,y_2 = a\,\cancel{e^{2x}} + 2\,(a\,x + b)\,\cancel{e^{2x}} - A\,(a\,x + b)\,\cancel{e^{2x}} = 0$$

Äquivalent:
$$\begin{aligned} a + 2\,b - A\,b = 0 &\iff (A - 2\,I)\,b = a, \\ 2\,a - A\,a = 0 &\iff (A - 2\,I)\,a = 0 \end{aligned}$$

D.h.

- a ist EV zum EW $\lambda = 2$, wähle also $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- b ist zu bestimmen aus dem LGS $(A - 2\,I)\,b = a$

Bestimmung **einer** zusätzlichen Basisfunktion

$$(A - 2\,I)\,b = a \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_2(x) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{2\,x}$$

Was tun, wenn mehr als eine Fundamentallösung fehlen?

Sukzessive Erhöhung des Polynomansatzes!

$k = 1, r = 3$: y_2 wie gerade bestimmt.

Ansatz für y_3: $y_3(x) = (\frac{1}{2}\,a\,x^2 + b\,x + c)\,e^{\lambda\,x}, \quad a, b, c \in \mathbf{R}^n$

$k = 1, r = 3$

$$y_3 = (\tfrac{1}{2}\, a\, x^2 + b\, x + c)\, e^{\lambda\, x}$$

$$y_3' = (a\, x + b)\, e^{\lambda\, x} + \lambda\, (\tfrac{1}{2}\, a\, x^2 + b\, x + c)\, e^{\lambda\, x}$$

$$0 = y_3' - A\, y_3 = \cancel{e^{\lambda x}}\, \left[a\, x + b + \lambda\, (\tfrac{1}{2}\, a\, x^2 + b\, x + c) - A\, (\tfrac{1}{2}\, a\, x^2 + b\, x + c)\right]$$

Äquivalent:

$$\begin{array}{lrcl} x^2: & (A - \lambda\, I)\, a & = & 0 \\ x^1: & (A - \lambda\, I)\, b & = & a \\ x^0: & (A - \lambda\, I)\, c & = & b \end{array}$$

$k = 1, r = 4$

$$y_4 = (\tfrac{1}{3}\, a\, x^3 + \tfrac{1}{2}\, b\, x^2 + c\, x + d)\, e^{\lambda\, x}$$

$$\begin{array}{lrcl} x^3: & (A - \lambda\, I)\, a & = & 0 \\ x^2: & (A - \lambda\, I)\, b & = & a \\ x^1: & (A - \lambda\, I)\, c & = & b \\ x^0: & (A - \lambda\, I)\, d & = & c \end{array}$$

Probleme

- Für $k = 1$ ist der Vektor a der (bis auf Vielfache) eindeutige Eigenvektor, der $(A - \lambda\, I)\, a = 0$ erfüllt: ✓
- Aber: für $k = 2$ ist der Vektor a als eine beliebige Linearkombination der Basisvektoren des Eigenraumes wählbar!

Beispiel

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} y, \qquad \lambda_{1,2,3=0}, \qquad v_1 = e_1, v_2 = e_2$$

Eine weitere Basisfunktion ist gesucht per Ansatz $y_3(x) = a\, x + b$
$\rightsquigarrow (A - \lambda\, I)\, a = A\, a = 0 \Longrightarrow a = t_1\, e_1 + t_2\, e_2$

2. Bedingung: $(A - \lambda\, I)\, b = A\, b \overset{!}{=} a \Rightarrow t_2 \overset{!}{=} 0$, wähle $t_1 = 1 \rightsquigarrow b = e_3$

$$y_3(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, y_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Reelle Fundamentalsysteme

Voraussetzung: $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$

Konsequenz: $\lambda \in \mathbf{C}$ EW mit EV $v \in \mathbf{C}^n \rightsquigarrow \overline{\lambda} \in \mathbf{C}$ EW mit EV $\overline{v} \in \mathbf{C}^n$

Fundamentallösungen zu λ: $y_\lambda = p(x)\, e^{\lambda x}$

Koeff. von p aus: $(A-\lambda I)\, a = 0$, $(A-\lambda I)\, b = a$, $(A-\lambda I)\, c = b$, $\ldots$

Konjugieren: $(A-\overline{\lambda} I)\, \overline{a} = 0$, $(A-\overline{\lambda} I)\, \overline{b} = \overline{a}$, $(A-\overline{\lambda} I)\, \overline{c} = \overline{b}$, $\ldots$

Diese Gleichungen sind identisch mit den Bestimmungsgleichungen der Koeffizienten von q mit

$$y_{\overline{\lambda}} = q(x)\, e^{\overline{\lambda} x}$$

Folgerung:

- $y_{\overline{\lambda}} = \overline{y_\lambda}$
- zum r-fachen EW $\lambda \in \mathbf{C}$ erhält man die FL durch polynomialen Ansatz in der Form $y_\lambda = p(x)\, e^{\lambda x}$, die r FL zu $\overline{\lambda}$ durch Konjugieren dieser FL: $y_{\overline{\lambda}} = \overline{p}(x)\, e^{\overline{\lambda} x}$

Reelle Fundamentalsysteme

- Bewährtes Muster:

$$\frac{1}{2}\,(y_\lambda + y_{\overline{\lambda}}) = \frac{1}{2}\,(y_\lambda + \overline{y_\lambda}) = \text{Re}\ y_\lambda$$

$$\frac{1}{2\,i}\,(y_\lambda - y_{\overline{\lambda}}) = \frac{1}{2\,i}\,(y_\lambda - \overline{y_\lambda}) = \text{Im}\ y_\lambda$$

Beispiel

$$y' = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} y$$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -5 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 + 1 = 0 \iff \lambda_{1,2} = 1 \pm i.$$

EV-Bestimmung zu $\lambda_1 = 1 + i$:

$$\begin{pmatrix} -2-(1+i) & -5 \\ 2 & 4-(1+i) \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} -3-i & -5 \\ 2 & 3-i \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3+i \end{pmatrix}, \quad z_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3+i \end{pmatrix} e^{(1+i)\,x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3+i \end{pmatrix} e^x\,(\cos x + i\,\sin x)$$

$$y_1 = \text{Re}\; z_1(x) = e^x \begin{pmatrix} -5\,\cos x \\ 3\,\cos x - \sin x \end{pmatrix},$$

$$y_2 = \text{Im}\; z_1(x) = e^x \begin{pmatrix} -5\,\sin x \\ 3\,\sin x + \cos x \end{pmatrix}$$

Berechnung einer partikulären Lösung von $y' = A\,y + s$

- **Definition:** $y_1, \ldots, y_n$ Fundamentalsystem

$$\boxed{\textbf{Fundamentalmatrix}} \qquad Y(x) := (y_1(x), \ldots, y_n(x))$$

- Folgerung: $y_h = \sum_{k=1}^n c_k\, y_k = Y(x) \cdot c$, $c \in \mathbf{R}^n$
- Ansatz: $y_p = Y(x) \cdot c(x)$
- Einsetzen:

$$y_p' = Y'\,c + Y\,c' \stackrel{!}{=} A\,Y\,c + s = Y'\,c + s \iff Y\,c' = s$$

- Bestimmung von c: $c = \int Y^{-1}\,s\,dx$
- y_p berechnen: $y_p(x) = Y(x) \cdot c(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x)\,y_k(x)$
- Allgemeine Lösung: $y(x) = y_p(x) + \sum_{k=1}^n c_k\,y_k(x)$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{R}$

Beispiel 1: Berechnung einer partikulären Lösung

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \iff \lambda_{1,2} = 1 \pm i$$

EV-Bestimmung zu $\lambda = 1 + i$:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} v = 0 \rightsquigarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, y_1(x) = e^{(1+i)\,x} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, y_2(x) = \overline{y_1(x)}$$

Reelles Fundamentalsystem:

$$z_1 = \mathrm{Re}\left[e^{(1+i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right] = \mathrm{Re}\begin{pmatrix} e^x(\cos x + i \sin x) \\ e^x(i\cos x - \sin x) \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}$$

$$z_2 = \mathrm{Im}\left[e^{(1+i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right] = e^x \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

Beispiel 1: Berechnung einer partikulären Lösung

Fundamentalmatrix $Y(x) = \begin{pmatrix} e^x \cos x & e^x \sin x \\ -e^x \sin x & e^x \cos x \end{pmatrix}$

Löse $\begin{pmatrix} e^x \cos x & e^x \sin x \\ -e^x \sin x & e^x \cos x \end{pmatrix} \binom{c_1'}{c_2'} = \binom{\cos x}{-\sin x}$

$$\iff \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{e^{2x}} \begin{pmatrix} e^x \cos x & -e^x \sin x \\ e^x \sin x & e^x \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} = e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies c = \begin{pmatrix} -e^{-x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Einsetzen:

$$y_p(x) = Y(x)\,c(x) = e^x \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-x} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = \begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + e^x \begin{pmatrix} c_1 \cos x + c_2 \sin x \\ -c_1 \sin x + c_2 \cos x \end{pmatrix}$$

Beispiel für geeignete Ansätze

$$y' = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

Ansatz:

$$\begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'_p(t) \\ y'_p(t) \end{pmatrix} &= e^t \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + 2\,e^{2t} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 2\,d_1 \\ c_2 & 2\,d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix} \\ &\overset{!}{=} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - 5\,c_1 + 2\,c_2 & -5\,d_1 + 2\,d_2 \\ c_1 - 6\,c_2 & 1 + d_1 - 6\,d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel für geeignete Ansätze

Spalte 1:

$$\begin{aligned} 1 - 5c_1 + 2c_2 = c_1 &\iff 6c_1 - 2c_2 = 1 \\ c_1 - 6c_2 = c_2 &\iff c_1 - 7c_2 = 0 \end{aligned}$$

Lösung: $40c_2 = 1 \iff c_2 = \frac{1}{40} \implies c_1 = \frac{7}{40}$

Spalte 2:

$$\begin{aligned} -5d_1 + 2d_2 = 2d_1 &\iff -7d_1 + 2d_2 = 0 \\ 1 + d_1 - 6d_2 = 2d_2 &\iff -d_1 + 8d_2 = 1 \end{aligned}$$

Lösung: $d_2 = \frac{7}{54} \implies d_1 = \frac{1}{27}$

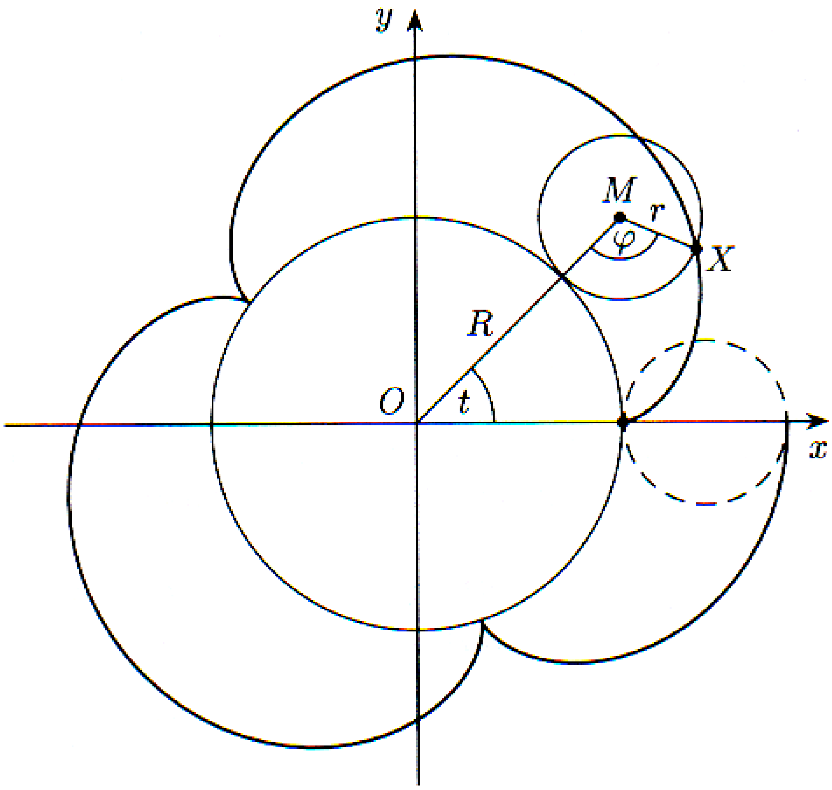
Partikuläre Lösung: $\binom{x_p}{y_p} = \frac{e^t}{40}\binom{7}{1} + \frac{e^{2t}}{54}\binom{2}{7}$

Bem.: ein Ansatz vom Typ $\binom{x_p(t)}{y_p(t)} = \binom{a\,e^t}{b\,e^{2t}}, \quad a, b \in \mathbf{R}$, scheitert!

Kapitel 21 — Kurven und Kurvenintegrale

Kurven

Kurven



Glatte Wege

Definition: $I = [a, b]$ sei ein Intervall.

- **Weg** im $\mathbf{R}^n$: $\varphi : I \overset{C^0}{\to} \mathbf{R}^n$
- $\varphi(a)$ **Anfangspunkt**, $\varphi(b)$ **Endpunkt** von φ
- $\varphi(a) = \varphi(b)$: φ **geschlossen**
- φ heißt **glatt**, falls $\varphi \in C^1(I)$ ist und stets gilt:

$$\varphi'(t) \neq 0 \quad (t \in I), \quad \text{d.h. } ||\varphi'(t)|| \neq 0 \quad (t \in I)$$

  Ist φ geschlossen, so muss zusätzlich gelten: $\varphi'(a) = \varphi'(b)$.
- Ist die Glattheit von φ an nur endlich vielen Stellen gestört, heißt φ **stückweise glatt**

Beispiel 1

- **geradlinige Verbindungsstrecke** C von $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ nach $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$, $x \neq y$:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1].$$

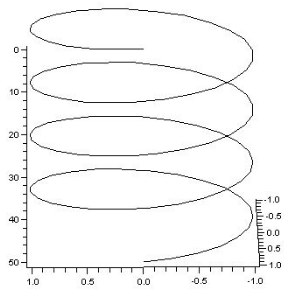
  - $(x_1, \ldots, x_n)^T$ Anfangspunkt, $(y_1, \ldots, y_n)^T$ Endpunkt
  - $x \neq y$: φ nicht geschlossen
  - φ für alle $t \in [0, 1]$ differenzierbar, wegen $x \neq y$ ist φ glatt:

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ y_3 - x_3 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Beispiel 2

- **Schraubenlinie**:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \alpha\, t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 8\,\pi],$$



  - $(1, 0, 0)^T$ Anfangspunkt, $(1, 0, 8\,\pi\,\alpha)^T$ Endpunkt
  - φ nicht geschlossen
  - φ für alle t differenzierbar, φ glatt:

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad ||\varphi'||^2 = 1 + \alpha^2 \neq 0$$

Beispiel 3

(Oberer) Kreisbogen des Einheitskreises:

(i) $\varphi_1(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi]$,

(ii) $\varphi_2(s) := \begin{pmatrix} -s \\ \sqrt{1-s^2} \end{pmatrix}, \quad s \in [-1, 1]$.

Beide Wege

- haben denselben Anfangspunkt $(1, 0)^T$,
- haben denselben Endpunkt $(-1, 0)^T$,
- haben die gleiche Bildmenge:$\varphi_1([0, \pi]) = \varphi_2([-1, 1])$,
- durchlaufen die Bildmenge von Anfangs- zum Endpunkt ohne Richtungswechsel.

$\rightsquigarrow$ Identifizierung der Wege

Äquivalenz von Wegen

Definition:

- $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^n, \psi : [c, d] \to \mathbf{R}^n$ **äquivalent** $:\iff$ es ex. $\alpha : [c, d] \overset{C^0}{\to} [a, b]$, α **streng monoton wachsende** in (c, d), mit
$$\varphi \circ \alpha = \psi.$$
- **Kurve** $C = \{$ alle zu φ äquivalenten Wege $\}$
- $\varphi \in C =$ **Parameterdarstellung** von C

$$\begin{tikzcd}
 & \psi(s) \arrow[dl] & s \in [c,d] \arrow[l] \arrow[d, shift right, "\alpha_2"'] \\
\text{Kurve } C & & \\
 & \varphi(t) \arrow[ul] & t \in [a,b] \arrow[l] \arrow[u, shift right, "\alpha_1"']
\end{tikzcd}$$

Beispiel Äquivalenz von PD

Kreisbogen mit 2 Parameterdarstellungen:

$$\varphi_1(t) = (\cos t, \sin t)^T, t \in [0, \pi], \quad \varphi_2(s) = (-s, \sqrt{1-s^2})^T, s \in [-1, 1].$$

Benötigen $\alpha : [0, \pi] \to [-1, 1], \quad s \stackrel{!}{=} \alpha(t)$

- Komponente 1 $\rightsquigarrow$ $\alpha(t) := -\cos t$
- $\alpha'(t) = \sin t > 0, \quad t \in (0, \pi) \implies \alpha$ streng monoton steigend
- $$\varphi_2(\alpha(t)) = (\cos t, \sqrt{1 - ((-\cos t)^2)})^T = (\cos t, \sin t)^T = \varphi_1(t).$$

Also: φ_1, φ_2 äquivalent, PD derselben Kurve C.

Varianten: Komponente 2 auflösen nach s oder $\alpha : [-1, 1] \to [0, \pi]$

Fast äquivalente Wege: umgekehrter Umlaufsinn

Gegeben: $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ PD einer Kurve C

Ziel: gleiche Bildmenge, aber umgekehrter Umlaufsinn

Definition: **Umgekehrt durchlaufener Weg**

$$\varphi_- : [a, b] \to \mathbf{R}^n, \qquad \varphi_-(t) := \varphi(a + b - t)$$

Zugehörige Kurve: $-C$, Bez.: **entgegengesetzt orientierte Kurve**

Beispiel

$$\varphi : I = [0, 2] \to \mathbf{R}^2, \quad \varphi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right]$$

$$\varphi_- : I \to \mathbf{R}^2, \varphi_-(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (2-t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

Beispiel

Standard: Durchlaufen eines Kreises gegen den Uhrzeigersinn (sog. **mathematisch positiver Sinn**):

$$\varphi(t) := R \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Durchlaufen im Uhrzeigersinn ($\rightarrow$ Integralrechnung):

$$\varphi(t) := R \begin{pmatrix} \cos(2\pi - t) \\ \sin(2\pi - t) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos(-t) \\ \sin(-t) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

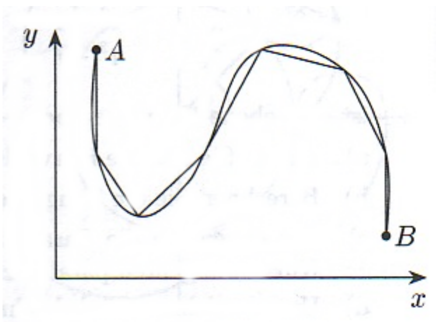
Vereinbarung: Beschränkung auf Jordankurven

Ab jetzt nur noch (bis auf Anfangs- und Endpunkt bei geschlossenen Kurven) **injektive** Kurven. sog. **Jordankurven**

Kurvenlänge

- **Ziel**: Berechnung der Länge einer Kurve C mit glatter PD $\varphi : I \to \mathbf{R}^n$
- **Voraussetzung**: Für Geradenstücke ist der Längenbegriff bekannt (Euklidisches Längenmaß)
- **Lösung**: Approximative Näherung durch Einführung einer (nur aus Vereinfachungsgründen) äquidistanten Zerlegung von I:

$$a =: t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < t_N := b, \quad N \in \mathbf{N}, h := \frac{b-a}{N}$$



Kurvenlänge

- Approximative Näherung der Bogenlänge durch Geradenstücke und anschl. Anwendung des Taylorschen Satzes:

$$L_N := \sum_{k=1}^{N} ||\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})|| \approx \sum_{k=1}^{N} ||\varphi'(t_{k-1})\,(t_k - t_{k-1})||$$
$$= \sum_{k=1}^{N} ||\varphi'(t_{k-1})||\,(t_k - t_{k-1})$$

Dabei wurde verwendet:

$$g(t_k) = g(t_{k-1}) + g'(t_{k-1})\,(t_k - t_{k-1}) + \text{Rest}, \quad \text{Rest} \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

- Stetigkeit der Funktion $||\varphi'(\cdot)||$ und Integraldefinition nach Riemann implizieren:

$$L_N \xrightarrow{N\to\infty} L_C := \int_a^b ||\varphi'(t)||\,dt \quad \boxed{\textbf{Kurvenlänge}}$$

Beispiel 1: Länge eines Geradenstücks

$$\varphi(t) = a + t\,(b-a), \quad 0 \le t \le 1.$$

Dann ist

$$L_C = \int_0^1 ||b-a||\,dt = ||b-a|| : \quad \checkmark$$

Beispiel 2: Länge der Schraubenlinie

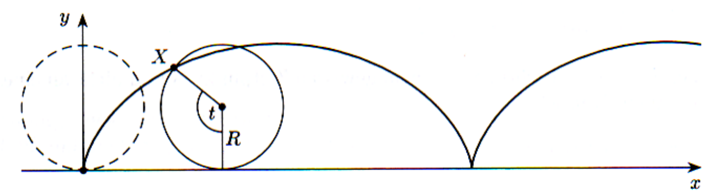
$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \alpha\, t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le a.$$

Dann ist

$$L_C = \int_0^a \left|\left| \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \alpha \end{pmatrix} \right|\right| dt = \int_0^a \sqrt{1+\alpha^2}\,dt = a\,\sqrt{1+\alpha^2}.$$

Beispiel 3: Länge der Zykloide

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} R\,t - R\,\sin t \\ R - R\,\cos t \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$



$$\begin{aligned} L_C &= R\int_0^{2\pi} \left|\left|\binom{1-\cos t}{\sin t}\right|\right| dt &&= R\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\,dt \\ &= R\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\,dt &&= R\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos\left(\tfrac{t}{2}+\tfrac{t}{2}\right)}\,dt \\ &= R\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2\,\sin^2 \tfrac{t}{2}}\,dt &&= 2R\int_0^{2\pi} \sin\tfrac{t}{2}\,dt \\ &= 4R\left[-\cos\tfrac{t}{2}\right]_0^{2\pi} dt = 8R \end{aligned}$$

Beispiel 4: Länge eines Graphen

$C : \varphi(t) = \binom{t}{f(t)}$ Graph einer differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbf{R}$

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}, \qquad L_C = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\,dt$$

Für die **Kettenlinie** $f(t) = \cosh t$ etwa ist $f'(t) = \sinh t$, also

$$L_C = \int_a^b \sqrt{1 + \sinh^2 t}\,dt = \int_a^b \cosh t\,dt = \sinh b - \sinh a$$

Bemerkungen

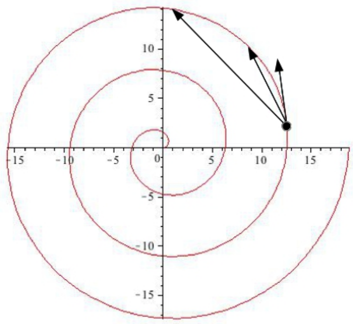
- $L_C = L_{-C}$
- Stetige (und stückweise glatte) Zusammensetzung von Kurven:
  $C = \sum_{k=1}^m C_k$ mit stetigen (und glatten) PD $\varphi_k : I_k = [a_k, b_k] \to \mathbf{R}^n$
  Bedingung: $\varphi_k(b_k) = \varphi_{k+1}(a_{k+1})$, $k = 1, \ldots, m-1$
  Ergebnis: stückweise glatte, stetige Kurve C mit $L_C = \sum_{k=1}^m L_{C_k}$

Tangenten- und Normalenvektoren

C sei Kurve mit glatter Parameterdarstellung $\varphi : I \to \mathbf{R}^n$.

- **Definition:** **Tangentenvektor** (alternativ: **Tangentialvektor**) an die Kurve C im Punkt $\varphi(t)$:

$$\varphi'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\,[\varphi(t+h) - \varphi(t)]$$



Tangenten- und Normalenvektoren

- geometrisch: φ' Grenzwert von Sekantenvektoren
- physikalisch:
  - φ' Ableitung des Weg-Zeit-Gesetzes φ: Momentangeschwindigkeit
  - $||\varphi'||$ Bahngeschwindigkeit
  - φ'' Ableitung des Geschw.-Zeit-Gesetzes φ': Momentanbeschleunigung
  - $||\varphi''||$ Bahnbeschleunigung
- Betrachte folgendes Beispiel:

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix},\ 0 \le t \le \pi, \varphi_1'(t) = \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix},$$

$$\varphi_2(s) = \begin{pmatrix}-s\\ \sqrt{1-s^2}\end{pmatrix},\ -1 \le s \le 1, \varphi_2'(s) = \begin{pmatrix}-1\\ \frac{-s}{\sqrt{1-s^2}}\end{pmatrix}$$

$$\varphi_1'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix}, \quad \text{aber:} \quad \varphi_2'\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$$

Tangenten- und Normalenvektoren

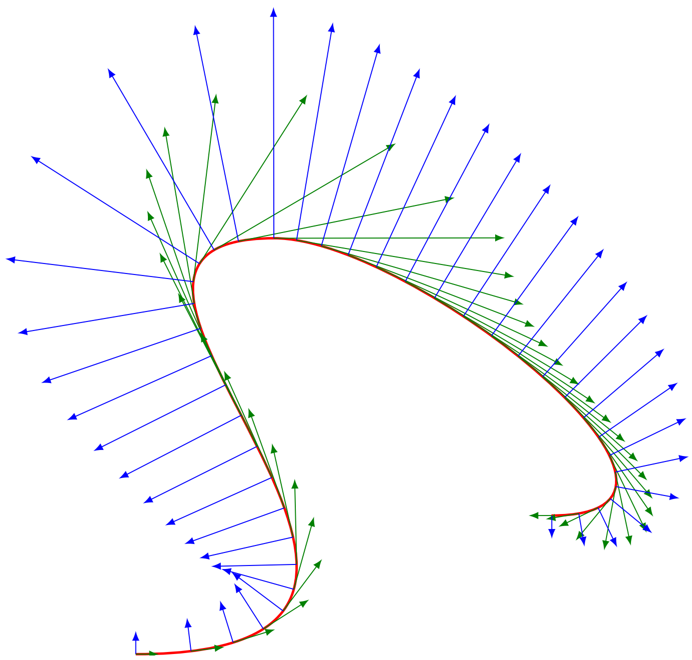
- Konsequenz: Unterschiedliche PD der gleichen Kurve produzieren an der gleichen Stelle unterschiedliche Geschwindigkeitsvektoren und Bahngeschwindigkeiten
- **Definition**: **Tangenteneinheitsvektor** (TEV) an die Kurve C im Punkt $\varphi(t)$:

$$u_\varphi(t) := \frac{1}{||\varphi'(t)||}\,\varphi'(t)$$

Spezialfall $\mathbf{R}^2$: Tangenteneinheitsvektor $\to$ Normaleneinheitsvektor

Definition: **Normaleneinheitsvektor** (NEV) n_φ entsteht aus dem TEV u_φ durch Linksdrehung, d.h. im mathematisch positiven Sinne, um $\pi/2$.
Später: durch Rechtsdrehung um $\pi/2$, d.h. durch Drehung um $-\pi/2$.
Auch: innerer und äußerer NEV.

Tangenten- und Normalenvektoren



Tangenten- und Normalenvektoren

Formal: $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))^T$ PD von C:

$$n_\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{||\varphi'(t)||} \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{||\varphi'(t)||} \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{||\varphi'(t)||} \begin{pmatrix} -\varphi_2'(t) \\ \varphi_1'(t) \end{pmatrix}.$$

Der rechtsgedrehte ergibt sich durch Multiplikation mit -1.

Merkregel: Vertauschen der Komponenten des TEV und der 1. Komponenten ein Minuszeichen geben!

Natürliche Parameterdarstellung

Ziel: Durchlaufen einer Kurve mit konstanter Bahngeschwindigkeit 1
Voraussetzung: $C \subset \mathbf{R}^n$ glatte Kurve mit PD $\varphi(t)$.

- **Definition: Bogenlänge** bzw. **Bogenlängenfunktion** $s : [a, b] \to [0, L_C]$ mit

$$s(t) := \int_a^t ||\varphi'(\tau)||\, d\tau, \quad t \in [a, b]$$

- s stetig differenzierbar: $s'(t) = ||\varphi'(t)|| > 0$
- s streng monoton steigend wegen $s' > 0$ für alle t, geom. klar: ✓, also: s umkehrbar
- Umkehrfunktion $s^{-1} : [0, L_C] \to I$ mit Ableitung

$$[s^{-1}]'(\tau) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{||\varphi'(t)||} = \frac{1}{||\varphi'(s^{-1}(\tau))||}, \quad s(t) = \tau$$

Natürliche Parameterdarstellung

- Also: $[0, L_C] \xrightarrow{s^{-1}} [a,b] = I \xrightarrow{\varphi} \mathbf{R}^n \quad \rightsquigarrow \quad \varphi \circ s^{-1} : [0, L_C] \to \mathbf{R}^n$
- **Definition:** **Parameterdarstellung nach der Bogenlänge** oder **natürliche Parameterdarstellung**:

$$\psi : [0, L_C] \to \mathbf{R}^n, \quad \psi(\tau) := \varphi(s^{-1}(\tau)).$$

- Bemerkung: oft wird die Umkehrfunktion von $s(t)$ auch als $t(s)$ geschrieben, das ist gelegentlich verwirrend
- Ziel erreicht? $[a,b] \ni t \xrightarrow{s} s(t) = \tau \in [0, L_C]$

$$||\psi'(\tau)|| = ||\varphi'(s^{-1}(\tau)) \cdot [s^{-1}]'(\tau)|| \overset{\text{s.o.}}{=} \left|\left|\varphi'(s^{-1}(\tau)) \cdot \frac{1}{||\varphi'(s^{-1}(\tau))||}\right|\right|$$
$$= ||\varphi'(t)|| \cdot \frac{1}{||\varphi'(t)||} = 1 : \qquad \checkmark$$

Beispiele

$$\varphi(t) = R\binom{\cos t}{\sin t}, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad \varphi'(t) = R\binom{-\sin t}{\cos t}, \quad ||\varphi'(t)|| = R$$

$$L = \int_0^{2\pi} R\, dt = 2\pi R$$

$$s(t) = \int_0^t ||\varphi'(\tau)||\, d\tau = R\, t = \tau \iff s^{-1}(\tau) = \frac{\tau}{R}$$

Natürliche PD

$$\psi(\tau) = \varphi(s^{-1}(\tau)) = R\begin{pmatrix}\cos(\tau/R)\\ \sin(\tau/R)\end{pmatrix}, \quad 0 \le \tau \le 2\pi R = L$$

Beispiele

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \\ 4\sin(t/2) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le \pi, \quad \varphi'(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \\ 2\cos(t/2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} ||\varphi'(t)||^2 &= (1-\cos t)^2 + \sin^2 t + 4\cos^2\frac{t}{2} = 2 - 2\cos t + 4\cos^2\frac{t}{2} \\ &= 2 - 2\,(\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}) + 4\cos^2\frac{t}{2} = 4 \end{aligned}$$

$$L = \int_0^\pi 2\,dt = 2\pi,\ s(t) = \int_0^t ||\varphi'(\tau)||\,d\tau = 2\,t = \tau \iff s^{-1}(\tau) = \frac{\tau}{2}$$

Natürliche PD

$$\psi(\tau) = \varphi(s^{-1}(\tau)) = \begin{pmatrix} \tau/2 - \sin(\tau/2) \\ 1 - \cos(\tau/2) \\ 4\sin(\tau/4) \end{pmatrix}, \quad 0 \le \tau \le 2\pi = L$$

Krümmung im $\mathbf{R}^2$

Wir betrachten eine **ebene** Kurve $C \subset \mathbf{R}^2$ in nat. PD ψ

$$\begin{aligned} 1 &= ||\psi'(s)||^2 = \psi'(s)\cdot\psi'(s) \overset{\frac{d}{ds}}{\Longrightarrow} \\ 0 &= \psi''(s)\cdot\psi'(s) + \psi'(s)\cdot\psi''(s) = 2\,\psi'(s)\cdot\psi''(s) \end{aligned}$$

Also:

$$\psi''(s) \perp \psi'(s) \Longrightarrow \psi''(s) = \kappa(s)\,n_\psi(s) \quad \forall s \in [0, L_C].$$

Krümmung $\kappa(s)$, **Krümmungsvektor** $\psi''(s)$

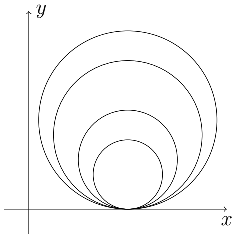
$$||\psi''(s)||^2 = \psi''(s)\cdot\psi''(s) = [\kappa(s)]^2, \quad \text{d.h. } \kappa(s) = \pm||\psi''(s)||.$$

Weiter gilt

$$\psi''(s)\cdot n_\psi(s) = \kappa(s)$$

Beispiel: Krümmung des Kreises

- Kreislinie: $\varphi(t) = \binom{r\cos t}{r\sin t}$, $\quad 0 \le t \le 2\pi$.
- Bogenlänge: $s(t) = \int_0^t \sqrt{r^2(-\sin\tau)^2 + r^2\cos^2\tau}\, d\tau = r\,t$, $t(s) = \frac{s}{r}$
- Natürliche Parameterdarstellung:
  $\psi(s) = \binom{r\cos\frac{s}{r}}{r\sin\frac{s}{r}}$, $\quad 0 \le s \le L_C = s(2\pi) = 2\,\pi\,r$
- $\psi'(s) = \binom{-\sin\frac{s}{r}}{\cos\frac{s}{r}}$, $\quad \psi''(s) = \binom{-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}}{-\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}}$
- (Links-gedrehter) Normalenvektor: $n(\psi(s)) = \binom{-\cos\frac{s}{r}}{-\sin\frac{s}{r}}$,
- $\kappa(s) = \psi''(s)\cdot n(\psi(s)) = \binom{-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}}{-\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}} \cdot \binom{-\cos\frac{s}{r}}{-\sin\frac{s}{r}} = \frac{1}{r}$.
- Anschauung?



Explizite Krümmungsformel für bel. PD

- Weg über die nat. PD mehr als unbequem!
- Mittels Äquivalenz von Kurven, d.h. mit der Kettenregel, auch für bel. PD $C: \quad \varphi(t) = \binom{x(t)}{y(t)}, t \in I$:

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2)^{3/2}} = \frac{\det[\varphi', \varphi'']}{||\varphi'||^3}$$

Beispiel: Ellipse

- Ellipse: $\varphi(t) = \binom{a\cos t}{b\sin t}$, $\quad 0 \le t \le 2\pi$
- $x'(t) = -a\sin t$, $x''(t) = -a\cos t$, $y'(t) = b\cos t$, $y''(t) = -b\sin t$
- $\kappa(t) = \frac{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$
- für $a = b = r$: $\kappa = 1/r$

Beispiel: Krümmung eines Graphen

- Graph von $f \in C^2(I)$: $\varphi(t) = \binom{t}{f(t)}$, $t \in I$
- $x' = 1$, $x'' = 0 \rightsquigarrow \kappa(t) = \frac{f''(t)}{\left(\sqrt{1+[f'(t)]^2}\right)^3}$
- etwa für $f(t) = 1/t$, $t > 0$:

$$\kappa(t) = \frac{2}{t^3\,(\sqrt{1+\frac{1}{t^4}})^3} = \frac{2}{\left(\sqrt{t^2+\frac{1}{t^2}}\right)^3}$$

- Falls $|f'(t)| << 1$: $\kappa \approx f''$ (etwa: lineare Balkentheorie)

Integration auf Kurven: Nicht-orientierte Kurvenintegrale

Ausgangssituation:

- $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ PD von $C \subset \mathbf{R}^n$
- $\rho : C \to \mathbf{R}$ sei skalare Funktion auf C
- o.E. $\rho \geq 0$ (ρ sei etwa die Dichte)

Erwartung an einen Integralbegriff:

- „Aufsummierung" der Dichtewerte längs der Kurve $\rightsquigarrow$ Masse der Kurve:

$$M = \int_C \rho\, dC$$

- $\rho = const. \rightsquigarrow \int_C \rho\, dC \stackrel{!}{=} \rho \int_C dC \stackrel{!}{=} \rho\, L_C = \int_a^b \rho\, ||\varphi'(t)||\, dt$

Integration auf Kurven: Nicht-orientierte Kurvenintegrale

- Vorgehensweise: Zerlege $[a, b]$ in N (äquidistante) Teilintervalle mit Knoten t_i, $i = 0, \dots, N$:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < t_N = b$$

- mit Zwischenstellen $t_{k-1} \in [t_{k-1}, t_k]$ $(k \in 1, \dots, N)$ und Taylor-Approximation 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} M &\approx \sum_{k=1}^{N} \rho(\varphi(t_{k-1}))\, ||\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})|| \\ &\approx \sum_{k=1}^{N} \rho(\varphi(t_{k-1}))\, ||\varphi'(t_{k-1})\, \underbrace{(t_k - t_{k-1})}_{=\Delta t_k} + \text{Rest}|| \\ &\xrightarrow[\Delta t_k \to 0]{N\to\infty} \int_a^b \rho(\varphi(t))\, ||\varphi'(t)||\, dt \end{aligned}$$

Integration auf Kurven: Nicht-orientierte Kurvenintegrale

Definition: (1) φ PD einer Kurve C, $f : C \to \mathbf{R}$ stetig.
(Nicht-orientiertes) Kurvenintegral (Linienintegral) von f über C:

$$\int_C f\, ds := \int_a^b f(\varphi(t))\, ||\varphi'(t)||\, dt \qquad (ds \text{ statt } dC)$$

(2) Für $C = C_1 + \ldots + C_m$: $\int_C f\, ds = \sum_{j=1}^{m} \int_{C_j} f\, ds$

Eigenschaften des Integralbegriffs

- Unabhängigkeit von der gewählten PD, d.h.

$$\int_a^b f(\varphi_1(t))\, ||\varphi_1'(t)||\, dt = \int_c^d f(\varphi_2(t))\, ||\varphi_2'(t)||\, dt$$

für je zwei äquivalente PD von C

Eigenschaften des Integralbegriffs

- Unabhängigkeit von der Orientierung, d.h.

$$\int_C f\,ds = \int_{-C} f\,ds$$

- Linearität, d.h.

$$\int_C (\alpha\, f + \beta\, g)\,ds = \alpha \int_C f\,ds + \beta \int_C g\,ds, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R},\ f, g \text{ stetig auf } C$$

- $f \equiv 1$ liefert gerade die Kurvenlänge L_C

Beispiele: Nicht-orientierte Kurvenintegrale

(1) $f(x,y) = 2\,x^2 - y^2$, C=Kreis um den Nullpunkt mit Radius $r = 2$

$$\int_C f\,ds = \int_0^{2\,\pi} (8\,\cos^2 t - 4\,\sin^2 t)\,2\,dt$$
$$= 16 \int_0^{2\,\pi} \cos^2 t - 8 \int_0^{2\,\pi} \sin^2 t\,dt = 8\,\pi$$

(2) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $C:\ \varphi(t) = (\cos t, \sin t, 2\,t)^T$, $0 \le t \le 2\,\pi$

$$\int_C f\,ds = \int_0^{2\,\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + 4\,t^2)\,\sqrt{5}\,dt$$
$$= \sqrt{5} \int_0^{2\,\pi} (1 + 4\,t^2)\,dt = \sqrt{5}\,(2\,\pi + \frac{32}{3}\,\pi^3)$$

Anwendung: Schwerpunktsberechnung durch nicht-orientierte Kurvenintegrale

- Voraussetzung: $C \in \mathbf{R}^3$ mit Massendichte $\mu = \mu(x,y,z)$ belegt
- Schwerpunktskoordinaten $(x_s, y_s, z_s)^T$: $M = \int_C \mu \, ds$,

$$x_s = \frac{1}{M}\int_C x\,\mu\,ds,\ y_s = \frac{1}{M}\int_C y\,\mu\,ds,\ z_s = \frac{1}{M}\int_C z\,\mu\,ds$$

- bei Kurven im $\mathbf{R}^2$ entfällt die z-Koordinate

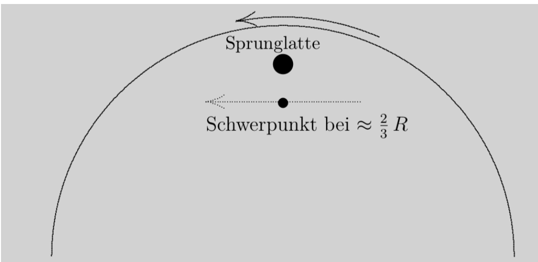
Beispiel

Gleichmäßig mit Masse belegter Halbkreis ($\mu = const.$, sog. homogenes Medium) Halbkreis mit Radius $R > 0$:

$$\varphi(t) = R\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix},\quad 0 \le t \le \pi,\ \begin{pmatrix}x_s\\ y_s\end{pmatrix} = \frac{\int_C \binom{x}{y}\,\mu\,ds}{\int_C \mu\,ds} = \frac{\int_C \binom{x}{y}\,ds}{\int_C ds}$$

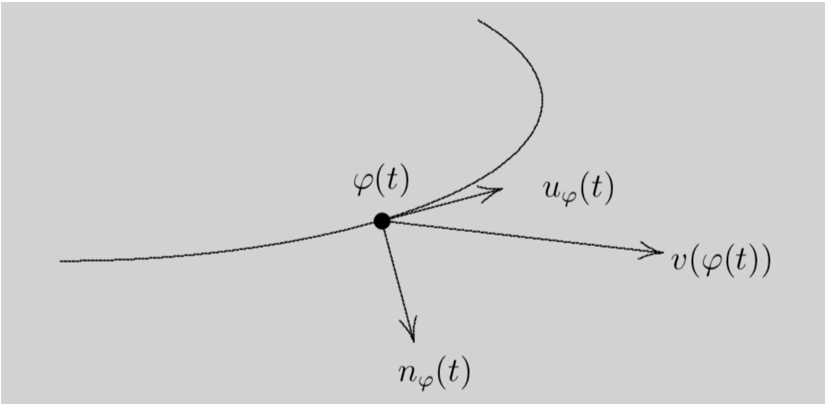
$$\begin{pmatrix}x_s\\ y_s\end{pmatrix} = \frac{1}{\pi R}\int_0^\pi R^2\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}dt = \frac{R}{\pi}\begin{pmatrix}0\\ [-\cos t]_0^\pi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \frac{2R}{\pi}\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0\\ \frac{2}{3}R\end{pmatrix}$$

Beispiel: Hochsprung



Integration auf Kurven: Orientierte Kurvenintegrale, Fluss

- Annahme: $C \subset \mathbf{R}^2$ sei glatte Kurve mit PD $\varphi : I \to \mathbf{R}^2$
- $v : C \to \mathbf{R}^2$ Vektorfeld
- in jedem Kurvenpunkt sind TEV $u_\varphi(t)$ und NEV $n_\varphi(t)$ (ab jetzt **immer** der nach rechts gedrehte!) eine (ortsabhängige) Basis des $\mathbf{R}^2$
- Konsequenz: $v(\varphi(t)) = v_T(t)\, u_\varphi(t) + v_N(t)\, n_\varphi(t), \quad v_t, v_n \in \mathbf{R}$
- Bezeichnungen: **Tangentialanteil** v_T, **Normalenanteil** v_N



Integration auf Kurven: Orientierte Kurvenintegrale, Fluss

- Ermittlung des Tangential- bzw. Normalenanteils von v (beachte die 1- Normierung von u bzw. n):

$$v(\varphi(t)) = v_T(t)\, u_\varphi(t) + v_N(t)\, n_\varphi(t) \quad \Big| \cdot u_\varphi(t) \quad \Big| \cdot n_\varphi(t)$$

$$v_T(t) = v(\varphi(t)) \cdot u_\varphi(t), \quad v_N(t) = v(\varphi(t)) \cdot n_\varphi(t)$$

- Skalarproduktbildung von v mit u bzw. n filtert gerade den Tangential- bzw. Normalenanteil aus
- v sei ein Kraftfeld:
  - Tangentialanteil v_T ist der Anteil von v, der längs C wirkt $\rightsquigarrow$ $\int_C v_T\, ds =$ **Arbeit von v an C**
  - Normalenanteil v_N ist der Anteil von v, der senkrecht zu C wirkt $\rightsquigarrow$ $\int_C v_N\, ds =$ Maß für den durch v produzierten Transport durch C, der sog. **Fluss von v durch C**

Integration auf Kurven: Orientierte Kurvenintegrale, Fluss

- Die Integration der Skalarfelder $v_T := v \cdot u : C \to \mathbf{R}, \quad v_N := v \cdot n : C \to \mathbf{R}$ bedeutet Integration von nicht-orientierten Kurvenintegralen
- Beachte die Definitionen des TEV und äußeren NEV:

$$u_\varphi(t) = \frac{1}{||\varphi'||}\, \varphi'(t) = \frac{1}{||\varphi'||} \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix},$$
$$n_\varphi(t) = \frac{1}{||\varphi'||} \begin{pmatrix} \varphi_2'(t) \\ -\varphi_1'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{||\varphi'||}\, \tilde{n}_\varphi(t)$$

- Arbeit:

$$\int_C v_T\, ds = \int_C v \cdot u_\varphi\, ds = \int_a^b v(\varphi(t)) \cdot \frac{1}{||\varphi'||}\, \varphi'(t)\, ||\varphi'||\, dt$$
$$= \int_a^b v(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt$$

Integration auf Kurven: Orientierte Kurvenintegrale, Fluss

- Fluss:

$$\int_C v_N\, ds = \int_C v \cdot n_\varphi\, ds = \int_a^b v(\varphi(t)) \cdot \frac{1}{||\varphi'||}\, \overbrace{\begin{pmatrix} \varphi_2'(t) \\ -\varphi_1'(t) \end{pmatrix}}^{\tilde{n}}\, ||\varphi'||\, dt$$
$$= \int_a^b v(\varphi(t)) \cdot \tilde{n}_\varphi(t)\, dt$$

- **Wichtig:** In beiden Fällen kann auf die Normierung von Tangential- und Normalenvektor verzichtet werden!
- Filtern des Tangentialanteils ist für beliebige Kurven im $\mathbf{R}^n$ möglich
- Bestimmen des Normalenanteils nur für Kurven im $\mathbf{R}^2$

Integration auf Kurven: Orientierte Kurvenintegrale, Fluss

Definition:
(1) $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ sei glatte PD einer Kurve C, $v : C \to \mathbf{R}^n$ stetig, dann ist das **(orientierte) Kurvenintegral von v über C** definiert als:

$$\int_C v(x)\,dx := \int_a^b v(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$$

Für stückweise glattes $C = \sum_{k=1}^m C_k$: $\int_C v(x)\,dx = \sum_{k=1}^m \int_{C_k} v(x)\,dx$

(2) Seien $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}^2$ glatte PD einer Kurve C und $v : C \to \mathbf{R}^2$ ein stetiges Vektorfeld, dann definieren wir den **Fluss durch C** als:

$$\int_C v\,dn := \int_C v \cdot \tilde{n}\,ds = \int_a^b v(\varphi(t)) \cdot \tilde{n}_\varphi(t)\,dt$$

$\tilde{n}$ ist dabei der nicht-normierte Normalenvektor.

Folgerung

- $C \in \mathbf{R}^2$ sei geschlossen mit $C = \partial B$
- $v : \overline{B} \to \mathbf{R}^2$ ein stetiges Vektorfeld
- $F := \int_{C=\partial B} v\,dn$
- $F > 0$: Abfluss aus B größer als Einfluss, d.h., in B gibt es **Quellen**
- $F < 0$: Abfluss aus B kleiner als Einfluss, d.h., in B gibt es **Senken**
- $F = 0$: Abfluss $=$ Einfluss, **Divergenzfreiheit**
- Arbeitsintegral und Fluss sind **orientiert**, d.h., der Übergang $C \to -C$ ändert das Vorzeichen des Integrals:

$$\int_{-C} v(x)\,dx = -\int_C v(x)\,dx, \qquad \int_{-C} v\,dn = -\int_C v\,dn$$

Beispiel

Man berechne den Transport des Vektorfeldes $v = \binom{x}{x-y^2}$ durch den oberen Kreisbogen in der Standard-PD und die verrichtete Arbeit:

$$
\begin{aligned}
\int_C v\,dn &= \int_0^\pi \begin{pmatrix} r\,\cos t \\ r\,\cos t - r^2\,\sin^2 t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r\,\cos t \\ r\,\sin t \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^\pi (r^2 \cos^2 t + r^2 \cos t\,\sin t - r^3 \sin^3 t)\,dt \\
&= r^2\,\frac{\pi}{2} + 0 - r^3 \int_0^\pi \sin t\,(1 - \cos^2 t)\,dt \\
&= r^2\,\frac{\pi}{2} - r^3\,[-\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t]_0^\pi = \frac{\pi}{2}\,r^2 + \frac{4}{3}\,r^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_C v\,dx &= \int_0^\pi \begin{pmatrix} r\,\cos t \\ r\,\cos t - r^2\,\sin^2 t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r\,\sin t \\ r\,\cos t \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^\pi (-r^2\,\cos t\,\sin t + r^2\,\cos^2 t - r^3\,\cos t\,\sin^2 t)\,dt = \frac{\pi}{2}\,r^2
\end{aligned}
$$

Wegunabhängigkeit, Potenzialexistenz

- Ausgangslage: betrachte zwei verschiedene Wege von $(1,0)^T$ nach $(-1,0)^T$

$$
C_1 : \varphi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad C_2 : \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le \pi,
$$

- für $v(x) = \binom{-y}{x}$:

$$
\begin{aligned}
\int_{C_1} v(x)\,dx &= \int_0^\pi \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \pi \\
\int_{C_2} v(x)\,dx &= \int_0^\pi \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} dt = -\pi
\end{aligned}
$$

Wegunabhängigkeit, Potenzialexistenz

- für $v(x) = \binom{y}{x}$:

$$\int_{C_1} v(x)\,dx = \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = -\pi/2 + \pi/2 = 0$$

$$\int_{C_2} v(x)\,dx = \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} dt = 0$$

- für $v(x) = \binom{y}{x}$ gilt sogar: ist C eine beliebige Kurve mit PD $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}^2$, AP $(1,0)^T$ und EP $(-1,0)^T$, gilt $\int_C v(x)\,dx = 0$:

$$\begin{aligned} \int_C v(x)\,dx &= \int_a^b \begin{pmatrix} \varphi_2(t) \\ \varphi_1(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix} dt = \int_a^b (\varphi_1'\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2')(t)\,dt \\ &= \int_a^b (\varphi_1\varphi_2)'(t)\,dt = (\varphi_1\varphi_2)(b) - (\varphi_1\varphi_2)(a) \\ &= (-1)\cdot 0 - 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Wegunabhängigkeit, Potenzialexistenz

- Insbesondere hängt für das gegebene Vektorfeld der Integralwert nur von Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab!
- Frage: für welche Vektorfelder tritt dieses Verhalten ein? D.h., gibt es Bedingungen, unter denen der Wert eines orientierten Kurvenintegrals unabhängig vom benutzten Weg, kurz: wegunabhängig bzw. konservativ, ist.

Definition: Sei $v : G \to \mathbf{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld.

$$g \in C^1(G, \mathbf{R}) \text{ **Potenzial** von } v :\iff v = \nabla g.$$

Vorsicht: g muss (mindestens) auf dem gleichen Gebiet definiert sein wie v!

Wegunabhängigkeit, Potenzialexistenz

Beispiele:

- $g(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$, $x \neq 0$, ist **kein** Potenzial von

$$\nabla g = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)^T =: v.$$

- $v = \begin{pmatrix} 2\,x\,\sin(y\,z) \\ x^2 z\,\cos(y\,z) \\ x^2 y\,\cos(y\,z) \end{pmatrix}$ besitzt das Potenzial $g(x,y,z) = x^2\,\sin(y\,z)$
- Besitzt $v = \binom{-y}{x}$ ein Potenzial g?

Grundsätzlicher Zusammenhang zwischen Wegunabhängigkeit und Potenzialexistenz

Für ein Gebiet G und ein stetiges Vektorfeld $v : G \to \mathbf{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent (s. später (4)):

(1) v besitzt ein Potenzial $g \in C^1(G, \mathbf{R})$

$$\Updownarrow \qquad (3)$$

(2) Für jede geschlossene Kurve C in G gilt: $\int_C v(x)\,dx = 0$

$$\Updownarrow$$

(3) Für je zwei Kurven C_1, C_2 in G mit gleichen AP und EP gilt:

$$\int_{C_1} v(x)\,dx = \int_{C_2} v(x)\,dx$$

Beweis:

(1) $\Longrightarrow$ (2) Es sei $v = \nabla g$ und $\varphi : [a, b] \to G$ ein geschlossener Weg. Für

$$h : [a, b] \to \mathbf{R}, \quad h(t) := g(\varphi(t))$$

gilt:

$$h'(t) = (\nabla g)(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = v(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Also

$$\begin{aligned} \int_C v(x)\,dx &= \int_a^b v(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = \int_a^b h'(t)\,dt \\ &= h(b) - h(a) = g(\varphi(b)) - g(\varphi(a)) = 0, \end{aligned}$$

da C geschlossen.

Beweis:

(2) $\Longrightarrow$ (3) Es ist

$$\begin{aligned} \int_{C_1} v(x)\,dx - \int_{C_2} v(x)\,dx &= \int_{C_1} v(x)\,dx + \int_{-C_2} v(x)\,dx \\ &= \int_{C_1+(-C_2)} v(x)\,dx = 0, \end{aligned}$$

denn $C_1 + (-C_2)$ ist eine geschlossene Kurve vom Anfangspunkt von C_1 über den Endpunkt von C_1 (= Anfangspunkt von $-C_2$) zum Endpunkt von $-C_2$ (= Anfangspunkt von C_1).

Beweis:

(3) $\Longrightarrow$ (1) Wähle $x_0 \in G$ fest. Für $x \in G$ sei $C(x_0, x)$ eine beliebige Verbindung in G zwischen x_0 und x. Definiere

$$g(x) := \int_{C(x_0,x)} v(\tau)\, d\tau.$$

Für kleine $|h|$ ist $x + h\, e_j \in G$ und $[x, x + h\, e_j] \subset G$, es gilt dann

$$\frac{1}{h}\,[g(x + h\, e_j) - g(x)] = \frac{1}{h}\left(\int_{C(x_0,x+he_j)} v(\tau)\, d\tau - \int_{C(x_0,x)} v(\tau)\, d\tau\right).$$

Nach Voraussetzung ist $C(x_0, x + he_j)$ beliebig wählbar, wir wählen

$$C(x_0, x + he_j) = \tilde{C}(x_0, x) + [x, x + he_j],$$

mit (3) gilt: $\frac{1}{h}\,[g(x + h\, e_j) - g(x)] = \frac{1}{h}\int_{[x,x+he_j]} v(\tau)\, d\tau.$

Beweis:

PD von $[x, x + he_j]$: $\varphi(t) = x + t\, e_j, \quad 0 \le t \le h, \qquad \varphi'(t) = e_j.$
Also:

$$\frac{1}{h}\,[g(x + h\, e_j) - g(x)] = \frac{1}{h}\int_0^h v(\varphi(t)) \cdot e_j\, dt = \frac{1}{h}\int_0^h v_j(x + t\, e_j)\, dt.$$

MWS der Integralrechnung für $f(t) := v_j(x_1, \ldots, x_j + t, \ldots, x_n)$:

$$\frac{1}{h}\,[g(x + h\, e_j) - g(x)] = v_j(x_1, \ldots, x_j + \xi, \ldots, x_n),\ |\xi| \le |h|.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,[g(x + h\, e_j) - g(x)] \\ &= \lim_{h\to 0} v_j(x_1, \ldots, x_j + \xi, \ldots, x_n) \\ &= v_j(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = v_j(x),\ j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Hauptsatz

- Potenzialexistenz impliziert die Verallgemeinerung des HDI:

$$\int_C v(x)\,dx = g(\varphi(b)) - g(\varphi(a))$$

- v konservativ $\iff$ v besitzt ein Potenzial
- Explizite Potenzialberechnung:

$$g(x) := \int_{C(x_0,x)} v(\tau)\,d\tau$$