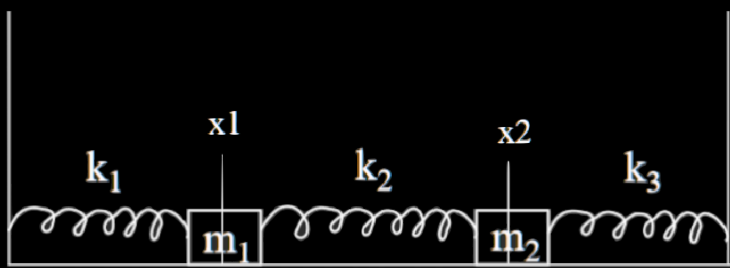
שאלה 1

בהינתן מערכת המורכבת משתי מסות על משטח ללא חיכוך המחוברות על ידי שלושה קפיצים באופן הבא:
המסה m_1 מחוברת לקיר על ידי קפיץ בעל קבוע k_1 ולמסה m_2 על ידי קפיץ נוסף בעל קבוע k_2.
המסה m_2 מחוברת מצידה השני לקיר נוסף על ידי קפיץ בעל קבוע k_3, כפי שמתואר באיור.



א. כתבו את משוואות התנועה עבור המסות ובטאו אותן בצורה מטריציונית.
(רמז: מצאו מטריצות K ו-M המקיימות - $M\ddot{x}+Kx=0$
כאשר x הוא וקטור המתאר את מיקום המסות)

פתרון סעיף א:
נניח כי נקודת המנוחה של קפיץ עם קבוע k_1 הוא ב- $x=0$ ונקודת המנוחה של קפיץ עם קבוע k_3 היא בקצה המערכת כלומר $x=L$.
כלומר שמשוואת הכוחות על m_1:

$$m_1\ddot{x}_1=-k_1x_1+(x_2-x_1)k_2$$

ועל המסה m_2:

$$m_2\ddot{x}_2=-k_3x_2-k_2(x_2-x_1)$$

נסדר קצת המשוואות כדי שנוכל לבודד את k:

נראה כי כאשר:

$$M=\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix},x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, T=\begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_3+k_2 \end{pmatrix}$$

ננחש פתרון הרמוני:

$$x(t)=Ae^{i\omega t}$$

נציב במשוואת הרמז:

$$\ddot{x}=-\omega^2x(t) \implies M\cdot-\omega^2x(t)+Kx(t)=0 \implies (-\omega^2M+K)x(t)=0$$

בשביל שיהיה פיתרון לא טריוואלי למערכת משוואות אנחנו צריכים לבדוק מתי הדטרימממנטה שלה שווה ל-0 כי אז היא לא הפיכה מה שאומר שהגרעין שלה לא ריק ובו שוכנים הוקטורים שאנחנו מחפשים:

$$\det(-\omega^2M+k)=0=(-\omega^2m_1+k_1+k_2)\cdot(-\omega^2m_2+k_3+k_2)-k_2^2=$$
$$\omega^4m_1m_2-\omega^2m_1k_3-\omega^2m_1k_2-\omega^2m_2k_1+k_1k_3+k_1k_2-\omega^2m_2k_2+k_3k_2+k_2^2-k_2^2=$$

נסמן :

$$z=\omega^2$$
$$m_1m_2z^2-(m_1k_3+m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2)z+k_1k_3+k_1k_2+k_3k_2=0$$
$$z_{1,2}=$$

$$\frac{m_1(k_3+k_2)+m_2(k_1+k_2)\pm\sqrt{(m_1(k_3+k_2)+m_2(k_1+k_2))^2-4\cdot m_1m_2(k_1k_3+k_1k_2+k_3k_2)}}{2m_1m_2}$$

$$\omega_{1,2}=$$

$$\sqrt{\frac{m_1(k_3+k_2)+m_2(k_1+k_2)\pm\sqrt{(m_1(k_3+k_2)+m_2(k_1+k_2))^2-4\cdot m_1m_2(k_1k_3+k_1k_2+k_3k_2)}}{2m_1m_2}}$$