Nadia HMIDA

Exercice 1

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique. On notera $X = (x, y)$ et $X' = (x', y')$.

1. Montrer que

$$\varphi(X, X') = xx' - 2(xy' + x'y) + 6yy'$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit F la droite engendrée par le vecteur $(3, 2)$. Trouver une base de $F^\perp$ l'orthogonal de F par rapport à φ.
3. En déduire une base $\mathfrak{B}$ de $\mathbb{R}^2$ orthonormée au sens de φ.
4. La base $\mathfrak{B}$ est-elle orthogonale au sens du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique$\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, on considère le plan P engendré par les vecteurs $u = e_1 + e_2$ et $v = e_2 - e_4$.

1. Construire par l'algorithme de Gram-Schmidt une base orthonormée (w_1, w_2) de P.
2. Exprimer la projection orthogonale Π sur P en fonction de w_1 et w_2.
3. Calculer la distance du vecteur $(1, 2, 1, 8)$ au plan P.

Exercice 3

Soit $(E; \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée de E et soit $p \in \mathcal{L}(E)$ défini par:

$$\mathrm{mat}(p, \mathcal{B}) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Montrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on précisera une équation.

Exercice 4

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace vectoriel euclidien de dimension n.
On suppose qu'il existe p vecteurs $u_1, \cdots, u_p$ de E unitaires ($p \leq n$) tels que

$$\forall x \in E; \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \langle x, u_i \rangle^2.$$

1. Montrer que pour tout $i \neq j$ on a $\langle u_i, u_j \rangle = 0$
2. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par $u_1, \cdots, u_p$ et Π la projection orthogonale sur F.
   (a) Montrer que $\forall x \in E;\ \|\Pi(x)\| = \|x\|$.
   (b) En déduire en utilisant le théorème de Pythagore que
   $$\forall x \in E;\ \Pi(x) = x.$$
   (c) Conclure que $(u_1, \cdots, u_p)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 5

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$ avec $n \geq 4$ muni de sa base canonique $\mathfrak{B} = (1, X, \cdots, X^n)$ et soit $F = \mathbb{R}_2[X]$ le sous-espace des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2.

I- Pout tout $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$ deux polynômes dans E, on pose

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^{n} a_i\ b_i.$$

1. Montrer que $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que $\mathfrak{B}$ est orthonormée pour ce produit scalaire.
3. Calculer la projection orthogonale sur F du polynome $P(X) = X^3$.

II- Pout tout $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$ deux polynômes dans E, on définit le produit scalaire sur E

$$\Psi(P, Q) = \int_0^{+\infty} e^{-X} P(X) Q(X) dX.$$

1. Calculer $\Psi(X^n, 1)$. $\mathfrak{B}$ est-elle orthonormée pour Ψ?
2. Par l'algorithme de Gram-Schmidt, construire une base orthonormée de F.
3. Calculer alors la projection orthogonale sur F du polynôme. $P(X) = X^3$

Exercice 6

Soit $(E; <,>)$ un espace Euclidien et f une isométrie de E
$(f \in \mathfrak{L}(E);\ \|f(u\| = \|u\|$ pour tout $u \in E)$.

1. Montrer que pour tout $(u, v) \in E^2$, on a:

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle.$$

2. Soit $\mathfrak{B}$ une base orthonormée de E. Montrer que

$$f \text{ est une isométrie} \Leftrightarrow A = mat(f, \mathfrak{B}) \text{ est orthogonale}$$

.

3. On se place dans $E = \mathbf{R}^3$.
   (a) Montrer que f admet au moins une valeur propre réelle λ.
   (b) Montrer que $|\lambda| = 1$.
   (c) Soit E_λ l'espace propre associé à cette valeur propre λ.
   Montrer que $E_\lambda^\perp$ est stable par f.

4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que f est une isométrie.
   (b) Montrer que $\lambda = 1$ est une valeur propre de f et donner la dimension de l'espace propre associé E_λ.
   (c) Montrer que f est la symétrie orthogonale par rapport à E_λ.

Exercice 7

Soit $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[-1, 1]$ vers $\mathbb{R}$.
Pour tout $(f, g) \in E^2$, on pose
Pour tout $(f, g) \in E^2$, on pose

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

1. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. Soit $f_i(x) = x^i$ pour $i \in \mathbb{N}$.
   Montrer que la famille $\{f_0, f_1, f_2\}$ est libre mais pas orthogonale.

3. Déterminer par le procédé de Gram-Schmidt une base orthonormée de $F = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2)$.

4. calculer la distance de f_3 à F.

5. Soient $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires de E et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires de E.
   (a) Montrer que $\mathcal{I} = \mathcal{P}^\perp$.
   (b) Soit l'application

$$\psi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \tilde{f} \end{array}$$

   Avec $\tilde{f}(x) = f(-x)$.
   Montrer que ψ est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.