+המחלקה להנדסת אלקטרוניקה, מחשבים והנדסה רפואית

בית הספר להנדסה - רופין

מעבדה מס. 2 - מערכות דיסקרטיות בתחום הזמן

התמרת פורייה של אות בדיד – DTFT ותכונות ההתמרה

תעודת זהות המגישים: 1. 203773601

2. 319001319

מס' קבוצה:

תאריך הגשה: 07/11/2022

מעבדה מס. 2 - מערכות דיסקרטיות בתחום הזמן

התמרת פורייה של אות בדיד – DTFT ותכונות ההתמרה

מטרות

1. התנסות עם התמרות תדר של אותות דיסקרטיים - DTFT.
2. הצגת תכונות של התמרות תדר.

במעבדה זו נשתמש בפונקציות הבאות: impz, filter, freqz

ניסויים

העתק את הקבצים מתקיית העזר הנמצאת במודל, לתיקיית העבודה שלך עבור מעבדה 02.

1 - חישוב התגובה להלם של מערכת LTI

פונקציית MATLAB y=impz(b,a,N) מחשבת את N הדגימות הראשונות של התגובה להלם של מערכת LTI סיבתית.

לפניך מערכת שמתוארת בעזרת משוואת ההפרש הבאה:

$$y[n]-0.4y[n-1]+0.75y[n-2]=2.2403x[n]+2.4908x[n-1]+2.2403x[n-2]$$

התוכנית הבאה מחשבת ומציגה את התגובה להלם של המערכת.

```
% Compute the impulse response h
clf;
N = 100;
n=0:N-1;
b = [2.2403 2.4908 2.2403];
a = [1 -0.4 0.75];
h = impz(b,a,N);
% Plot the impulse response
stem(n,h);
xlabel('Time index n'); ylabel('Amplitude');
title('Impulse Response'); grid;
```

שאלות

נתונות 7 מערכות המתוארות באמצעות משוואת הפרש:

$$(1)\quad y[n] + 0.5y[n-1] = x[n]$$

$$(2)\quad y[n] - 0.2e^{j\frac{\pi}{6}}y[n-1] = x[n-1]$$

$$(3)\quad y[n] - 0.25y[n-1] - 0.125y[n-2] = x[n]$$

$$(4)\quad y[n] - 0.75y[n-1] - 0.25y[n-2] = x[n]$$

$$(5)\quad y[n] - 0.75y[n-1] - 0.5y[n-2] = x[n]$$

$$(6)\quad y[n] = -x[n] + x[n-2]$$

$$(7)\quad y[n] = x[n] + x[n-1] + x[n-2]$$

$$(8)\quad y[n] = x[n] + x[n-1] - x[n-2]$$

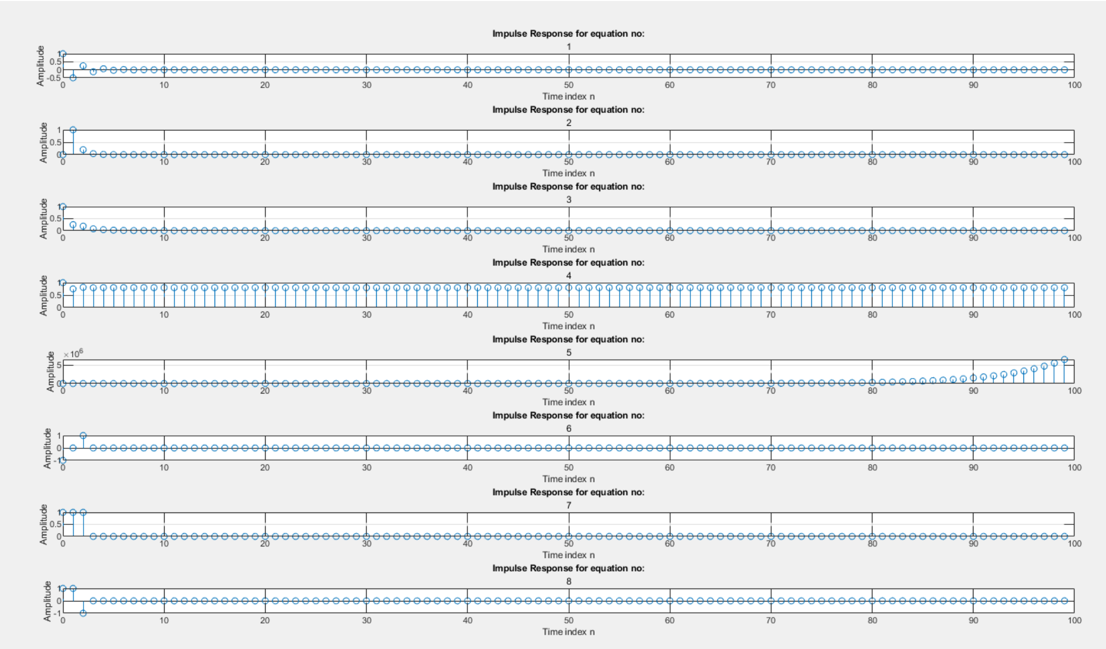
<u>עבור כל אחת מהמערכות לעיל בצע את הסעיפים הבאים:</u>

1. פתור (אם לא פתרת עד כה) את שאלה 1 בתרגיל בית 2 וצרף את הטבלה לדוח.
2. השתמש בתוכנית לעיל לחישוב התגובה להלם והצג את תגובת ההלם של המערכת בעזרת stem. השתמש בפקודת subplot(421) בכדי לחלק את ה- figure לשמונה חלקים כך שהשרטוט של התגובה להלם של כל מערכת ישורטט. הוסף כותרת לשרטוטים כך שניתן יהיה לדעת עבור איזו מערכת חושבה התגובה להלם.

תוצאות:

הטבלה:

	האם קיים משוב	$h[n]$ מתכנסת? לאיזה ערך?	$s[n]$ מתכנסת? לאיזה ערך?	האם המערכת יציבה?	ה קטבים יש למערכת?	ה אפסים יש למערכת?	האם $\|H^f(\theta)\|$ זוגית?	האם הפאזה ליניארית?
(1)	כן	0	2/3	כן	1	0	כן	-
(2)	כן	0	$1.2e^{j0.12}$	כן	1	1	לא	-
(3)	כן	0	8/5	כן	2	0	כן	-
(4)	כן	4/5	∞	לא	2	0	כן	-
(5)	כן	∞	∞	לא	2	0	כן	-
(6)	לא	0	0	כן	0	0	כן	+
(7)	לא	0	3	כן	0	0	כן	+
(8)	לא	0	1	כן	0	0	כן	+



3. האם התגובה להלם מתאימה לחישוב האנליטי?

כן, בכל המקרים פרט למשוואה 2, הסיבה לכך היא שהתגובה להלם מרוכבת.

4. מהן המסקנות מחלק זה כאשר משווים בין המערכות?

ניתן לראות שעבור מערכות ללא משוב יש פאזה ליניארית לעומת מערכות עם משוב.

2 - חישוב התגובה למדרגה של מערכת LTI

1. צור וקטור u באורך N=100 - שמייצג את פונקציית המדרגה u[n] (רמז: וקטור ששווה ל- 1 מאינדקס 0 עד 99).
2. השתמש בפונקציית filter כדי לחשב את יציאת 7 המערכות לעיל (היציאה תסומן כ- s) עבור כניסת המדרגה לקבלת התגובה למדרגה של המערכת (step response).

   הערה: הסבר על שימוש בפונקצית filter יש לראות באמצעות ה- help של תוכנת ה- MATLAB.
3. שרטט את יציאת המערכות בעזרת פונקציית stem באותו figure שבו שורטטו התגובה להלם ובאותה השיטה. כלומר, ב- subplot(421) יהיה שרטוט של התגובה להלם בכחול ושרטוט של התגובה למדרגה באדום וכן הלאה (בכדי לשרטט שוב באותו ה- plot יש להשתמש בפקודה hold on ובנוסף לפני כל plot לכתוב את ה- subplot הרצוי). הוסף כותרות מתאימות לשירטוטים.

   <u>לדוגמא:</u>

   עבור החלק הראשון וה- subplot השני יהיה רשום:

```
% Plot the impulse response
subplot(422); stem(n,h); hold on;
```

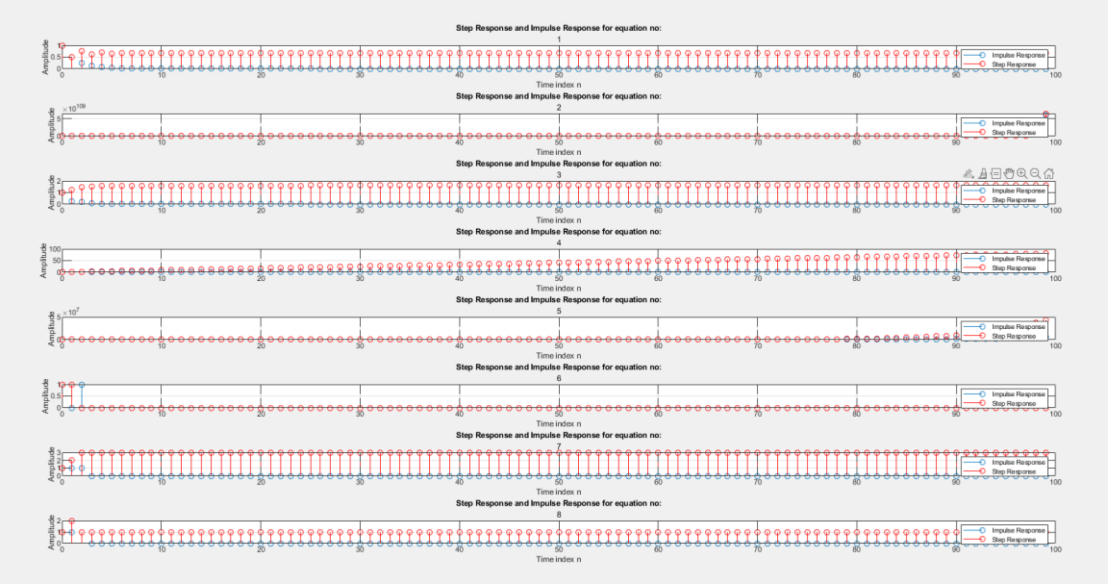
   ועבור החלק השני ואותו ה- subplot יהיה רשום:

```
subplot(422); stem(n,s,'r');
legend('impulse response','step response');
```

   פונקצית legend יוצרת מקרא לשרטוט כך שנבין שהשרטוט הראשון הוא של התגובה להלם והשני של התגובה למדרגה.

<u>עבור כל אחת מהמערכות:</u>

4. תוצאות:



5. האם התגובה למדרגה מתאימה לחישוב האנליטי?

כן, פרט למשוואה 2.

6. מהן המסקנות מחלק זה כאשר משווים בין המערכות?

ניתן לראות כי חלק מתגובות למדרגה מתבדרות וחלק מתכנסות. גם קל לראות את הקשר בין ערך התגובה לתדר עבור תדר 0 לבין ערך אליו התגובה למדרגה מתכנסת (אם מתכנסת).

- ## התמרת פורייה בזמן בדיד DTFT

3 - חישוב התמרת פורייה בזמן בדיד – DTFT – של מערכת LTI

הפונקציה **DTFT_evaluation** (נמצאת באתר המודל וניתן להיעזר בה – לא בשלמותה אלא בכדי לראות איך מבצעים את הפעולות) מבצעת חישוב של התמרת פוריה בזמן בדיד ומציגה את התמרת פורייה (הקומפלקסית) של פונקציית תמסורת מסויימת בשני אופנים: 1) חלק ממשי ומדומה, 2) אמפליטודה ופאזה. הפונקציה מקבלת שלושה ערכים num,den,theta.

ניתן להשתמש בפונקציה כדוגמא לחישוב תגובת התדר ושרטוטו.

שאלות

1. מה מייצגים ערכי המשתנים num,den,theta הנשלחים לפונקציה DTMF_evaluation.m?

   Num- מייצג מונה של פונקצית תמסורת.

   Den- מייצג מכנה של פונקצית תמסורת.

   Theta- וקטור ערכים לציר של ההתמרה.

<u>עבור כל אחת מהמערכות:</u>

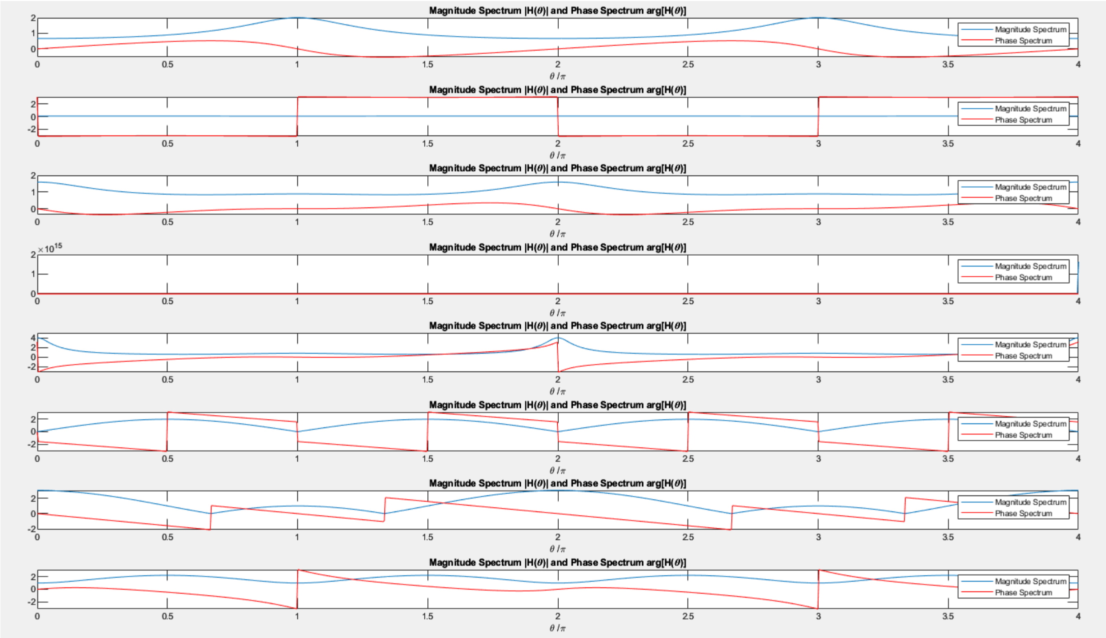
2. חשב בעזרת מטל"ב את תגובת התדר של המערכת $H^f(\theta)$ (עוצמה ופאזה), עבור $0 \leq \theta \leq 4\pi$.
3. שרטט את התמרת הפורייה הקומפלכסית של פונקצית התמסורת באופן הבא:

   יש לשרטט את התגובות ב- plot כפי ששורטטו התגובה להלם והתגובה למדרגה כאשר האמפליטודה בצבע כחול והפאזה בצבע אדום.

   <u>הערה:</u> עבור שני השרטוטים יש לנרמל את ציר θ ב- π ולציין זאת בכותרת הציר X.

   בנוסף יש לסדר את השרטוט כך שיהיה מוגבל לערכי הפונקציה באמצעות שימוש ב- axis tight.
4. הרץ את התוכנית ובחן את הגרפים שנוצרו.

   תוצאות:



האם הפונקציה מחזורית ב θ? מהו המחזור? הסבר את הסימטריות השונות (פונקציה זוגית, אי זוגית) שמוצגות לכל אחד מהגרפים השונים – האם הם מתאימים לתכונות של התמרת DTFT הידועים לך?

הפונקציה מחזורית ב-2π (ובמקרה המנורמל, ב-2) כמצופה מ-DTFT.
עבור כל הפונקציות פרט ל2, התגובה להלם ממשית ולכן בהתאם גודל האמפליטודה זוגי והפאזה אי זוגית.

5. איזה תדר מיוצג במספר 3 בציר x של הגרפים? (כלומר $\theta = ?\,[rad]$)
   שימו לב כי ערכי ציר x הם מספרים ללא יחידות (מנורמלים).
   התדר המיוצג על ידי מספר 3 הינו $f = \frac{3}{2}_{[Hz]}$, והתדירות הזוויתית הינה $\Theta = 3\pi_{[rad]}$
6. האם קיימות קפיצות בשרטוט הפאזה של המערכות? מהו ערך הקפיצה? מה מייצגות הקפיצות?
   כן, ערך הפאזה חסום $-\pi < \arg\left(H^f(\theta)\right) < \pi$ לכן כאשר הערך מגיע לחסום מתבצעת קפיצה ב-2π על מנת להישאר בתחום.

7. כעת תגובת הפאזה של המערכת מבוטאת ביחידות של רדיאנים כפונקציה של התדר θ.
   כיצד יש לשנות את התוכנית כך שתגובת הפאזה תבוטא במעלות ולא בראדיאנים?
   שים לב שמדובר על שינוי ערכי תגובת הפאזה של המערכת ולא ערכי התדר. גם ערכי התדר (θ) מבוטאים ברדיאנים אך אין לשנות ערכים אלו ויש להשאיר אותם ברדיאנים.

הערה: אין צורך להציג שרטוטים אלא רק הסבר על הפעולה והצגת שורת הקוד המתאימה.

יש לבצע את השינוי הבא: $\arg\left(H^f(\theta)\right) * \frac{180^o}{\pi}$

שורת הקוד:

```
plot(theta/pi,(angle(H_i)*180/pi),'r');grid
```

8. מהן המסקנות מחלק זה כאשר משווים בין המערכות?

ניתן לראות תכונות סימטריה מהן ניתן להסיק לפעמים מסקנות כי האות בזמן הינו ממשי.

▪ תכונות של DTFT

רוב התכונות של DTFT ניתנות להצגה ע"י דוגמאות פשוטות. נשתמש בסדרות בעלות אורך סופי להצגה של תכונות אלו.

4 - ההזזה בזמן

הפונקציה, **DTFT_timeShift(theta,D,h1)**, מחשבת ומשרטטת התמרות פורייה של שתי סדרות H1, H2 - כאשר סדרה h2 היא הזזה בזמן של סדרה h1 . הפונקציה מקבלת שלושה ערכים theta,D,h1.

שאלות

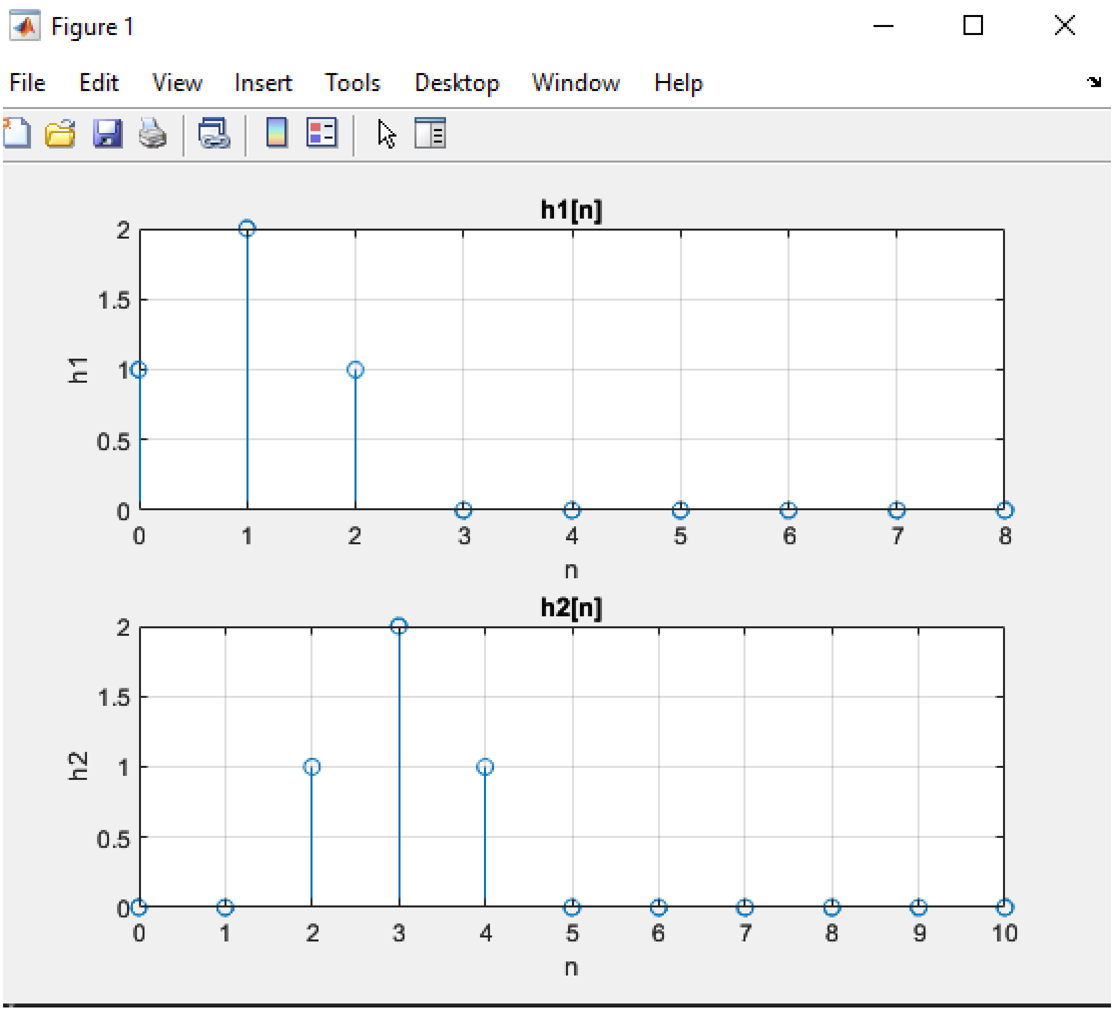
1. הוסף לפונקציה שורות המשרטטות את שתי הסדרות h1, h2 בעזרת פונקציית stem. השרטוט יהיה בחלון אחד אבל בשני גרפים נפרדים (האחד מעל השני) תוך שימוש בפקודות subplot.
2. בפונקציה DTFT_timeShift(theta,D,h1) - איזה משתנה מבין המשתנים השונים בתוכנית שולט בהזזה של הסדרה? הוסף לתכנית פקודות שיציגו כותרות לצירים (בדומה לפונקציה DTFT_evaluation(num,den,theta)).

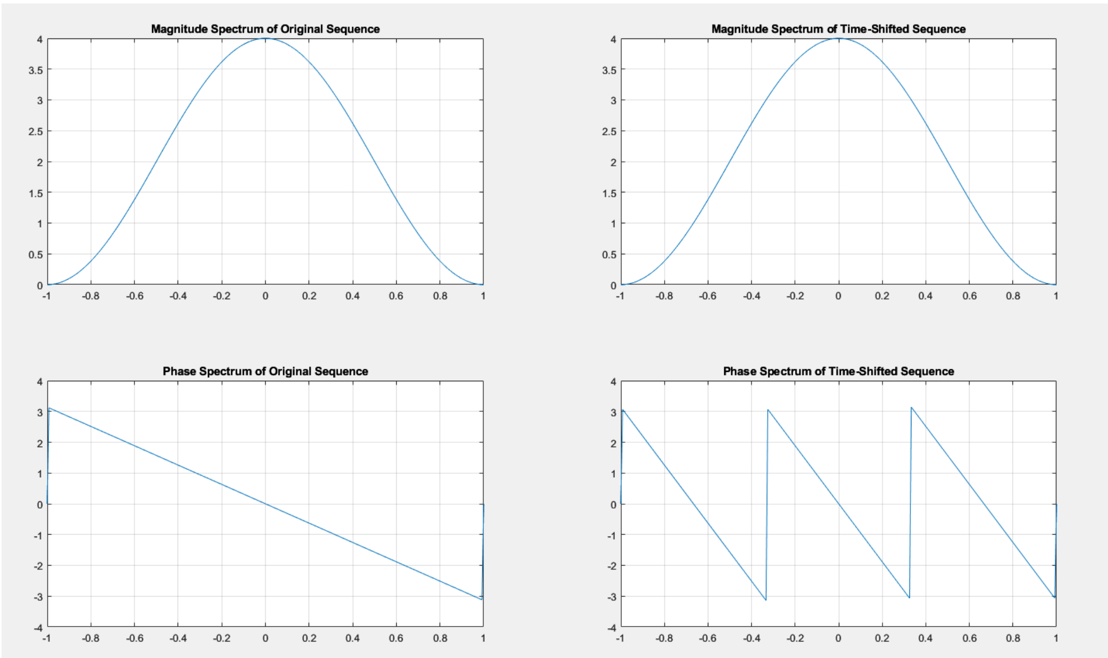
המשתנה D קובע את גודל הזזה בזמן.

3. הרץ את הפוקנציה DTFT_timeShift(theta,D,h1) עם ערכי המתשנים הבאים:

```
theta = -pi:2*pi/255:pi; D = 2;
h1 = [1 2 1 0 0 0 0 0 0 ];
```

תוצאות:





הסבר את התוצאות (יש לצרף לתוצאות פיתוח אנליטי של התמרת הפורייה של h1).

כמצופה קיבלנו את אותה האמפליטודה ל-2 האותות, בעוד שהזזה בזמן גררה הכפלת אקספוננט בתדר ולכן תמונת הפאזה השתנתה.

$$h_1[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] \Rightarrow H_1^f(\theta) = 1 + 2e^{-j\theta} + e^{-j2\theta}$$

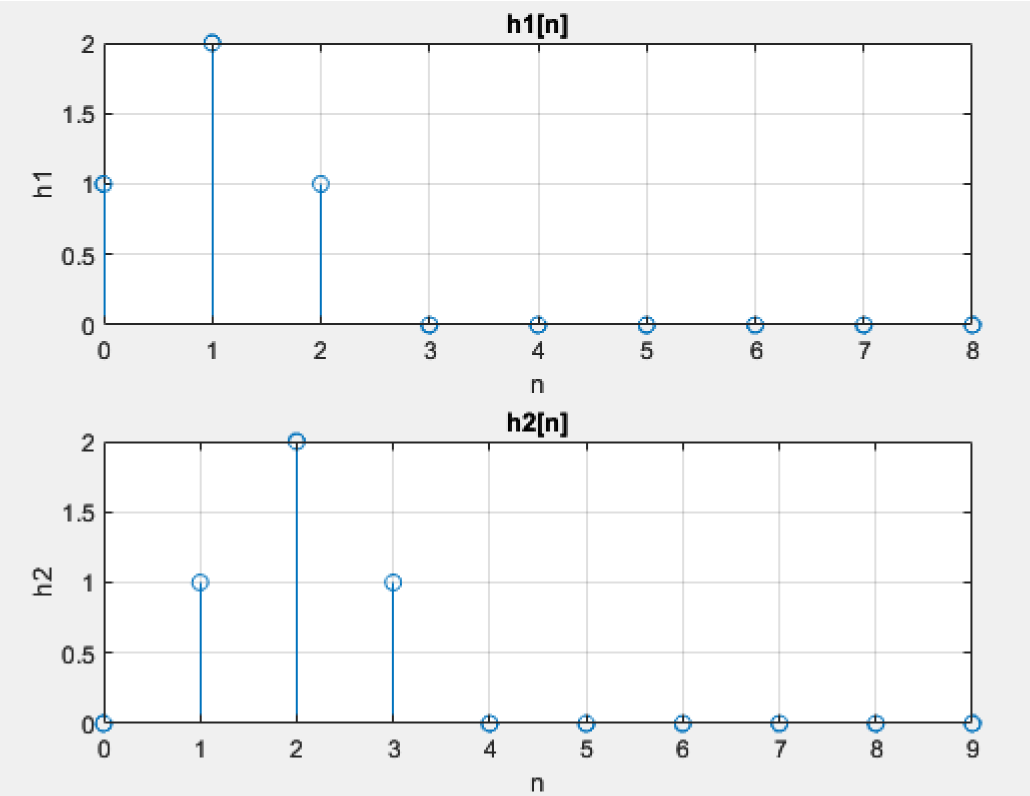
$$h_2[n] = h_1[n-2] = \delta[n-2] + 2\delta[n-3] + \delta[n-4]$$

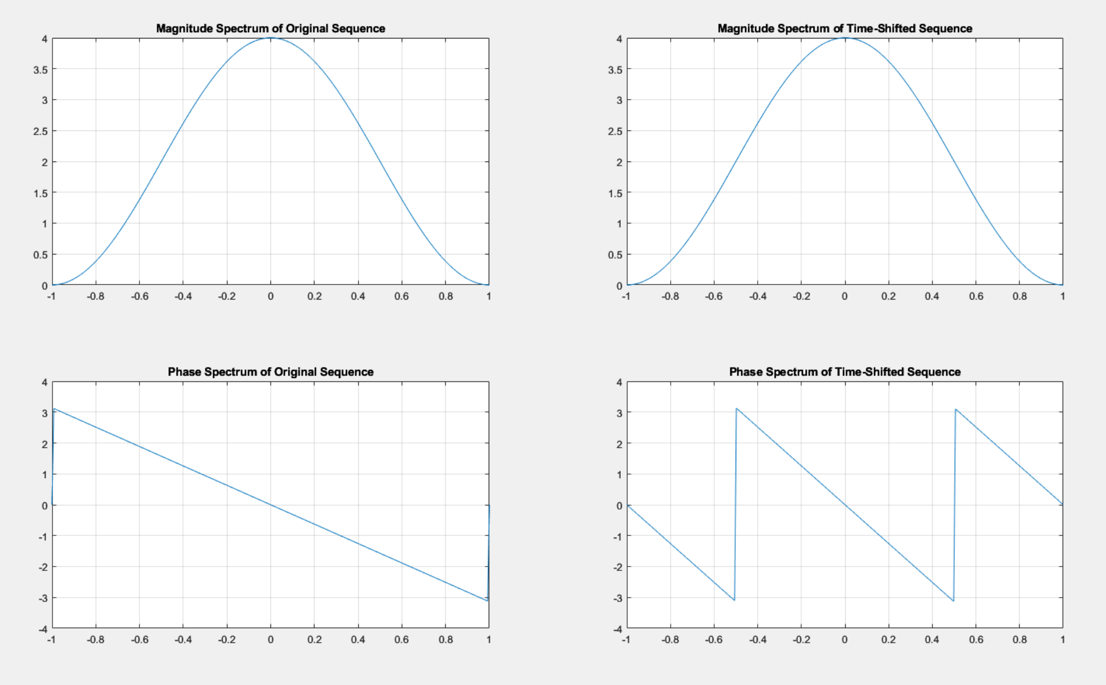
$$\Rightarrow H_2^f(\theta) = e^{-j2\theta} + 2e^{-j3\theta} + e^{-j4\theta} = H_1^f(\theta)e^{-j2\theta}$$

שים לב שבספקטרום הפאזה יש קפיצות. למה?

הפאזה חסומה, וכאשר מגיעה אל החסם יש קפיצה בהתאם של 2π.

4. חזור על ההרצה של הפונקציה עבור הזזת זמן שאורכה מחצית של ההזזה הקודמת.



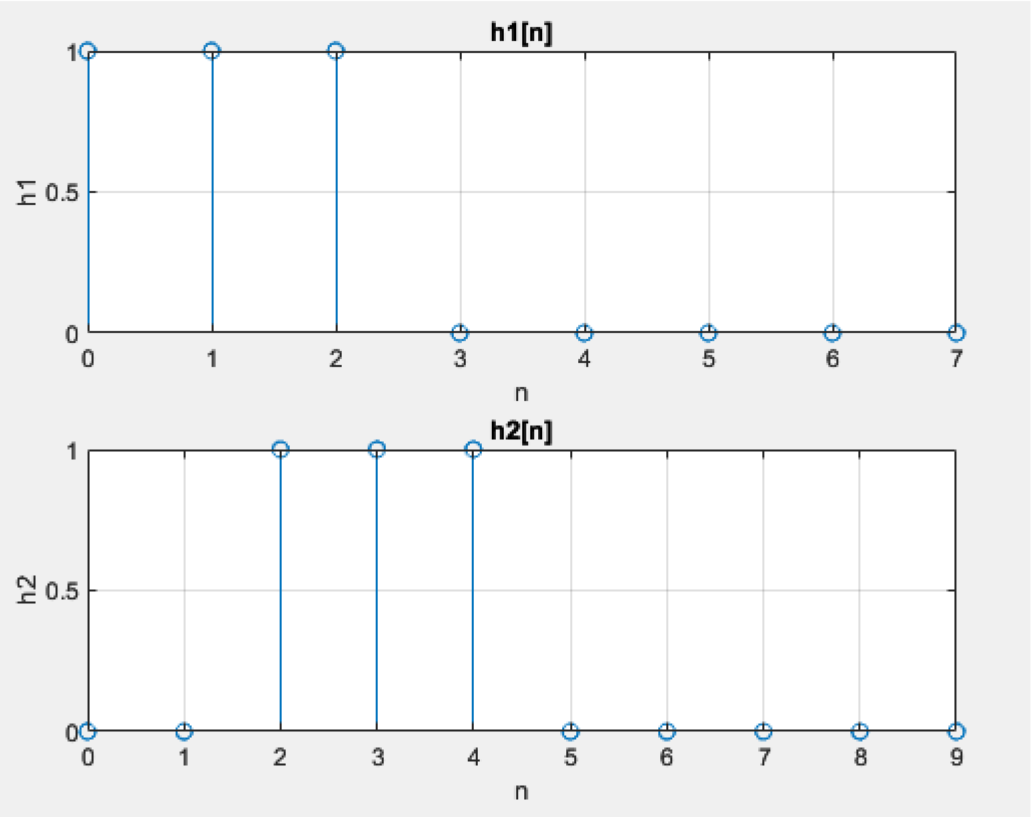


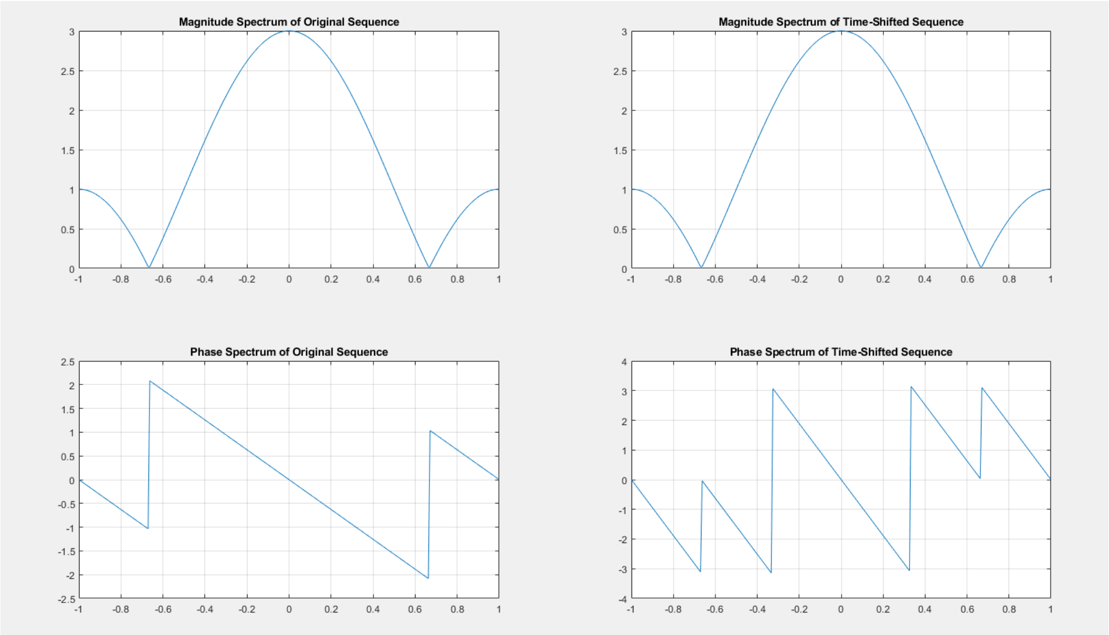
איך השתנו התוצאות? האם מתאים לתיאוריה?

כן, הכפלה באקספוננט בערך $e^{-j\theta}$.

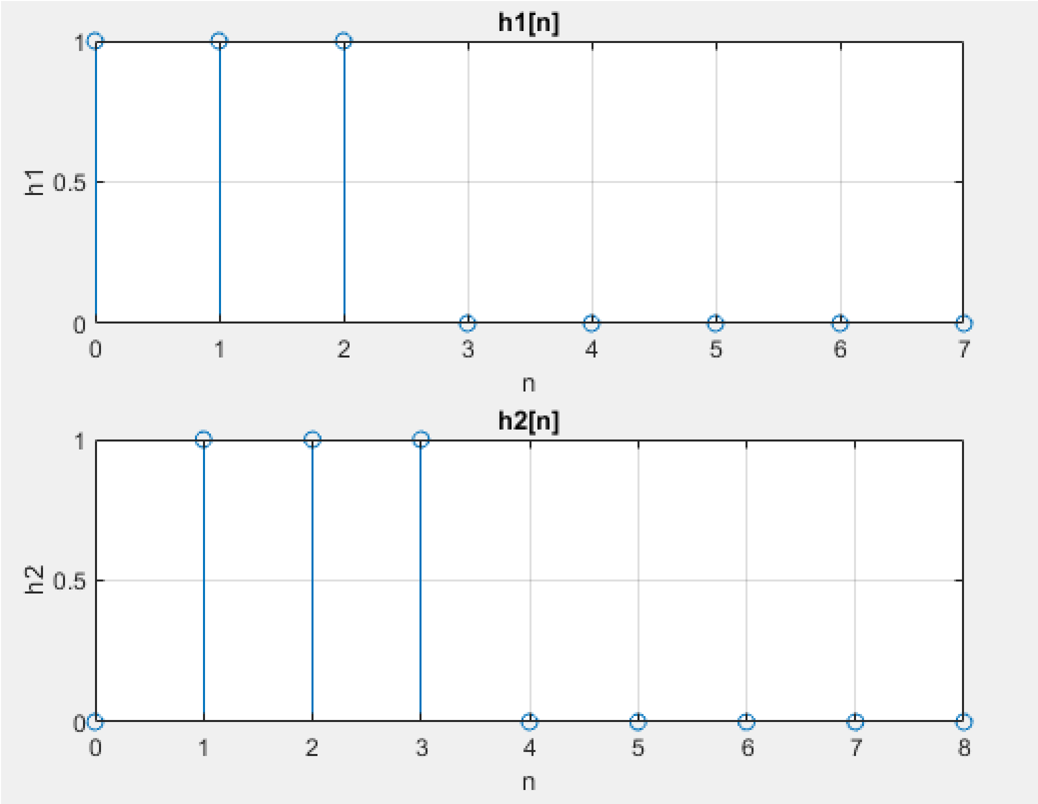
5. חזור על סעיפים 3 ו- 4 עבור הסדרה [1 1 1 0 0 0 0 0]

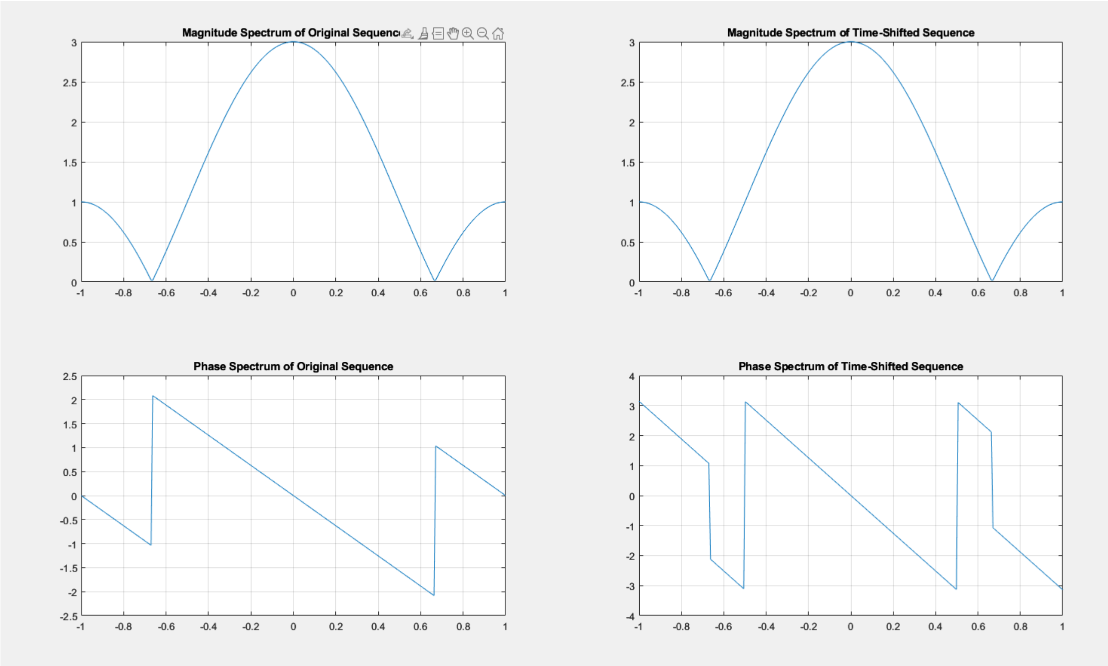
עבור D=2:




Magnitude Spectrum of Original Sequence
Magnitude Spectrum of Time-Shifted Sequence
Phase Spectrum of Original Sequence
Phase Spectrum of Time-Shifted Sequence

עבור D=1:


h1[n]
h1
n
h2[n]
h2
n



האם התוצאה מתאימה לתיאוריה.

כן, האמפליטודה לא השתנתה אבל תמונת הפאזה כן בהתאמה לתכונה.

5 - ההזזה בתדר

הפונקציה, **DTFT_freqShift(theta,th0,num1)**, מחשבת ומשרטטת התמרות פורייה של שתי סדרות num1, num2 - כאשר סדרה num2 נוצרה מסדרה num1 ע"י הזזת תדר. הפונקציה מקבלת שלושה ערכים theta,th0,num1.

שאלות

1. האם הסדרות ממשיות?

לא בהכרח, תתכן סדרה מרוכבת כי DTFT תתאפשר גם עבור סדרה מרוכבת.

2. איזה פרמטר שולט בהזזה של התדר?

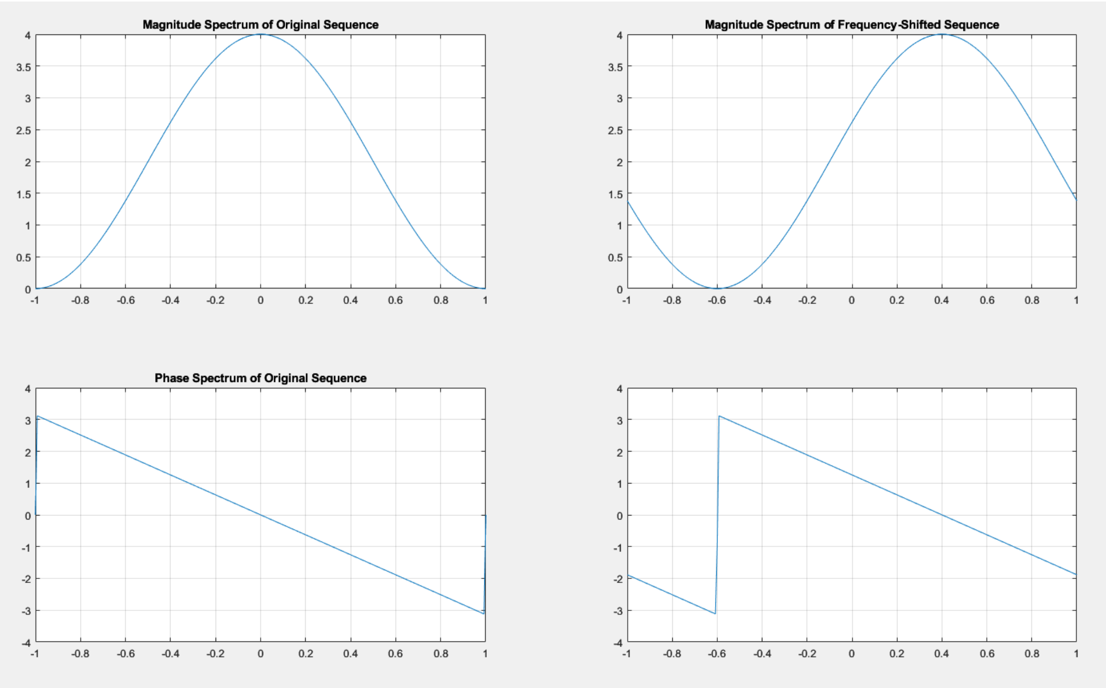
th0 הינו ההזזה.

3. הרץ את הפונקציה DTFT_freqShift(theta,th0,num1) עם ערכי המשתנים הבאים:

theta = -pi:2*pi/255:pi; th0 = 0.4*pi;

num1 = [1 2 1 0 0 0 0 0 0];

תוצאות:



הסבר את התוצאות (יש לצרף לתוצאות פיתוח אנליטי של התמרת הפורייה של num1).

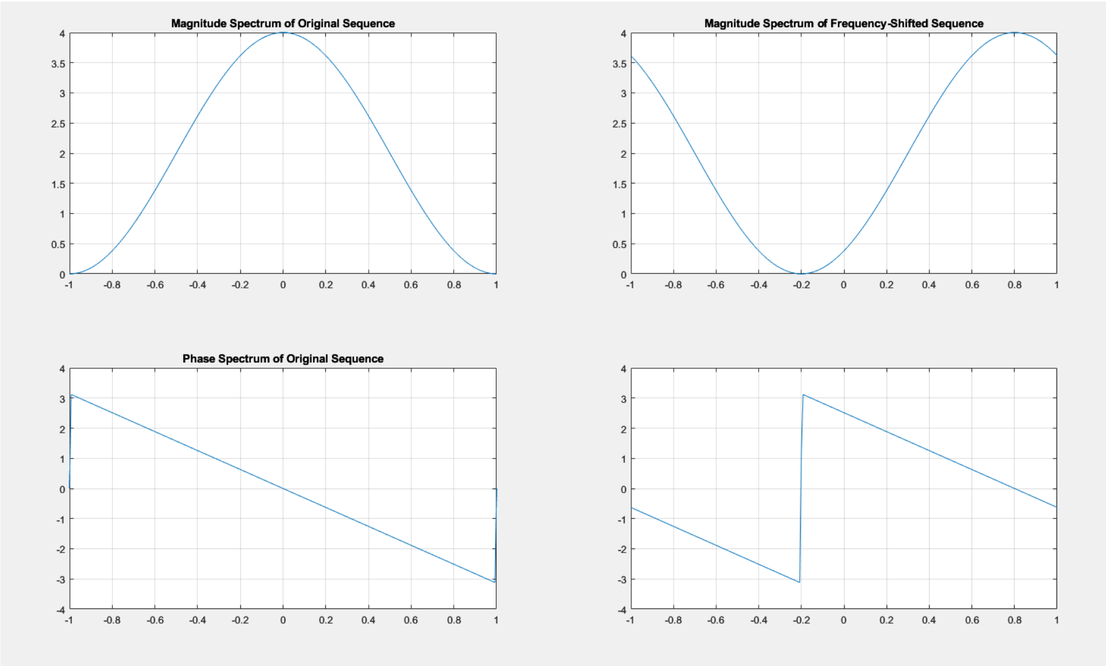
ההזזה בתדר גוררת הכפלה באספוננט בזמן, בהתאם לתכונות.

$$num_1[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] \Rightarrow Num_1^f(\theta) = 1 + 2e^{-j\theta} + e^{-j2\theta}$$

$$num_2[n] = num_1[n]e^{-j0.4\pi}$$

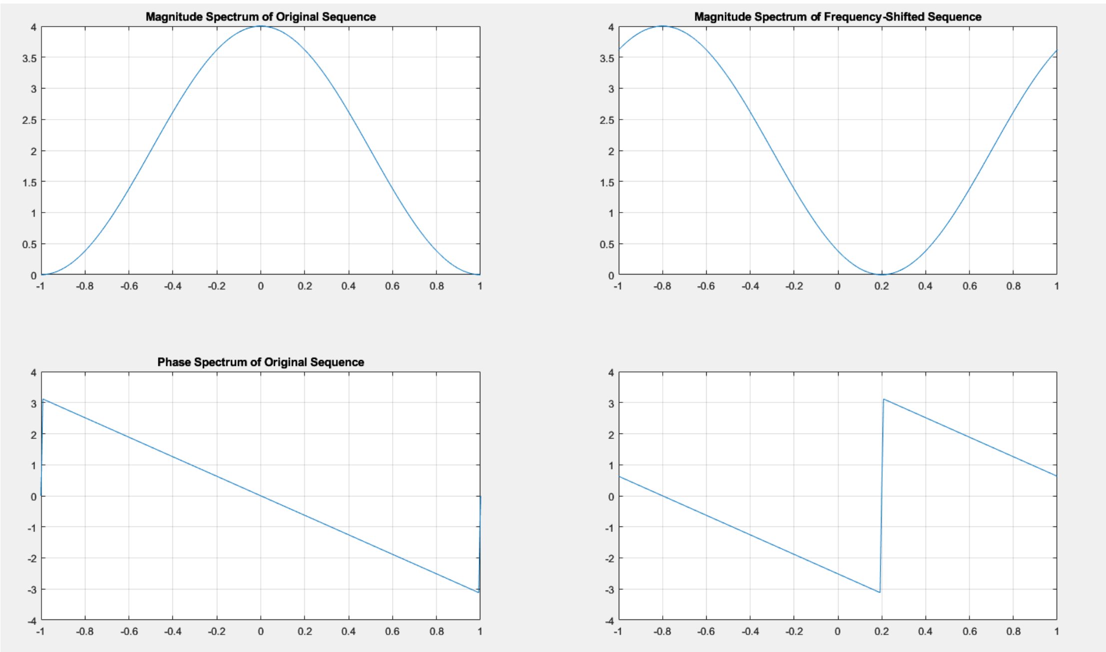
$$\Rightarrow Num_2^f(\theta) = Num_1^f(\theta - 0.4\pi) = 1 + 2e^{-j(\theta-0.4\pi)} + e^{-j2(\theta-0.4\pi)}$$

4. חזור על ההרצה עבור הזזת תדר כפולה. הסבר התוצאות.



קל לראות כי יש הזזה של 0.8π בתדר בעוד בזמן יש הכפלה באקספוננט.

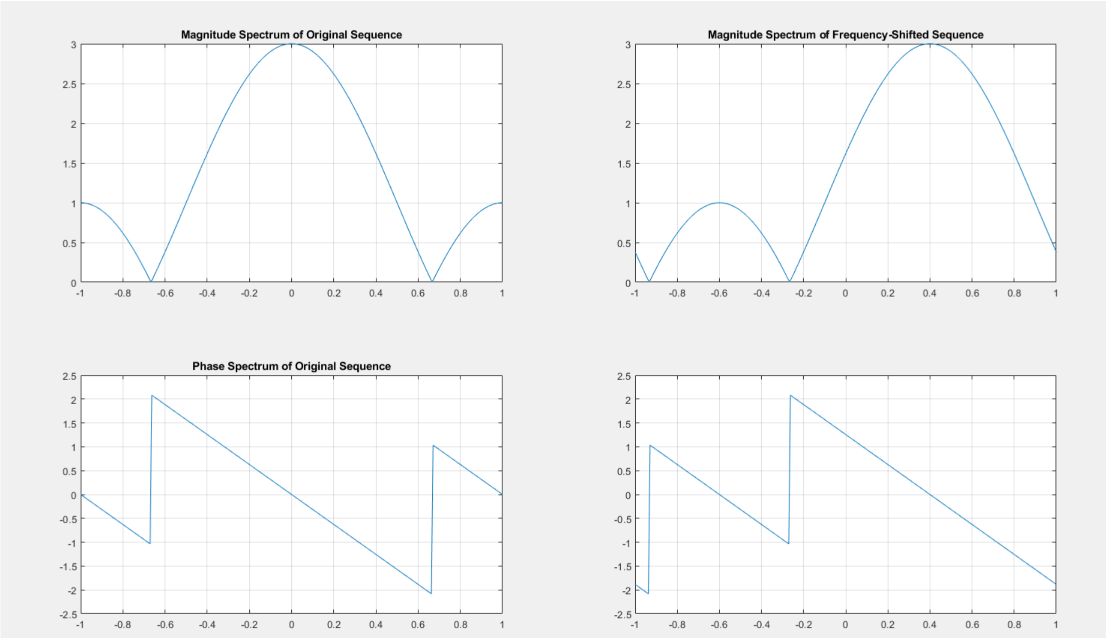
5. חזור על ההרצה עבור הזזת תדר משולשת. הסבר התוצאות.



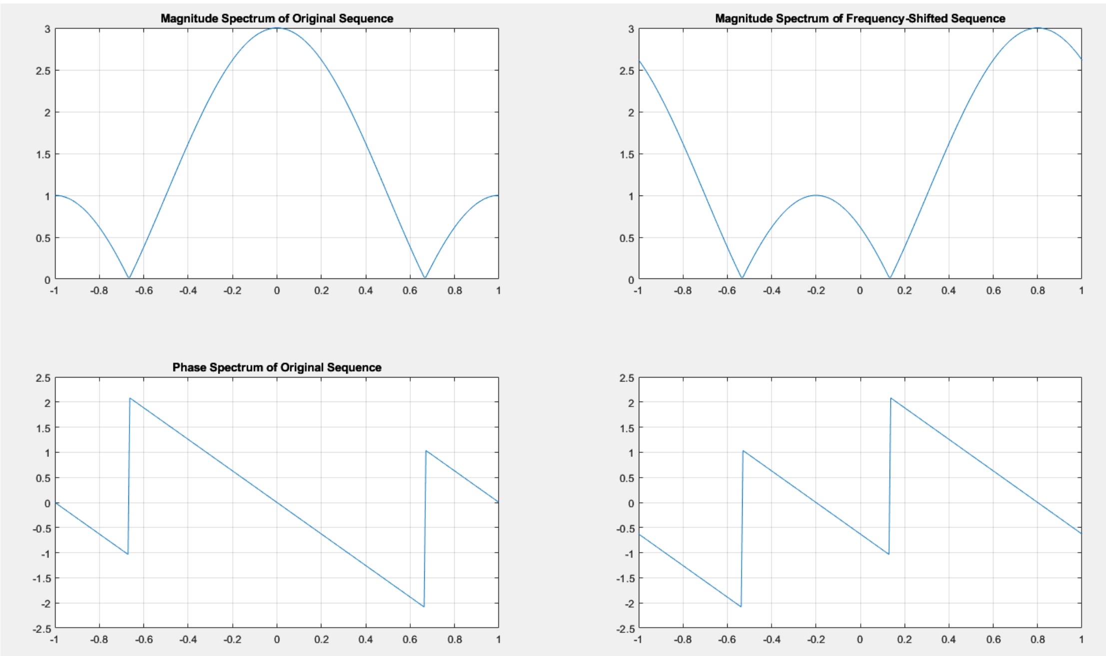
גם כאן, קל לראות כי ההזזה בתדר נעשתה בהתאם להכפלה באקספוננט בזמן.

6. חזור על סעיפים 3-5 עבור הסדרה $[1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$.

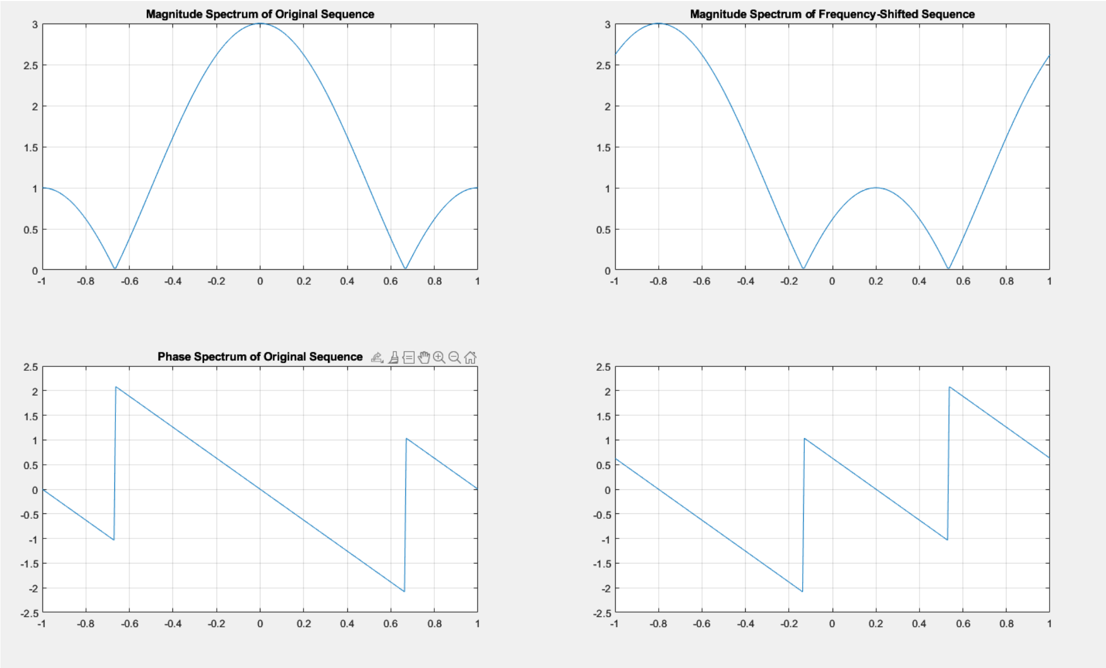
רגילה:



:כפולה



:משולשת



6 – קונבולוציה ליניארית

הפונקציה, **DTFT_conv(theta,x1,x2)**, מחשבת קונוולוציה בין שתי סדרות (x1,x2), מחשבת את התמרת הפורייה של כל סדרה, מחשבת את המכפלה של ההתמרות, ומחשבת את ההתמרה של תוצאת הקונוולוציה. הפוקנציה מקבלת שלושה ערכים theta,x1,x2.

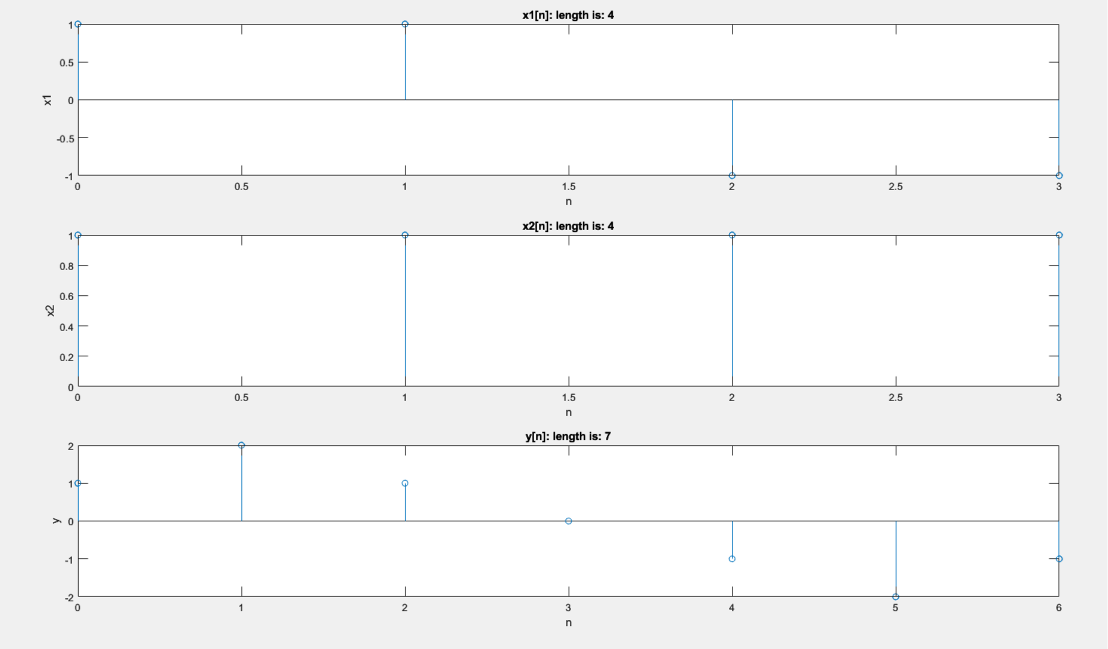
שאלות

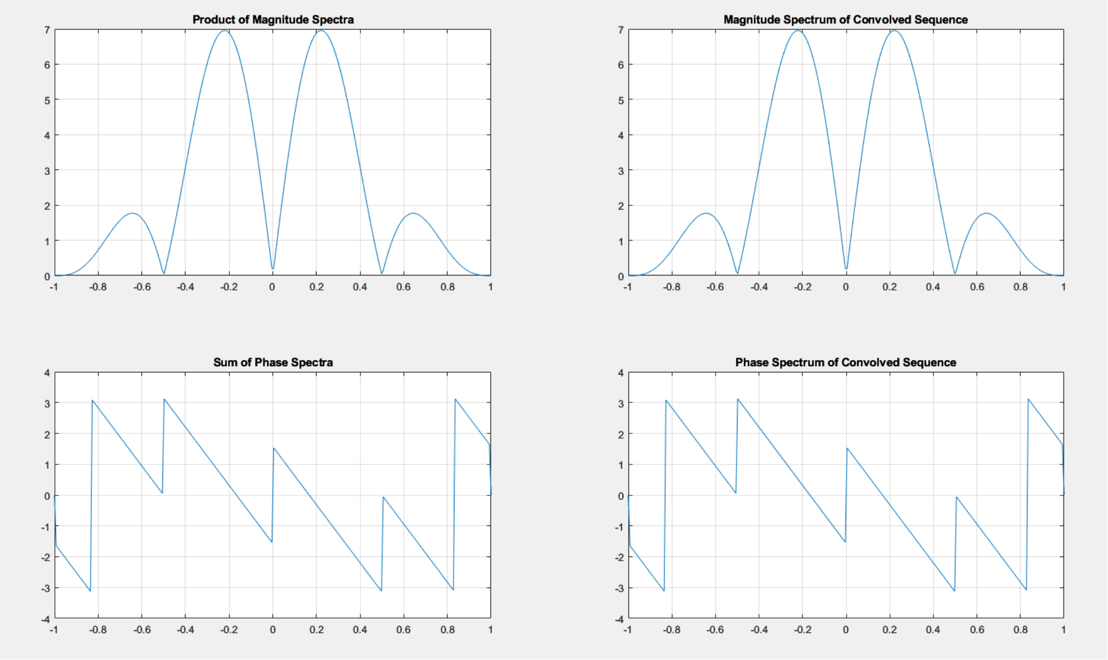
1. הוסף לפונקציה שרטוט של שלושת הסדרות x1, x2, y בעזרת פונקציית stem. השרטוט יהיה בחלון אחד אבל בשלושה גרפים נפרדים (האחד מעל השני) תוך שימוש בפקודות subplot . חשב את אורך הסדרות השונות בעזרת פונקציית length . רשום את אורך כל סדרה בכותרת מעל השרטוט שלה. האם אורך הסדרה y מתאים לתיאוריה? נראה בתשובה

2. הוסף הערות לפונקציה DTFT_conv(theta,x1,x2) וכותרות לצירים.
3. הרץ את הפונקציה עם המשתנים הבאים:

```
theta = -pi:2*pi/255:pi;
x1 = [1 1 -1 -1];
x2 = [1 1 1 1];
```

תוצאות:





הסבר את התוצאות (יש לצרף לתוצאות פיתוח אנליטי של תוצאת הקונבולוציה הליניארית של האותות).

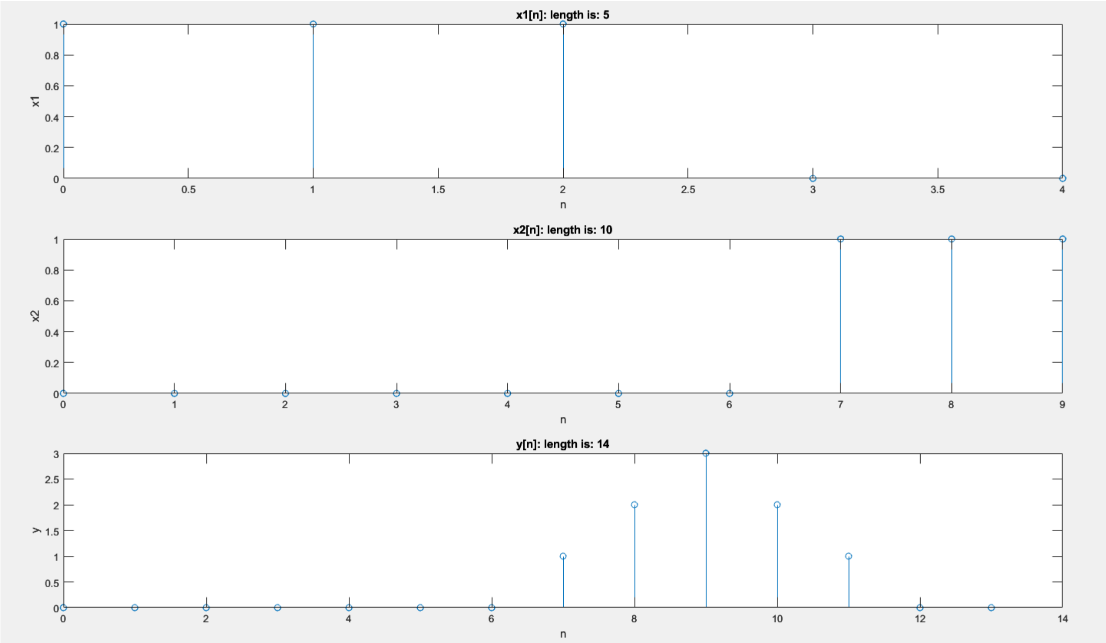
התוצאה של קונבולוציה בזמן מול תוצאה של מכפלת ההתמרות בתדר זהות.

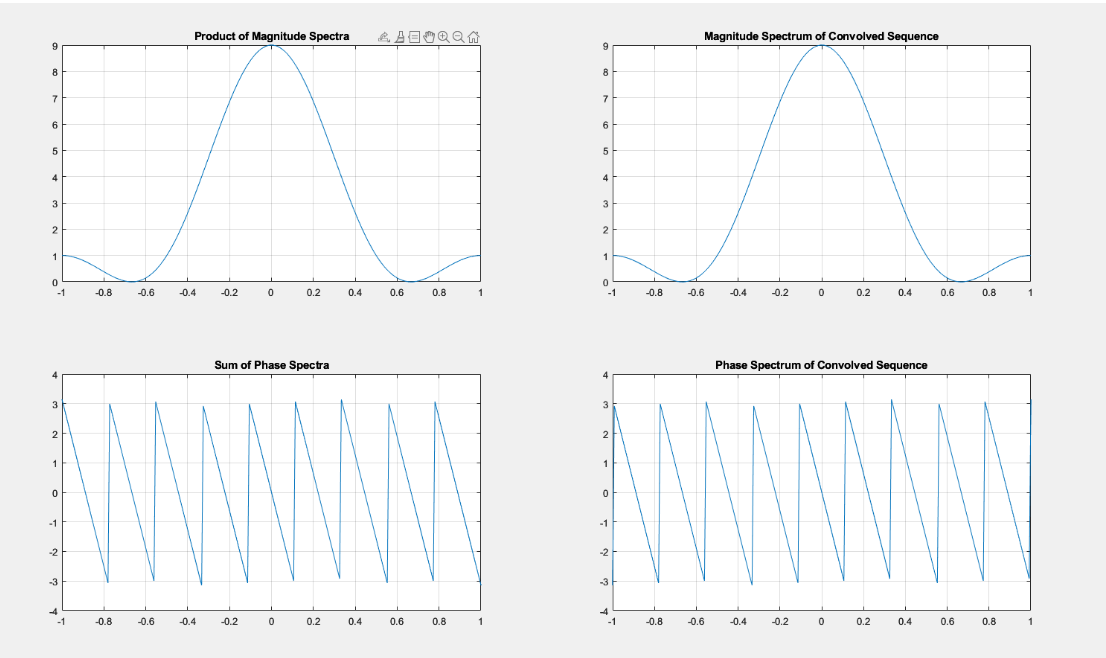
$$x_1[n] * x_2[n] = y[n] \Rightarrow Y^f(\theta)$$

$$X_1^f(\theta) X_2^f(\theta) = Y^f(\theta) \Rightarrow y[n]$$

4. חזור על ההרצה עבור סדרה x1 [1 1 1 0 0], ועבור סידרה x2 [0 0 0 0 0 0 0 1 1 1].

תוצאות:





הסבר את התוצאות (יש לצרף לתוצאות פיתוח אנליטי של תוצאת הקונבולוציה הליניארית של האותות).

התוצאה של קונבולוציה בזמן מול תוצאה של מכפלת ההתמרות בתדר זהות.

$$x_1[n] * x_2[n] = y[n] \Rightarrow Y^f(\theta)$$

$$X_1^f(\theta)X_2^f(\theta) = Y^f(\theta) \Rightarrow y[n]$$