תרגול 0 – מתמטיקה לפיזיקאים 3

בתרגול נתמקד בחזרה על מספר נושאים שדרושים כדי לצלוח את הקורס באופן חלק. החומר בתרגול אינו חלק מסילבוס הקורס, והוא נועד ליישר קו ולחזור על טכניקות בסיסיות.

נושאי התרגול:

אינטגרל גאוסיאני, פונקציית גמא, הדיפרנציאל, משפטי גאוס וסטוקס, החלפת סכימה באינטגרציה, אינטגרלים במספר ממדים ושיטת פרוביניוס....

<u>אינטגרלים</u>

חישוב אינטגרלים הוא מיומנות בסיסית חשובה מאוד. נחזור על החישוב והפיתוח של כמה אינטגרלים מיוחדים חשובים.

אינטגרל גאוסייני:

אינטגרל גאוסייני הוא כל אינטגרל מהצורה

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-bx-c}\, dx$$

ישנה נוסחה כללית לפתרון אינטגרלים כאלה, ונרצה לפתח אותה מההתחלה, תוך יישום כלים בסיסיים באינטגרציה.

נתחיל בשיטת ההצבה – נציב $y = x + \frac{b}{2a}$ כדי להיפטר מהגורם הלינארי. נקבל

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(y-\frac{b}{2a}\right)^2-b\left(y-\frac{b}{2a}\right)-c} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2+\frac{b^2}{4a}-c} dy$$

הצבה נוספת, $z = \sqrt{a}y$, תעביר אותנו לצורה שאינה תלויה בפרמטרים:

$$e^{\frac{b^2}{4a}-c}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\frac{dz}{\sqrt{a}} = \frac{e^{\frac{b^2}{4a}-c}}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz$$

וכעת נשארנו עם האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz$, אותו לא נוכל להמשיך ולפשט. האינטגרל הלא-מסויים של הפונקציה הזו הוא מסובך, אבל את האינטגרל המסויים אפשר לחשב בעזרת טריק. נסמן את האינטגרל ב-I, ונכתוב כך:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy$$

נהפוך את האינטגרל הזה לאינטגרל דו-ממדי, ונחליף לקואורדינטות פולריות:

$$I^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2}rd\theta\, dr$$

$$= 2\pi\int_0^{\infty} re^{-r^2}dr$$

את האינטגרל הרדיאלי הזה נוכל לפתור בקלות, כי מתקיים $\frac{d}{dr}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right] = re^{-r^2}$, ונקבל

$$I^2 = 2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty} = \pi$$

כלומר

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

והאינטגרל המקורי שלנו הוא

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-bx-c}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}-c}$$

האינטגרל הזה מופיע בכל מקום, ונוח מאוד להסתייע בו.

<u>תזכורת: אינטגרציה בחלקים</u>

אינטגרציה בחלקים היא שיטה יסודית בחישוב אינטגרלים. נזכיר בקצרה איך היא פועלת, לקראת החלק הבא. בהינתן שתי פונקציות u,v, אפשר להחליף בין אינטגרל על הביטוי $\int uv'dx$ לאינטגרל על הביטוי $\int u'vdx$. המעבר הזה נעשה בעזרת העובדה שהאינטגרל של $u'v+uv'$ ידוע, ושווה ל- uv, מה שמאפשר לכתוב $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$. למשל, את האינטגרל $\int x\ln x\,dx$ נוכל לפתור על ידי הבחירה $u=\ln x\,, v=\frac{x^2}{2}$ שתיתן

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

אם נרצה לחשב אינטגרל מסויים, נקבל

$$\int_1^e x\ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e\frac{x}{2}dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4}$$

פונקציית גאמה:

פונקציית גאמה היא פונקציה שמוגדרת לפי האינטגרל הבא:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx$$

אין נוסחה סגורה כללית לפונקציית גאמה בעזרת פונקציות פשוטות אחרות, אבל כן יש נוסחה רקורסיבית. אם משתמשים באינטגרציה בחלקים, אפשר לכתוב את

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$$

בעזרת $u = x^n, v = -e^{-x}$ ואז

$$\Gamma(n+1) = [-x^n e^{-x}]_0^\infty - \int_0^\infty (nx^{n-1})(-e^{-x}) dx$$

$$= 0 + n\int_0^\infty x^{n-1} e^x dx = n\Gamma(n)$$

כלומר $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$. אם נציב $n = 1$ נקבל $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$, ולכן עבור n טבעי נקבל $\Gamma(n) = (n-1)!$. עם זאת, פונקציית גאמה היא כללית יותר, גם עבור ערכים ממשיים. איך אפשר להגדיר אותה? $\Gamma(2.5) = 1.5 \cdot \Gamma(1.5) = 1.5 \cdot 0.5 \cdot \Gamma(0.5) = \frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. אבל זה לא עוזר – למה שווה $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$?

נכתוב את האינטגרל – $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx$. אפשר להציב $x = y^2$, ולקבל

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{y} e^{-y^2} 2y dy = 2\int_0^\infty e^{-y^2} dy$$

זה בדיוק חצי מהאינטגרל הגאוסייני שחישבנו קודם! כלומר, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, ובהתאמה $\Gamma(2.5) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$ וכד'.

שני האינטגרלים האלה – אינטגרל גאמה ואינטגרל גאוסייני – הם הלחם והחמאה של אינטגרלים. הרבה חישובים מסובכים מסתיימים בפישוט שמוביל אליהם.

החלפת סכימה ואינטגרציה

אינטגרל של סכום פונקציות הוא סכום האינטגרלים שלהן. זה נכון בכל הקשר פיזיקלי (אם כי מתמטית ייתכנו דוגמאות פתולוגיות). אותו העקרון יפה גם במקרה של סכומים אינסופיים – אינטגרל על סכום פונקציות הוא סכום האינטגרלים. לעתים ניתן כך לפצל חישוב של אינטגרל מסובך אחד לחישובם של אינסוף אינטגרלים פשוטים.

לדוגמה, נתבונן באינטגרל $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$. בפני עצמו, לא ברור איך לתקוף את האינטגרל הזה. למעשה, לא ניתן לכתוב את האינטגרל הבלתי-מסויים בעזרת פונקציות פשוטות. עם זאת, נוכל לפרק את $\frac{1}{1-x}$ לסכום $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$. כעת נוכל להציב את הסכום ולהחליף בין סכימה לאינטגרציה:

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx = \int_0^1 \ln x \sum_{k=0}^{\infty} x^k \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 x^k \ln x \, dx$$

החלפנו את האינטגרל הקשה האחד שלנו ברשימה מסודרת של אינטגרלים פתירים. אינטגרציה בחלקים נותנת

$$\int_0^1 x^k \ln x \, dx = \left[\frac{x^{k+1} \ln x}{k+1}\right]_0^1 - \frac{1}{k+1} \int_0^1 x^k dx = -\frac{1}{(k+1)^2}$$

החלק בסוגריים מתאפס – הלוגריתם מתאפס ב-1 והחזקה ב-0. את האינטגרל השני אפשר לפתור בקלות, ולקבל את התוצאה.

לחלופין, הצבה. אם נציב $x = e^{-\frac{t}{k+1}}$, $dx = -\frac{1}{k+1}e^{-\frac{t}{k+1}}dt$, $\ln x =$ $-\frac{t}{k+1}$ ונקבל

$$= \frac{-1}{(k+1)^2}\int_0^\infty te^{-t}dt = -\frac{1}{(k+1)^2}$$

נציב את אלה חזרה, ונקווה שנקבל טור מוכר:

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{(k+1)^2} = -\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots\right)$$

הסכום בסוגריים מוכר, וידוע שהוא שווה ל-$\frac{\pi^2}{6}$, לכן $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx = -\frac{\pi^2}{6}$.

דיפרנציאל של פונקציה רב ממדית

הדיפרנציאל של פונקציה df הוא אובייקט מתמטי המייצג את השינוי הלינארי של ערך הפונקציה כתוצאה משינוי אינפיניטסימלי במשתנים שלה.

עבור פונקציה חד ממדית, ישנו קשר ישיר בין הדיפרנציאל ובין הנגזרת:

$$df = f'(x)dx = \frac{df}{dx}dx$$

עבור פונקציה רב ממדית, הדיפרנציאל מורכב מהנגזרות החלקיות לפי כל משתני הפונקציה

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

דוגמא:

בהינתן התפלגות טמפרטורה במרחב $T(r,\theta,\phi) = e^{-\kappa r}(1-\cos\theta)$

נחשב את שינוי הטמפרטורה המרגישה חללית שנעה בקו הישר $z = x + a$ בגובה $y = 0$.

ראשית נחשב את הדיפרנציאל של הטמפרטורה

$$dT = -\kappa e^{-\kappa r}(1-\cos\theta)dr + \ e^{-r}\sin\theta\, d\theta$$

כעת, כדי לחשב את השינוי לאורך מסלול החללית נצטרך לתרגם את הדיפרנציאלים $dr, d\theta$ לקואורדינטות קרטזיות. נוכל לעשות זאת לאורך המסלול של החללית, אך לצורך התרגול נחשב את שני הדיפרנציאלים במונחים של קואורדינטות קרטזיות:

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \to dr = \frac{xdx + ydy + zdz}{r}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{z}\right) \to d\theta = \frac{d(x/z)}{1 + x^2/z^2} = \frac{zdx - xdz}{z^2 + x^2}$$

נציב את הדיפרנציאלים חזרה בתוך שינוי הטמפרטורה:

$$dT = -\kappa e^{-\kappa r}(1-\cos\theta)\frac{xdx + zdz}{r} + \ e^{-\kappa r}\sin\theta\frac{zdx - xdz}{z^2+x^2}$$

$$dT = -\frac{\kappa e^{-\kappa r}}{r}(1-\cos\theta)(xdx + zdz) + \ \frac{e^{-\kappa r}}{r^2}\sin\theta\,(zdx - xdz)$$

כעת לאורך הישר $z = x + a$ נוכל לקשור בין הדיפרנציאלים $dx = dz$-

$$dT = \left[-\frac{\kappa e^{-r}}{r}\left(1-\frac{z}{r}\right)(2x+a) + \ \frac{e^{-\kappa r}}{r^2}\frac{x}{r}\ a\right]dx$$

כעת אפשר להשתמש בדיפרנציאל כדי לבטא ולחשב נגזרות ואינטגרלים, לדוגמא $\frac{dT}{dx}$, $\int SdT$, וכו'.

אינטגרלים במספר ממדים

אינטגרלים בממד גדול מ-1 שונים מאינטגרלים חד-ממדיים בכך שהפונקציות בהן עוסקים מקבלות כקלט לא רק מספר אחד, אלא וקטור, או נקודה במרחב שהוא יותר מחד-ממדי. עם זאת, אינטגרלים בממד קבוע וגבוה – נאמר, 3 – נבדלים זה מזה בממד התחום עליו מתבצע אינטגרל ובשאלה האם הפונקציה היא סקלרית או וקטורית. בתלת ממד, אם כך, ישנו מספר רב של אינטגרלים שכולם מכונים "אינטגרל רב ממדי", עבור פונקציות סקלריות או וקטוריות. כולם דומים אלה לאלה בכך שהם מגיעים מסכימה על אלמנטים אינפיניטסימליים, אבל שונים במשמעות הפיזיקלית שלהם. הנה כמה דוגמאות:

- נתון חוט בעל צפיפות מסה $\lambda(\vec{r})$. מסתו הכוללת היא $M = \int_i^f \lambda(\vec{r})d\ell$ – זה אינטגרל <u>קווי</u> (הוא מבוצע לאורך קו). אלמנט האורך פה הוא סקלרי – רק האורך שלו מעניין אותנו.
- חלקיק נע לאורך מסלול כשפועל עליו כח $\vec{F}(\vec{r})$. העבודה הכוללת תהיה $W = \int_i^f \vec{F}(\vec{r}) \cdot \overrightarrow{d\ell}$. פה האינטגרל עדיין <u>קווי</u>, אבל עכשיו לאלמנט האורך יש גם כיוון, ומתבצעת מכפלה סקלרית בינו לבין הכח.
- יש במרחב שדה מגנטי $\vec{B}$, ומחפשים את השטף המגנטי שחולף דרך משטח מסויים. במקרה כזה האינטגרל הוא <u>משטחי</u>, $\Phi =$

$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$. גם הפעם לאלמנט האינפיניטסימלי יש כיוון – הפעם בוחרים בכיוון הנורמל, כך שלפעמים האינטגרל הזה נכתב גם $\iint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS$.

- במרחב יש צפיפות אנרגיה $u = \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2$. האנרגיה החשמלית הכוללת היא $E_{el} = \iiint u dV$.

יחד עם האינטגרלים, יש גם מקבילים רב-ממדיים לנגזרות, שנכתבים עם האופרטור $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$ – הוא מופעל על פונקציה סקלרית ומחזיר פונקציה וקטורית, אז הוא מכונה "גרדיאנט", או שהוא פועל על פונקציה וקטורית עם מכפלה סקלרית, אז הוא מכונה "דיברגנץ". הוא מקיים את אותו כלל מכפלה שמקיימות נגזרות רגילות – למשל, $\vec{\nabla}(uv) = v(\vec{\nabla} u) + u(\vec{\nabla} v)$. בהתאם, אפשר לנסות לבצע אינטגרציה בחלקים, למשל על אינטגרל סקלרי תלת-ממדי:

$$\iiint (u\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV = \iiint \vec{\nabla} \cdot (u\vec{A}) dV - \iiint \vec{\nabla} u \cdot \vec{A} dV$$

המעבר מהאינטגרל הראשון לאחרון ברור, אבל לא ממש ברור מה לעשות עם האינטגרל האמצעי – איך לתרגם אותו לערך "בקצוות", כפי שהיינו עושים לנגזרת שלמה בחד-ממד? התשובה טמונה במשפט הדיברגנץ, שמאפשר לנו לרדת בממד אחד:

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot (u\vec{A}) dV = \iint_S u\vec{A} \cdot \overrightarrow{ds}$$

והחלפנו את האינטגרל הנפחי באינטגרל משטחי – על השפה בלבד.

ניתן דוגמה טובה – ידוע שהאנרגיה הנפחית של מערכת חשמלית היא $\int \frac{\vec{E}^2 \varepsilon_0}{2} dV$. מאיפה מגיע הגודל הזה? התוצאה האינטואיטיבית על עבודה היא $U = \frac{1}{2}\int \phi\rho dV$ – סכימת האנרגיה של כל מטען אינפיניטסימלי.

אם ניעזר בחוק גאוס, נוכל לכתוב $\rho = \vec{\nabla}\left(\varepsilon_0 \vec{E}\right)$, ונקבל

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_V \phi\vec{\nabla}\cdot\ \vec{E}dV = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\left(\phi\,\vec{E}\right)dV - \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_V \vec{E}\cdot\vec{\nabla}\phi dV$$

נטפל בשני הביטויים בנפרד. בביטוי הראשון נשתמש במשפט הדיברגנץ, ובשני – בהגדרת הפוטנציאל החשמלי והקשר שלו לשדה החשמלי:

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\iint_S \phi\vec{E}\cdot\overrightarrow{ds} + \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_V \vec{E}^2 dV$$

מה קורה אם אנחנו מחפשים את האנרגיה בכל המרחב? במקרה הזה נרצה לאפס את האינטגרל הראשון, כי הרי מה המשמעות של אינטגרל על השפה של כל המרחב? בפועל, נצטרך להיות קצת זהירים – אפשר לחשוב על השטח הזה כעל כדור ענק (אבל סופי!) שמקיף את כל המערכת. השדה החשמלי והפוטנציאל דועכים, אבל השטח עליו אנחנו מבצעים אינטגרל גדול. למזלנו, כל עוד המטענים מפוזרים באופן סופי, רחוק מספיק השדה החשמלי דועך כמו $\propto \frac{1}{r^2}$ והפוטנציאל כמו $\propto \frac{1}{r}$, אז $\phi\vec{E}\cdot\vec{s} \propto \frac{1}{r}$ והגודל הזה דועך.

ניקח לדוגמה כדור ברדיוס R שטעון בצפיפות אחידה ρ_0. כידוע, השדה המתקבל הוא $E(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{R^3\rho_0}{3\varepsilon_0 r^2}, & r > R \\ \frac{r\rho_0}{3\varepsilon_0}, & r \le R \end{cases}$. הפוטנציאל הוא $\phi = \begin{cases} \frac{R^3\rho_0}{3\varepsilon_0 r}, & r > R \\ \frac{(3R^2-r^2)\rho_0}{6\varepsilon_0}, & r \le R \end{cases}$. לפי פוטנציאל, האנרגיה היא

$$\frac{1}{2}\int_0^R \frac{4\pi(-r^4+3R^2r^2)\rho_0^2}{6\varepsilon_0}dr = \frac{1}{3}\frac{\pi\rho_0^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{4R^5}{5}\right) = \frac{4}{15}\frac{\pi\rho_0^2R^5}{\varepsilon_0}$$

ואפשר להציב $\rho_0^2 = \frac{9Q^2}{16\pi^2R^6}$ ולקבל

$$U = \frac{4}{15}\frac{9}{16}\frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 R} = \frac{3}{20}\frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 R}$$

זו העבודה הדרושה כדי להביא את המטענים כולם מאינסוף ועד למקום בו הם נמצאים.

אם נעבור לדבר על אינטגרל של השדה, לעומת זאת, נצטרך לבצע אינטגרל על תחום אינסופי. אם ננסה לקחת תחום סופי בלבד (נניח, עד רדיוס $L > R$), נקבל

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\left[\int_0^R\left(\frac{r\rho_0}{3\varepsilon_0}\right)^2 4\pi r^2 dr + \int_R^L\left(\frac{R^3\rho_0}{3\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr\right]$$

$$= \frac{2\pi\rho_0^2}{9\varepsilon_0}\left[\int_0^R r^4 dr + R^6\int_R^L\frac{dr}{r^2}\right] = \frac{2\pi\rho_0^2}{9\varepsilon_0}\left[\frac{6R^5}{5} - \frac{R^6}{L}\right]$$

כאשר $L\to\infty$ נקבל את התוצאה הקודמת, $\frac{4}{15}\frac{\pi\rho_0^2R^5}{\varepsilon_0}$, אבל אם ננסה למצוא את האנרגיה בתוך כדור סופי נקבל את התוצאה הזו, שתלויה בגודל הכדור. איך ייתכן ההבדל הזה, שבתוך כדור נתון יש אנרגיה אחת למטענים ואנרגיה אחרת לשדה, והרי שני הביטויים אמורים להיות זהים? התשובה מגיעה מאיבר השפה, כאמור:

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\iint_S \phi\vec{E}\cdot\overrightarrow{ds}=\frac{\varepsilon_0}{2}4\pi L^2\frac{R^3\rho_0}{3\varepsilon_0 L^2}\frac{R^3\rho_0}{3\varepsilon_0 L}=\frac{2\pi R^6\rho_0^2}{9\varepsilon_0 L}$$

וזה בדיוק האיבר החסר – כך שהאינטגרציה בחלקים באמת עובדת.

משפט גאוס ומשפט סטוקס

כהשלמה לדוגמא הקודמת נזכר במשפט גאוס (או משפט הדיברגנץ):

בהנתן שדה וקטורי במרחב התלת-ממדי $\vec{F}(\vec{r})$, ניתן להמיר בין *אינטגרל שיטחי* סגור על שפה, לאינטגרל נפחי של הדיברגנץ של השדה:

$$\iiint_V (\nabla\cdot\mathbf{F})\,dV=\oiint_{\partial V}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

תרגיל:

Problem: Use the divergence theorem to evaluate the surface integral $\iint_S F\cdot n\,d\sigma$ where $F(x,y,z)=(x+y,z^2,x^2)$ and S is the surface of the hemisphere $x^2+y^2+z^2=1$ with $z>0$ and $\mathbf{n}$ is the outward normal to S.

Solution: First note that the surface is not closed. If we apply the divergence theorem to the solid $D:=x^2+y^2+z^2\le 1,\ z>0$, we get

$$\iiint_D divF\ dV=\iint_S F\cdot\mathbf{n}\ d\sigma+\iint_{S_1}F\cdot\mathbf{n}_1\ d\sigma$$

where $S_1:=x^2+y^2<1,\ z=0$ the base of the hemisphere (see Figure 2) and $\mathbf{n}_1$ is the outward normal to S_1 which is $-k$. Since $divF=1$, the volume integral in the above equation is the volume of the hemisphere, $\frac{2\pi}{3}$. Therefore

$$\iint_S F\cdot\mathbf{n}\ d\sigma=\frac{2\pi}{3}-\iint_{S_1}F\cdot -k\ d\sigma=\frac{2\pi}{3}+\iint_{S_1}x^2\ d\sigma$$

which is relatively easier to evaluate. To evaluate the surface integral over S_1, consider $S_1 = (\cos\theta, r\sin\theta),\ 0 \le r < 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi$. Then

$$\iint_{S_1} x^2\ d\sigma = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2\theta r d\theta dr = \int_0^1 r^3 \pi dr = \frac{\pi}{4}.$$

Therefore the requied integral is

$$\iint_S F \cdot \mathbf{n}\ d\sigma = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{12}.$$

נזכיר את משפט סטוקס:

בהינתן שדה וקטורי במרחב התלת -ממדי $\vec{F}(\vec{r})$, ניתן להמיר בין אינטגרל

מסלולי של F על מסלול סגור לאינטגרל שטחי על $\vec{\nabla} \times \vec{F}$:

$$\int_S \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

תרגיל פשוט:

הראו שמשפט סטוקס מתקיים עבור הפונקציה $F(\vec{r}) = y\,\hat{x} + xz\,\hat{y} +$

$\hat{z}$ 1 על מעגל היחידה במישור $z = 0$

פתרון:

Consider the curve C which is the unit circle in the xy-plane, defined by $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, oriented counterclockwise when viewed from above. Let us compute the line integral of $\vec{F}$ along C.

First, parametrize C by the usual "longitude" angle θ:

$$\vec{r}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$
$$0 \le \theta \le 2\pi.$$

Then we have

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} (y, xz, 1) \cdot \vec{r}'(t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin\theta, 0, 1) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0) dt \\
&= \int_0^{2\pi} -\sin^2\theta dt \\
&= \boxed{-\pi}.
\end{aligned}$$

Stokes' theorem claims that if we "cap off" the curve C by any surface S (with appropriate orientation) then the line integral can be computed as

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS.$$

Now let's have fun! More precisely, let us verify the claim for various choices of surface S.

2.1 Disk

Take S to be the unit disk in the xy-plane, defined by $x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0$. According to the orientation convention, the normal $\vec{n}$ to S should be oriented upward, so that in fact $\vec{n} = (0, 0, 1)$.

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_S (-x, 0, z-1) \cdot (0, 0, 1) dS \\
&= \iint_S (z-1) dS \\
&= \iint_S (-1) dS \\
&= -\operatorname{Area}(S) \\
&= \boxed{-\pi}.
\end{aligned}$$

שיטת פרוביניוס

נסיים בנושא אחרון – שיטת פרוביניוס לפתרון משוואות דיפרנציאליות. הרעיון של השיטה הוא שניתן לקחת משוואה דיפרנציאלית לינארית ולהציב בה טור כפתרון, כדי לקבל את טור הטיילור של הפונקציה שפותרת אותה.

נתחיל מדוגמה פשוטה יחסית: המשוואה הדיפרנציאלית $y'' = -y$, שפתרונותיה הם כמובן קוסינוס וסינוס. אם נציב $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, נקבל שוויון בין הטורים

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) x^{k-2} = -\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

הזזת אינדקסים באגף שמאל, כך שk שוב יהיה המעריך של x, נותנת

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}(k+2)(k+1)x^k = -\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$\Rightarrow a_{k+2} = -\frac{a_k}{(k+2)(k+1)}$$

אלה יחסי רקורסיה שיאפשרו לנו לכתוב את האיברים הזוגיים עם $a_0 \equiv A = y(0)$ ואת האי-זוגיים עם $a_1 \equiv B = y'(0)$. נקבל

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2k(2k-1)} = \frac{a_{2k-4}}{2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)} = \cdots$$
$$= \frac{(-1)^k A}{(2k)!}$$

$$a_{2k+1} = -\frac{a_{2k-1}}{(2k+1)2k} = \cdots = \frac{(-1)^k B}{(2k+1)!}$$

וזה אכן הפיתוח של $A\cos(x) + B\sin(x)$, הפתרון הידוע של המשוואה.

דוגמה נוספת: פונקציית איירי היא הפתרון של המשוואה $y'' = xy$. נציב את הטור כמו קודם, ונקבל

$$\sum_{k=-1}^{\infty} a_{k+3}(k+2)(k+3)x^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1}$$

הקשר המתקבל הוא בקפיצות של 3: $a_{k+3} = \frac{a_k}{(k+2)(k+3)}$. נראה כאילו דרושים שלושה תנאי התחלה – a_0, a_1, a_2, ואיך זה ייתכן, הרי

המשוואה מסדר שני! אבל למעשה, יש איבר אחד שלא התייחסנו אליו – באגף שמאל הסכום מתחיל מ-$k=-1$, כך שיש שם את האיבר x^0, בעוד שבאגף ימין האיבר הראשון הוא x^1 – משמע, המקדם של x^0 מתאפס. לכן $2a_2=0$ ואנחנו נשארים עם

$$a_{3k}=\frac{a_0}{3k(3k-3)\cdots 3\cdot(3k-1)(3k-4)\cdots 2}$$

$$a_{3k+1}=\frac{a_1}{(3k+1)(3k-2)\cdots 4\cdot 3k(3k-3)\cdots 3}$$

$$a_{3k+2}=0$$

שני פרמטרים, כרצוי. בחירה נכונה של a_0,a_1 נותנת את שני הפתרונות המקובלים, שנהוג לסמן $Ai(x),Bi(x)$.