AlgèbreII

Nadia HMIDA

Avril 2021

ALGÈBRE II
Série N 2

Exercice 1

1. 1. φ est une f.b.s sur $\mathbb{R}^2$ car

Exercice 1

1. 1. φ est une f.b.s sur $\mathbb{R}^2$ carde la forme $axx' + byy' + cxy' + dx'y$ avec $a = 1, b = -2$ et

Exercice 1

1. 1. φ est une f.b.s sur $\mathbb{R}^2$ carde la forme $axx' + byy' + cxy' + dx'y$ avec $a = 1, b = -2$ et$c = d = 6$

Exercice 1

1. 1. φ est une f.b.s sur $\mathbb{R}^2$ carde la forme $axx' + byy' + cxy' + dx'y$ avec $a = 1, b = -2$ et$c = d = 6$
   2. $\varphi(X, X) = x^2 - 4xy + 6y^2 =$

Exercice 1

1.
   1. φ est une f.b.s sur $\mathbb{R}^2$ carde la forme $axx' + byy' + cxy' + dx'y$ avec $a = 1, b = -2$ et$c = d = 6$
   2. $\varphi(X, X) = x^2 - 4xy + 6y^2 = (x - 2y)^2 + 2y^2 \geq 0$

Exercice 1

1.
   1. φ est une f.b.s sur $\mathbb{R}^2$ carde la forme $axx' + byy' + cxy' + dx'y$ avec $a = 1, b = -2$ etc $= d = 6$
   2. $\varphi(X, X) = x^2 - 4xy + 6y^2 = (x - 2y)^2 + 2y^2 \geq 0$
   3. $\varphi(X, X) = 0 \Rightarrow$

Exercice 1

1. 1. φ est une f.b.s sur $\mathbb{R}^2$ carde la forme $axx' + byy' + cxy' + dx'y$ avec $a = 1, b = -2$ etc $= d = 6$
   2. $\varphi(X,X) = x^2 - 4xy + 6y^2 = (x-2y)^2 + 2y^2 \geq 0$
   3. $\varphi(X,X) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} x - 2y & = 0 \\ y & = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$

Exercice 1

1.
   1. φ est une f.b.s sur $\mathbb{R}^2$ carde la forme $axx' + byy' + cxy' + dx'y$ avec $a = 1, b = -2$ etc $= d = 6$
   2. $\varphi(X, X) = x^2 - 4xy + 6y^2 = (x - 2y)^2 + 2y^2 \geq 0$
   3. $\varphi(X, X) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2y & = 0 \\ y & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \end{cases}$

Exercice 1

1.
   1. φ est une f.b.s sur $\mathbb{R}^2$ carde la forme $axx' + byy' + cxy' + dx'y$ avec $a = 1, b = -2$ etc $= d = 6$
   2. $\varphi(X, X) = x^2 - 4xy + 6y^2 = (x - 2y)^2 + 2y^2 \geq 0$
   3. $\varphi(X, X) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x - 2y & = 0 \\ y & = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x & = 0 \\ y & = 0 \end{array} \right.$
2. $X \in F^{\perp} \Leftrightarrow$

Exercice 1

1.
   1. φ est une f.b.s sur $\mathbb{R}^2$ carde la forme $axx' + byy' + cxy' + dx'y$ avec $a = 1, b = -2$ etc $= d = 6$
   2. $\varphi(X,X) = x^2 - 4xy + 6y^2 = (x-2y)^2 + 2y^2 \geq 0$
   3. $\varphi(X,X) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2y & = 0 \\ y & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \end{cases}$
2. $X \in F^{\perp} \Leftrightarrow \varphi(X, u = (3,2)) = 0 \Leftrightarrow$

Exercice 1

1.
   1. φ est une f.b.s sur $\mathbb{R}^2$ carde la forme $axx' + byy' + cxy' + dx'y$ avec $a = 1, b = -2$ etc $= d = 6$
   2. $\varphi(X,X) = x^2 - 4xy + 6y^2 = (x-2y)^2 + 2y^2 \geq 0$
   3. $\varphi(X,X) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2y & = 0 \\ y & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \end{cases}$
2. $X \in F^{\perp} \Leftrightarrow \varphi(X, u = (3,2)) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2(2x + 3y) + 12y = 0 \Leftrightarrow$

Exercice 1

1.
   1. φ est une f.b.s sur $\mathbb{R}^2$ carde la forme $axx' + byy' + cxy' + dx'y$ avec $a = 1, b = -2$ etc $= d = 6$
   2. $\varphi(X, X) = x^2 - 4xy + 6y^2 = (x - 2y)^2 + 2y^2 \geq 0$
   3. $\varphi(X, X) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2y & = 0 \\ y & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \end{cases}$
2. $X \in F^{\perp} \Leftrightarrow \varphi(X, u = (3, 2)) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2(2x + 3y) + 12y = 0 \Leftrightarrow -x + 6y = 0 \Leftrightarrow F^{\perp} = Vect$

Exercice 1

1. 1. φ est une f.b.s sur $\mathbb{R}^2$ carde la forme $axx' + byy' + cxy' + dx'y$ avec $a = 1, b = -2$ etc $= d = 6$
   2. $\varphi(X, X) = x^2 - 4xy + 6y^2 = (x - 2y)^2 + 2y^2 \geq 0$
   3. $\varphi(X, X) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x - 2y & = 0 \\ y & = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x & = 0 \\ y & = 0 \end{array} \right.$
2. $X \in F^{\perp} \Leftrightarrow \varphi(X, u = (3, 2)) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2(2x + 3y) + 12y = 0 \Leftrightarrow -x + 6y = 0 \Leftrightarrow F^{\perp} = Vect(v = (6, 1))$

Exercice 1

1.
   1. φ est une f.b.s sur $\mathbb{R}^2$ carde la forme $axx' + byy' + cxy' + dx'y$ avec $a = 1, b = -2$ etc $= d = 6$
   2. $\varphi(X, X) = x^2 - 4xy + 6y^2 = (x - 2y)^2 + 2y^2 \geq 0$
   3. $\varphi(X, X) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2y & = 0 \\ y & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \end{cases}$
2. $X \in F^{\perp} \Leftrightarrow \varphi(X, u = (3, 2)) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2(2x + 3y) + 12y = 0 \Leftrightarrow -x + 6y = 0 \Leftrightarrow F^{\perp} = Vect(v = (6, 1))$
3. $u \in F$ et $v \in F^{\perp}$ donc $\varphi(u, v) =$

Exercice 1

1.
   1. φ est une f.b.s sur $\mathbb{R}^2$ carde la forme $axx' + byy' + cxy' + dx'y$ avec $a = 1, b = -2$ etc $= d = 6$
   2. $\varphi(X,X) = x^2 - 4xy + 6y^2 = (x-2y)^2 + 2y^2 \geq 0$
   3. $\varphi(X,X) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x - 2y & = 0 \\ y & = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x & = 0 \\ y & = 0 \end{array} \right.$
2. $X \in F^{\perp} \Leftrightarrow \varphi(X, u = (3,2)) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2(2x+3y) + 12y = 0 \Leftrightarrow -x + 6y = 0 \Leftrightarrow F^{\perp} = Vect(v = (6,1))$
3. $u \in F$ et $v \in F^{\perp}$ donc $\varphi(u,v) = 0$ d'où (u,v) est

Exercice 1

1. 1. φ est une f.b.s sur $\mathbb{R}^2$ carde la forme $axx' + byy' + cxy' + dx'y$ avec $a = 1, b = -2$ etc $= d = 6$
   2. $\varphi(X,X) = x^2 - 4xy + 6y^2 = (x-2y)^2 + 2y^2 \geq 0$
   3. $\varphi(X,X) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2y & = 0 \\ y & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \end{cases}$
2. $X \in F^{\perp} \Leftrightarrow \varphi(X, u = (3,2)) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2(2x + 3y) + 12y = 0 \Leftrightarrow -x + 6y = 0 \Leftrightarrow F^{\perp} = Vect(v = (6,1))$
3. $u \in F$ et $v \in F^{\perp}$ donc $\varphi(u,v) = 0$ d'où (u,v) est libre donc base

Exercice 1

1.
   1. φ est une f.b.s sur $\mathbb{R}^2$ carde la forme $axx' + byy' + cxy' + dx'y$ avec $a = 1, b = -2$ etc $= d = 6$
   2. $\varphi(X, X) = x^2 - 4xy + 6y^2 = (x - 2y)^2 + 2y^2 \geq 0$
   3. $\varphi(X, X) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2y & = 0 \\ y & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \end{cases}$
2. $X \in F^{\perp} \Leftrightarrow \varphi(X, u = (3, 2)) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2(2x + 3y) + 12y = 0 \Leftrightarrow -x + 6y = 0 \Leftrightarrow F^{\perp} = Vect(v = (6, 1))$
3. $u \in F$ et $v \in F^{\perp}$ donc $\varphi(u, v) = 0$ d'où (u, v) est libre donc base orthogonale de $\mathbb{R}^2$
   D'où

Exercice 1

1. 1. φ est une f.b.s sur $\mathbb{R}^2$ carde la forme $axx' + byy' + cxy' + dx'y$ avec $a = 1, b = -2$ etc $= d = 6$
   2. $\varphi(X, X) = x^2 - 4xy + 6y^2 = (x - 2y)^2 + 2y^2 \geq 0$
   3. $\varphi(X, X) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2y & = 0 \\ y & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \end{cases}$
2. $X \in F^{\perp} \Leftrightarrow \varphi(X, u = (3, 2)) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2(2x + 3y) + 12y = 0 \Leftrightarrow -x + 6y = 0 \Leftrightarrow F^{\perp} = Vect(v = (6, 1))$
3. $u \in F$ et $v \in F^{\perp}$ donc $\varphi(u, v) = 0$ d'où (u, v) est libre donc base orthogonale de $\mathbb{R}^2$
   D'où$(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|})$ est une b.o.n de $\mathbb{R}^2$ par rapport à φ
   avec $\|u\|^2 =$

Exercice 1

1. 1. φ est une f.b.s sur $\mathbb{R}^2$ carde la forme $axx' + byy' + cxy' + dx'y$ avec $a = 1, b = -2$ et $c = d = 6$
   2. $\varphi(X, X) = x^2 - 4xy + 6y^2 = (x - 2y)^2 + 2y^2 \geq 0$
   3. $\varphi(X, X) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2y & = 0 \\ y & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \end{cases}$
2. $X \in F^{\perp} \Leftrightarrow \varphi(X, u = (3, 2)) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2(2x + 3y) + 12y = 0 \Leftrightarrow -x + 6y = 0 \Leftrightarrow F^{\perp} = Vect(v = (6, 1))$
3. $u \in F$ et $v \in F^{\perp}$ donc $\varphi(u, v) = 0$ d'où (u, v) est libre donc base orthogonale de $\mathbb{R}^2$
   D'où$(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|})$ est une b.o.n de $\mathbb{R}^2$ par rapport à φ
   avec $\|u\|^2 = \varphi(u, u) = 9 - 4.6 + 6.4 = 9$ et
   $\|v\|^2 =$

Exercice 1

1.
   1. φ est une f.b.s sur $\mathbb{R}^2$ carde la forme $axx' + byy' + cxy' + dx'y$ avec $a = 1, b = -2$ etc $= d = 6$
   2. $\varphi(X, X) = x^2 - 4xy + 6y^2 = (x - 2y)^2 + 2y^2 \geq 0$
   3. $\varphi(X, X) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2y & = 0 \\ y & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \end{cases}$
2. $X \in F^{\perp} \Leftrightarrow \varphi(X, u = (3, 2)) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2(2x + 3y) + 12y = 0 \Leftrightarrow -x + 6y = 0 \Leftrightarrow F^{\perp} = Vect(v = (6, 1))$
3. $u \in F$ et $v \in F^{\perp}$ donc $\varphi(u, v) = 0$ d'où (u, v) est libre donc base orthogonale de $\mathbb{R}^2$
   D'où$(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|})$ est une b.o.n de $\mathbb{R}^2$ par rapport à φ
   avec $\|u\|^2 = \varphi(u, u) = 9 - 4.6 + 6.4 = 9$ et
   $\|v\|^2 = \varphi(v, v) = 36 - 4.6 + 6 = 18$

Exercice 1

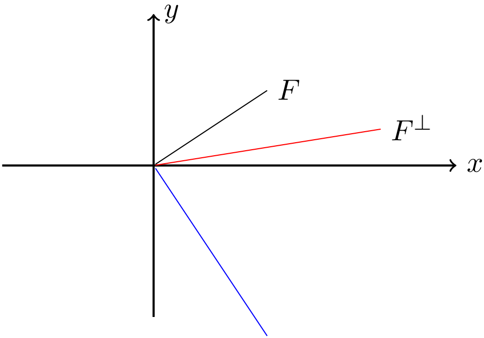
1. 1. φ est une f.b.s sur $\mathbb{R}^2$ carde la forme $axx' + byy' + cxy' + dx'y$ avec $a = 1, b = -2$ etc $= d = 6$
   2. $\varphi(X, X) = x^2 - 4xy + 6y^2 = (x - 2y)^2 + 2y^2 \geq 0$
   3. $\varphi(X, X) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2y & = 0 \\ y & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \end{cases}$
2. $X \in F^\perp \Leftrightarrow \varphi(X, u = (3, 2)) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2(2x + 3y) + 12y = 0 \Leftrightarrow -x + 6y = 0 \Leftrightarrow F^\perp = Vect(v = (6, 1))$
3. $u \in F$ et $v \in F^\perp$ donc $\varphi(u, v) = 0$ d'où (u, v) est libre donc base orthogonale de $\mathbb{R}^2$
   D'où$(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|})$ est une b.o.n de $\mathbb{R}^2$ par rapport à φ
   avec $\|u\|^2 = \varphi(u, u) = 9 - 4.6 + 6.4 = 9$ et
   $\|v\|^2 = \varphi(v, v) = 36 - 4.6 + 6 = 18$
4. $< (1, \frac{2}{3}), (\sqrt{2}, \frac{1}{3\sqrt{2}}) >=$

Exercice 1

1.
   1. φ est une f.b.s sur $\mathbb{R}^2$ carde la forme $axx' + byy' + cxy' + dx'y$ avec $a = 1, b = -2$ etc $= d = 6$
   2. $\varphi(X, X) = x^2 - 4xy + 6y^2 = (x - 2y)^2 + 2y^2 \geq 0$
   3. $\varphi(X, X) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2y & = 0 \\ y & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \end{cases}$
2. $X \in F^\perp \Leftrightarrow \varphi(X, u = (3, 2)) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2(2x + 3y) + 12y = 0 \Leftrightarrow -x + 6y = 0 \Leftrightarrow F^\perp = Vect(v = (6, 1))$
3. $u \in F$ et $v \in F^\perp$ donc $\varphi(u, v) = 0$ d'où (u, v) est libre donc base orthogonale de $\mathbb{R}^2$
   D'où$(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|})$ est une b.o.n de $\mathbb{R}^2$ par rapport à φ
   avec $\|u\|^2 = \varphi(u, u) = 9 - 4.6 + 6.4 = 9$ et
   $\|v\|^2 = \varphi(v, v) = 36 - 4.6 + 6 = 18$
4. $< (1, \frac{2}{3}), (\sqrt{2}, \frac{1}{3\sqrt{2}}) >= \frac{4}{3}\sqrt{2} \neq 0$ donc

Exercice 1

1. 1. φ est une f.b.s sur $\mathbb{R}^2$ carde la forme $axx' + byy' + cxy' + dx'y$ avec $a = 1, b = -2$ etc $= d = 6$
   2. $\varphi(X, X) = x^2 - 4xy + 6y^2 = (x - 2y)^2 + 2y^2 \geq 0$
   3. $\varphi(X, X) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2y & = 0 \\ y & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \end{cases}$
2. $X \in F^{\perp} \Leftrightarrow \varphi(X, u = (3, 2)) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2(2x + 3y) + 12y = 0 \Leftrightarrow \; - x + 6y = 0 \Leftrightarrow F^{\perp} = Vect(v = (6, 1))$
3. $u \in F$ et $v \in F^{\perp}$ donc $\varphi(u, v) = 0$ d'où (u, v) est libre donc base orthogonale de $\mathbb{R}^2$
   D'où$(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|})$ est une b.o.n de $\mathbb{R}^2$ par rapport à φ
   avec $\|u\|^2 = \varphi(u, u) = 9 - 4.6 + 6.4 = 9$ et
   $\|v\|^2 = \varphi(v, v) = 36 - 4.6 + 6 = 18$
4. $< (1, \frac{2}{3}), (\sqrt{2}, \frac{1}{3\sqrt{2}}) >= \frac{4}{3}\sqrt{2} \neq 0$ donc$\mathfrak{B}$ n'est pas orthogonale au sens du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$



y
F
$F^{\perp}$
x

Exercice 2

1. a) $\|u\|^2 =$

Exercice 2

1. a) $\|u\|^2 = 2$ donc $w_1 =$

Exercice 2

1. a) $\|u\|^2 = 2$ donc $w_1 = \frac{u}{\|u\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$

Exercice 2

1. a) $\|u\|^2 = 2$ donc $w_1 = \frac{u}{\|u\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$

b) $y_2 =$

Exercice 2

1. a) $\|u\|^2 = 2$ donc $w_1 = \frac{u}{\|u\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$
b) $y_2 = v - < u, w_1 > w_1 =$

Exercice 2

1. a) $\|u\|^2 = 2$ donc $w_1 = \frac{u}{\|u\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$
b) $y_2 = v - < u, w_1 > w_1 = v - < v, u > \frac{u}{\|u\|^2}$

Exercice 2

1. a) $\|u\|^2 = 2$ donc $w_1 = \frac{u}{\|u\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$
b) $y_2 = v - < u, w_1 > w_1 = v - < v, u > \frac{u}{\|u\|^2} =$
$(0, 1, 0, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1)$

Exercice 2

1. a) $\|u\|^2 = 2$ donc $w_1 = \frac{u}{\|u\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$
b) $y_2 = v - < u, w_1 > w_1 = v - < v, u > \frac{u}{\|u\|^2} =$
$(0, 1, 0, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1)$
c) $\|y_2\|^2 = \frac{3}{2}$ donc $w_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \sqrt{\frac{2}{3}}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1)$

2. Pour tout $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a

$$\Pi(X) =$$

2. Pour tout $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a

$$\Pi(X) = < X, w_1 > w_1 + < X, w_2 > w_2$$

2. Pour tout $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a

$$\Pi(X) = < X, w_1 > w_1 + < X, w_2 > w_2$$

$$= \frac{x+y}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) + \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{-x+y+2t}{3\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1\right)$$

3.

$$mat(\Pi,\mathcal{B})=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{6\sqrt{3}} & \frac{1}{2}-\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{3\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{6\sqrt{3}} & \frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

3.

$$mat(\Pi, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{6\sqrt{3}} & \frac{1}{2} - \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{3\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{6\sqrt{3}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

4. $d(w = (1, 2, 1, 8), P) =$

3.

$$mat(\Pi, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{6\sqrt{3}} & \frac{1}{2} - \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{3\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{6\sqrt{3}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

4. $d(w = (1, 2, 1, 8), P) = \|w - \Pi(w)\|$

Exercice 3

1. $f(Q,P)=f(P,Q)$ donc f est symétrique.

Exercice 3

1. $f(Q,P) = f(P,Q)$ donc f est symétrique.
$f(P_1 + \lambda P_2, Q) = f(P_1, Q) + \lambda f(P_2, Q)$ donc f est une forme bilinéaire symétrique

Exercice 3

1. $f(Q,P) = f(P,Q)$ donc f est symétrique.
$f(P_1 + \lambda P_2, Q) = f(P_1, Q) + \lambda f(P_2, Q)$ donc f est une forme bilinéaire symétrique
$f(P,P) = P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 + P(3)^2 \geq 0$ donc f est positive

Exercice 3

1. $f(Q,P) = f(P,Q)$ donc f est symétrique.
$f(P_1 + \lambda P_2, Q) = f(P_1, Q) + \lambda f(P_2, Q)$ donc f est une forme bilinéaire symétrique
$f(P,P) = P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 + P(3)^2 \geq 0$ donc f est positive
$f(P,P) = 0$ donc $P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = 0$

Exercice 3

1. $f(Q,P) = f(P,Q)$ donc f est symétrique.
$f(P_1 + \lambda P_2, Q) = f(P_1, Q) + \lambda f(P_2, Q)$ donc f est une forme bilinéaire symétrique
$f(P,P) = P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 + P(3)^2 \geq 0$ donc f est positive
$f(P,P) = 0$ donc $P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = 0$ c-à-d que P admet au moins 4 racines
Or $P \in$

Exercice 3

1. $f(Q,P) = f(P,Q)$ donc f est symétrique.
$f(P_1 + \lambda P_2, Q) = f(P_1, Q) + \lambda f(P_2, Q)$ donc f est une forme bilinéaire symétrique
$f(P,P) = P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 + P(3)^2 \geq 0$ donc f est positive
$f(P,P) = 0$ donc $P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = 0$ c-à-d que P admet au moins 4 racines
Or $P \in \mathbb{R}_3[X]$ donc $P = 0$. On dit que f est définie

Exercice 3

1. $f(Q,P) = f(P,Q)$ donc f est symétrique.
$f(P_1 + \lambda P_2, Q) = f(P_1, Q) + \lambda f(P_2, Q)$ donc f est une forme bilinéaire symétrique
$f(P,P) = P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 + P(3)^2 \geq 0$ donc f est positive
$f(P,P) = 0$ donc $P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = 0$ c-à-d que P admet au moins 4 racines
Or $P \in \mathbb{R}_3[X]$ donc $P = 0$. On dit que f est définie
Conclusion : f est un produit scalaire sur E

2. $f(X, P) =$

2. $f(X, P) = P(1) + 2P(2) + 3P(3)$

2. $f(X,P) = P(1) + 2P(2) + 3P(3)$
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz :
$|f(X,P)|^2 \leq$

2. $f(X,P) = P(1) + 2P(2) + 3P(3)$
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz :
$|f(X,P)|^2 \leq f(X,X)f(P,P)$ donc

2. $f(X,P) = P(1) + 2P(2) + 3P(3)$
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz :
$|f(X,P)|^2 \leq f(X,X)f(P,P)$ donc

$|P(1)+2P(2)+3P(3)| \leq$

2. $f(X,P) = P(1) + 2P(2) + 3P(3)$
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz :
$|f(X,P)|^2 \leq f(X,X)f(P,P)$ donc

$$|P(1){+}2P(2){+}3P(3)| \leq \sqrt{1+4+9}$$

2. $f(X,P) = P(1) + 2P(2) + 3P(3)$
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz :
$|f(X,P)|^2 \leq f(X,X)f(P,P)$ donc

$$|P(1)+2P(2)+3P(3)| \leq \sqrt{1+4+9}\sqrt{P(0)^2+P(1)^2+P(2)^2+P(3)^2}$$

2. $f(X,P) = P(1) + 2P(2) + 3P(3)$
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz :
$|f(X,P)|^2 \leq f(X,X)f(P,P)$ donc

$$|P(1)+2P(2)+3P(3)| \leq \sqrt{1+4+9}\sqrt{P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 + P(3)^2}$$

3. Pour tout $0 \leq i \neq j \leq 3$ on a $f(P_i, P_j) = \sum_{k=0}^{3} P_i(k) P_j(k) = 0$
car $P_i(k) = 0$ pour $k \neq i$ et $P_j(k) = 0$ pour $k \neq j$

3. Pour tout $0 \leq i \neq j \leq 3$ on a $f(P_i, P_j) = \sum_{k=0}^{3} P_i(k)P_j(k) = 0$
car $P_i(k) = 0$ pour $k \neq i$ et $P_j(k) = 0$ pour $k \neq j$
Il suffit que prendre $Q_i =$

3. Pour tout $0 \leq i \neq j \leq 3$ on a $f(P_i, P_j) = \sum_{k=0}^{3} P_i(k)P_j(k) = 0$
car $P_i(k) = 0$ pour $k \neq i$ et $P_j(k) = 0$ pour $k \neq j$
Il suffit que prendre $Q_i = \frac{1}{\sqrt{f(P_i,P_i)}} P_i$ on obtient alors
(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) est une b.o.n de E

4. Comme (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) est une b.o.n de E alors (d'après le cours) pour tout $P \in E$ on a

$$P =$$

4. Comme (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) est une b.o.n de E alors (d'après le cours) pour tout $P \in E$ on a

$$P = \sum_{k=0}^{3} f(P, Q_k) Q_k =$$

4. Comme (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) est une b.o.n de E alors (d'après le cours) pour tout $P \in E$ on a

$$P = \sum_{k=0}^{3} f(P, Q_k)Q_k = \sum_{k=0}^{3} P(k)Q_k$$

car $Q_k(i) = 0$ pour $i \neq k$ et 1 pour $i = k$

4. Comme (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) est une b.o.n de E alors (d'après le cours) pour tout $P \in E$ on a

$$P = \sum_{k=0}^{3} f(P, Q_k) Q_k = \sum_{k=0}^{3} P(k) Q_k$$

car $Q_k(i) = 0$ pour $i \neq k$ et 1 pour $i = k$

5. $H = -Q_1 + 3Q_2 - 3Q_3 + Q_4$

6.
Soit Π la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_2[X]$.
Plusieurs méthodes sont possibles :
1ère méthode :
a) On prend $(1, X, X^2)$ une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et on cherche $\mathbb{R}_2[X]^\perp$ l'orthogonal par rapport au produit scalaire f

$$\mathbb{R}_2[X]^\perp = \{P;$$

6.
Soit Π la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_2[X]$.
Plusieurs méthodes sont possibles :
1ère méthode :
a) On prend $(1, X, X^2)$ une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et on cherche $\mathbb{R}_2[X]^\perp$ l'orthogonal par rapport au produit scalaire f

$$\mathbb{R}_2[X]^\perp = \{P; \quad f(P,1) = f(P,X) = f(P,X^2) = 0\}$$

6.
Soit Π la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_2[X]$.
Plusieurs méthodes sont possibles :
1ère méthode :
a) On prend $(1, X, X^2)$ une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et on cherche $\mathbb{R}_2[X]^\perp$ l'orthogonal par rapport au produit scalaire f

$$\mathbb{R}_2[X]^\perp = \{P; \quad f(P,1) = f(P,X) = f(P,X^2) = 0\}$$

On obtient le système

$$\left\{\begin{array}{ccc} P(0)+P(1)+P(2)+P(3) & = & 0 \\ P(1)+2P(2)+3P(3) & = & 0 \\ P(1)+4P(2)+9P(3) & = & 0 \end{array}\right.$$

6.

Soit Π la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Plusieurs méthodes sont possibles :

1ère méthode :

a) On prend $(1, X, X^2)$ une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et on cherche $\mathbb{R}_2[X]^\perp$ l'orthogonal par rapport au produit scalaire f

$$\mathbb{R}_2[X]^\perp = \{P; \quad f(P,1) = f(P,X) = f(P,X^2) = 0\}$$

On obtient le système

$$\left\{\begin{array}{ccc} P(0)+P(1)+P(2)+P(3) & = & 0 \\ P(1)+2P(2)+3P(3) & = & 0 \\ P(1)+4P(2)+9P(3) & = & 0 \end{array}\right.$$

En utilisant la question 4, on a alors
$P = P(3)[-7Q_0 + 9Q_1 - 3Q_2 + Q_3]$ avec $P(3) \in \mathbb{R}$

6.
Soit Π la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_2[X]$.
Plusieurs méthodes sont possibles :
1ère méthode :
a) On prend $(1, X, X^2)$ une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et on cherche $\mathbb{R}_2[X]^\perp$ l'orthogonal par rapport au produit scalaire f

$$\mathbb{R}_2[X]^\perp = \{P; \quad f(P,1) = f(P,X) = f(P,X^2) = 0\}$$

On obtient le système

$$\left\{\begin{array}{ccc} P(0)+P(1)+P(2)+P(3) & = & 0 \\ P(1)+2P(2)+3P(3) & = & 0 \\ P(1)+4P(2)+9P(3) & = & 0 \end{array}\right.$$

En utilisant la question 4, on a alors
$P = P(3)[-7Q_0 + 9Q_1 - 3Q_2 + Q_3]$ avec $P(3) \in \mathbb{R}$
donc $\mathbb{R}_2[X]^\perp = Vect(-7Q_0 + 9Q_1 - 3Q_2 + Q_3)$

(Remarquer que c bien un espace de dim 1=4-3 comme prévu car $\mathbb{R}_2[X]$ de dim 3)
b) Il vous reste maintenant à résoudre le système
$\Pi(P) = Q$ avec $Q = \alpha X^2 + \beta X + \delta \in \mathbb{R}_2[X]$ et
$P - Q = \lambda U \in \mathbb{R}_2[X]^{\perp}$

2ème méthode :
On va utiliser l'algorithme de Gram-Schmidt pour construire une b.o.n (W_1, W_2, W_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ à partir de $(1, X, X^2)$
Dans ce cas $\Pi(P) =$

2ème méthode :

On va utiliser l'algorithme de Gram-Schmidt pour construire une b.o.n (W_1, W_2, W_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ à partir de $(1, X, X^2)$

Dans ce cas $\Pi(P) = f(P, W_1)W_1 + f(P, W_2)W_2 + f(P, W_3)W_3$

2ème méthode :

On va utiliser l'algorithme de Gram-Schmidt pour construire une b.o.n (W_1, W_2, W_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ à partir de $(1, X, X^2)$

Dans ce cas $\Pi(P) = f(P, W_1)W_1 + f(P, W_2)W_2 + f(P, W_3)W_3$

$W_1 = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{2}$

2ème méthode :
On va utiliser l'algorithme de Gram-Schmidt pour construire une b.o.n (W_1, W_2, W_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ à partir de $(1, X, X^2)$
Dans ce cas $\Pi(P) = f(P, W_1)W_1 + f(P, W_2)W_2 + f(P, W_3)W_3$
$W_1 = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{2}$
$Y_2 = X - f(X, \frac{1}{2})\frac{1}{2} = X - \frac{3}{2}$ et $W_2 = \frac{Y_2}{\|Y_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(X - \frac{3}{2})$

2ème méthode :
On va utiliser l'algorithme de Gram-Schmidt pour construire une b.o.n (W_1, W_2, W_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ à partir de $(1, X, X^2)$
Dans ce cas $\Pi(P) = f(P, W_1)W_1 + f(P, W_2)W_2 + f(P, W_3)W_3$
$W_1 = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{2}$
$Y_2 = X - f(X, \frac{1}{2})\frac{1}{2} = X - \frac{3}{2}$ et $W_2 = \frac{Y_2}{\|Y_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(X - \frac{3}{2})$
$Y_3 = X^2 - f(X^2, \frac{1}{2})\frac{1}{2} - f(X^2, \frac{1}{\sqrt{5}}(X - \frac{3}{2}))\frac{1}{\sqrt{5}}(X - \frac{3}{2})$ et
$W_3 = \frac{Y_3}{\|Y_3\|}$

2ème méthode :
On va utiliser l'algorithme de Gram-Schmidt pour construire une b.o.n (W_1, W_2, W_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ à partir de $(1, X, X^2)$
Dans ce cas $\Pi(P) = f(P, W_1)W_1 + f(P, W_2)W_2 + f(P, W_3)W_3$
$W_1 = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{2}$
$Y_2 = X - f(X, \frac{1}{2})\frac{1}{2} = X - \frac{3}{2}$ et $W_2 = \frac{Y_2}{\|Y_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(X - \frac{3}{2})$
$Y_3 = X^2 - f(X^2, \frac{1}{2})\frac{1}{2} - f(X^2, \frac{1}{\sqrt{5}}(X - \frac{3}{2}))\frac{1}{\sqrt{5}}(X - \frac{3}{2})$ et
$W_3 = \frac{Y_3}{\|Y_3\|}$

3ème méthode :
Pour éviter tous les calculs précédents, voilà la méthode la plus rapide :
On cherche $\mathbb{R}_2[X]^\perp = Vect(U = -7Q_0 + 9Q_1 - 3Q_2 + Q_3)$ comme dans la première méthode.

3ème méthode :
Pour éviter tous les calculs précédents, voilà la méthode la plus rapide :
On cherche $\mathbb{R}_2[X]^\perp = Vect(U = -7Q_0 + 9Q_1 - 3Q_2 + Q_3)$ comme dans la première méthode.
et on pose Π' la la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_2[X]^\perp$. on a alors $\Pi'(P) = f(P, W)W$ avec

3ème méthode :

Pour éviter tous les calculs précédents, voilà la méthode la plus rapide :

On cherche $\mathbb{R}_2[X]^{\perp} = Vect(U = -7Q_0 + 9Q_1 - 3Q_2 + Q_3)$ comme dans la première méthode.

et on pose Π' la la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_2[X]^{\perp}$. on a alors $\Pi'(P) = f(P, W)W$ avec$W = \frac{U}{\|U\|}$ une b.o.n de $R_2[X]^{\perp}$

3ème méthode :
Pour éviter tous les calculs précédents, voilà la méthode la plus rapide :
On cherche $\mathbb{R}_2[X]^{\perp} = Vect(U = -7Q_0 + 9Q_1 - 3Q_2 + Q_3)$ comme dans la première méthode.
et on pose Π' la la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_2[X]^{\perp}$. on a alors $\Pi'(P) = f(P, W)W$ avec$W = \frac{U}{\|U\|}$ une b.o.n de $R_2[X]^{\perp}$
et $\Pi(P) =$

3ème méthode :

Pour éviter tous les calculs précédents, voilà la méthode la plus rapide :

On cherche $\mathbb{R}_2[X]^{\perp} = Vect(U = -7Q_0 + 9Q_1 - 3Q_2 + Q_3)$ comme dans la première méthode.

et on pose Π' la la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_2[X]^{\perp}$. on a alors $\Pi'(P) = f(P, W)W$ avec$W = \frac{U}{\|U\|}$ une b.o.n de $R_2[X]^{\perp}$

et $\Pi(P) = P - \Pi'(P)$