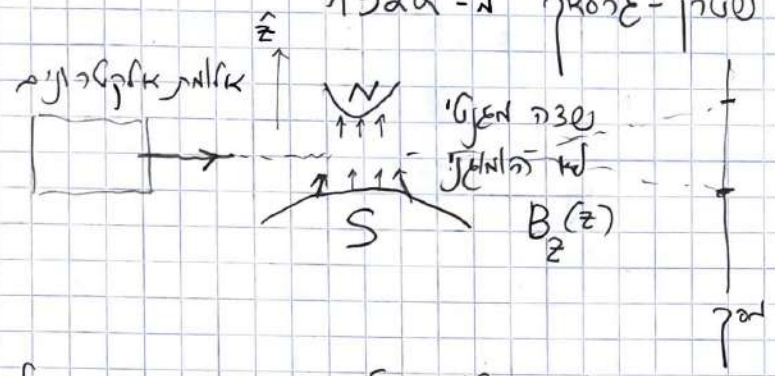
- אם כך בדיוק על עקרונות יסוד הרשמה המתמטית הבדרושה. עכשיו נעבור לבואנאות...

מערכת שתי - רמות / ספין

נתחיל מהבואנאו הפשוטה ביותר מבחינה מתמטית, לאפשר המודל המינימלי למערכת קוונטית. המוטיבציה היא ניסוי הסטרן-גרלאך המתחולל המאה ה-20 (שלא הקבתי במבוא של השיעור הראשון): ניסוי שטרן-גרלאך מ-1922



- תוצאות הניסוי היתה פיצול האלומה ל-2. הפרשנות לכך היא שמפעל לא הנובע מגרדיאנט השדה, בהנחה שלאלקטרונים יש אלמנט מגנטי:

$$F_z = -\mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

מתוצאות הניסוי, m_z יכול לקבל רק שני ערכים:

$$\mu_z = \underbrace{\frac{\hbar e}{mc}}_{\text{הרגשון של בוהר } \mu_B} \cdot S_z, \qquad \boxed{S_z = \pm 1/2}$$

משמעות הדבר היא שיש לאלקטרון דרגת חופש נוספת לא קשורה לתנועה בארתה, אלא מין תנועה פנימית. הוא מתבטאת באלמנט מגנטי הדומה לחלקיק עם מטען e ומסת האלקטרון m בהנחה שיש לו תנע זוויתי $\vec{L} = \hbar S \hat{z}$. קלאסית, היינו יכולים לנסות לקשר אותה עם תנועה סיבובית של האלקטרון סביב עצמו, בהנחה שהוא כדור קטן שלו מטען משמעותי. אבל כוון שהדיבר על גודל האלקטרון עצמו (אם בכלל יש משמעות לדבר) הוא רדיוס קטן מאוד (<< גודל אטום), מהירות הסיבוב היתה גדולה מהאור > c. כלומר, דרוש תיאור יחסותי של אלקטרון כדי לפרש את זה (ואכן, ה-μ_B מופיע c).

פנולפ – מצוע רק שני ערכים בכיוון z - S, אלא תלוי
באיך כוון נפעל את השדה $\vec{B}$? – מסקנה: צורה
בדיקת חומר קוונטית שאין לה אנלוג קלאסי, אבל חייבים
לקלוט בתיאור המצב הקוונטי של האלקטרון (וכנ"ל לחלקיקי חומר
יסודיים אחרים). נכנה אותה **ספין**.

– הנישה של תורת הקוונטים היא שנצטרך עכשיו, ונגיע
תיאור מתמטי שמאפשר לטפל בדרגת חופש צו. כך בוקאו
פשוט: מרחב המצבים האפשרי כולל רק שני איברי בסיס,
כלומר הממד שלו $N=2$. נגדיר את מצבי הבסיס

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$ (בהתאם לכוון הקבוע...)

נשים לב, שבתיאור המתמטי שנפרט להלן מתאים בדיוק
כך לכל דרגת חופש שמאופיינת ע"י שני מצבים בלבד,
מה שנקרא באופן כללי מערכת שתי-רמות (TLS).
כך יכול להיות עם, למשל, תיאור אבקטים לתלקיק קוונטי בשני אורות מאד
עמוקים $|1\rangle$ ו- $|2\rangle$ אבל עם אפשרות לתלקיק להיות
בסופר פוזיציה בינהם; או שני אלים חופשיים בממד 1
עם אותו אורך גל λ, ימני ושמאלי $k=\pm\frac{2\pi}{\lambda}$ (לעתים
קוראים לדרגת החופש בדוגמאות האלה איזוספין/פסאודוספין).

$\Rightarrow$ מצב כללי של האלקטרון יהיה מתואר
ע"י **ספינור**

$$|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

כאשר מהנירמול $|a|^2+|b|^2=1$. כל אלקטרון הנמצא
לאורלמה קיומי SG הוא במצב כזה, עם a ו- b שלו
יצוגים. אך ברגע שעוברים מתוך השדה המגנטי מתקבלים
מצבים – המתקבלים בעל קרסר למצב יצוג בדוגמאות שהוא
או $|\uparrow\rangle$ או $|\downarrow\rangle$. אם נגדיר אופרטור ספין $\vec{S}$ (כאשר
בתנע הזוויתי המתאים לו הוא $\vec{L}=\hbar\vec{S}$), אזי $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ הם
מצבים עצמיים של רכיב ה-z שלו.

27

$(\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma})$

$\hat{S}_z = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z$

(וקטור ב-3D) $\hat{\vec{\sigma}}$ כך ש ⇐ נגדיר אופרטור

אזי

$$\left.\begin{aligned}\hat{\sigma}_z|\uparrow\rangle &= \lambda_\uparrow|\uparrow\rangle \\ \hat{\sigma}_z|\downarrow\rangle &= \lambda_\downarrow|\downarrow\rangle\end{aligned}\right\} \quad \boxed{\lambda_{\uparrow,\downarrow} = \pm 1}$$

ניתן אם כן לכתוב את $\hat{\sigma}_z$ כמטריצה 2×2 אלכסונית בבסיס $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$, או בעזרת הטלות $\hat{P}_{\uparrow,\downarrow}$:

$$\hat{\sigma}_z = \left(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|\right) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

[בהצגה המטריצונית, קל לראות

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$$

נמצא את ערך הציפיה של $\hat{\sigma}_z$ במצב כלשהו של הספין.
עבור מצבי הבסיס שמתקבלים, למשל, באלומות המפוצלות לאחר המדידה בניסוי SG, נקבל

$$\langle\uparrow|\hat{\sigma}_z|\uparrow\rangle = 1 \qquad \langle\downarrow|\hat{\sigma}|\downarrow\rangle = -1$$

ועבור מצב כללי:

$$|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$$

$$\Rightarrow \langle\psi|\hat{\sigma}_z|\psi\rangle = \left(a^*\langle\uparrow| + b^*\langle\downarrow|\right)\left(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|\right)\left(a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle\right)$$

$$= \begin{pmatrix}a^* & b^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \underbrace{|a|^2}_{\substack{\text{הסתברות להמצא}\\ \text{במצב } \uparrow}} - \underbrace{|b|^2}_{\substack{\text{הסתברות להמצא}\\ \text{במצב } \downarrow}}$$

- מה לגבי הרכיבים האחרים של הספין, $\hat{S}_x$ ו- $\hat{S}_y$?
נראה עכשיו שאם אלקטרון נמצא במצב זכאי של $\hat{\sigma}_z$ (למשל $|\uparrow\rangle$), אנחנו לא יודעים כלום על הרכיבים האחרים.
נכתוב אופרטור ל- $\hat{\sigma}_x$, למשל - הוא צריך להיות כך שבמצב $|\uparrow\rangle$ או $|\downarrow\rangle$ (הספין בכיוון $\hat{z}$) ערך הציפיה שלו יהיה 0. נבחר אותו להיות מהצורה (אופרטור הפיכי)

$$\hat{\sigma}_x = \left(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[הערה: יש חופש בחירה של פאזה $e^{i\varphi}$ (שאפשר יחסי בין וקטורים) ($e^{i\varphi}$ לראשון, $e^{i\varphi}$ לשני)
לפוסל לאיבר השני, השקול לבחירה של ציר $\hat{x}$
מסוים במישור המאונך לציר $\hat{z}$. הקונבנציה היא $\varphi=0$].

עתה התצפית שלנו בתצב $|\uparrow\rangle$ הוא:

$$\langle\uparrow|\hat{\sigma}_x|\uparrow\rangle = \left(\langle\uparrow|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + \langle\uparrow|\downarrow\rangle\langle\uparrow|\right)|\uparrow\rangle =$$

$$= \langle\uparrow|\uparrow\rangle\underbrace{\left(\langle\downarrow|\uparrow\rangle + \langle\uparrow|\downarrow\rangle\right)}_{=0} = \underline{\underline{0}} \iff \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

ובמצב כללי של הספין $|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$ נקבל:

$$\langle\psi|\hat{\sigma}_x|\psi\rangle = \begin{pmatrix}a^* & b^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^* & b^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\ a\end{pmatrix}$$

$$= a^*b + b^*a$$

לדוגמה הכי ערך מקסימלי (מוחלט) 1 עבור $|a|=|b|$
וכיוון שתנאי הנרמול דורש $|a|^2+|b|^2=1$, צריך שיתקיים
עבור $|a|=|b|=\frac{1}{\sqrt{2}}$. כלומר, כאשר יש מקסימום
אי וודאות בערך של רכיב ה-z. אנו רואים
כאן הדמיה של עקרון אי הוודאות שאתם מכירים
כבר כמאפיין של מקום ותנע, בדוגמא של ברגע
התלבש הספינים (כאן לא תנע זוויתי באופן כללי) הוא מאפיין
את הקשר בין הרכיבים השונים של אותו וקטור $\vec{S}$.
אם נתבונן לניסוי SG, מה נראה אם נפעיל על האלמנטים
המבודדים מהניסוי המקורי עוד פעם שדה מגנטי לא הומוגני?
אם הוא באותו כיוון ($\hat{z}$), מצב $|\uparrow\rangle$ ישאר כך ולא
נראה פיצול נוסף. לעומת זה, הפעלת $\vec{B}\parallel\hat{x}$ תיתן שוב
פיצול ל-2 לכל אחת מהאלמנטים המקוטבים בכיוון $\hat{z}$.

(29) כמו ל- $\hat{\sigma}_z$, גם ל- $\hat{\sigma}_x$ אפשר למצוא מצבים קוונטיים מיוחדים שהם מצבים עצמיים שלו (ואליהם תקפה גם הגדרה $B_x(x)$ של SG) : $\lambda_x = \pm 1$ (*)

$$\hat{\sigma}_x\left(a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle\right) = \pm\left(a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle\right)$$

(*) הערכים העצמיים חייבים להיות מאותם כי זה אופרטור הרמיטי, וכולן ש- $\det(\hat{\sigma}_x) = 1$ חייבים לקיים $|\lambda| = 1$].

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_\pm \\ b_\pm \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} a_\pm \\ b_\pm \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b_\pm \\ a_\pm \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} a_\pm \\ b_\pm \end{pmatrix} \quad |a_\pm|^2 + |b_\pm|^2 = 1$$

$\Leftarrow$ עד כדי פיזה גלובלי אקראית $e^{i\varphi}$, נקבל

$$\boxed{|+\rangle = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right)}_{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} \qquad |-\rangle = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right)}_{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}}$$

נשים לב שבמצב האופרטורים $\hat{\sigma}_z$, $\hat{\sigma}_x$ שאותם אי אפשר למדוד סימולטנית (כלומר, אי אפשר לדעת בו זמנית ערכי אותן כמויות למתח המצבים) הם לא חילופיים:

$$\left[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_z\right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$ יחס החילוף

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$ } אופרטור שלא נמצא בהקרה לכפולה כ- $c\hat{I}$

למעשה הם אנטי-חילופיים $\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x = 0$

— נוכיח עכשיו טענה כללית: בין אופרטורים $\hat{A}$, $\hat{B}$ ניתנים לדעת סימולטנית אם $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$

הוכחה (כולן אחד) ערכים מספריים

$$\hat{A}|n\rangle = A_n|n\rangle \qquad \hat{B}|n\rangle = B_n|n\rangle$$ נניח

$\Rightarrow$ אלמנט מטריצה כלשהו של יחס החילוף $\langle l|[\hat{A}, \hat{B}]|n\rangle = \langle l|\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}|n\rangle =$

(*) הערה: אי אפשר לדעת ערכים מדויקים לכל הפחות מ- $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ בו זמנית. הוכחה בהמשך

$$= \langle l|\hat{A}B_n|n\rangle - \langle l|\hat{B}A_n|n\rangle = B_n\langle l|A_n|n\rangle - A_n\langle l|B_n|n\rangle$$

$$= (B_nA_n - A_nB_n)\langle l|n\rangle$$

אבל A_n, B_n הם סקלרים ולכן חילופיים $\Leftarrow$ התוצאה $\underline{\underline{0}}$.

- נתעניין לבדוק מהי השיעורים הקוואנטיים לאופרטורים לא חילופיים: $\hat{\vec{r}}$ ו- $\hat{\vec{p}}$ ($\hat{x}, \hat{p}$ במימד 1) מקיימים

$$[\hat{p}, \hat{x}] = -i\hbar$$

לאחר, נראה עכשיו שהפונקציות הגלים שלהם שונות מאוד, למרות קשר אי-ודאות – לחלקיק עם תנע מאוד הוא (מלבד עצמי של $\hat{p}$) $\hat{x}$ לעומתי לא מוגדר להגדיר.

כאינו כשר שהפונקציות המתאימות לחלקיק חופשי

$\psi_k(x) = Ae^{ikx}$ הן המצבים העצמיים של $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$:

(או ψ_p)

$\hat{p}\psi = \hbar k\psi \Rightarrow p = \hbar k$ עקב עצמי

מאידך, הסיכוי למצוא את החלקיק בנקודה x כלשהי נתון ע"י צפיפות הסיכוי $\rho(x) = |\psi(x)|^2 \Leftarrow \boxed{\rho(x) = |A|^2}$

כאן קבוע שלא תלוי ב-x $\Leftarrow$ סיכוי שווה לכל x, כלומר אי-הודאות ב-x היא אינסופית (במרחב אינסופי).

[(*) הערה לגבי נירמול של ψ_k:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\,|\psi_k(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,|A|^2 = |A|^2\int_{-\infty}^{\infty} dx \overset{?}{=} 1$$

האינטגרל מתבדר ולכן לא ניתן לנרמל ע"י A סופי. כדי לעשות רגולריזציה של כך תוך התשובה על הבעיה הפיזיקלית, ניתן להשתמש על המרחב האינסופי בגבול של $V \to \infty$ ולהגדיר את הנירמול ל-V סופי. $\Leftarrow$ במימד אחד, $V = L$ נקבל $A = \frac{1}{\sqrt{L}}$

ובאופן כללי יותר $\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \lim_{V\to\infty}\frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$.

(ברושה הבהרה על הכלל ל-3D)

לבחון לא חיב