ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

គណិតវិទ្យា
ហិរញ្ញវត្ថុ

រៀបរៀងដោយគរុនិស្សិតគណិតវិទ្យា ក្រុម២ ជំនាន់ទី២២

ឆ្នាំសិក្សា ២០១៦-២០១៧

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

កិច្ចការស្រាវជ្រាវ

គណិតវិទ្យា ហិរញ្ញវត្ថុ

សាស្ត្រាចារ្យណែនាំៈ ហួត សុខឿន

រៀបរៀងដោយគរុនិស្សិតគណិតវិទ្យា ក្រុម២ ជំនាន់ទី២២

នាម-គោត្តនាម	ភេទ	ក្រុងខណ្ឌខេត្ត	លេខទូរស័ព្ទ
លឹម សីហា	ប្រុស	សៀមរាប	០១២ ៦៨៩ ៣៥៣
លី លក្ខិណា	ស្រី	សៀមរាប	០៩៣ ៦២៤ ៥៣៦
វ៉ាន ពិសិដ្ឋ	ស្រី	សៀមរាប	០៨១ ៤៨៤ ២២៥
ពេជ្រ សុវិណៃ	ប្រុស	ពោធិ៍សាត់	០៨១ ៣៥២ ៥៨១
ផៃ ម៉ិនណា	ប្រុស	បន្ទាយមានជ័យ	០៩៥ ៥៣៩ ៣៧៣
គយ ពិសី	ស្រី	កំពង់ចាម	០១១ ៧៥៣ ៧៧៨

អារម្ភកថា

សួស្តីមិត្តអ្នកសិក្សាទាំងអស់គ្នា!

- សៀវភៅសិក្សាដែលលោកអ្នកកំពុងកាន់នៅនឹងដៃនេះមានឈ្មោះថា **គណិតវិទ្យាហិរញ្ញវត្ថុ** (Financial Mathematic)។
  សៀវភៅនេះរួមមាន៩ ជំពូកដែលមានសិក្សាអំពី៖

១. ការប្រាក់សាមញ្ញ	៤. ការបង់ប្រាក់ប្រចាំគ្រា	៧. ភាគហ៊ុន (Stock)
២. ការប្រាក់សមាស	៥. ការសងរំលោះបំណុល	៨. Stochastic
៣. ទ្រឹស្តីអត្រាការប្រាក់	៦. សញ្ញាប័ណ្ណ (Bond)	៩. Black-Scholes ។

- ចំណុចសំខាន់ៗនៃមេរៀនមាន៖
  - ខ្លឹមសារនៃមេរៀននីមួយៗ ផ្តើមចេញពីឧទាហរណ៍នៅក្នុងអាជីវកម្មផ្សេងៗ ទាក់ទងនឹងហិរញ្ញវត្ថុ។
  - នៅចុងបញ្ចប់នៃមេរៀននីមួយៗមាន លំហាត់សម្រាប់អនុវត្តន៍។
  - បំណាកស្រាយមេរៀនមានភាពច្បាស់លាស់ ស្រួលមើល និងងាយយល់។
- យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា សៀវភៅមួយក្បាលនេះ ជាផ្នែកមួយសម្រាប់ ការសិក្សាស្រាវជ្រាវរបស់លោកអ្នក ជាពិសេសសម្រាប់អ្នកសិក្សាផ្នែក គណនេយ្យ ធនាគារ គ្រប់គ្រងធនាគារ...។
- តែទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ នៅតែមាន ចំណុចខ្វះដោយ អចេតនា។ជាសំណូមពរមួយរបស់ យើងខ្ញុំទាំងអស់គ្នាដើម្បីអោយសៀវភៅនេះ កាន់តែល្អប្រសើរ យើងខ្ញុំរង់ចាំទទួលនូវរាល់មតិ រិះគន់ ដើម្បីធ្វើការកែលំអរពីសំណាក់អ្នកសិក្សាទាំងអស់គ្នា។សូមអរគុណ!

គណិតវិទ្យាក្រុម២ ជំនាន់២២

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ

យើងខ្ញុំទាំងអស់គ្នាជាគរុនិស្សិតគណិតវិទ្យាក្រុម២ ជំនាន់២២ នៃ វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ។

សូមគោរពថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅជូនចំពោះ លោកឪពុក អ្នកម្តាយ ដែលបានផ្តល់ កំណើតព្រមទាំងចិញ្ចឹមបីបាច់ថែរក្សាយើងខ្ញុំ លើសពីនេះទៅទៀតលោកបានតស៊ូពុះពារគ្រប់ ឧបសគ្គ ដើម្បីខិតខំរកប្រាក់អោយកូនបានរៀនសូត្ររហូតទទួលបានជោគជ័យ។

សូមគោរពថ្លែងអំណរគុណចំពោះឯឧត្តមបណ្ឌិត សៀង សុវណ្ណា នាយវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ដែលបានផ្តល់ឱកាសអោយយើងខ្ញុំទាំអស់គ្នា បានសិក្សារៀនសូត្រហើយទទួលបានជោគជ័យជាបន្តបន្ទាប់។

សូមគោរពថ្លែងអំណរគុណដល់ បណ្ឌិត គឹម ចំរើនវុឌ្ឍី ដែលបានបង្កើតជាប្រធានបទថ្មីៗ ដើម្បីដាក់ អោយក្រុមយើង បានធ្វើការស្រាវជ្រាវ ស្វែងរក ចំណេះដឹង ថ្មីៗនិងជាបទពិសោធន៍មួយដ៏ល្អសម្រាប់ក្រុមយើងខ្ញុំ។ លើសពីនេះទៀតលោកគ្រូ បានពន្យល់ ណែនាំពីរបៀបនៃ ការសរសេរ និងគន្លឹះផ្សេងៗជាច្រើនទៀត។

សូមគោរពថ្លែងអំណរគុណចំពោះលោកគ្រូ ហួត សុខលឿន សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យានៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំនិងជាសាស្ត្រាចារ្យណែនាំ ដល់ក្រុមស្រាវជ្រាវយើងខ្ញុំ ដែលបានផ្តល់ដំបូន្មានល្អៗនិងឯកសារផ្សេងៗទាក់ទងនឹងប្រធានបទស្រាវជ្រាវរបស់ក្រុមយើងខ្ញុំ។

សូមគោរពថ្លែងអំណរគុណចំពោះ លោកគ្រូ ម៉ែន វាំង ,ស៊ឹម វិសុទ្ធ, បាន គនហេង , យី មឿយ និងសាស្ត្រាចារ្យទាំងអស់ ដែលបានបង្ហាត់បង្រៀន ពន្យល់ណែនាំ និងផ្តល់ដំបូន្មានល្អៗ ដល់ពួក យើងខ្ញុំ។

សូមគោរពថ្លែងអំណរគុណចំពោះអ៊ុំ ពូ មីង មា បង ប្អូន និងមិត្តភក្រ្តទាំងអសគ្នាដែលតែងតែ ជម្រុញនិងលើកទឹកចិត្តពួកខ្ញុំកន្លងមកនេះ ជាហេតុធ្វើអោយ ពួកខ្ញុំមានកម្លាំងចិត្តតស៊ូរៀនសូត្រ រហូតមកដល់ពេលនេះ។

សូមជូនពរអោយអ្នកទាំងអស់ខាងលើ ជួបប្រទះតែសេចក្តីសុខ សុភមង្គល សុខភាពល្អ រកទទួល ទាន មានបាននិង ជោគជ័យគ្រប់ភារកិច្ច ។ សូមអោយទាំងអស់គ្នាជួបប្រទះពុទ្ធពរទាំងឡាយ៤ប្រការគឺ អាយុ វណ្ណៈ សុខៈ ពលៈ កុំបីឃ្លានឃ្លាតឡើយ។

ការឧទ្ទិសស្នាដៃ

ក្នុងនាមជាអ្នកបន្តវេនពីរៀមច្បង និងដោយទទួលបាននូវការបណ្តុះបណ្តាលនូវ ទ្រឹស្តីនានាពីវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ នូវចំណេះដឹង ជំនាញគណិតវិទ្យា កម្រិតបរិញ្ញាបត្រ+១ ខ្ញុំបាទ នាងខ្ញុំ សូមឧទ្ទិសស្នាដៃនេះ ថ្វាយ ប្រគេន ជូន ដល់ព្រះ វិញ្ញាណក្ខ័ន្ធនៃ អតីតព្រះមហាក្សត្រខ្មែរ ព្រះវិញ្ញាណក្ខ័ន្ធនៃព្រះសង្ឃខ្មែរ វិញ្ញាណក្ខ័ន្ធនៃវីរៈបុរសខ្មែរ បុព្វបុរសខ្មែរជំនាន់មុន ដែលមានឧត្តមគតិស្រឡាញ់យុត្តិធម៌ ស្នេហាជាតិ សាសនាដ៏ពិតៗ និងដល់ជីដូនជីតាសាច់ញាតិ លោកគ្រូអ្នកគ្រូ សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកមានគុណទាំងឡាយ ដែល បានចែកឋានទៅ កាន់បរិលោកហើយ សូមឱ្យលោកទទួលបាននូវសេចក្តីសុខ រួចចាកទុក្ខពីលំបាកទាំងឡាយ សមតាមអ្វីដែលលោកបានប្តូរផ្តាច់ មិនខ្លាចនឿយហត់ក្នុងការបង្ហាត់បង្ហាញដល់ យើងខ្ញុំរហូតទទួលបាននូវផ្លែផ្កាគួរជាទីមោទនៈនៅពេលនេះ។

ខ្ញុំសូមឧទ្ទិសស្នាដៃ នេះឱ្យក្លាយជាឧបករណ៍ បម្រើឱ្យ សេចក្តីត្រូវការនៃ វិសាលភាពពុទ្ធិគ្រប់ពេលវេលា ព្រមទាំងយុវវ័យមួយចំនួនធំ ដែលមានសេចក្តីអស់សង្ឃឹមបានដុតបំផ្លាញគោលបំណងនៃការរៀនសូត្រ ពោលគឺពួកគេបង្ខំចិត្តលាសាលារៀន លាវិទ្យាល័យ លាមហាវិទ្យាល័យ ទាំងទឹកភ្នែករហេមរហាម ទាំងក្តីសោកស្តាយហួសថ្លែងសម្តែងចេញ ពោលគឺប្រកបដោយភាពឈឺចុកចាប់យ៉ាងក្រៃលែង សឹងថារកវាចាមកថ្លែងរៀបរាប់ឱ្យចំនឹងទំហំនៃការឈឺចាប់ ក្នុងជម្រៅចិត្តមិនបាន ដោយសារតែសេចក្តីក្រីក្រ។ សេចក្តីតោកយ៉ាកបែបនេះ ក្លាយទៅជាអនុស្សាវរីយ៍ដ៏គ្រោតគ្រាតពេញមួយជីវិត ដែលគប្បីឱ្យយុវជន យុវតីខ្មែរស្វ័យសិក្សា ស្វែងរកពុទ្ធិទាំងឡាយមកដាក់ក្នុងខួរក្បាលនៅពេលណាដែលខ្លួនអាច។

ជាចុងបញ្ចប់នៃពាក្យឧទ្ទិសនេះ ខ្ញុំបាទសូមឧទ្ទិសពាក្យមួយឃ្លាដែលខ្ញុំចូលចិត្តជាងគេក្នុងពេលដែលខ្ញុំបាទកំពុងសិក្សាគណិតវិទ្យា នេះទុកជាការពិចារណាបន្តទៀតនៃអ្នកសិក្សាជំនាន់ក្រោយៗគឺ បញ្ហា និងការចេះឈឺចាប់ អាចជម្រុញឱ្យយើងបំភ្លេចខ្លួនឯងនៅពេលខ្លះ ហើយតស៊ូសិក្សាបាន ទៅមុខទៀត ដែលវាទាំងពីរខាងដើមនេះ បើកភ្នែកមនុស្សឆ្លាតមួយ ចំនួនឱ្យមើលឃើញពីដំណោះស្រាយ ទ្រឹស្តីបទនៃជីវិត បន្ទាប់ពីគេមាន ភ័ព្វសំណាងបានយល់ អំពីអ្វីដែលធ្វើឱ្យគេចេះតស៊ូក្នុងជីវិត។

អំណះអំណាង

យើងខ្ញុំជា គរុនិស្សិតនៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ឯកទេស គណិតវិទ្យា ហើយជាអ្នក សរសេររបាយ ការណ៍ស្រាវជ្រាវ លើប្រធានបទ គណិតវិទ្យាហិរញ្ញវត្ថុ ដើម្បី បញ្ចប់ការសិក្សា ថ្នាក់បរិញ្ញាបត្រ+១ ដែលបានសិក្សាអស់រយៈពេល១ឆ្នាំសិក្សាកន្លងមកនេះ។

យើងខ្ញុំសូមធ្វើការអះអាងថាការសិក្សា ស្រាវជ្រាវរបស់យើងខ្ញុំមានភាពពិតទាំងស្រុងទាំងព័ត៌មានដែលប្រមូលបានមក និង សរសេរអត្ថបទ ហើយ របាយការណ៍នេះ យើងខ្ញុំបានយកជូនលោកគ្រូណែនាំត្រួតពិនិត្យ គាត់ក៏បានអនុញ្ញាតឱ្យយើងខ្ញុំ សរសេរប្រធានបទនេះឡើងមក។ យើងខ្ញុំសូម ទទួលខុសត្រូវ ចំពោះការក្លែងបន្លំ ការលួចចម្លង ពីអ្នកដទៃ។ ប្រសិន បើវិទ្យាស្ថានពិនិត្យឃើញមានករណីណាមួយកើតឡើងខុសពីខ្លឹមសារ នៃការអះអាងខាងលើចំពោះរបាយការណ៍របស់យើងខ្ញុំ នោះយើងខ្ញុំពុំមានលក្ខណៈគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីទទួលសញ្ញាបត្រឡើយ។

សេចក្ដីផ្ដើម

១. លំនាំបញ្ហា

ឆ្លងតាមរយៈ ការសិក្សាលើមុខវិជ្ជា គណិតវិទ្យា ជា ពិសេសមុខវិជ្ជា គណិតវិទ្យាហិរញ្ញវត្ថុ បានបង្ហាញនូវវិធីសាស្រ្តមួយចំនួន ក្នុងសេដ្ឋកិច្ច អំពីការគណនា ការប្រាក់ ប្រាក់ចំណេញ ប្រាក់ខាត...។ ដោយឃើញពីសារៈសំខាន់នេះ ទើបក្រុមយើងខ្ញុំ សម្រេចចិត្ត ជ្រើសរើស យកប្រធានបទនេះមកធ្វើការស្រាវជ្រាវ។

២. គោលបំណង និងសារៈសំខាន់នៃការស្រាវជ្រាវ

ការសិក្សាស្រាវជ្រាវមានគោលបំណងផ្ដល់នូវឯកសារ ជំនួយក្នុងការសិក្សាលើមុខវិជ្ជា គណិតវិទ្យាហិរញ្ញវត្ថុ។

៣. វត្ថុបំណងនៃការស្រាវជ្រាវ

ដោយមើលឃើញពីសារៈសំខាន់ និងកង្វះខាតឯកសារជាខេមរភាសាទើបក្រុមយើងខ្ញុំ សម្រេចចិត្តជ្រើសរើសយកប្រធានបទ គណិតវិទ្យាហិរញ្ញវត្ថុមកធ្វើការស្រាវជ្រាវ ដោយបង្ហាញនូវចំណុចសំខាន់គឺៈ

- ការប្រាក់សាមញ្ញ
- អប្បហារសាមញ្ញ
- ការប្រាក់សមាស
- ការបង់ប្រាក់ប្រចាំគ្រា
- ការសងរំលោះបំណុល
- សញ្ញាប័ណ្ណ (Bond)
- ភាគហ៊ុន (Stock)
- Stochastic
- Black-Scholes

ម្យ៉ាងទៀតនៅចុងបញ្ចប់នៃមេរៀននីមួយៗមានលំហាត់សម្រាប់អនុវត្តផងដែរ។

៤. **វិធីសាស្រ្តក្នុងការស្រាវជ្រាវ** ការរៀបចំ ចងក្រងឯកសារនេះ ឡើង ដំបូងយើង ខ្ញុំបាន ស្វះ ស្វែងប្រមែប្រមូល រកនូវឯកសារនានា ដែលទាក់ទង នឹង ប្រធានបទ តាមរយៈអ៊ីនធឺណែត សៀវភៅសិក្សានៅតាមសាកលវិទ្យាល័យ នៅតាមបណ្ណាល័យនានា។

បន្ទាប់ពីបានឯកសារហើយ យើងខ្ញុំបានវិភាគផ្ទៀងផ្ទាត់ ដើម្បីសម្រេច យកខ្លឹមសារដែលបានច្បាស់លាស់ធ្វើជា របាយការណ៍។

ចុងក្រោយទើបយើងខ្ញុំសម្រេចសរសេរ ខ្លឹមសារទាំងនេះ ធ្វើជា របាយការណ៍ ស្រាវជ្រាវ ទៅតាមប្លង់ នៃរបាយការណ៍ ស្រាវជ្រាវរបស់វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ។

មាតិកា

ទំព័រ

ជំពូកទី ១

ការប្រាក់សាមញ្ញ

១.១. សញ្ញាណនៃការប្រាក់សាមញ្ញ

អ្វីជាការប្រាក់សាមញ្ញ?

ឧទាហរណ៍ ១.១.១. ៖ ឧបមាដើម្បីពង្រីកមុខរបររបស់គាត់លោករដ្ឋបានខ្ចីប្រាក់ពីធនាគារចំនួន $5000 ដែលមានអត្រាការប្រាក់ 10% ក្នុងមួយឆ្នាំ។

- បើលោករដ្ឋខ្ចីរយៈពេលមួយឆ្នាំនោះគាត់ត្រូវសងប្រាក់នៅធនាគារវិញចំនួន $5500 ដែល $5000 ជា ប្រាក់ដើមរបស់ធនាគារពេលគាត់ខ្ចី និង $500 ជា ការប្រាក់ដែលបង់ក្នុងរយៈពេលមួយឆ្នាំ។
- បើសិនគាត់ខ្ចីរយៈពេលពីរឆ្នាំវិញ នោះគាត់ត្រូវសងប្រាក់នៅ ធនាគារវិញ ទាំងដើមទាំងការប្រាក់ ចំនួន$6000 ដែល $5000 ជាប្រាក់ដើមនិង $1000 ជាការប្រាក់ត្រូវបង់ក្នុងរយៈពេល 2ឆ្នាំ។

គោលគំនិតនេះជាមូលដ្ឋាននៃសញ្ញាណការប្រាក់សាមញ្ញ ។

១.២. និយមន័យ

និយមន័យ ១.២.១. ការប្រាក់សាមញ្ញ គឺជាការប្រាក់ដែលមិនត្រូវបានបូកបន្ថែម នឹងប្រាក់ដើម សម្រាប់គិតការប្រាក់បន្តទៅទៀត។

ប្រាក់សាមញ្ញត្រូវបានបង់ដោយអ្នកខ្ចីគេ (កូនបំណុល) ជូនអ្នកដែលឱ្យខ្ចី (ម្ចាស់បំណុល) តាម ដំណាក់កាល នៃកិច្ចសន្យា។

ក្នុងការអនុវត្ត

ការប្រាក់សាមញ្ញ (simple interest) ត្រូវបានប្រើប្រាស់ សម្រាប់ប្រតិបត្តិការហិរញ្ញវត្ថុក្នុងរយៈពេល ខ្លី ដែលទាក់ទង នឹង ការចងការប្រាក់។

១.៣. រូបមន្តការប្រាក់សាមញ្ញ

ដើម្បីងាយស្រួលក្នុងការគណនាការប្រាក់សាមញ្ញ គេកំណត់និមិត្តសញ្ញាដូចខាងក្រោម៖

- P ប្រាក់ដើមដំបូង (Principle)
- r អត្រាការប្រាក់ (Interest rate)
- I ការប្រាក់សាមញ្ញ (Interest)
- t រយៈពេលវិនិយោគ (times)
- v ប្រាក់សរុបនៅចុងគ្រា (Future value)

ដោយការប្រាក់សាមញ្ញសមាមាត្រដោយផ្ទាល់ទៅនឹងប្រាក់ដើម អត្រាការប្រាក់ និង រយៈពេលវិនិយោគ គេ ទាញបានរូបមន្ត ៖

$$\boxed{I = Prt} \tag{១.១}$$

$$\boxed{v = P + I} \tag{១.២}$$

$$\boxed{v = P + Prt = P(1 + rt)} \tag{១.៣}$$

ឧទាហរណ៍ ១.៣.១. ៖ លោកA បានចងការប្រាក់ចំនួន\$5000 ពីលោកB សំរាប់រយៈពេលមួយឆ្នាំតាមអត្រាការ ប្រាក់12% ក្នុងមួយឆ្នាំ។

តើលោកA ត្រូវសងការប្រាក់និងប្រាក់សរុបឲ្យលោកB ចំនួនប៉ុន្មាន?

ដំណោះស្រាយ

រកការប្រាក់ និង ប្រាក់សរុបដែលលោកA ត្រូវសងឲ្យលោកB

តាមរូបមន្ត(១.១) ការប្រាក់សាមញ្ញ $I = Prt$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow I &= 5000 \times 0.12 \times 1 \\ &= 600 \end{aligned}$$

តាមរូបមន្ត(១.២) ប្រាក់សរុប $V = P + I$

$$\begin{aligned} &= 5000 + 600 \\ &= 5600 \end{aligned}$$

១.៤. ក្រាបនៃការប្រាក់សាមញ្ញ

ឧទាហរណ៍ ១.៤.១. សន្មតថាគេដាក់វិនិយោគប្រាក់ចំនួន$\$100$ក្នុងគណនីសន្សំមួយ។ ចូលសង់តារាងមួយដើម្បី បង្ហាញអំពីចំនួនប្រាក់ សរុបចុងគ្រាដែលបានកើតឡើង ក្នុងគណនីក្រោយរយៈពេល $1, 3, 5, 10\&20$ ឆ្នាំ ដោយ គិត តាមការប្រាក់សាមញ្ញក្នុងអត្រា 10% ក្នុងមួយឆ្នាំ។

ដំណោះស្រាយ

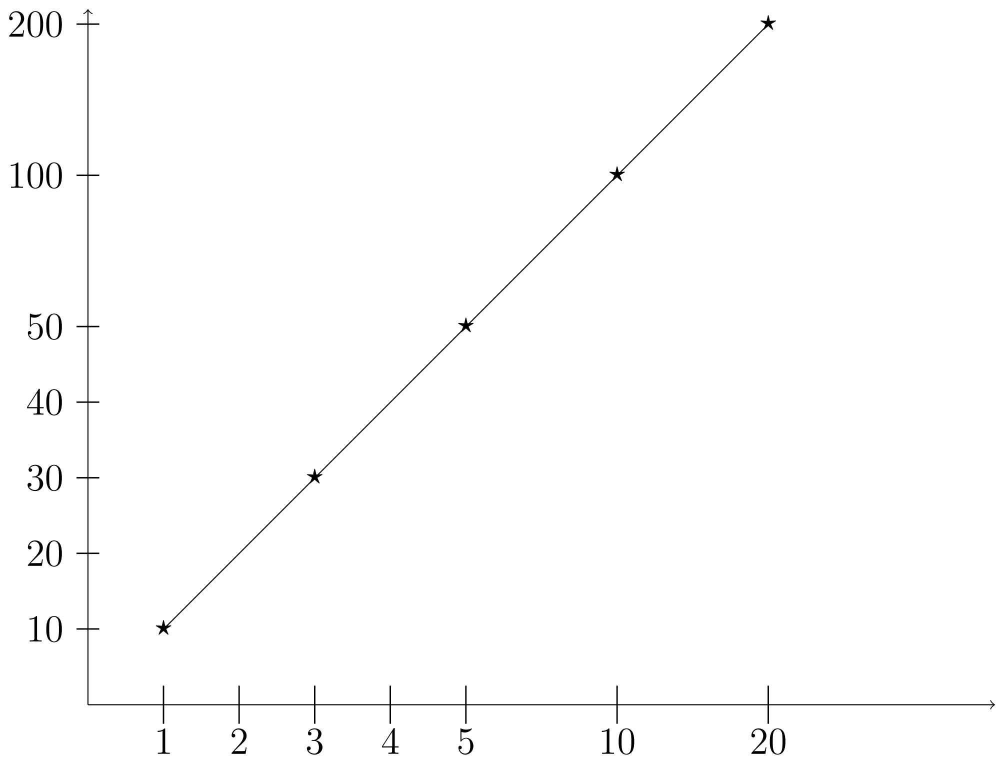
សង់តារាង

តាមរូបមន្ត(១.១) $I = Prt$ និង (១.២) $V = P + I$

យើងទទួលបានប្រាក់សរុប ចុងគ្រាតាម ឆ្នាំនីមួយៗ ដែលបានបង្ហាញក្នុង តារាងខាងក្រោម៖

រយៈពេលគិតជាឆ្នាំ	អត្រាការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ 10%	
	ការប្រាក់សាមញ្ញ	ប្រាក់សរុបចុងគ្រា
1	10$	110$
3	30$	130$
5	50$	150$
10	100$	200$
20	200$	300$

តាមតារាងខាងលើ គេបាន ក្រាបនៃការប្រាក់សាមញ្ញដូចខាងក្រោម៖



១.៥. រយៈពេលនៃការចងការប្រាក់

ក្នុងការពិភាក្សារបស់យើង រហូតមកដល់ពេលនេះ យើងបានសន្មតថាt ជាចំនួនគត់(ឆ្នាំ) តែទោះ ជា យ៉ាង ណា ក្នុង ការអនុវត្តជាក់ ស្តែង នៅក្នុងជីវភាពរស់នៅ ការវិនិយោគរឺការចង ការប្រាក់អាចមានរយៈពេលគិតជាខែឬ ជាថ្ងៃ។

១.៥.១. រយៈពេលចងការគិតជាខែ

យើងសន្មត t ជារយៈពេលកំណត់នៃការខ្ចី ឬ ចងការប្រាក់គិតជាខែ នោះយើងបាន$\frac{t}{12}$ គឺ ជា រយៈពេលនៃ ការខ្ចី ឬចងការប្រាក់ធៀប ទៅនឹងរយៈពេល១ឆ្នាំ(ព្រោះក្នុង១ឆ្នាំមាន១២ខែ)។ យើងអាចទាញបានរូបមន្ត ការប្រាក់ សាមញ្ញ ដែលមាន រយៈពេល គិតជាខែគឺ

$$\boxed{I = Pr\frac{t}{12}} \tag{១.៥}$$

ឧទាហរណ៍ ១.៥.១. មីងសានខ្ចីប្រាក់ពីធនាគាមួយចំនួន១០លានរៀលតាមការប្រាក់សាមញ្ញក្នុង អត្រា១០% ក្នុង១ឆ្នាំ។

តើគាត់ត្រូវសងការប្រាក់ចំនួនប៉ុន្មានទៅឲ្យធនាគារក្នុងរយៈពេល

ក. ៣ខែ

ខ. ៦ខែ

គ. ១០ខែ

ដំណោះស្រាយ

ក. រកការប្រាក់ក្នុងរយៈពេល៣ខែ

តាមរូបមន្ត(១.៥) $\quad I = Pr\frac{t}{12}$

គេបាន $I = 10000000 \times 0.1 \times \frac{3}{12} = 250000$

ខ. រកការប្រាក់ក្នុងរយៈពេល៦ខែ

តាមរូបមន្ត(១.៥) $\quad I = Pr\frac{t}{12}$

គេបាន $I = 10000000 \times 0.1 \times \frac{6}{12} = 500000$

គ. រកការប្រាក់ក្នុងរយៈពេល១០ខែ

តាមរូបមន្ត(១.៤) $I = Pr\dfrac{t}{12}$

គេបាន $I = 10000000 \times 0.1 \times \dfrac{10}{12} = 833333.33$

១.៥.២. រយៈពេលចងការគិតជាថ្ងៃ

រយៈពេលចងការដែលគិត ជាចំនួនថ្ងៃ គឺ ជារយៈពេលក្នុងចន្លោះ កាលបរិច្ឆេទពីរ ដែលយើងអាចយករយៈ ពេលពិតប្រាកដ ក៏បានឬរយៈពេលប្រហែលក៏បាន។ ប៉ុន្តែរយៈពេលដែលគេនិយមប្រើប្រាស់ លើសាកលលោកគឺ រយៈពេលពិតប្រាកដ។ហើយ ការប្រាក់ដែលប្រើប្រាស់ច្រើនជាងគេគឺការប្រាក់ពាណិជ្ជកម្មនិងការប្រាក់ស៊ីវិល។

- ការប្រាក់ពាណិជ្ជកម្មគេគិតរយៈពេលក្នុងមួយឆ្នាំមាន៣៦០ថ្ងៃ។
- ការប្រាក់ស៊ីវិលគេគិតរយៈពេលក្នុងមួយឆ្នាំមាន៣៦៥ថ្ងៃ។
- បើ tជារយៈពេលចងការគិតជាថ្ងៃ នោះយើងបានរូបមន្ត

ការប្រាក់ពាណិជ្ជកម្ម $$\boxed{I = Pr\frac{t}{360}} \qquad (១.៥)$$

ការប្រាក់ស៊ីវិល $$\boxed{I_c = \Pr\frac{t}{365}} \qquad (១.៦)$$

សំគាល់

- ការប្រាក់ស៊ីវិលត្រូវបានអនុវត្តដោយ $Centralbank, FederalReserveBank$
- ការប្រាក់ពាណិជ្ជកម្ម ត្រូវបាន អនុវត្ត ដោយ $CommercialBank$ និង ពាណិជ្ជកម្ម អន្តរជាតិ
- តាមរូបមន្ត ខាងលើយើងសង្កេតឃើញថា ការប្រាក់ពាណិជ្ជកម្ម ខ្ពស់ជាងការប្រាក់ស៊ីវិល $I_c < I$

ឧទាហរណ៍ ១.៥.២. ៖លោក <ក>បានចងការប្រាក់ចំនួន $7500 ចាប់ពីថ្ងៃទី ១៥ ខែ ឧសភា ដល់ថ្ងៃទី ១៨ ខែ កញ្ញា ឆ្នាំ ២០១៦ ដោយ គិត ការប្រាក់សាមញ្ញតាមអត្រា 9% ក្នុងមួយឆ្នាំ ។ តើលោក <ក> ត្រូវបង់ការប្រាក់ប៉ុន្មាននៅកាលវិសាន្ត ? បើគិតតាមការប្រាក់ស៊ីវិល ??

ដំណោះស្រាយ

- ខែឧសភាមាន ១៦ថ្ងៃ ⇒ (៣១-១៥=១៦) ថ្ងៃ
- មិថុនា មាន ៣០
- កក្កដា មាន ៣១
- សីហា មាន ៣១
- កញ្ញា មាន ១៨

ដូចនេះចំនួនថ្ងៃសរុបគឺ ១២៦

គេបាននៅកាលវសាន្តលោក <ក> ត្រូវបង់ការប្រាក់ : តាមរូបមន្ត(១.៥)

$$I = pr\frac{t}{360} = 7500 \times 0.09 \times \frac{126}{360} = 236.25\$$$

-បើគិតតាមការប្រាក់ស៊ីវិលលោក <ក> ត្រូវបង់ការប្រាក់: តាមរូបមន្ត(១.៦)

$$I = pr\frac{t}{365} = 7500 \times 0.09 \times \frac{126}{365} = 233.01\$$$

១.៦. ការអនុវត្តរូបមន្តគ្រឹះ និងតម្លៃប្រាក់សរុបត្រូវសង

-រូបមន្តមូលដ្ឋាននៃការប្រាក់សាមញ្ញ(១.១) គឺ $I = Prt$ ដែល

- I ការប្រាក់សាមញ្ញ
- P ប្រាក់ដើម
- t រយៈពេលចងការ
- r ជាអត្រាការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ

ដូចនេះក្នុងការគណនា គេតែងប្រាប់សមាសភាពបី ហើយត្រូវគណនារកសមាសភាពទី៤ ។ តាមរូបមន្តគ្រឹះយើងអាចទាញបានរូបមន្តសំរាប់គណនា៖

១. រយៈពេល

$$\boxed{t = \frac{I}{Pr}} \tag{១.៧}$$

២. អត្រាការប្រាក់

$$\boxed{r = \frac{I}{Pt}} \tag{១.៨}$$

៣. ប្រាក់ដើម

$$\boxed{P = \frac{I}{rt}} \qquad (១.៩)$$

ម្យ៉ាងទៀតតម្លៃប្រាក់សរុបដែលត្រូវសងគឺ$N = P+I$ ដែលរួមមានប្រាក់ដើម P និងការប្រាក់I

ឧទាហរណ៍ ១.៦.១. នៅថ្ងៃទី ០៣ ខែ កុម្ភៈ ឆ្នាំ ១៩៩៨ លោកសម្បត្តិបានខ្ចីប្រាក់ចំនួន$3000 ពីធនាគាមួយដើម្បី យកមកទិញសម្ភារៈ បំពាក់ក្រុមហ៊ុន របស់ខ្លួន ។ បើ ធនាគារគិតការប្រាក់សាមញ្ញតាមអាត្រា 12% ក្នុងឆ្នាំ ។ លោក សម្បត្តិត្រូវសងប្រាក់នៅធនាគា វិញនៅថ្ងៃទី ១០ ខែ ឧសភា ឆ្នាំ ១៩៩៨ ។

តើគាត់ត្រូវសងការប្រាក់ ចំនួនប៉ុន្មានហើយ ទឹកប្រាក់សរុបត្រូវសងចំនួនប៉ុន្មាន ?

ដំណោះស្រាយ

រកការប្រាក់និងប្រាក់សរុប

- ខែកុម្ភៈមាន 25 ថ្ងៃ $(28-3=25)$
- ខែមីនាមាន 31 ថ្ងៃ
- ខែមេសាមាន 30 ថ្ងៃ
- ខែឧសភាមាន 10 ថ្ងៃ

ដូចនេះ ចំនួនថ្ងៃសរុប 96 ថ្ងៃ

$$\Rightarrow I = pr\frac{t}{360} = 3000 \times 0.12 \times \frac{96}{360} = 96\$$$

$$\Rightarrow v = p + I = 3000 + 96 = 3096\$$$

នៅថ្ងៃទី១០ ខែឧសភា ឆ្នាំ១៩៩៨ លោកសម្បត្តិត្រូវសងធនាគារសរុប 3096$

១.៧. អត្រាការប្រាក់មធ្យម

ឧបមា គេចងការប្រាក់ព្រមពេលជាមួយគ្នាចំនួនn ករណីតាមលក្ខខណ្ឌដូចតទៅ៖

ប្រាក់ដើម	អត្រាការប្រាក់	រយៈពេល(ថ្ងៃ)
P_1	r_1	t_1
P_2	r_2	t_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$
P_n	r_n	t_n

ដោយអត្រាការប្រាក់ និងរយៈពេលចងការទាំងអស់មិនស្មើគ្នា នាំឱ្យការប្រាក់ខុសគ្នាគឺ

$$I_1 = P_1 r_1 \frac{t_1}{360} \quad , I_2 = P_2 r_2 \frac{t_2}{360} \quad , \cdots , I_n = P_n r_n \frac{t_n}{360}$$

គេបានការប្រាក់សរុបដែលទទួលបានពីការចងការខាងលើគឺ

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + \cdots + I_n \\ &= P_1 r_1 \frac{t_1}{360} + P_2 r_2 \frac{t_2}{360} + \cdots + P_n r_n \frac{t_n}{360} \\ I &= \frac{1}{360} \sum_{i=1}^{n} P_i r_i t_i \qquad (1) \end{aligned}$$

យើងតាងr ជាអត្រាការប្រាក់មធ្យម គឺ ជាអត្រាការប្រាក់ ដែលអនុវត្តលើការចងការ មានប្រាក់ដើម $P_1, P_2, ..., P_n$ ក្នុងរយៈពេល $t_1, t_2, ..., t_n$ រៀងគ្នាខាងលើ ផ្តល់ការប្រាក់សរុបដូចគ្នា នឹងការចងការតាមអត្រា ផ្សេងៗគ្នាដែរគឺ

$$\begin{aligned} I &= \frac{P_1 r t_1}{360} + \frac{P_2 r t_2}{360} + \cdots + \frac{P_n r t_n}{360} \\ I &= \frac{r}{360} \sum_{i=1}^{n} P_i t_i \qquad (2) \end{aligned}$$

តាម(1) និង(2) គេបានៈ

$$\sum_{i=1}^{n} P_i r_i t_i = r \sum_{i=1}^{n} P_i t_i$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{r = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i r_i t_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i t_i}} \qquad (១.១០)$$

ឧទាហរណ៍ ១.៧.១. ចូររកអត្រាការប្រាក់មធ្យម ដែលជាលទ្ធផលនៃការចងការប្រាក់ដូចតទៅៈ

ប្រាក់ដើម	អត្រាការប្រាក់	រយៈពេលចងការ
3800\$	7.5%	25/5ដល់15/7
6420\$	8.2%	25/5ដល់31/7
780\$	8.5%	25/5ដល់31/8

ដំណោះស្រាយ

រកអត្រាការប្រាក់មធ្យម

គេបានរយៈពេលចងការៈ

- $t_1 = 51$ថ្ងៃ ចាប់ពីថ្ងៃទី ដល់ $25/5$ដល់$15/7$
- $t_2 = 67$ ថ្ងៃ ចាប់ពីថ្ងៃទី ដល់ $25/5$ដល់$31/7$
- $t_3 = 98$ថ្ងៃ ចាប់ពីថ្ងៃទី ដល់ $25/5$ដល់$31/8$

នោះ តាមរូបមន្ត(១.១០)

$$\begin{aligned} r &= \frac{P_1r_1t_1 + P_2r_2t_2 + P_3r_3t_3}{P_1t_1 + P_2t_2 + P_3t_3} \\ &= \frac{(3800 \times 0.075 \times 51) + (6420 \times 0.082 \times 67) + (780 \times 0.085 \times 98)}{(3800 \times 51) + (6420 \times 67) + (780 \times 98)} \\ &= \frac{56303.88}{700380} \\ &= 0.08 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{អត្រាការប្រាក់ជាមធ្យមសម្រាប់ការចងការប្រាក់ទាំងបីករណីខាងលើគឺ} r = 8\%}$

១.៨. ការដកយកការប្រាក់មុន និងអត្រាជាក់លាក់

លទ្ធផល និង រូបមន្តដែលយើងឃើញកន្លងមក គឺ កើតឡើង ដោយសារ "ការបង់ការប្រាក់នៅថ្ងៃដែល អ្នកខ្ចី សងប្រាក់ដើមវិញ"។

គេអាចធ្វើកិច្ចសន្យាខ្ចីចងការដោយព្រមព្រៀងគ្នាដកយកការប្រាក់មុន ពោលគឺនៅពេលផ្តល់មូលនិធិសុំខ្ចី។ ការខ្ចីចងការបែប នេះ គេហៅថាអប្បហារតាមអត្រាការប្រាក់។

ការខ្ចីចងការ ឬ ការសន្សំ ដែលគេដកការប្រាក់មុន បានបង្កើតឱ្យមានអត្រាជាក់លាក់មួយទៀតខុសពីអត្រា ធម្មតាដែលប្រគល់ការប្រាក់នៅពេលឥណប្រតិទាន។

ឧទាហរណ៍ ១.៨.១. ៖ គេចងការប្រាក់ដើម$10000\$$ ដោយគិតតាមការប្រាក់សាមញ្ញ តាមអត្រា 10% ក្នុងរយៈ ពេល មួយឆ្នាំ។ ដោយដក យកការប្រាក់ មុន មានន័យថា $I = Prt = 10000 \times 0.1 \times t = 1000\$$ ត្រូវបាន ម្ចាស់ បំណុលដកយកភ្លាម រីឯអ្នកខ្ចីទទួលបាន ប្រាក់ពិតប្រាកដត្រឹមតែចំនួន $9000\$$ ប៉ុណ្ណោះ។ ដល់មួយឆ្នាំក្រោយម្ចាស់ បំណុលនឹងទទួលបាន $10000\$$ ដែលជាប្រាក់ដើមវិញ ព្រោះគាត់បានដកយកការប្រាក់មុនរួចហើយ។

ដូចនេះអត្រាការប្រាក់ពិតដែលអនុវត្តមិនមែន 10%ទេគឺ r'មួយទៀតដែលៈ

$$
\begin{aligned}
9000 \times r' \times 1 &= 1000 \\
r' &= \frac{1000}{9000} = 0.1111 \\
\Rightarrow r' &= 11.11\%
\end{aligned}
$$

ជាទូទៅបើប្រាក់ដើមP ចងការដោយដកយកការប្រាក់មុនតាមអត្រាការប្រាក់r ក្នុងរយៈពេល tឆ្នាំ គេបាន តាមរូបមន្ត(១.១) $I = Prt$ ជាការ ប្រាក់ ដកនៅថ្ងៃខ្ចី។
ប្រាក់ដើមពិតប្រាកដដែលកូនបំណុលទទួលបានគឺ

$$P - Prt = P(1 - rt)$$

យើងតាងr' ជាអត្រាជាក់លាក់នោះគេបាន

$$
\begin{aligned}
P(1 - rt) \times r' \times t &= Prt \\
(1 - rt)r' &= r
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{r' = \frac{r}{(1 - rt)}} \tag{១.១១}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍

លំហាត់ ១.១. ចូររកការប្រាក់ និង ប្រាក់ត្រូវសងដោយការចងការ ៖

ក. ប្រាក់ដើម $60 000 អត្រាការប្រាក់ 12% រយៈពេល 1 ឆ្នាំ

ខ. ប្រាក់ដើម $70 000 អត្រាការប្រាក់ 10% រយៈពេល 6 ខែ

គ. ប្រាក់ដើម $60 000 អត្រាការប្រាក់ 11% រយៈពេល 7ខែ

ឃ. ប្រាក់ដើម $45 000 អត្រាការប្រាក់ 9.5% រយៈពេល 240ថ្ងៃ

ង. ប្រាក់ដើម $87 000 អត្រាការប្រាក់ 10% រយៈពេល 300 ថ្ងៃ

លំហាត់ ១.២. តើអត្រាការប្រាក់ប៉ុន្មាន បើ គេបាន ការប្រាក់ចំនួន $6 500 ពី ការចងការប្រាក់ដើម $78 000 រយៈពេល 10ខែ។

លំហាត់ ១.៣. តើប្រាក់ដើម ចំនួនប៉ុន្មានបើគេចង ការតាម អត្រា 12% រយៈពេល 8 ខែ គេសងមកវិញ ចំនួន $86 400 ។

លំហាត់ ១.៤. តើគេត្រូវចង ការប្រាក់ដើមប៉ុន្មាន អត្រាប្រចាំឆ្នាំ10%រយៈពេល 180ថ្ងៃ ដើម្បីអោយបាន Maturity Value $73 500។

លំហាត់ ១.៥. តើរយៈពេលចងការប៉ុន្មានដើម្បីអោយ បាន *Maturity Value* $130 800 ពី ការចងការប្រាក់ដើម $120 000 តាមអត្រា12%។

លំហាត់ ១.៦. .

ក. ចូររកការប្រាក់ដែលបាន ពីការចងការប្រាក់ ដើម $28 000 អត្រាការប្រាក់ 9% រយៈ ពេលពីថ្ងៃ 13/09 នៃឆ្នាំមួយដល់ថ្ងៃ 27/02 នៃឆ្នាំបន្ទាប់។

ខ. ប្រាក់ដើម $7 200 អោយខ្ចីគិតតាម អត្រា 8% ពី ថ្ងៃ 08/06 បានផ្តល់ Maturity Value ចំនួន $7 288 ។ ចូររកឥណប្រតិទាន នៃការសងនោះ ?

គ. ប្រាក់ដើម $8 400 បាន បង្កើត ការប្រាក់ $231 ដោយសារ អោយ ខ្ចី ពី ថ្ងៃ 16/05 ដល់ថ្ងៃ 25/09 ។ ចូររកអត្រាការប្រាក់ ?

ឃ. ចូររកប្រាក់ដើម ដែលចងការតាមអត្រា 8.4% រយៈពេល 62 ថ្ងៃ ហើយគេ ទទួលបាន *Maturity Value* $16, 738.70។

លំហាត់ ១.៧. តើត្រូវប្រើរយៈពេលប៉ុន្មាន ដើម្បីអោយប្រាក់ដើមចំនួន $1 000:

ក. ផលិតការប្រាក់បានចំនួន $100 បើគេគិតតាមអត្រា 15% ?

ខ. ទទួលបានប្រាក់សរុប $1200 បើសិនគេគិតការប្រាក់តាមអត្រា 13.5%?

លំហាត់ ១.៨. លោកវណ្ណៈ បានខ្ចីប្រាក់ ចំនួន $10 000 ដែល ម្ចាស់បំណុលគិតការប្រាក់ តាមអត្រា 10.5% និង តាមកិច្ចសន្យាគាត់ត្រូវ សងវិញជារៀងរាល់ខែ ដែលក្នុងខែនិមួយៗ ត្រូវ សងទាំងប្រាក់ដើម និងការប្រាក់ ចំនួន $200 ។ តើប្រាក់ដែល ត្រូវបង់លើកទី ១ មានទឹកប្រាក់ ប៉ុន្មានជាបំណុល និង ប៉ុន្មានជាការប្រាក់ ?

លំហាត់ ១.៩. នៅថ្ងៃទី ៧ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០០០ ស្រ្តីម្នាក់បានខ្ចីប្រាក់ចំនួន $1 000 ដែលគិតការប្រាក់តាមអត្រា 8%។ គាត់បានសងបំណុលវិញ នៅថ្ងៃទី ២២ ខែ វិច្ឆិកា ឆ្នាំ ២០០០ ។ ចូរគណនាការប្រាក់ដែលគាត់ត្រូវសង ?

លំហាត់ ១.១០. ទឹកប្រាក់ចំនួន $5 000 ត្រូវបានដាក់សន្សំពីថ្ងៃទី ៣ ខែ វិច្ឆិកា ឆ្នាំ ១៩៩៩ រហូតដល់ថ្ងៃទី៨ ខែ កុម្ភៈ ឆ្នាំ២០០០ ដោយទទួលបានការប្រាក់តាមអត្រា15%។ ចូរគណនាការប្រាក់ដែលទទួលបាន និង ទឹកប្រាក់ សរុបដោយប្រើវិធីសាស្ត្រទាំងពីរ ?

លំហាត់ ១.១១. គេចងការដោយយកការប្រាក់មុនតាម អត្រា 9% ប្រាក់ដើម $20 000 រយៈពេល 20 ខែ ។ ចូររកអត្រាជាក់លាក់។

លំហាត់ ១.១២. ចូររកតាមវិធីសាស្ត្រ *(Nombre diviseur fixe)* នូវការប្រាក់សរុបនៃការចងការតាមអត្រា 9% និង ប្រាក់ដើមដូចតទៅ ៖

- $\$55,000$ ពីថ្ងៃ $1/3$ដល់ $31/7$
- $\$26,250$ ពីថ្ងៃ $1/3$ ដល់ $31/8$
- $\$8,700$ ពីថ្ងៃ $1/3$ ដល់ $30/9$

លំហាត់ ១.១៣. លំអៀងរវាងការប្រាក់ពាណិជ្ជកម្ម (360 ថ្ងៃ/ឆ្នាំ) និង ការប្រាក់ស៊ីវិល (365 ថ្ងៃ/ឆ្នាំ) នៃ ប្រាក់ដើម ដែលចងការតាមអត្រា 9.5% រយៈពេល 72 ថ្ងៃ គឺ $1 140។ ចូររកប្រាក់ដើមនោះ ។

លំហាត់ ១.១៤. ប្រាក់ដើម 2 ដែលខុសគ្នា \$1 000 ប្រាក់ដើមទី $1(P_1)$ ចងការអត្រា $r_1 = 12\%$ រយៈពេល 8 ខែ។ ប្រាក់ដើមទី2 (P_2) ចងការអត្រា $r_2 = 10\%$ រយៈពេល 6ខែ ។ គេសង្កេតឃើញថាប្រាក់ដើមទី 1 បានផ្តល់ ការប្រាក់ស្មើនឹងពីរដង នៃការប្រាក់ដែលបានផ្តល់ដោយប្រាក់ដើមទី2 ។ ចូររកប្រាក់ដើម ទាំង 2 និង ការប្រាក់ទាំង 2 របស់វានោះ។

លំហាត់ ១.១៥. ប្រាក់ដើមចំនួន3 ដែលជា *Suite Arithmetic Progression* ត្រូវបាន គេយកទៅចងការរយៈពេល 2 ឆ្នាំ អត្រា 11% ។ ការប្រាក់សរុបបាន \$1 386 លំអៀង រវាងប្រាក់ដើម ទី 3 និង ទី 1 ខុសគ្នា \$2 400។ ចូររកប្រាក់ដើមទាំង 3 នោះ។

លំហាត់ ១.១៦. ប្រាក់ដើម 2 ដែលចំនួនសរុប \$168 000 ត្រូវបានគេយកទៅ ចងការរយៈពេល 1 ឆ្នាំ តាមអត្រា 2 ដែល ខុសគ្នា 0.40% បាន ផ្តល់ការប្រាក់សរុប \$16 512។ ប្រសិន បើ គេយកប្រាក់ដើម ទី 1 ទៅចងការតាមអត្រារបស់ប្រាក់ដើមទី 2 ហើយប្រាក់ដើមទី 2 ទៅចង ការតាមអត្រារបស់ប្រាក់ដើមទី 1 នោះនឹងផ្តល់ការប្រាក់សរុប \$16 416។
ចូររកប្រាក់ដើមទាំងពីរ និង អត្រាការប្រាក់ទាំងពីរនោះ។

លំហាត់ ១.១៧. បំណុលចំនួន \$5 000 ត្រូវសងក្នុងរយៈពេល ៦ខែ ក្រោយដោយបង់ការប្រាក់តាមអត្រា 10% ។ គេបានសងទឹកប្រាក់ ចំនួន \$3 000 និង \$1 000 នៅក្នុងខែ ទី ២ និង ទី៤ រៀងគ្នា ។ តើ សមតុល្យបំណុល នៅឥណប្រតិទានស្មើប៉ុន្មាន ?

លំហាត់ ១.១៨. នៅថ្ងៃទី ៨ ខែ ឧសភា ឆ្នាំ ២០០០ អ្នកស្រីមាលា បានខ្ចីប្រាក់ពីធនាគារចំនួន \$1 000 ដោយគិត ការប្រាក់តាមអត្រា 18.5%។ អ្នកស្រីបានសងទឹកប្រាក់ចំនួន \$500 នៅថ្ងៃទី ១៧ ខែ កក្កដា និង \$400 នៅថ្ងៃទី២៩ ខែ កញ្ញា ។ តើសមតុល្យរបស់អ្នកស្រីនៅថ្ងៃទី ៣១ ខែ តុលា ស្មើប៉ុន្មាន ?

លំហាត់ ១.១៩. គេចងការប្រាក់តាមអត្រា 9% នៅ រៀងរាល់ដើមខែ ចាប់ពី ថ្ងៃទី 01/01 នូវប្រាក់ដើមស្ថេរ "$P = \$10\ 000$" ។ តើគេបានប្រាក់ប៉ុន្មាន (ប្រាក់ដើម + ការប្រាក់) នៅថ្ងៃទី $31/12$ នៃឆ្នាំនេះ។

លំហាត់ ១.២០. អតិថិជនម្នាក់បានបើកគណនីនៅធនាគារ មួយ ដោយមានល័ក្ខខ័ណ្ឌដូចតទៅ

- បង់ប្រាក់លើកដំបូងនៅថ្ងៃទី ០១ខែមេសា ឆ្នាំ ១៩៩២ ចំនួន \$25 000
- បង់ប្រាក់ប្រចាំត្រីមាសស្មើៗគ្នា ៖ \$2 000 នៅថ្ងៃទីមួយនៃត្រីមាស ។ ការបង់ប្រាក់លើកទីមួយ គឺថ្ងៃទី ០១ ខែកក្កដា ឆ្នាំ ១៩៩២ និង ការបង់ប្រាក់លើក្រោយបង្អស់ គឺថ្ងៃ ទី ០១ ខែ មករា ឆ្នាំ ១៩៩៦។

- ប្រាក់ដែលដាក់ផ្ញើទាំងអស់ ធនាគារផ្តល់ ការប្រាក់អោយ 4% ក្នុងមួយឆ្នាំ រហូតដល់ថ្ងៃ ទី៣១ ខែ មិនា ឆ្នាំ ១៩៩៦ ដែលជាការិយបរិច្ឆេទបិទគណនី។

នៅកាលបរិច្ឆេទបិទនេះ ម្ចាស់គណនី បានឃើញថាធនាគារបានផ្តល់អោយខ្លួនចំនួន ប្រាក់មួយ ដែលស្មើនឹងចំនួនប្រាក់ដែលខ្លួនបានបង់សរុប បូកនឹង ការប្រាក់ដែលបង្កើតបាន បូកនឹងរង្វាន់លើកទឹកចិត្ត មួយទៀត ដែល ស្មើនឹងចំនួនការប្រាក់ ប៉ុន្តែរង្វាន់លើកទឹកចិត្តនោះ មិនអោយលើសពី $6 000។

ក. ចូររកចំនួនប្រាក់សរុប ដែលម្ចាស់គណនីទទួលបាននៅថ្ងៃ ទី ៣១ ខែ មិនា ឆ្នាំ ១៩៩៦

ខ. ចូររកអត្រាជាក់លាក់នៃការដាក់ផ្ញើប្រាក់ នៅធនាគារនោះ ដោយគិតទាំងប្រាក់រង្វាន់លើកទឹក ចិត្តផង។

ជំពូកទី ២

ការប្រាក់សមាស (ការប្រាក់ផ្គួប)

២.១. សញ្ញាណការប្រាក់សមាស

ចូរពិនិត្យមើល អ្នកវិនិយោគម្នាក់ ដែល បានបើក គណនីសន្សំមួយ ក្នុង ពេលបច្ចុប្បន្ននូវប្រាក់ ដើមដំបូង P_0 តាមអត្រាការប្រាក់សាមញ្ញ i ។

- បើគណនីសន្សំនេះបិទក្នុងរយៈពេលមួយនោះអ្នកវិនិយោគ
  នឹងទទួលបានប្រាក់ $P_0(1+i)$ តាមរូបមន្ត ១.១
- បើគាត់ដាក់ប្រាក់ទទួលបាននេះបន្តសន្សំនៅក្នុងគណនីថ្មីហើយ បន្ទាប់មក បិទគណនីនេះក្នុងពេលមួយឆ្នាំក្រោយទៀត។ នៅពេលគណនីថ្មីនេះ ត្រូវបានបិទនោះ ប្រាក់ដែលទទួលបានគឺ $[P_0(1+i)](1+i)$
  តាមរូបមន្ត ១.១ ដូចនេះប្រាក់សរុបរបស់គាត់ ក្នុងរយៈពេល២ឆ្នាំគឺ $P_0(1+i)^2$។
- ប៉ុន្តែធនាគារយល់ថាវាមិនសមរម្យ ចំពោះកិច្ចការរដ្ឋបាល ក្នុងការរង់ចាំ ពិនិត្យការបើក ឬ បិទ គណនីច្រើនដង ដដែលៗតាមលក្ខណៈ ដែល បានពិព័ណនាដូច ខាងលើ។ ប៉ុន្តែបើធនាគារ មិនអនុញ្ញាតអោយធ្វើ បែបនេះ នោះអតិថិជន អាចមានជម្រើស ទៅដាក់បញ្ញើដោយផ្លាស់ប្តូរ កន្លែងថ្មីផ្សេងទៀតដែល ជាបញ្ហាសំខាន់បំផុតរបស់ធនាគារ។

ហេតុនេះហើយ បានជាមានគោលការណ៍ នៃការប្រាក់សមាស (ការប្រាក់ផ្គួប) ត្រូវយកមកអនុវត្តន៍។

ឧទាហរណ៍ ២.១.១. យើងវិនិយោគ 1000\$ នៅអត្រា 10% ក្នុងមួយឆ្នាំផ្គួបរយៈពេល 5 ឆ្នាំ។ បន្ទាប់ពីមួយឆ្នាំយើងរកបាន ការប្រាក់ 10% នៃ 1000\$ នោះ គឺ 100\$។ យើង បញ្ចូលការប្រាក់ជាមួយប្រាក់ដើមគណនីថ្មី $1000\$+100\$ = 1100\$$ ។ នៅចុងឆ្នាំទីពីរគណនីថ្មីនេះរកបានការប្រាក់ 10% នោះ គឺ 110% ឱ្យគណនីថ្មីមានប្រាក់ $1100+110 = 1210\$$។ បើយើងបន្តធ្វើបែបនេះរហូត ដល់ 5ឆ្នាំ នោះនៅបញ្ចប់ឆ្នាំទី 5 យើងមាន 1610.51\$ (តារាងខាងក្រោម)

តារាងការប្រាក់សមាស(ផ្គួប)

ឆ្នាំ	ប្រាក់ដើម(ឆ្នាំដំបូង)	ការប្រាក់(ឆ្នាំបញ្ចប់)	ប្រាក់សរុប
1	\$1000.00	\$100.00	\$1100.00
2	\$1100.00	\$110.00	\$1210.00
3	\$1210.00	\$121.00	\$1331.00
4	\$1331.00	\$133.10	\$1464.10
5	\$1464.10	\$146.4	\$1610.51

ដូចគ្នានឹងការប្រាក់សាមញ្ញដែរយើងយក n ចំនួនកំឡុងពេលនៃការប្រាក់សរុបដែលយើងសន្មតថាមាន m ក្នុងមួយឆ្នាំ។ សាច់ប្រាក់ ដែលយើងទទួលបាន នៅបញ្ចប់ពេល ការប្រាក់ ត្រូវបានហៅថា តម្លៃអនាគត (Future value or Accumulated Principal) និង អត្រាការប្រាក់ក្នុងមួយឆ្នាំហៅថា អត្រាការប្រាក់សាមញ្ញ។

២.២. និយមន័យ

និយមន័យ ២.២.១. ការប្រាក់សមាស ឬការប្រាក់ផ្គួប គឺជាការប្រាក់ដែលបង្កើតការប្រាក់បន្ថែមទៀត។

២.៣. រូបមន្តក្នុងការប្រាក់សមាស

២.៣.១. និមិត្តសញ្ញា

ដើម្បីងាយស្រួលក្នុងការកំណត់ចំណាំ គេកំណត់និមិត្តសញ្ញាដូចខាងក្រោម

- P_0 : ជាប្រាក់ដើមវិនិយោគ
- n : ជារយៈពេលនៃការវិនិយោគ
- i អត្រាការប្រាក់សមាស
- P_n : ជាតម្លៃអនាគតនៃប្រាក់ដើម P_0 នៅឆ្នាំទី n

២.៣.២. រូបមន្តទូទៅ

យើងសង្កេតមើលពេល $n = 1, 2, \cdots$ គេបានទម្រង់ដូចខាងក្រោម៖

- $n = 1$ គេបាននៅចុងឆ្នាំទី១ ទទួលបានការប្រាក់ចំនួន iP_0
  នោះ $P_1 = P_0 + iP_0 = P_0(1 + i)$
- $n = 2$ គេបាននៅចុងឆ្នាំទី២ ទទួលបានការប្រាក់ចំនួន iP_1
  នោះ $P_2 = P_1 + iP_1 = P_1(1 + i) = P_0(1 + i)^2$
- $n = 2$ គេបាននៅចុងឆ្នាំទី៣ ទទួលបានការប្រាក់ចំនួន iP_2
  នោះ $P_3 = P_2 + iP_2 = P_2(1 + i) = P_0(1 + i)^3$
- $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
- គេបាននៅចុងឆ្នាំទីn ទទួលបានការប្រាក់ចំនួន iP_{n-1}
  នោះ $P_n = P_0(1 + i)^n$

យើងបានរូបមន្ត
តម្លៃអនាគតនៃប្រាក់ដើម P_0 នៅឆ្នាំទី n គឺ

$$\boxed{P_n = P_0(1 + i)^n} \tag{២.១}$$

តាមរូបមន្ត (២.១) នេះ យើងអាចទាញបានរូបមន្តសម្រាប់គណនា

១. **ប្រាក់ដើម** P_0 គឺ

$$\boxed{P_0 = \frac{P_n}{(1 + i)^n} = P_n(1 + i)^{-n}} \tag{២.២}$$

២. **ការប្រាក់ផ្គួបសរុប** គឺ

$$\boxed{P_n - P_0 = P_0(1 + i)^n - P_0 = P_0[(1 + i)^n - 1]} \tag{២.៣}$$

៣. **រយៈពេលនៃការវិនិយោគ** គឺ

$$P_n = P_0(1+i)^n$$
$$(1+i)^n = \frac{P_n}{P_0}$$
$$\ln(1+i)^n = \ln(P_n) - \ln(P_0)$$
$$n = \frac{\ln P_n - \ln P_0}{\ln(1+i)}$$

ដូចនេះ

$$\boxed{n = \frac{\ln P_n - \ln P_0}{\ln(1+i)}} \qquad (២.៤)$$

ឧទាហរណ៍ ២.៣.១. បើយើងវិនិយោគ $1000 នៅ 6% ផ្គួបប្រចាំឆ្នាំ សម្រាប់រយៈពេល 2 ឆ្នាំ។ រកប្រាក់សរុប និងការប្រាក់។

ដំណោះស្រាយ

រកប្រាក់សរុប និងការប្រាក់

តាមរូបមន្ត(២.១)

$$\begin{aligned} P_n &= P_0(1+i)^n \\ &= 1000(1+0.06)^2 \\ &= 1123.60\$ \end{aligned}$$

តាមរូបមន្ត(២.៣)

$$\begin{aligned} P_n - P_0 &= 1123.60 - 1000 \\ &= 123.60\$ \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រាក់សរុបគឺ } P_2 = 1123.60\$n \text{ ហើយការប្រាក់គឺ } 123.60\$}$

តាមរយៈរូបមន្ត (២.១)

- សមីការអាច ប្រើបានចំពោះ$n \geqslant 0$ ។ តើមានអ្វីកើតឡើងចំពោះ $n < 0$? បើ យើងបង្កើន P_0 លើកំឡុងពេល n ពីមុន នៅ អត្រា ការប្រាក់ផ្គួប iក្នុងកំឡុងពេលផ្គួប។ តើប្រាក់ប៉ុន្មានដែលយើងហៅថាP_{-n} ជាមួយ n កំឡុង ពេលកន្លងទៅ?
  តាមរូបមន្ត(២.១) យើងត្រូវមាន
  $$P_n = P_0(1+i)^n$$
  ជំនួស n ដោយ $-n$ គេបាន
  $$P_{-n} = \frac{P_0}{(1+i)^n} = P_0(1+i)^{-n}$$
  ដូចនេះ
  $$\boxed{P_{-n} = \frac{P_0}{(1+i)^n} = P_0(1+i)^{-n}} \qquad (២.៥)$$

- នៅពេលយើងគណនាតម្លៃនៃលុយនៅពេលអនាគត គឺ យើងគណនាតម្លៃអនាគតពីតម្លៃបច្ចុប្បន្ន យើង និយាយពីផ្គួប។ នៅពេលយើងគណនាតម្លៃនៃចំនួនប្រាក់នៅមុនពេលនោះ គឺយើងគណនាតម្លៃបច្ចុប្បន្នពី តម្លៃអនាគត យើងនិយាយពីការបញ្ចុះតម្លៃ។

តាមឧទាហរណ៍ (២.៣.១) បើគេសួរសំណួរ "តើតម្លៃប៉ុន្មាន ដែលគេត្រូវវិនិយោគចំពោះអត្រាការប្រាក់ផ្គួប 6% ក្នុងមួយឆ្នាំ បើយើងដាក់ 1123.60$ ក្នុងគណនី ២ឆ្នាំ?

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត (២.៥)

$$\begin{aligned} P_{-n} &= P_0(1+i){-n} \\ &= 1123.60(1+.06)^{-2} \\ &= 1000\$ \end{aligned}$$

នេះ គឺជាការបញ្ចុះតម្លៃ (Discounting) ដែលយើង បញ្ជាក់ថា $\$1000$ជាតម្លៃបញ្ចុះ (Discounted Value)នៃ$\$1123.60$ ដែល$(1+0.06)^{-2}$ គឺជាកត្តាបញ្ចុះថ្លៃ (Discount Factor)។

២.៤. អត្រាការប្រាក់ផ្គួបក្នុងរង្វាស់ឯកត្តាពេល

ចំពោះការប្រាក់ផ្គួបគឺមានសារៈសំខាន់ខ្លាំងណាស់ នៅក្នុងការកំណត់រង្វាស់ឯកត្តាពេល ។ ឧទាហរណ៍ គេអាចគិតផ្គួបជាថ្ងៃ ជាខែ ឬជាឆ្នាំ ហើយរង្វាស់ផ្គួបជាឆ្នាំត្រូវ បានគេប្រើប្រាស់ច្រើនជាងគេក្នុងការអនុវត្តន៍នានា។

ឧទាហរណ៍ ២.៤.១. អ្នកវិនិយោគម្នាក់បានវិនិយោគ $\$1000$ ទៅលើ CDលើអត្រាការប្រាក់ផ្គួប 10% ក្នុងមួយឆ្នាំសម្រាប់រយៈពេល 5ឆ្នាំ។ តើចំនួនប្រាក់ប៉ុន្មានដែលគាត់ ៌មាន នៅបំណាច់5ឆ្នាំ? បើអត្រាការប្រាក់ផ្គួបខាងលើគឺសម្រាប់

១. គិតប្រចាំឆមាស

២. គិតប្រចាំត្រីមាស

៣. គិតប្រចាំខែ

៤. គិតប្រចាំថ្ងៃ

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃអនាគតនៃអត្រាការប្រាក់ផ្គួប

១. ក្នុងករណីគិតប្រចាំឆមាស

ដោយ អត្រាការប្រាក់ផ្គួបប្រចំឆ្នាំសម្រាប់គិតប្រចាំឆមាសគឺ 10%

គេបាន អត្រាការប្រាក់ផ្គួបប្រចាំឆមាសគឺ

$$\frac{i}{2} = \frac{10\%}{2}$$

នោះ ការទូទាត់សាច់ប្រាក់មានចំនួន $2 \times 5 = 10$ ដង

គេបាន តម្លៃអនាគតនៃ P_0 កោយ ៥ឆ្នាំគឺ

$$\begin{aligned} P_5 &= P_0(1+\frac{i}{2})^{2\times 5} \\ &= 1000(1+\frac{10}{2})^{10} \\ &= 1628.89\$ \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រាក់សរុបគឺ } 1628.89\$}$

២. ក្នុងករណីគិតប្រចាំត្រីមាស

ដោយ អត្រាការប្រាក់ផ្គួបប្រចំឆ្នាំសម្រាប់គិតប្រចាំត្រីមាសគឺ 10%

គេបាន អត្រាការប្រាក់ផ្គួបប្រចាំត្រីមាសគឺ

$$\frac{i}{4} = \frac{10\%}{4}$$

នោះ ការទូទាត់សាច់ប្រាក់មានចំនួន $4 \times 5 = 20$ ដង

គេបាន តម្លៃអនាគតនៃ P_0 កោយ ៥ឆ្នាំគឺ

$$\begin{aligned} P_5 &= P_0(1+\frac{i}{4})^{4\times5} \\ &= 1000(1+\frac{10}{4})^{20} \\ &= 1638.62\$ \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រាក់សរុបគឺ } 1638.62\$}$

៣. ក្នុងករណីគិតប្រចាំខែ

ដោយ អត្រាការប្រាក់ផ្គួបប្រចំឆ្នាំសម្រាប់គិតប្រចាំខែគឺ 10%

គេបាន អត្រាការប្រាក់ផ្គួបប្រចាំខែគឺ

$$\frac{i}{2} = \frac{10\%}{12}$$

នោះ ការទូទាត់សាច់ប្រាក់មានចំនួន $12 \times 5 = 60$ ដង

គេបាន តម្លៃអនាគតនៃ P_0 កោយ ៥ឆ្នាំគឺ

$$\begin{aligned} P_5 &= P_0(1+\frac{i}{12})^{12\times5} \\ &= 1000(1+\frac{10}{12})^{60} \\ &= 1645.31\$ \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រាក់សរុបគឺ } 1645.31\$}$

៤. ក្នុងករណីគិតប្រចាំថ្ងៃ

ដោយ អត្រាការប្រាក់ផ្គួបប្រចំឆ្នាំសម្រាប់គិតប្រចាំថ្ងៃគឺ 10%

គេបាន អត្រាការប្រាក់ផ្គួបប្រចាំថ្ងៃគឺ

$$\frac{i}{2} = \frac{10\%}{365}$$

នោះ ការទូទាត់សាច់ប្រាក់មានចំនួន 365×5 ដង

គេបាន តម្លៃអនាគតនៃ P_0 កោយ ៥ឆ្នាំគឺ

$$\begin{aligned} P_5 &= P_0(1 + \frac{i}{365})^{365\times 5} \\ &= 1000(1 + \frac{10}{365})^{365\times 5} \\ &= 1648.61\$ \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រាក់សរុបគឺ } 1648.61\$}$

តាមរយៈឧទាហរណ៍ (២.៤.១) យើង សង្កេតឃើញថា អត្រាការប្រាក់ មានការប្រែប្រួលទៅតាមចំនួននៃការទូទាត់ប្រចាំឆ្នាំ គេកំណត់យក

i^m ជាអត្រាការប្រាក់ផ្គួបប្រចាំ tឆ្នាំ សម្រាប់គិតប្រចាំ m គ្រា ក្នុង t ឆ្នាំ

នោះយើងបាន

$$\boxed{\text{អត្រាការប្រាក់នៃគ្រានីមួយៗគឺ } i = \frac{i^m}{m}} \tag{២.៦}$$

ហើយចំនួនគ្រាសរុបនៃការទូទាត់គឺ

$$\boxed{n \times m} \tag{២.៧}$$

ជាញឹកញាប់ក្នុងការអនុវត្តន៍ គឺ $t = 1$

មានន័យថា i^m ជាអត្រាការប្រាក់ផ្គួបប្រចាំឆ្នាំសម្រាប់គិតប្រចាំ m គ្រា ក្នុង 1 ឆ្នាំ

យើងអាចទាញបានរូបមន្ត

- បើ P_0 គឺផ្គួប m ដងក្នុងមួយឆ្នាំនៅអត្រាការប្រាក់ដើមនៃ i^m
  នោះថ្លៃអនាគតនៃ P_0 បន្ទាប់ពី n ឆ្នាំគឺ

$$\boxed{P_n = P_0\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{nm}} \tag{២.៨}$$

- បើយើងធ្វើមូលធនកម្មបន្តជាប់ៗគ្នា (Compound continuously) មានន័យថា
  $m \to \infty$ ខណៈ អត្រាការប្រាក់ដើម(Nominal Rate) $i^{(m)}$ នោះតម្លៃអនាគតនៃ P_0

ត្រូវបានកំណត់ដោយ P_∞ បន្ទាប់ពីn ឆ្នាំនៅអត្រាការប្រាក់ដើមនៃ$i^{(\infty)}$ គឺ

$$\begin{aligned} P_\infty &= P_0 \lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{nm} \\ &= P_0 e^{ni^{(\infty)}} \end{aligned}$$

ដូចនេះ

$$\boxed{P_\infty = P_0 e^{ni^{(\infty)}}} \tag{២.៩}$$

ដូចនេះឧទាហរណ៍(២.៤.១) បើ$1000 ត្រូវបានធ្វើ មូលធនកម្មបន្ត (Compound Continuously)10% សម្រាប់ រយៈពេល 5ឆ្នាំ នោះយើងមាន

$$P_\infty = 1000 \times e^{0.1\times 5} = \$1648.72$$

បើយើងរៀបតារាងបញ្ជីលទ្ធផលមុន ទាំងនេះជាមួយនឹង $i^{(m)} = 0.1$ នោះយើងមាន

m	តម្លៃអនាគត
1	$1610.51
2	$1628.89
4	$1638.62
12	$1645.31
365	$1648.61
∞	$1648.72

ពីតារាង វាបង្ហាញថា បើ អត្រាការប្រាក់ដើម គឺ ដូចគ្នាគ្រប់ m នោះ ការប្រាក់ផ្គួបច្រើនជាងតម្លៃ អនាគត។ យើងឃើញថាត្រូវ ដូច បានបង្ហាញ។

ឧទាហរណ៍ ២.៤.២. ឧបមាអត្រាការប្រាក់នៅ 91ថ្ងៃ វិនិយោគ 10000គឺ

១. សាមញ្ញ 6%ក្នុងមួយឆ្នាំ

២. Nominal 6% ក្នុងមួយឆ្នាំមូលធនកម្មជាប់រាល់ថ្ងៃ

៣. Nominal 6% ក្នុងមួយឆ្នាំមូលធនកម្មជាប់

រកប្រាក់ដែលទទួលបាននៅ 91ថ្ងៃក្រោយ។ ចំពោះគ្រប់ករណីទាំងបី។ សន្មតថាមួយឆ្នាំមាន365 ថ្ងៃ។

ដំណោះស្រាយ

១. ប្រាក់គឺ $\$10000\left(1+0.06\times\frac{91}{365}\right)=\$10\,149.59$

២. គឺ $\$10000\left(1+\frac{0.06}{365}\right)^{91}=\$10\,150.70$

៣. យើង ដឹងថា P_0 កើនទៅ $P_0e^{0.06}$ ក្នុងមួយឆ្នាំ ក្រោយ។ វា នឹងកើន ដល់ $P_0e^{0.06\times\frac{91}{365}}$ នៅ 91 ថ្ងៃក្រោយ។ វាមានតម្លៃ $\$10\,150.71$។

សង្ខេបរូបមន្ត

- P_n ជាតម្លៃអនាគត
- $A(n)$ ជាតម្លៃអនាគតនៃមូលធនកម្មបន្ត
- P_0 ជាប្រាក់ដើមវិនិយោគ
- i ជាអត្រាការប្រាក់ប្រសិទ្ធិភាពប្រចាំឆ្នាំ
- n ជាចំនួនឆ្នាំវិនិយោគ
- δ ជាអត្រាការប្រាក់បង្ខំប្រចាំឆ្នាំ

ការប្រាក់សាមញ្ញ	ការប្រាក់សមាស	មូលធនកម្មបន្ត
$P_n=P_0(1+in)$	$P_n=P_0(1+i)^n$	$A(n)=P_0e^{n\delta}$
$P_0=\frac{P_n}{(1+in)}$	$P_0=\frac{P_n}{(1+i)^n}=P_n(1+i)^{-n}$	$P_0=\frac{A(n)}{e^{n\delta}}$
	$i=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m-1$	$i=e^{\delta}-1$

លំហាត់អនុវត្តន៍

លំហាត់ ២.១. ចូររកចំនួនប្រាក់ដែលទទួលបានលើការដាក់សន្សំ $100 ក្នុងរយៈពេល 5 ឆ្នាំតាមអត្រាឆ្នាំ 16% ដោយធ្វើមូលធនកម្ម ៖

ក. ប្រចាំឆ្នាំ

ខ. ប្រចាំឆមាស

គ. ប្រចាំត្រីមាស

ឃ. ប្រចាំសប្តាហ៍

ង. បន្ត (ជាប់)។

លំហាត់ ២.២. ចូររកការប្រាក់ (សមាស) ដែលទទួលបានពីការដាក់សន្សំ ៖

ក. $500 ក្នុងរយៈពេល 2 ឆ្នាំ 2 ខែ តាមអត្រាឆ្នាំ $11\frac{1}{4}\%$ ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំខែ

ខ. $1000 ក្នុងរយៈពេល 6 ឆ្នាំ តាមអត្រាឆ្នាំ 9% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំឆមាស

គ. $850 ក្នុងរយៈពេល 3 ឆ្នាំ តាមអត្រាឆ្នាំ 8,2% ធ្វើមូលធនកម្មបន្ត។

លំហាត់ ២.៣. ប្តី-ប្រពន្ធពីរនាក់ បានដាក់ប្រាក់ចំនួន $1 000 ក្នុងគណនីសន្សំ នៅថ្ងៃកំនើតកូនប្រុសរបស់ខ្លួន ។ ប្រសិនបើធនាគារផ្តល់ការប្រាក់តាមអត្រាឆ្នាំ 6% ដោយធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំខែតើប្រាក់នៅក្នុង គណនីមានចំនួន ប៉ុន្មាន នៅពេលដែលកូនប្រុសនោះមានអាយុ 18 ឆ្នាំ ?

លំហាត់ ២.៤. ក្នុងឆ្នាំ 1 492 ម្ចាស់ក្សត្រីយានី *Isabela* បានឧបត្ថម្ភប្រាក់ចំនួន $10 000 សំរាប់ការធ្វើដំណើរផ្សង ព្រេងរបស់លោក *Christopher Columbus* ។ បើសិនជា ម្ចាស់ក្សត្រីដាក់មូលនិធិទៅក្នុង គណនី សន្សំធនាគារវិញ ដែលផ្តល់ការប្រាក់តាមអត្រាឆ្នាំ 3% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំឆ្នាំ តើគណនីត្រូវមាន ប្រាក់ចំនួនប៉ុន្មានក្នុងឆ្នាំ 1992 ។

លំហាត់ ២.៥. ចូរគណនាប្រាក់ដើម ដែលបានដាក់សន្សំពីដំបូងបើ ៖

ក. ក្នុងរយៈពេល ២៥ ឆ្នាំក្រោយគេទទួលបានប្រាក់ $100 000 , អត្រាការប្រាក់ $J_{12} = 12\%$?

ខ. ក្នុងកំឡុងពេល ១០ឆ្នាំក្រោយគេទទួលបាន $2 500, អត្រាការប្រាក់ $J_2 = 9.6\%$?

គ. ក្នុងកំឡុងពេល ៣ឆ្នាំក្រោយគេទទួលបាន $800, អត្រាការប្រាក់ $J_{365} = 12\%$?

ឃ. ក្នុងកំឡុងពេល ១៥ខែក្រោយគេទទួលបាន $5 000 , អត្រាការប្រាក់ ?

លំហាត់ ២.៦. នៅថ្ងៃបុណ្យគំរប់ខួបទី 20 របស់ខ្លួនស្ត្រីម្នាក់ បានទទួលប្រាក់ $1 000 ដែលជាលទ្ធផលនៃការដាក់ សន្សំ របស់ឪពុកម្តាយ នៅថ្ងៃ ដែលស្ត្រីនោះ បានប្រសូត្រ ។ តើទឹកប្រាក់ប៉ុន្មាន ដែល ឪពុកម្តាយបាន ដាក់សន្សំ បើផ្តល់ការប្រាក់តាមអត្រាប្រចាំឆ្នាំ ?

ក. 6% ដោយធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំឆ្នាំ ?

ខ. 12% ដោយធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំត្រីមាស ?

លំហាត់ ២.៧. បុរសម្នាក់ត្រូវសងបំណុលគេ \$2 000 នៅថ្ងៃទី 31 ខែ ធ្នូ ឆ្នាំ 2 000។ តើ គាត់ជំពាក់ គេ ប៉ុន្មាន នៅថ្ងៃទី ៣០ ខែមិថុនា ឆ្នាំ១៩៩៦ បើការប្រាក់ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំត្រីមាស ហើយអត្រាឆ្នាំ$13\frac{1}{4}$%។

លំហាត់ ២.៨. ប្រសិនបើ លោកទិញ វីឡាមួយដោយបង់ \$180 000 ដល់ដៃតែម្តង ឬ មួយបង់ \$100 000 នៅពេល ឥឡូវនេះ \$50 000 ក្នុងរយៈពេល 1 ឆ្នាំទៀត និង \$50 000 ក្នុង រយៈពេល 2 ឆ្នាំទៀត ។ តើ ប្រភេទមួយ ដែលប្រសើរ សំរាប់អ្នកប្រសិនបើការប្រាក់ ត្រូវគិតតាមអត្រាឆ្នាំ ៖

ក. 16% ដោយធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំខែ

ខ. 12% ដោយធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំខែ

លំហាត់ ២.៩. ចូលរកចំណូលសរុប *(Maturity value)* ដែលបានពីការចងការប្រាក់ដើម 100 000៛ តាមអត្រាឆ្នាំ 11.5% ដោយធ្វើមូលធនកម្មការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ រយៈពេល

ក. 7 ឆ្នាំ

ខ. 11 ឆ្នាំ 5 ខែ (គណនាតាមវិធីទាំង 2)

លំហាត់ ២.១០. ចូររកអត្រាជាក់លាក់ប្រចាំឆ្នាំដែល សមមូលទៅនឹងអត្រា ៖

ក. 16% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំត្រីមាស ?

ខ. 18% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំខែ ?

គ. 9.25% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំថ្ងៃ ?

ឃ. 12% ធ្វើមូលធនកម្មបន្ត ?

លំហាត់ ២.១១. ចូរគណនាអត្រាប្រចាំឆ្នាំ J_m ដែលសមមូលទៅនឹងអត្រាជាក់លាក់ ប្រចាំឆ្នាំ J បើ ៖

ក. $J = 6\%$, $m = 2?$

ខ. $J = 9\%$, $m = 4?$

គ. $J = 10\%$, $m = 12?$

ឃ. $J = 17\%$, $m = 365?$

ង. $J = 8\%$, $m = 52?$

លំហាត់ ២.១២. តើអត្រាចំណូលពីគំរោងវិនិយោគមួយ ណាដែល ល្អជាងគេ ហើយមួយណាដែលអាក្រក់ ជាងគេ

ក. $J_{12} = 15\%$, $J_2 = 15.5\%$ និង $J_{365} = 14.9\%$?

ខ. $J_{12} = 16\%$, $J_2 = 16.5\%$ និង $J_{365} = 15.9\%$?

លំហាត់ ២.១៣. ធនាគារមួយបានផ្តល់ការប្រាក់ 12% ក្នុង 1ឆ្នាំ សំរាប់គណនីសន្សំរបស់ខ្លួន ។ នៅរៀងរាល់៣ឆ្នាំ ម្តងធនាគារបានផ្តល់រង្វាន់ចំនួន 2% នៃ សមតុល្យ គណនី ។
ចូររក អត្រាការប្រាក់ ជាក់លាក់ ដែល អ្នកវិនិយោគ ទទួលបានបើទឹកប្រាក់ ដែលបានដាក់សន្សំ នោះត្រូវដកវិញនៅ

ក. 2 ឆ្នាំក្រោយ ?

ខ. 3 ឆ្នាំក្រោយ ?

គ. 4 ឆ្នាំក្រោយ ?

លំហាត់ ២.១៤. ចូរគណនាទឹកប្រាក់ដែលទទួលបានពី ការសន្សំប្រាក់ដើមចំនួន $1 500 សំរាប់រយៈពេល 16 ខែ តាម អត្រា $J_4 = 18\%$ ដោយប្រើ ៖

ក. ទ្រឹស្តីការប្រាក់សមាស ?

ខ. ការអនុវត្តន៍ជាក់ស្តែងរបស់ធនាគារិក ?

លំហាត់ ២.១៥. នាថ្ងៃទី ៧ ខែ កក្កដា ឆ្នាំ ១៩៩៩ អ្នកស្រីកល្យាណបានខ្ចីប្រាក់គេ ចំនួន $1 200 ដោយគិតការប្រាក់ តាមអត្រា 12% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំខែ ។ តើគាត់ត្រូវសងគេវិញនាថ្ងៃទី ១៨ ខែ កញ្ញា ឆ្នាំ ២០០២ នូវ ទឹកប្រាក់ចំនួន ប៉ុន្មាន ?

លំហាត់ ២.១៦. ចូររកអត្រាការប្រាក់ *(Nominal rate)* ធ្វើ មូលធនកម្មប្រចាំ ត្រីមាស ដែល ទទួល បានពីការដាក់ សន្សំប្រាក់ដើម $2 000 ហើយក្នុងកំឡុងពេល ៣ឆ្នាំ ៩ខែ ក្រោយ វានឹងផ្តល់ប្រាក់ចំនួន $3 000 ។

លំហាត់ ២.១៧. ចូរគណនាអត្រា J_{12} ដែលប្រាក់ដើមចំនួន $100 និង ផ្តល់ការប្រាក់ចំនួន $50 ក្នុងអំឡុងពេល ៤ឆ្នាំ ៧ខែក្រោយ ?

លំហាត់ ២.១៨. .

ក. តើអត្រាការប្រាក់ ជាក់លាក់ ប្រចាំឆ្នាំ ត្រូវស្មើ ប៉ុន្មាន ដើម្បី ទទួល ប្រាក់កើនឡើងបីដង នៃប្រាក់ ដើមក្នុង អំឡុងពេល ១៥ឆ្នាំក្រោយ ?

ខ. តើអត្រាការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំធ្វើ មូលធនកម្មប្រចាំ ត្រីមាស ត្រូវស្មើប៉ុន្មាន ដើម្បីអោយប្រាក់ដែលដាក់វិនិយោគ កើនចំនួន 50% ក្នុងអំឡុងពេល ៤ឆ្នាំក្រោយ ?

គ. តើអត្រាការប្រាក់ ដែល ត្រូវធ្វើមូលធនកម្មបន្ត ចំនួនប៉ុន្មាន ? ដើម្បី អោយប្រាក់ចំនួន $1 000 ផលិតបាន ការប្រាក់$250 ក្នុងរយៈពេល ៣០ខែ ?

លំហាត់ ២.១៩. នៅថ្ងៃទី ១ ខែ មករា ទឹកប្រាក់ចំនួន \$500 000 ត្រូវបានដាក់ក្នុងមូលនិធិ X និង \$50 000 ដាក់ ក្នុងមូលនិធិY។ គួរកត់ សំគាល់ថា ក្នុងមូលនិធិ ទាំងពីរនេះ គ្មាន ការដាក់ប្រាក់ ពីមុនមកទេ ។ មូល និធិ X ទទួល ការប្រាក់សមាសតាមអត្រា i ក្នុងមួយឆ្នាំ ។ មូលនិធិ Y ទទួល ការប្រាក់សាមញ្ញ តាមអត្រា $(i+0.01)$ ក្នុងមួយឆ្នាំ ។ នៅថ្ងៃទី ០១ ខែ មេសា គេបានដាក់ប្រាក់បន្ថែមចំនួន \$50 000 ទៅក្នុងមូលនិធិ Y រី

លំហាត់ ២.២០. ចូររកប្រាក់ដើមដែលគេចងការតាមអត្រាត្រីមាស 2% រយៈពេល 3 ឆ្នាំ គេបានប្រាក់សរុប 10 000\$។ គេប្រាប់ថា ការចងការនេះធ្វើមូលធនកម្មការប្រាក់ រៀងរាល់ត្រីមាស។

លំហាត់ ២.២១. ប្រាក់ដើម 2 ដែលមានចំនួនសរុប 10 000\$ ត្រូវបានគេយកទៅចងការ ៖

- ប្រាក់ដើមទី 1 តាមការប្រាក់សាមញ្ញ អត្រាការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ 10%
- ប្រាក់ដើមទី 2 តាមការប្រាក់សមាស អត្រាការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ 8%

ក្នុងរយៈពេល 9 ឆ្នាំការចងការទាំង 2 បានផ្តល់ចំណូលសរុប *Maturity value* ស្មើគ្នា។

- ចូររកប្រាក់ដើមនិមួយៗ
- សុំធ្វើការផ្ទៀងផ្ទាត់ដោយរក *Maturity value* និមួយៗ

លំហាត់ ២.២២. ដើម្បីបានចំនួនប្រាក់ 100 000\$ នៅដំណាច់ខែ វិច្ឆិកា 1998

- គេបានដាក់ប្រាក់ផ្ញើនៅធនាគារពីដំណាក់ខែ វិច្ឆកា 1993 ចំនួនប្រាក់ 30 000\$។
- គេបានដាក់ប្រាក់ផ្ញើម្តងទៀតនៅដំណាច់ខែកុម្ភៈ 1995 ចំនួនប្រាក់ 30 000\$។
- គេបានដកវិញម្តងនៅដំណាច់ខែឧសភា 1996 ចំនួន 20 000\$។
- គេបានដាក់ផ្ញើម្តងទៀតនៅដំណាច់ខែ សីហា 1997 ចំនួនប្រាក់ X

ប្រតិបត្តិការ ទាំងអស់ នេះ មាន អត្រាការប្រាក់ ប្រចាំត្រីមាស 2.5% និង ដោយ ធ្វើមូលធនកម្មការ ប្រាក់ រៀងរាល់ត្រីមាស។ ចូររកចំនួនប្រាក់ X ដែលបានដាក់ផ្ញើលើកចុងក្រោយ។

លំហាត់ ២.២៣. ប្រាក់ដើម $2(X$ និង $Y)$ ដែលចំនួនសរុប 80 000\$ ត្រូវបានគេយកទៅចងការនៅថ្ងៃជា មួយគ្នា រយៈពេល 6 ឆ្នាំ ។ ប្រាក់ដើម X ចងការតាមអត្រាប្រចាំឆ្នាំ 8% ធ្វើមូលធនកម្មការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ។ ប្រាក់ដើម Y ចងការ តាមអត្រា ប្រចាំឆមាស 3.75% ធ្វើ មូលធនកម្មការប្រាក់ប្រចាំ ឆមាស។ នៅពេលបញ្ចប់ 6 ឆ្នាំ គេបានកំរៃ ការប្រាក់សរុប 46 007.32\$។ ចូររកប្រាក់ដើម X និង Y ។

ជំពូកទី ៣

ទ្រឹស្តីអត្រាការប្រាក់

៣.១. និយមន័យអត្រាការប្រាក់

ឧទាហរណ៍ ៣.១.១. ការវិនិយោគដែលមានរយៈពេលខ្លីមួយ ដែលអ្នកឱ្យខ្ចី បានវិនិយោគចំនួន 1000$ ក្នុងរយៈពេល៦ខែ ហើយទទួលបានមកវិញនូវទឹកប្រាក់ចំនួន 1035$។ នេះមានន័យថា ចំនួនទឹកប្រាក់ 1000$ ត្រូវបានចាត់ទុកថាជាការបង់សងនូវ ថ្លៃដើមវិនិយោគ ហើយនិង 35$ ការបង់ជាប្រាក់ការ ពោលគឺជារង្វាន់មួយសម្រាប់ការ ខ្ចីលុយយកទៅប្រើប្រាស់រយៈពេល៦ខែ។

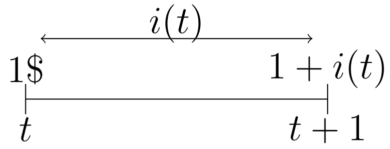
និយមន័យ ៣.១.១. អត្រាការប្រាក់ គឺ ជាតម្លៃឬថ្លៃឈ្នួលដែលបានបង់ ដោយអ្នកខ្ចីប្រាក់ទៅ ឱ្យអ្នកឱ្យខ្ចី សម្រាប់ការប្រើប្រាស់ប្រាក់សម្រាប់រយៈពេលមួយ ដែលបែងចែកទៅតាមចំនួនទឹកប្រាក់ដែលបានខ្ចី។ ដូច្នេះអ្នកខ្ចីត្រូវការការប្រើប្រាស់និងបង់ប្រាក់សម្រាប់ឯកសិទ្ធិនេះ។

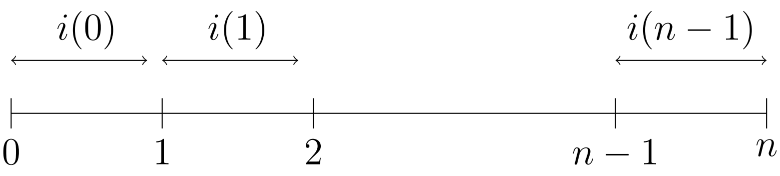
ចំណាំ

- តាមទស្សនៈរបស់អ្នកផ្តល់ប្រាក់កម្រៃតម្លៃឬថ្លៃសេវាដែលបានគិតថ្លៃគឺសំណង របស់គាត់សម្រាប់ការពន្យារពេលការប្រើប្រាស់សម្រាប់រយៈពេលនៃប្រាក់កម្ចី។
- រង្វាស់ឯកតាពេល អាចផ្តួបគិតជា ខែ(ដូចជា ការផ្តួបរយៈពេល៦ខែ ឬមួឆមាស) ឬជាឆ្នាំ។
- តាង $i(m) = i$ ជាអត្រាការប្រាក់សម្រាប់កំឡុងពេល ពីគ្រា t ទៅគ្រា $t + 1$ ឬ ហៅ ថា **អត្រាការប្រាក់ប្រសិទ្ធិភាព**។

$\star$ ពិចារណាការវិនិយោគមួយសម្រាប់រយៈពេល១ឯកតាពេល ដែលចាប់ផ្តើម នៅខណៈពេល t ហើយសន្មតថា $1 + i(t)$ គឺជាចំនួនដែលត្រូវសងវិញនៅ ខណៈពេល $t + 1$ ។ ឧបមាថា អត្រាការប្រាក់ គឺ មិនអាស្រ័យទៅលើ ចំនួនបរិមាណ ដែលត្រូវវិនិយោគ នោះចំនួនប្រាក់ដែលទទួលបានវិញនៅគ្រា $t + 1$ ចេញពីការវិនិយោគ ចំនួន C នៅគ្រាទី t គឺ $C[1 + i(t)]$ ។

យើងអាចគូសជាដ្យាក្រាម៖





យើងបាន $C \to c\left[1+i\left(0\right)\right] \to C\left[1+i\left(0\right)\right]\left[1+i\left(1\right)\right]$
ឧបមាថា $i\left(0\right) = i\left(1\right) = \ \ldots = i\left(n\right) = i$
នោះប្រាក់សរុបនៅខណៈពេល $t = n$ គឺ ៖

$$\boxed{C_n = C(1+i)^n} \qquad (៣.១)$$

ឧទាហរណ៍ ៣.១.២. អត្រាការប្រាក់ប្រសិទ្ធិភាពនៅធនាគារមួយ ចំពោះគណនីបញ្ញើមួយ គឺ $4\frac{1}{2}\%$ ក្នុងមួយឆ្នាំ។ ចូររកចំនួនប្រាក់បំណាច់សរុបក្នុងគណនីដែលកើនឡើងពីការ វិនិយោគ $5000\$$ ក្រោយពេល៧ឆ្នាំ។

ដំណោះស្រាយ

រកចំនួនប្រាក់បំណាច់សរុប
តាមរូបមន្ត(៣.១) ប្រាក់សរុបគឺ $C_n = C(1+i)^n$
ដោយ $C = 5000\$,\ \ i = 4\frac{1}{2}$ ភ្នួបប្រចាំឆ្នាំ, $n = 7$ ឆ្នាំ
យើងបាន៖

$$\begin{aligned} C_7 &= 5000 \times (1.045)\,7 \\ &= 6804.31\$ \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំនួនប្រាក់បំណាច់សរុបគឺ } 6804.31\$}$

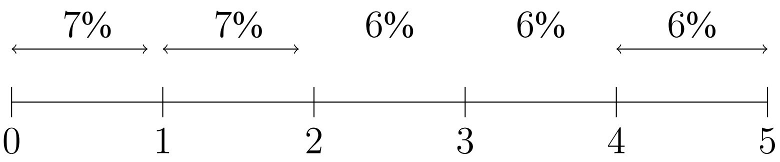
ឧទាហរណ៍ ៣.១.៣. អត្រាការប្រាក់ប្រសិទ្ធិភាពក្នុងមួយឆ្នាំ ចំពោះគណនីដាក់លាក់មួយ គឺ 7% ប៉ុន្តែក្នុងរយៈពេល ២ឆ្នាំបន្តទៅមុខទៀតវានឹង ថយចុះសល់ 6%។ ចូររកចំនួនប្រាក់ ដែលកើន

ឡើងបាននៅក្នុងគណនីនេះ ក្នុងរយៈពេល៥ឆ្នាំនៃការវិនិយោគ 400$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកចំនួនប្រាក់ ដែលកើនឡើងបាននៅក្នុងគណនីនេះ

តាមសម្មតិកម្ម



យើងបាន

$$\begin{aligned} C_5 &= 4000\times(1.07)^2\times(1.06)^3 \\ &= 5454.38\$ \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ ចំនួនប្រាក់សរុបកើនឡើងគឺ 5454.38$

៣.២. អត្រាការប្រាក់ធម្មតា

និយមន័យ ៣.២.១. អត្រាការប្រាក់ធម្មតាគឺជាអត្រាអត្រាការប្រាក់ដែលត្រូវបានរាយការណ៍ នៅលើឯកសារប្រាក់កម្ចីនិងគណនីវិនិយោគ ដែលមិនត្រូវបានកែតម្រូវសម្រាប់អតិផរណា។ បន្ទាប់ពីការកែតម្រូវបែបនេះវាត្រូវបានហៅថាអត្រាការប្រាក់ ពិតប្រាកដ។

សម្គាល់៖

- យើងកំណត់ i_m ជា **អត្រាការប្រាក់ធម្មតា** ក្នុងមួយឯកតាពេលសម្រាប់កំឡុងពេល m ដែលចាប់ផ្តើមនៅគ្រា t នោះ **អត្រាការប្រាក់ប្រសិទ្ធិភាព** សម្រាប់កំឡុងពេល ដែលមាន ទំហំ m គឺ

$$\boxed{i = m\times i_m} \qquad \text{(៣.២)}$$

- តាមរូបមន្ត(៣.១) យើងបាន ចំនួនប្រាក់សរុបដែលទទួលបាននៅរយៈពេល $t+m$ គឺ

$$\boxed{C[1+m\times i_m]} \qquad \text{(៣.៣)}$$

ឧទាហរណ៍ ៣.២.១. អត្រាការប្រាក់ដើមក្នុង១ឆ្នាំ ដែល បានដកស្រង់ចេញពី អត្ថបទ ហិរញ្ញវត្ថុ ចំពោះប្រាក់បញ្ញើជាតិក្នុងស្រុក នៅថ្ងៃជាក់លាក់មួយមានដូចខាងក្រោម៖

កំឡុងពេលនៃគ្រា .	អត្រាការប្រាក់ធម្មតា(%) .
១ថ្ងៃ	$11\frac{3}{4}$
២ថ្ងៃ	$11\frac{5}{8}$
៧ថ្ងៃ	$11\frac{1}{2}$
១ខែ	$11\frac{3}{8}$
៣ខែ	$11\frac{1}{4}$

(ការវិនិយោគចំពោះកំឡុងពេលដែលមានទំហំ ១ថ្ងៃ គឺត្រូវបានសំដៅទៅលើ ប្រាក់ពេញ មួយថ្ងៃ)។ ចូររកប្រាក់កើនឡើងពីការវិនិយោគប្រាក់ចំនួននៅពេលនេះ សម្រាប់ រយៈពេល ៖

១. មួយសប្តាហ៍

២. មួយខែ

ដំណោះស្រាយ

តាមសម្មតិកម្ម

- $i = 11.75\%$ ប្រចាំឆ្នាំសម្រាប់គិតជាប្រចាំថ្ងៃស្មើ $\dfrac{11.75\%}{365}$ ផ្ទួបប្រចាំថ្ងៃ
- $i = 11.625\%$ ប្រចាំឆ្នាំសម្រាប់គិតជាប្រចាំថ្ងៃស្មើ $\dfrac{11.625\%}{365}$ ផ្ទួបប្រចាំថ្ងៃ
- $i = 11.50\%$ ប្រចាំឆ្នាំសម្រាប់គិតជាប្រចាំសប្តាហ៍
  $i = \dfrac{11.50\%}{52}$ ផ្ទួបប្រចាំសប្តាហ៍
  $i = \dfrac{11.50\%}{365} \times 7$ ផ្ទួបប្រចាំ៧ថ្ងៃម្តង
- $i = 11.375\%$ ប្រចាំឆ្នាំសម្រាប់គិតជាប្រចាំខែស្មើ $i = \dfrac{11.375\%}{12}$ ផ្ទួបប្រចាំខែ
- $i = 11.25\%$ ប្រចាំឆ្នាំសម្រាប់គិតជាប្រចាំត្រីមាស
  $i = \dfrac{11.25\%}{4}$ ផ្ទួបប្រចាំត្រីមាស

រកប្រាក់សរុបកើនដែលនឹងទទួលបានពេល $C = 1000\$$

តាមរូបមន្ត(៣.៣) យើងបានប្រាក់សរុបកើនគឺ $1000(1 + m \times i_m)$

១. មួយសប្តាហ៍
ដោយ $i = \dfrac{11.50\%}{52}$
យើងបាន ប្រាក់សរុបកើនគឺ

$$\begin{aligned} C_1 &= 1000 \times \left(1 + \frac{11.50\%}{52}\right) \\ &= 1002.21\$ \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រាក់សរុបកើនមួយសប្តាហ៍គឺ } 1002.21\$}$

២. មួយខែ
ដោយ $i = \dfrac{11.375\%}{12}$
យើងបាន ប្រាក់សរុបកើនគឺ

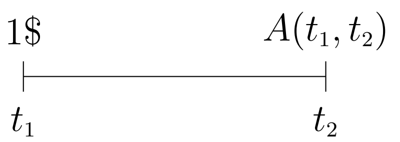
$$\begin{aligned} C_1 &= 1000 \times \left(1 + \frac{11.375\%}{12}\right) \\ &= 1009.48\$ \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រាក់សរុបកើនមួយខែគឺ}1009.48\$}$

៣.៣. កត្តានៃកំណើនការប្រាក់

តាង t ជារយៈពេលគិតក្នុងឯកតាសមស្រប(គិតជាឆ្នាំ)

- ចំពោះ $t_1 \leqslant t_2$ កំនត់បាន $A(t_1, t_2)$ ជាចំនួនប្រាក់ដែលកើនឡើងនៅត្រង់គ្រា t_2 នៃការវិនិយោគ មានតម្លៃមួយនៅត្រង់គ្រា t_1 ចំពោះកំឡុងពេលមួយ $t_2 - t_1$ (ដែល $A(t_1, t_2)$ ហៅថាកត្តាកំណើនការប្រាក់)



- យើងបាន **កំណើនការប្រាក់**

$$\boxed{A\left(t, t+m\right) = 1 + mi_m} \tag{៣.៤}$$

- នាំឱ្យ **អត្រាការប្រាក់** $Nominal$ គឺ

$$\boxed{i_m = \frac{A(t, t+m) - 1}{m}} \tag{៣.៥}$$

- **ប្រាក់សរុបនៃប្រាក់ដើម** C គឺ

$$\boxed{C \times A(t_1, t_2)} \tag{៣.៦}$$

- **ក្រោមគោលការណ៍ស្ថេរភាព** នោះ កំណើនការប្រាក់គឺ

$$\boxed{A(t_0, t_n) = A(t_0, t_1) \times A(t_1, t_2) \times \ldots \times A(t_{n-1}, t_n)} \tag{៣.៧}$$

ឧទាហរណ៍ ៣.៣.១. តាង t រយៈពេលគិតជាឆ្នាំ ហើយសន្មតថា ចំពោះ $t_1 \leqslant t_2$ នោះ

$$A(t_1, t_2) = \exp[0.05 \times (t_2 - t_1)]$$

១. ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា វាគោរពតាម គោលការណ៍ស្ថេរភាព

២. ចូររកចំនួនដែលកើនឡើង ក្នុងរយៈពេល១៥ឆ្នាំក្រោយនៃការវិនិយោគចំនួន 600$ នៅគ្រាណាមួយ។

ដំណោះស្រាយ

១. ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា វាគោរពតាម គោលការណ៍ស្ថេរភាព

យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $A(t_0, t_2) = A(t_0, t_1) \times A(t_1, t_2)$

ចំពោះ $t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$

គេបាន

$$\begin{aligned} A(t_0, t_1) \times A(t_1, t_2) &= e^{0.05 \times (t_1 - t_2)} \times e^{0.05 \times (t_0 - t_1)} \\ &= e^{0.05 \times (t_2 - t_1)} \\ &= A(t_0 - t_2) \end{aligned}$$

២. រកប្រាក់សរុបដែលនឹងទទួលបាន

បើប្រាក់ដើម $C = 600\$$ រយៈពេល $n = 15$ ឆ្នាំ

$$\Rightarrow C_{15} = C \times A(1,16) = C \times A(0,15) = 600 \times e^{0.05\times(15-0)} = 1270.20\$$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រាក់សរុបដែលនឹងទទួលបានគឺ } 1270.20}$

៣.៤. ការប្រាក់បង្គំ

និយមន័យ ៣.៤.១. នៅពេល m ដែលកាន់តែតូចនោះ i_m ខិតទៅរកតម្លៃលីមីតមួយអាស្រ័យ t ។ យើង សន្មតថា $\forall t, \exists\delta(t)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\lim\limits_{m\to 0^+} i_m = \delta(t)$ ដែល $\delta(t)$ **ការប្រាក់បង្គំ ក្នុងមួយឯកតាពេល** ។

តាមរូបមន្ត(៣.៥) យើងបាន

$$i_m = \frac{A(t,t+m)-1}{m} = \frac{A(t,t+m)-A(t,t)}{m}$$

នោះ

$$\delta(t) = \lim_{m\to 0}\frac{A(t,t+m)-A(t,t)}{m} = \left.\frac{\delta_A(t,x)}{\delta_x}\right|_{x=t}$$

ទ្រឹស្តីបទ ៣.៤.១. .

$$A(t_1,t_2) = e^{\int\limits_{t_1}^{t_2}\delta(t)dt} \qquad \text{ដែល} \qquad \delta(t) = \left.\frac{\partial A(t_1,x)}{\partial x}\right|_{x=t}$$

សម្គាល់

- ករណី $\delta(t) = \delta$ ថេរនោះ

$$\boxed{A(t_1,t_2) = e^{\int\limits_{t_1}^{t_2}\delta(t)dt} = e^{\int\limits_{t_1}^{t_2}\delta dt} = \delta t\Big|_{t_1}^{t_2} = e^{\delta(t_2-t_1)}} \qquad (៣.៨)$$

- ករណី $\delta(t) = a + bt$ នោះ

$$\boxed{A(t_1,t_2) = e^{\int\limits_{t_1}^{t_2}(a+bt)dt} = e^{\left[at+\frac{1}{2}bt^2\right]\Big|_{t_1}^{t_2}} = e^{a(t_2-t_1)+\frac{b}{2}\left(t_2^2-t_1^2\right)}} \qquad (៣.៩)$$

ឧទាហរណ៍ ៣.៤.១. ការប្រាក់បង្គួមួយឯកតាពេល $\delta(t)$ គិតជាឆ្នាំស្មើនឹង 0.12 ចំពោះ $\forall t$ ។ ចូររកអត្រាការប្រាក់ដើមប្រចាំឆ្នាំចំពោះប្រាក់បញ្ញើដែលមានរយៈពេល

១. ៧ថ្ងៃ

២. ១ខែ

៣. ៦ខែ

ដំណោះស្រាយ

រកអត្រាការប្រាក់ដើមប្រចាំឆ្នាំ

តាមរូបមន្ត

$$i_m = \frac{A(t, t+m) - 1}{m}$$

១. ៧ថ្ងៃ

$m = 7$ ថ្ងៃស្មើ $\frac{7}{365}$ ឆ្នាំ ដោយ

$$A(t, t+m) = e^{\int_t^{t+m} \delta(x)dx} = e^{\int_t^{t+m} 0.12dx} = e^{0.12m}$$

យើងបាន $i_m = \dfrac{e^{0.12m} - 1}{m} = \dfrac{e^{0.12 \times \frac{7}{365}} - 1}{\frac{7}{365}} = 12.01\%$ ប្រចាំឆ្នាំគិតប្រចាំសប្តាហ៍

ដូចនេះ: $\boxed{\text{អត្រាការប្រាក់គឺ } i_m = 12.01\% \text{ ប្រចាំឆ្នាំគិតប្រចាំសប្តាហ៍}}$

២. ១ខែ

$m = 1$ ខែស្មើ $\frac{1}{12}$ឆ្នាំ

យើងបាន $i_m = \dfrac{e^{0.12m} - 1}{m} = \dfrac{e^{0.12 \times \frac{1}{12}} - 1}{\frac{1}{12}} = 12.06\%$ ប្រចាំឆ្នាំគិតជាប្រចាំខែ

ដូចនេះ: $\boxed{\text{អត្រាការប្រាក់គឺ } i_m = 12.06\% \text{ ប្រចាំឆ្នាំគិតប្រចាំខែ}}$

៣. ៦ខែ

$m = 6$ ខែស្មើ $\frac{6}{12}$ ឆ្នាំ យើងបាន

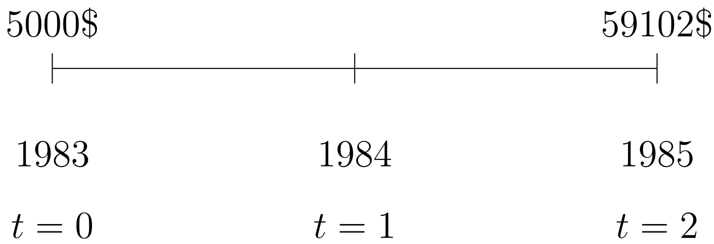
$i_m = \dfrac{e^{0.12m} - 1}{m} = \dfrac{e^{0.12 \times \frac{6}{12}} - 1}{\frac{6}{12}} = 12.37\%$ ប្រចាំឆ្នាំសម្រាប់គិតជាប្រចាំឆមាស

ដូចនេះ: $\boxed{\text{អត្រាការប្រាក់គឺ } i_m = 12.37\% \text{ ប្រចាំឆ្នាំគិតប្រចាំឆមាស}}$

ឧទាហរណ៍ ៣.៤.២. ធនាគារមួយ បានផ្តល់ឥទានការប្រាក់ចំពោះ ប្រាក់បញ្ញើដោយប្រើ កត្តាកំណើនការប្រាក់ដែលផ្អែកលើអថេរការប្រាក់បង្គំ(ការប្រាក់បង្គំប្រែប្រួល)។ នៅថ្ងៃទី១ ខែកក្កដា ឆ្នាំ ១៩៨៣ អតិថិជនម្នាក់បាន ផ្ញើរប្រាក់ចំនួន 5000$ នៅក្នុងធនាគារ។ នៅថ្ងៃទី១ ខែកក្កដា ឆ្នាំ ១៩៨៥ ប្រាក់សន្សំរបស់គាត់ បានកើនឡើងដល់ទៅ 59102$។ ដោយសន្មត ថា ការប្រាក់បង្គំក្នុងមួយឆ្នាំគឺជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែនៃ រយៈពេលសម្រាប់ កំឡុងពេល ចាប់ពីថ្ងៃទី១ ខែកក្កដា ឆ្នាំ ១៩៨៣ ដល់ថ្ងៃទី១ ខែកក្កដា ឆ្នាំ១៩៨៥។ ចូររកការប្រាក់បង្គំ ប្រចាំឆ្នាំ នៅថ្ងៃទី១ ខែកក្កដា ឆ្នាំ ១៩៨៤។

ដំណោះស្រាយ

រកការប្រាក់បង្គំប្រចាំឆ្នាំនៅថ្ងៃទី១ ខែកក្កដា ឆ្នាំ១៩៨៤



ដោយ $\delta(t)=a+bt$ រក $\delta(1)$

យើងបាន

$$59102=50000\times A(0,2)=50000\times e^{\int_0^2 \delta(t)dt}$$

$$59102=50000\times e^{\int_0^2 (a+bt)dt}=50000\times e^{\left[at+\frac{1}{2}bt^2\right]\Big|_0^2}$$

$$59102=50000\times e^{2a+2b}=50000\times e^{2(a+b)}$$

នាំឱ្យ

$$e^{2(a+b)}=\frac{59102}{50000}=1.18204$$

$$\Rightarrow \qquad a+b=0.0836$$

នោះ $\delta(1)=8.36\%$បង្គំប្រចាំឆ្នាំ

ដូចនេះ $\boxed{\text{ការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំគឺ } \delta(1)=8.36\% \text{ បង្គំប្រចាំឆ្នាំ}}$

ឧទាហរណ៍ ៣.៤.៣. គេឱ្យ

$$\delta(t) = \begin{cases} 0.06 \; if \; t < 5 \\ 0.05 \; if \; 5 \leqslant t < 10 \\ 0.03 \; if \; t > 10 \end{cases}$$

រក $A(0,t)$ ដែល $A(0,t) = e^{\int_0^t \delta(s)ds}$

- ពេល $t < 5$ ឆ្នាំ យើងបាន

$$A(0,t) = e^{\int_0^t 0.06ds} = e^{0.06t}$$

- ពេល $5 \leqslant t < 10$ យើងបាន

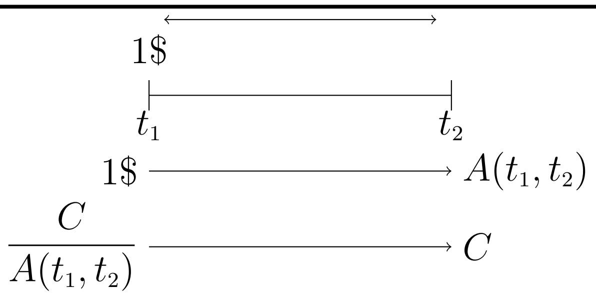
$$\begin{aligned} A(0,t) = e^{\int_0^t \delta(s)ds} &= e^{\int_0^5 \delta(s)ds + \int_5^{10} \delta(s)ds} \\ &= e^{\int_0^5 0.06ds + \int_5^t 0.05ds} \\ &= e^{0.06t|_0^5 + 0.05|_5^t} \\ &= e^{0.05t+0.05} \end{aligned}$$

- ពេល $t \geqslant 10$ យើងបាន

$$\begin{aligned} A(0,t) = e^{\int_0^t \delta(s)ds} &= e^{\int_0^5 \delta(s)ds + \int_5^{10} \delta(s)ds + \int_{10}^t 0.05ds} \\ &= e^{\int_0^5 0.06ds + \int_5^{10} 0.05ds + \int_{10}^t 0.03ds} \\ &= e^{0.06\times 5 + 0.05(10-5) + 0.03(t-10)} \\ &= e^{0.03t+0.25} \end{aligned}$$

៣.៥. តម្លៃបច្ចុប្បន្ន

តាង $t_1 \leqslant t_2$ នោះតាមរូបមន្តនៃកំណើនប្រាក់ $A(t_1,t_2)$ គេបាន ការវិនិយោគចំនួន $\dfrac{C}{A(t_1,t_2)} = C \times e^{-\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)dt}$ នៅត្រង់ t_1 និងបង្កើតបានប្រាក់ត្រឡប់មកវិញ នៅគ្រា t_2 មើលតាមគំនូសតាង៖



គេកំនត់បាន៖

- ប្រាក់សរុបនៃប្រាក់ដើម C តាងដោយ

$$\boxed{F.V = C \times e^{\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)dt}} \qquad (៣.១០)$$

- ប្រាក់ដើមនៃប្រាក់សរុប C តាងដោយ

$$\boxed{P.V = C \times e^{-\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)dt}} \qquad (៣.១១)$$

ហៅថា **តម្លៃអប្បបរមាបច្ចុប្បន្ន(ឬតម្លៃបច្ចុប្បន្ន)**

សម្គាល់

- $V(t)$: ប្រាក់ដើមនៃប្រាក់សរុប 1$
- $F(t) = A(0,t)$: ប្រាក់សរុបនៃប្រាក់ដើម 1$
- ករណីពិសេស $\delta(t) = \delta$ ចំពោះ $\forall t$ នោះ $P.V = e^{-\delta}$

ឧទាហរណ៍ ៣.៥.១. គេឱ្យរយៈពេលគិតជាឆ្នាំ ដែលគិតចេញពីពេលបច្ចុប្បន្នទៅ ហើយ សន្មត ថា $\delta(t) = 0.06(0.9)^t$ ចំពោះគ្រប់ t។ ចូរគណនា $V(t)$ និងរកតម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃ ការវិនិយោគ 100$ ដែលដល់ កំនត់មានរយៈពេល៣.៤ឆ្នាំ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $V(t)$ និងរកតម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃ ការវិនិយោគ 100$ ដែលដល់ កំនត់មាន រយៈពេល ៣.៤ឆ្នាំ
យើងមាន $\delta(t) = 0.06(0.9)^t$
ដោយ $V(t) = e^{-\int_0^t \delta(s)ds}$
យើងបាន

$$\begin{aligned} V(t) &= e^{-\int\limits_0^t 0.06\times 0.9^t ds} \\ &= e^{-0.06\times\frac{0.9^5}{\ln(0.9)}\Big|_0^t} \\ &= e^{-\frac{0.06}{\ln(0.9)}\left(0.9^t-1\right)} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{V(t) = e^{-\frac{0.06}{\ln(0.9)}\left(0.9^t-1\right)}}$

រកប្រាក់ដើមនៃប្រាក់សរុប រយៈពេល៣.៥ឆ្នាំ

យើងមាន $V(3.5)$ ជាប្រាក់ដើមនៃប្រាក់សរុប 1$ ក្នុងរយៈពេល៣.៥ឆ្នាំ

$\Longrightarrow 100\times V(3.5)$ ជាប្រាក់ដើមនៃប្រាក់សរុប 100$ ក្នុងរយៈពេល៣.៥ឆ្នាំ

យើងបាន

$$\begin{aligned} 100\times V(3.5) &= 100\times e^{-\frac{0.06}{\ln(0.9)}\left(0.9^{3.4}-1\right)} \\ &= 83.89\$ \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{V(3.5) = 83.89\$}$

ឧទាហរណ៍ ៣.៥.២. សន្មតថា $\delta(t) = \begin{cases} 0.09\ if\ 0\leqslant t<5 \\ 0.08\ if\ 5\leqslant t<10 \\ 0.07\ if\ t\geqslant 10 \end{cases}$

ចូររកកន្សោមនៃ $V(t)$ ចំពោះ $t\geqslant 0$

ដំណោះស្រាយ

រកកន្សោមនៃ $V(t)$ ចំពោះ $t\geqslant 0$

តាមរូបមន្ត $V(t) = e^{-\int\limits_0^t \delta(s)ds}$

ពេល $0\leqslant t<5$ យើងបាន

$$V(t) = e^{-\int\limits_0^t 0.09ds} = e^{-0.09t}$$

ពេល $5\leqslant t<10$ យើងបាន

$$V(t) = e^{-\int\limits_0^5 0.09ds-\int\limits_5^t 0.08ds} = e^{-0.08t-0.05}$$

ពេល $t\geqslant 10$ យើងបាន

$$V(t) = e^{-\int\limits_0^5 0.09ds - \int\limits_5^{10} 0.08ds - \int\limits_{10}^{t} 0.07ds} = e^{-0.09-0.08\times 5-0.09t+0.07\times 10}$$
$$= e^{-0.07t-0.15}$$

៣.៦. រូបមន្ត Stoodley ចំពោះការប្រាក់បង្គំ

រូបមន្ត $\boldsymbol{Stoodley}$

ការប្រាក់បង្គំចំពោះរូបមន្ត $\boldsymbol{Stoodley}$ អាចសរសេរជា៖

$$\boxed{\boldsymbol{\delta(t) = p + \frac{s}{1+re^{st}}}} \tag{៣.១២}$$

ដែល p, s, r ជាតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ

យើងបាន

$$\begin{aligned}
V(t) &= e^{-\int\limits_0^t \left[p+\frac{s}{1+re^{sx}}\right]dx} \\
&= e^{-\int\limits_0^t \left[p+\frac{s+rse^{sx}-rse^{sx}}{r+re^{sx}}\right]dx} \\
&= e^{-\int\limits_0^t \left[p+\frac{s}{1+re^{sx}}\right]dx} \\
&= e^{-\left[(p+s)t-\ln\left(\frac{1+re^{st}}{1+r}\right)\right]} \\
&= e^{-(p+s)t}\times\frac{1}{1+r}+\frac{1}{1+r}re^{-pt}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ

$$\boxed{V(t) = e^{-(p+s)t}\times\frac{1}{1+r}+\frac{1}{1+r}re^{-pt}}$$

ឧទាហរណ៍ ៣.៦.១. ការប្រាក់បង្គំក្នុងមួយឆ្នាំ $\delta(t)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់តាមរូបមន្ត $Stoodley$ ដែលមាន៖ $p = 0.076961$, $r = 0.5$ និង $s = 0.121890$ ពោលគឺ៖

$$\delta(t) = 0.076961 + \frac{0.121890}{1+0.5\times e^{0.121890t}}$$

ចូររករូបមន្ត $V(t)$ និងប្រើរូបមន្តដើម្បីរកតម្លៃបច្ចុប្បន្នដែលបានកំនត់រយៈពេល១០ឆ្នាំ។

ដំណោះស្រាយ

រករូបមន្ត $V(t)$

តាមរូបមន្ត

$$V\left(t\right)=e^{-(p+s)t}\times\frac{1}{1+r}+\frac{1}{1+r}re^{-pt}$$

យើងបាន

$$\begin{aligned}V\left(t\right)&=\frac{2}{3}e^{[-(0.076961+0.121890)t]+\frac{1}{3}e^{(-0.076961t)}}\\&=\frac{2}{3}(1.22)^{-t}+\frac{1}{3}(1.08)^{-t}\end{aligned}$$

នាំឱ្យ $V\left(10\right)=\frac{2}{3}(1.22)^{-10}+\frac{1}{3}(1.08)^{-10}=0.24566$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តម្លៃបច្ចុប្បន្នដែលកំនត់ក្នុងរយៈពេល១០ឆ្នាំគឺ } V\left(10\right)=0.24566}$

៣.៧. តម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃលំហូរសាច់ប្រាក់

៣.៧.១. សញ្ញាណ និងនិយមន័យ

តម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃលំហូរសាច់ប្រាក់មាន២ករណី ៖

- **លំហូរសាច់ប្រាក់មានលក្ខណៈដាច់ៗ**

រូបមន្តតម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃការវិនិយោគដែលកំនត់នៅគ្រា $t \geqslant 0$គឺ $CV(t)$ នោះយើងបាន **តម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃប្រាក់** $C_{t_1},C_{t_2},\,\ldots,C_{t_n}$ ដែលកំនត់នៅត្រង់គ្រា $t_1,t_2,\,\ldots,t_n$ គឺ៖

$$\boxed{PV=C_{t_1}\times V\left(t_1\right)+\,\ldots\,+C_{t_n}\times V\left(t_n\right)}\qquad(៣.១៣)$$

តាង $p(t)$ ល្បឿនលំហូរសាច់ប្រាក់នៅខណៈពេល t (ជាទូទៅគិតជាប្រចាំឆ្នាំ)

ដែល C_{t_1} ចែកចេញជា២៖

១. $C_{t_1}\times V\left(t_1\right)$ សំណងការប្រាក់

២. $C_{t_1}-C_{t_1}\times V\left(t_1\right)$ សំណងការប្រាក់

- **លំហូរសាច់ប្រាក់មានលក្ខណៈជាប់ៗ** (**ខ្សែលំហូរប្រាក់**)
  សញ្ញាណនៃលំហូរសាច់ប្រាក់មានលក្ខណៈជាប់ គឺពិតជាមានសារៈសំខាន់ណាស់ ទោះបីជាមានខ្លឹមសារល្អតាមបែបទ្រឹស្តីក៏ដោយ។ ឧទាហរណ៍ ប្រាក់ចូលនិវត្តន៍ ដែលត្រូវបានបង់ប្រចាំសប្តាហ៍អាចចាត់ទុកជាការបង់ប្រាក់មានលក្ខណៈជាប់។

យើងបាន

$$\boxed{PV = \int_0^T \varphi(t) V(t)\, dt} \qquad (៣.១៤)$$

ឧទាហរណ៍ ៣.៧.១. ឧបមាថា រយៈពេលគិតជាឆ្នាំហើយឧបមាថា

$$\delta(t) = \begin{cases} 0.04 & , if\ t < 10 \\ 0.03 & , if\ t \geqslant 10 \end{cases}$$

ចូររក $V(t)$ ចំពោះគ្រប់ ហើយរកតម្លៃបច្ចុប្បន្ន PV នៃខ្សែលំហូរសាច់ប្រាក់ជាប់ នៅត្រង់អត្រាបង់ប្រាក់ស្មើ១ក្នុងមួយឆ្នាំដោយចាប់ផ្តើមដោយគ្រា០។

ដំណោះស្រាយ

រក $V(t)$

ដោយ $V(t) = e^{-\int_0^t \delta(s) ds}$

ពេល $0 < t < 10$ នាំឱ្យ $V(t) = e^{-\int_0^t 0.04 ds} = e^{-0.04|_0^t} = e^{-0.04t}$

ពេល $t \geqslant 10$ នាំឱ្យ $V(t) = e^{-\int_0^{10} 0.04 ds - \int_{10}^t 0.03 ds} = e^{-0.03t - 0.10}$

រកតម្លៃបច្ចុប្បន្ន PV នៃខ្សែលំហូរសាច់ប្រាក់ជាប់

គេបាន

$$\begin{aligned} PV &= \int_0^{15} 1 \times V(t)\, dt \\ &= \int_0^{10} e^{-0.04t} dt + \int_{10}^{15} e^{-0.03t-0.1} dt \\ &= 11.35\$ \end{aligned}$$

៣.៨. ការវាស់តម្លៃលំហូរសាច់ប្រាក់

ពិនិត្យមើលគ្រា t_1 និង t_2 ដែលមិនចាំបាច់ធំជាង t_1 ។ តម្លៃនៃចំនួនប្រាក់ C នៅត្រង់ t_1 ដែលដល់កំនត់នៅគ្រា t_2 កំនត់ដូចខាងក្រោម៖

១. បើ $t_1 \leqslant t_2$ នោះនឹងជាកំណើនពីការប្រាក់នៃ C ពីគ្រា t_2 ដល់គ្រា t_1
យើងបាន៖

$$\boxed{PV = Ce^{-\int_{t_1}^{t_2}\delta(s)ds}} \tag{៣.១៥}$$

២. បើ $t_1 > t_2$ នោះនឹងជាតំហាយនៃនៅគ្រាt_1 ដែលកំនត់នៅត្រង់ t_2
យើងបាន៖

$$\boxed{FV = Ce^{\int_{t_2}^{t_1}\delta(s)ds}} \tag{៣.១៦}$$

នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} PV &= Ce^{-\int_{t_1}^{t_2}\delta(s)ds} \\ &= Ce^{-\int_{t_1}^{0}\delta(s)ds-\int_{0}^{t_2}\delta(s)ds} \\ &= C \times \frac{e^{-\int_{0}^{t_2}\delta(s)ds}}{e^{-\int_{0}^{t_1}\delta(s)ds}} \\ &= C \times \frac{V\left(t_2\right)}{V\left(t_1\right)} \end{aligned}$$

ដូចនេះ

$$\boxed{PV \times V\left(t_1\right) = C \times V\left(t_2\right) \quad \text{ហៅថា } \textbf{សមីការលំនឹង}} \tag{៣.១៧}$$

ឧទាហរណ៍ ៣.៨.១. អាជីវករម្នាក់ ត្រូវបានគេជំពាក់ប្រាក់ចំនួន 100\$ នៅថ្ងៃទី១ មករា ឆ្នាំ១៩៨៦ និងប្រាក់ចំនួន 2500\$ នៅថ្ងៃទី១ មករា ឆ្នាំ១៩៨៧ ហើយនិងប្រាក់ចំនួន 3000\$ នៅថ្ងៃទី១ កក្កដា ឆ្នាំ១៩៨៧។ ដោយសន្មតថា ការប្រាក់បង្ហូរថេរ 0.06 គឺក្នុងមួយឆ្នាំ ចូររកតម្លៃនៃការបង់ប្រាក់

១. ថ្ងៃទី១ មករា ឆ្នាំ១៩៨៤

២. ថ្ងៃទី១ មីនា ឆ្នាំ១៩៨៥

ដំណោះស្រាយ

$1/1/84$ $\quad$ $1/1/86$ $\quad$ $1/7/85$

$t=0$ $\quad$ $t=1$ $\quad$ $t=3.5$

រកតម្លៃនៃការបង់ប្រាក់

១. ថ្ងៃទី១ មករា ឆ្នាំ១៩៨៤

$$\begin{aligned} PV &= 1000\times e^{-\int_0^1 0.06dt} + 2500\times e^{-\int_0^3 0.06dt} + 3000\times e^{-\int_0^{3.5} 0.06dt}\\ &= 1000\times e^{-0.12} + 2500\times e^{-0.18} + 3000\times e^{-0.21}\\ &= 5406.85\$ \end{aligned}$$

២. ថ្ងៃទី១ មីនា ឆ្នាំ១៩៨៥

$5406.85\$$ $\quad$ $1/3/85$

$1/1/84$ $\quad$ $t_1=\dfrac{7}{6}$

តាមសមីការលំនឹង $PV\times V(t_0) = PV\times V(t_1)$

យើងបាន $5406.85\times V(0) = YV\left(\dfrac{7}{6}\right)$

$\Rightarrow \qquad y = 5798.89\$$

៣.៩. ប្រាក់ចំណូលជាការប្រាក់

សន្មត់ថា$t>t_0$ ហើយឧបមាថា អ្នកវិនិយោគម្នាក់នោះ ចង់ដាក់ផ្ញើរប្រាក់ចំនួនC នៅគ្រា t_0 ហើយគាត់នឹង ដកវិញនៅគ្រាt ។សន្មត់ថា$n>1$ ហើយឧបមាថាអ្នកវិនិយោគ នោះចង់ទទួលបានវិញជា ការប្រាក់ពី ប្រាក់បញ្ញើ របស់គាត់ ចំនួនn គ្រា $t_0+h, t_0+2h,\cdots,t_0+nh$ ដែល$h=\dfrac{(t-t_0)}{n}$ ។ ការប្រាក់ដែលគេបង់ឱ្យគាត់ $t_0+(j+1)h$ សម្រាប់កំឡុងពេលពី t_0+jhទៅដល់ $t_0+(j+1)h$នឹងមានតម្លៃ $Chi_k(t_0+jh)$

រូបមន្ត **ប្រាក់ចំណូលពីការប្រាក់សរុប** សម្រាប់ចន្លោះពេលពី t_0 និងt គឺ$C\sum_{j=0}^{n-1} h.i_h\left(t_0+j.h\right)$

ដោយ ការប្រាក់សរុបដែលទទួលបាន នៅចន្លោះពេលពី t_0 ទៅt រួមទៅរកតម្លៃ

$$I\left(t\right)=C\int_{t_0}^{t} S\left(s\right)ds$$

- បើអ្នកវិនិយោគនោះ ដកប្រាក់មូលធនវិញនៅគ្រា T នោះតាមរូបមន្ត $CPV(t)$ និង $\int_0^T P.V(t)p(t)dt$ យើងបាន តម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃប្រាក់ចំណូល របស់គាត់ គឺ $C\int_0^T s\left(t\right).P.V(t)dt$ ដោយ

$$\begin{aligned}\int_0^T S\left(t\right).P.V(t)dt &= \int_0^T S\left(t\right)\exp\left[-\int_0^T S\left(s\right)ds\right]dt\\ &= \left[-\exp\left(-\int_0^t S\left(s\right)ds\right)\right]_0^T\\ &= 1-P.V(T)\end{aligned}$$

នោះយើងទទួលបាន $C=C\int_0^T S\left(t\right).P.V\left(t\right)dt+C.P.V(T)$

នៅក្នុងករណីដែល $T=\infty$ (ដែលករណីនេះ អ្នកវិនិយោគមិនដែលដកប្រាក់មូលធនវិញ)

នោះយើងបាន $C=C\int_0^\infty S\left(t\right).P.V(t)dt$ (តម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃប្រាក់ចំណូលជាការប្រាក់)

លំហាត់អនុវត្តន៍

លំហាត់ ៣.១. ការប្រាក់ផ្គួប ដែលមានអត្រាការប្រាក់ប្រសិទ្ធភាព i ក្នុងមួយឆ្នាំ ហើយកំនើនការប្រាក់នៃប្រាក់វិនិយោគ ក្នុងរយៈពេល t ឆ្នាំគឺ $(1+i)^t$ ចំណែកឯ ចំពោះការប្រាក់សាមញ្ញវិញ នៅត្រឹមអត្រាដូចគ្នា នោះ កំនើនជាការប្រាក់នៃការវិនិយោគ1 ក្នុងរយៈពេល t ឆ្នាំគឺ $(1+ti)$ ។ ចូរបង្ហាញថា ចំពោះតំលៃ i វិជ្ជមាន

១. តំលៃកំនើនតាមអត្រាការប្រាក់សាមញ្ញ មានតំលៃលើស តំលៃកំនើន $i>0$ អត្រាការប្រាក់ផ្គួប បើ $0<t<1$។

២. មានលក្ខណៈផ្ទុយមកវិញ ចំពោះ $t>1$
។ណែនាំ ៖ តាង $f(i)=(1+i)^t-(1+ti)$ ហើយកត់សម្គាល់ថា $f(0)=0$ និងព្រមទាំងពិចារណាទៅលើសញ្ញានៃ $f'(i)$ ចំពោះ $i>0$ ។

លំហាត់ ៣.២. ពេញមួយឆ្នាំការប្រាក់អនុភាពគឺ ជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ មួយធៀបនិងរយៈពេល ដែលថយចុះពី 0.15 នៅដើមឆ្នាំរហូតដល់ 0.12 នៅចុងឆ្នាំ។ ចូររកតម្លៃ នៅដើមឆ្នាំនៃអត្រាការប្រាក់ធម្មតា ក្នុងមួយឆ្នាំចំពោះប្រតិបត្តិការខាងក្រោម

១. រយៈពេលបីខែ

២. មួយខែ

៣. មួយថ្ងៃ ។

ចូររកតម្លៃដែលស្របគ្នា ចំពោះរយៈពេលពាក់កណ្តាលឆ្នាំ។ (ចូរកត់សម្គាល់អំពីរបៀបដែលតម្លៃទាំងនេះ ឈានទៅរក ការប្រាក់អនុភាព នៅរយៈពេលសមស្រប) ។

លំហាត់ ៣.៣. ធនាគារមួយ បានផ្តល់ឥណទានការប្រាក់ ចំពោះប្រាក់បញ្ញើ ដែលប្រើតាមការប្រាក់អានុភាពប្រែប្រួល។ នៅដើមឆ្នាំមួយ អ្នកវិនិយោគ បានផ្ញើប្រាក់ចំនួន 20000$ ទៅក្នុងធនាគារ។ ចំនួនប្រាក់ដែលកើនបាននៅក្នុងគណនីរបស់អ្នកវិនិយោគ គឺ 20596.21$ ពាក់កណ្តាលឆ្នាំ និងកើនបានចំនួន 21183.70$ នៅចុងឆ្នាំ។

ដោយរយះពេលគិតជាឆ្នាំដោយចាប់ផ្តើមនៅដើមឆ្នាំ ហើយសន្មត់ថាពេញមួយឆ្នាំការប្រាក់អានុភាពប្រចាំឆ្នាំគឺជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ។ ទាញឲ្យចេញជា កន្សោមមួយនៃការប្រាក់ អានុភាពប្រចាំឆ្នាំ នៅក្នុងរយៈពេល t ដែល $(0\leqslant t\leqslant 1)$ ហើយរកចំនួន ប្រាក់ដែលកើនបាន ក្នុងរយៈពេលបីត្រីមាស។

លំហាត់ ៣.៤. អ្នកខ្ចីម្នាក់ មានកាតព្វកិច្ចមួយ គឺត្រូវសងធនាគារវិញចំនួន 6280$ ក្រោយរយៈពេល ៤ ឆ្នាំ និងចំនួន 8460$ ក្រោយរយៈពេល ៧ឆ្នាំ ហើយនិងចំនួន 7350$ ក្រោយរយៈពេល ១៣ឆ្នាំ ។ដោយការតាំងចិត្តសងរបស់ខ្លួនអ្នកខ្ចីនោះមានជម្រើសពីរ

១. ត្រូវសងបំណុលរបស់គាត់ចំនួនបី ដោយធ្វើការបង់សងប្រចាំគ្រាចំនួន ៥ ឆ្នាំពីឥឡូវនេះទៅ

២. ត្រូវសងចំនួនសរុប ដែលបានជំពាក់ (ពោលគឺ 22090$) ចំនួនប្រាក់ទោលណាមួយនៅពេលវេលាអនាគតសមស្រប។

លំហាត់ ៣.៥. ចំពោះធនាគារមួយចំនួន ដែលមានប្រាក់បញ្ញើសម្រាប់រយៈពេលពេញមួយឆ្នាំនោះ ការប្រាក់អានុភាពប្រចាំឆ្នាំគឺ 0.15 នៅដើមឆ្នាំ ហើយ 0.10 នៅពាក់កណ្តាលឆ្នាំ និង 0.08 នៅចុងឆ្នាំ។ ចូររកចំនួនប្រាក់ដែលកើនបាននៅ ចុងឆ្នាំសម្រាប់ការផ្ញើរប្រាក់បញ្ញើរចំនួន 5000$ នៅដើមឆ្នាំ ដោយឧបមាថាការប្រាក់អានុភាពប្រចាំឆ្នាំគឺៈ

១. អនុគមន៍ដឺក្រេទី2 នៃរយៈពេលពេញមួយឆ្នាំ

២. អនុគមន៍លីនេអ៊ែ នៃរយៈពេល នៅពាក់កណ្តាលឆ្នាំដំបូង(ឆមាសទី១) ហើយនិងជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែនៃ រយៈពេល(ឆមាសទី២ នៃឆ្នាំដដែល)។

លំហាត់ ៣.៦. ការអនុវត្តនៃរូបមន្ត $Stoodley$

សន្មត់ថា $\delta(t)$ ដែលជាការប្រាក់អានុភាពប្រចាំឆ្នាំនៅគ្រា t (គិតជាឆ្នាំចាប់ពីពេលបច្ចុប្បន្ន) មានរាងដូចក្នុងរូបមន្ត Stoodley $\delta\left(t\right)=p+\dfrac{s}{1+re^{st}}$ ដែល

$p=0.058269,\ \ s=0.037041$ និង $r\dfrac{1}{3}$

១. បង្ហាញថា $v\left(t\right)=\dfrac{1}{4}(1.06)^{-t}+\dfrac{3}{4}(1.1)^{-t}$

២. អ្នកវិនិយោគម្នាក់ យល់ព្រម បង់ប្រាក់សងប្រចាំឆ្នាំចំនួន ១២ដង ដែលក្នុងម្តងៗ បង់នូវទឹកប្រាក់ចំនួន 600$ ហើយ ការបង់លើកទី១ ចាប់ផ្តើមពីពេលនេះទៅ។ ជាផលត្រឡប់វិញ អ្នកវិនិយោគនិងទទួលបាន

(ក) ចំនួនប្រាក់ដែលកើនបាន ពីការបង់ប្រាក់ចំនួន ១២ឆ្នាំ ចាប់ពីពេលឥឡូវនេះ។

(ខ) ឬក៏ជា ស៊េរីនៃការបង់ប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ ចំនួន១២ គ្រា សម្រាប់រយៈពេល១២ ឆ្នាំ ចាប់ពីពេលឥឡូវនេះ។

ចូររកប្រាក់សរុប និងចំនួនធនលាភផ្សេងទៀតដែលផ្តល់ឲ្យទៅអ្នកវិនិយោគ។

លំហាត់ ៣.៧. ការប្រាក់អានុភាព $\delta(t)$ ក្នុងមួយឆ្នាំ នៅរយៈពេល t (គិតជាឆ្នាំពីឥឡូវនេះ) ជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែនៃ សម្រាប់រយៈពេល m ឆ្នាំ ហើយក្រោយមកទៀតនិងមានតម្លៃថេរ តាមតម្លៃដែលវាមានរយៈពេល m ។

១. ដោយពិចារណា ក្នុងករណីដាច់ដោយឡែកពីគ្នានៅពេលដែល $n \leqslant m$ និង $n \geqslant m$ រួចទាញឲ្យចេញនូវកន្សោមមួយធៀប ទៅនិង $n, m, \delta(0), \delta(m)$ ចំពោះការកើនការ នៃប្រាក់ចំនួន1ពីគ្រា 0 ដល់កគ្រា m ។

២. ដោយដឹងថា $m = 16$, $\delta(0) = 0.08$ និង $\delta(16) = 0.048$ ចូរគណនា កន្សោមដែលរកឃើញ នៅពេលដែល(i)$n = 15$ និង(ii) $n = 40$ ។

៣. ចូររកការប្រាក់អានុភាពដែលនឹងផ្តល់នូវ កំណើនដូចគ្នា(i)លើស១៥ឆ្នាំ និង(ii)លើស៤០ឆ្នាំ។

លំហាត់ ៣.៨. ឧបមាថា $\delta(t)$ ការប្រាក់អានុភាព ប្រចាំឆ្នាំ នៅរយៈពេល (គិតជាឆ្នាំ) ផ្តល់ឱ្យដូចខាងក្រោម

$$\delta(t) = \begin{cases} 0.08\ , 0 \leqslant t < 5 \\ 0.06\, , 5 \leqslant t < 10 \\ 0.04 \quad , t \geqslant 10 \end{cases}$$

១. ចូរទាញចេញជាកន្សោម $v(t)$ ដែលជាតម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃ 1 ដែលដល់កំណត់នៅរយៈពេល t ។

២. អ្នកវិនិយោគម្នាក់ធ្វើកិច្ចសន្យាមួយដែលគាត់នឹង បង់ប្រាក់បុព្វលាភប្រចាំឆ្នាំសម្រាប់រយៈពេល១៥ឆ្នាំ នៅ ដើមគ្រាទៅ ក្នុងគណនេយ្យមួយ ដែលនឹងកើន តាមអត្រាការប្រាក់អានុភាពខាងលើ ហើយប្រាក់បុព្វលាភនីមួយៗនឹងកើនឡើងបាន ចំនួន $600\$$ ហើយប្រាក់បុព្វលាភដំបូង(ទី១) នឹងត្រូវបង់នៅគ្រា០។ ជាផលត្រឡប់វិញ អ្នកវិនិយោគនេះនឹងទទួលបាន

   (ក) ចំនួនប្រាក់កំណើននក្នុងគណនេយ្យសម្រាប់រយៈពេល ១ឆ្នាំក្រោយពីការបង់បុព្វលាភចុងក្រោយ

   (ខ) ឬក៏ធនលាភកម្រិតមួយ ដែលត្រូវបង់ប្រចាំឆ្នាំ សម្រាប់រយៈពេល ៨ឆ្នាំដែលការបង់លើកដំបូងធ្វើឡើងនៅកំឡុងពេល១ឆ្នាំក្រោយ ពេលដែលបង់ប្រាក់បុព្វលាភចុងក្រោយ។

   ចូររកប្រាក់សរុបដែលបង់នៅជម្រើសទី(ក) ហើយនិងចំនួនប្រាក់នៃធនលាភប្រចាំឆ្នាំ ចំពោះជម្រើស(ខ)

លំហាត់ ៣.៩. សន្មត់ថា ការប្រាក់អានុភាពប្រចាំឆ្នាំ នៅរយៈពេល t គឺ $\delta(t) = ae^{-bt}$ (1)

១. ចូរបង្ហាញថាតម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃ (1) ដែលដល់កំណត់នៅរយៈពេល t គឺ

$$v(t) = e^{\frac{a}{b}\left(e^{-bt}-1\right)}$$

២. (ក) ដោយសន្មត់ថា ការប្រាក់អានុភាពប្រចាំឆ្នាំគឺមាន នៅក្នុងសមីការ(1) ហើយសន្មត់ថា វានឹងធ្លាក់ចុះ 50% សម្រាប់រយៈពេល១០ឆ្នាំ ពីតម្លៃ 0.10 នៅគ្រា ០ ។ ចូររកតម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃស៊េរីការបង់ប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំចំនួន៩ គ្រា ហើយក្នុងមួយគ្រាបង់ $1000\$$ ដែលការបង់លើកទី១ ធ្វើនៅគ្រាទី១

(ខ) តើការប្រាក់អានុភាព ប្រចាំឆ្នាំថេរមាន តម្លៃចំនួនប៉ុន្មាន?ដែលធ្វើឱ្យ ស៊េរីនៃការបង់ប្រាក់មានតម្លៃបច្ចុប្បន្នដូចគ្នា ដូចដែលបានឃើញនៅក្នុង(ក)។

លំហាត់ ៣.១០. សន្មត់ថាការប្រាក់អានុភាពប្រចាំឆ្នាំនៅរយៈពេល គឺ

១. ចូរបង្ហាញថាតម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃ ១ ដល់កំណត់នៅរយៈពេល t គឺ

$$v(t) = e^{\frac{-s}{r}} \times e^{(-rt)} \times e^{\frac{s}{r}e^{-rt}}$$

២. (ក) ចូរបង្ហាញថាតើតម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃធនលាភមួយ ដែលបង់បន្តបន្ទាប់ជាប់គ្នាសម្រាប់រយៈពេល n ឆ្នាំ តាមអត្រាបង់ប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំថេរ $\$1000$គឺ $\dfrac{1000}{s}\left[1 - e^{\frac{s}{r}\left(e^{-rn}-1\right)}\right]$

(ខ) ចូរគណនាកន្សោមចុងក្រោយ នៅពេល $n = 50, r = \log 1.01$ និង $s = 0.03$

ជំពូកទី ៤

ការបង់ប្រាក់ប្រចាំគ្រា

៤.១. **និយមន័យនៃការបង់ប្រាក់ប្រចាំគ្រា**

៤.១.១. **និយមន័យ**

និយមន័យ ៤.១.១. ការបង់ប្រាក់ប្រចាំគ្រា (Annuity) គឺ ជាការបង់ប្រាក់ (សង ឬដាក់សន្សំ) បន្តបន្ទាប់គ្នាជាទូទៅចំនួន ប្រាក់បង់ក្នុងគ្រានីមួយៗស្មើគ្នា ធ្វើឡើងក្នុងរយៈពេលថេរ ។

ឧទាហរណ៍ ៤.១.១. ការបង់ប្រាក់ប្រចាំគ្រាមានចំពោះដូចជា៖

- ការបង់រំលោះថ្លៃទិញផ្ទះ
- ការបង់ថ្លៃជួលផ្ទះ
- ការបង់ប្រាក់ថ្លៃធានារ៉ាប់រង ។

៤.១.២. **ប្រភេទនៃការបង់ ប្រាក់ប្រចាំគ្រា**

គេចែកការបង់ប្រាក់ប្រចាំគ្រា ជា **ពីរប្រភេទធំៗ** គឺ **ការបង់ប្រាក់ប្រចាំគ្រាសាមញ្ញ** (Simple Annuity) និង **ការប្រាក់ប្រចាំគ្រាទូទៅ** (General Annuity) ។

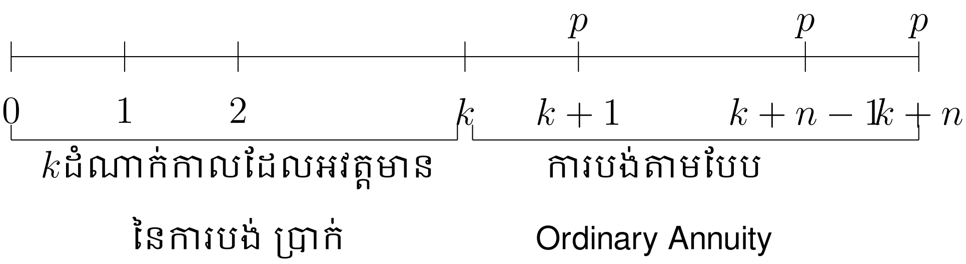
៤.១.២.១. **ការបង់ប្រាក់ប្រចាំគ្រាសាមញ្ញ**

និយមន័យ ៤.១.២. ការបង់ប្រាក់ប្រចាំគ្រាសាមញ្ញ គឺ ជា Annuity ដែលមានថេរវេលានៃការបង់ប្រាក់ និងថេរវេលាធ្វើមូលធនកម្មការប្រាក់ស្មើគ្នា ។

គេចែក Simple Annuity ជា **ពីប្រភេទគឺ**

- Ordinary Annuity គឺការបង់ប្រាក់ធ្វើឡើង នៅចុងគ្រា
- Annuity due គឺការបង់ប្រាក់ធ្វើនៅដើមគ្រា

- Deferred Annuity គឺជា Simple Annuity ដែល អវត្តមានការបង់ ប្រាក់ចំនួន ដំណាក់ដំបូងក្រោយមកទើបចាប់ផ្តើម បង់ជាធម្មតាតាមបែប Ordinary Annuity វិញមានដ្យាក្រាម (diagram) ដូចខាងក្រោម៖



៤.១.២.២. ការបង់ប្រាក់ប្រចាំគ្រាទូទៅ

និយមន័យ ៤.១.៣. ការបង់ប្រាក់ប្រចាំគ្រាទូទៅ គឺ ជា Annuity ដែល ថេរវេលា នៃការបង់ប្រាក់ និង ថេរវេលានៃការធ្វើមូលធនកម្មការប្រាក់មិនស្មើគ្នា ។

Annuity មួយចំនួនមានថេរវេលានៃ ការបង់ប្រាក់ និងរយៈពេលធ្វើមូលធនកម្មការ ប្រាក់ស្មើគ្នាប៉ុន្តែចំនួន ប្រាក់បង់ក្នុងគ្រានីមួយៗមិនស្មើគ្នាករណីនេះក៏គេហៅថា General Annuity ដែរ។

៤.១.៣. និមិត្តសញ្ញា

យើងតាង

- p ជាចំនួនប្រាក់បង់ក្នុងដំណាក់ នីមួយៗ
- n ជាចំនួនដំណាក់កាលនៃការ ធ្វើមូលធនកម្មការប្រាក់
- J_m ជាអត្រាការប្រាក់ Nominal ក្នុងមួយឆ្នាំ
- i ជាអត្រាការប្រាក់សមាមាត្រ (អត្រាការប្រាក់ក្នុងមួយចន្លោះ ពេល)
- FV ជាតម្លៃសរុប ឬតម្លៃអនាគត
- PV ជាតម្លៃបច្ចុប្បន្ន ។

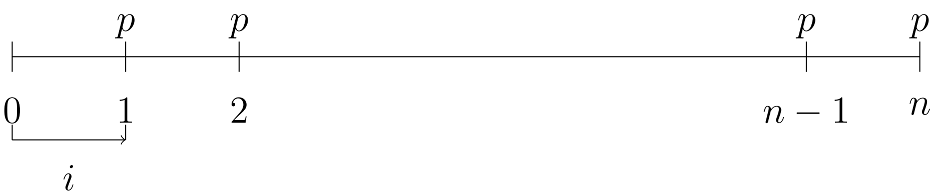
៤.២. ការបង់ប្រាក់ប្រចាំគ្រាសាមញ្ញ

៤.២.១. Ordinary Annuity

៤.២.១.១. តម្លៃអនាគតនៃ Ordinary Annuity

និយមន័យ ៤.២.១. Ordinary Annuity គឺជា Annuity សាមញ្ញ ដែលការបង់ប្រាក់ធ្វើឡើងនៅចុងដំណាក់កាល នៃការបង់ប្រាក់ ។

ដ្យាក្រាមនៃការបង់ប្រាក់៖



យើងសង្កេតឃើញថា តម្លៃអនាគតនៃការបង់ប្រាក់៖

$$
\begin{aligned}
&\text{លើកទី ១} && FV_1 = p(1+i)^{n-1} \\
&\text{លើកទី ២} && FV_2 = p(1+i)^{n-2} \\
&\text{លើកទី ៣} && FV_3 = p(1+i)^{n-3} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\text{លើកទី n} && FV_n = p(1+i)^{0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{ដោយ} \quad FV &= FV_1 + FV_2 + \cdots + FV_n \\
\text{យើងបាន} \quad FV &= p(1+i)^{n-1} + p(1+i)^{n-2} + p(1+i)^{n-3} + \cdots + p(1+i)^{0} \\
&= p\left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-1}\right] \\
&= p \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \\
&= p \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}
\end{aligned}
$$

នាំឲ្យ រូបមន្តតម្លៃអនាគតនៃ Ordinary Annuity គឺ

$$\boxed{FV = p \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}} \qquad (៤.១)$$

តាមតារាងហិរញ្ញវត្ថុ គេតាង $s_{\overline{n}|i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

ដូចនេះ

$$\boxed{FV = p \times s_{\overline{n}|i}} \quad (៤.២)$$

ឧទាហរណ៍ ៤.២.១. បុរសម្នាក់ដាក់ប្រាក់សន្សំក្នុង អត្រាការប្រាក់ 5% ក្នុងមួយឆ្នាំ ដោយបង់ \$1200 ជារៀង រាល់ ឆ្នាំរយៈពេល 5 ឆ្នាំ ។

តើប្រាក់អនាគតសរុបរបស់គាត់នឹងទទួលបានប៉ុន្មាន ?

ដំណោះស្រាយ

រកប្រាក់អនាគតសរុបរបស់គាត់នឹងទទួលបាន

$$\begin{aligned}
&\text{យើងមាន} && FV = \$1\,200 \ , \ n = 5 \ , \ i = 0.05 \\
&\text{តាមរូបមន្ត (៤.២)} && FV = p \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \\
&\text{យើងបាន} && FV = \$1\,200 \times \frac{(1+0.05)^5 - 1}{0.05} = \$6\,631
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រាក់អនាគតសរុបរបស់គាត់នឹងទទួលបានគឺ } FV = \$6631}$ ។

ឧទាហរណ៍ ៤.២.២. ម្ចាស់សហគ្រាសបានធ្វើការ វាយតម្លៃថា រោងចក្រនឹងត្រូវផ្លាស់ប្តូរ គ្រឿងបន្លាស់ ដែលមានតម្លៃ \$80000 ក្នុងរយៈពេល 10 ឆ្នាំទៀតគិតពី ឥឡូវនេះទៅ ។ តើគេត្រូវដាក់សន្សំជារៀងរាល់ ឆ្នាំនូវទឹក ប្រាក់ចំនួន ប៉ុន្មាន បើធនាគារផ្តល់ការប្រាក់តាម អត្រា 8% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំឆ្នាំ ?

ដំណោះស្រាយ

រកចំនួនប្រាក់ដែលម្ចាស់សហគ្រាសត្រូវដាក់ សន្សំរៀងរាល់ឆ្នាំ

យើងមាន $FV = \$80\,000 \ , \ n = 10 \ , \ i = 0.08$

តាមរូបមន្ត(៤.២) $FV = p \times \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

យើងបាន

$$p = \frac{FV \times i}{(1+i)^n - 1} = \frac{\$80\,000 \times 0.08}{(1+0.08)^{10} - 1} = \$5\,522.36$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ម្ចាស់សហគ្រាសត្រូវដាក់ សន្សំរៀងរាល់ឆ្នាំនូវទឹកប្រាក់ } \$5\,522.36}$ ។

៤.២.១.២. តម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃ Ordinary Annuity

និយមន័យ ៤.២.២. តម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃ Ordinary Annuity គឺជាផលបូកតម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃប្រាក់ បង់ក្នុងដំណាក់នីមួយៗ ទាំងអស់។

ដ្យាក្រាមនៃការបង់ប្រាក់៖

យើងសង្កេតឃើញថា តម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃការបង់ប្រាក់៖

$$\begin{aligned}
&\text{លើកទី ១} && PV_1 = p(1+i)^{-1}\\
&\text{លើកទី ២} && PV_2 = p(1+i)^{-2}\\
&\text{លើកទី ៣} && PV_3 = p(1+i)^{-3}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\text{លើកទី n} && PV_n = p(1+i)^{-n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ដោយ}\quad PV &= PV_1 + PV_2 + \cdots + PV_n\\
\text{យើងបាន}\quad PV &= p(1+i)^{-1} + p(1+i)^{-2} + p(1+i)^{-3} + \cdots + p(1+i)^{-n}\\
&= p(1+i)^{-n}\left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-1}\right]\\
&= p(1+i)^{-n} \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}\\
&= p \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}
\end{aligned}$$

នាំឲ្យ រូបមន្តតម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃ Ordinary Annuity គឺ

$$\boxed{PV = p \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} \tag{៤.៣}$$

ឬ

$$\boxed{PV = P \times s_{\overline{n}|i} \times (1-i)^{-n}} \tag{៤.៤}$$

តាមតារាងហិរញ្ញវត្ថុ គេតាង $a_{\overline{n}|i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$
ដូចនេះ

$$\boxed{PV = p \times a_{\overline{n}|i}} \tag{៤.៥}$$

ឧទាហរណ៍ ៤.២.៣. ចូររកតម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃការដាក់ សន្សំទឹកប្រាក់ចំនួន \$380 ថេរនៅរៀងរាល់ចុងខែសម្រាប់រយៈពេល 3 ឆ្នាំ អត្រាការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ 12% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំខែ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $p = \$380$, $i = \dfrac{0.12}{12} = 0.01$, $n = 3 \times 12 = 36$
តាមរូបមន្ត(៤.៥) $PV = p \times \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$
យើងបាន

$$PV = \$380 \times \frac{1-(1+0.01)^{-36}}{0.01} = \$11\,440.85$$

ដូចនេះ $\boxed{PV = \$11\,440.85}$ ។

ឧទាហរណ៍ ៤.២.៤. ទូរទស្សន៍ពណ៌ 36 inches មួយគ្រឿងមានតម្លៃ \$780 ត្រូវបានទិញដោយអតិថិជនម្នាក់ ដោយបង់ប្រាក់ដល់ដៃចំនួន \$80 និង បង់ប្រចាំខែនូវ ទឹកប្រាក់ថេរ សម្រាប់រយៈពេល 2 ឆ្នាំ ។ ចូររកចំនួនប្រាក់ដែល ត្រូវបង់ ប្រចាំខែនីមួយៗ បើអ្នកលក់គិតការប្រាក់ 15% ក្នុងមួយឆ្នាំ ធ្វើ មូលធន កម្ម ប្រចាំខែ ហើយការបង់ប្រាក់ លើកទី 1 ធ្វើឡើងនៅមួយខែក្រោយបន្ទាប់ពីថ្ងៃបង់លុយដល់ដៃ ។

ដំណោះស្រាយ

រកចំនួនប្រាក់ដែលអតិថិជន ត្រូវបង់ក្នុងខែនីមួយៗ
យើងមាន $PV = \$780 - \$80 = \$700$, $i = \dfrac{0.15}{12} = 0.0125$, $n = 2 \times 12 = 24$
តាមរូបមន្ត(៤.៥) $PV = p \times \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$
យើងបាន

$$p = \frac{PV \times i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{\$700 \times 0.0125}{1-(1+0.0125)^{-24}} = \$33.94$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំនួនប្រាក់ដែលអតិថិជន ត្រូវបង់ក្នុងខែនីមួយៗគឺ } \$33.94}$ ។

៤.២.២. Annuity Due

៤.២.២.១. Annuity Due

និយមន័យ ៤.២.៣. Annuity due គឺជា Annuity សាមញ្ញ ដែលការបង់ប្រាក់ធ្វើនៅខាងដើមដំណាក់កាលនៃការបង់ ប្រាក់ ។

ដ្យាក្រាមនៃការបង់ប្រាក់៖

យើងសង្កេតឃើញថា តម្លៃអនាគតនៃការបង់ប្រាក់៖

$$
\begin{aligned}
&\text{លើកទី ១} && FV_1 = p(1+i)^n \\
&\text{លើកទី ២} && FV_2 = p(1+i)^{n-1} \\
&\text{លើកទី ៣} && FV_3 = p(1+i)^{n-2} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\text{លើកទី n} && FV_n = p(1+i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{ដោយ} \quad & FV = FV_1 + FV_2 + \cdots + FV_n \\
\text{យើងបាន} \quad & FV = p(1+i)^n + p(1+i)^{n-1} + p(1+i)^{n-2} + \cdots + p\,(1+i) \\
&= p\left[(1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \cdots + (1+i)^n\right] \\
&= p\,(1+i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \\
&= p\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right]
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ រូបមន្តតម្លៃអនាគតនៃ Annuity Due គឺ

$$
\boxed{FV = p\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right]} \qquad (៤.៦)
$$

$$\boxed{\text{ឬ} \quad FV = p \times s_{\overline{n}|i} \times (1+i)} \tag{៤.៧}$$

ឧទាហរណ៍ ៤.២.៥. លោកសម្បត្តិ បានដាក់ប្រាក់ ក្នុង គណនីសន្សំ ចំនួន \$200 នៅ រៀងរាល់ដើមខែ សម្រាប់ រយៈពេល 5 ឆ្នាំ ។ តើក្នុងគណនីនោះមានប្រាក់ ចំនួនប៉ុន្មាននៅដំណាច់ឆ្នាំ ទី 5 ? បើអត្រាការប្រាក់ប្រចាំ ឆ្នាំ 10.5% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំខែ ។

ដំណោះស្រាយ

រកចំនួនទឹកប្រាក់ក្នុងគណនីលោកសម្បត្តិនៅដំណាច់ឆ្នាំទី 5

យើងមាន $p = \$200,\ i = \dfrac{0.105}{12} = 0.00875$

តាមរូបមន្ត(៤.៦) $FV = p\left[\dfrac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - 1\right]$

យើងបាន

$$\begin{aligned} FV &= \$200 \times \left[\frac{(1+0.00875)^{60+1}-1}{0.00875} - 1\right] \\ &= \$15\,831.10 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{នៅដំណាច់ឆ្នាំទី 5 ក្នុងគណនីលោកសម្បត្តិ មានប្រាក់ចំនួន\$15 831.10}}$ ។

ឧទាហរណ៍ ៤.២.៦. គូស្វាមីភរិយាមានគម្រោង ទិញរថយន្តមួយដែលមានតម្លៃ \$10000 នៅថ្ងៃទី31 ខែធ្នូ ឆ្នាំ 1999។ ដើម្បីសម្រេចនូវគម្រោងការណ៍នេះ អ្នកទាំងពីរដាក់ប្រាក់ស្មើគ្នាជារៀងរាល់ឆ្នាំក្នុងគណនី របស់ខ្លួន ដោយ ចាប់អនុវត្ត ពីថ្ងៃទី 1 ខែមករា ឆ្នាំ 1990 ។ បើអត្រាការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ 12% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំឆ្នាំ តើចំនួនប្រាក់ដែល បង់ក្នុង មួយឆ្នាំៗមានប៉ុន្មាន ?

ដំណោះស្រាយ

រកប្រាក់ដែលត្រូវបង់ក្នុងមួយ ឆ្នាំៗ

យើងមាន $FV = \$10000\ ,\ i = 0.12\ ,\ n = 10$

តាមរូបមន្ត(៤.៦) $FV = p \times s_{\overline{n}|i} \times (1+i)$

យើងបាន

$$p = \frac{FV}{s_{\overline{n}|i} \times (1+i)} = \frac{\$10\,000}{s_{\overline{10}|0.12} \times (1+0.12)}$$

ដោយ $$s_{\overline{10}|0.12} = \frac{(1+0.12)^{10}-1}{0.12} = 17.5487$$

នាំឱ្យ $$p = \frac{\$10\,000}{17.5487 \times 1.12} = \$508.79$$

ដូចនេះ ប្រាក់ដែលត្រូវបង់ក្នុងមួយ ឆ្នាំៗគឺ $508.79 ។

៤.២.២.២. តម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃ Annuities Due

និយមន័យ ៤.២.៤. តម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃ Annuity គឺជាផលបូកតម្លៃបច្ចុប្បន្ន នៃចំនួនប្រាក់ក្នុងដំណាក់កាល នីមួយៗ ទាំងអស់ ។

តាមដ្យាក្រាមនៅក្នុងចំណុច "២.១" យើងសង្កេតឃើញថា តម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃការបង់ប្រាក់៖

លើកទី ១ $PV_1 = p(1+i)^0$

លើកទី ២ $PV_2 = p(1+i)^{-1}$

លើកទី ៣ $PV_3 = p(1+i)^{-2}$

....

លើកទី n $PV_n = p(1+i)^{-n+1}$

ដោយ $PV = PV_1 + PV_2 + PV_3 + \cdots + PV_n$

យើងបាន
$$\begin{aligned} PV &= p(1+i)^0 + p(1+i)^{-1} + p(1+i)^{-2} + \cdots + p(1+i)^{-n+1} \\ &= p \times (1+i)^{-n+1}\left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-1}\right] \\ &= p \times (1+i)^{-n+1} \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} \\ &= p \times \left[1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right] \end{aligned}$$

ដូចនេះ រូបមន្តតម្លៃអនាគតនៃ Annuity Due គឺ

$$\boxed{PV = p \times \left[1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]} \quad (៤.៨)$$

$$\boxed{\text{ឬ} \quad PV = p \times a_{\overline{n}|i} \times (1+i)} \tag{៤.៩}$$

ឧទាហរណ៍ ៤.២.៧. តើទឹកប្រាក់ចំនួនប៉ុន្មាន ដែលត្រូវដាក់សន្សំនៅពេល ឥឡូវនេះតាមអត្រាឆ្នាំ 12% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំត្រីមាស ដើម្បីឱ្យយើងអាចដក $1000 នៅ រៀងរាល់ដើម ត្រីមាស សម្រាប់រយៈពេល 2 ឆ្នាំ ។

ដំណោះស្រាយ

រកចំនួនទឹកប្រាក់ដែលត្រូវដាក់ សន្សំនាពេលឥឡូវនេះ

យើងមាន $p = \$1000, \quad i = \dfrac{0.12}{4} = 0.03, \ \ n = 2 \times 4 = 8$

តាមរូបមន្ត(៤.៨)

$$PV = p \times \left[1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]$$

យើងបាន

$$PV = \$1\,000 \times \left[1 + \frac{1-(1+0.03)^{-8+1}}{0.03}\right] = \$7\,230.28$$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{ទឹកប្រាក់ដែលត្រូវដាក់ សន្សំនាពេលឥឡូវនេះគឺ } \$7\,230.28}$ ។

ឧទាហរណ៍ ៤.២.៨. រថយន្តមួយគ្រឿង លក់តម្លៃ $9550 ។ លោកសាន បានទិញវាដោយបង់ប្រចាំខែ ចំនួន 18 លើកស្មើៗគ្នា លើកទី 1 គឺចាប់ផ្តើមបង់នៅថ្ងៃទិញ ។ បើអត្រាការប្រាក់ 18% ក្នុងមួយឆ្នាំធ្វើមូលធនកម្ម ប្រចាំខែ តើចំនួនប្រាក់ដែលបង់ក្នុងមួយខែៗមានប៉ុន្មាន ?

ដំណោះស្រាយ

រកប្រាក់ដែលបង់ក្នុងមួយខែៗ

យើងមាន $PV = \$9550, \ \ i = \dfrac{0.18}{12} = 0.015, \ \ n = 18$

តាមរូបមន្ត(៤.៨) $PV = p \times a_{\overline{n}|i} \times (1+i)$

យើងបាន

$$p = \frac{PV}{a_{\overline{n}|i} \times (1+i)} = \frac{\$9\,550}{a_{\overline{18}|0.015} \times (1+0.015)}$$

ដោយ
$$a_{\overline{18}|0.015} = \frac{1-(1+0.015)^{-18}}{0.015} = 15.6726$$

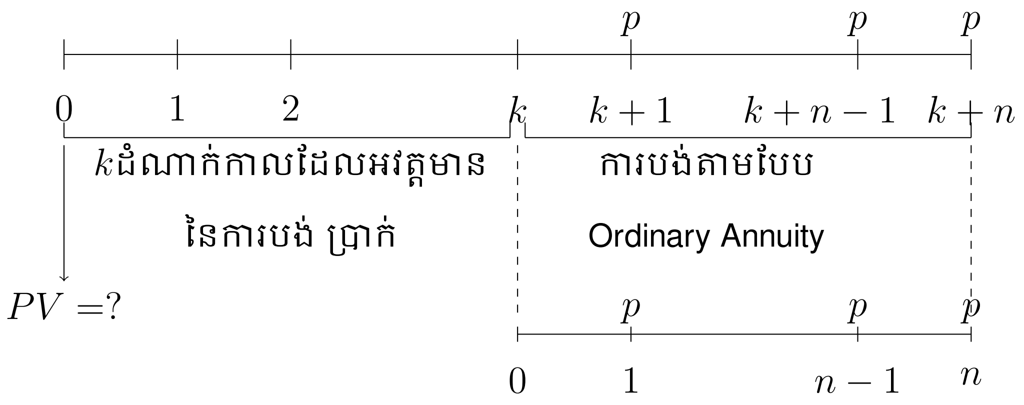
នាំឱ្យ
$$p = \frac{\$9\,550}{15.6726 \times 1.015} = \$600.34$$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{ប្រាក់ដែលបង់ក្នុងមួយខែៗគឺ } \$600.34}$ ។

៤.២.៣. Deferred Annuities

និយមន័យ ៤.២.៥. *Deferred Annuity* គឺជា *Ordinary Annuity* ដែលមានចំនួន k ដំណាក់ ដំបូងទំនេរគ្មានការបង់ ប្រាក់ ហើយចាប់ផ្តើមបង់ប្រាក់ពីគ្រាទី$k+1$ ទៅ ។

យើងតាង *Simple deferred annuity* ដោយដ្យាក្រាមខាងក្រោម ៖



តាមដ្យាក្រាមនេះ យើងទាញបានរូបមន្តតម្លៃ បច្ចុប្បន្ននៃ *deferred Annuity* គឺ

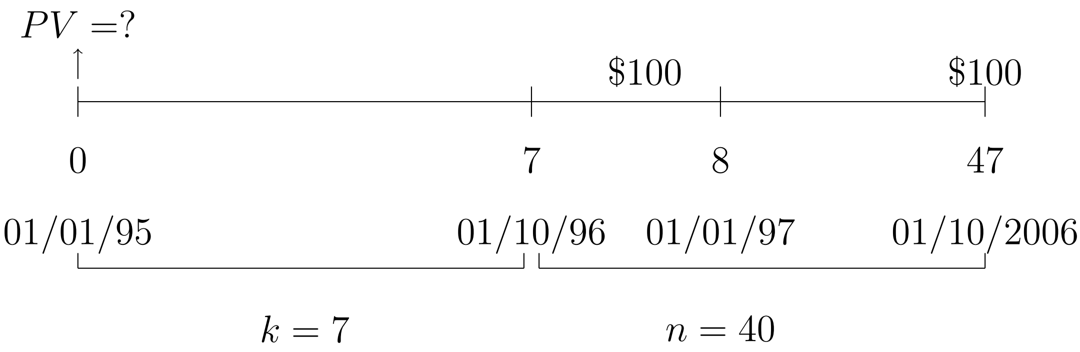
$$\boxed{PV = p\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{-k}} \tag{៤.១០}$$

$$\boxed{\text{ឬ} \quad PV = p \times a_{\overline{n}|i} \times (1+i)^{-k}} \tag{៤.១១}$$

ឧទាហរណ៍ ៤.២.៦. ចូររកតម្លៃ Annuity នៅថ្ងៃទី 10 ខែមករា ឆ្នាំ1995 នៃការបង់ប្រាក់ $100 ប្រចាំត្រីមាស សម្រាប់ រយៈពេល 10 ឆ្នាំ ។ បើការបង់ប្រាក់លើកទី 1 ធ្វើនៅថ្ងៃទី 01 ខែមករា ឆ្នាំ 1997 អត្រាការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ 7% ធ្វើមូលធន កម្មប្រចាំត្រីមាស ។

ដំណោះស្រាយ

ដើម្បីងាយស្រួលយើងគូស ដ្យាក្រាមនៃការបង់ប្រាក់ ដូចខាងក្រោម ៖



តាមដ្យាក្រាមយើងមាន $p=\$100$, $i=\dfrac{0.07}{4}=0.0175,\ \ n=40,\ \ k=7$
តាមរូបមន្ត (៤.១០)

$$PV=p\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{-k}$$

យើងបាន

$$PV=\$100\times\left[\frac{1-(1+0.0175)^{-40}}{0.0175}\right]\times(1+0.0175)^{-7}=\$2\,532.43$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃ Deferred Annuity នេះគឺ}\$2\,532.43}$ ។

ឧទាហរណ៍ ៤.២.១០. ទឹកប្រាក់ចំនួន $2500 ត្រូវបានខ្ចីដោយបុរសម្នាក់ហើយតាមកិច្ចសន្យា គាត់ត្រូវសងគេវិញ ជារៀងរាល់ខែ នូវទឹកប្រាក់ស្មើៗគ្នាចំនួន 12 លើក ។ ការសងលើកទី 1 ចាប់ផ្តើម នៅ 3 ខែក្រោយ បន្ទាប់ ពីថ្ងៃខ្ចី ។ បើគេគិតការប្រាក់តាមអត្រា ប្រចាំឆ្នាំ 15% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំខែ ។ ចូររកទឹកប្រាក់ដែលត្រូវសង ក្នុងខែ នីមួយៗ ។

ដំណោះស្រាយ

រកប្រាក់ដែលត្រូវសងក្នុងខែ នីមួយៗ
យើងមាន $p=\$2500,\ \ i=\dfrac{0.15}{12}=0.0125,\ \ n=12,\ \ k=2$
តាមរូបមន្ត (៤.១០)

$$PV=p\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{-k}$$

យើងបាន

$$p = \frac{PV \times (1+i)^k}{\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}} = \frac{\$2\,500 \times (1+0.0125)^2}{\dfrac{1-(1+0.0125)^{-12}}{0.0125}} = \$231.32$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រាក់ដែលត្រូវសងក្នុងខែ នីមួយៗគឺ } \$231.32}$ ។

៤.២.៤. ការគណនាចំនួនគ្រា និងអត្រាការប្រាក់

៤.២.៤.១. ការគណនាចំនួនគ្រា

យោងតាមរូបមន្ត(៤.២) $FV = p\times\dfrac{(1+i)^n-1}{i}$ និង(៤.៥) $PV = p\times\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ យើងអាចទាញរកចំនួនគ្រា n ដោយប្រើ logarithms ។

ជាធម្មតាគេឱ្យ FV (ឬ PV) ,p និង i ហើយយើងត្រូវរក n ដែលក្នុងករណីខ្លះ n មិនមែនជាចំនួនគត់ ។ វិធីសាស្ត្រដែលយើងតែង តែប្រើប្រាស់ក្នុងការអនុវត្ត ជាក់ស្តែងសម្រាប់ករណី n មិនមែនជាចំនួនគត់គឺៈ

ក. ប្រាក់បង់ចុងក្រោយបង្អស់ ត្រូវបូកបន្ថែមនូវទឹកប្រាក់ មួយចំនួន ដែលធ្វើឱ្យការបង់ ប្រាក់នោះសមមូលទៅនឹង FV (ឬPV) ដែលបានកំណត់ឱ្យ ។

ខ. ចំនួនប្រាក់ ដែលត្រូវបង់បន្ថែម ដើម្បី ឱ្យទឹកប្រាក់ ដែលបាន បង់ សមមូល នឹង FV (ឬ PV) ត្រូវបង់នៅ ដំណាក់កាល មួយបន្ទាប់ពីបង់ពេញចុង ក្រោយ ។

ឧទាហរណ៍ ៤.២.១១. មូលនិធិចំនួន $\$8000$ទទួលបានពីការដាក់សន្សំចំនួន$\$200$ ប្រចាំឆមាស។ បើមូលនិធិ នេះទទួលការប្រាក់ តាមអត្រា $J_2 = 12\%$ ចូររកចំនួនគ្រា ដែលត្រូវបង់ ពេញ និងរកចំនួនប្រាក់ដែលបង់ បន្ថែម ចុងក្រោយ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $FV = \$8000,\ \ p = \$200,\ \ i = \dfrac{J_2}{2} = \dfrac{0.12}{2} = 0.06$

តាមរូបមន្ត(៤.២) $FV = p \times \dfrac{(1+i)^n-1}{i}$ នោះ $(1+i)^n = \dfrac{FV \times i}{p} + 1$

នាំឱ្យ $n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{PV \times i}{p} + 1\right)}{\ln(1+i)}$

យើងបាន

$$n = \frac{\ln\left(\dfrac{\$8\,000 \times 0.06}{\$200} + 1\right)}{\ln(1 + 0.06)} = 21.00220291$$

$n = 21.00220291$ បានន័យថាការដាក់សន្សំ ពេញតម្លៃ \$200 មានចំនួន 21 លើក ។ ប៉ុន្តែទឹកប្រាក់សរុបនេះ ពុំសមមូលទៅនឹង Maturity Value \$8000 ឡើយ ពោលគឺ គេត្រូវបូកបន្ថែម នូវទឹកប្រាក់មួយចំនួនទៀត ដើម្បីឱ្យ តម្លៃអនាគតរបស់វា ស្មើនឹង \$8000។ វិធីសាស្ត្រក្នុងការបូកបន្ថែមគឺយើងត្រូវអនុវត្តតាមវិធីទាំង ពីរខាងលើ ។

- **វិធានទី១៖**

ទឹកប្រាក់បន្ថែម Y យើងបង់នៅចុងគ្រាទី 21

ដូចបង្ហាញក្នុងដ្យាក្រាម

យើងបាន $\$200 \times s_{\overline{21|}\,0.06} + X = \$8\,000$

នាំឱ្យ

$$X = \$8\,000 - \$200 \times s_{\overline{21|}\,0.06} = \$8\,000 - \$200 \times \frac{(1+0.06)^{21} - 1}{0.06} = \$1.45$$

ដូចនេះ

$\boxed{\text{ប្រាក់ដែលត្រូវបង់បន្ថែមនៅ ដំណាក់កាលទី 21 ជាមួយគ្នានឹងការបង់ពេញ \$200 គឺ \$1.45}}$

- **វិធានទី២៖**

ទឹកប្រាក់បន្ថែម Y យើងបង់នៅចុងគ្រាទី 22

ដូចបង្ហាញក្នុងដ្យាក្រាម

យើងបាន $\$200 \times s_{\overline{21}|\,0.06} \times (1+0.06) + Y = \$8\,000$

នាំឱ្យ

$$Y = \$8\,000 - \$200 \times \frac{(1+0.06)^{21} - 1}{0.06} \times (1+0.06) = -\$478.46 < 0$$

ដោយ $Y < 0$ បញ្ជាក់ឱ្យឃើញថា មិនត្រូវការបង់ប្រាក់បន្ថែម នៅចុងគ្រាទី 22 ទេ ព្រោះគ្រាន់តែការប្រាក់សម្រាប់ មួយគ្រាចុងក្រោយនេះត្រូវលើសបាល $\$478.46$ ទៅហើយ ។

ឧទាហរណ៍ ៤.២.១២. បំណុល $\$4000$ គិត ការប្រាក់ តាមអត្រា $J_2 = 12\%$ ។ តាមកិច្ចសន្យាត្រូវសងវិញ ប្រចាំឆមាសនូវទឹកប្រាក់ $\$400$ ចូររកចំនួនគ្រា ដែលត្រូវបង់ ប្រាក់ពេញ និងរកចំនួនប្រាក់ ដែលត្រូវបង់ ក្រោយបង្អស់ ។

ដំណោះស្រាយ

រកប្រាក់ដែលត្រូវបង់បន្ថែម នៅចុងគ្រាទី 16

យើងមាន $PV = \$4\,000,\ \ p = \$400,\ \ i = \dfrac{J_2}{2} = \dfrac{0.12}{2} = 0.06$

តាមរូបមន្ត $PV = p \times \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

នោះ

$$(1+i)^{-n} = 1 - \frac{PV \times i}{p}$$

នាំឱ្យ

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \dfrac{PV \times i}{p}\right)}{\ln(1+i)}$$

យើងបាន

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \dfrac{\$4\,000 \times 0.06}{\$400}\right)}{\ln(1+0.06)} = 15.72520854$$

ដូចនេះ ប្រាក់បង់ពេញ $\$400$ ក្នុងមួយគ្រា មានចំនួន 15 លើក ហើយចំនួនប្រាក់ដែលត្រូវ បង់នៅគ្រាចុងក្រោយ យើងអនុវត្តតាមវិធានទី២ គឺត្រូវបង់ បន្ថែម Y នៅគ្រាទី 16 ទៀត ដូច បង្ហាញតាមដ្យាក្រាមខាងក្រោម៖

យើងបាន $\quad \$400 \times a_{\overline{15}|\,0.06} + Y \times (1+0.06)^{-16} = \$4\,000$
នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} Y &= (1+0.06)^{16} \times \left(\$4\,000 - \$400 \times a_{\overline{15}|\,0.06}\right) \\ &= (1.06)^{16} \times \left[\$4\,000 - \$400 \times \frac{1-(1.06)^{-15}}{0.06}\right] \\ &= \$292.39 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{ប្រាក់ដែលត្រូវបង់បន្ថែម នៅចុងគ្រាទី 16 គឺ } \$292.39}$ ។

សង្កេត៖ យោងតាមឧទាហរណ៍(៤.២.១១) និង (៤.២.១២) យើងគួរកត់សំគាល់ថា បើចំនួនខាងក្រោយក្បៀស មានទំហំតូចគប្បីអនុវត្តតាមវិធានទី១ តែបើមានទំហំធំគប្បីប្រើវិធាន ទី២។

៤.២.៤.២. ការគណនា រកអត្រាការប្រាក់

យើងគួរសំគាល់ថា ករណី n ថេរ $s_{\overline{n}|i}$ កើនកាលណា i កើន ហើយ $a_{\overline{n}|i}$ ចុះកាលណា i កើន ។ យើងសន្មត យកការអនុវត្ត Interpolation រវាង Nominal rate ពីរ ដែលមានគំលាត 1% និងប្រើកត្តា$a_{\overline{n}|i}$ ឬ $a_{\overline{n}|i}$ ដោយសន្មត យកខាងក្រោយ ចុចក្បៀសចំនួន4 ខ្ទង់យ៉ាងតិច ។

នៅក្នុង វិស័យ Business ជាច្រើន អត្រាជាក់លាក់ (True interest rate) លាក់កំបាំង ដោយបង្ហាញ នូវ លក្ខខណ្ឌ ផ្សេងៗ ។ ដើម្បីសម្រេចទៅលើសំណើ ផ្សេងៗ (ការវិនិយោគ) គឺយើងចាំបាច់ត្រូវដឹង អំពីអត្រាការប្រាក់ ពិតប្រាកដរបស់វានីមួយៗ ។

នៅពេលដែលគេប្រាប់ លក្ខខណ្ឌផ្សេងៗ ហើយសួររក i ឬ J_m យើងអាចគណនារកតម្លៃប្រហែលតាម Linear Interpolation វិធីនេះមានលក្ខណៈ សុក្រឹតគ្រប់គ្រាន់សម្រាប់ ការអនុវត្តជាក់ស្តែង ។

រូបមន្ត $FV = p \times \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ និង $PV = p \times \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ គឺជារូបមន្តដែលអនុវត្តញឹកញាប់ជាង គេក្នុងការគណនា រកអត្រាការប្រាក់ ។

ដើម្បីទទួលបានតម្លៃចាប់ផ្តើម ឬអត្រាតេស្ត (a Starting Value) សម្រាប់ដោះស្រាយ

$s_{\overline{n}|i} = k$ តាម Linear Interpolation យើងអាចប្រើរូបមន្ត $i = \dfrac{\left(\frac{k}{n}\right)^2 - 1}{k}$ ។

ដើម្បីឱ្យបានតម្លៃចាប់ផ្ដើម (a Starting Value) សម្រាប់ដោះស្រាយ $a_{\overline{n}|i} = k$ តាម linear interpolation យើងអាចប្រើរូបមន្ត $i = \dfrac{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}{k}$ ។

ឧទាហរណ៍ ៤.២.១៣. ចូររកអត្រាការប្រាក់ J_2 នៃ Annuity ដែល មានការបង់ប្រាក់ $500 ប្រចាំឆមាសហើយទទួលបានតម្លៃអនាគត $6000 ក្នុងរយៈពេល 5 ឆ្នាំទៀត ។

ដំណោះស្រាយ

រកអត្រាចំណូលនៃការបង់ប្រាក់

យើងមាន $FV = \$6000,\ \ p = \$500,\ \ n = 10$

នោះ

$$500 \times s_{\overline{10}|i} = \$6\,000,\ \ s_{\overline{10}|i} = 12$$

យើងត្រូវឱ្យ i_1 ដែល $s_{\overline{10}|i_1} > 12$ និង i_2 ដែល $s_{\overline{10}|i_2} < 12$

ដើម្បីដោះស្រាយតាមតារាង interpolation យើងត្រូវរកតម្លៃចាប់ផ្ដើម

$$i = \frac{\left(\frac{12}{10}\right)^2 - 1}{12} = 0.0366667$$

នោះ $J_2 = 2i = 7.33\%$

បើ $J_2 = 7\%$ នោះ $s_{\overline{10}|0.035} = 11.7314$

បើ $J_2 = 8\%$ នោះ$s_{\overline{10}|0.04} = 12.0061$

$$\begin{array}{c|c} S_{\overline{10}|i} & J_2 \\ \hline 0.2747\left\{\begin{array}{l} 0.2686\left\{\begin{array}{l} 11.7314 \\ 12.0000 \end{array}\right. \\ 12.0061 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} 7\% \\ J_2\% \end{array}\right\} x \\ 8\% \end{array}\right\} 1\% \end{array}$$

$\dfrac{x}{1\%} = \dfrac{0.2686}{0.2747}$ នោះ $x = 0.98\%$

យើងបាន

$$J_2 = 7\% + x = 7\% + 0.98\% = 7.98\%$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{អត្រាចំណូលនៃការបង់ ប្រាក់ខាងលើគឺ } J_2 = 7.98\%}$

ជាទូទៅបើយើងមានរូបមន្ត

$$FV = p \times s_{\overline{n}|i} \qquad (\text{ឬ } PV = p \times a_{\overline{n}|i})$$

$$FV = p \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (\text{ឬ } PV = p \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i})$$

$$FV - p \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 0 \qquad (\text{ឬ } PV - p \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 0)$$

យើងតាង

$$f(i) = FV - p \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 0 \qquad (\text{ឬ } f(i) = PV - p \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 0)$$

មុននឹងឱ្យតម្លៃ i_1 និង i_2 យើងត្រូវគណនារកតម្លៃចាប់ ផ្ដើម ឬអត្រាតេស្តតាមរូបមន្ត $i = \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2 - 1}{k}$ ឬ $i = \frac{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}{k}$ សិន ។

ឧទាហរណ៍ ៤.២.១៤. បើអត្រាចាប់ផ្ដើម $i = 7.3332\%$ យើងត្រូវយក $i_1 = 7\%,\ \ i_2 = 8\%$ (ជួនកាល $i_2 = 6\%$) ដោយលៃយ៉ាងណាឱ្យ $f(i_1) < 0$ (ឬ $f(i_1) > 0$) និង $f(i_2) > 0$ (ឬ $f(i_2) < 0$) ។

បើយើងឱ្យi_1 ដែល $f(i_1) > 0$ និងi_2 ដែល $f(i_2) < 0$

តារាង Interpolation

$$\begin{array}{r|l}
f(i) & J_m,\ \left(i = \dfrac{j_m}{m}\right) \\
\hline
f(i_2) - f(i_1) \left\{ \begin{array}{l} -f(i_1) \left\{ \begin{array}{l} f(i_1) \\ 0 \end{array} \right. \\ f(i_2) \end{array} \right. & \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{r} J_m^{(1)} \\ J_m \end{array} \right\} J_m - J_m^{(1)} \\ J_m^{(2)} \end{array} \right\} J_m^{(2)} - J_m^{(1)}
\end{array}$$

តាមវិធានសមាមាត្រ គេអាចទាញបាន $\dfrac{J_m - J_m^{(1)}}{J_m^{(2)} - J_m^{(1)}} = -\dfrac{f(i_1)}{f(i_2) - f(i_1)}$

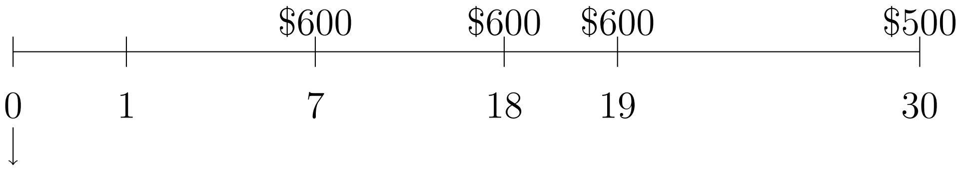
នោះ

$$\boxed{J_m = J_m^{(1)} - f(i_1) \times \frac{J_m^{(2)} - J_m^{(1)}}{f(i_2) - f(i_1)}} \qquad (៤.១២)$$

ឧទាហរណ៍ ៤.២.១៥. ឧបមាថាធនាគារបានឱ្យ លោកធីខ្ចីប្រាក់ \$10000 ដោយមិនបានសងប្រាក់អ្វីទាំងអស់ក្នុងរយៈពេល 6 ខែដំបូង ហើយបន្ទាប់មកសង \$600 ក្នុងមួយខែ សម្រាប់ រយៈពេល 1 ឆ្នាំ និង \$500 ក្នុងមួយខែសម្រាប់រយៈពេល1 ឆ្នាំបន្ទាប់ ។ តើអត្រាការប្រាក់សមមូលប្រចាំឆ្នាំដែលគិត លើកម្ចីនេះស្មើប៉ុន្មាន ?

ដំណោះស្រាយ

យើងអាចតាងលំហូរសាច់ ប្រាក់នៃកម្ចីនេះ ដោយដ្យាក្រាមខាងក្រោម៖



$PV = \$10000$, $i = ?$ ឬ $J_{12} = ?$

យើងសង្កេតឃើញថាការបង់ប្រាក់ប្រចាំគ្រានេះផ្សំឡើងពី Deferred Annuity ពីរដែលមាន ទឹកប្រាក់ត្រូវបង់ ខុស គ្នា និងចន្លោះអវត្តមាននៃការបង់ ប្រាក់ខុសគ្នា ។ យើងអាចសរសេរសង្ខេបបានដូចខាងក្រោម៖

$$PV = \$600 \times \frac{1-(1+i)^{-12}}{i} \times (1+i)^{-6} + \$500 \times \frac{1-(1+i)^{-12}}{i} \times (1+i)^{-18}$$

ឬ

$$\begin{aligned} f(i) &= \$10\,000 - \$600 \times \frac{1-(1+i)^{-12}}{i} \times (1+i)^{-6} \\ &+ \$500 \times \frac{1-(1+i)^{-12}}{i} \times (1+i)^{-18} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ក្រោយពីធ្វើតេស្តដើម្បីរក តម្លៃចាប់ផ្តើម i រួចហើយយើងបាន៖

$$J_{12}^{(1)} = 19\% \ , \ \left(i = \frac{0.19}{12}\right) \qquad \text{នោះ} \qquad f\left(\frac{0.19}{12}\right) = -14.2340 < 0$$

$$J_{12}^{(2)} = 20\% \ , \ \left(i_2 = \frac{0.2}{12}\right) \qquad \text{នោះ} \qquad f\left(\frac{0.2}{12}\right) = 125.9671 > 0$$

តាមរូបមន្ត(៤.១២) $\quad J_m = J_m^{(1)} - f(i_1) \times \dfrac{J_m^{(2)} - J_m^{(1)}}{f(i_2) - f(i_1)}$

យើងបាន

$$\begin{aligned} J_{12} &= J_{12}^{(1)} - f(i_1) \times \frac{J_{12}^{(2)} - J_{12}^{(1)}}{f(i_2) - f(i_1)} \\ &= 0.19 - (-14.2340) \times \frac{0.2 - 0.19}{125.9671 + 14.2340} \\ &= 0.1910 \end{aligned}$$

តាមនិយមន័យអត្រា សមមូលយើងបាន $1 + J_1 = \left(1 + \frac{J_{12}}{12}\right)^{12}$

នាំឱ្យ

$$J_1 = \left(1 + \frac{0.1910}{12}\right)^{12} - 1 = 0.2086$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{អត្រាជាក់លាក់ (Annual effective rate) គឺ } 20.86\%}$ ។

៤.៣. ការបង់ប្រាក់ប្រចាំគ្រាទូទៅ

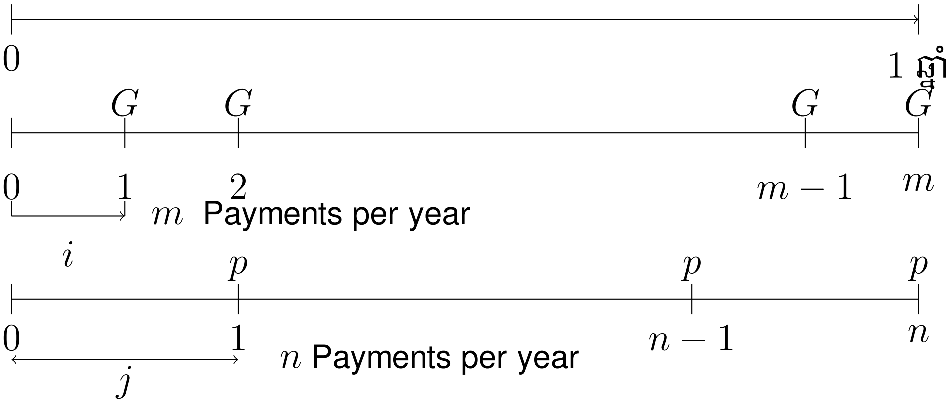
ការសិក្សា Annuity កន្លងមកយើងសន្មតយកថ្ងៃនៃ ការបង់ប្រាក់របស់វាធ្វើនៅពេលជាមួយគ្នានឹងពេលធ្វើ មូលធនកម្មការប្រាក់ ។ តែនៅខណៈនេះយើងលើក យក General Annuity ដែលរយៈពេលនៃការបង់ប្រាក់និងរយៈពេលធ្វើមូលធនកម្មការ ប្រាក់មិនស្មើគ្នា ឬធ្វើនៅពេលផ្សេងគ្នា។

៤.៣.១. ការបំលែង General Annuity ជា Simple Annuity

General Annuity អាចបំលែងទៅជា Simple Annuity សមមូលតាមវិធីពីរយ៉ាងគឺ៖

ក. ដោយប្តូរអត្រាការប្រាក់ដែល គេឱ្យទៅជាអត្រាសមមូលដែល រយៈពេល ធ្វើមូលធន កម្មរបស់វាស្មើនឹងរយៈពេលនៃការបង់ប្រាក់ ។

ខ. ដោយជំនួសចំនួនប្រាក់ត្រូវបង់ G (គេឱ្យ) ដោយចំនួនប្រាក់សមមូល P ដែលត្រូវ បង់នៅចុងនៃដំណាក់កាលចំពេលធ្វើមូលធនកម្មការប្រាក់ ។ ដើម្បីងាយស្រួល បកស្រាយ យើងគូសដ្យាក្រាមនៃការបង់ប្រាក់ សំរាប់រយៈពេលមួយឆ្នាំ រួចធ្វើការ ប្រៀបធៀប៖



- G : given payment
- i : given interest rate per period
- p : ទឹកប្រាក់សមមូលដែលត្រូវរក
- i' : អត្រាសមមូលនឹង i ដែលត្រូវរក

តាមដ្យាក្រាម និងតាមនិយមន័យនៃអត្រា សមមូល យើងបាន $(1+i)^n = (1+i')^m$
តម្លៃអនាគតនៃ Annuity ទាំងពីរនៅចុងឆ្នាំ (1 ឆ្នាំ) ត្រូវតែស្មើគ្នាគឺ

$$p \times s_{\overline{n}|i} = G \times s_{\overline{m}|i'} \text{ ឬ } p \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$
$$= G \times \frac{(1+i')^m - 1}{i'} (**)$$

តាម (*) និង (**) យើងទាញ បាន

$$\frac{p}{i} = \frac{G}{i'} \text{ នោះ} p = G \times \frac{i}{i'} = G \times \frac{i}{(1+i)^{\frac{n}{m}} - 1} = \frac{G}{s_{\overline{\frac{n}{m}}|i}}$$

ឧទាហរណ៍ ៤.៣.១. ចូរបំលែង Annuity នៃការបង់ប្រាក់ប្រចាំឆមាស ចំនួន $500 ជា Annuity សមមូលដោយមាន ការបង់ ប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំតាមអត្រាឆ្នាំ 8% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំឆ្នាំ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $G = \$500$, $m = 2$, $n = 1$, $i = 0.08$
តាមរូបមន្ត $p = \dfrac{G}{s_{\overline{\frac{n}{m}}|i}}$
យើងបាន

$$p = \frac{\$500}{s_{\overline{\frac{1}{2}}|i}} = \frac{\$500}{0.49038} = \$1\,019.62$$

ដូចនេះ យើងបាន

Simple Annuity សមមូល មានប្រាក់បង់ប្រចាំគ្រា $p = \$1\,019.62$ និងអត្រាការប្រាក់ប្រចាំគ្រា 8% ។

៤.៣.២. ការបង់ប្រាក់ប្រចាំគ្រានិរន្តរ៍ (Perpetuity)

៤.៣.២.១. និយមន័យ

និយមន័យ ៤.៣.១. **ការបង់ប្រាក់ប្រចាំគ្រានិរន្តន៍** (Perpetuity) គឺ ជា Annuity ដែល ការបង់ប្រាក់ចាប់ផ្តើម នៅកាលបរិច្ឆេទ មួយ ជាក់លាក់ ហើយបន្តរហូតគ្មានទីបញ្ចាប់ ។

នៅទីនេះយើងលើកយក Ordinary Perpetuity ដែលការបង់ប្រាក់ថេរគ្មាន ទីបញ្ចប់ ហើយធ្វើនៅចុងដំណាក់ កាលនៃការធ្វើមូលធនកម្មការប្រាក់មកសិក្សា ។

យើងសន្មតយក i ជា អត្រាការប្រាក់ប្រចាំគ្រា និង p ជា ចំនួនប្រាក់ដែលបង់ 1 លើកៗ ដូចបង្ហាញ តាម ដ្យាក្រាម ខាងក្រោម៖

៤.៣.២.២. តម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃ Perpetuity

តាមដ្យាក្រាមនៃ Perpetuity យើងសង្កេតឃើញថា៖

$$PV = p(1+i)^{-1} + p(1+i)^{-2} + p(1+i)^{-3} + \cdots + p(1+i)^{-n} + \cdots \tag{$\star$}$$

សមភាព(*)ជាស៊េរីដែលតំលៃ(ផលបូក)ស្មើនឹងលីមីតនៃផ្នែកស៊េរី កាលណា $n \to +\infty$ ផ្នែកនៃស៊េរី (*) យើងតាងដោយ

$$\begin{aligned} PV_n &= p(1+i)^{-1} + p(1+i)^{-2} + p(1+i)^{-3} + \cdots + p(1+i)^{-n} + \cdots \\ &= p \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \end{aligned}$$

យើងបាន

$$PV = \lim_{n\to+\infty} PV_n = \lim_{n\to+\infty}\left[p \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] = \frac{p}{i}$$

ដូចនេះ យើងបានរូបមន្តតម្លៃ បច្ចុប្បន្ន Perpetuity គឺ

$$\boxed{PV = \frac{p}{i}} \qquad (៤.១៣)$$

ចំណាំ៖ ចំពោះតម្លៃអនាគតនៃ Perpetuity យើងមិនអាចកំណត់បានទេ ព្រោះ ការបង់ធ្វើឡើងជាបន្តបន្ទាប់ គ្មានទីបញ្ចាប់ ។

ឧទាហរណ៍ ៤.៣.២. តើត្រូវការថវិកាចាំបាច់ចំនួន ប៉ុន្មាន ដើម្បីបង្កើតមូលនិធិ អាហារូបករណ៍ (លាភី) ដែលត្រូវ ឧបត្ថម្ភ$10000 រៀងរាល់ឆ្នាំ បើ មូលនិធិនេះ នឹងទទួលបានការប្រាក់តាមអត្រាឆ្នាំ 7% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំឆ្នាំ ហើយការឧបត្ថម្ភលើកដំបូង នៅចុងឆ្នាំ ទី1 បន្ទាប់ពីថ្ងៃបង្កើតមូលនិធិ។

ដំណោះស្រាយ

រកចំនួនថវិកាដើម្បីបង្កើតមូលនិធិ

យើងមាន $p = \$10\,000$, $i = 7\% = 0.07$

តាមរូបមន្ត $PV = \dfrac{p}{i}$

យើងបាន $PV = \dfrac{\$10\,000}{0.07} = \$142\,857.14$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{ដើម្បីបង្កើតមូលនិធិយើង ត្រូវការថវិការចំនួន } \$142\,857.14}$ ។

៤.៣.៣. ការបង់ប្រាក់ប្រចាំគ្រាប្រែប្រួល

កន្លងមកយើង លើកយក Annuity ដែលការបង់ប្រាក់ថេរ ។ ប៉ុន្តែ ក្នុងជីវភាពជាក់ស្តែងការដាក់សន្សំ ឬការ រំលោះបំណុលពុំប្រព្រឹត្ត ទៅ តាមបែបនេះ ជារៀងរហូតទេ ។ នៅចំណុចនេះ យើងលើកយក ការបង់ប្រាក់ ជាកំណើន នព្វន្ត ឬកំណើនធរណីមាត្រអនុវត្ត ក្នុង ថេរវេលាថេរ មកសិក្សា ។

៤.៣.៣.១. Annuity ដែលប្រាក់បង់ប្រចាំគ្រាជាកំណើននព្វន្ត

ឧបមាថា ការដាក់សន្សំមួយត្រូវ បានបង់ប្រាក់ប្រចាំគ្រាជា កំណើននព្វន្ត ដែល ត្រូវតាង ដោយដ្យាក្រាមខាងក្រោម

ក. តម្លៃបច្ចុប្បន្ន (Present Value)

តាមដ្យាក្រាម និងនិយមន័យតម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃ Annuity យើងបាន៖

$$PV = p(1+i)^{-1} + 2p(1+i)^{-2} + 3p(1+i)^{-3} + \cdots + np(1+i)^{-n} \qquad (1)$$

យក (1) គុណនឹង $(1+i)$ យើងបាន

$$(1+i)\,PV = p + 2p(1+i)^{-1} + 3p(1+i)^{-2} + \cdots + np(1+i)^{-(n-1)} \qquad (2)$$

យក (2) ដក (1) យើងបាន

$$\begin{aligned} i \cdot PV &= p\left[1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + (1+i)^{-(n-1)}\right] - np(1+i)^{-n} \\ &= p\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}}\right] - np(1+i)^{-n} \\ &= p\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \times (1+i)\right] - np(1+i)^{-n} \end{aligned}$$

ដូចនេះ

$$\boxed{PV = \frac{p}{i}\left[(1+i)\,a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}\right]} \qquad (៤.១៤)$$

$$\boxed{\text{ឬ} \qquad PV = \frac{p}{i}\left(\ddot{a}_{\overline{n}|i} - nX^n\right)} \qquad (៤.១៥)$$

ដែល $\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)\,a_{\overline{n}|i}, \;\; X = (1+i)^{-1}$

ខ. តម្លៃអនាគត (Accumulated value)

យើងដឹងថា $FV = PV(1+i)^n$

យើងបាន
$$\begin{aligned} FV &= \frac{p}{i}\left[(1+i)\,a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}\right] \\ &= \frac{p}{i}\left[(1+i)\,a_{\overline{n}|i}(1+i)^{n} - n\right] \\ &= \frac{p}{i}\left[(1+i)\,s_{\overline{n}|i} - n\right] \end{aligned}$$

ដូចនេះ
$$\boxed{FV = \frac{p}{i}\left[(1+i)\,s_{\overline{n}|i} - n\right]} \qquad (៤.១៦)$$

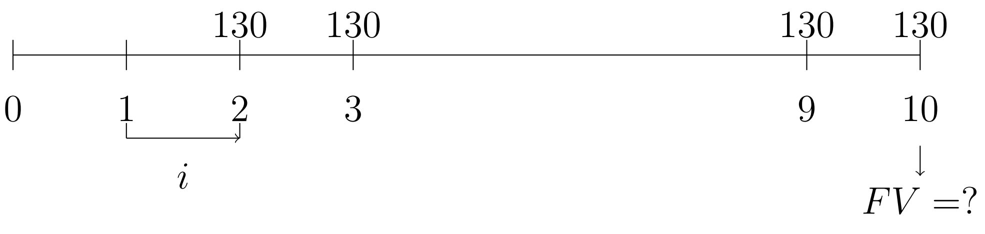
$$\boxed{\text{ឬ} \qquad FV = \frac{p}{i}\left(\ddot{s}_{\overline{n}|i} - n\right)} \qquad (៤.១៧)$$

ដែល $\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)\,s_{\overline{n}|i}$

ឧទាហរណ៍ ៤.៣.៣. លោកសំធ្វើវិនិយោគក្នុងមូល និធិវិនិយោគមួយនូវ ទឹកប្រាក់ $\$1000$ ជារៀងរាល់ចុងឆ្នាំ សម្រាប់ រយៈពេល 10ឆ្នាំ ដែលទទួលបានការប្រាក់តាម អត្រាឆ្នាំ 13% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំឆ្នាំ ។ មូលនិធិនេះបាន បង់ការប្រាក់ នៅរៀងរាល់ចុងឆ្នាំ និងមិនអនុញ្ញាតិឱ្យវិនិយោគតិចជាង $\$1000$ ឡើយ ។ លោកសំ បាន យកការ ប្រាក់ ប្រចាំឆ្នាំ របស់ខ្លួនទៅដាក់ក្នុង គណនីសន្សំនៃធនាគារមួយ ដែលផ្តល់ការប្រាក់តាមអត្រាឆ្នាំ 10% ធ្វើមូលធន កម្មប្រចាំឆ្នាំ ។ តើនៅចុងឆ្នាំទី 10 គាត់មានប្រាក់ប៉ុន្មានទាំង ក្នុងមូលនិធិ និងគណនីសន្សំ ?

ដំណោះស្រាយ

នៅចុងឆ្នាំទី 10 ក្នុងមូលនិធិវិនិយោគ លោកសំមានប្រាក់តែ$\$10000$ គត់ ព្រោះ ការប្រាក់ត្រូវបាន មូលនិធិ ផ្តល់ឱ្យគាត់រួចហើយ ។ ការប្រាក់នេះគាត់យកដាក់ ក្នុងគណនីសន្សំរបស់ខ្លួន នៅចុងឆ្នាំ នីមួយៗដែលចាប់ផ្តើម ពី ចុងឆ្នាំទី 2 ទៅ ដូចបង្ហាញតាមដ្យាក្រាម ខាងក្រោម៖



ការប្រាក់ដែលផ្តល់ដោយ មូលនិធិលើកដំបូងគឺ $I = \$1\,000 \times 0.13 = \$130$

តាមដ្យាក្រាមយើងមាន $i = 0.1$, $n = 9$, $p = \$130$, $(p = I)$
តាមរូបមន្ត $FV = \frac{p}{i}\left[(1+i)\, s_{\overline{n}|i} - n\right]$
យើងបាន

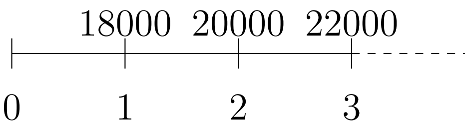
$$FV = \frac{\$130}{0.1}\left[(1+0.1)\, s_{\overline{9}|0.1} - 9\right] = \$7\,718.65$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{នៅចុងឆ្នាំទី 10 លោកសំមានប្រាក់}\$7\,718.65 + \$10\,000 = \$17\,718.65}$ ។

ឧទាហរណ៍ ៤.៣.៤. ចូររកចំនួនប្រាក់នៅពេល បច្ចុប្បន្នរបស់មូលនិធិមួយ ដែល ត្រូវឧបត្ថម្ភដល់ វិស័យអប់រំ និង សុខាភិបាល ។ មូលនិធិចាប់ផ្តើមឧបត្ថម្ភនូវ ទឹកប្រាក់ចំនួន$18000 នាចុងឆ្នាំទីមួយ និងចុងឆ្នាំបន្តបន្ទាប់បង្កើន ការ ឧបត្ថម្ភដោយថែម $2000 ជារៀងរហូត (គ្មាន ទីបញ្ចាប់) មូលនិធិ នេះទទួលការប្រាក់ តាមអត្រាឆ្នាំ 10% ធ្វើមូលធន កម្មប្រចាំឆ្នាំ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមសម្មតិកម្មយើងអាចតាង ការបង់ប្រាក់នេះដោយ ដ្យាក្រាមៈ



តាមនិយមន័យនៃតម្លៃ បច្ចុប្បន្នរបស់ Perpetuity

$$\begin{aligned} PV &= \$18\,000(1+0.1)^{-1} + \$20\,000(1+0.1)^{-2} + \$22\,000(1+0.1)^{-3} + \cdots \\ &= \$18\,000(1.1)^{-1} + \$20\,000(1.1)^{-2} + \$22\,000(1.1)^{-3} + \cdots \qquad (\star) \end{aligned}$$

យក $(\star)$ គុណនឹង $1 + i = 1.1$ យើងបាន

$$0.1PV = \$18\,000 + \$2\,000\left[(1.1)^{-1} + (1.1)^{-2} + (1.1)^{-3} + \cdots\right] \qquad (\star\star)$$

យក $(\star\star)$ ដក $(\star)$ យើងបាន

$$0.1PV = \$18\,000 + \$2\,000\left[(1.1)^{-1} + (1.1)^{-2} + (1.1)^{-3} + \cdots\right]$$

យើងតាងផ្នែកនៃស៊េរី

$$S_n = (1.1)^{-1} + (1.1)^{-2} + (1.1)^{-3} + \cdots + (1.1)^{-n}$$

$$\begin{aligned}
&= (1.1)^{-1} \times \frac{1-(1.1)^{-n}}{1-(1.1)^{-1}} \\
&= \frac{1-(1.1)^{-n}}{0.1} \\
&= 10 \quad \text{កាលណា} \quad n \to +\infty
\end{aligned}$$

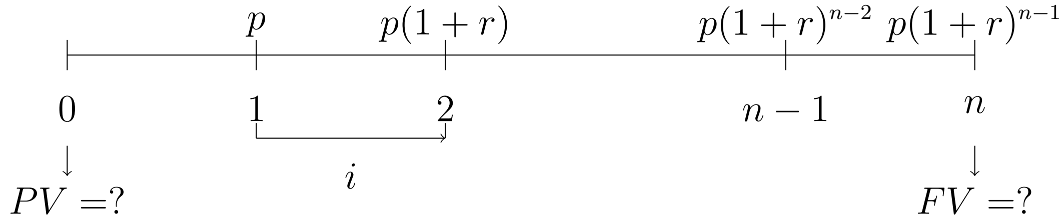
យើងអាចសរសេរ $0.1PV = \$18\,000 + \$2\,000\,(10) = \$38\,000$
យើងបាន

$$PV = \frac{\$38\,000}{0.1} = \$380\,000$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំនួនទឹកប្រាក់ចាំបាច់ សម្រាប់បង្កើតមូលធននេះគឺ } \$380\,000}$ ។

៤.៣.៣.២. ការប្រាក់បង់ប្រចាំគ្រាជាកំណើនធរណីមាត្រ

ឧបមាថាការដាក់សន្សំមួយ ដែលត្រូវបង់ប្រាក់ប្រចាំគ្រា ជាកំណើនធរណីមាត្រ ដែលមានរេសុង $(1+r)$ ដែល r ជាអត្រាកំណើន ហើយមានi ជាអត្រាការប្រាក់ប្រចាំគ្រា ដូចបង្ហាញតាមដ្យាក្រាមខាងក្រោម៖



ក. តម្លៃបច្ចុប្បន្ន

តាមនិយមន័យ និងដ្យាក្រាមខាងលើយើងបាន៖

$$\begin{aligned}
PV &= \frac{p}{1+i} + \frac{p(1+r)}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{p(1+r)^{n-1}}{(1+i)^n} \\
&= p\left[\frac{1}{1+i} + \frac{1+r}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{(1+r)^{n-1}}{(1+i)^n}\right]
\end{aligned}$$

$$= p\left[\frac{1}{1+i}\times\frac{1-\left(\dfrac{1+r}{1+i}\right)^n}{1-\left(\dfrac{1+r}{1+i}\right)}\right]$$
$$= p\times\frac{1-\left(\dfrac{1+r}{1+i}\right)^n}{i-r}$$

ដូចនេះ រូបមន្តតម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃ Annuity នេះគឺ

$$\boxed{PV = p\times\frac{1-\left(\dfrac{1+r}{1+i}\right)^n}{i-r}} \qquad (៤.១៨)$$

កំណត់ចំណាំ៖ រូបមន្ត $PV = p\times\dfrac{1-\left(\dfrac{1+r}{1+i}\right)^n}{i-r}$ មិនអាចអនុវត្តបានក្នុងករណី អត្រាកំណើនស្មើនឹង អត្រាការប្រាក់នោះទេ ។ ប៉ុន្តែ ដើម្បីគណនារកតម្លៃ បច្ចុប្បន្ននៃ Annuity ក្នុងករណីនេះ យើងត្រូវត្រឡប់ ទៅរក មូលដ្ឋានគ្រឹះវិញ ។

$$\begin{aligned}
PV &= \frac{p}{1+i}+\frac{p(1+r)}{(1+i)^2}+\cdots+\frac{p(1+r)^{n-1}}{(1+i)^n}\\
&= \frac{p}{1+i}+\frac{p(1+i)}{(1+i)^2}+\cdots+\frac{p(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n} \qquad , \quad i=r\\
&= \frac{p}{1+i}+\frac{p}{1+i}+\cdots+\frac{p}{1+i}\\
&= \frac{np}{1+i}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ ក្នុងករណី $i=r$ យើងបានរូបមន្ត

$$\boxed{= \frac{np}{1+i}} \qquad (៤.១៩)$$

ខ. តម្លៃអនាគត (Accumulated Value)

យើងដឹងថា

$$\begin{aligned}FV &= PV(1+i)^n\\ &= p\times\frac{1-\left(\dfrac{1+r}{1+i}\right)^n}{i-r}\times(1+i)^n\\ &= p\times\frac{(1+i)^n-(1+r)^n}{i-r}\end{aligned}$$

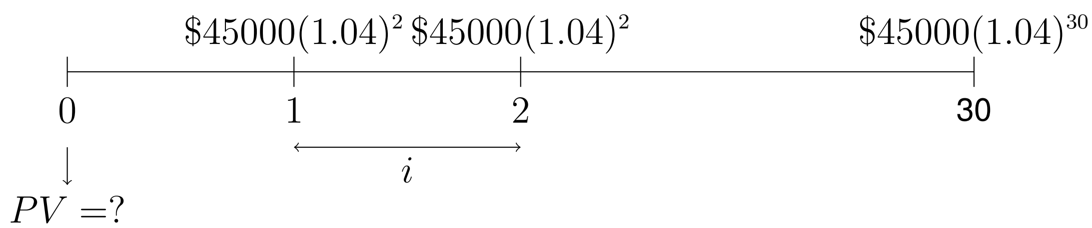
ដូចនេះ រូបមន្តតម្លៃអនាគតនៃ Annuity នេះគឺ

$$\boxed{FV = p\times\frac{(1+i)^n-(1+r)^n}{i-r}} \qquad (៤.២០)$$

ឧទាហរណ៍ ៤.៣.៥. ចៅក្រមម្នាក់កំពុងតែព្យាយាម គណនាតម្លៃបច្ចុប្បន្ន (Discounted Value) នៃផលចំណេញ អនាគត របស់បុរសម្នាក់ដែលមាន គ្រោះថ្នាក់ចរាចរ ។ នៅ ពេលដែល គាត់មាន គ្រោះថ្នាក់នោះ គាត់ទទួលផល ចំណេញបាន $\$45000$ ក្នុងមួយឆ្នាំ និង គាត់គ្រោងទទួលប្រាក់ ចំណេញ ក្នុងកំណើន 4% ក្នុង មួយឆ្នាំ។ ឥឡូវនេះ គាត់នៅ ត្រូវមានអាយុ 30 ឆ្នាំទៀត ទើបដល់ អាយុចូល និវត្តន៍ ។ បើ តម្លៃមូលធន លើទីផ្សារ $J_1 = 5\%$ តើតម្លៃ បច្ចុប្បន្ននៃផលចំណេញ អនាគត របស់គាត់មានប៉ុន្មាន ? (យើង សន្មតថាប្រាក់ចំណេញទទួលបាននៅចុងឆ្នាំនីមួយៗ)។

ដំណោះស្រាយ

តាមសម្មតិកម្មយើងមាន $p = \$45\,000$, $n = 30$, $r = 4\% = 0.04$, $i = 5\%$ ហើយលំហូរសាច់ប្រាក់ទាំងនេះ យើងកំណត់តាងដោយដ្យា ក្រាមខាងក្រោម៖



តាមរូបមន្ត

$$PV = p\times\frac{1-\left(\dfrac{1+r}{1+i}\right)^n}{i-r}$$

យើងបាន

$$PV = \$45\,000 \times \frac{1 - \left(\dfrac{1+0.04}{1+0.05}\right)^{30}}{0.05 - 0.04} = \$1\,122\,979.32$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តម្លៃបច្ចុប្បន្នរបស់បុរសនោះគឺ } \$1\,122\,979.32}$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

លំហាត់ ៤.១. ចូររកតំលៃអនាគតនៃការដាក់សន្សំ ៖

ក. $500/ខែ សំរាប់រយៈពេល៥ឆ្នាំ ៣ខែ ដោយទទួលការប្រាក់ 10% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំខែ?

ខ. $800 /ត្រីមាស សំរាប់រយៈពេល ៦ឆ្នាំ ៣ខែ ទទួលការប្រាក់ 14.25% ធ្វើមូលធនកម្ម ប្រចាំត្រីមាស ?

គ. $1 000 /ឆមាស សំរាប់រយៈពេល ១០ឆ្នាំ ទទួលការប្រាក់ 12.23% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំឆមាស ?

លំហាត់ ៤.២. លោកសម្បត្តិបានដាក់ក្នុងគណនីសន្សំរបស់ខ្លួននូវទឹកប្រាក់ថេរចំនួន $500 រៀងរាល់ចុងឆមាស សំរាប់ រយៈពេល 5 ឆ្នាំ និង ក្រោយមក ដាក់ $800 សំរាប់ រយៈពេល 3 ឆ្នាំបន្ទាប់ ។ ចូររក តំលៃ អនាគត ដែលគាត់ ទទួលបាន បើបានទទួលការប្រាក់ពីធនាគារតាម អត្រាឆ្នាំ 11% ធ្វើមូលធនកម្ម ប្រចាំឆមាស។

លំហាត់ ៤.៣. ចូររកតំលៃអនាគតនៃការដាក់សន្សំ $300 រៀងរាល់ចុងត្រីមាសសំរាប់រយៈពេល 8 ឆ្នាំ បើធនាគារ ផ្តល់ ការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ 10% ធ្វើមូលធនកម្ម ប្រចាំត្រីមាស សំរាប់រយៈពេល 5 ឆ្នាំដំបូង និង 12% ធ្វើ មូលធនកម្ម ប្រចាំត្រីមាសសំរាប់រយៈពេល នៅសល់ ។

លំហាត់ ៤.៤. ចាប់ពីថ្ងៃទី ៣០ ខែ មិថុនា ឆ្នាំ ១៩៩២ និងរៀងរាល់ ៣ ខែម្តង រហូតដល់ថ្ងៃទី ៣១ ខែ ធ្នូ ឆ្នាំ ១៩៩៦ អ្នកស្រី សាន្ត បានដាក់ $300 ក្នុងគណនី សន្សំរបស់ខ្លួន ។ ចាប់ផ្តើមពីថ្ងៃទី៣០ ខែកញ្ញា ឆ្នាំ១៩៩៧ អ្នកស្រីបាន ដកជាប្រចាំ រៀងរាល់ត្រីមាស នូវទឹកប្រាក់ចំនួន $500 ។ ចូររក សមតុល្យក្នុងគណនី របស់គាត់បន្ទាប់ពីដកនៅថ្ងៃទី ៣០ ខែ មិថុនា ឆ្នាំ ១៩៩៩ បើគណនីទទួលការប្រាក់តាមអត្រាប្រចាំ ឆ្នាំ 8% ធ្វើ មូនធនកម្ម ប្រចាំត្រីមាស រហូតដល់ ថ្ងៃទី ៣១ ខែ មិនា ឆ្នាំ ១៩៩៥ និង 6% ធ្វើមូលធន កម្មប្រចាំត្រីមាសសំរាប់រយៈពេល នៅសល់។

លំហាត់ ៤.៥. បុរសម្នាក់ចង់ទទួលបានប្រាក់ $200 000 សំរាប់មូនិធិចូលនិវត្តន៍ផ្ទាល់ខ្លួន។ គាត់ គំរោងដាក់សន្សំ លើកទី ១ នៅថ្ងៃទី១ ខែមិនា ឆ្នាំ១៩៨៤ និង ចុងក្រោយបង្អស់ គឺនៅថ្ងៃទី១ ខែកញ្ញា ឆ្នាំ២០០៥។ ចូររក ចំនួន ប្រាក់ ដែល គាត់បានដាក់ មួយលើកៗ បើគាត់ដាក់ ៖

ក. ប្រចាំឆមាសហើយមូលនិធិផ្តល់ ការប្រាក់តាមអត្រាឆ្នាំ 12.5% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំឆមាស

ខ. ប្រចាំខែក្នុងមូលនិធិដែលផ្តល់ ការប្រាក់តាមអត្រាឆ្នាំ 12.5% ធ្វើមូនធនកម្មប្រចាំខែ

លំហាត់ ៤.៦. ក្រុមហ៊ុនរុករកប្រេងកាតត្រូវការ ម៉ាស៊ីន ខួងមួយ ហើយកំពុងធ្វើការពិចារណាថា តើត្រូវទិញ ម៉ាស៊ីនបែបនេះដែលមានតំលៃ $1 000 000 ឬមួយត្រូវជួលវាតាមតំលៃ $240 000 បង់នៅ រៀងរាល់ចុងឆមាស ។ តំលៃ ដែលរំលោះបាន មកវិញ គឺ $100 000 នៅចុង ឆ្នាំទី ៦ ជាអាយុកាលនៃម៉ាស៊ីន ។ តំលៃជួសជុល $10 000 ក្នុងរយៈពេល ៦ខែ ប៉ុន្តែត្រូវបង់ដោយម្ចាស់របស់វាបើ ម៉ាស៊ីនត្រូវគេជួល ។ បើក្រុមហ៊ុនអាចទទួលបានកំរៃតាមអត្រា ឆ្នាំ 10% លើ មូលធនរបស់ខ្លួន ដោយ ធ្វើ មូលធនកម្ម ប្រចាំឆមាស ។ ចូរអ្នក អោយ ដំបូន្មាន ដល់ ក្រុមហ៊ុនថា តើត្រូវជួលឬ ត្រូវ ទិញម៉ាស៊ីននោះ?

លំហាត់ ៤.៧. គ្រួសារមួយត្រូវការខ្ចីថវិកាចំនួន $5 000 សំរាប់ជួសជុលផ្ទះ។ កំចីនេះត្រូវសងវិញប្រចាំខែសំរាប់ រយៈពេល 5 ឆ្នាំ។

ក. បើគេទៅខ្ចី ពីក្រុមហ៊ុនផ្តល់ ឥណទាន នោះអត្រាការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ 21% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំខែ។

ខ. បើគេប្រើបណ្ណ័ឥណទាន *(Credit Card)* របស់ខ្លួននោះអត្រាការប្រាក់មាន 18% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំខែ។

គ. បើគេទៅខ្ចីប្រាក់ពីធនាគារ នោះអត្រាការប្រាក់នឹងត្រូវជា 15% ធ្វើមូលធនកម្ម ប្រចាំខែ ។ ចូររកចំនួនប្រាក់ដែលត្រូវបង់ក្នុងខែ និមួយៗនិងចំនួនប្រាក់សរុបដែលត្រូវបង់ ក្នុងកំចី និមួយ ៗ រៀងគ្នា។

លំហាត់ ៤.៨. គោលនយោបាយ នៃ ការបង់ប្រាក់ថ្លៃ ធានា រ៉ាប់រងជីវិតមាន ពីរបៀប ៖ TI1 អាចត្រូវបង់ជារៀង រាល់ឆ្នាំជាមុន ឬTI2 អាចត្រូវ បានបង់ ជារៀងរាល់ខែជាមុន ។ តើ ការបង់ ប្រាក់ប្រចាំខែដែល នឹង ត្រូវសមមូល នឹងការបង់ប្រាក់ចំនួន $120/1ឆ្នាំ មានប៉ុន្មានបើក្រុមហ៊ុន ផ្តល់ការប្រាក់តាមអត្រា ឆ្នាំ 11% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំខែ។

លំហាត់ ៤.៩. ប្រាក់ឈ្នួលប្រចាំខែសំរាប់ផ្ទះល្វែងមួយក្នុងទីក្រុងគឺ $520 ត្រូវបង់នៅរៀងរាល់ដើមខែ ។ បើមូលធនលើទីផ្សារតំលៃ $J_{12} = 9\%$

ក. តើផ្ទះនេះមានថ្លៃឈ្នួលប៉ុន្មាន បើសិនជាគេបង់ប្រាក់មុនសំរាប់រយៈពេល ១ឆ្នាំ ?

ខ. តើផ្ទះនេះ មានថ្លៃឈ្នួលប៉ុន្មាន បើគេបង់ប្រាក់មុនសំរាប់រយៈពេល ៥ឆ្នាំ ?

លំហាត់ ៤.១០. បំណុលចំនួន $1 000 ដែលមានការប្រាក់ $J_{12} = 18\%$ ត្រូវសងអោយអស់ក្នុងរយៈពេល ១៨ខែ ដោយបង់ប្រាក់ប្រចាំខែស្មើគ្នានឹង ការសងលើទី ១ គឺត្រូវធ្វើនៅថ្ងៃនេះ ។ ចូររកប្រាក់សំរាប់បង់ ប្រចាំខែនិមួយៗ ?

លំហាត់ ៤.១១. ចូរគណនាបំណុលដែលបានខ្ចីដោយ បុរសម្នាក់ បើតាមកិច្ចសន្យា គាត់ត្រូវសង រៀងរាល់ឆមាសនូវទឹកប្រាក់ $500 សំរាប់រយៈពេល 7 ឆ្នាំហើយការសងលើទី១ចាប់ផ្ដើមនៅចុង ឆ្នាំទី ៤ បន្ទាប់ពីថ្ងៃ ខ្ចី ។ បំណុលនេះ គិតការប្រាក់ ៖

ក. $J_2 = 17\%$?

ខ. $J_2 = 7\%$?

លំហាត់ ៤.១២. នៅថ្ងៃទី ០១ ខែ កក្កដា ឆ្នាំ ១៩៩៦ បុរសម្នាក់បានខ្ចីប្រាក់ពីធនាគារដោយសន្យា សងវិញរៀងរាល់ ឆមាសនូវទឹកប្រាក់ $500 សំរាប់រយៈពេល ៦ឆ្នាំ ហើយចាប់អនុវត្តសងពីថ្ងៃទី ០១ ខែ មករា ឆ្នាំ ២០០០ ទៅ ។ ចូរគណនាទឹកប្រាក់ ដែលគាត់បានខ្ចី បើធនាគារគិតការប្រាក់ តាមអត្រា ៖

ក. $J_2 = 11.25\%$?

ខ. $J_2 = 9\%$?

លំហាត់ ៤.១៣. កុមារអាយុ 8 ឆ្នាំម្នាក់បានទទួលមរតកចំនួន $1 000 000 ។ ច្បាប់តំរូវអោយ តំកល់ប្រាក់នេះ នៅ ក្នុងមូលនិធិមួយរហូតដល់កុមារមានអាយុ 18 ឆ្នាំ ។ មាតា បិតារបស់ កុមារ នេះបានសំរេចអោយមូលនិធិបង់ប្រាក់ស្មើៗគ្នាជារៀងរាល់ឆ្នាំចំនួន ២០លើកដល់កូនរបស់គាត់ ដោយចាប់អនុវត្តនៅពេលដែលកូននេះ មានអាយុ 18 ឆ្នាំ។
ចូរគណនាប្រាក់បង់ប្រចាំឆ្នាំ បើមូលនិធិផ្ដល់ការប្រាក់ $J_1 = 10\%$?

លំហាត់ ៤.១៤. លោករតនៈបានទិញរថយន្តមួយគ្រឿង នៅថ្ងៃទី 1 ខែ កញ្ញា ដោយបង់ $2 000 និងដោយយល់ ព្រមបង់ចំនួន 36 ដងជារៀងរាល់ ខែនូវទឹកប្រាក់ $350 ការបង់ លើកទី 1 គឺនៅ ថ្ងៃទី 1 ខែ ធ្នូ ។ បើ គេគិត ការប្រាក់ តាមអត្រាឆ្នាំ 18% ដោយធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំខែចូររកតំលៃ សមមូលនៃ រថយន្តនោះនៅថ្ងៃទិញ

លំហាត់ ៤.១៥. ដាក់ប្រាក់ចំនួន $100 ក្នុងមួយខែសំរាប់រយៈពេល 3 ឆ្នាំ គ្មានធ្វើការដាក់ ឬ ដកអ្វីសោះអស់រយៈ ពេល 2 ឆ្នាំ និងដាក់ $200 រៀងរាល់ខែសំរាប់រយៈពេល 3 ឆ្នាំបន្ទាប់ ។ ការប្រាក់ដំបូងគឺ 8% ធ្វើមូលធន កម្មប្រចាំខែ និង ក្រោយមក ធ្លាក់មកត្រឹម 6% ធ្វើមូលធនកម្ម ប្រចាំខែចាប់តាំងពីថ្ងៃ នៃការបង់ $200 ដំបូង ។
ចូររកតំលៃអនាគតនៅពេលដែលដាក់ $200 ចុងក្រោយគេបង្អស់ ។

លំហាត់ ៤.១៦. ក្រុមហ៊ុនមួយទិញគ្រឿងចក្រមួយតំលៃ $30 000 ដោយបង់ $5 000 ដល់ដៃនិង $5 000 នៅ រាល់ចុងឆ្នាំនិមួយៗ ។ បើគេគិតការប្រាក់តាមអត្រាឆ្នាំ 10% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំឆ្នាំ

ក. តើការបង់ពេញមានប៉ុន្មានលើក?

ខ. តើការបង់ចុងក្រោយ បង្អស់មាន ទឹកប្រាក់ ចាំបាច់ចំនួនប៉ុន្មាន?(មួយឆ្នាំក្រោយ ពីការបង់ពេញចុងក្រោយបង្អស់)

លំហាត់ ៤.១៧. ចាប់ពីថ្ងៃទី ០១ ខែ កក្កដា ឆ្នាំ ១៩៨៦ រហូតដល់ថ្ងៃទី ០១ ខែ មករា ឆ្នាំ ១៩៩១ គ្រួសារមួយបាន ដាក់ប្រាក់ចំនួន $500 ជារៀងរាល់ឆមាសទៅក្នុងគណនីសន្សំពិសេស ដែលបង់ការប្រាក់ $J_2 = 11\%$ ។ ចាប់ផ្តើមពីថ្ងៃទី ០១ ខែ កក្កដា ឆ្នាំ ១៩៩៥ ពួកគេបានដកប្រាក់ចំនួន $800 ជារៀងរាល់ ឆមាសវិញ ។

ក. តើការដកប្រាក់ពេញ គេអាចធ្វើបានប៉ុន្មានដង ?

ខ. ចូរគណនាទឹកប្រាក់ដែលត្រូវដកបង្ហើយចុងក្រោយ និង កាលបរិច្ឆេទរបស់វា ?

លំហាត់ ៤.១៨. កំចីសំរាប់ទិញរថយន្តចំនួន $10 000 គិតការប្រាក់ $J_{12} = 12\%$ ត្រូវសងរំលោះអោយអស់ចំនួន n លើក ។ ការសងចំនួន $(n–1)$ លើកដំបូងមានទឹកប្រាក់ $263.34/ ខែ និង ទឹកប្រាក់ដែលសងនៅ ខែចុងក្រោយបង្អស់គឺ $263.24 ។ ចូរគណនា n ?

លំហាត់ ៤.១៩. កំចីចំនួន $20 000 ត្រូវសងវិញ ដោយ រំលោះជារៀងរាល់ ឆ្នាំនូវ ទឹកប្រាក់ $4 000/ឆ្នាំសំរាប់រយៈពេល 5 ឆ្នាំដំបូង និង $4 500/ឆ្នាំ សំរាប់ រយៈពេលបន្ត មកទៀតរហូតដល់អស់បំណុល។ ចូរគណនា ចំនួនគ្រានៃការបង់ប្រាក់ពេញទាំងអស់ និង ចំនួនប្រាក់ដែលត្រូវសងបង្គ្រប់នៅមួយ ឆ្នាំក្រោយបន្ទាប់ការបង់ពេញចុងក្រោយ ? សន្មតថា កំចីនេះគេគិតការប្រាក់ $J_1 = 18\%$?

លំហាត់ ៤.២០. នៅថ្ងៃទី ១០ ខែ វិច្ឆិកា ឆ្នាំ ១៩៩៨ លោក កល្យាណ បានទទួលប្រាក់កំចីចំនួន $4 000 គិតការប្រាក់ $J_{12} = 10\%$ ។ លោកកល្យាណនឹងត្រូវសងវិញដោយបង់ប្រាក់ប្រចាំខែចំនួន $250 ដែល ចាប់ផ្តើមពីថ្ងៃទី ១០ ខែ ធ្នូ ឆ្នាំ ១៩៩៩ ។ ចូរគណនាចំនួនគ្រាដែលបង់ប្រាក់ពេញ កាលបរិច្ឆេទ និង ចំនួនប្រាក់ដែលត្រូវបង់បង្គ្រប់ចុងក្រោយបង្អស់ ?

លំហាត់ ៤.២១. ក្រុមហ៊ុនហិរញ្ញវត្ថុ មួយបានកំណត់យក ការប្រាក់ 15% ជាមុន និង អនុញ្ញាតិអោយអតិថិជនរបស់ ខ្លួនសងបំណុលប្រចាំខែស្មើៗគ្នាចំនួន 12 លើក ។ ទឹកប្រាក់បង់ប្រចាំខែទទួលបាន ដោយចែកប្រាក់ ដើម និង ការប្រាក់សរុប នឹង 12 ។ ចូរគណនា J_{12} និង អត្រាជាក់លាក់ប្រចាំឆ្នាំ ?

លំហាត់ ៤.២២. នៅថ្ងៃទី ០១ ខែ កុម្ភៈ ឆ្នាំ ១៩៨៥ លោក ភក្តី បានធ្វើការដាក់ប្រាក់លើកទី ១ នៃការដាក់ប្រាក់ ជាស៊េរីប្រចាំឆ្នាំរបស់ខ្លួន ចំនួន $1 000 ទៅក្នុងគណនីសន្សំ។ ការដាក់ប្រាក់ចុងក្រោយរបស់គាត់គឺ ធ្វើនៅថ្ងៃទី ០១ ខែ កុម្ភៈ ឆ្នាំ ២០០១ ។ បើគណនីនោះទទួលការប្រាក់

$J_1 = 10.5\%$ នោះ សមតុល្យបន្ទាប់ការដាក់ប្រាក់ចុង ក្រោយមាន $42 472.13 ហើយគណនី នឹងមានប្រាក់ចំនួន $44 500.84 បើទទួលការប្រាក់ $J_1 = 11\%$ ។ ប៉ុន្តែ ជាក់ស្តែងគណនីមាន ប្រាក់ $43 500 តើអត្រាការប្រាក់ជាក់លាក់ដែលគណនី ទទួលបានស្មើប៉ុន្មាន ?

លំហាត់ ៤.២៣. រថយន្តមួយគ្រឿងលក់ក្នុងតំលៃ $600 ប៉ុន្តែម្ចាស់របស់វាបាន ព្រមព្រៀងលក់ អោយបុរសម្នាក់ ដោយបង់ $100 ដល់ដៃ នឹងបង់ $90 ប្រចាំខែសំរាប់រយៈពេល 6 ខែ។ ចូររកអត្រា J_{12} ?

លំហាត់ ៤.២៤. លោកសម្បត្តិ បានខ្ចីប្រាក់ចំនួន $1 600 ពីក្រុមហ៊ុនមួយ និង យល់ព្រមបង់ $160/1ខែ សំរាប់រយៈ ពេល 12 ខែ។ ចូររក J_{12} និង អត្រាជាក់លាក់ប្រចាំឆ្នាំ ?

លំហាត់ ៤.២៥. ហាងនាឡិកាមួយ បាន ប្រកាសលក់ នាឡិកា 1គ្រឿង ក្នុងតំលៃ $55 ឬមួយ ដោយបង់ $5 ប្រចាំ ខែសំរាប់រយៈពេល 12 ខែ ។ តើអត្រាប្រចាំឆ្នាំពិតប្រាកដ ដែលហាងនាឡិកា នោះគិតមានប៉ុន្មាន សំរាប់អ្នកទិញដែលបង់ប្រចាំខែ បើអ្នកទិញបង់ប្រាក់លើកទី 1 នៅថ្ងៃទិញ?

លំហាត់ ៤.២៦. ថ្មីៗនេះ ក្រុមហ៊ុនអភិវឌ្ឍន៍ *ABC* បានប្តឹងក្រុមហ៊ុន *XYZ* ។ ក្រុមហ៊ុន *ABC* បានខ្ចីប្រាក់ $8.2 លាន ពីក្រុមហ៊ុន *XYZ* ដោយគិតការប្រាក់ "13%" ។ កំចីត្រូវសង អោយអស់ ក្នុងរយៈពេល 3 ឆ្នាំ ដោយបង់ប្រាក់រំលោះប្រចាំខែ ។ ក្រុមហ៊ុន *ABC* បានគិតថា អត្រាការប្រាក់ ព្រមព្រៀងគ្នាគឺ $J_1 = 13\%$ ប៉ុន្តែក្រុមហ៊ុន *XYZ* បានប្រើ $J_{365} = 13\%$ ។ ចៅក្រមបានសំរេចអោយ *ABC* ឈ្នះក្តី និង សងជំងឺចិត្តដល់ក្រុមហ៊ុន *ABC* នូវទឹកប្រាក់គំលាតសរុប (គ្មានការប្រាក់) ។ ចូររកចំនួនទឹក ប្រាក់សំរាប់ជំងឺចិត្តនេះ ?

លំហាត់ ៤.២៧. គូស្វាមី ភរិយាមួយគូ ត្រូវការកំចីចំនួន $60 000 គិតការប្រាក់ $J_2 = 10.25\%$ សំរាប់ទិញផ្ទះថ្មី ។ ចូរគណនាទឹកប្រាក់សំរាប់សងរំលោះ ប្រចាំខែ ក្នុងអឡុងពេល ៖

១. 30 ឆ្នាំ ?

២. 20 ឆ្នាំ ?

៣. 10 ឆ្នាំ ?

៤. បើ ប្តី-ប្រពន្ធនោះអាចបង់ $950/ខែ តើការបង់ពេញមានប៉ុន្មានលើក ? ហើយទឹកប្រាក់បង់ បង្គ្រប់ស្មើប៉ុន្មាន ?

លំហាត់ ៤.២៨. រថយន្តមួយគ្រឿងមានតំលៃ $2 500 ត្រូវបានលក់ដោយបង់ $500 ដល់ដៃ និង $200/ខែ សំរាប់ រយៈពេល ១២ ខែ ។ ចូរគណនាអត្រាសមមូល (ជាក់លាក់) ប្រចាំឆ្នាំ ដែល ម្ចាស់បានកំណត់ ?

លំហាត់ ៤.២៩. គោលនយោបាយក្រុមហ៊ុនធានារ៉ាប់រង មួយតំរូវអោយបង់ប្រាក់ $15 នៅរៀងរាល់ដើមខែសំរាប់ រយៈពេល ២០ឆ្នាំ ។ ចូរគណនាតំលៃបច្ចុប្បន្ននៃ *Annuity* នេះ បើការប្រាក់ $J_4 = 11\%$?

លំហាត់ ៤.៣០. រថយន្តជជុះមួយគ្រឿងអាចត្រូវបានទិញ ក្នុងតំលៃ $7 600 ឬ ក៏បង់ $600 ដល់ដៃ និង $400/ខែ សំរាប់ ២០លើក ហើយការបង់លើកទី ១ ត្រូវធ្វើនៅ ៦ខែក្រោយ ។ តើអត្រាការប្រាក់ជាក់លាក់ ប្រចាំឆ្នាំសំរាប់គំរោងបង់ប្រាក់ជាដំណាក់ៗ ស្មើគ្នាប៉ុន្មាន ?

លំហាត់ ៤.៣១. ដើម្បីថែរក្សាប្រព័ន្ធទ្វារឆ្លងកាត់ក្រុមហ៊ុន ផ្លូវដែកបានចំណាយ $500 រៀងរាល់ចុងខែនិមួយៗ ។ តើក្រុមហ៊ុន ត្រូវចំណាយ ថវិការចំនួនប៉ុន្មាន សំរាប់បង្កើត គណនីមួយដើម្បីធានាការចំណាយលើ ប្រព័ន្ធឆ្លងកាត់នេះ បើមូលធនមានតំលៃ $J_{12} = 15\%$?

លំហាត់ ៤.៣២. មហាវិទ្យាល័យមួយ បានធ្វើការប៉ាន់ស្មាន ថា អាគារធំមួយ នឹងត្រូវការថវិការចំនួន $3 000 សំរាប់ ជួសជុល នៅចុងឆ្នាំ និមួយៗ ក្នុងរយៈពេល 5 ឆ្នាំបន្ទាប់ និង $5 000 នៅរៀងរាល់ចុងឆ្នាំសំរាប់ឆ្នាំជាបន្តបន្ទាប់ទៀតនាពេលអនាគត ។ បើអត្រាការប្រាក់ជាក់លាក់ប្រចាំឆ្នាំ 12% តើមហាវិទ្យាល័យ ត្រូវការថវិការចាំបាច់ចំនួនប៉ុន្មានសំរាប់ថែរអាគារនោះ ?

លំហាត់ ៤.៣៣. ទឹកប្រាក់ចំនួន $20 000 ត្រូវបាន វិនិយោគក្នុង មូលនិធិមួយដែល ផ្តល់ប្រាក់ចំណូលតាមអត្រាឆ្នាំ 8% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំឆមាស ។ តើប្រាក់ប៉ុន្មានដែលមូលនិធិនេះត្រូវប្រគល់ជូន (ដោយគ្មាន កាលបញ្ចាប់)។

ក. នៅរៀងរាល់ចុងខែ ?

ខ. នៅរៀងរាល់ដើមឆ្នាំ ?

លំហាត់ ៤.៣៤. សកលវិទ្យាល័យ មួយបានទទួល ទឹកប្រាក់ ដែលជា អំណោយ និង ប្រាក់វិនិយោគមួយចំនួន ដែលត្រូវ ទទួលការប្រាក់ $J_1 = 8\%$ ។ មូលនិធិនេះ អាចប្រើប្រាស់សំរាប់បង់អោយសាស្ត្រាចារ្យឧទ្ទេសនាម ម្នាក់ចំនួន $60 000 នៅរៀងរាល់ចុងឆ្នាំជារៀងរហូតឬអាច ប្រើប្រាស់សំរាប់សាងសង់អាគារថ្មី។ អាគារនឹងត្រូវបង់ប្រចាំឆ្នាំចំនួន 25 លើកដែលការបង់លើក ទី១ធ្វើឡើង ៨ឆ្នាំក្រោយបន្ទាប់ពេល ឥលូវនេះ គឺនៅពេលដែលអាគារត្រូវបានប្រើប្រាស់។ ចូរគណនាចំនួនប្រាក់ដែលបង់សំរាប់អាគារ ក្នុងគ្រានិមួយៗ ?

លំហាត់ ៤.៣៥. ចូររកតំលៃបច្ចុប្បន្ន នៃការបង់ប្រាក់ជា ស៊េរីចំនួន 15 លើក ដែលធ្វើឡើងនៅរៀងរាល់ចុងឆ្នាំ បើទឹក ប្រាក់បង់លើកទី១ មាន $300 លើកទី២ $600 លើកទី៣ $900 និងកំណើនចំនួន $300 ជារៀង រហូតដល់គ្រាចុងក្រោយ ។ ការប្រាក់លើទីផ្សារ $J_1 = 6\%$ ។

លំហាត់ ៤.៣៦. នៅរៀងរាល់ដើមឆ្នាំនិមួយៗ អ្នកវិនិយោគម្នាក់ បានដាក់ប្រាក់ចំនួន $\$1\ 000$ ទៅក្នុងមូលនិធិមួយ ដែលបង់ការប្រាក់ $J_1 = 10\%$ ។ បន្ទាប់មកការប្រាក់ដែលទទួលបាន គាត់យកទៅដាក់ក្នុងគណនីនៃ ធនាគារមួយដែលផ្តល់ការប្រាក់ $J_1 = 6\%$ ។
តើប្រាក់របស់គាត់មានចំនួនប៉ុន្មាន នៅចុងឆ្នាំទី៦ ?

លំហាត់ ៤.៣៧. អាគារមួយបានផ្តល់ចំណូលពីថ្លៃជួលចំនួន $\$5\ 000/$ឆ្នាំ ដែលត្រូវបង់នៅរៀងរាល់ដើមឆ្នាំ ។ គេ សង្ឃឹមថា ថ្លៃជួលនឹងកើនជារៀងរហូតចំនួន 6% ក្នុងមួយឆ្នាំ ។
ចូរគណនាតំលៃបច្ចុប្បន្ននៃថ្លៃ ឈ្នួលអាគារគិតតាមអត្រា $J_1 = 10\%?$

លំហាត់ ៤.៣៨. អ្នកស្រីសាន់ជ្រា បានវិនិយោគ $\$10\ 000$ ក្នុងផ្សារហ៊ុនមួយដែលទទួលបានភាគលាភ (Dividend) តាមអត្រា 12% (គឺបានន័យថាទទួលបាន $\$1\,200$ នៅរៀងរាល់ចុងឆ្នាំ) ។ អ្នកស្រីបានវិនិយោគ ភាគលាភរបស់ខ្លួនក្នុងគណនីធនាគារដែលបង់ការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ $J_1 = 10\%$។

លំហាត់ ៤.៣៩. ប្រាក់ដើមនៃកំចីចំនួន $\$5\,000$ ត្រូវបានសងរំលោះទុនថេរប្រចាំឆ្នាំចំនួន $\$1\,000$ នៅរៀងរាល់ចុង ឆ្នាំសំរាប់រយៈពេល ៥ឆ្នាំបន្ទាប់ ។ ការប្រាក់ត្រូវបង់នៅរៀងរាល់ចុងគ្រាតាមអត្រា $J_1 = 4,5\%$ នៃ បំណុលដែលនៅជំពាក់ជាមួយនឹងប្រាក់ដើម $\$1\ 000$។ ចូររកតំលៃលក់នៃកំចីនេះ ដែលផ្តល់ ទិន្នផល $J_1 = 5\%$?

លំហាត់ ៤.៤០. នៅរៀងរាល់ដើមឆ្នាំបុរសម្នាក់បាន ដាក់ប្រាក់ចំនួន $\$100$ ទៅក្នុងមូលនិធិមួយ ដែលបង់ការប្រាក់ $J_1 = 6\%$ លើប្រាក់ដើមដែលមាននៅក្នុងមូលនិធិ ។ នៅរៀងរាល់ចុងឆ្នាំនិមួយៗ គាត់បានយកការ ប្រាក់នេះ ទៅដាក់ក្នុងមូលនិធិទី២ ដែលបង់ការប្រាក់ $J_1 = 4\%$ ។ តើនៅចុងឆ្នាំទីប៉ុន្មាន ទើបមូល និធិទី២ មានប្រាក់ច្រើនជាងមូលនិធិទី១ ?

ជំពូកទី ៥

ការសងរំលោះបំណុល

៥.១. សញ្ញាណនៃការរំលោះបំណុល

៥.១.១. សញ្ញាណអំពីគណនីចរន្តខែង

នៅក្នុងជំពូក៤ យើងបានសិក្សាខ្លះៗអំពីការសង រំលោះបំណុល ជាបណ្តើរៗ ជាមួយគ្នានេះដែរ យើងនឹងសិក្សាពី បញ្ហានេះបន្តទៀតដោយ លើកចំណោទមកបកស្រាយ។

ចំណោទ

នៅថ្ងៃទី 01/01/2013 A អោយ B ខ្ចី $3000

នៅថ្ងៃទី 01/01/2016 A ទទួលពី B $1000

នៅថ្ងៃទី 01/01/2017 A ទទួលពី B $2000

ចំនួនប្រាក់ ដែលបានផ្ទេរដោយភាគីទាំងពីរនេះ ត្រូវបាន គិតតាមការប្រាក់សមាស តាមអត្រា $i = 10\%$ ធ្វើមូល ធនកម្ម ប្រចាំឆ្នាំ។ ចូររកបំណុលរបស់B នៅថ្ងៃទី 01/01/2018 ។

៥.១.១.១. បំណោកស្រាយតាមវិធីសាស្ត្រផ្ទាល់ *Direct Method*

គណនីចរន្តរបស់B

កាលបរិច្ឆេទ	ឥណពន្ធ Debit	ឥណទាន Credit
01/01/2013	$3000	
01/01/2016		$1000
01/01/2017		$2000

ចំពោះ ឥណពន្ធ *Debit* តំលៃអនាគត $S = 3000(1 + 0.10)^5 = 4831.53$

ចំពោះ ឥណទាន *Credit* តំលៃអនាគត $S' = 1000(1.1)^2 + 2000(1.1)^1 = 3410$

ដោយ $S - S' = 4831.53 - 3410 = 1421.53$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បំណុលរបស់ } B \text{ នៅថ្ងៃទី } 01/01/2018 \text{ ស្មើនឹង}\$1421.53 \text{ ។}}$

៥.១.១.២. ចំណាកស្រាយតាមវិធីសាស្ត្រ *Hambourg*

គោលវិធីនេះ គឺ គណនាសមតុល្យរបស់គណនីជាដំណាក់ៗរហូតដល់បិទ គណនី ហើយ គេនឹងឃើញ សមតុល្យ គណនី ចុងក្រោយ ដែលជាបំណុលនៅជំពាក់។ គេអនុវត្តន៍ដូចតទៅ

- សមតុល្យ នៅថ្ងៃទី01/01/2013 គឺ $S_1 = \$3000$
- សមតុល្យ ក្រោយការសងប្រាក់នៅថ្ងៃទី 01/01/2016 គឺ

$$\begin{aligned} S_2 &= S_1(1.1)^3 - 1000 \\ &= 3000(1.1)^3 - 1000 \end{aligned}$$

- សមតុល្យ ក្រោយការសងប្រាក់នៅថ្ងៃទី 01/01/2017 គឺ

$$\begin{aligned} S_3 &= S_2(1.1) - 2000 \\ &= 3000(1.1)^4 - 1000(1.1) - 2000 \end{aligned}$$

- សមតុល្យ នៅថ្ងៃទី 01/01/2018 គឺ

$$\begin{aligned} S_4 &= S_3(1.1) \\ &= 3000(1.1)^5 - 1000(1.1)^2 - 2000(1.1) \\ &= 1421.53 \end{aligned}$$

ដូចនេះ

សមតុល្យ នៅថ្ងៃទី01/01/2018 ស្មើនឹង 1421.53 ជាសាច់ប្រាក់ដែលនៅជំពាក់ A ។

៥.១.២. សញ្ញាណអំពីការរំលោះបំណុល

វិធីសាស្ត្រក្នុងការរំលោះបំណុលមានច្រើនបែបដូចជា៖

- ការសងបំណុលដោយសំណងថេរ(ចំនួនប្រាក់ក្នុងគ្រានីមួយៗថេរ)
- ការសងបំណុលដោយសំណងថេរតែអាក់ខានមិនបានសងមួយរយៈកាលដំបូង (សងបែប *Deferred Annuity*)
- សងរំលោះដោយប្រាក់សំណងជាកំណើននព្វន្ត ឬ ធរណីមាត្រ
- និង ការសងដោយរំលោះទុនថេរ ។ល។

ប៉ុន្តែយើងធ្វើចំណាត់ថ្នាក់ជាពីរបែប គឺ

– សងរំលោះបំណុលជាបណ្តើរៗ(រំលោះដើមទុន)

– និង សងបំណុលដើមទាំងអស់ នៅកាលវសាន្តនៃកិច្ចសន្យាសុំខ្ចី *(Sinking-Fund Method)*។

នៅក្នុងជំពូកនេះយើងកំណត់តាង

- A ចំនួនប្រាក់អោយខ្ចី $A = D_0$
- n ជាចំនួនដំណាក់កាល នៃការសងរំលោះ
- i អត្រាការប្រាក់ប្រចាំ ដំណាក់កាលនីមួយៗ
- D_k បំណុលនៅកាលបរិច្ឆេទ k $k = \overline{1,n}$
- R_k ចំនួនទឹកប្រាក់សងនៅ ដំណាក់កាលទី k $k = \overline{1,n}$
- m_k ចំនួនបំណុលដែលត្រូវ រំលោះនៅកាលវិច្ឆេទទី k $k = \overline{1,n}$

៥.១.២.១. ការសងរំលោះបំណុលដើមបណ្តើរៗ (តារាងរំលោះ)

វិធីនេះត្រូវបានអនុវត្ត ទូលំទូលាយបំផុត លើសកលលោក ហើយនីតិវិធីនៃការរំលោះគេអនុវត្តដូចតទៅ៖

នៅដំណាក់កាលទី១ ៖

កូនបំណុលត្រូវសងនូវ ទឹកប្រាក់ R_1 ដែលធំជាង Ai គឺមានន័យថាកូនបំណុលមិនគ្រាន់តែសងនូវ ការប្រាក់តែប៉ុណ្ណោះទេ គឺថែមទាំងប្រាក់ដើមមួយចំណែកទៀត។

ដូចនេះ៖ គេអាចសរសេរ៖

$$R_1 = Ai + m_1$$

ដែល m_1 ជាចំនួនបំណុលរំលោះលើកទី១ ក្រោយពីបានសងលើកទី១នូវ R_1

បំណុលនៅសល់គឺ

$$D_1 = A - m_1$$

នៅដំណាក់កាលទី២៖

កូនបំណុលត្រូវសងនូវទឹកប្រាក់៖

$$R_2 = D_1 i + m_2$$

បំណុលនៅសល់៖

$$D_2 = D_1 - m_2$$

គេបន្តធ្វើរបៀបនេះរហូតដល់ដំណាច់នៃដំណាក់កាលចុងក្រោយនៃ កិច្ចសន្យារំលោះហើយនៅ **ដំណាក់កាលចុងក្រោយ** កូនបំណុលសង ប្រាក់ R_n ដែល

$$R_n = D_{n-1}i + m_n$$

(m_n ជាចំនួនបំណុលរំលោះលើកចុងក្រោយ ដែលធ្វើឲ្យ បំណុលD_{n-1}) រលត់។
ខាងក្រោមនេះជាដ្យាក្រាមលំហូរសាច់ប្រាក់

តារាងរំលោះ ដំណាក់កាល បំណុលដើមនៅជំពាក់ ការប្រាក់ត្រូវបង់ បំណុលបានរំលោះ ប្រាក់បង់ប្រចាំគ្រា

ដំណាក់កាល	បំណុលដើមនៅជំពាក់	ការប្រាក់ត្រូវបង់	បំណុលបានរំលោះ	ប្រាក់បង់ប្រចាំគ្រា
0	$D_0 = A$			
1	$D_1 = D_0 - m_1$	$D_0 i$	m_1	$R_1 = D_0 i - m_1$
2	$D_2 = D_1 - m_2$	$D_1 i$	m_2	$R_2 = D_1 i - m_2$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
n	$D_n = D_{n-1} - m_n$	$D_{n-1} i$	m_n	$R_n = D_{n-1} i - m_n$
សរុប		$i\sum_{k=0}^{n} D_k = I$	$D_0 = A$	$S = D_0 + I$

៥.១.២.២. ការសងប្រាក់ដើមតែ១លើកនៅកាលវសាន្តនៃកិច្ចសន្យាកំចី

ក្នុងករណីនេះ កូនបំណុល បង់ការប្រាក់ចំនួន Ai ឬ $D_0 i$ រៀងរាល់ ដំណាច់នៃ ដំណាក់កាលនីមួយៗ គឺចាប់អនុវត្តពីចុងដំណាក់កាលទី 1 ដល់ទី $n-1$ បានន័យថា កូនបំណុលមិនបាន

សងនូវចំណែកនៃ ទឹកប្រាក់ដើមទេ ហើយបំណុល នេះក៏មិន កើនឡើងដែរ។នៅកាលវសាន្ត (ដំណាក់កាលទី)ទើបកូនបំណុលសងប្រាក់ដើម A និង ការប្រាក់Ai ដើម្បី បញ្ចប់ កិច្ចសន្យា ដែលមានដ្យាក្រាមដូចខាងក្រោម៖

$$
\begin{array}{ccccc}
 & Ai & Ai & Ai & A+Ai \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
\multicolumn{2}{c}{\overset{i}{\longleftrightarrow}} & & & \\
0 & 1 & 2 & n-1 & n \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
D_0 = A & D_1 = A & D_2 = A & D_{n-1} = A & D_n = 0
\end{array}
$$

៥.២. ការរំលោះកំចីជាបណ្ដើរៗ , វិធាន

៥.២.១. វិធាននៃការសងរំលោះ

ទឹកប្រាក់ AឬD_0 ដែលត្រូវជូនទៅអ្នកខ្ចី នៅកាលបរិច្ឆេទ 0 និង សំណងរៀងរាល់ដំណាក់កាល $R_1, R_2, \cdots, R_n$

នៅ ដំណាក់កាល ទី$1, 2, \cdots, n$ រៀងគ្នា ដែល ត្រូវបង់ដោយ អ្នកខ្ចី ជូនម្ចាស់បំណុល (សំណងដែលមានការប្រាក់ និង បំណុល) ជា ប្រតិបត្តិការអាច ធ្វើជា កម្មវត្ថុ នៃការចុះបញ្ជីក្នុង គណនីចរន្ត។

គណនីចរន្ត

កាលបរិច្ឆេទ	ឥណពន្ធ Debit	ឥណទាន Credit
0	A	
1		R_1
2		R_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
n		R_n

វិធានទី១៖

ចំនួនប្រាក់ត្រូវសង នៃបំណុលមួយនៅកាលបរិច្ឆេទn ត្រូវ ស្មើនឹង តម្លៃអនាគតនៃប្រាក់សំណងប្រចាំគ្រា ទាំងអស់ នៅដំណាក់កាល n ។

យើងដឹងថាកាលបរិច្ឆេទទី n សំណង R_n មានប្រាក់រំលោះ m_n ចុងក្រោយដែលត្រូវអស់

ដូចនេះ យើងអាចសរសេរបាន៖

$$A(1+i)^n = R_1(1+i)^{n-1} + R_2(1+i)^{n-2} + \cdots + R_n \quad \text{ឬ}$$

$$\boxed{A(1+i)^n = \sum_{k=1}^{n} R_k(1+i)^{n-k}} \qquad (៥.១)$$

វិធានទី២៖

បំណុល(ប្រាក់ដើម)ត្រូវស្មើនឹង តម្លៃបច្ចុប្បន្ន នៃប្រាក់សំណងប្រចំគ្រា ទាំងអស់នៅ កាលបរិច្ឆេទ n ។

បើយើងគុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការ (៥.១) នឹង $(1+i)^{-n}$ យើងបាន

$$\boxed{A = \sum_{k=1}^{n} R_k(1+i)^{-k}} \qquad (៥.២)$$

វិធានទី៣៖

ចំនួនបំណុល ដែលសល់ក្រោយពីបានបង់R_k គឺស្មើនឹងតម្លៃអនាគត នៃបំណុលបានខ្ចីនៅកាលបរិច្ឆេទ kដកតម្លៃអនាគត នៃសំណង ប្រចាំគ្រា នៅដំណាក់កាលk ដែរ។

$$\boxed{S_k = A(1+i)^k - \left[R_1(1+i)^{k-1} + R_2(1+i)^{k-2} + \cdots + R_{k-1}(1+i) + R_k\right]} \qquad (៥.៣)$$

វិធានទី៤៖

បំណុលដែលនៅសល់ D_k(បំណុលមិនទាន់បានរំលោះ) ក្រោយពី ការសង ប្រាក់ប្រចាំគ្រាលើកទីk ស្មើ នឹង តម្លៃបច្ចុប្បន្នសរុបគិតនៅ កាលបរិច្ឆេទ k នៃ$n-k$ ប្រាក់សំណង ដែលនឹងត្រូវបង់។

$$\boxed{D_k = R_{k+1}(1+i)^{-1} + R_{k+2}(1+i)^2 + \cdots + R_n(1+i)^{k-n}} \qquad (៥.៤)$$

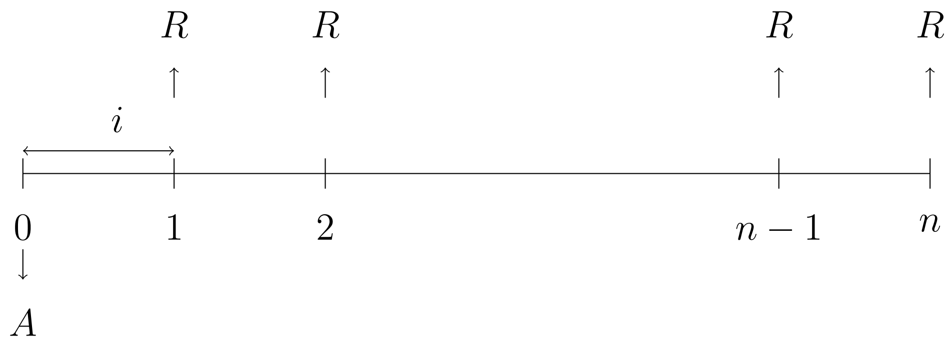
៥.២.២. ការរំលោះបំណុលដោយសំណងថេរ(ច្បាប់រំលោះ)

ជាទូទៅគេនិយម ប្រើវិធីរំលោះបំណុលតាមរបៀបរំលោះដោយសំណងថេរ *(Ordinary Annuities)* ព្រោះវាមានការ ធានាច្បាស់លាស់ជាងវិធីដទៃទៀត។

គេតាង៖

- R ចំនួនប្រាក់បង់សងតាមដំណាក់នីមួយៗ $\left(R = R_k,\ \ k = \overline{1,n}\right)$
- n ចំនួនគ្រានៃការសងរំលោះ
- i អត្រាការប្រាក់ប្រចាំគ្រា
- A ចំនួនប្រាក់ដែលបានអោយខ្ចី នៅកាលបរិច្ឆេទ

ដ្យាក្រាមនៃការបង់រំលោះ៖



$$\boxed{A = R.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad \text{ឬ} \qquad R = A.\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}}$$

៥.២.២.១. ច្បាប់នៃការរំលោះ(ការរំលោះទុន)

យោងតាមតារាងរំលោះ *(Amortization schedule)* ខាងដើម យើងសង្កេតឃើញថា៖

$$R_k = D_{k-1}.i + m_k\,(*) \Rightarrow R_{k+1} = D_k.i + m_{k+1}\,(**)$$
$$D_k = D_{k-1} - m_k \qquad \Rightarrow D_{k-1} = D_k + m_k\,(***)$$

យក $(***)$ជំនួសក្នុង $(*)$ យើងបាន $R_k = D_k i + m_k(1+i)$ តែការរំលោះរបស់យើង គឺរំលោះតាមសំណងថេរ ដូចនេះ៖

$$R_k = R_{k+1}$$
$$D_k.i + m_k(1+i) = D_k.i + m_{k+1}$$
$$\Rightarrow m_{k+1} = m_k(1+i) \quad , k = \overline{1,n}$$

សន្និដ្ឋានៈ

ប្រាក់រំលោះ m_k , $k=\overline{1,n}$ នៃសំណងថេរ គឺជាកំណើនធរណីមាត្រ ដែលមានរេសុងស្មើនឹង $(1+i)$ ។

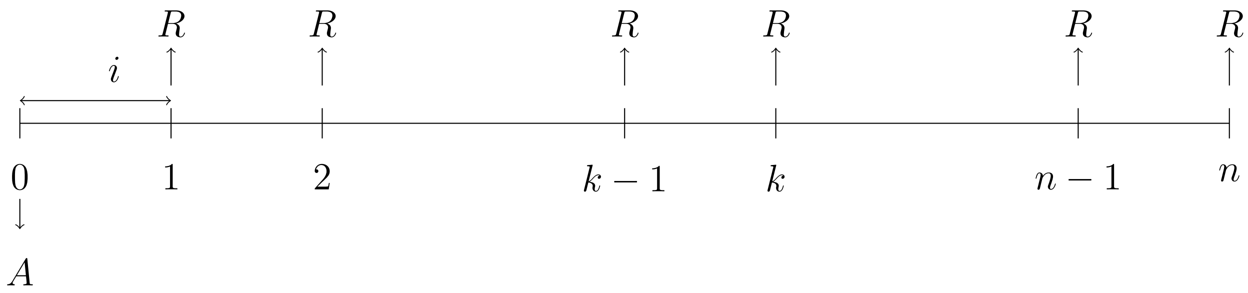
ម្យ៉ាងទៀតដោយៈ $A=\sum\limits_{k=1}^{n} m_k = m_1\frac{(1+i)^n-1}{i}$

ដូចនេះ

$$\boxed{A=m_1S_{\overline{n}|i} \qquad , \qquad A=Ra_{\overline{n}|i}} \tag{៥.៥}$$

៥.២.២.២. បំណុលដែលនៅជំពាក់

ដ្យាក្រាមនៃការបង់រំលោះ ៖



មាន **វិធីសាស្ត្រពីរយ៉ាង** ក្នុងការគណនារក ប្រាក់បំណុល ដែលនៅសល់នៅចុងដំណាក់កាលទីk នៃប្រាក់កំចី A ដែល ត្រូវរំលោះដោយសំណងថេរR សំរាប់ nលើក តាម អត្រាការប្រាក់ i ។

វិធីសាស្ត្រទី១ៈ *(Retrospective Method)*

យោង តាមដ្យាក្រាម ខាងលើ និង វិធានទី 3 ចំនួនបំណុល ដែលនៅ សល់ក្រោយ ពីបង់សំណងថេរ R លើកទីk ហើយ គឺស្មើផលដករវាង តំលៃអនាគតនៃបំណុល(ប្រាក់ដើម)និង តំលៃអនាគតនៃសំណងថេរគិត នៅកាលបរិច្ឆេទ ទី k ។

គេអាចទាញបាន ៖

$$\boxed{D_k=A(1+i)^k-RS_{\overline{k}|i}} \tag{៥.៦}$$

វិធីសាស្ត្រទី២ៈ *(Prospective Method)*

យើងគិតពីទី k ដល់ទី n យោងតាមដ្យាក្រាមខាងលើនិងវិធានទី 4 បំណុលដែលនៅ សល់

D_k បន្ទាប់ ពីបង់រំលោះ លើកទីk ដោយសំណាងថេរ R គឺស្មើនឹងតំលៃបច្ចុប្បន្ននៃ$n-k$ សំណាងថេរ ដែលនឹង ត្រូវបង់។
យើងទាញបាន ៖

$$\boxed{D_k = Ra_{\overline{n-k}|i}} \qquad (៥.៧)$$

៥.២.២.៣. ការប្រាក់

នៅពេលសងបំណុលលើកទី k ដោយសំណាងថេរ R គេត្រូវបង់ការប្រាក់ I_k៖

$$I_k = D_{k-1}.i \qquad \text{ដែល} \qquad D_{k-1} = Ra_{\overline{n-k+1}|i}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad I_k &= iRa_{\overline{n-k+1}|i}\\ &= i\,R\left[\frac{1-(1+i)^{-(n-k+1)}}{i}\right]\\ &= R\left[1-(1+i)^{-(n-k+1)}\right]\end{aligned}$$

ដូចនេះ ការប្រាក់សម្រាប់បង់នៅដំណាក់កាលទី k គឺ៖

$$\boxed{I_k = R\left[1-(1+i)^{-(n-k+1)}\right]} \qquad (៥.៨)$$

៥.២.២.៤. បំណុលរំលោះ

តាមតារាងរំលោះបំណុលដែលត្រូវរំលោះនៅលើកទី k គឺ ៖

$$\begin{aligned} m_k &= R - I_k\\ &= R - R\left[1-(1+i)^{-(n-k+1)}\right]\\ \Rightarrow m_k &= R(1+i)^{-(n-k+1)}\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ ៥.២.១. កំចីចំនួន \$6000ត្រូវបានចុះកិច្ចសន្យាសងប្រចាំឆមាសនូវទឹកប្រាក់ថេរ R សំរាប់រយៈពេល ឆ្នាំ3 តាមអត្រាការប្រាក់ 16% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំឆមាស។ ចូររក ទឹកប្រាក់ដែលបង់ ក្នុង ឆមាស និមួយៗ និង សង់តារាងរំលោះសំរាប់កំចីនេះ ។

ដំណោះស្រាយ

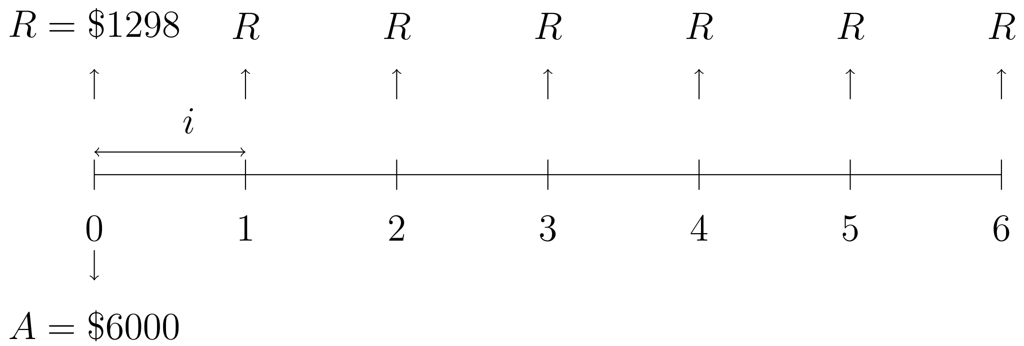
ការសងប្រាក់ទាំង6លើកនេះមានទំរង់ជា Ordinary Annuity ដែលមាន

$$PV = A = \$6\ 000, \quad n = 6, \quad i = 0.08$$

ដូចនេះទឹកប្រាក់ដែលត្រូវបង់ប្រចាំគ្រា គឺ

$$\begin{aligned} R &= \frac{A}{a_{\overline{n}|\,i}} \\ &= \frac{6,000}{a_{\overline{6}|0.08}} \\ &= \frac{6,000}{4.62287966} = 1,297.8923 \end{aligned}$$

ក្នុងការអនុវត្តន៍ដើម្បីងាយស្រួលដល់ការទូទាត់គេសន្មតយកការរំលោះ លើកដំបូងស្មើនឹង 1298 ហើយកំណត់ចំនួនប្រាក់ សំរាប់ ការរំលោះចុងក្រោយ(គ្រាទី៦)ដែលតាងដោយ X យើងគូសដ្យាក្រាមនៃការបង់ប្រាក់ដូចខាងក្រោម ៖



ដោយតំលៃអនាគតនៅកាលបរិច្ឆេទ នៃបំណុល និងចំនួនប្រាក់ដែលសងជា ដំណាក់ៗស្មើគ្នានោះគេបាន ៖

$$X + 1,298\,(1.08) \times S_{\overline{5}|0.08} = 6,000(1+0.08)^6$$

$$X + 8,224.04 = 9,521.25$$

$$\Rightarrow X = \$1,297.21$$

ដូចនេះ ៖ $\boxed{\text{ទឹកប្រាក់សងចុងក្រោយ (ដំណាក់កាលទី៦) គឺ } \$1,297.21\text{។}}$

តារាងរំលោះ (Amortization schedule)

Payment Number	Outstanding Principle	Interest at 8%	Principle Repaid	Periodic Payment
	$6,000.00$	$-$	$-$	$-$
1	$5,182.00$	480.00	818.00	$1,298.00$
2	$4,298.56$	414.56	883.44	$1,298.00$
3	$3,344.44$	343.88	954.12	$1,298.00$
4	$2,314.00$	267.56	$1,030.44$	$1,298.00$
5	$1,201.12$	185.12	112.88	$1,298.00$
6	0	96.09	$1,201.12$	$1,297.21$
Total		$1,787.21$	6000	7787.21

ឧទាហរណ៍ ៥.២.២. កសិករម្នាក់បានខ្ចីប្រាក់ពីធនាគារចំនួន 8000ដើម្បីយកទៅពង្រីកកសិដ្ឋានរបស់ខ្លួន។តាមកិច្ចសន្យាគាត់ត្រូវ សង រំលោះដោយសំណងថេរ រៀងរាល់ចុង ឆ្នាំ រយៈពេល ៥ឆ្នាំ។ កំចីនេះ គិតការប្រាក់តាមអត្រា 12% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំឆ្នាំ។

ក. ចូរគណនាប្រាក់រំលោះ និង បំណុលនៅជំពាក់នៅចុងឆ្នាំទី ៣?

ខ. ចូរសង់តារាងរំលោះសំរាប់កំចីនេះ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ប្រាក់រំលោះ និង បំណុលនៅជំពាក់នៅចុងឆ្នាំទី ៣ ដោយសំណងនេះ ជាសំណង ថេរ ដូចនេះយើងទាញបាន ៖

$$R = \frac{A\,.\,i}{1-(1+i)^{-n}} \text{ ដែល } A = \$8,000; \quad i = 0.12; \quad n = 5$$

$$\Rightarrow R = \frac{8,000 \times 0.12}{1-(1+0.12)^{-5}} = \$2,219.28$$

ករណី សងរំលោះ ដោយ សំណងថេរនេះ ប្រាក់រំលោះ (Principle Repaid) ជា កំណើនធរណីមាត្រ ដែលមានរេសុង $(1+i)$ និង មានរូបមន្តៈ

$$m_k = R(1+i)^{-(n-k+1)}; k = 3$$

$$\Rightarrow m_k = 2,219.28(1+0.12)^{-(5-3+1)} = \$1,579.64$$

ហើយបំណុលដែលនៅជំពាក់គឺ ៖

$$D_k = Ra_{\overline{n-k}|i}; k=3, a_{\overline{n-k}|i} = \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}$$

$$\Rightarrow D_3 = \$2,219.28\ .\ \frac{1-(1+0.12)^{-(5-3)}}{0.12}$$

$$= \$3,750.69$$

ដូចនេះ

នៅចុងឆ្នាំទី ៣ ប្រាក់រំលោះ $m_3 = \$1,579.64$ និង បំណុលនៅជំពាក់ $D_3 = \$3,750.70$

ខ. តារាងរំលោះ

Payment Number	Outstanding Principle	Interest at 12%	Principle Repaid	Periodic Payment
0	8,000.00	−	−	−
1	6,740.72	960.00	1,259.28	2,219.28
2	5,330.33	808.89	1,410.39	2,219.28
3	3,750.69	639.64	1,579.64	2,219.28
4	1,981.49	450.08	1,769.20	2,219.28
5	0.01	237.78	1,981.50	2,219.28
Total		3,096.39	8,000.01	11,096.40

៥.២.៣. ការរំលោះដោយរំលោះទុនថេរ

ករណីខ្លះ កូនបំណុល និង ម្ចាស់បំណុល ព្រមព្រៀងគ្នា សងរំលោះបំណុល ដោយរំលោះទុនថេរ ពោលគឺ នៅក្នុង ដំណាក់កាល និមួយៗ កូនបំណុលត្រូវសងការប្រាក់ប្រចាំគ្រា និង ប្រាក់ដើមថេរ ដែល មានចំនួន $\frac{A}{n}$ ។

បើយើងពិនិត្យមើលតារាងរំលោះ នូវ ទឹកប្រាក់ត្រូវបង់នៅដំណាក់កាល ៖

$$\text{ទី}k: \quad R_k = D_{k-1}.i + \frac{A}{n}$$

$$\text{ទី}k+1: \quad R_{k+1} = D_k.i + \frac{A}{n} \quad , \text{ ប៉ុន្តែ } \ D_k = D_{k-1} - \frac{A}{n}$$

$$\Rightarrow R_{k+1} = \left(D_{k-1} - \frac{A}{n}\right) i + \frac{A}{n}$$
$$= D_{k-1}.i + \frac{A}{n} - \frac{A}{n} i$$
$$\Rightarrow R_{k+1} = R_k - \frac{A}{n} i \,(*)$$

សន្និដ្ឋានៈ

ចំនួនប្រាក់ ដែលត្រូវសង ក្នុងដំណាក់ និមួយៗ នៃការសងរំលោះទុនថេរ គឺ ជាកំណើន នព្វន្ត ដែលមាន រ៉ែសុងស្មើ នឹង $-\frac{A}{n}i$ ហើយតួទី1ស្មើនឹង$Ai + \frac{A}{n}$ ។

ឧទាហរណ៍ ៥.២.៣. កំចីចំនួន $10000 ត្រូវបានចុះកិច្ចសន្យាសងរំលោះប្រចាំឆ្នាំ ដោយ រំលោះទុនថេរ សំរាប់ រយៈពេល5 ឆ្នាំ ។

ចូររកទឹកប្រាក់ត្រូវរំលោះប្រាក់ដើមក្នុងគ្រានិមួយៗ និង សង់ តារាងរំលោះ នៃកំចីនេះ បើគេគិតការប្រាក់តាមអត្រា 10%ធ្វើមូល ធនកម្មប្រចាំឆ្នាំ ?

ដំណោះស្រាយ

ដោយការរំលោះនេះជារំលោះទុនថេរ ដូចនេះទុនដែលត្រូវរំលោះគឺ

$$m = \frac{A}{n} = \frac{\$10,000}{5} = \$2,000$$

Payment Number	Outstanding Principle	Interest at 10%	Principle Repaid	Periodic Payment
0	10,000.00	–	–	–
1	8,000.00	1,000.00	2,000.00	3,000.00
2	6,000.00	800.00	2,000.00	2,800.00
3	4,000.00	600.00	2,000.00	2,600.00
4	200.00	400.00	2,000.00	2,400.00
5	0.00	200.00	2,000.00	2,200.00
Total		3,000.00	10,000.00	13,000.00

ឧទាហរណ៍ ៥.២.៤. លោកសម្បត្តិ មានគំរោង ពង្រីកសាខាក្រុមហ៊ុនរបស់ខ្លួន នៅតាមខេត្តនានា។ ដើម្បីសំរេចគោលបំណងនេះ គាត់បានខ្ចីប្រាក់ពីធនាគារកាណាឌីយ៉ាចំនួន $60,000

។ តាមកិច្ច សន្យា គាត់ត្រូវ សងទៅ ធនាគារ វិញដោយ រំលោះទុនថេរ រៀង រាល់ចុងឆមាស ក្នុង រយៈពេល ៥ឆ្នាំ ដោយ ចាប់អនុវត្ត មួយឆមាស ក្រោយ បន្ទាប់ពីថ្ងៃខ្ចី កំចីនេះគិតការប្រាក់តាម អត្រា 16% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំ ឆមាស។

ក. ចូរគណនាទឹកប្រាក់ដែលត្រូវបង់ (Periodic Payment) នៅចុងឆ្នាំទី៣ ?

ខ. ចូរសង់តារាងរំលោះ សំរាប់កំចីនេះ ?

ដំណោះស្រាយ

ក. ទឹកប្រាក់ដែលត្រូវបង់ប្រចាំគ្រា (Periodic Payment) :

ដោយសំណាងនេះ ជា សំណាង រំលោះទុនថេរ នោះសំណាងប្រចាំគ្រា ជាកំណើននព្វន្ត ដែលមាន តួទី១ ស្មើ នឹង $Ai + \frac{A}{n}$

ហើយរេសុងស្មើ $-\frac{A}{n}i$

ម៉្យាងទៀត

$$A = \$60,000; i = \frac{0.16}{2} = 0.08; n = 2 \times 5 = 10$$

យើងបាន ៖

$$\begin{aligned} R_1 &= Ai + \frac{A}{n} \\ &= 60,000 \times 0.08 + \frac{60.000}{10} = 10,800.00 \end{aligned}$$

ប្រាក់សំណាងប្រចាំគ្រានៅចុងឆ្នាំទី៣ ត្រូវជាប្រាក់សំណាងប្រចាំគ្រាទី៦ យើងបាន ៖

$$\begin{aligned} R_6 &= R_1 + (6-1)\left(-\frac{A}{n}i\right) \\ &= R_1 - 5\frac{A}{n}i \\ &= 10,800 - 5 \times \frac{60,000}{10} \times 0.08 \\ &= 8,400.00 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រាក់សំណាងប្រចាំគ្រាទី ៦ គឺ } R_6 = \$8,400\text{។}}$

ខ. តារាងរំលោះ (Amortisation Schedule)

ដោយ ៖

$$m = \frac{A}{n} = \frac{60,000}{10} = \$6,000$$

យើងបាន ៖

Payment Number	Outstanding Principle	Interest at	Principle Repaid	Periodic Payment (Annuity)
0	60,000.00	–	–	–
1	54,000.00	4,800.00	6,000.00	10,800.00
2	48,000.00	4,320.00	6,000.00	10,320.00
3	42,000.00	3,840.00	6,000.00	9,840.00
4	36,000.00	3,360.00	6,000.00	9,360.00
5	30,000.00	2,880.00	6,000.00	8,880.00
6	24,000.00	2,400.00	6,000.00	8,400.00
7	18,000.00	1,920.00	6,000.00	7,920.00
8	12,000.00	1,440.00	6,000.00	7,440.00
9	6,000.00	960.00	6,000.00	6,960.00
10	0.00	480.00	6,000.00	6,480.00
Total		2,640.00	60,000.00	86,000.00

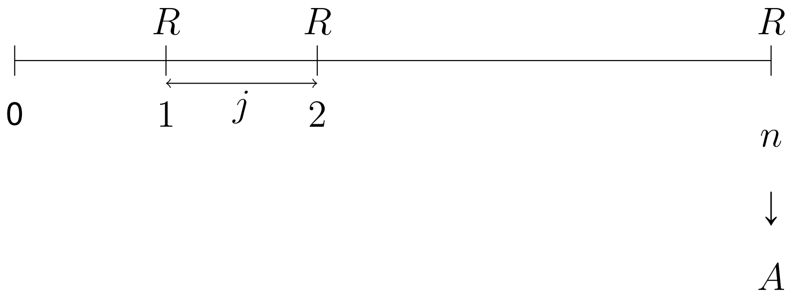
៥.៣. ការសងរំលោះទុននៅកាលវសាន្ត

៥.៣.១. មូលនិធិនៃការរំលោះ

នៅចុងដំណាក់កាលនិមួយៗពីដំណាក់កាលទី1ដល់ ទី $n-1$កូនបំណុល បានបង្វែរការប្រាក់ (លើប្រាក់ដើម) ទៅអោយម្ចាស់ បំណុល ហើយនៅចុងដំណាក់កាលទី n ទើប កូនបំណុលសងការប្រាក់ Ai សំរាប់ ដំណាក់កាល ចុងក្រោយ និង ប្រាក់ដើម A ទៅអោយ ម្ចាស់បំណុលទាំងអស់ ។ ប៉ុន្តែបំណុល A ដែលគាត់សងនោះ គឺបានមកពី មូលនិធិ នៃ រំលោះមួយ (Sinking Fund) ដែលគាត់បង្កើត ដោយនៅ រៀងរាល់ចុងដំណាក់កាល (ពីទី 1ដល់ទី n) គាត់បានដាក់

សន្សំនូវទឹកប្រាក់ថេរចំនួនm តាមអត្រា ការប្រាក់ប្រចាំគ្រា j ហើយចុងដំណាក់កាលទី n មូលនិធិនេះ នឹងបង្កើនបានទឹកប្រាក់ស្មើនឹង A ។

លំហូរ សាច់ប្រាក់របស់មូលនិធិនៃរំលោះនេះ យើងអាចតាងដោយដ្យាក្រាមខាងក្រោម



ទឹកប្រាក់សរុប (Accumulated Value) ក្នុងមូលនិធិនៅចុងគ្រាទី គឺស្មើនឹង ៖

$$A = m\frac{(1+j)^n - 1}{j} \Rightarrow m = \frac{Aj}{(1+j)^n - 1} \quad (៥.៩)$$

$$\Rightarrow m = \frac{A}{S_{\overline{n}|j}} \quad (៥.១០)$$

រំលោះតាមវិធីនេះអ្នកខ្ចី ត្រូវរ៉ាប់រងនូវចំនាយថេរ ក្នុងដំណាក់កាលនិមួយៗ ដែលមួយចំណែកជាប្រាក់លើបំណុលAi និង មួយ ចំណែកទៀត គឺជាប្រាក់សន្សំក្នុងមូលនិធិ ពោលគឺ បើយើងតាងជាចំណាយថេរប្រចាំគ្រានោះគេបាន៖

$$E = m + Ai \quad (៥.១១)$$

$$E = Ai + \frac{A}{S_{\overline{n}|j}} \quad (៥.១២)$$

ឧទាហរណ៍ ៥.៣.១. ៖ដើម្បីពង្រីក បរិវេណក្រុមហ៊ុន នៅពេលឥលូវនេះ ក្រុមហ៊ុនបាន ខ្ចីប្រាក់ពី ស្ថាប័ន ហិរញ្ញវត្ថុ ចំនួន$\$100,000$ សំរាប់ រយៈពេល5 ឆ្នាំ។ តាមកិច្ចសន្យាក្រុមហ៊ុន ត្រូវសងការប្រាក់ នៅរៀងរាល់ចុងឆ្នាំ ហើយសង ប្រាក់ដើម ផ្តាច់នៅកាលវសាន្ត។ក្រុមហ៊ុនបានបង្កើតមូលនិធិរំលោះសំរាប់កំចីនេះដោយដាក់ប្រាក់ រៀងរាល់ចុងឆ្នាំ ទៅក្នុងមូលនិធិ រំលោះមួយដែលផ្តល់ការប្រាក់ តាម អត្រាឆ្នាំ6% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំឆ្នាំ។

ចូររកចំនួនប្រាក់ដែលដាក់ក្នុងមូលនិធិរំលោះរៀងរាល់ចុងឆ្នាំ និង សង់តារាង មូលនិធិនៃការរំលោះ?

ដំណោះស្រាយ

តាមវិធីសាស្រ្តមូលនិធិនៃការរំលោះ យើងបាន ៖

$$m = \frac{A}{S_{\overline{n}|i}}, \qquad A = \$100,000, \qquad n = 5; \qquad i = 0.06$$
$$\Rightarrow m = \frac{100,000}{S_{\overline{5}|0.06}} = \$17739.64$$

Deposit Number	Deposit	Interest On Fund At 6%	Increase in Fund	Amount in Fund at End of Period
1	17739.64	0	17739.64	17739.64
2	17739.64	1064.38	18804.02	36543.66
3	17739.64	2192.62	19932.26	56475.92
4	17739.64	3388.56	21128.20	77604.12
5	17739.64	4656.25	22395.89	100,000.01

ឧទាហរណ៍ ៥.៣.២. ៖ អាជ្ញា ក្រុង ត្រូវការ ប្រាក់ចំនួន $\$200,000$ ក្នុងអំឡុង 5 ឆ្នាំ ទៀតដើម្បីយកទៅ ទូទាត់ បំណុល ដែលបានខ្ចីពី សាធារណជនតាមរយៈការបោះផ្សាយសញ្ញាប័ណ្ណ ។

ក. តើ ក្នុង ឆ្នាំ និមួយៗ ត្រូវយកប្រាក់ ចំនួនប៉ុន្មាន ទៅដាក់ នៅក្នុង មូលនិធិ ប្រសិនបើ មូលនិធិទទួលការប្រាក់ តាមអត្រា $j_\infty = 12\frac{1}{2}\%$?

ខ. ចូរសង់តារាងមូលនិធិរំលោះ ដោយគ្រាន់តែសង់ ៣ឆ្នាំដំបូង និង៣ឆ្នាំចុងក្រោយបង្អស់?

ដំណោះស្រាយ

ក. ប្រាក់បង់ប្រចាំគ្រាក្នុងមូលនិធិរំលោះ

យើងសង្កេតឃើញថា ក្រុងបង់ប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ តែការ ប្រាក់ធ្វើមូលធនកម្មបន្ត ដូចនេះ ការបង់ប្រាក់ ប្រចាំគ្រានេះ ជា General Annuity យើងត្រូវបំលែងវា អោយទៅជា Ordinary Annuity សិន

តាមនិយមន័យយើងទាញបាន ៖

$$1+i = e^{0.125} = 1.13314845 \Rightarrow i = 0.133148453$$

$$\begin{aligned} A &= \$200,000; n = 15; \\ \Rightarrow \quad R &= \frac{A}{S_{\overline{n}|i}} \\ &= \frac{200,000}{S_{\overline{15}|0.133148453}} \\ &= 4823.50 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ក្រុងត្រូវដាក់សន្សំជារៀងរាល់ឆ្នាំនូវទឹកប្រាក់ចំនួន \$4823.50 ។}}$

ខ. តារាង មូលនិធិរំលោះ (៣ឆ្នាំដំបូង និង ៣ឆ្នាំចុងក្រោយបង្អស់) ដើម្បី បំពេញ បីជួរដេកក្រោយ បង្អស់ នៃតារាង ដោយមិន ចាំបាច់បំពេញតារាងទាំង មូលយើង ត្រូវកំណត់ ទឹកប្រាក់ក្នុងមូលនិធិ រំលោះនៅចុងឆ្នាំ ១២៖

$$4823.50 \ S_{\overline{12}|0.133148453} = \$126129.35$$

Deposit Number	Deposit	Interest On Fund At 6%	Increase in Fund	Amount in Fund at End of Period
1	4823.50	0	4823.50	4823.50
2	4823.50	642.24	5465.74	10289.24
3	4823.50	1370.00	6193.50	16482.74
...	....	....	....	....
12	–	–	–	126129.35
13	4823.50	16793.93	21617.43	147746.78
14	4823.50	19672.26	24495.76	172242.54
15	4823.50	22933.83	27757.33	199999.87

ចំណាំ ៖ សមតុល្យគណនីនៃមូលនិធិចុងក្រោយ គឺ $199,999.87 នៅខ្វះ $0.13 ទៀតទើបគ្រប់ $200,000 ។ លំអៀងនេះ បណ្តាលមកពីការកាត់ខ្ទង់របស់យើង ។

៥.៣.២. ការប្រៀបធៀបវិធីរំលោះដោយសំណងថេរ និងមូលនិធិនៃការរំលោះ

យើងអាចធ្វើ ការប្រៀបធៀបរវាង Amortization Method និង Sinking Fund Method ដោយប្រៀបធៀបចំណាយក្នុង ដំណាក់កាល និមួយៗ។

ឧបមាថា

- i ជាអត្រាការប្រាក់ប្រចាំគ្រានៃកំចីសំរាប់វិធីសាស្ត្រទាំងពីរ
- j ជា អត្រាការប្រាក់ សំរាប់ មូលនិធិរំលោះ ក្នុង ដំណាក់កាល ដូចគ្នា រយៈពេល (ឬចំនួនដំណាក់កាល) គឺ n ហើយAប្រាក់ ដើមនៃកំចីនេះ

យើងបាន

- E_1 ចំណាយប្រចាំគ្រានិមួយៗនៃវិធីសាស្ត្ររំលោះដោយសំណងថេរ

$$\boxed{E_1 = \frac{A}{a_{\overline{n|}\, i}} = Ai + \frac{A}{S_{\overline{n|}\, i}}} \tag{៥.១៣}$$

- E_2 ចំណាយប្រចាំគ្រានិមួយៗនៃវិធីសាស្ត្រមូលនិធិនៃការរំលោះ ៖

$$\boxed{E_2 = Ai + \frac{A}{S_{\overline{n|}\, j}}} \tag{៥.១៤}$$

ជាទូទៅ៖

- បើ $i > j \Rightarrow S_{\overline{n|}i} > S_{\overline{n|}j} \Rightarrow E_1 < E_2$ គឺបានន័យថា Amortization Method ចំណេញជាង (Preferable)
- បើ $i = j \Rightarrow S_{\overline{n|}i} = S_{\overline{n|}j} \Rightarrow E_1 = E_2$បានន័យថាវិធីសាស្ត្រខាងលើសមមូល Equivalent
- បើ $i < j \Rightarrow S_{\overline{n|}i} < S_{\overline{n|}j} \Rightarrow E_1 > E_2$ បានន័យថា វិធីសាស្ត្រមូលនិធិរំលោះប្រសើរជាង (Sinking-Fund Method is preferable)

កំណត់សំគាល់ ៖

ក្នុងករណីអត្រាការប្រាក់នៃកំចីអនុវត្តលើបំណុល នៃវិធីសាស្ត្ររំលោះដោយ សំណងថេរ និង មូលនិធិនៃការរំលោះ ខុសគ្នានោះ សេចក្តីសន្និដ្ឋានខាងលើមិនត្រឹម ត្រូវទេ ។ យើងត្រូវអនុវត្តដោយគណនាតាមជាក់ស្តែងហើយ ធ្វើការ ប្រៀបធៀប ។

ឧទាហរណ៍ ៥.៣.៣. ៖ក្រុមហ៊ុនបានខ្ចីប្រាក់ពីធនាគារចំនួន $\$200,000$ សំរាប់រយៈពេល ១៥ឆ្នាំ។ តាម កិច្ចសន្យា ក្រុមហ៊ុននោះ អាច សង រំលោះដោយ សំណាងថេរ តាមអត្រា $j_1 = 11\%$ ឬ សង ការប្រាក់ លើប្រាក់កំចីតាម អត្រា $j_1 = 10\%$ និង បង្កើតមូលនិធិ រំលោះដែលទទួលបាន ការប្រាក់តាមអត្រា $j_1 = 7.5\%$ ទើបទូទាត់បំណុល នៅចុងឆ្នាំទី១៥។
តើវិធីណាមួយដែលប្រសើរសំរាប់ក្រុមហ៊ុននោះ ហើយវិធីនោះផ្តល់ផលចំណេញ ចំនួន ប៉ុន្មាន ក្នុងមួយឆ្នាំ ?

ដំណោះស្រាយ

តាម Amortization Method យើងបាន ៖

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{A}{a_{\overline{n}|i}} \\ &= \frac{200,000}{a_{\overline{15}|0.11}} \\ &= \$27813.05 \end{aligned}$$

តាម Sinking-Fund Method យើងបាន

$$\begin{aligned} E_2 &= Ai + \frac{A}{S_{\overline{n}|i}} \\ &= 200,000\,(0.105) + \frac{200,000}{S_{\overline{15}|0.075}} \\ &= \$21,000 + \$7,657.45 \\ &= \$28,657.45 \end{aligned}$$

ដូចនេះ
ការសង រំលោះ ដោយសំណាងថេរ វាប្រសើរជាង ការសងដោយ មូលនិធិ រំលោះ ដែល ក្នុងឆ្នាំ និមួយៗ ចំណេញ (ប្រសើរជាង) $\$844.40$។

លំហាត់អនុវត្តន៍

លំហាត់ ៥.១. បំណុលចំនួន $4000 ត្រូវសងរំលោះដោយសំណងថេរនៅរៀងរាល់ត្រីមាសសំរាប់រយៈពេល 2 ឆ្នាំ។ បើការប្រាក់ $J_4 = 10\%$?

ក. ចូរគណនាប្រាក់សំណងប្រចាំគ្រា ?

ខ. សង់តារាងរំលោះសំរាប់កំចីនេះ ?

លំហាត់ ៥.២. ប្រាក់កំចីមួយត្រូវបានសងរំលោះ ដោយសំណងថេរប្រចាំឆ្នាំចំនួន 10 លើក ។ ប្រាក់សំណងសំរាប់ ឆ្នាំទី 7 មានប្រាក់រំលោះចំនួន $110.25 និង ការប្រាក់ $39.75 ។ តើអត្រាការប្រាក់ជាក់លាក់ ប្រចាំឆ្នាំសំរាប់កំចីនេះស្មើប៉ុន្មាន ?

លំហាត់ ៥.៣. កំចីមួយត្រូវបានសងរំលោះ ប្រចាំត្រីមាសចំនួន 16 លើកគឺ ៖
$50 ; $100 ; $150 ; $\cdots$; $800 រៀងគ្នាហើយការសងលើកទី 1 អនុវត្ត 3 ខែក្រោយបន្ទាប់ពីថ្ងៃខ្ចី។ ការប្រាក់ $J_4 = 8\%$ ។
ចូរគណនាការប្រាក់សរុបដែលបានបង់ ជូនទាំងអស់ ?

លំហាត់ ៥.៤. ថ្ងៃទី ១ ខែ កក្កដា ឆ្នាំ ១៩៩៩ លោក សុខ បានខ្ចីប្រាក់ចំនួន $30 000 ពីធនាគារ ហើយសងវិញ ដោយសំណងថេរប្រចាំខែសំរាប់រយៈពេល 3 ឆ្នាំ។ធនាគារគិតការប្រាក់ $J_{12} = 8\%$ (សងលើកទី ១ ធ្វើនៅថ្ងៃទី ១ ខែ សីហា ឆ្នាំ ១៩៩៩)។ តើបំណុលចំនួនប៉ុន្មាន ដែលត្រូវបានរំលោះ ក្នុងឆ្នាំ ១៩៩៩? ហើយ ការប្រាក់ ចំនួនប៉ុន្មាន ដែលបានបង់ ?

លំហាត់ ៥.៥. បំណុលចំនួន $15 000 ត្រូវសងរំលោះដោយសំណងថេរប្រចាំខែ ចំនួន $350 រៀងរាល់ចុងខែ រហូត ដល់អស់បំណុល ព្រមទាំងបូកបន្ថែម ប្រាក់សងបង្គ្រប់ ចុងក្រោយ ។ បើការប្រាក់ $J_4 = 10\%$ ចូរគណនាបំណុល ដែលនៅជំពាក់នៅចុងឆ្នាំទី ២ ?

លំហាត់ ៥.៦. បំណុលមួយគិតការប្រាក់តាមអត្រា $J_4 = 10\%$ ត្រូវសងរំលោះ ដោយសំណងថេរចំនួន $300 ប្រចាំ ត្រីមាស។ បើបន្ទាប់ពីសងរំលោះលើកទី k រួចបំណុលនៅជំពាក់មានចំនួន $2853.17 ។
តើបំណុលនេះត្រូវ ស្មើប៉ុន្មាន នៅពេលដែលសងរំលោះលើកទី (k) រួចមក ?

លំហាត់ ៥.៧. លោកអ្នកបានខ្ចីប្រាក់ចំនួន $1 600 ពីក្រុមហ៊ុនមួយ និង យល់ព្រមបង់ $160/1 ខែ សំរាប់រយៈពេល 12 ខែ ។ ចូររក J_{12} ?

លំហាត់ ៥.៨. ហាងនាឡិកាមួយបានប្រកាសលក់នាឡិកា 1 គ្រឿង ក្នុងតំលៃ $55 ឬមួយដោយ បង់ $5 ប្រចាំខែ សំរាប់រយៈពេល 12 ខែ។ តើអត្រាប្រចាំ ឆ្នាំពិតប្រាកដដែលហាង នាឡិកានោះ គិតមានប៉ុន្មានសំរាប់អ្នក ទិញដែល បង់ប្រចាំខែ ? បើអ្នកទិញបង់ប្រាក់លើកទី 1 នៅថ្ងៃទិញ។

លំហាត់ ៥.៩. លោក *Anderson* បានខ្ចី ប្រាក់ចំនួន $8 000 ពី ស្ថាប័ន ហិរញ្ញវត្ថុ ហើយតាមកិច្ចសន្យាគាត់ត្រូវសង វិញប្រចាំខែដោយសំណាងថេរសំរាប់ រយៈពេល 4 ឆ្នាំតាមអត្រា $J_{12} = 13.5\%$។ ចូររកការប្រាក់ សរុបដែលគាត់បានសងទាំង 4 ឆ្នាំនេះ។

លំហាត់ ៥.១០. បំណុលចំនួន $1 000 គិត ការប្រាក់ តាមអត្រា $J_{12} = 13.5\%$ និង ត្រូវបាន ចុះកិច្ចសន្យា សងដោយ សំណាងថេរ ប្រចាំខែ នូវទឹកប្រាក់ ចំនួន $200 ក្នុងមួយខែ រហូតដល់អស់បំណុល។

ចូរសង់តារាងរំលោះសំរាប់កំចីនេះ ?

លំហាត់ ៥.១១. រថយន្ត *Bus* មួយគ្រឿង ត្រូវបានគេទិញ ក្នុងតំលៃ $46 000 ដោយ បង់ដល់ដៃចំនួន $6 000 និង បង់ប្រចាំខែស្មើៗគ្នាសំរាប់រយៈពេល 15 ឆ្នាំ។ បើការប្រាក់ $J_2 = 10\%$ ។

ក. ចូររកប្រាក់ដែលត្រូវបង់ប្រចាំខែ ?

ខ. ចូរបំពេញតារាងរំលោះអោយបាន ប្រាំមួយជួរដំបូង ?

លំហាត់ ៥.១២. ធនាគារ ABC បានអភិវឌ្ឍន៍គំរោងពិសេសមួយ ដើម្បីជួយដល់ អតិថិជនរបស់ខ្លួនក្នុងការសង រំលោះបំណុល អោយបាន ឆាប់រហ័ស។ ជំនួសអោយ ការបង់ ប្រាក់ចំនួន $\$X$ ក្នុងមួយខែ កូនបំណុល បានស្នើសុំ បង់ប្រាក់ $\$X/4$ ក្នុង មួយ សប្តាហ៍ (52 ដងក្នុង មួយឆ្នាំ)។ លោក សម្បត្តិ ទិញ ផ្ទះមួយខ្នង ត្រូវការខ្ចី ប្រាក់ចំនួន $95 000 គិតការប្រាក់ $J_{12} = 9\%$ ។ ចូរកំណត់ ៖

ក. ប្រាក់សំណាងប្រចាំខែ ដើម្បីរំលោះបំណុលអោយអស់ក្នុង រយៈពេល ២៥ឆ្នាំ ?

ខ. ប្រាក់សំណាងប្រចាំសប្តាហ៍ដូចគំរោង ដែលគេផ្តល់អោយ ?

គ. ចំនួនសប្តាហ៍ដែលត្រូវការដើម្បីរំលោះ បំណុលអោយអស់ (ករណីសងរំលោះប្រចាំសប្តាហ៍)?

ឃ. ការប្រាក់ដែលសន្សំបានក្នុងករណី រំលោះប្រចាំសប្តាហ៍ ?

លំហាត់ ៥.១៣. កសិករម្នាក់បានខ្ចីប្រាក់ពីធនាគារ ដោយសន្យាសងវិញចំនួន 200$ រៀងរាល់ខែតាមអត្រា $J_{12} = 12\%$ ក្នុងអំឡុងពេល 1 ឆ្នាំ ។ ការសងលើកទី 1 ចាប់អនុវត្តនៅ 7 ខែក្រោយបន្ទាប់ពីថ្ងៃខ្ចី។

ក. តើទឹកប្រាក់ដែលកសិករនោះបានខ្ចីមានចំនួនប៉ុន្មាន ?

ខ. ចូរសង់តារាងរំលោះនៃកំចីនេះ ?

លំហាត់ ៥.១៤. បំណុលចំនួន $6 000 ត្រូវបានចុះ កិច្ចសន្យាសង រៀងរាល់ ឆមាសដោយ រំលោះទុនថេរសំរាប់ រយៈពេល 3 ឆ្នាំ តាមអត្រា $J_2 = 12\%$ ។
ចូរគណនាប្រាក់រំលោះប្រចាំគ្រា និងសង់តារាងរំលោះនៃកំចីនេះ ?

លំហាត់ ៥.១៥. ធនាគារពាណិជ្ជកម្មមួយ បានយល់ព្រមអោយបុរសម្នាក់ខ្ចីប្រាក់ចំនួន $10000 ដោយសងរំលោះ ទុនថេរចំនួន $2 000/ ឆ្នាំ ។កំចីនេះគិតការប្រាក់ $J_1 = 13\%$។

ក. ចូរគណនារយៈពេលចាំបាច់សំរាប់ សងរំលោះនេះ ?

ខ. សង់តារាងរំលោះនៃកំចីនេះ ?

លំហាត់ ៥.១៦. ប្តីប្រពន្ធមួយគូរ បានដាក់ប្រាក់សន្សំសំរាប់បង់ថ្លៃផ្ទះ របស់ខ្លួន ។ អ្នកទាំងពីរចង់ទទួលបានប្រាក់ $15 000 នៅចុងឆ្នាំទី 4 ពីគណនីសន្សំនោះដែលផ្តល់ការប្រាក់ តាមអត្រា $J_1 = 6\%$។

ក. តើអ្នកទាំងពីរនាក់នោះ ដាក់ប្រាក់ចំនួនប៉ុន្មាន នៅរៀងរាល់ចុងឆ្នាំ ?

ខ. ចូរសង់តារាងនៃមូលនិធិរំលោះនោះ ?

លំហាត់ ៥.១៧. កូនបំណុលម្នាក់ បានខ្ចីប្រាក់ ចំនួន $5000 ហើយ យល់ព្រម សងការប្រាក់រៀងរាល់ ឆមាសតាម អត្រា $J_2 = 10\%$ នៃបំណុលនិងបង្កើតមូលនិធិនៃរំលោះដែលត្រូវសងបំណុលនៅ ចុងឆ្នាំទី 5 ។
ប្រសិនបើ មូលនិធិនោះ ទទួលបាន ការប្រាក់តាម អត្រា $J_2 = 7\%$។

ក. ចូររកប្រាក់ចំណាយសរុបប្រចាំឆមាសរបស់គាត់ ?

ខ. តើនៅចុងឆ្នាំទី 4 ក្នុងមូលនិធិនៃរំលោះមានទឹកប្រាក់ប៉ុន្មាន ?

លំហាត់ ៥.១៨. មូលនិធិរំលោះមួយទទួលការប្រាក់ $= 13\%$ ហើយឥលូវនេះក្នុងមូលនិធិមានប្រាក់ $2 000 ។

១. តើចំនួនប្រាក់បង់ ប្រចាំត្រីមាស ស្មើប៉ុន្មាន ដើម្បីអោយមូលនិធិបង្កើនបានប្រាក់ $10 000 ក្នុង រយៈពេល 3ឆ្នាំខាងមុខ ?

២. តើរយៈពេល 2 ឆ្នាំទៀត មូលនិធិមានប្រាក់ចំនួនប៉ុន្មាន ?

លំហាត់ ៥.១៩. ដើម្បីជួសជុលកែលំអ ម្ចាស់អាគារបានសំរេចចិត្ត បង្កើត មូលនិធិរំលោះមួយដែលត្រូវទទួលបាន ប្រាក់ $50 000 នៅចុងឆ្នាំទី ៣ ។

ក. តើទឹកប្រាក់បង់ប្រចាំខែត្រូវស្មើប៉ន្មាន បើមូលនិធិទទួលបានការប្រាក់ $J_{365} = 5\%$?

ខ. ចូរសង់តាងមូលនិធិរំលោះ ៣ជួរដំបូង និង ២ជួរក្រោយបង្អស់ ?

លំហាត់ ៥.២០. អាជ្ញាធរក្រុងបានខ្ចីប្រាក់ចំនួន $\$250\,000$ ដោយបង់ការប្រាក់តាមអត្រា $J_1 = 9,5\%$ ។ ក្រុងបាន រៀបចំ ដាក់ប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ ទៅក្នុងមូលនិធិរំលោះ ដែលទទួល ការប្រាក់ $J_1 = 6\%$ ដើម្បីទូទាត់ បំណុលទាំង អស់នៅ ចុងឆ្នាំទី ១៥ ។
តើចំណាយសរុបប្រចាំឆ្នាំរបស់ក្រុង ស្មើប៉ុន្មាន ?

លំហាត់ ៥.២១. ការប្រាក់ $J_4 = 12\%$ លើកំចីចំនួន $\$3\,000$ ត្រូវបង់រៀងរាល់ឆមាសរហូតដល់កាលវសាន្ត ។ មូលនិធិ រំលោះមួយទទួល ការប្រាក់តាមអត្រា $J_4 = 8\%$ ត្រូវបានបង្កើតឡើងដើម្បីអោយ កូនបំណុលអាចសង ប្រាក់កំចីនៅ ចុងឆ្នាំទី ៤ ។

ក. ចូរគណនាប្រាក់ ដាក់សន្សំប្រចាំឆមាស ក្នុងមូលនិធិរំលោះ និង ដោយ ផ្អែកលើ ការដាក់ប្រាក់ប្រចាំឆមាស ចូរសង់តារាងមូលនិធិរំលោះសំរាប់ពីរជួរចុងក្រោយ ?

ខ. ចូរគណនាចំណាយសរុបប្រចាំឆមាសសំរាប់កំចីនេះ ?

គ. តើបំណុលនៅជំពាក់នៅចុងឆ្នាំទី ២ ស្មើប៉ុន្មាន ?

លំហាត់ ៥.២២. នៅថ្ងៃទី ០១ ខែ សីហា ឆ្នាំ ១៩៩៨ លោកភក្តីបានខ្ចីប្រាក់ $\$20\,000$ សំរាប់រយៈពេល ១០ឆ្នាំ ។ ការប្រាក់ 10% ក្នុង១ឆ្នាំអាច បំលែងជាការប្រាក់ប្រចាំឆមាសដែល ត្រូវបង់រហូតដល់កាលវសាន្ត ។ ដើម្បីធានា សុវត្ថិភាពក្នុង ការទូទាត់បំណុល លោក ភក្តី បានដាក់ប្រាក់ក្នុងមូលនិធិរំលោះ នៅថ្ងៃទី ០១ ខែ កុម្ភៈ និង ថ្ងៃទី ០១ ខែ សីហា ឆ្នាំ ១៩៩៩ រហូតដល់ឆ្នាំ ២០០៨ ។ មូលនិធិនេះទទួល ការប្រាក់ $J_1 = 7\%$ ក្នុងឆ្នាំ ១៩៩៩ រហូតដល់ថ្ងៃទី ៣១ ខែ ធ្នូ ឆ្នាំ ២០០៣ និង $J_1 = 6\%$ ចាប់ពីថ្ងៃទី ០១ ខែ មករា ឆ្នាំ ២០០៤ រហូតដល់ ២០០៨ ។

ក. ចូររកចំណាយសរុបប្រចាំឆមាស សំរាប់កំចីនេះ ?

ខ. តើមូលនិធិរំលោះមានប្រាក់ប៉ុន្មាន បន្ទាប់ពីដាក់ប្រាក់ថ្ងៃទី ១ ខែ សីហា ឆ្នាំ ២០០៧ ?

គ. ចូរសង់តារាងមូលនិធិរំលោះសំរាប់ថ្ងៃទី ១ ខែ កុម្ភៈ ឆ្នាំ ២០០៨ និង ថ្ងៃទី ០១ ខែ សីហា ឆ្នាំ២០០៨ ?

លំហាត់ ៥.២៣. ក្រុមហ៊ុនមួយបានខ្ចីប្រាក់ $\$50\,000$ ហើយត្រូវសងវិញដោយសំណងថេរ នៅរៀងរាល់ចុងឆ្នាំសំរាប់ រយៈពេល ១០ឆ្នាំ ចូរគណនាចំណាយសរុបប្រចាំឆ្នាំ សំរាប់កំចីក្នុងលក្ខខ័ណ្ឌ

ក. បំណុលត្រូវសងរំលោះដោយ សំណងថេរតាមអត្រា $J_1 = 9\%$?

ខ. សងការប្រាក់ 9% លើកំចី និង បង្កើតមូលនិធិរំលោះដែលទទួលបានការប្រាក់ $J_1 = 9\%$?

គ. សងការប្រាក់ 9% លើប្រាក់កំចី និង បង្កើតមូលនិធិរំលោះដែលទទួលបានការប្រាក់ $J_1 = 6\%$?

លំហាត់ ៥.២៤. ក្រុមហ៊ុនអាចខ្ចីប្រាក់ចំនួន $\$180\,000$ ហើយត្រូវសងវិញក្នុងរយៈពេល ១៥ឆ្នាំ ។ គេអាចសងរំលោះបំណុលដោយសំណងថេរតាមអត្រាការប្រាក់ $J_1 = 10\%$ ឬ សងការប្រាក់តាមអត្រា $J_1 = 9\%$ និង បង្កើតមូលនិធិ រំលោះ ដែលទទួលការប្រាក់ $J_1 = 7\%$ ។ តើគំរោងណាមួយថោកជាង ? ហើយចំណោញចំនួនប៉ុន្មានក្នុងមួយឆ្នាំ ?

លំហាត់ ៥.២៥. ក្រុមហ៊ុនខ្ចីប្រាក់ចំនួន $\$60\,000$ ហើយត្រូវសង វិញរយៈពេល ៥ឆ្នាំ ។ ប្រភពទី ១ នឹងអោយខ្ចី ដោយ គិតការប្រាក់ $J_2 = 10\%$ ប្រសិនបើ សងរំលោះដោយ សំណងថេរ ប្រចាំឆមាស ។ ប្រភពទី ២ និងអោយខ្ចីដោយគិតការប្រាក់ $J_2 = 9.5\%$ ប្រសិនបើនៅរៀងរាល់ឆមាសសង តែការប្រាក់ និងសង ប្រាក់បំណុលនៅចុងឆ្នាំទី ៥ ។ តើប្រភពមួយណាដែលថោកជាងគេ និង ប្រាក់ចំណោញប្រចាំឆមាស ចំនួនប៉ុន្មាន បើមូលនិធិទទួលការប្រាក់ $J_2 = 8\%$?

លំហាត់ ៥.២៦. ក្រុមហ៊ុនអាចខ្ចីប្រាក់ $\$200\,000$ មានការប្រាក់ $J_1 = 9\%$ និង សងរំលោះដោយសំណងថេរសំរាប់ រយៈពេល ១០ឆ្នាំ ។ រីឯ ប្រភពទី ២ ប្រាក់កំចី នេះអាចខ្ចី ដោយ គិតការប្រាក់ $J_1 = 8.5\%$ ប្រសិនបើ សង ការប្រាក់ រៀងរាល់ឆ្នាំ និង សងប្រាក់ដើម នៅចុងឆ្នាំទី ១០ ។ តើមូលនិធិរំលោះ ត្រូវទទួល ការប្រាក់ J_1 ប៉ុន្មាន ដើម្បីអោយ ចំណាយសរុបប្រចាំឆ្នាំនៃ ប្រភពទាំងពីរនេះស្មើគ្នា ?

លំហាត់ ៥.២៧. ក្រុមហ៊ុន ត្រូវការខ្ចីប្រាក់ $\$200\,000$ សំរាប់ រយៈពេល ៦ឆ្នាំ ។ ប្រភពទី ១ អាចអោយខ្ចីដោយគិត ការប្រាក់ $J_2 = 10\%$ ប្រសិនបើសងរំលោះដោយសំណងថេរប្រចាំខែ។ ប្រភពទី ២ នឹងអោយខ្ចីដោយ គិតការប្រាក់ $J_4 = 9\%$ បើសិនសង តែការប្រាក់រៀងរាល់ខែ និង សងប្រាក់ដើម នៅ ចុងឆ្នាំទី ៦ ។ ក្រុមហ៊ុន អាចទទួល ការប្រាក់ $J_{365} = 6\%$ ក្នុងមូលនិធិរំលោះ។ តើប្រភពណាដែលក្រុមហ៊ុនគប្បីសុំខ្ចី? និង ប្រាក់ចំនួនប៉ុន្មានត្រូវបានសន្សំក្នុងមួយខែ ?

ជំពូកទី ៦

សញ្ញាប័ណ្ណ ឬ ប័ណ្ណបំណុល

៦.១. សញ្ញាណនៃសញ្ញាប័ណ្ណ

ក្រុមហ៊ុន និង សហគ្រាសរដ្ឋ ឬ ឯកជនដែល ត្រូវការទុន អាចស្វែងរក ពីប្រភពផ្សេងៗ ក្រៅពី ស្ថាប័ន ហិរញ្ញ វត្ថុ ឬធនាគារ ពោល គឺ អាចខ្ចីធុនពីសាធារណៈជន ដោយបោះផ្សាយ ឬលក់សញ្ញាប័ណ្ណ។ ការសុំខ្ចីដោយបោះ ផ្សាយ សញ្ញាប័ណ្ណ គឺជាការសុំខ្ចីរយៈ ពេល វែង និង ជាកម្ចី ដែល សងរំលោះ ប្រាក់ដើម នៅកាលវសាន្ត មានន័យថា អ្នកខ្ចី*(Issuer)* និង ត្រូវបង់ការ ប្រាក់នៅរៀងរាល់គ្រា ដែលមានចែង ក្នុង សញ្ញាប័ណ្ណ រហូតដល់ កាលបរិច្ឆេទចុង ក្រោយ នៃ ការសងបំណុលទើបសងប្រាក់ ដើមទៅម្ចាស់បំណុល *(Bond holder)*។

៦.២. និយមន័យ និងនិមិត្តសញ្ញានៃសញ្ញាប័ណ្ណ

៦.២.១. និយមន័យ

និយមន័យ ៦.២.១. សញ្ញាប័ណ្ណ គឺ ជាកិច្ចសន្យាលាយលក្ខណ៍អក្សររវាង អ្នកបោះផ្សាយ ឬ អ្នកខ្ចី (Issuer) និង អ្នកវិនិយោគ (Investor) ដែលបញ្ជាក់ អំពី៖

- តម្លៃចារឹក (The Face value)
- កាលបរិច្ឆេទកំណត់សង ឬឥណប្រតិទាន (The Redemption date or Maturity date)
- អត្រាចារឹក (The Bond rate or Coupon rate)
- តម្លៃត្រូវសង (The Redemption Value)

ចូរសំគាល់ថា៖

- **អត្រាចារឹក** *(Bond rate or Coupon rate)* ៖ គឺ ជាអត្រាដែលសញ្ញាប័ណ្ណបង់ការប្រាក់ជារៀង រាល់គ្រាគិតលើ តម្លៃចារឹក របស់វា រហូតដល់ថ្ងៃកំណត់សង។
- **តម្លៃត្រូវសង** *(Redemption value)* ៖ គឺ ជាទឹកប្រាក់ដែលបានសន្យាសង នៅកាលបរិច្ឆេទ ចុងក្រោយនៃកិច្ច សន្យា។ ស្ទើរតែ គ្រប់ករណីទាំងអស់ តម្លៃត្រូវសងនេះស្មើនឹងតម្លៃចារឹក

ហើយគេថាសញ្ញាប័ណ្ណ ត្រូវបាន សងតាមតម្លៃចារឹក *(Bond is redeemed at par)*។

សញ្ញាប័ណ្ណ អាចត្រូវបានទិញ ឬ លក់ជាច្រើនដងមុនពេលដល់ ឥណប្រតិទាន។ ចំពោះចំណូលជាក់លាក់របស់ អ្នកទិញសញ្ញាប័ណ្ណ មួយគឺត្រូវបាន កំណត់ដោយអត្រាទិន្នផល *(Yield rate)* ។

៦.២.២. និមិត្តសញ្ញា

ក្នុងជំពូកនេះ យើងប្រើប្រាស់និមិត្តសញ្ញាមួយចំនួន ដែលកំណត់តាងដូចតទៅ៖

- F : តម្លៃចារឹករបស់សញ្ញាប័ណ្ណ *(Face value or Par value of the bond)*
- C : តម្លៃត្រូវសងនៃសញ្ញាប័ណ្ណ *(Redemption value of the bond)*
- r : អត្រាចារឹក *(Bond rate or Coupon rate)*
- i : អត្រាទិន្នផលប្រចាំគ្រារបស់អ្នកទិញសញ្ញាប័ណ្ណ *(Yield rate per interest period)*
- n : រយៈពេលនៃកម្ចី *(The number of interest periods until the redemption period)*
- P :តម្លៃទិញឬតម្លៃលក់នៃសញ្ញាប័ណ្ណធៀបនឹង i*(Purchase price of the bond to yield rate i)*
- Fr : ការប្រាក់នៃសញ្ញាប័ណ្ណដែលត្រូវបង់ *(Bond interest payment or Coupon)*

៦.៣. តម្លៃទិញ និង តម្លៃសញ្ញាប័ណ្ណ

៦.៣.១. តម្លៃទិញនៃសញ្ញាប័ណ្ណ ធៀបនឹងអត្រាទិន្នផល

អ្នកវិនិយោគ តែងតែចង់ដឹង អត្រា ជាក់លាក់មួយ សម្រាប់ខ្លួនមុន នឹងធ្វើការសម្រេចចិត្តដាក់វិនិយោគ លើ គម្រោង អ្វី មួយ។ ស្រដៀងគ្នានេះដែរមុននឹងវិនិយោគ គិនទិញសញ្ញាប័ណ្ណ គេត្រូវដឹងអត្រា បំណុល *(Rate of return)* ទើប គេកំណត់ថ្លៃ ដែល ត្រូវទិញនោះ ចុងក្រោយ។ យើងដឹងថាសញ្ញាប័ណ្ណ គឺជាកម្ចី*Interest-only loan* បានន័យថានៅរៀងរាល់គ្រា គេសងការប្រាក់ដោយគិតតាមអត្រាចារឹកលើតម្លៃ និងសងប្រាក់ដើមនៅកាលវសាន្ត។

តម្លៃសញ្ញាប័ណ្ណនៅថ្ងៃដែលត្រូវទិញនោះ គឺស្មើផលបូកតម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃការប្រាក់ដែលបង់ប្រចាំគ្រា និង តម្លៃត្រូវសង យើងអាចតាងលំហូរសាច់ប្រាក់ដោយ ដ្យាក្រាមខាងក្រោម៖

Cash Flow :

យោងតាមដ្យាក្រាមនេះ យើងបាន៖ $P = Fra_{\overline{n}|_i} + C(1+i)^{-n}$ (៦.១)

$$\text{ដោយ} \quad a_{\overline{n}|_i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$
$$1+(1+i)^{-n} = ia_{\overline{n}|_i}$$
$$(1+i)^{-n} = 1 - ia_{\overline{n}|_i} \qquad (\star)$$

យើងជំនួស($\star$) ក្នុងសមីការ(៦.១) ទាញបាន៖

$$\begin{aligned} P &= Fra_{\overline{n}|_i} + C(1+i)^{-n} \\ &= Fra_{\overline{n}|_i} + C(1-ia_{\overline{n}|_i}) \\ &= C + (Fr - Ci)a_{\overline{n}|_i} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{P = C + (Fr - Ci)a_{\overline{n}|_i}}$ (៦.២)

នៅខាងលើយើងដឹងរួចមកហើយថា ស្ទើរតែគ្រប់ករណីទាំងអស់ ប្រាក់សំណងនៃសញ្ញាប័ណ្ណស្មើនឹង តម្លៃ ចារឹក ហើយករណីនេះយើងទាញបាន រូបមន្តថ្មីមួយទៀតដែលហៅថា រូបមន្ត *Makeham's purchase price*។

បើ $C = F$ នោះគេបាន៖

$$\begin{aligned} P &= Fra_{\overline{n}|_i} + C(1+i)^{-n} \\ &= Fr\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + F(1+i)^{-n} \\ &= F(1+i)^{-n} + \frac{r}{i}[F - F(1+i)^{-n}] \end{aligned}$$

រូបមន្ត $\boxed{P = F(1+i)^{-n} + \frac{r}{i}[F - F(1+i)^{-n}]}$ (៦.៣)

រូបមន្ត(៦.៣) ខាងលើហៅថា *Makeham's purchase price formula*

ឧទាហរណ៍ ៦.៣.១. សញ្ញាប័ណ្ណ មួយ មានតម្លៃចារឹក 1000$ ដែល បង់ការប្រាក់តាមអត្រាចារឹក $J_2 = 12\%$ និងតម្លៃសងនៃសញ្ញាប័ណ្ណ គឺស្មើនឹង តម្លៃ ចារឹកដែលត្រូវសងនៅចុង ឆ្នាំទី 10។

១. ចូររកតម្លៃទិញនៃសញ្ញាប័ណ្ណ ធៀបនឹងអត្រាចំណូល 10% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំឆមាស?

២. ចូររកតម្លៃទិញនៃសញ្ញាប័ណ្ណធៀប នឹងអត្រាទិន្នផល $J_2 = 15\%$?

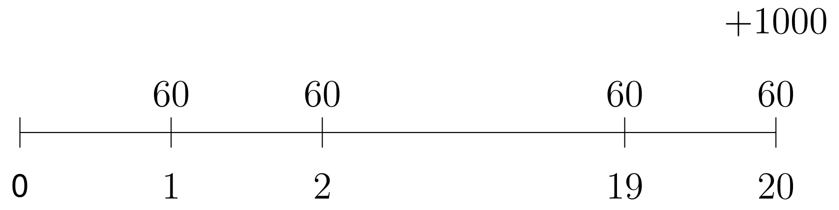
ដំណោះស្រាយ

១. នៅរៀងរាល់ឆមាសសញ្ញាប័ណ្ណ ត្រូវបង់ការប្រាក់ចំនួន៖

$$Fr = \$1000\left(\frac{0.12}{2}\right) = \$60$$

និង សងប្រាក់ $C = F = \$1000$ នៅចុងឆ្នាំទី 10 ដូចបង្ហាញតាមដ្យាក្រាមខាងក្រោម៖

Cash Flow :



$$P = ?; \qquad i = \frac{J_2}{2} = \frac{0.1}{2} = 0.05$$

តាមលំហូរសាច់ប្រាក់ខាងលើយើងបាន៖

$$\begin{aligned} P &= 60a_{\overline{20}|0.05} + 1000(1+0.05)^{-20} \\ &= 747.73 + 376.89 \\ &= \$1124.62 \end{aligned}$$

២. តាមរូបមន្ត(៦.១)៖ $P = Fra_{\overline{n}|i} + C(1+i)^{-n}$

ដែល

$n = 20; i = \dfrac{J_2}{2} = \dfrac{0.12}{2} = 0.075; C = F = \$1000;\ r = \dfrac{J_2}{2} = \dfrac{0.12}{2} = 0.06$

តម្លៃទិញ៖

$$\begin{aligned} P &= 1000(0.06)a_{\overline{20}|0.075} + 1000(1+0.075)^{-20} \\ &= 611.67 + 235.41 \\ &= \$847.08 \end{aligned}$$

ដូចនេះ

អត្រាទិន្នផលលើទីផ្សារ $J_2 = 15\%$ នោះសញ្ញាប័ណ្ណត្រូវលក់ក្នុងតម្លៃ $P = \$847.08$

ឧទាហរណ៍ ៦.៣.២. ក្រុមហ៊ុន សាជីវកម្មមួយបាន បោះផ្សាយសញ្ញាប័ណ្ណ ដែល មានកាលបរិច្ឆេទកំណត់ សង ក្នុងរយៈពេល១៥ ឆ្នាំ ទៀត តម្លៃចារឹក $10000និង តម្លៃសង ស្មើនឹង តម្លៃចារឹក10% សញ្ញាប័ណ្ណនេះផ្ដល់ការប្រាក់ តាមអត្រាចារឹក ធ្វើមូលធនកម្ម ប្រចាំ ឆមាស។

ចូរគណនាតម្លៃសញ្ញាប័ណ្ណធៀប នឹងអត្រាទិន្នផល9% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំខែ?

ដំណោះស្រាយ

ការបង់ប្រាក់ធ្វើនៅរៀងរាល់ឆមាស ហើយទិន្នផល9% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំខែ ដូចនេះយើង ត្រូវរកអត្រា ទិន្នផល ប្រចាំឆមាស សមមូល និងអត្រាប្រចាំខែជាមុន។
តាមរូបមន្ត៖ $(1+i)^n = (1+i)^m$
ដែល

$$n = 2; m = 12; i' = \frac{0.09}{12}$$
$$(1+i)^2 = \left(1+\frac{0.09}{12}\right)^{12}$$
$$i = (1.0075)^6 - 1 = 0.045852235$$

ម្យ៉ាងទៀតតាមរូបមន្ត(៦.២) យើងទាញបាន៖

$$\begin{aligned} P &= C + (Fr - Ci)a_{\overline{n}|i} \\ &= 10000 + (10000 \times \frac{0.1}{2} - 10000 \times 0.0458522)a_{\overline{30}|0.0458522} \\ &= \$10000 + 668.90 \\ &= \$10668.90 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{សញ្ញាប័ណ្ណលក់ក្នុងតម្លៃ } P = \$10668.90}$ ។

៦.៣.២. តម្លៃសញ្ញា ប័ណ្ណក្នុងចន្លោះកាលបរិច្ឆេទ ការប្រាក់នៃសញ្ញាប័ណ្ណ

ឧបមាថា សញ្ញាប័ណ្ណមួយ ត្រូវបានទិញ ដោយ អ្នកវិនិយោគ ក្នុងចន្លោះ កាលបរិច្ឆេទ ការប្រាក់របស់វា តាម អត្រាទិន្នផល i ។ ហើយ នៅ ទីនេះ យើងកំណត់តាង៖

- $P_0 =$ តម្លៃសញ្ញាប័ណ្ណនា កាលបរិច្ឆេទបន្ថែមដំបូង ដែលទើបនឹងបង់ការប្រាក់រួច
- $k =$ ផ្នែកប្រភាគនៃរយៈពេល គិតការប្រាក់ $(0 < K < 1)$
- $P =$ តម្លៃទិញសញ្ញាកាលបរិច្ឆេទ ពិតប្រាកដដែលហៅថា តម្លៃសរុប (Flat price)

បើយើង អនុវត្ត តាមទ្រឹស្តី (Theorical Method) តម្លៃទិញ នៃសញ្ញាប័ណ្ណគឺ ត្រូវគណនា តាមបែបការប្រាក់សមាស ពោលគឺៈ

$$\boxed{P = P_0(1+i)^k} \tag{៦.៤}$$

ការអនុវត្តជាក់ស្តែងគេច្រើនប្រើ Practical Method ដែលគេគិតតាមបែប ការប្រាក់សាមញ្ញ នៃរយៈពេលផ្នែក ប្រភាគគឺ គេ ត្រូវ កំណត់ៈ

$$\boxed{P = P_0(1+ki)} \tag{៦.៥}$$

តាមពិត ការអនុវត្ត តាម Practical Method វាមាន ទិន្នផល ច្រើនជាង ការតាមវិធីទ្រឹស្តី (Theorical Method) បន្តិច។

យើងអាចចាត់ទុកតម្លៃទិញ P ផ្សំឡើង ដោយពីរផ្នែក គឺ **តម្លៃទីផ្សារ** (Market Price) ដែលជានិច្ចកាលស្មើនឹង តម្លៃគណនេយ្យ (Book Value) និង **ការប្រាក់សញ្ញាប័ណ្ណបាន គិតបន្ថែម** I (Accrued bond interest)នាកាលបរិច្ឆេទ ទិញនោះ។

យើងកំណត់យកៈ

$P_1 =$ តម្លៃសញ្ញាប័ណ្ណនា កាលបរិច្ឆេទការប្រាក់ (ក្រោយពីបង់ការប្រាក់រួច)

យើងទាញបានៈ

$$\boxed{P_1 = (1+i)P_0 - Fr} \tag{៦.៦}$$

តម្លៃទីផ្សារ(ប្រើ Method Linear Interpolation រវាង P_0និងP_1):

$$\boxed{Q = P_0 + k(P_1 - P_0)} \tag{៦.៧}$$

ហើយការប្រាក់សញ្ញាប័ណ្ណគិតបន្ថែម (Accrued bond interest) :

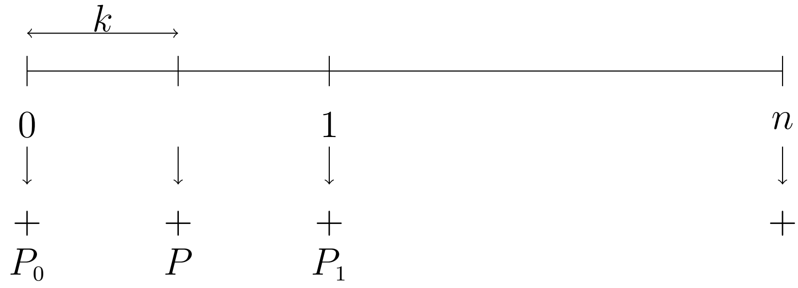
$$\boxed{I = kFr} \tag{៦.៨}$$

ដូចនេះ ជាលទ្ធផលចុងក្រោយយើងបាន៖

$$\boxed{P = Q + I} \qquad (៦.៩)$$

សំគាល់ រូបមន្ត(៦.៥) និង(៦.៩) សមមូលនឹងគ្នា។
ដ្យាក្រាមខាងក្រោមបង្ហាញអំពីលំហូរសាច់ប្រាក់ដែល បានបកស្រាយក្នុងរូបមន្តខាងលើ៖

Cash Flow :



ឧទាហរណ៍ ៦.៣.៣. សញ្ញាប័ណ្ណមួយមានតម្លៃចារឹក $\$2000$ អត្រាចារឹក $r_2 = 10\%$ និងសង តាមតម្លៃចារឹក នា ថ្ងៃទី០១ ខែតុលា ឆ្នាំ២០០២។ ចូរគណនាតម្លៃទិញនៃសញ្ញាប័ណ្ណ នាថ្ងៃទី១៦ ខែមិថុនា ឆ្នាំ២០០០ បើអត្រាទិន្នផល $i_2 = 9\%$។

១. ប្រើទ្រឹស្តី (Theorical Method)

២. ប្រើវិធីអនុវត្តជាក់ស្តែង (Practical Method)

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃទិញនៃសញ្ញាប័ណ្ណ
អត្រាទិន្នផលក្នុងមួយឆមាស គឺ $i = \frac{i_2}{2} = 0.045 \quad ; F = \$2000;\ C = \$2000$

កាលបរិច្ឆេទការប្រាក់បន្ថែមគឺថ្ងៃទី០១ ខែមេសា ឆ្នាំ២០០០ រយៈពេល ពិតប្រាកដចន្លោះ ថ្ងៃទី០១ ខែមេសា ឆ្នាំ២០០០ និង ថ្ងៃ ទី១៦ ខែមិថុនា ឆ្នាំ២០០០ គឺ៧៦ថ្ងៃ។ រយៈពេលជាក់លាក់ ចន្លោះថ្ងៃទី០១ ខែមេសា ឆ្នាំ២០០០ និង ថ្ងៃទី០១ ខែតុលា ឆ្នាំ២០០០ គឺ១៨៣ ថ្ងៃ។ ដូចនេះ

$$k = \frac{76}{183} \qquad (183\text{ថ្ងៃគឺ}1\text{ឆមាស})$$

យើងបាន $Fr = 2000 \times \frac{0.1}{2} = \$100; Ci = \$2000 \times \frac{0.9}{2} = \$90$
តាមរូបមន្ត(៦.២)

$$\begin{aligned} P_0 &= C + (Fr - Ci)a_{\overline{n}|i} \\ &= 2000 + (100 - 90)a_{\overline{5}|0.045} \\ &= \$2043.90 \end{aligned}$$

១. Theorical Method

តាមរូបមន្ត (៦.៤)

$$\begin{aligned} P &= P_0(1+i)^k \\ &= 2043.90(1+0.045)^{\frac{76}{183}} \\ &= \$2081.61 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: តម្លៃទិញសញ្ញាប័ណ្ណគឺ \$2081.61

២. Practical Method

តាមរូបមន្ត (៦.៥)

$$\begin{aligned} P &= P_0(1+ki) \\ &= 2043.90(1 + \frac{76}{183} \times 0.045) \\ &= \$2082.10 \end{aligned}$$

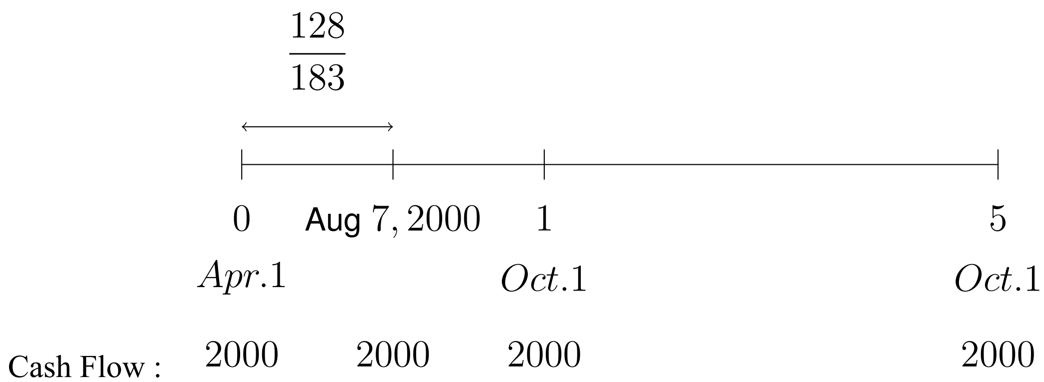
ដូចនេះ: តម្លៃទិញសញ្ញាប័ណ្ណគឺ \$2082.10

បើសិនជាតម្លៃទិញពិតប្រាកដ P ត្រូវបានបញ្ជាក់នោះនឹងមានភាព ដាច់ (Discontinuity) នៃ តម្លៃដ៏ធំមួយ នៅកាលបរិច្ឆេទការប្រាក់ នីមួយៗ នៃសញ្ញាប័ណ្ណ គឺ នៅពេលនោះការប្រាក់នៃ សញ្ញាប័ណ្ណ បានគិតបន្ថែម នឹង ប្តូរភ្លាមៗ ពី Fr ទៅសូន្យ។ អាស្រ័យហេតុ នេះ តម្លៃ ដែល ប្រកាសនោះ គឺជា**តម្លៃទីផ្សារ** Q ពោលគឺជាតម្លៃទីផ្សារនៃ \$100 តម្លៃចារឹករបស់សញ្ញាប័ណ្ណ។ គេកំណត់ហៅ តម្លៃនេះ ថា **តម្លៃប្រកាស** q (Market Quotation) ដែលគេប្រកាសលក់។

ឧទាហរណ៍ ៦.៣.៤. សញ្ញាប័ណ្ណមួយមានតម្លៃចារឹក \$100 អត្រាចារឹក $J_2 = 9\%$ ហើយសងវិញ តាមតម្លៃចារឹក នាថ្ងៃទី០១ ខែតុលា ឆ្នាំ២០០២។ ចូររកតម្លៃទិញ នៃ សញ្ញាប័ណ្ណនា ថ្ងៃទី ០៧ ខែ សីហា ឆ្នាំ២០០០ ធៀប នឹងអត្រា ទិន្នផល 10% ធ្វើមូល ធនកម្ម ប្រចាំ ឆមាស និងកំណត់តម្លៃ ទីផ្សារ (Market Price) ការប្រាក់សញ្ញាប័ណ្ណបានគិត បន្ថែម (Accrued bond interest) និង Market quotation នាថ្ងៃទី០៧ ខែសីហា ឆ្នាំ២០០០?

ដំណោះស្រាយ

យើងពិនិត្យ Cash Flow នៃសញ្ញាប័ណ្ណខាងលើដូចតទៅៈ



តម្លៃទិញនៃសញ្ញាប័ណ្ណនាថ្ងៃទី០១ ខែមេសា ឆ្នាំ២០០០

$$\begin{aligned} P_0 &= C + (Fr - Ci)a_{\overline{n}|i} \\ &= 1000 + \left(1000 \times \frac{0.09}{2} - 1000 \times \frac{0.10}{2}\right) a_{\overline{5}|0.05} \\ &= \$978.35 \end{aligned}$$

តម្លៃទិញនៃសញ្ញាប័ណ្ណនៅថ្ងៃទី០៧ ខែមេសា ឆ្នាំ២០០០

$$\begin{aligned} P &= P_0(1 + ki) \\ &= \$978.35(1 + \frac{128}{183} \times 0.05) \\ &= \$1012.57 \end{aligned}$$

តម្លៃទិញសញ្ញាប័ណ្ណនាថ្ងៃទី០១ ខែតុលា ឆ្នាំ២០០០

$$\begin{aligned} P &= P_0(1 + i) - Fr \\ &= \$978.35(1 + 0.05) - 1000 \times 0.045 \\ &= \$982.27 \end{aligned}$$

តម្លៃទីផ្សារនៃសញ្ញាប័ណ្ណនាថ្ងៃទី០៧ ខែសីហា ឆ្នាំ២០០០

$$\begin{aligned} Q &= P_0 + k(P_1 - P_0) \\ &= \$978.35 + \frac{128}{183}(\$982.27 - \$978.35) \\ &= \$981.09 \end{aligned}$$

Market quotation: គេគិតតម្លៃទីផ្សារនៃ $\$100$ តម្លៃចារឹករបស់សញ្ញាប័ណ្ណនោះ។ យើងដឹង ហើយថា តម្លៃចារឹក $\$1000$ ថ្លៃ $\$981.09$ នោះ តម្លៃចារឹក $\$100$ គេលក់ថ្លៃ

$$\begin{aligned} q &= \frac{\$981.09 \times 100}{1000} \\ &= \frac{\$981.09}{10} = 98.11 \approx 98\frac{1}{8} \qquad Martquotation \end{aligned}$$

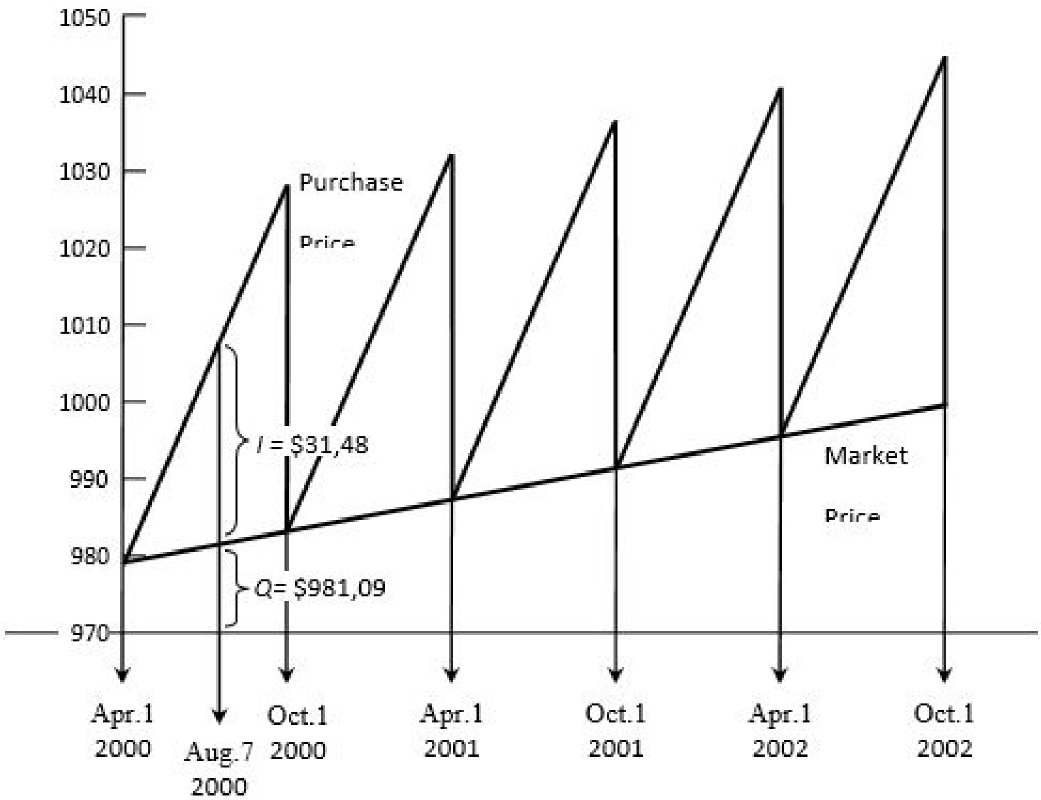
ការប្រាក់សញ្ញាប័ណ្ណបានគិតបន្ថែម (Accrued bond interest)

$$\begin{aligned} I &= k.Fr \\ &= \frac{128}{183} \times \$1000 \times 0.045 \\ &= \$31.48 \end{aligned}$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\begin{aligned} P &= Q + I \\ &= \$981.09 + \$31.48 \\ &= \$1012.57 \end{aligned}$$

ក្រាភិច ខាងក្រោម គឺបង្ហាញ អំពីទំនាក់ទំនងរវាងតម្លៃទិញ P តម្លៃទីផ្សារ Q និង ការប្រាក់ សញ្ញាប័ណ្ណបាន គិត បន្ថែម I។



៦.៤. អត្រាទិន្នផល

ក្នុងវិស័យជំនួញ ឬវិនិយោគផ្សេងៗ អ្នកវិនិយោគ តែងតែចង់ ដឹងនូវចំណូល របស់ខ្លួនដោយប្រៀបធៀប ទៅនឹងតម្លៃមូលធន លើ ទីផ្សារ ក្នុងករណីបែបនេះ គេច្រើនតែ គណនា អត្រា ចំណូលជាក់លាក់ របស់ខ្លួន។ យើង លើកយកវិធីសាស្ត្រក្នុងការ គណនារក អត្រា ទិន្នផលពីរគឺ **វិធីសាស្ត្រមធ្យម** (Method of Average or Bond Saleman's Method) និង **វិធីសាស្ត្រ** Interpolation(Linear Interpolation Method)។

៦.៤.១. វិធីសាស្ត្រមធ្យម

អត្រាទិន្នផលប្រចាំគ្រា(ជួនកាល គេហៅថា Yield to Maturity) ត្រូវបានគណនាតាមរូបមន្តតម្លៃប្រហែល

$$\boxed{i \approx \frac{Average income per period}{Average amount invested} = \frac{(nFr + C - P)/_n}{(C+P)/_2}} \qquad (៦.១០)$$

ឧទាហរណ៍ ៦.៤.១. សញ្ញាប័ណ្ណ មួយ មាន តម្លៃចារឹក $2000 សន្យាបង់ ការប្រាក់ រៀងរាល់

ឆមាសមអត្រា $9\frac{1}{2}\%$ ហើយសងវិញតាមតម្លៃចារឹក (Redemable at par) នៅថ្ងៃទី២០ ខែកក្កដា ឆ្នាំ២០១៤។ នៅ ថ្ងៃទី ២០ ខែ កក្កដា ឆ្នាំ២០០០ សញ្ញាប័ណ្ណនេះ លក់ក្នុងតម្លៃប្រកាស $96\frac{1}{2}$ (បានន័យ ថាតម្លៃចារឹក $\$100$ លក់តម្លៃ $\$96\frac{1}{2}$)។

ចូរគណនាអត្រាទិន្នផលi_2 តាមវិធីសាស្ត្រមធ្យម?

ដំណោះស្រាយ

តម្លៃលក់នៃសញ្ញាប័ណ្ណនេះ គឺ $96\frac{1}{2}$ បានន័យថា ក្នុង តម្លៃចារឹក $\$100$ លក់ក្នុងតម្លៃ $\$96.5$ ឬនិយាយម្យ៉ាង ទៀត ថាតម្លៃ ចារឹក $\$1$ លក់ក្នុងតម្លៃ $\$0.965$ ដូចនេះយើងទាញបាន

$$P = \$2000 \times 0.965 = \$1930$$

ចំនួនគ្រានៃ ការបង់ប្រាក់ គឺ (ចាប់ពី ថ្ងៃ២០ ខែកក្កដា ឆ្នាំ២០០០ ដល់ ថ្ងៃទី២០ ខែកក្កដា ឆ្នាំ ២០១៤) មាន ២៨ ឆមាស (គ្រា)។

តាមរូបមន្តតម្លៃប្រហែល(៦.១០)

$$\begin{aligned} i &= \frac{(nFr + C - P)/_n}{(C+P)/_2} \\ &= \frac{(28 \times 2000 \times 0.0475 + 2000 - 1930)/_{28}}{(2000+1930)/_2} \\ &= \frac{97.50}{1965} \\ &= 0.0496 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{អត្រាទិន្នផលនៃសញ្ញាប័ណ្ណគឺ}\, i_2 = 9.92\%}$ ។

៦.៤.២. The Linear Interpolation Method

វិធីសាស្ត្រ Interpolation ជាវិធីមួយដែលមាន ភាពសុក្រឹត ជាង Bond Saleman's Method ហើយ វិធីនេះ តម្រូវឱ្យ កំណត់ តម្លៃ ទីផ្សារ (Market price) នៃសញ្ញាប័ណ្ណធៀបនឹងអត្រាការប្រាក់ពីរដែលផ្តល់ តម្លៃមួយតូចជាង និងមួយទៀត ធំជាង តម្លៃដែល កំណត់ដោយ(តម្លៃលក់)។

ខាងក្រោមនេះ យើងនឹងបកស្រាយអំពី Linear Interpolation Method ។

តម្លៃទិញនៃសញ្ញាប័ណ្ណ

$$P = Fra_{\overline{n}|i} + C(1+i)^{-n}$$
$$P - [Fra_{\overline{n}|i} + C(1+i)^{-n}] = 0$$

យើងកំណត់តាង $f(i)$ ដែល

$$f(i) = P - [Fra_{\overline{n}|i} + C(1+i)^{-n}] = 0$$

កំណត់

$$J_m^{(1)} \text{ ឬ } i_1 \quad f(i_1) < 0 \ (\text{ឬ } f(i_1) > 0)$$
$$J_m^{(2)} \text{ ឬ } i_2 \quad f(i_2) < 0 \ (\text{ឬ} f(i_2) > 0)$$

តារាង Interpolation

$$\begin{array}{r|l}
f(i) & J_m(J_m = m.i) \\
\hline
f(i_2) - f(i_1) \left\{ \begin{array}{l} -f(i_1) \left\{ \begin{array}{l} f(i_1) \\ 0 \end{array} \right. \\ f(i_2) \end{array} \right. & \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{c} J_m^{(1)} \\ J_m \end{array} \right\} J_m - J_m^{(1)} \\ J_m^{(2)} \end{array} \right\} J_m^{(2)} - J_m^{(1)}
\end{array}$$

តាមវិធានត្រីដ្ឋាន យើងបាន

$$\frac{J_m - J_m^{(1)}}{J_m^{(2)} - J_m^{(1)}} = \frac{-f(i_1)}{f(i_2) - f(i_1)}$$
$$J_m - J_m^{(1)} = \frac{-J_m^{(2)} - J_m^{(1)}}{f(i_2) - f(i_1)} f(i_1)$$
$$J_m = J_m^{(1)} - \frac{-J_m^{(2)} - J_m^{(1)}}{f(i_2) - f(i_1)} f(i_1)$$

ដូចនេះ យើងបាន Linear Interpolation Formula

$$\boxed{J_m = J_m^{(1)} - \frac{-J_m^{(2)} - J_m^{(1)}}{f(i_2) - f(i_1)} f(i_1)} \qquad (៦.១១)$$

សំគាល់៖

ក្នុងការកំណត់ $J_m^{(1)}$ និង $J_m^{(2)}$ (ឬ i_1 និង i_2) គឺ គេត្រូវកំណត់ យ៉ាងណា ដើម្បីឱ្យ គម្លាតរបស់វាស្មើ

1% ពោល គឺ $J_m^{(1)} - J_m^{(2)} = 1\%$។ ហើយ ដើម្បីងាយស្រួល ក្នុងការ កំណត់ $J_m^{(1)}$ និង $J_m^{(2)}$ យើងអាចប្រើ Bond Saleman's Method ជាពន្លឺ។

ឧទាហរណ៍ ៦.៤.២. សញ្ញាប័ណ្ណមួយមានតម្លៃចារឹក\$1000ដែលផ្តល់ការប្រាក់រៀងរាល់ឆមាសតាមអត្រាចារឹក 12% ហើយ សន្យាសងវិញនូវតម្លៃ ស្មើ នឹង តម្លៃចារឹក នៅ ថ្ងៃទី០១ ខែ មិថុនា ឆ្នាំ ២០១០។ នៅ ថ្ងៃទី០៣ ខែកុម្ភៈ ឆ្នាំ២០០០ សញ្ញាប័ណ្ណ នេះ ត្រូវបាន លក់ ក្នុងតម្លៃ ប្រកាស $94\frac{7}{8}$ ។

១. ចូរគណនាអត្រាទិន្នផលតាម Method of Average?

២. ចូរគណនាអត្រាទិន្នផលតាម Method of Interpolation?

ដំណោះស្រាយ

១. រកអត្រាទិន្នផល (Method of Average)

ដោយហេតុថា យើង គណនារក ចម្លើយប្រហែល ហេតុនេះ យើងអាច សន្មត់ថា សញ្ញាប័ណ្ណ ត្រូវបាន លក់នៅ ចំថ្ងៃ ដែល គេគិត ការប្រាក់ គឺ ថ្ងៃទី០១ ខែធ្នូ ឆ្នាំ១៩៩៩ ជំនួសឱ្យថ្ងៃទី០៣ ខែកុម្ភៈ ឆ្នាំ២០០០។ ចំនួនគ្រាដែល ត្រូវបង់ការប្រាក់ គឺមាន២១លើក។ តាមរូបមន្ត(៦.១០)

$$i = \frac{(nFr + C - P)/_n}{(C+P)/_2}$$

ដែល

$$C = F = \$1000; r = \frac{0.12}{2} = 0.06; n = 21$$

តម្លៃប្រកាសលក់គឺ $94\frac{7}{8}$ មានន័យថា តម្លៃចារឹក100\$លក់ក្នុងតម្លៃ $94\frac{7}{8}$
គេបាន តម្លៃចារឹក1000\$លក់ក្នុងតម្លៃ

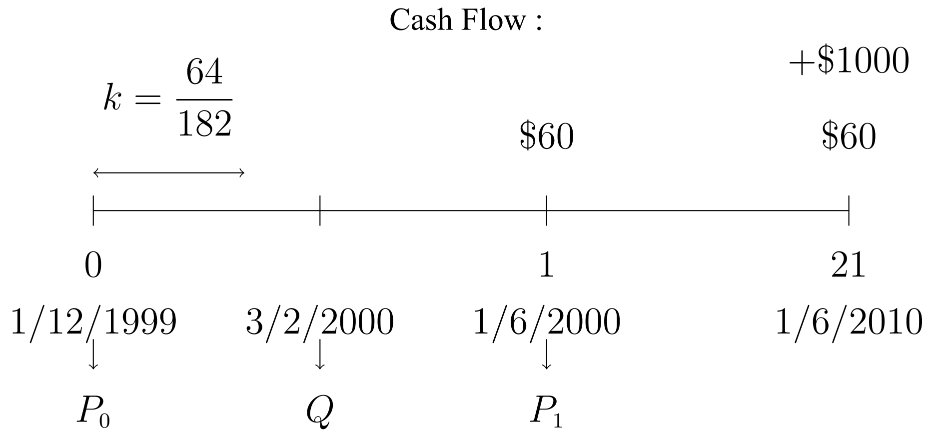
$$P = \$10 \times \$94\frac{7}{8} = \$948.75$$

$$i \approx \frac{(21 \times 1000 \times 0.06 + 100 - 948.75)/_{21}}{(1000 + 948.75)/_2} = \frac{62.44}{974.36} = 0.0641$$

ដូចនេះ $\boxed{i \approx 6.41\% \text{ ឬ } J_2 \approx 12.82\%}$ ។

២. គណនាអត្រាទិន្នផល (Method of Interpolation)

យើងជ្រើសរើសយកអត្រាទិន្នផល សាកពីរ គឺ $J_m^{(1)} = 12\%$ និង $J_m^{(2)} = 13\%$ រួចគណនា តម្លៃទីផ្សារនៃ សញ្ញាប័ណ្ណ នាថ្ងៃទី០៣ ខែកុម្ភៈ ឆ្នាំ២០០០ ដោយ ប្រើដ្យាក្រាមខាងក្រោម៖



បើ $J_2^{(1)} = 12\%$ (ឬ $i_1 = 0.06$)

ដោយ $i_1 = r$ និង $F = C$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow P' &= Fr\frac{1-(1+i_1)^{-n}}{i_1} + C(1+i_1)^{-n} \\
&= F[1-(1+r)^{-n}] + F(1+r)^{-n} \\
&= F - F(1+r)^{-n} + F(1+r)^{-n} \\
&= F = \$1000
\end{aligned}
$$

ហើយ

$$
\begin{aligned}
f(i_1) &= P - [Fra_{\overline{n}|i} + C(1+i)^{-n}] \\
&= P - P' \\
&= \$948.75 - 1000 = -51.25 < 0
\end{aligned}
$$

បើ $J_m^{(2)} = 13\%$ $(i_2 = 0.065)$ គេបាន

$$P_0 = 1000 + (60-65)a_{\overline{21}|0.065} = \$943.58$$

$$P_1 = 1000 + (60-65)a_{\overline{20}|0.065} = \$944.91$$

$$Q = \$943.58 + \frac{64}{182}(944.91 - 943.58) = \$944.05$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(i_2) &= P - Q \\ &= \$948.75 - \$944.05 \\ &= 4.70 > 0 \end{aligned}$$

តាមរូបមន្ត(៦.១១) យើងបាន

$$\begin{aligned} i &= i_1 - \frac{i_2 - i_1}{f(i_2) - f(i_2)} f(i_1) \\ &= 0.06 - \frac{0.065 - 0.06}{4.7 + 51.52}(-51.25) \\ &= 0.06458 \\ J_2 &= 2i = 2(0.06458) = 0.1292 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{អត្រាប្រចាំឆ្នាំ } J_2 = 12.92\%}$ ។

ឧទាហរណ៍ ៦.៤.៣. សញ្ញាប័ណ្ណមួយ មានតម្លៃចារឹក $1000 សងវិញតាមតម្លៃចារឹកក្នុងរយៈពេល ២០ឆ្នាំខាងមុខ និងសន្យាផ្តល់ ការប្រាក់ រៀងរាល់ ឆមាសតាមអត្រាចារឹក 11%។ សញ្ញាប័ណ្ណនេះអាច ត្រូវបានឱ្យ សងមុនឥណ ប្រតិទានក្នុងតម្លៃ $1050 នៅចុង ឆ្នាំទី 15 ។ បើសិនជាតម្លៃប្រកាសលក់នៃ សញ្ញាប័ណ្ណនេះស្មើ 96 ចូរគណនាអត្រា ទិន្នផល J_2 ដោយប្រើ Method Interpolation ក្នុងករណី៖

១. សញ្ញាប័ណ្ណត្រូវបានសងមុនឥណប្រតិទាន (Callable)?

២. សញ្ញាប័ណ្ណត្រូវបានសងនៅឥណប្រតិទាន?

ដំណោះស្រាយ

តម្លៃប្រកាសលក់គឺ 96 មានន័យថា តម្លៃចារឹក 100$ លក់ក្នុងតម្លៃ 96$
គេបាន តម្លៃចារឹក 1$ លក់ក្នុងតម្លៃ 0.96$ នោះ

តម្លៃលក់នៃសញ្ញាប័ណ្ណគឺ

$$P = \$1000 \times 0.96 = \$960$$

១. បើសញ្ញាប័ណ្ណត្រូវបានសងមុន ឥណប្រតិទាននៅចុងឆ្នាំទី១៥ $(n = 15 \times 2 = 30)$ នោះគេបាន ៖

$$960 = 1050 + \left(1000 \times \frac{0.11}{2} + 1050 \times i\right) a_{\overline{30}|i}$$

ឬ

$$f(i) = 960 - 1050 + \left(1000 \times \frac{0.11}{2} + 1050i\right) a_{\overline{30}|i} = 0$$

ក្រោយពីធ្វើការសាកល្បង ហើយយើងទទួលបាន៖

បើ $J_2^{(1)} = 11\% \quad (i_1 = 0.055)$

$$\begin{aligned} \implies \quad Q_1 &= 1050 + (55 - 1050 \times 0.055)\, a_{\overline{30}|0.055} \\ &= \$1.01003 \\ \implies \quad f(i_1) &= P - Q_1 \\ &= 960 - 1010.03 \\ &= -50.03 < 0 \end{aligned}$$

បើ $J_2^{(2)} = 12\% \quad (i_2 = 0.06)$

$$\begin{aligned} \implies \quad Q_2 &= 1050 + (55 - 1050 \times 0.06)\, a_{\overline{30}|0.06} \\ &= \$939.88 \\ \implies \quad f(i_2) &= P - Q_2 \\ &= 960 - 939.88 \\ &= 20.12 > 0 \end{aligned}$$

តាមរូបមន្ត(៦.១១)

$$\begin{aligned} J_2 &= J_2^{(1)} - \frac{J_2^{(2)} - J_2^{(1)}}{f(i_2) - f(i_1)} f(i_1) \\ &= 0.11 - \frac{0.12 - 0.11}{20.12 + 50.03}(-50.03) \\ &= 0.1171 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{អត្រាទិន្នផល } J_2 = 11.71\%}$ ។

២. បើសញ្ញាប័ណ្ណត្រូវបានសងនៅ ឥណប្រតិទាននោះយើងបាន៖

$$n = 2\times 20 = 40, \qquad J_2 = 2i$$

ដែលតម្លៃលក់៖

$$960 = 1000 + (55 - 1000i)\, a_{\overline{40}|i}$$

$$\text{ឬ} \qquad f(i) = 960 - 1000 + (1000i)\, a_{\overline{40}|i} = 0$$

ម៉្យាងទៀត

បើ $J_2^{(1)} = 11\%$ ($i_1 = 0.055$ អត្រាទិន្នផល = អត្រាចារឹក)

នោះតម្លៃទិញស្មើតម្លៃចារឹក $Q_1\$1000$ ។ ដូចនេះ

$$\begin{aligned} f(i_1) &= P - Q_1 \\ &= 960 - 1000 \\ &= -40 < 0 \end{aligned}$$

បើ $J_2^{(2)} = 12\%\,(i_2 = 0.06)$គេបាន ៖

$$\begin{aligned} Q_2 &= 1000 + (55 - 1000\times 0.06)\, a_{\overline{40}|0.06} \\ &= \$924.77 \\ f(i_1) &= P - Q_2 \\ &= 960 - 924.77 \\ &= 35.23 > 0 \end{aligned}$$

តាមរូបមន្ត (៦.១១)

$$\begin{aligned} J_2 &= J_2^{(1)} - \frac{J_2^{(2)} - J_1^{(1)}}{f(i_2) - f(i_1)} f(i_1) \\ &= 0.11 - \frac{0.12 - 0.11}{35.23 + 40}(-40) \\ &= 0.1153 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{អត្រាទិន្នផលរបស់អ្នកវិនិយោគ } J_2 = 11.53\%}$ ។

៦.៥. ប្រភេទនៃសញ្ញាប័ណ្ណ និងការសងរំលោះ

៦.៥.១. សញ្ញាប័ណ្ណគ្មានកាលកំណត់

និយមន័យ ៦.៥.១. សញ្ញាប័ណ្ណគ្មានកាលកំណត់ $(CallableBonds)$ គឺ ជា សញ្ញាប័ណ្ណ ដែល អនុញ្ញាតអោយ អ្នកបោះផ្សាយ $Issuer$ សងប្រាក់កំចី Readeem the bond នៅ កាលបរិច្ឆេទមួយ មុនឥណ ប្រតិទាន។

គេកំណត់ កាលបរិច្ឆេទណាត់$(Callable\ date)$ ដោយ ធៀប ទៅនឹង ការគណនា តម្លៃ ទិញ (Calculation of the Purchase Price) ពីព្រោះរយៈពេលសងនៃ សញ្ញា ប័ណ្ណមិនជាក់លាក់។ អ្នកវិនិយោគនឹងទិញ សញ្ញាប័ណ្ណ ក្នុងតម្លៃ ដែលធានា ដល់ខ្លួននូវ ទិន្នផល $(Yield)$ ដែល គាត់ ចង់បានដោយ យោងតាមកាលបរិច្ឆេទ ណាត់ $Calldate$ របស់វា។ ការកំណត់តម្លៃ សញ្ញាប័ណ្ណ អ្នក វិនិយោគ ត្រូវ សន្មតថា អ្នកបោះផ្សាយ សញ្ញាប័ណ្ណ The Issure of the bonds នឹង អនុវត្តន៍ នូវការណាត់របស់ខ្លួន ដែល ផ្ទុយពីប្រយោជន៍របស់អ្នក វិនិយោគ។
ជាទូទៅ យើងអាចសង្ខេបន័យដូច ខាងក្រោម៖

- ចំពោះសញ្ញាប័ណ្ណដែលសង តាមតម្លៃចារឹក $(CallableatparC = F)$:
  - បើសិនជាអត្រាទិន្នផលខ្ពស់ជាងអត្រាចារឹក នោះអ្នកវិនិយោគ ត្រូវគណនាតម្លៃទិញ ដោយប្រើកាលបរិច្ឆេទ ណាត់ក្រោយគេបង្អស់ (The latest possible call date) (យើង បង្ហាញនៅក្នុងឧទាហរណ៍ ខាងក្រោម)។
  - បើ អត្រាទិន្នផល ទាបជាងអត្រា ចារឹក អ្នកវិនិយោគ ត្រូវគណនា តម្លៃទិញដោយប្រើ កាលបរិច្ឆេទណាត់ឆាប់បំផុត (មើលឧទាហរណ៍(៦.៥.២))។
- ចំពោះ សញ្ញាប័ណ្ណ ដែលការសង មុនឥណប្រតិទាន ទោះជាតម្លៃសង មិនស្មើតម្លៃចារឹក $(C \neq F)$ ក៏ដោយអ្នកវិនិយោគ អាចកំណត់តម្លៃទិញទាំងអស់ដែលសមស្របតាមអត្រា ទិន្នផលរបស់ខ្លួន ហើយបន្ទាប់មកត្រូវទិញសញ្ញាប័ណ្ណដែលមានតម្លៃទាបជាងគេ (មើល ឧទាហរណ៍(៦.៥.៣))។

ឧទាហរណ៍ ៦.៥.១. ក្រុមហ៊ុនសាជីវកម្ម មួយបានបោះផ្សាយសញ្ញាប័ណ្ណ ដែលមាន អាយុកាល ២០ឆ្នាំ តម្លៃចារឹក \$1000 និងអត្រាចារឹក $J_2 = 12\%$ ។ សញ្ញាប័ណ្ណនេះអាចណាត់សងតាមតម្លៃ ចារឹក បន្ទាប់ឆ្នាំទី១៥។

ចូរគណនាតម្លៃទិញ ធៀបអត្រាទិន្នផល 13% ធ្វើមូលធនកម្មប្រចាំឆមាស?

ដំណោះស្រាយ

យើងចង់គណនាតម្លៃទិញនៃ សញ្ញាប័ណ្ណដែលទាក់ទងទៅ នឹងកាលបរិច្ឆេទណាត់សងពីរគឺ ៖
បើសញ្ញាប័ណ្ណត្រូវណាត់សង នៅចុងឆ្នាំទី១៥

$$n = 15 \times 2 = 30;\ i = \frac{0.13}{2} = 0.065;\ Fr = 1000 \times 0.060 = 60$$

$$Ci = 1000 \times 0.065 = 65$$

គេបាន ៖

$$\begin{aligned} P_n &= 1000 + (60 - 65)\, a_{\overline{30}|0.065} \\ &= 1000 - 65.29 \\ &= \$934.71 \end{aligned}$$

បើសញ្ញាប័ណ្ណត្រូវសងនៅឆ្នាំទី២០ គេបាន៖

$$\begin{aligned} P_m &= 1000 + (60 - 65)\, a_{\overline{40}|0.065} \\ &= 1000 - 70.73 \\ &= \$929.27 \end{aligned}$$

ប្រៀបធៀបតម្លៃទិញទាំងពីរខាងលើ យើង សង្កេតឃើញថា តម្លៃទិញ ដែលធានាផ្តល់ ទិន្នផល $J_2 = 13\%$ ហើយ ទាបជាង គេ គឺ$929.27 ។ ដូច្នេះ អ្នកវិនិយោគទិញសញ្ញាប័ណ្ណក្នុង តម្លៃនេះ យ៉ាងហោចណាស់ ក៏ ទទួលបានផល កំរៃ $J_2 = 13\%$ ដោយ មិន បាច់បារម្ភអ្វីទាំងអស់។

ឧទាហរណ៍ ៦.៥.២. ចូរធ្វើឧទាហរណ៍(៦.៥.១)ឡើងវិញបើសិនជាអត្រាទិន្នផល$J_2 = 11\%$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងគណនាឡើងវិញករណី $i = \dfrac{0.11}{2} = 0.055$

បើសញ្ញាប័ណ្ណត្រូវបានណាត់សង នៅចុងឆ្នាំទី១៥ $(n = 30)$

$$\begin{aligned} P_n &= 1000 + (60 - 55)\, a_{\overline{30}|0.055} \\ &= 1000 + 72.67 \\ &= \$1072.67 \end{aligned}$$

បើសញ្ញាប័ណ្ណត្រូវបានសង់នៅ ឥណប្រតិទាន $(MuturityDate)$

$$\begin{aligned} P_m &= 1000 + (60-55)\, a_{\overline{40}|0.055} \\ &= 1000 + 80.23 \\ &= \$1080.23 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តម្លៃទិញដែលធានាផ្តល់ទិន្នផល}J_2 = 11\%\text{ គឺ}\$1072.667}$ ។

ឧទាហរណ៍ ៦.៥.៣. សញ្ញាប័ណ្ណមួយដែល មានតម្លៃចារឹក $5000 មាន អត្រាចារឹក $9\frac{1}{2}\%$ និង សង វិញតាម តម្លៃចារឹកក្នុង រយៈពេល២០ឆ្នាំទៀត។ សញ្ញាប័ណ្ណនេះ អាចត្រូវបានណាត់សង បន្ទាប់ពីឆ្នាំទី១០ ទៅក្នុងតម្លៃ $5200 ។

ចូរគណនាតម្លៃសញ្ញាប័ណ្ណធៀប និងអត្រាទិន្នផល $i_2 = 8\frac{1}{2}\%$។

ដំណោះស្រាយ

បើសញ្ញាប័ណ្ណត្រូវបានណាត់សង បន្ទាប់ពីឆ្នាំទី១០ $(n = 2\times 10 = 20)$ តាមរូបមន្ត(៦.២) យើងបាន ៖

$$\begin{aligned} P_n &= C + (Fr - Ci)\, a_{\overline{n}|i} \\ &= 5200 + \left(5000\times\frac{0.095}{2} - 5200\times\frac{0.085}{2}\right) a_{\overline{20}|\frac{0.085}{2}} \\ &= 5200 + (237.50 - 221)\, a_{\overline{20}|0.0425} \\ &= \$5419.36 \end{aligned}$$

បើសញ្ញាប័ណ្ណត្រូវបានណាត់សងបន្ទាប់ពីឆ្នាំទី១៥យើងបាន ៖

$$\begin{aligned} P_c &= C + (Fr - Ci)\, a_{\overline{n}|i} \\ &= 5200 + \left(5000\times\frac{0.095}{2} - 5200\times\frac{0.085}{2}\right) a_{\overline{30}|\frac{0.085}{2}} \\ &= 5200 + (237.50 - 221)\, a_{\overline{30}|0.0425} \\ &= \$5476.85 \end{aligned}$$

បើសញ្ញាប័ណ្ណត្រូវបានតាមឥណ ប្រតិទានយើងបាន ៖

$$\begin{aligned}
P_m &= C + (Fr - Ci)\, a_{\overline{n}|i} \\
&= 5000 + \left(5000 \times \frac{0.095}{2} - 5000 \times \frac{0.085}{2}\right) a_{\overline{40}|0.0425} \\
&= 5200 + (237.50 - 212.50)\, a_{\overline{40}|0.0425} \\
&= \$5476.93
\end{aligned}$$

ដូចនេះ តម្លៃសញ្ញាប័ណ្ណដែលធានផ្តល់ ចំណូលយ៉ាងតិច $J_2 = 8\frac{1}{2}\%$ រហូតដល់ឥណប្រតិទានគឺ $\boxed{\$5419.36}$ ។

៦.៥.២. សញ្ញាប័ណ្ណបុព្វលាភ និងអប្បហារ

និយមន័យ ៦.៥.២. .
បើសញ្ញាប័ណ្ណមួយត្រូវបានទិញ ក្នុងតម្លៃខ្ពស់ជាងតម្លៃត្រូវសងនោះ គេហៅ សញ្ញាប័ណ្ណថា **សញ្ញាប័ណ្ណបុព្វលាភ** ($PremiumBond$) ដែល

$$Premium = P - C = (Fr - Ci)\, a_{\overline{n}|i}$$

បើសញ្ញាប័ណ្ណមួយត្រូវបានទិញក្នុងតម្លៃទាបជាងតម្លៃត្រូវសងនោះ គេហៅសញ្ញាប័ណ្ណថា **សញ្ញាប័ណ្ណអប្បហារ** ($DiscountBond$) ហើយ ៖

$$Discount = C - P = (Ci - Fr)\, a_{\overline{n}|i}$$

ចំពោះ តម្លៃគណនេយ្យ ($BookValue$) នៃសញ្ញាប័ណ្ណ ក្នុងពេលកំណត់ មួយ គឺជាចំនួនទឹកប្រាក់កំណត់ ដែលត្រូវ បាន ដាក់វិនិយោគ ក្នុងសញ្ញាប័ណ្ណនា ពេលនោះ។ តម្លៃគណនេយ្យនៃសញ្ញាប័ណ្ណនាកាល បរិច្ឆេទទិញ ដែលកើតឡើងនៅព្រមគ្នា នឹងកាលបរិច្ឆេទនៃការបង់ប្រាក់គឺជាតម្លៃទិញនៃសញ្ញាប័ណ្ណ (Book Value = Purchase Price)។

តម្លៃគណនេយ្យ នាកាលបរិច្ឆេទ ត្រូវសង គឺ ជា តម្លៃត្រូវសងនៃសញ្ញាប័ណ្ណ
(Book Value = Remeption Value)។

បើសញ្ញាប័ណ្ណត្រូវបានទិញក្នុងតម្លៃ$Premium(P > C)$ តម្លៃគណនេយ្យនៃសញ្ញាប័ណ្ណនឹងត្រូវសរសេរចុះ $Decreased$ នៅ តាមដំណាក់កាល និមួយៗ នៃកាលបរិច្ឆេទ បង់ការប្រាក់ ហេតុនេះទើបនៅពេលសង បំណុល តម្លៃគណនេយ្យ នឹងស្មើនឹង តម្លៃត្រូវសង។ សកម្មទាំងនេះ គេហៅថា **រំលោះ ឬ ការសរសេរចុះ** (Amortisation of the Premium or Writing down) ។

ក្នុងករណី សញ្ញាប័ណ្ណ ត្រូវបានទិញក្នុង តម្លៃ $Discount(C > P)$ តម្លៃ គណនេយ្យនៃសញ្ញាប័ណ្ណ នឹងត្រូវ សរសេរឡើង បញ្ច្រាសវិញ $Increase$ តាមដំណាក់កាលនៃកាលបរិច្ឆេទបង់ការប្រាក់និមួយៗ ហេតុនេះទើបនៅ កាលបរិច្ឆេទត្រូវសងតម្លៃគណនេយ្យនិងស្មើតម្លៃត្រូវសង។ សកម្មភាពនេះ ហៅថា **សមាច័យ នៃអប្បហារ** $Discount$ ឬការសរសេរកំណើន Accumulation of the discount or writing up ។

ការបង់ប្រាក់ក្នុងកំឡុងពេល នៃអាយុកាលសញ្ញាប័ណ្ណអាចអនុវត្ត ដូចការបង់ប្រាក់រំលោះ ដែលធ្វើឡើងដោយអ្នកខ្ចី$Bondissuer$ដើម្បីសងកំចីស្មើនឹងតម្លៃទិញនៃសញ្ញាប័ណ្ណទៅអោយ អ្នកវិនិយោគ $Bondholder$ ។ តម្លៃទិញនៃសញ្ញាប័ណ្ណអាចគណនាដោយគិតដូចជា តម្លៃបច្ចុប្បន្ន នៃការបង់ប្រាក់ ទាំងអស់ នោះ(ការប្រាក់ និង តម្លៃត្រូវសង) ធៀបនឹង អត្រាទិន្នផលជាក់លាក់មួយ។ អាស្រ័យហេតុនេះ ការសង់រំលោះ របស់ សញ្ញាប័ណ្ណ អាច អនុវត្តដូច ការសងរំលោះ កំចីហើយតារាង រំលោះនៃសញ្ញាប័ណ្ណអាច ត្រូវសង ដូចជា តារាងរំលោះ កំចីទូទៅ ក្នុង ជំពូក៥ ដែរ (មើលឧទាហរណ៍ខាងក្រោម)។

ឧទាហរណ៍ ៦.៥.៤. សញ្ញាប័ណ្ណមួយមាន តម្លៃចារឹក $\$1000$ អត្រាចារឹក $J_2 = 9\%$ និងសងវិញ តាមតម្លៃចារឹក នាថ្ងៃទី១ ខែធ្នូ ឆ្នាំ២០០២។ សញ្ញាប័ណ្ណ ត្រូវបានទិញនាថ្ងៃទី១ ខែមិថុនា ឆ្នាំ២០០០។

ក. ចូរគណនាតម្លៃទិញ និងសង់តារាងរំលោះសញ្ញាប័ណ្ណ$BondSchedule$ បើអត្រាទិន្នផល J_2 ?

ខ. ចូរឆ្លើយសំណួរ"ក" ម្តងទៀតបើអត្រាទិន្នផល $J_2 = 10\%$

គ. ចូរសង់តារាងរំលោះ$(AmortisationSchedule)$ សម្រាប់កំចីនៃសំនួរ "ក" និង "ខ"?

ដំណោះស្រាយ

ក. តម្លៃទិញនៃសញ្ញាប័ណ្ណនាថ្ងៃទី១ ខែមិថុនា ឆ្នាំ២០០០

តាមរូបមន្ត (៦.២) យើងបាន

$$\begin{aligned}
P &= C + (Fr - Ci)\, a_{\overline{n}|i} \\
&= 1000 + \left(1000 \times \frac{0.09}{2} - 1000 \times \frac{0.08}{2}\right) a_{\overline{5}|0.04} \\
&= \$1022.26
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{សញ្ញាប័ណ្ណត្រូវបានទិញតាមតម្លៃ Premium ចំនួន\$22.26}}$ ។

តារាងខាងក្រោមគឺជាតារាងរំលោះ សញ្ញាប័ណ្ណ $(BondAmortisationSchedule)$

កាលបរិច្ឆេទ	ការប្រាក់សញ្ញាប័ណ្ណ	Interest on Book Value at Yield rate	Principle Adjustment	Book Value
June 1, 2000	0	0	0	1022.26
Dec 1, 2000	45.00	40.89	4.11	1018.15
June 1, 2001	45.00	40.73	4.27	1013.88
Dec 1, 2001	45.00	40.56	4.44	1009.44
June 1, 2002	45.00	40.38	4.62	1004.82
Dec 1, 2002	45.00	40.19	4.81	1000.01
Totals:	225.00	202.76	22.25	

ខ. បើចំណូលជាក់លាក់របស់អ្នកវិនិយោគ $J_2 = 10\% \quad (i = 0.05)$

នោះគេបាន៖

$$\begin{aligned} P &= C + (Fr - Ci)\, a_{\overline{n}|i} \\ &= 1000 + \left(1000 \times \frac{0.09}{2} - 1000 \times 0.05\right) a_{\overline{5}|0.05} \\ &= \$978.35 \end{aligned}$$

ហេតុនេះ: $\boxed{\text{សញ្ញាប័ណ្ណត្រូវបានទិញក្នុងតម្លៃដែលមានអប្បហារចំនួន 21.65\$}}$ ។

ខាងក្រោមនេះ គឺជាតារាងសមាច័យនៃសញ្ញាប័ណ្ណ (Accumulation Schedule):

កាលបរិច្ឆេទ	ការប្រាក់សញ្ញាប័ណ្ណ	Interest on Book Value at Yield rate	Principle Adjustment	Book Value
June 1, 2000	0	0	0	978.35
Dec 1, 2000	45.00	48.92	−3.92	982.27
June 1, 2001	45.00	49.11	−4.11	986.38
Dec 1, 2001	45.00	49.32	−4.32	990.70
June 1, 2002	45.00	49.54	−4.54	995.24
Dec 1, 2002	45.00	49.76	−4.76	1000.00
Totals:	225.00	246.65	−21.65	

គ. តារាងរំលោះនៃកំចីសំនួរ "ក"

កាលបរិច្ឆេទ	ការប្រាក់សញ្ញាប័ណ្ណ	Interest on Book Value at Yield rate	Principle Adjustment	Book Value
June 1, 2000	0	0	0	1022.26
Dec 1, 2000	45.00	40.89	4.11	1018.15
June 1, 2001	45.00	40.73	4.27	1013.88
Dec 1, 2001	45.00	40.56	4.44	1009.44
June 1, 2002	45.00	40.38	4.62	1004.82
Dec 1, 2002	1045.00	40.19	1004.81	0.01
Totals:	1225.00	202.76	1022.25	

សម្គាល់ លំអៀង ដោយសារយើងកាត់ខ្ទង់។

តារាងរំលោះនៃកំចីសំនួរ "ខ"

កាលបរិច្ឆេទ	ការប្រាក់សញ្ញាប័ណ្ណ	Interest on Book Value at Yield rate	Principle Adjustment	Book Value
June 1, 2000	0	0	0	978.35
Dec 1, 2000	45.00	48.92	−3.92	982.27
June 1, 2001	45.00	49.11	−4.11	986.38
Dec 1, 2001	45.00	49.32	−4.32	990.70
June 1, 2002	45.00	49.54	−4.54	995.24
Dec 1, 2002	1045.00	49.76	995.24	0.00
Totals:	1225.00	246.65	978.35	

៦.៥.៣. សញ្ញាប័ណ្ណស៊េរី

និយមន័យ ៦.៥.៣. ដើម្បីខ្ចីប្រាក់ពី សាធារណៈជន ក្រុមមួយ ចំនួនបានបោះផ្សាយ សញ្ញាប័ណ្ណ ជាស៊េរី ដែល មាន កាលបរិច្ឆេទ ត្រូវសងផ្សេងៗគ្នា។ សញ្ញាប័ណ្ណប្រភេទនេះ គេហៅថា **សញ្ញាប័ណ្ណស៊េរី** (Serial Bonds)។

Serial Bonds មួយចំនួនអាចត្រូវបានទិញ យ៉ាងងាយក្រោម កិច្ចសន្យាសញ្ញាប័ណ្ណផ្សេងៗគ្នា។ ការកំណត់តម្លៃនៃសញ្ញាប័ណ្ណណាមួយ ត្រូវបានគណនាដូច សញ្ញាប័ណ្ណធម្មតាដែរ ហើយ **តម្លៃសញ្ញាប័ណ្ណទាំងអស់** គឺ ជាផលបូកនៃតម្លៃសញ្ញាប័ណ្ណនីមួយៗ។

ឧទាហរណ៍ ៦.៥.៥. នៅថ្ងៃទី១ ខែកញ្ញា ឆ្នាំ២០០០ នាយកក្រុមហ៊ុនមួយ បានអនុញ្ញាត បោះផ្សាយ Serial Bonds ដែលមានទឹកប្រាក់សរុប $30 000 000។ តាម កិច្ចសន្យាការប្រាក់ នឹង ត្រូវសងនៅរៀងរាល់ឆ្នាំ នា ថ្ងៃទី១ ខែកញ្ញា តាមអត្រា 9% ។ ក្នុងកិច្ចសន្យានេះចែងថា ៖

១. ប្រាក់ដើមចំនួន $5 000 000 នៃសញ្ញាប័ណ្ណបោះផ្សាយនឹងត្រូវសងនៅថ្ងៃទី១ ខែកញ្ញា ឆ្នាំ ២០០៥។

២. កំចី 10 000 000 នៃការបោះផ្សាយនឹងត្រូវសងនៅថ្ងៃទី១ ខែកញ្ញា ឆ្នាំ២០១០។

៣. កំចីចំនួន $15 000 000 នៃសញ្ញាប័ណ្ណបោះផ្សាយនៅថ្ងៃទី១ ខែកញ្ញា ឆ្នាំ២០១៥។

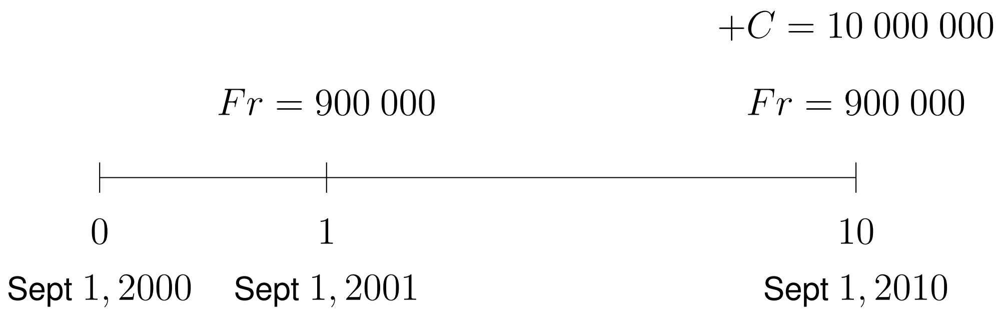
ចូរគណនាតម្លៃទិញនៃសញ្ញាប័ណ្ណទាំងអស់នាថ្ងៃទី១ ខែកញ្ញា ឆ្នាំ២០០០ បើអ្នកទិញចង់ បានអត្រាទិន្នផល $J_1 = 8\%$?

ដំណោះស្រាយ

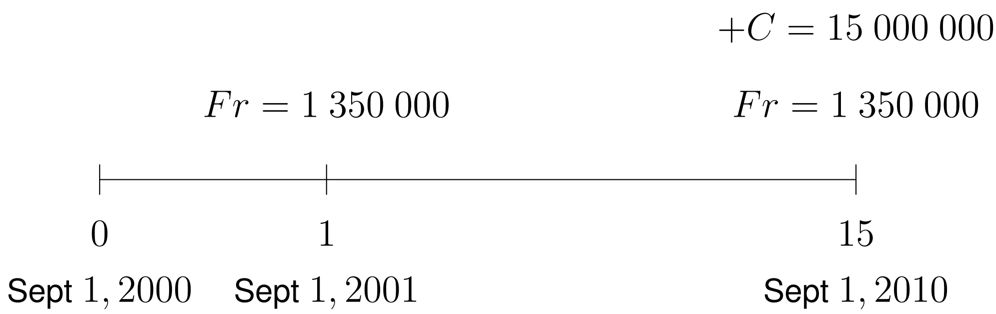
យើងពិនិត្យឃើញថាការបោះផ្សាយសញ្ញាប័ណ្ណនេះ គឺផ្សំឡើងពីការបោះផ្សាយ ដូចបង្ហាញតាមរូបខាងក្រោម

ការបោះផ្សាយទី១៖

ការបោះផ្សាយទី២ ៖



ការបោះផ្សាយទី៣ ៖



តម្លៃនៃសញ្ញាប័ណ្ណទាំងអស់ នាថ្ងៃទី១ ខែកញ្ញា ឆ្នាំ២០០០គឺជាផលបូកនៃតម្លៃទិញ នៃការបោះផ្សាយទាំងបី $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}$ តាមរូបមន្ត(៦.២)

$$\begin{aligned}
P^{(1)} &= C_1 + (Fr_1 - C_1 i)\, a_{\overline{n1}|i} \\
&= 5\,000\,000 + (5\,000\,000 \times 0.09 - 5\,000\,000 \times 0.08)\, a_{\overline{5}|0.08} \\
&= \$5\,199\,635.50 \\
P^{(2)} &= C_2 + (Fr_2 - C_2 i)\, a_{\overline{n2}|i} \\
&= 10\,000\,000 + (10\,000\,000 \times 0.09 - 10\,000\,000 \times 0.08) \\
&= \$10\,671\,008.14 \\
P^{(3)} &= C_3 + (Fr_3 - C_3 i)\, a_{\overline{n3}|i} \\
&= 15\,000\,000 + (15\,000\,000 \times 0.09 - 15\,000\,000 \times 0.08)\, a_{\overline{15}|0.08} \\
&= \$16\,283\,921.70 \\
\text{ដោយ} P &= P^{(1)} + P^{(2)} + P^{(3)} \\
&= \$5\,199\,635.50 + \$10\,671\,008.14 + \$16\,283\,921.70 \\
&= \$32\,154\,565.34
\end{aligned}$$

ចំពោះរូបមន្ត (៦.៣) នៃមេរៀននេះ យើងទាញវិបាកសម្រាប់ការបោះផ្សាយ ជាស៊េរីមួយដែលត្រូវសង វិញតាម តម្លៃចារឹក ដូចតទៅ ៖

$$\boxed{P = \sum_k F_k(1+i)^{t_k} + \frac{r}{i}\left[\sum_k F_k - \sum_k F_k(1+i)^{-t_k}\right]} \qquad (៦.១២)$$

ដែល

- $P =$ ជាតម្លៃទិញនៃការបោះផ្សាយទាំងអស់
- $F_k(1+i)^{-t_k} =$ តម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃការសងទី k
- $F_k =$ តម្លៃចារឹកនៃការបោះផ្សាយទី k

ឧទាហរណ៍ ៦.៥.៦. ៖ ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ឧទាហរណ៍(៦.៥.៥) ឡើងវិញ ដោយប្រើរូបមន្ត(៦.១២) ?

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន

$$i = 0.08; r = 0.09; F_1 = 5000000; t_1 = 5$$
$$F_2 = 10000000; t_2 = 10; F_3 = 15000000,\ t_3 = 15$$

នោះគេទាញបាន ៖

$$\begin{aligned}P =&5000000(1+0.08)^{-5} + 10000000(1+0.08)^{-10} + 15000000(1+0.08)^{-15}\\ &+\frac{0.09}{0.08}[5000000 + 10000000 + 15000000 - 5000000(1+0.08)^{-5}\\ &- 10000000(1+0.08)^{-10} - 15000000(1+0.08)^{-15}]\\ =&12763476 + \frac{9}{8}(30000000 - 12763476)\\ =&\$32154565\end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{តម្លៃទិញនៃការបោះផ្សាយទាំងអស់គឺ } P = \$32\,154\,565}$ ។

៦.៥.៤. សញ្ញាប័ណ្ណចំរៀក

វិនិយោគ មានមូលហេតុ ជាច្រើនក្នុង ការសម្រេចចិត្ត ជ្រើសរើស គម្រោងផ្សេងៗ ។ គេអាចពិនិត្យ មើលលំហូរសាច់ប្រាក់ដែលកំណត់ ពេលវេលា ជាក់លាក់សម្រាប់ខ្លួន។វិនិយោគខ្លះយកចិត្ត ទុកដាក់ លើការប្រាក់នៃ សញ្ញាប័ណ្ណ ជាលំហូរសាច់ប្រាក់ដែលខ្លួនត្រូវការ តួយ៉ាងក្រុមហ៊ុនសាជីវកម្ម ដែលទទួល ខុសត្រូវក្នុងការបង់បៀរ៍ ចូលនិវត្តន៍របស់ កម្មករ។ សម្រាប់ អ្នកវិនិយោគមួយចំនួនចាត់ទុកតម្លៃត្រូវសងនៃសញ្ញាប័ណ្ណ (Redemption value) នៃសញ្ញាប័ណ្ណហើយអាចចុះកិច្ចសន្យាទិញសញ្ញាប័ណ្ណ “Strip” ដោយញែកយក Coupon ពីសញ្ញាប័ណ្ណ និងលក់ទ្រព្យដែលនៅសល់ (Redemption value)។

.

និយមន័យ ៦.៥.៤. សញ្ញាប័ណ្ណដែលមានតែតម្លៃត្រូវសង(Redemption value only bond) ហៅថា **សញ្ញាប័ណ្ណចំរៀក** (Strip bond) ។ អ្នកទិញដំបូងបំផុតក៏អាចលក់ Coupon ផ្សេងពីតម្លៃត្រូវសងដែរដូចដែលអនុវត្ត ចំពោះតម្លៃត្រូវសងដែរ។

ឧទាហរណ៍ ៦.៥.៧. សញ្ញាប័ណ្ណសាជីវកម្មមួយមានតម្លៃចារឹក $1000 អត្រាចារឹក $J_2 = 9\%$ នឹងត្រូវសងវិញតាមតម្លៃចារឹកក្នុងរយៈពេល 20 ឆ្នាំទៀត។ អ្នកវិនិយោគ ″A″ ទិញសញ្ញាប័ណ្ណនេះដើម្បីទទួលចំណូលតាមអត្រា ។ អ្នកវិនិយោគ ″A″បានច្រៀកយក Coupon ពី សញ្ញាប័ណ្ណ និង

លក់ចំរៀក ដែលនៅសល់ទៅអោយវិនិយោគិន "B" ដែលជាអ្នកប្រាថ្នាចង់បានចំណូល $J_2 = 9\%$ ។

ចូរគណនា៖

១. តម្លៃដែលអ្នកវិនិយោគB បង់លើ $Stripbond$?

២. អត្រាទិន្នផលជាក់លាក់ដែលទទួលបាន ដោយអ្នកវិនិយោគ A ?

ដំណោះស្រាយ

១. វិនិយោគ B នឹងបង់ប្រាក់លើ $Stribbond$ ក្នុង តម្លៃបច្ចុប្បន្ន នៃ $\$1000$ ដែល ត្រូវបង់ក្នុង រយៈពេល 20 ឆ្នាំទៀត តាមអត្រា $J_2 = 9\%$ ឬ $i = 0.0075; n = 20 \times 12 = 240$ ពោលគឺ

$$\begin{aligned} P_B &= 1000(1 + 0.0075)^{-240} \\ &= \$166.41 \end{aligned}$$

២. ដំបូងយើងគណនាតម្លៃទិញរបស់វិនិយោគA ៖
ដោយ $F = C = \$1000; r = 0.0425; i = 0.0425; n = 40$
នោះគេទាញបាន

$$\begin{aligned} P_A &= \$1000 + (1000 \times 0.045 - 1000 \times 0.0425)\, a_{\overline{40}|0.045} \\ &= \$1047.69 \end{aligned}$$

សម្រាប់ ការដាក់ វិនិយោគ $\$1047.69$ គាត់ ទទួលបាន ចំណូល មកវិញ គឺ ការប្រាក់ $\$45$ ចំនួន 40 ដងក្នុង រយៈពេល 20 ឆ្នាំ និង 166.41 ទទួលបានភ្លាមៗពីអ្នកវិនិយោគ B ។ យើងចង់គណនា i ដែលជាអត្រាប្រចាំឆមាសដើម្បីអោយ

$$1047.69 = 166.44 + 45a_{\overline{40}|} a_{\overline{40i}|} = 19.5840$$

យើងតំរៀបតារាង $Interpolation$ ដូចខាងក្រោម

$$
\begin{array}{c|c}
a_{\overline{40}|i} & J_2 \\
\hline
1.3912 \left\{ 0.2088 \left\{ \begin{array}{c} 19.7928 \\ 19.5840 \\ 18.4016 \end{array} \right. \right. & \left. \left. \begin{array}{c} 8\% \\ J_2 \\ 9\% \end{array} \right\} \quad x \quad \right\} 1\%
\end{array}
$$

តាមវិធានត្រៃដ្ឋានយើងបាន៖

$$\frac{x}{1\%} = \frac{0.2088}{1.3912}$$

$$x = 0.15\%$$

ដូចនេះ: $\boxed{J_2 = 8\% + x = 8.15\%}$ ។

ឧទាហរណ៍ ៦.៥.៨. យោងតាម ឧទាហរណ៍(៦.៥.៧) ចូរគណនាតម្លៃទិញដែល អ្នកវិនិយោគC ត្រូវបង់បើសិនអ្នកវិនិយោគ A លក់$Coupon$ ទៅអោយគាត់ដែលត្រូវទទួលទិន្នផលតាមអត្រា $J_{12} = 7.5\%$?

ដំណោះស្រាយ

អ្នកវិនិយោគ C នឹងបង់ប្រាក់ស្មើនឹងតម្លៃបច្ចុប្បន្ន នៃការបង់ប្រាក់ $\$45$ ប្រចាំគ្រា 40 លើក តាមអត្រា ប្រចាំគ្រា សមមូល $i = \left(1 + \dfrac{0.075}{12}\right)^6 - 1 = 0.038091$

ដូចនេះ: តាមរូបមន្តតម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃ Ordinary Annuity:

$$\boxed{P_c = 45a_{\overline{40}|0.038091} = \$916.55}$$

៦.៥.៥. សញ្ញាប័ណ្ណនៃសំណងប្រចាំគ្រា

និយមន័យ ៦.៥.៥. សញ្ញាប័ណ្ណនៃសំណងប្រចាំគ្រា $(Annuity Bonds)$ ដែលមានតម្លៃចារឹកF គឺ ជាកិច្ចសន្យា ដែលសន្យា សងរំលោះកំចី ដោយ សំណងថេរ តាម អត្រាចារឹកនៃសញ្ញាប័ណ្ណ ដែល មានប្រាក់កំចី ស្មើនឹង តម្លៃចារឹក។

កាលណា តម្លៃចារឹក F និងអត្រាចារឹក r មាន អត្ថិភាព(គេអោយ) នោះសំណងប្រចាំគ្រា R

ត្រូវកំណត់តាមរូបមន្ត

$$\boxed{R = \frac{F}{a_{\overline{n}|r}}} \tag{៦.១៣}$$

បើយើងចង់គណនាតម្លៃនៃសញ្ញាប័ណ្ណ នៅកាលបរិច្ឆេទណាមួយ យើងអាចកំណត់ដូចជាតម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃការបង់ប្រាក់ ប្រចាំគ្រា ពេលអនាគត របស់សញ្ញាប័ណ្ណ តាមអត្រា ចំណូល ជាក់លាក់ របស់ អ្នកវិនិយោគ ពោល គឺត្រូវ ប្រើរូបមន្ត

$$\boxed{P = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = Ra_{\overline{n}|i}} \tag{៦.១៤}$$

ដែល $i =$ Investor's interest rate (yield rate) ។

ឧទាហរណ៍ ៦.៥.៩. ៖សញ្ញាប័ណ្ណ សងប្រចាំគ្រា មួយ (Annuity Bond) សន្យាសង ប្រាក់ដើម \$50000 តាមអត្រាចារឹក $J_2 = 12\%$ ដោយរំលោះស្មើៗគ្នានៅរៀងរាល់ចុងឆមាសសម្រាប់រយៈពេល10 ឆ្នាំ។

១. តើវិនិយោគិនព្រមទិញ សញ្ញាប័ណ្ណ នេះ ក្នុងតម្លៃប៉ុន្មាន បើគាត់ចង់បាន ចំណូលតាមអត្រា $J_2 = 13\%$?

២. ចូរគណនាតម្លៃទិញនៃសញ្ញាប័ណ្ណ នៅឆ្នាំទី៥ បើអ្នកវិនិយោគចង់បាន ចំណូលតាមអត្រា $J_{365} = 10\%$?

ដំណោះស្រាយ

១. តម្លៃទិញនៃសញ្ញាប័ណ្ណ

ដំបូងយើងត្រូវគណនារកប្រាក់សំណងឆមាស

ដោយ $F = 50\,000$; $n = 10 \times 2 = 20$; $r = \dfrac{0.12}{2} = 0.06$

តាមរូបមន្ត (៦.១៣)

$$\begin{aligned} R &= \frac{F}{a_{\overline{n}|r}} \\ &= \frac{50\,000}{a_{\overline{20}|0.06}} \\ &= \$4359.23 \end{aligned}$$

ម៉្យាងទៀតដោយអត្រាទិន្នផល $J_2 = 13\%$ ឬ $i = 0.065$

តាមរូបមន្ត (៦.១៨)

$$\begin{aligned} P &= Ra_{\overline{n}|i} \\ &= \$4359.23a_{\overline{20}|0.065} \\ &= \$4803.221 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{អ្នកវិនិយោគព្រមទិញសញ្ញាប័ណ្ណក្នុងតម្លៃ } P = \$48032.21}$ ។

២. តម្លៃទិញនៃសញ្ញាប័ណ្ណនៅចុងឆ្នាំទី៥

ដោយ $n = (10-5)\times 2 = 10; \quad i' = \dfrac{j_{365}}{365} = \dfrac{0.1}{365}$

ហើយតាមអត្រាសមមូល i ជាអត្រាប្រចាំឆមាស

$$\begin{aligned} (1+i)^2 &= (1+i)^{365} \\ i &= \left(1+\frac{0.1}{365}\right)^{\frac{365}{2}} - 1 \\ &= 0.051263897 \end{aligned}$$

យើងបាន

$$\begin{aligned} P &= Ra_{\overline{n}|i} \\ &= \$4359.23a_{\overline{10}|0.051263897} \\ &= \$33455.17 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{នៅចុងឆ្នាំទី៥ អ្នកវិនិយោគទិញសញ្ញាប័ណ្ណក្នុងតម្លៃ } P = \$33455.17}$

លំហាត់អនុវត្តន៍

លំហាត់ ៦.១. ក្រុមហ៊ុនសាជីវកម្ម*ACME* ត្រូវការសង់គំរោងថ្មីមួយ ។ ក្រុមហ៊ុនបានបោះផ្សាយសញ្ញាប័ណ្ណ ដែល មានទឹកប្រាក់សរុប \$500 000 មានអាយុកាល ២០ឆ្នាំ ហើយ ផ្តល់ការប្រាក់តាមអត្រា $J_2 = 11\%$។ សញ្ញាប័ណ្ណ ទាំងនេះ ត្រូវសងតាមតំលៃ 105 *(Quoted Redemption)*។ សញ្ញាប័ណ្ណទាំងអស់ត្រូវ បានទិញដោយក្រុមហ៊ុនធានា រ៉ាប់រងមួយ ដែលចង់បានចំណូល $J_2 = 14\%$ ។

ក. ចូរគណនាតំលៃទិញនៃសញ្ញាប័ណ្ណ ?

ខ. ចូរឆ្លើយសំនួរ "ក" ម្តងទៀតប្រសិនបើសញ្ញាប័ណ្ណ ទាំងអស់ត្រូវបានសងតាមតំលៃចារឹក *(Redemption at par) ?*

លំហាត់ ៦.២. .

ក. លោកសម្បត្តិទិញសញ្ញាប័ណ្ណមួយ ដែលមាន តំលៃចារឹក \$2 000 អត្រាចារឹក $J_2 = 10$ និង សងវិញ តាម តំលៃ ចារឹក ក្នុង រយៈពេល ២០ឆ្នាំទៀត គាត់ប្រាថ្នាចង់បាន ចំណូល $J_4 = 12\%$ ។

ចូរគណនាតំលៃទិញ ?

ខ. បន្ទាប់ពី ៥ឆ្នាំកន្លងផុត គាត់បាន លក់ សញ្ញាប័ណ្ណនេះ ទៅអោយ អ្នកវិនិយោគ ម្នាក់ទៀត ដែលចង់ បាន ចំណូល $J_1 = 9$។

ចូររកតំលៃលក់នៃសញ្ញាប័ណ្ណ ?

លំហាត់ ៦.៣. ក្រុមហ៊ុន *Royal Groups* ត្រូវការ បង្កើត មូលនិធិខ្លះ ដើម្បី ទិញឧបករណ៍ថ្មី ។ គេបាន បោះផ្សាយសញ្ញាប័ណ្ណដែលមានអាយុកាល ២០ឆ្នាំ ដែលមានតំលៃសរុប \$1 000 000 ហើយ សន្យាបង់ការ ប្រាក់តាមអត្រាចារឹក $J_2 = 12\%$ ។ សញ្ញាប័ណ្ណទាំងអស់ត្រូវសងវិញតាមតំលៃ 105។ នៅខណ: ពេលបោះផ្សាយអត្រាការប្រាក់ លើទីផ្សារ គឺ $J_{12} = 10.5\%$។ តើថវិកាចំនួនប៉ុន្មាន ដែលក្រុមហ៊ុន ប្រមូលបាន?

លំហាត់ ៦.៤. សាជីវកម្មមួយ បានបោះផ្សាយ សញ្ញាប័ណ្ណ ដែល មាន អាយុកាល ១២ឆ្នាំ តំលៃសរុប \$600 000 ហើយ ផ្តល់ការប្រាក់តាមអត្រាចារឹក $J_2 = 10\%$។ សញ្ញាប័ណ្ណ ទាំងនេះ មានតំលៃធៀបនឹងទិន្នផល $J_2 = 9\%$ ។ ចូរកំណត់តំលៃបោះផ្សាយក្នុង \$100 ឯកតា ?

លំហាត់ ៦.៥. សញ្ញាប័ណ្ណមួយមានតំលៃចារឹក $1 000 បង់ការប្រាក់តាមអត្រាចារឹក $J_2 = 12\%$ ហើយត្រូវសងវិញ តាមតំលៃចារឹកក្នុងរយៈពេល ២០ឆ្នាំទៀត ។
ចូរគណនាតំលៃទិញបើអ្នកវិនិយោគចង់បាន ចំណូល ៖

ក. $J_2 = 14\%$?

ខ. $J_2 = 12\%$?

គ. $J_2 = 10\%$?

លំហាត់ ៦.៦. សញ្ញាប័ណ្ណមួយមានតំលៃចារឹក $\$X$ ត្រូវបានកំណត់សងតាមតំលៃប្រកាស 105 ក្នុងរយៈពេល 10 ឆ្នាំ ទៀត។ សញ្ញាប័ណ្ណនេះ ត្រូវបាន ទិញដោយ អ្នកវិនិយោគ ម្នាក់ ដែល ចង់បាន ចំណូល $J_2 = 10\%$ ។ ប្រសិនបើសញ្ញាប័ណ្ណដូចគ្នានេះ ត្រូវបានកំណត់សងតាមតំលៃ ចារឹកហើយ តំលៃទិញពិតប្រាកដស្មើ នឹង $113 07 តិចជាង តំលៃទិញសញ្ញាប័ណ្ណខាងលើ ។ ចូរកំណត់តំលៃចារឹក X ?

លំហាត់ ៦.៧. សញ្ញាប័ណ្ណមួយមានតំលៃចារឹក $1 000 អត្រាចារឹក $J_2 = 12\%$ និង សងវិញ នៅ ចុងឆ្នាំទី n ក្នុង តំលៃ $1 050 ។ សញ្ញាប័ណ្ណ នេះ ត្រូវបាន លក់ ក្នុងតំលៃ $930 ធៀប នឹង អត្រាចំណូល $J_2 = 15\%$ ។ ចូរគណនា តំលៃ សញ្ញាប័ណ្ណដែលមាន តំលៃចារឹក $1 000 អត្រាចារឹក $J_2 = 10\%$ ហើយសងវិញនៅ ចុងឆ្នាំទី $2n$ ក្នុងតំលៃ $1 040 ធៀបនឹងអត្រាទិន្នផល លើទីផ្សារ $J_2 = 15\%$?

លំហាត់ ៦.៨. ក្រុមហ៊ុនសាជីវកម្មមួយបានបោះផ្សាយ សញ្ញាប័ណ្ណ ដែលមានអត្រាចារឹក $J_1 = 10\%$សងវិញក្នុងរយៈពេល៥ឆ្នាំទៀតតាមតំលៃចារឹក។ អត្រាការប្រាក់លើទីផ្សារ$J_1 = 12\%$។

ក. តើសញ្ញាប័ណ្ណដែលមានតំលៃចារឹក $1 000 លក់ក្នុងតំលៃប៉ុន្មាន ?

ខ. ឧបមាថា ជំនួសការបោះផ្សាយសញ្ញាប័ណ្ណនេះ ដោយការបោះផ្សាយ សញ្ញាប័ណ្ណ ដែល ផ្តល់ការប្រាក់តាមអត្រាចារឹក $J_1 = 11\%$ ។ តើអាយុកាលនៃសញ្ញាប័ណ្ណថ្មីនេះមានប៉ុន្មាន ឆ្នាំ ដើម្បីអោយអ្នកទិញ *(Bondholders)* នៅតែទទួលបានទិន្នផល $J_1 = 12\%$ដដែល? (ចំលើយយកត្រឹមឆ្នាំ)។

លំហាត់ ៦.៩. សញ្ញាប័ណ្ណមួយមានតំលៃចារឹក $5 000 អត្រាចារឹក $J_2 = 11\%$និងត្រូវសងវិញ តាមតំលៃចារឹកក្នុងរយៈពេល២០ឆ្នាំទៀត ។ សញ្ញាប័ណ្ណនេះអាចណាត់សងតាមតំលៃចារឹកនៅ ចុងឆ្នាំទី ១៥ ។ ចូរគណនាតំលៃ សញ្ញាប័ណ្ណដែលធានា ផ្តល់ទិន្នផល ៖

ក. $J_2 = 13\%$?

ខ. $J_2 = 9\%$?

លំហាត់ ៦.១០. សញ្ញាប័ណ្ណមួយមាន តំលៃចារឹក $\$2\,000$ អត្រាចារឹក $J_2 = 10\%$ ហើយសន្យាសងវិញតាមតំលៃ ចារឹកក្នុងរយៈពេល ២០ឆ្នាំទៀត ឬ អាចណាត់សង តាមតំលៃចារឹកក្នុង រយៈពេល ១៥ឆ្នាំខាងមុខ ។
ចូរ រកតំលៃសញ្ញាប័ណ្ណដែលធានាដល់ អ្នកទិញទទួលបាននូវចំណូល ៖

ក. $J_2 = 8\%$?

ខ. $J_2 = 12\%$?

លំហាត់ ៦.១១. សញ្ញាប័ណ្ណមួយមានតំលៃចារឹក $\$1\,000$ ផ្តល់ការប្រាក់តាមអត្រាចារឹក $J_2 = 13\%$ ហើយសងវិញ តាមតំលៃចារឹកក្នុងរយៈពេល ២០ឆ្នាំខាងមុខ ឬ អាចណាត់សងតាមតំលៃ 105 ក្នុងអំឡុងពេល ១៥ឆ្នាំ ក្រោយ ។
ចូរគណនាតំលៃដែលធានាដល់អ្នក វិនិយោគទទួលបាននូវចំណូល ៖

ក. $J_2 = 15\%$?

ខ. $J_2 = 11\%$?

លំហាត់ ៦.១២. សញ្ញាប័ណ្ណមួយមាន តំលៃចារឹក $\$2\,000$ អត្រាចារឹក $J_2 = 12\%$ នឹងត្រូវសងវិញតាមតំលៃចារឹក ក្នុងរយៈពេល ២០ឆ្នាំខាងមុខ ។ សញ្ញាប័ណ្ណនេះ អាចណាត់សងបន្ទាប់ពីឆ្នាំទី ១០ តាមតំលៃ 110 និង បន្ទាប់ពីឆ្នាំទី ១៥ តាមតំលៃ 105 ។
ចូរគណនាតំលៃសញ្ញាប័ណ្ណដើម្បី ធានាដល់អ្នកវិនិយោគ ទទួលបាន នូវទិន្នផលតាមអត្រា ?

លំហាត់ ៦.១៣. សញ្ញាប័ណ្ណមួយ មានតំលៃចារឹក $\$1\,000$ តំលៃត្រូវសងស្មើ តំលៃចារឹកដោយសន្យាផ្តល់ការប្រាក់ តាមអត្រា $J_2 = 12\%$ នៅរៀងរាល់ថ្ងៃទី ១ ខែ មិនា និង ថ្ងៃទី ១ ខែ កញ្ញា ហើយមានតំលៃ គណនេយ្យចំនួន $\$1\,075$ នាថ្ងៃទី ១ ខែ មិនា ឆ្នាំ ១៩៩៩ អត្រាទិន្នផលនៅអំឡុងពេលនេះ គឺ $J_2 = 10\%$ ។
ចូរ គណនា ចំនួនទឹកប្រាក់ សំរាប់រំលោះ *Premium* នា ថ្ងៃទី ១ ខែ កញ្ញា ឆ្នាំ ១៩៩៩ និង តំលៃគណនេយ្យថ្មីក្នុង រយៈពេលនេះ ?

លំហាត់ ៦.១៤. សញ្ញាប័ណ្ណមួយមានតំលៃចារឹក $\$1\,000$ តំលៃត្រូវសងស្មើតំលៃចារឹក និង អត្រាចារឹក $J_1 = 13\%$ ត្រូវបានគេទិញក្នុងតំលៃ $\$1\,184.34$ ។ ប្រសិនបើ *Write-down in book value* ស្មើ 11.57 នៅចុង ឆ្នាំទី ១ តើ *Write-down* នៅចុងឆ្នាំទី ៥ ស្មើប៉ុន្មាន ?

លំហាត់ ៦.១៥. សញ្ញាប័ណ្ណមានតំលៃចារឹក $\$1\,000$ តំលៃត្រូវសងស្មើតំលៃចារឹក និង អត្រាចារឹក $J_1 = 10\%$ ត្រូវ បានអ្នកវិនិយោគម្នាក់ទិញក្នុងតំលៃ $\$1\,060$ ។ ប្រសិនបើ *Write-down in book value* ស្មើ $\$7$ នៅចុង ឆ្នាំទី ១ តើ *Write-down* នៅចុងឆ្នាំទី ៤ ស្មើប៉ុន្មាន ?

លំហាត់ ៦.១៦. សញ្ញាប័ណ្ណមួយមានតំលៃចារឹក $\$1\,000$ ត្រូវសងវិញក្នុងតំលៃ $\$1\,050$ នាថ្ងៃទី ១ ខែធ្នូ ឆ្នាំ២០០២ និង អត្រាចារឹក $J_2 = 13\%$ ។ សញ្ញាប័ណ្ណនេះ ត្រូវបានគេទិញនាថ្ងៃទី ១ ខែ មិថុនា ឆ្នាំ ២០០០ ។
ចូរគណនាតំលៃសញ្ញាប័ណ្ណ និងសង់តារាងនៃសញ្ញាប័ណ្ណបើអត្រាចំណូលជាក់លាក់របស់អ្នកទិញ

ក. $J_1 2 = 12\%$?

ខ. $J_1 = 11\%$?

លំហាត់ ៦.១៧. សញ្ញាប័ណ្ណមានតំលៃចារឹក $\$1\,000$ បង់ការប្រាក់តាមអត្រាចារឹក $J_2 = 14\%$ នាថ្ងៃទី ១ ខែ មករា និង ថ្ងៃទី ១ ខែ កក្កដា និង តំលៃត្រូវសងស្មើតំលៃចារឹក ដែលត្រូវបង់នៅថ្ងៃទី ១ ខែ កក្កដា ឆ្នាំ ២០០៨។ បើសញ្ញា ប័ណ្ណត្រូវបានគេទិញនៅថ្ងៃទី ១ ខែ មករា ឆ្នាំ ២០០០ ដោយទទួលបានចំណូលតាមអត្រា $J_2 = 12\%$
ចូរគណនាការប្រាក់លើ *Book Value* នាថ្ងៃទី ១ ខែ មករា ឆ្នាំ ២០០៤ ?

លំហាត់ ៦.១៨. សញ្ញាប័ណ្ណមួយមានតំលៃចារឹក $\$2\,000$ ត្រូវសងតាមតំលៃចារឹកក្នុងរយៈពេល ៥ឆ្នាំខាងមុខ និង ផ្តល់ការប្រាក់រៀងរាល់ឆ្នាំ ។ ការប្រាក់ដែលបង់លើកទី ១ $\$400$ ហើយការប្រាក់ដែល បង់ក្នុងឆ្នាំ បន្ត បន្ទាប់គឺ ត្រូវបន្ថយ 25% នៃ *Coupon* ដែលបានបង់ឆ្នាំមុនបន្ទាប់ ។

ក. ចូរគណនាតំលៃសញ្ញាប័ណ្ណដែល ត្រូវផ្តល់ទិន្នផល $J_1 = 10\%$?

ខ. សង់តារាងនៃសញ្ញាប័ណ្ណ ?

លំហាត់ ៦.១៩. សញ្ញាប័ណ្ណ មួយមាន អាយុកាល ១០ឆ្នាំ តំលៃត្រូវសង ស្មើ $\$2\,000$ និង ផ្តល់ *Coupon* រៀងរាល់ឆ្នាំ។ ការប្រាក់នៅចុងឆ្នាំទី១ស្មើ $\$100$ ហើយឆ្នាំបន្តបន្ទាប់កើន 10% នៃឆ្នាំមុនបន្ទាប់ ។ សញ្ញាប័ណ្ណ ត្រូវលក់ក្នុងតំលៃ ដែលផ្តល់ចំណូលដល់ អ្នកវិនិយោគ $J_1 = 9\%$ ។
ចូរគណនាតំលៃសញ្ញាប័ណ្ណ និង សង់តារាងនៃសញ្ញាប័ណ្ណ ?

លំហាត់ ៦.២០. សញ្ញាប័ណ្ណមួយមាន តំលៃចារឹក $\$1\,000$ អត្រាចារឹក $J_2 = 10\%$ និង សងវិញតាមតំលៃចារឹក នាថ្ងៃទី ១ ខែ តុលា ឆ្នាំ ២០០២ ។
ចូររក តំលៃទិញ នៅថ្ងៃទី ៧ ខែសីហា ឆ្នាំ ២០០០ បើអ្នកទិញ ប្រាថ្នា ចំណូលតាម អត្រា $J_2 = 13\%$ ។ គូសដ្យាក្រាមដែលផ្តល់ភាពងាយ ស្រួលក្នុងការគណនា ។

លំហាត់ ៦.២១. សញ្ញាប័ណ្ណដែលបោះផ្សាយរតនាគារជាតិមួយមានតំលៃចារឹក $\$1\,000$ត្រូវសងវិញនៅថ្ងៃទី ១ ខែ ធ្នូ ឆ្នាំ ២០១១ តំលៃចារឹក ។ ការប្រាក់ត្រូវបង់តាមអត្រាចារឹក $J_2 = 12\%$ នៅថ្ងៃទី ១ ខែមិថុនា និង ថ្ងៃទី ១ ខែ ធ្នូ រៀងរាល់ឆ្នាំ។ សញ្ញាប័ណ្ណនេះ អាចត្រូវណាត់សងតាមតំលៃ

104 នាថ្ងៃទី ១ ខែធ្នូ ២០០៥។ ចូរគណនា តំលៃសរុប *(Flat price = Purchase price)* និង តំលៃ ទីផ្សារនៃ សញ្ញាប័ណ្ណ នាថ្ងៃទី ៨ ខែ សីហា ឆ្នាំ ២០០០ ប្រសិនបើអត្រា ទិន្នផល $J_2 = 10,5\%$

ក. សន្មតថា សញ្ញាប័ណ្ណត្រូវបានណាត់សងនៅថ្ងៃទី ១ ខែ ធ្នូ ឆ្នាំ ២០០៥ ?

ខ. សន្មតថា សញ្ញាប័ណ្ណសងតាមតំលៃចារឹកនៅថ្ងៃទី ១ ខែ ធ្នូ ឆ្នាំ ២០១១ ?

លំហាត់ ៦.២២. .

ក. សញ្ញាប័ណ្ណមួយមានតំលៃចារឹក $1 000 អត្រាចារឹក $J_2 = 10\%$ និង សងវិញ ស្មើតំលៃចារឹក នាថ្ងៃទី ១ ខែ កញ្ញា ឆ្នាំ ២០២០ ។ ចូរគណនា តំលៃសញ្ញាប័ណ្ណ នាថ្ងៃ បោះផ្សាយគឺថ្ងៃទី ១ ខែ កញ្ញា ឆ្នាំ ២០០០ បើអត្រា ការប្រាក់ក្នុងទីផ្សារ $J_2 = 12\%$?

ខ. ចូរគណនាតំលៃគណនេយ្យនៃសញ្ញាប័ណ្ណនាថ្ងៃទី ១ ខែ កញ្ញា ឆ្នាំ ២០០២ (បន្ទាប់ពីបង់ការប្រាក់រួច) ?

គ. ចូររក តំលៃលក់ នៃ សញ្ញាប័ណ្ណនេះ នាថ្ងៃទី ១ ខែ កញ្ញា ឆ្នាំ ២០០២ បើ អ្នកទិញ ចង់បាន ចំណូល ៖ $J_2 = 9\%?$; $J_2 = 15\%$?

ឃ. តើ*Market quotation* នៃ សញ្ញាប័ណ្ណនេះ នាថ្ងៃទី ៨ ខែ តុលា ឆ្នាំ ២០០២ ស្មើប៉ុន្មាន បើអ្នកទិញប្រាថ្នា ចំណូល $J_2 = 11\%$?

លំហាត់ ៦.២៣. សញ្ញាប័ណ្ណរបស់ក្រុមហ៊ុនសាជីវកម្ម *ABC* មួយសន្លឹកមានតំលៃចារឹក $5 000 អត្រាចារឹក $J_2 = 11\%$ ហើយសងវិញស្មើតំលៃចារឹកនាថ្ងៃទី ១ ខែ តុលា ឆ្នាំ ២០១២ ។

ក. តើអ្នកទិញបានចំណាយប្រាក់ប៉ុន្មាន សំរាប់សញ្ញាប័ណ្ណនេះ បើវាត្រូវបានលក់នៅថ្ងៃទី ២៨ ខែ កក្កដា ឆ្នាំ ២០០០ តាម *Market quotation 89 ?*

ខ. តើ *Market quotation* នៃ សញ្ញាប័ណ្ណនេះ នាថ្ងៃទី ២៨ ខែកក្កដា ឆ្នាំ ២០០២ ស្មើប៉ុន្មាន បើអ្នកទិញ ចង់បាន ចំណូល $J_12 = 9\%$?

គ. តើ *Market quotation* នៃសញ្ញាប័ណ្ណនេះ នាថ្ងៃទី ១៣ ខែ ធ្នូ ឆ្នាំ ២០០២ ស្មើប៉ុន្មាន បើ អត្រាចំណូលជាក់លាក់ របស់អ្នកទិញ គឺ $J_1 = 12\%$?

លំហាត់ ៦.២៤. ក្រុមហ៊ុនសាជីវកម្ម *ABC* មានសញ្ញាប័ណ្ណមួយដែលមានតំលៃចារឹក $1 000 និង អត្រាចារឹក $J_2 = 12\%$ ។ សញ្ញាប័ណ្ណនេះ មានតំលៃសងស្មើតំលៃចារឹកនាថ្ងៃទី ១ ខែ កញ្ញា ឆ្នាំ ២០០៨ ។ នៅថ្ងៃ ទី ១ ខែកញ្ញា ឆ្នាំ ១៩៩២ អ្នកវិនិយោគម្នាក់បានទិញសញ្ញាប័ណ្ណនេះ ក្នុងតំលៃប្រកាស 96 ហើយនៅ ថ្ងៃទី ១ ខែ កញ្ញា ឆ្នាំ ២០០០ គាត់បានលក់ សញ្ញាប័ណ្ណនេះ ទៅវិញ ក្នុងតំលៃប្រកាស 106។

ចូរគណនា អត្រាទិន្នផល របស់អ្នកវិនិយោគនោះ បើគាត់ចង់បាន

ក. $J_2 = ?$

ខ. $J_1 = ?$

លំហាត់ ៦.២៥. ក្រុមហ៊ុនសាជីវកម្ម *XYZ* បោះផ្សាយសញ្ញាប័ណ្ណមួយដែល មានតំលៃចារឹក $\$1\,000$ អត្រាចារឹក $J_2 = 11\%$ និង តំលៃសងស្មើតំលៃចារឹកក្នុងរយៈពេល ២០ឆ្នាំខាងមុខ ឬ អាចណាត់សងតាមតំលៃ ចារឹកបន្ទាប់ពី ឆ្នាំទី ១៥។ លោករតនៈបាន ទិញសញ្ញាប័ណ្ណនេះ ដែល ធានាផ្តល់ទិន្នផល $J_{12} = 12\%$។

ក. ចូរគណនាតំលៃទិញ ?

ខ. បន្ទាប់ពី ១៥ឆ្នាំ ក្រុមហ៊ុន *XYZ* បានណាត់សងប្រាក់ $\$1\,000$ ទៅអោយលោករតនៈ ។ ចូរគណនាទិន្នផលរបស់គាត់ទាំងអស់ គិតជាអត្រា J_{12} ?

លំហាត់ ៦.២៦. លោក សំណាង បានទិញសញ្ញាប័ណ្ណមួយ ដែលមាន តំលៃចារឹក $\$1\,000$ អត្រាចារឹក $J_2 = 12\%$ និង តំលៃសងស្មើតំលៃចារឹក ដែលត្រូវសងនៅ អំឡុងពេល ២០ឆ្នាំ ខាងមុខ ។ តំលៃសញ្ញាប័ណ្ណ ដែល គាត់ទិញនឹង ធានាផ្តល់ ទិន្នផលតាម អត្រា $J_4 = 16\%$ បើសិនជាគាត់រក្សាទុក រហូតដល់ឥណ ប្រតិទាន ។ បន្ទាប់ពីឆ្នាំទី៥ លោកសំណាងលក់សញ្ញាប័ណ្ណនេះទៅអោយអ្នកស្រី ដានី ដែលជាអ្នកចង់បាន ចំណូលតាមអត្រា $J_1 = 11\%$ លើការវិនិយោគរបស់ខ្លួន ។

ក. តើលោកសំណាងទិញសញ្ញាប័ណ្ណ ក្នុងតំលៃប៉ុន្មាន ?

ខ. តើអ្នកស្រី ដានី ទិញសញ្ញាប័ណ្ណក្នុងតំលៃប៉ុន្មាន ?

គ. តើអត្រា J_4 ពិតប្រាកដ ដែលលោក សំណាង ទទួលបានស្មើប៉ុន្មាន ?

លំហាត់ ៦.២៧. សញ្ញាប័ណ្ណស៊េរីមួយមានតំលៃចារឹក $\$10\,000$ និង ត្រូវសងវិញដោយសំណងថេរ $\$2\,000$ នៅចុង ឆ្នាំនិមួយៗនៃឆ្នាំទី ២១ ដល់ទី ២៥ គិតពីកាលបរិច្ឆេទបោះផ្សាយមក ។ សញ្ញាប័ណ្ណនេះ បង់ការ ប្រាក់តាមអត្រា $J_2 = 11\%$ ។ តើសញ្ញាប័ណ្ណមានតំលៃប៉ុន្មានធៀបនឹងអត្រាទិន្នផល $J_2 = 9\%$?

លំហាត់ ៦.២៨. ដើម្បីផ្គត់ផ្គង់ហិរញ្ញវត្ថុលើគំរោង ពង្រីកសមត្ថភាពផលិតកម្ម នៅថ្ងៃទី ១៥ ខែ មិនា ឆ្នាំ ១៩៩៩ ក្រុមហ៊ុន *Mini Corp Ltd.* បានបោះផ្សាយ *Serial bonds* ដែលមានទឹកប្រាក់សរុប $\$30\,000\,000$ ការប្រាក់ គិតតាម អត្រា 13% ក្នុងមួយឆ្នាំ ហើយត្រូវបង់រៀងរាល់ឆមាសនៅថ្ងៃទី ១៥ ខែ មិនា និង ថ្ងៃទី ១៥ ខែ កញ្ញា ។

កិច្ចសន្យាចែងអំពីការសងមានដូចតទៅ ៖

- តំលៃ $\$10\,000\,000$ នៃការបោះផ្សាយត្រូវសងនៅថ្ងៃទី ១៥ ខែ មិនា ឆ្នាំ ២០០៤
- តំលៃ $\$10\,000\,000$ នៃការបោះផ្សាយត្រូវសងនៅថ្ងៃទី ១៥ ខែ មិនា ឆ្នាំ ២០០៩

• តំលៃ $\$10\,000\,000$ នៃការបោះផ្សាយត្រូវសងនៅថ្ងៃទី ១៥ ខែ មិនា ឆ្នាំ ២០១៤
ចូរគណនាតំលៃទិញនៃសញ្ញាប័ណ្ណស៊េរី ដែលផ្តល់ទិន្នផលតាមអត្រា $J_1 = 12\%$ ចំពោះសញ្ញាប័ណ្ណដែលត្រូវសង នៅអំឡុងពេល ៥ឆ្នាំខាងមុខ និង $J_1 = 14\%$ ចំពោះសញ្ញាប័ណ្ណដែលបានបោះផ្សាយ ដទៃទៀត ?

លំហាត់ ៦.២៩. ក្រុមហ៊ុនសាជីវកម្មមួយបោះផ្សាយ សញ្ញាប័ណ្ណដែលមានតំលៃចារឹក $\$1\,000$ កាលបរិច្ឆេទត្រូវសង រយៈពេល ២០ឆ្នាំ និង អត្រាចារឹក $J_2 = 10\%$ ។ សញ្ញាប័ណ្ណ នេះ ត្រូវបានទិញ ដោយវិនិយោគិន A ដែល ប្រាថ្នាចង់ បានចំណូល $J_2 = 9.5\%$ ។ អ្នកវិនិយោគនេះ រក្សា Coupon ទុក ហើយលក់ ចំរៀកនៃសញ្ញា ប័ណ្ណនៅសល់ (តំលៃត្រូវសង) ទៅអោយវិនិយោគិនម្នាក់ទៀត ដែលចង់បាន ចំណូល $J_2 = 10.5\%$ ។
ចូរគណនាអត្រាចំណូលសរុបរបស់ អ្នកវិនិយោគ A ?

លំហាត់ ៦.៣០. ក្រុមហ៊ុនសាជីវកម្មមួយ បានបោះផ្សាយ សញ្ញាប័ណ្ណ ដែលមាន តំលៃចារឹក $\$1\,000$ កាលបរិច្ឆេទ ត្រូវ សងរយៈពេល ១៥ឆ្នាំ អត្រាចារឹក $J_2 = 9.5\%$ និង តំលៃត្រូវសង គឺ 105 ។ សញ្ញាប័ណ្ណនេះ ត្រូវបាន ទិញដោយ អ្នកវិនិយោគ A ដែលចង់បាន ចំណូល $J_2 = 10\%$ ។ វិនិយោគិន A លក់ *Coupon* ទៅអោយ វិនិយោគិន B ដែលជា អ្នកចង់បានចំណូល $J_{12} = 10.5\%$ ហើយរក្សាតំលៃ ត្រូវសង *(Keeps the strip bond)* សំរាប់ខ្លួន ។
ចូរអត្រាចំណូលជាក់លាក់សរុប J_2 របស់វិនិយោគិន A ?

លំហាត់ ៦.៣១. *Annuity Bond* មួយសន្យាសងប្រាក់ដើម $\$50\,000$ ដែលគិតការប្រាក់តាមអត្រា $J_2 = 9\%$ និង បង់ប្រាក់ប្រចាំឆមាសចំនួន ២០លើក លើកទី១ ធ្វើនៅ ៣ឆ្នាំ ក្រោយបន្ទាប់ពីថ្ងៃខ្ចី ។ តើអ្នកវិនិយោគ ម្នាក់ ដែលចង់ បានចំណូល $J_1 = 8\%$ ត្រូវទិញសញ្ញាប័ណ្ណនេះ ក្នុងតំលៃប៉ុន្មាន ? បើ ៖

ក. ទិញឥឡូវនេះ ?

ខ. រយៈពេល ២ឆ្នាំទៀតទើបទិញ ?

គ. រយៈពេល ៥ឆ្នាំទៀតទើបទិញ ?

ជំពូកទី ៧

ភាគហ៊ុន

៧.១. សញ្ញាណនៃភាគហ៊ុន

សាជីវកម្មក្នុងតម្រូវការដើមទុនអាចបញ្ចេញហ៊ុនទៅ វិនិយោគិនឯកជន។ វិនិយោគិនបង់ភាគហ៊ុនក្នុងក្រុមហ៊ុន។ វិនិយោគិនទាំងនេះ នឹងទទួលបានប្រាក់ចំណេញ(ភាគលាភ) ឬប្រាក់ខាតអាស្រ័យលើការកើនឡើង ឬចុះរបស់តម្លៃភាគហ៊ុន។

ឧទាហរណ៍ ៧.១.១. បើលោកសារ៉ាត់ទិញភាគហ៊ុនចំនួន 500 ហ៊ុន ហើយភាគហ៊ុននីមួយៗថ្លៃ $20 នោះនាងបង់ $10 000 ទៅក្រុមហ៊ុនវិនិយោគ។ ប្រសិនបើតម្លៃភាគហ៊ុនកើនឡើងដល់ $30 ក្នុង មួយហ៊ុន នោះលោកលក់ភាគហ៊ុនតាម ក្រុមហ៊ុនវិនិយោគលោកទទួលបាន $15 000 ។ ដូចនេះលោកសារ៉ាត់បង្កើតប្រាក់ ចំណេញ $5000 ។

វិនិយោគិនដែលទិញភាគហ៊ុនអាចទទួលភាគលាភទៀងទាត់ (ជាប្រចាំត្រីមាស)។ ដូចនេះវិនិយោគិនអាចចំណេញក្នុង**មធ្យោបាយពីរ** គឺ៖

- តាមការកើនឡើងនៃថ្លៃភាគហ៊ុន
- និង តាមវិក័យបត្រភាគលាភ។

ពេលខ្លះសាជីវកម្មពុះភាគហ៊ុន ដើម្បីបង្កើតភាគហ៊ុនកាន់តែច្រើននៅតម្លៃទាបបើធៀបនឹងថ្លៃហ៊ុនចាស់។ ឧទាហរណ៍៖ ប្រសិនបើក្រុមហ៊ុនមួយបានប្រកាសពុះភាគហ៊ុនមួយជាពីរចំណែក នោះម្ចាស់ភាគហ៊ុននីមួយៗទទួលភាគហ៊ុនថ្មីចំនួនពីរក្នុងភាគហ៊ុនចាស់ចំនួនមួយ។ ចំណែកឯថ្លៃភាគហ៊ុនថ្មីគឺពាក់កណ្ដាលនៃថ្លៃភាគហ៊ុនចាស់។ ក្រុមហ៊ុន អាចធ្វើបែបនេះ ដើម្បីទាក់ទាញស្ថាប័នវិនិយោគិនដែលមានតម្រូវការថ្លៃហ៊ុនអប្បបរមា។

ប័ណ្ណភាគហ៊ុនមានច្រើនប្រភេទ ដូចជា

- ប័ណ្ណភាគហ៊ុនបរិមា (Preferred stocks)
- ប័ណ្ណភាគហ៊ុនធម្មតា(Common stock)
- និងប័ណ្ណភាគហ៊ុនផ្សេងៗទៀត (Blue chip stocks)
- ប័ណ្ណភាគហ៊ុនមានកំណើន (Growth stock)
- ប័ណ្ណហ៊ុនមានចំណូល (Income Stocks)

- ប័ណ្ណហ៊ុនប្រែប្រួល (Cyclical stocks)
- ប័ណ្ណហ៊ុនមិនប្រែប្រួល (Defensive stocks)
- ប័ណ្ណហ៊ុនបរិកប្ប (Speculative Stocks)។

មានប្រភេទ ហ៊ុនខុសៗគ្នា ជាច្រើន ដូចបានរៀបរាប់ ខាងលើ ប៉ុន្តែក្នុង មេរៀននេះយើងសិក្សាតែពីភាគហ៊ុនធម្មតា(Common Stocks) តែប៉ុណ្ណោះ។

- **ទីផ្សារហ៊ុន**

  ទីផ្សារហ៊ុនមានដើមកំណើតដំបូង នៅទីក្រុង Philadelphia នៅសហរដ្ឋអាមេរិច ក្នុងឆ្នាំ១៧៩០។ វាត្រូវបាន គេស្គាល់ ថាជា ទីក្រុង Philadelphia ហ៊ុនប្តូរប្រាក់។ លើស ពីនេះមាន ផ្សារភាគហ៊ុនញូវយ៉ក(NYSE) បានបង្កើតឡើង ក្នុងឆ្នាំ១៧៩២ ដែលជាការជួញដូរភាគហ៊ុនធំជាងគេបំផុត នៅលើពិភពលោក។ ការជួញដូរនៅ លើទីផ្សារនេះបានបង្កើតឱ្យមានការដេញថ្លៃកើតឡើង។ ភាគហ៊ុន ត្រូវបានលក់ ទៅឱ្យអ្នកដេញថ្លៃខ្ពស់បំផុត និងបានទិញក្នុងការវេរប្រាក់ទាបបំផុត។

- **ប្រភេទក្រុមហ៊ុន៖**

  – ក្រុមហ៊ុនធំ (Large caps or Big caps) ជាក្រុមហ៊ុនដែលមានមូលធនខ្ពស់បំផុតលើសពីដប់ពាន់លានដុល្លា($10 000 លាន)។
  – ក្រុមហ៊ុនមធ្យម (Mid cap) ៖ ជាក្រុមហ៊ុន ដែលមានមូលធន ប្រមាណ 1.5 ពាន់លានដុល្លា ទៅ 10 ពាន់លានដុល្លា។
  – ក្រុមហ៊ុនតូច (Small cap)៖ ជាក្រុមហ៊ុនមានមូលធនតិចជាង 1.5 ពាន់លានដុល្លា។

៧.២. និយមន័យនៃភាគហ៊ុន

និយមន័យ ៧.២.១. ភាគហ៊ុន គឺជាសញ្ញានៃទំនាក់ទំនងនៃម្ចាស់អាជីវកម្ម។ អ្នកដែលជាម្ចាស់ភាគ ហ៊ុនម្នាក់ដែលមានសិទ្ធិបោះ ជ្រើសរើសសមាសភាព ក្រុមប្រឹក្សាភិបាលរបស់ក្រុម ហ៊ុនបាន។ ប័ណ្ណភាគហ៊ុនគ្មានកាលអវសានទេ។

ឧទាហរណ៍ ៧.២.១. ឧបមាថា អ្នកមានប័ណ្ណភាគហ៊ុនចំនួន 3 000 សន្លឹកនៅក្នុងក្រុមហ៊ុនមួយដែលក្រុមហ៊ុននោះបានបោះផ្សាយ និងលក់ប័ណ្ណភាគហ៊ុនសរុបមានចំនួន 100 000 សន្លឹកនោះមានន័យថា អ្នកមានចំណែកកម្មសិទ្ធិចំនួន 3%(3 000/100 000) នៅក្នុងក្រុមហ៊ុននោះ។

៧.៣. ការទិញ និងលក់ភាគហ៊ុន

៧.៣.១. ឈ្មួញ និងឈ្មួញកណ្តាល

ឈ្មួញកណ្តាល(Broker)៖ ជាអន្តរការី (អ្នកកណ្តាល) ដែលរៀបចំការជួញដូរសម្រាប់អតិថិជនរបស់គាត់ដោយ ជួយពួកគេរកបានដៃគូជំនួញ ដែលសក្តិសម។ សំណងរបស់ពួកគាត់ គឺជាការប្រាក់កម្រៃជើងសារត្រូវបានបង់ ដោយអតិថិជន។ ឈ្មួញកណ្តាលមិនធ្វើ ហិរញ្ញប្បទានការលក់ដូរទេ ហើយ ពួកគេមិនកាន់បញ្ជីសារពើភ័ណ្ឌ នៃទ្រព្យ ដែលបានរក។ពួកគេជាអ្នកសម្របសម្រួលការជួញដូរដែលទទួលបាន តម្លៃឈ្នួលដំណើរការសម្រាប់សេវាត្រឡប់មកវិញ(សងវិញ)។ ឈ្មួញកណ្តាលតែងតែមាន នៅក្នុងទីផ្សារអចលនទ្រព្យ។បើយើងសង្កេត ដោយយកចិត្តទុកដាក់ក្នុងការទិញផ្ទះ យើង និងឈានទៅដល់អ្នកលក់ដូរផ្ទះ។គេនឹងមានបញ្ជី នៃលក្ខណះដែលម្ចាស់បង្ហាញឲ្យឃើញ នូវចំណាប់អារម្មណ៍ក្នុងការលក់។អ្នករកស៊ីលក់ដូរផ្ទះ មិនមានទ្រព្យសម្បត្តិនៃផ្ទះដែលគាត់បានផ្តល់ហិរញ្ញប្បទាននោះទេ។

ឈ្មួញ គឺទីផ្សារអន្តរការី ដែលកាន់កាប់ បញ្ជីសារពើភ័ណ្ឌនៃ ទ្រព្យសម្បត្តិក្នុងការបង្កើតទីផ្សារ។ផ្ទុយពី ឈ្មួញកណ្តាល ឈ្មួញមានប្រាក់ទុន ក្នុងទ្រព្យទាំងនោះ។បើអតិថិជនកំពុងតែចង់លក់ឈ្មួញ នឹងទិញវាពីអតិថិជន ដោយប៉ាន់ស្មានទុកមុនអាចលក់វាទៅវិញក្នុងតម្លៃខ្ពស់ជាង។ ស្រដៀងគ្នានេះដែរ នៅពេល អតិថិជន រំពឹងថាទិញ asset ឈ្មួញនឹងលក់ asset ពីបញ្ជីសារពើភ័ណ្ឌដោយសង្ឃឹមថា អាចបំពេញស្តុករបស់ពួកគេនៅតម្លៃទាបនៅពេលក្រោយ។ដើម្បីអះអាងប្រាក់ចំនេញពីសកម្មភាពជំនួញរបស់ពួកគេ ឈ្មួញត្រូវតែជាអ្នកជំនាញក្នុងសិល្បះជំនួញ។

៧.៣.២. ការទិញ និងលក់ភាគហ៊ុន

មានមធ្យោបាយខុសៗគ្នាដើម្បីទិញ និងលក់ហ៊ុន។

ឧទាហរណ៍ ៧.៣.១. ឧបមាថា សុខា និង ធីតាទិញភាគហ៊ុន ដូចគ្នានៅលើ មូលដ្ឋានប្រចាំខែធម្មតាដោយប្រើវិធីសាស្ត្រផ្សេងគ្នា។ សុខាទិញភាគហ៊ុនចំនួន 10 ជារៀងរាល់ខែ ខណៈពេលដែលធីតាទិញភាគហ៊ុនថ្លៃ $100 ដូចគ្នា ដោយមិនគិតពី ចំនួនហ៊ុនដែលត្រូវបានទិញសម្រាប់ចំនួនទឹកប្រាក់នេះ។ វិធីសាស្ត្រដែលធីតាប្រើ ត្រូវបានគេហៅថាជា **មធ្យមតម្លៃប្រាក់ដុល្លា** ។

ដំណោះស្រាយ

យក $S(t)$ ជាតម្លៃហ៊ុននៅពេល t

បើយើងទិញចំនួនភាគហ៊ុន N នៅខណៈពេល $t=1, t=2$

នោះយើងបង់ $NS(1)+NS(2)$ ចំពោះចំនួនភាគហ៊ុនសរុប $2N$
ដូចនេះតម្លៃមធ្យមក្នុងភាគហ៊ុនគឺ

$$\frac{NS(1)+NS(2)}{2N}=\frac{S(1)+S(2)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{2}S(t)$$

បើយើងទិញភាគហ៊ុនចំនួនដូចគ្នានៅ ខណៈពេល $t=1,2,\cdots,n$ នោះតម្លៃមធ្យមនៃភាគហ៊ុនមួយគឺ

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}S(t)} \tag{៧.១}$$

បើយើងប្រើមធ្យមតម្លៃប្រាក់ដុល្លា (Dollar Cost Averaging) និងចំណាយ ដុល្លា ដើម្បីទិញ ភាគហ៊ុននៅខណៈពេល $t=1$ និង $t=2$

នោះយើងបង់ $2D$ ចំពោះចំនួនសរុបនៃ ${}^{D}/_{S(1)}+{}^{D}/_{S(2)}$ ចំណែកភាគហ៊ុន
ដូច្នេះតម្លៃមធ្យមនៃចំណែកភាគហ៊ុនគឺ

$$\frac{2D}{\dfrac{D}{S(1)}+\dfrac{D}{S(2)}}=\frac{2}{\dfrac{1}{S(1)}+\dfrac{1}{S(2)}}=\frac{2}{\sum\limits_{t=1}^{2}\dfrac{1}{S(t)}}$$

បើយើងចំណាយ D ដុល្លា ដើម្បីទិញ ចំណែកភាគហ៊ុន នៅ ខណៈពេល $t=1,2,...,n$ នោះ **តម្លៃមធ្យមក្នុងមួយចំណែកគឺ**

$$\boxed{\frac{n}{\sum\limits_{t=1}^{n}\dfrac{1}{S(t)}}} \tag{៧.២}$$

សំណួរយើងចង់ឆ្លើយ គឺ "តើទ្រឹស្តីណាមួយ ឱ្យតម្លៃមធ្យមទាប ក្នុងមួយចំណែកហ៊ុន"។ ជាដំបូងយើងយកចិត្តទុកដាក់លើ $n=2$ ។
បើយើងក្រឡេកទៅផលដករវាងតម្លៃមធ្យមក្នុងមួយភាគហ៊ុន នោះយើងឃើញថា (៧.១)− (៧.២)

$$\begin{aligned}\frac{S(1)+S(2)}{2}-\frac{2}{\dfrac{1}{S(1)}+\dfrac{1}{S(2)}}&=\frac{S(1)+S(2)}{2}-\frac{2S(1)S(2)}{S(1)+S(2)}\\&=\frac{(S(1)+S(2))^2-4S(1)S(2)}{2(S(1)+S(2))}\\&=\frac{(S(1)+S(2))^2}{2(S(1)+S(2))}\end{aligned}$$

ផលដកគឺវិជ្ជមានលើកលែងតែ $S(1)=S(2)$ ក្នុងករណីនេះវាគឺសូន្យ។
ដូច្នេះលើកលែងតែ $S(1)=S(2)$ មធ្យមតម្លៃនៃប្រាក់ដុល្លាផ្តល់ឱ្យតម្លៃចំណែកមធ្យមទាប បើ $n=2$ ។ បើ $S(1)=S(2)$ នោះទ្រឹស្តីបទទាំងពីរឱ្យតម្លៃមធ្យមដូចគ្នាក្នុងមួយភាគហ៊ុន។

នេះអាចសិក្សាជាទូទៅជា n ចន្លោះពេលដោយពិចារណាទៅ លើសញ្ញានៃបរិមាណ

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}S(t)-\frac{n}{\sum\limits_{t=1}^{n}\frac{1}{S(t)}}=\frac{1}{n\sum\limits_{t=1}^{n}\frac{1}{t}}\left(\left(\sum_{t=1}^{n}S(t)\right)\left(\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{S(t)}\right)-n^2\right)$$

ឥឡូវ វិសមភាព $Cauchy-Schwarz$

$$\left(\sum_{t=1}^{n}a_tb_t\right)^2\leqslant\left(\sum_{t=1}^{n}{a_t}^2\right)\left(\sum_{t=1}^{n}b_t^2\right)$$

សមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ

$$a_t=\lambda b_t\qquad(t=1,2,3,...,n)$$

ចំពោះចំនួនថេរ λ ឬ $b_t=0\qquad(t=1,2,3,...,n)$។
តាង

$$a_t=\sqrt{S(t)}\quad\&\quad b_t=\frac{1}{\sqrt{S(t)}}$$

យើងឃើញថា

$$n^2\leqslant\left(\sum_{t=1}^{n}S(t)\right)\left(\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{S(t)}\right)$$

សមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ $\sqrt{S(t)}=\lambda/S(t)$ នោះ $S(1)=S(2)=...=S(n)=\lambda$ ។

ដូចនេះ លុះត្រាតែ $S(1) = S(2) = ... = S(n)$ នោះទើបមធ្យមតម្លៃប្រាក់ដុល្លាឱ្យតម្លៃហ៊ុនជាមធ្យមទាប។

បើ $S(1) = S(2) = ... = S(n)$ នោះទ្រឹស្តីទាំងពីរនាំឱ្យតម្លៃមធ្យមដូចគ្នានៃហ៊ុន។

ទ្រឹស្តីបទ ៧.៣.១. ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យមនៃដុល្លា *(Dollar Cost Averaging)*

បើយើងកំពុងទិញហ៊ុន នោះតម្លៃមធ្យមដុល្លាឱ្យ តម្លៃមធ្យម នៃហ៊ុនទាបជាងការទិញចំនួនហ៊ុនដែលថេរលើមូលដ្ឋានទៀងទាត់។ បើយើងកំពុងលក់ហ៊ុន នោះការលក់ចំនួនហ៊ុននៅថេរលើមូលដ្ឋានទៀងទាត់ឱ្យតម្លៃមធ្យមនៃហ៊ុនខ្ពស់ជាងតម្លៃ

មធ្យោបាយផ្សេងទៀត ដើម្បីទិញហ៊ុនគឺ ការទិញលើ Margin(BUYING ON MARGIN)។ នៅពេលដែលវិនិយោគិនមិនមាន ទឹកប្រាក់គ្រប់គ្រាន់ ដើម្បីបង់ជាប្រាក់សុទ្ធ សម្រាប់ការបញ្ជាទិញទាំងអស់ ឥណទានត្រូវបានគេរៀបចំក្នុងការបញ្ជា ទិញលើ Margin។ មុននឹងការលក់ដូរ Margin កើតឡើង គណនេយ្យពិសេសត្រូវបានគេបើកនៅផ្ទះឈ្មួញកណ្តាល ឬការិយាល័យឈ្មួញ។ ជាការពិតណាស់ គណនេយ្យនេះអាចធ្វើទៅបានដោយវិនិយោគិនដាក់ពាក្យ សុំសម្រាប់បន្ទាត់នៃឥណទាន លើកលែងតែទឹកប្រាក់ត្រូវបានប្រើដើម្បី ទិញភាគហ៊ុនដែលមានកម្មសិទ្ធិពិសេស។ គេបានបង្កើតច្បាប់មួយហៅថា 50% Margin។ នៅពេលភាគហ៊ុនត្រូវបានទិញក្នុង Margin សាច់ប្រាក់ក្នុងបរិមាណនៃ 50% នៃថ្លៃទិញ សរុបត្រូវតែ ធ្វើឥណទាន ក្នុងគណនេយ្យ របស់ឈ្មួញកណ្តាលរួចរាល់។

ឧទាហរណ៍ ៧.៣.២. ឧបមាថាអ្នកចង់ទិញភាគហ៊ុនចំនួន 100 នៃ Xerox ដែលតម្លៃបច្ចុប្បន្ននៃភាគហ៊ុននីមួយៗគឺ 45$។ គេបានថ្លៃនៃភាគហ៊ុនសរុបគឺ $4500 (មិនគិតពីកម្រៃជើងសារ)។ បើអ្នកទិញភាគហ៊ុនទាំងនេះនៅលើMargin អ្នកនឹងជំពាក់ $2250 ឬពាក់កណ្តាលតម្លៃសរុប។ ចំនួនទឹកប្រាក់នេះគឺស្ថិតនៅក្នុងគណនេយ្យ ឬបានកក់ជាមួយនឹងឈ្មួញកណ្តាលរបស់អ្នកដែលជាដៃគូរួម។ ឈ្មួញកណ្តាល បង់សម្រាប់ ការជួញដូរ ដែលនៅសល់($2250) ហើយនឹងបញ្ចូលការប្រាក់ជាការបង់ប្រចាំខែលើ Outstanding Balance។ ការប្រាក់ អាចខ្ពស់ជាង អត្រាការប្រាក់របស់ធនាគារ ព្រោះតែក្រុមហ៊ុនឈ្មួញកណ្តាល ត្រូវខ្ចីលុយពីធនាគារដើម្បីឱ្យអ្នកខ្ចី។

ប្រជាជនទិញភាគហ៊ុនលើ Margin ដើម្បីដាក់ប្រាក់ក្នុងចំនួនតិច ក្នុងគោលបំណង គឺធ្វើឱ្យប្រាក់នោះកើនឡើង។ ជាការពិត ប្រាក់តិចតួចនេះត្រូវបានប្រើដើម្បីទ្រទ្រង់ចំនួនទឹកប្រាក់ច្រើនជាងនៃមូលដ្ឋានរបស់តម្លៃមូលធន។ នៅពេល វិនិយោគិន ទិញភាគហ៊ុនលើ Margin ធនលាភភាពប្រសិទ្ធិភាព (Potential Return) គឺច្រើនជាងបើថ្លៃភាគហ៊ុនកើនឡើង ព្រោះឈ្មួញកណ្តាលត្រូវបានបង់ត្រឹមតែពាក់កណ្តាលនៃថ្លៃទិញដើម។

ឧទាហរណ៍ ៧.៣.៣. ឧបមាអ្នកបានទិញ 100 ភាគហ៊ុននៃXeroxដែលមួយ ចំណែកមានតម្លៃ \$45 ។ បើថ្លៃកើនឡើងដល់ \$60 ចំណេញបាន \$15 ក្នុងភាគហ៊ុនមួយចំណែក។ ប៉ុន្តែដោយសារតែអ្នកបង់ ត្រឹមតែពាក់កណ្តាលនៃ \$45 ក្នុងមួយភាគហ៊ុន អត្រាពិតធនលាភភាពគឺប្រហែល 67 ភាគរយ(\$15 ចំណេញបានចែកដោយ ការបង់ភាគហ៊ុនដំបូង \$22.50)។ ទោះជាអត្រានេះ មិនបញ្ចូលការប្រាក់បានបង់លើគណនេយ្យ Margin ឬកម្រៃជើងសាររបស់ឈ្មួញកណ្តាលក៏ដោយ អ្នកនៅតែបានប្រាក់ចំណេញ ខ្ពស់ជាងពេលដែលអ្នកបង់ ទឹកប្រាក់ \$4500 ពេញពីដំបូងមក។

ទន្ទឹមនឹងនេះ អ្នកកុំភ្លេចថា ប្រសិនបើ ថ្លៃហ៊ុនធ្លាក់ចុះ នោះលទ្ធផលគឺផ្ទុយហើយ។ បើវាកើតឡើងដូចនោះ ឈ្មួញកណ្តាលអាចសួរអ្នកដាក់ប្រាក់បន្ថែមដែលប្រយោជន៍ ឱ្យរក្សា Margin Requirement អប្បបរមា។ ស្ថានភាពនេះត្រូវបាន ចែកជា Margin call។ ទឹកប្រាក់កម្ចីរបស់ឈ្មួញកណ្តាល ក្នុងគណនេយ្យ របស់អ្នកមិនធ្លាក់ជាមួយនឹងថ្លៃហ៊ុនទេ ត្រឹមតែទឹកប្រាក់ដែលអ្នកបានវិនិយោគទេដែលបានបាត់បង់តម្លៃ។ លើសពីនេះ ឈ្មួញកណ្តាល មិនចូលរួមក្នុងហានិភ័យទីផ្សារជាមួយអ្នកទេ។ យើងត្រឡប់ទៅឧទាហរណ៍ខាងដើមរបស់យើង។

- ឧបមាថាតម្លៃទីផ្សារនៃ Xerox របស់អ្នកធ្លាក់ចុះពីថ្លៃទិញដំបូង \$4500 ទៅ \$3200
- Equity ក្នុងគណនេយ្យរបស់អ្នកធ្លាក់ទៅ $\$3200 - \$2250 = \$950$
- បើMargin Requirement គឺ 35% នៃតម្លៃទីផ្សារបច្ចុប្បន្ន នោះ $\$1120(\$3200 \times 0.35)$

អ្នកត្រូវតែបន្ថែម \$170 ទៅលើ Equity របស់អ្នកនៅ ផ្ទះរបស់ ឈ្មួញកណ្តាល $(\$1120 - \$950)$។ តាមរយៈច្បាប់ អ្នកត្រូវតែយកគណនេយ្យ Margin របស់អ្នកត្រឡប់ទៅជាតម្លៃអប្បបរមា។

Margin Call ផ្តល់ ជម្រើសពីរដល់ វិនិយោគិន ទាំងប្រាក់កក់ ឬតម្លៃមូលធនសមមូល ឬការលក់ចេញតួនាទីទាំងមូល និងដាក់គណនេយ្យជាមួយនឹងឈ្មួញទាំងអស់។

ឧទាហរណ៍ ៧.៣.៤. បើអ្នកលក់ ភាគហ៊ុនដើម ចំនួន 100 នៃ Xerox នៅតម្លៃ \$3200 បន្ទាប់ពីវាបានធ្លាក់ចុះ អ្នកជំពាក់ឈ្មួញកណ្តាល \$2250 (ប្រាក់ខ្ចីពីខាងដើម)បូកជាមួយនឹងការប្រាក់លើគណនេយ្យ Margin និងកម្រៃជើងសារលក់។ មានន័យថាការខាតបង់ ពិតប្រាកដរបស់អ្នកគឺ $\$1300(\$2250 - \$950)$ ។

- Equity: ទ្រព្យរបស់វិនិយោគិន
- Margin Requirement: កម្រិតតម្រូវការ
- Margin Equity: កម្រិតមូលធនរបស់ម្ចាស់ភាគហ៊ុននៅក្នុង Margin account
- Debit Balance: ប្រាក់កម្ចីពីឈ្មួញកណ្តាលដើម្បីទិញភាគហ៊ុន
- Required (maintenance) equity: តម្រូវការមូលធនរបស់ម្ចាស់ភាគហ៊ុន
- Maintenance level: កម្រិតនៃការរក្សាទុកទ្រព្យរបស់ម្ចាស់
- Maintenance requirement: តម្រូវការនៃ ការរក្សាទុកប្រាក់ក្នុងគណនេយ្យ។ ប្រាក់ត្រូវកំណត់ទុកក្នុងគណនេយ្យរហូត មិនអាចដកចេញឲ្យគណនេយ្យទំនេរបានទេ។
- Outstanding Balance: សមតុល្យបានគិតចំណូលចំណាយរួចហើយជាក់ស្តែង

ឧទាហរណ៍ ៧.៣.៥. វិនិយោគិនបើក Margin Account ជាមួយនឹងប្រាក់កក់ \$20 ហើយខ្ចី \$5000 ពីឈ្មួញកណ្តាល ដូចនេះ ប្រាក់ឥណពន្ធ គឺ \$5000 ។ វិនិយោគិន ប្រើ \$10000 ដើម្បីទិញភាគហ៊ុនចំនួន 500 ដែលក្នុងមួយភាគហ៊ុនថ្លៃ \$20 ។ ក្នុងចំណុចនេះវិនិយោគិន មានប្រាក់សរុបក្នុង Equity $\$10000 - \$5000 = \$5000$ ។ Maintenance Requirement គឺ 25% នៃតម្លៃទីផ្សារក្នុងមួយភាគហ៊ុនក្នុងគណនេយ្យ។ មានន័យថា ភាគហ៊ុន ក្នុងគណនេយ្យ ត្រូវតែយ៉ាងតិច នៃតម្លៃទីផ្សាររបស់ភាគហ៊ុននីមួយៗ។ Required Equity គឺ $0.25 \times \$10000 = \$2500$ ដែលតិចជាងភាគហ៊ុន នៃ \$5000 នោះ វិនិយោគិន ផ្ទៀងផ្ទាត់ Maintenance Requirement។ វាត្រូវបានបង្ហាញក្នុងតារាងខាងក្រោម ដែល m ជាកម្រិត Maintenance (បង្ហាញជាទសភាគ)។

ការទិញលើ Margin

ថ្លៃ	ចំនួនភាគហ៊ុន	តម្លៃទីផ្សារ	Debit balance	Equity	Required Equity	Margin Equity
S	N	$V = SN$	D	$E = V - D$	mV	$0.5V$
20\$	500	10000\$	5000\$	5000\$	2500\$	5000\$

យើងពិចារណាទៅបីលក្ខណៈ៖

១. តម្លៃភាគហ៊ុនកើនឡើងដល់ ក្នុងមួយភាគហ៊ុន។

(ក) បើវិនិយោគិនលក់ភាគហ៊ុន ទាំងអស់នោះវិនិយោគិន បង្កើតប្រាក់ចំណេញ

$$500 \times (\$30 - \$20) = \$5000$$

កម្រៃជើងសារតិច និងអត្រាការប្រាក់បានបញ្ចូលសម្រាប់កម្ចី។

(ខ) បើវិនិយោគិនមិនលក់ភាគហ៊ុន នោះដោយសារតែ
តម្លៃទីផ្សារនៃភាគហ៊ុនគឺ

$$V = SN = 500 \times \$30 = \$15000$$

ប្រាក់ឥណពន្ធ (Debit Balance) គឺ $D = \$5000$

Equity គឺ $E = V - D = \$15000 - \$5000 = \$10000$

Required Equity គឺ $mV = 0.25 \times \$15000 = \$3750$

នោះ Maintenance Requirement ត្រូវបានផ្ទៀងផ្ទាត់។

Margin Equity គឺ $0.5V = 0.5 \times \$15000 = \$7500$

ដូចនេះ មានភាគហ៊ុននៅសល់ក្នុង Margin account គឺ $\$10000 - \$7500 = \$2500$
ភាគហ៊ុននៅសល់នេះអាចត្រូវបានប្រើដើម្បីខ្ចីបន្ថែម

- ${}^{\$2500}/_{0.5} = \$5000$ ទៅទិញ ${}^{\$5000}/_{\$30} = 166.67$ ភាគហ៊ុនបន្ថែម។
- តម្លៃទីផ្សារនៃភាគហ៊ុនគឺ $V = 666.67 \times \$30 = \$20000$
- វិនិយោគិនមានប្រាក់ឥណពន្ធ $D = \$5000 + \$5000 = \$10000$ ។
- Equity គឺ $E = V - D = \$20000 - \$10000 = \$10000$
- Required Equity គឺ $0.25V = 0.25 \times \$20000 = \$5000$
- Margin Equity គឺ $0.5V = 0.5 \times \$20000 = \$10000$ ។

ដរាបណាតម្លៃហ៊ុនកើនឡើង វិនិយោគិនអាច ទិញភាគហ៊ុនបន្ថែម ដោយខ្ចីលុយពីឈ្មួញកណ្តាលដោយគ្មានវិនិយោគប្រាក់ទៀតទេ។

តារាងខាងក្រោមនេះ ជាឧទាហរណ៍ តម្លៃហ៊ុនកើនឡើងពី ទៅ ក្នុងភាគហ៊ុនសន្មតថា Excess Equity តែងតែប្រើដើម្បីទិញហ៊ុនបន្ថែមក្នុង Margin។

ឥទ្ធិពលនៃថ្លៃកើនឡើង នៅពេលភាគហ៊ុនត្រូវបានទិញ លើ Margin

ថ្លៃ	ចំនួន ភាគហ៊ុន	តម្លៃ ទីផ្សារ	Debit balance	Equity	Required Equity	Margin Equity
20$	500	625$	5000$	5000$	25000$	5000$
30$	500	15000$	5000$	10000$	3750$	7500$
25000$	666.67	20000$	10000$	10000$	5000$	1000$
40$	666.67	26666.67$	10000$	16666.67$	6666.67$	13333.33$
40$	833.33	33333.33$	16666.67$	16666.67$	8333.33$	16666.67$
50$	833.33	41666.67$	16666.67$	25000$	10416.67$	20833.33$
50$	1000	50000$	25000$	25000$	12500$	25000$

នៅជំណាក់នេះ វិនិយោគជាម្ចាស់ $100 ភាគហ៊ុនជាមួយនឹងតម្លៃទីផ្សារ $50000 និង Equity ចំនួន $25000។ តម្លៃនៃជំណែង របស់វិនិយោគិន ក្នុងភាគហ៊ុន ត្រូវបានមួយ ទ្វេជា 5 ។ វាគឺសំខាន់ទៅលើការកត់សំគាល់ វាវិនិយោគិនបង់ កម្រៃជើងសារលើកា រទិញនីមួយៗ និងបង់ការប្រាក់លើកម្ចី។

២. ថ្លៃភាគហ៊ុនធ្លាក់ចុះទៅ $15 ក្នុងមួយភាគហ៊ុន។

នៅចំណុច Required Equity គឺ

$$mV = mNS = 0.25 \times 500 \times \$15 = \$1875$$

និង Equity គឺ

$$E = V - D = 500 \times \$15 - \$5000 = \$2500$$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{Maintenance Requirement ត្រូវបានផ្ទៀងផ្ទាត់}}$ ។

ការគណនាទាំងនេះត្រូវបាន សង្ខេបក្នុងតារាងខាងក្រោម៖

ឥទ្ធិពលនៃថ្លៃធ្លាក់ចុះ នៅពេលភាគហ៊ុនត្រូវបានទិញ លើ Margin

ថ្លៃ	ចំនួន ភាគហ៊ុន	តម្លៃ ទីផ្សារ	Debit balance	Equity	Required Equity	Margin Equity
20$	500	10000$	5000$	5000$	2500$	5000$
15$	500	10000$	5000$	2500$	1875$	3750$

តម្លៃនៃភាគហ៊ុនធ្លាក់ចុះដល់ $10 ក្នុងមួយភាគហ៊ុន។
គេបាន Required Equity គឺ

$$mV = 0.25 \times 500 \times \$10 = \$1250$$

Equity គឺ

$$E = V - D = 500 \times \$10 - \$5000 = \$0$$

បើតម្លៃបន្ត ធ្លាក់ចុះនោះ វិនិយោគិន ត្រូវបានតម្រូវ ឱ្យកក់ប្រាក់បន្ថែម។ ប្រាក់ខាត របស់វិនិយោគិន ត្រូវបាន កំណត់តម្លៃដើម នៃភាគហ៊ុន បូករួមជាមួយ កម្រៃជើងសារ បូកជា មួយការប្រាក់លើកម្ចី។

ឧទាហរណ៍ ៧.៣.៦. តម្លៃភាគហ៊ុនថយចុះពី 20$ ទៅ 5$ ក្នុងមួយភាគហ៊ុន។

ឥទ្ធិពលនៃតម្លៃធ្លាក់ចុះនៅ ពេលភាគហ៊ុនត្រូវបានទិញក្នុង Margin

ថ្លៃ	ចំនួនភាគហ៊ុន	តម្លៃទីផ្សារ	Debit balance	Equity	Required Equity	Margin Equity
20$	500	10000$	5000$	5000$	2500$	5000$
15$	500	7500$	5000$	2500$	1875$	3750$
10$	500	5000$	5000$	0$	1250$	2500$
10$	500	5000$	3750$	1250$	1250$	2500$
5$	500	2500$	3750$	−1250$	625$	1250$
5$	500	2500$	1875$	625$	625$	1250$

តាមតារាងខាងលើឃើញថា នៅកន្លែងខ្លះចន្លោះ តម្លៃចំណែកភាគហ៊ុនមួយ $15 និងតម្លៃចំណែក $10 ត្រូវតែមាន តម្លៃមួយ ដែលនៅ Required Equity ស្មើនឹង Equity ដែលនៅ ក្រោម Maintenance call ត្រូវបានចែកឱ្យ។
ករណីនេះកើតឡើងនៅពេល $0.25 \times 500S = 500S - 5000$ ដែលទទួលបាន $13.33 ។

សំណួរសាមញ្ញ បានសួរថា "នៅកម្រិតណា ដែលអាចឱ្យ តម្លៃភាគហ៊ុន ធ្លាក់ចុះមុន Maintenance Call ត្រូវបានចែកឱ្យ"?
ចម្លើយគឺនៅក្នុងទ្រឹស្តីបទខាងក្រោម៖

៧.៣.៣. ទ្រឹស្តីបទកម្រិតថិតថេរនៃការលក់វែង

ទ្រឹស្តីបទ ៧.៣.២. ទ្រឹស្តីបទកម្រិតថិតថេរ នៃការលក់វែង

(The long sale maintenance level theorem)

បើភាគហ៊ុនត្រូវបានបង់ នៅក្នុង *Margin* បើតម្លៃទីផ្សារដើមនៃភាគហ៊ុន បានបង់គឺ V_0 បើ *original equity* គឺ E_0 ហើយបើ *maintenance level* គឺ m នោះតម្លៃទីផ្សារទាបបំផុត V ចំពោះ *equity* តាងដោយ គឺស្មើ ឬច្រើនជាង *required Equity* (ដូចនេះមិនបង្ក *maintenance call)* គឺ៖

$$V^* = \frac{1}{1-m}(V_0 - E_0)$$

សម្រាយបញ្ជាក់

យើង កំណត់ថា $D = (V_0 - E_0)$ ជា Debit Balance ដែល ជាប្រាក់បាន ខ្ចីពី ឈ្មួញកណ្តាល សម្រាប់ការទិញភាគហ៊ុន។

V ជាតម្លៃទីផ្សារបច្ចុប្បន្ននៃចំណែកភាគហ៊ុន

E គឺជាCurrent equity

នោះ $V - E$ គឺជាប្រាក់បានខ្ចីពីឈ្មួញកណ្តាលសម្រាប់ការទិញភាគហ៊ុនដែរ (ហេតុអ្វី?)

ដូចនេះ $V - E = V_0 - E_0$ នៅពេលតម្លៃទីផ្សារអប្បបរមា $V*$

យើងមាន $E^* = mV^*$ នោះ $V^* - mV^* = V_0 - E_0$ នោះ

$$V^* = \frac{V_0 - E_0}{1-m}$$

ឥឡូវយើងបង្ហាញថា $\dfrac{V_0 - E_0}{1-m}$ គឺជាតម្លៃទីផ្សារអប្បបរមា។

បើ $V^* < \dfrac{V_0 - E_0}{1-m}$ នោះតម្លៃទីផ្សារបច្ចុប្បន្នគឺតិចជាង $\dfrac{1}{1-m}$ គុណនឹងប្រាក់បានខ្ចីពីឈ្មួញកណ្តាលសម្រាប់ការទិញភាគហ៊ុន។

មានន័យថា $V < \dfrac{V-E}{1-m}$ នាំឱ្យ maintenance call , $E < mV$ ។

ឧទាហរណ៍ ៧.៣.៧. ដើម្បីចៀសវាង maintenance call ដែល ជាកម្រិតអប្បបរមាតម្លៃទីផ្សារនៃភាគហ៊ុនអាចធ្លាក់ចុះក្នុង Margin Account ផ្ទុក 500 ភាគហ៊ុន បើតម្លៃទីផ្សារដើមគឺ \$10000 បើ original equity គឺ \$5000 និងបើ maintenance level (កម្រិតតុល្យភាព)គឺ 0.25 ? តើភាគហ៊ុននីមួយៗមានតម្លៃប៉ុន្មាន?

ដំណោះស្រាយ

$V_0 = 10000,\ E_0 = 5000,\ m = 0.25$
ដូចនេះ តម្លៃទីផ្សារអប្បបរមានៃភាគហ៊ុនគឺ

$$\frac{1}{0.75} \times (\$10000 - \$5000) = \$6666.67$$

Required Equityគឺ $0.25 \times \$6666.67 = \$1666.67$

Equity គឺ $\$6666.67 - \$5000 = \$1666.67$

នៅកម្រិតតម្លៃនៃភាគហ៊ុនគឺ

$$\frac{\$6666.67}{500} = \$13.33$$

បើ វិនិយោគិនម្នាក់ ជឿថាភាគហ៊ុន នឹងធ្លាក់ចុះ តម្លៃ នោះ វិនិយោគិន អាចខ្ចីភាគហ៊ុនពីឈ្មួញកណ្តាល ហើយបន្ទាប់មកលក់ភាគហ៊ុន។ នេះត្រូវបានហៅថា **ការលក់រយៈពេលខ្លី** ។

បើភាគហ៊ុនធ្លាក់តម្លៃ បន្ទាប់មកវិនិយោគិនអាចទិញចំនួនភាគហ៊ុនសមមូលនឹងតម្លៃទាបជាង និងប្រើភាគហ៊ុន ទាំងនោះទៅបង់កម្ចីឡើងវិញ។ តាមឧទាហរណ៍ បានបង្ហាញថា វិនិយោគិនសង្ឃឹមការលក់ រយៈពេលខ្លី 100 ភាគហ៊ុនដែលការលក់បច្ចុប្បន្នគឺ \$50 ក្នុងមួយហ៊ុន។ តម្លៃទីផ្សារបច្ចុប្បន្ននៃភាគហ៊ុនគឺ $100\times\$50 = \$5000$ ។ Margin requirement គឺ 50% នៃតម្លៃទីផ្សារនៃ ភាគហ៊ុននោះ វិនិយោគិន កក់ប្រាក់ $0.50 \times \$5000 = \$2500$ ក្នុង Margin account ហើយឈ្មួញកណ្តាល ខ្ចីភាគហ៊ុន 100 ពីវិនិយោគិន។ បន្ទាប់មកវិនិយោគិនលក់ ភាគហ៊ុនតម្លៃ \$50 ក្នុងមួយភាគហ៊ុន និងទទួលបាន $100 \times \$50 = \$5000$ (កម្រៃជើងសារតិច)។
ដូចនេះ វិនិយោគិនមាន Credit Balance នៃ $\$2500+\$5000 = \$7500$ (ផលបូកនៃ ចំណូលពីការលក់ និងប្រាក់កក់ដើម (Initial Deposit)។

ដោយសារតែវិនិយោគិនត្រូវតែសងកម្ចីហ៊ុនទៅឈ្មួញកណ្តាល មានការកើនឡើងនូវតម្លៃនោះវិនិយោគិនបាត់បង់លុយក្នុងភាគហ៊ុន ហើយក្រុមហ៊ុនវិនិយោគទទួលរងវិបត្តិ។
ដូចនេះមាន Maintenance Requirement គឺ 30% ដែលក្នុងឧទាហរណ៍នេះគឺ

$$0.3 \times \$5000 = \$15000$$

នេះមានន័យថា Equity នៅក្នុង គណនេយ្យត្រូវតែមានយ៉ាងហោច ណាស់ 30% នៃតម្លៃចំណែកភាគហ៊ុននៅ គ្រប់ពេលទាំងអស់។
Equity ជាផលដករវាង Credit balance និងតម្លៃទីផ្សារបច្ចុប្បន្ននៃភាគហ៊ុន

ដូចនេះក្នុងឧទាហរណ៍នេះ Equity គឺ

$$\$7500 - \$5000 = \$2500$$

ហើយ Maintenance Requirement ត្រូវបានផ្ទៀងផ្ទាត់។

៧.៣.៤. ទ្រឹស្តីបទកម្រិតបិតថេរនៃការលក់រយៈពេលខ្លី

ឧទាហរណ៍ ៧.៣.៨. គេមានតារាងដូចខាងក្រោម ដែល m ជាកម្រិតបិតថេរ(ជាទសភាគ)

Credit balance	តម្លៃក្នុងមួយភាគហ៊ុន	ចំនួនភាគហ៊ុន	តម្លៃទីផ្សារ	Equity	Required Equity
C	S	N	$V = NS$	$E = C - V$	mV
\$7500	\$50	100	\$5000	\$2500	\$1500

យើងពិចារណាករណី២

១. បើតម្លៃភាគហ៊ុនធ្លាក់ចុះពី ទៅ ក្នុងមួយភាគហ៊ុន

(ក) វិនិយោគិន ទិញភាគហ៊ុន នៅតម្លៃ \$40 ក្នុងមួយភាគហ៊ុន និងសងភាគហ៊ុនទៅក្រុមហ៊ុនវិញ បន្ទាប់មកវិនិយោគិនបង្កើតប្រាក់ចំណូល

$$100 \times (\$50 - \$40) = \$1000$$

កម្រៃជើងសារតិចលើការលក់ និងទិញហ៊ុន និងការប្រាក់ លើកម្ចីនៃភាគហ៊ុនរបស់ឈ្មួញកណ្តាល។

(ខ) បើវិនិយោគិនមិនទិញហ៊ុនក្នុងពេលនេះ
តម្លៃទីផ្សារភាគហ៊ុនគឺ $\$40 \times 100 = \$4000$
Required Equity គឺ 30% នៃ \$4000 នោះ $0.3 \times \$4000 = \$1200$
Equity គឺ $\$7500 - \$4000 = \$3500$

ដូចនេះ
បើតម្លៃធ្លាក់ចុះ នោះ Equity គឺប្រសើរជាង Required equity
ហើយ Maintenance Requirement ត្រូវបានផ្ទៀងផ្ទាត់។
ជាការពិត Equity មួយនៅសល់ 50% នៃតម្លៃបច្ចុប្បន្ន អាចត្រូវបាន ប្រើសម្រាប់ការជួយ

ជ្រោមជ្រែងការលក់រយៈពេលខ្លី។ ក្នុងករណីនេះ $0.50 \times \$4000 = \$2000$ នោះមាន $\$1500$ ក្នុង Equity ដែលនៅសល់ (Excess equity)។ វិនិយោគិនអាចប្រើវាដើម្បីខ្ចី និងលក់ គេបានតម្លៃនៃភាគហ៊ុនគឺ $\dfrac{\$1500}{0.50} = \$3000$ ។ គេសរសេរសង្ខេបក្នុងតារាងខាងក្រោម៖

ឥទ្ធិពលនៃតម្លៃធ្លាក់ចុះនៅ ពេលភាគហ៊ុនត្រូវបានលក់ ក្នុងរយៈពេលខ្លី

Credit balance	តម្លៃក្នុងមួយភាគហ៊ុន	ចំនួនភាគហ៊ុន	តម្លៃទីផ្សារ	Equity	Required Equity
$\$7500$	$\$50$	100	$\$5000$	$\$2500$	$\$1500$
$\$7500$	$\$40$	100	$\$4000$	$\$3500$	$\$1200$

២. តម្លៃភាគហ៊ុនកើនឡើង ក្នុងមួយភាគហ៊ុន។ ក្នុងករណីនេះ Required Equity គឺ

$$0.30 \times \$6000 = \$1500$$

ដូចនេះ វិនិយោគិនបង់ក្រៅ $\$300(\$1800 - \$1500)$ ទៅបំពេញ Maintenance Requirement។ បើតម្លៃហ៊ុនកើនឡើងលឿន នោះវិនិយោគិនអាចបាត់បង់ចំនួនទឹកប្រាក់មិនកំណត់ ដោយហេតុព្រោះ តែប្រាក់ចំណូលរបស់វិនិយោគិន ត្រូវបានកំណត់ជាថ្លៃចំណេញតិចនៃការលក់ (កម្រៃជើងសារ និង ការប្រាក់លើកម្ចីនៃភាគហ៊ុន)។ នេះបង្កើតឱ្យ ការលក់រយៈពេលខ្លីពិតជាមានហានិភ័យ។ តារាងខាងក្រោមនេះបង្ហាញអំពីវា។
សំគាល់ថា Maintenance Fee បានបង់នៅពេលតម្លៃនៃហ៊ុនកើនឡើងគឺជាផលដករវាង Required Equity និង Equity មុនថ្លៃឈ្នួលត្រូវបានកក់។

ឥទ្ធិពលនៃតម្លៃកើនឡើងនៅពេលភាគហ៊ុនត្រូវបានលក់ក្នុងរយៈពេលខ្លី

Credit balance	តម្លៃក្នុងមួយភាគហ៊ុន	ចំនួនភាគហ៊ុន	តម្លៃទីផ្សារ	Equity	Required Equity
\$7500	\$50	100	\$5000	\$2500	\$1500
\$7500	\$60	100	\$6000	\$1500	\$1800
\$7800	\$60	100	\$6000	\$1800	\$1800
\$7800	\$70	100	\$7000	\$800	\$2100
\$9100	\$80	100	\$7000	\$2100	\$2100
\$9100	\$80	100	\$8000	\$1100	\$2400
\$10400	\$80	100	\$8000	\$2400	\$2400
\$10400	\$90	100	\$9000	\$1400	\$2700
\$11700	\$90	100	\$9000	\$2700	\$2700
\$11700	\$100	100	\$10000	\$1700	\$3000
\$13000	\$100	100	\$10000	\$3000	\$3000

ក្នុងឧទាហរណ៍នេះ វិនិយោគិន ជាដំបូងកក់លុយ \$2500 នៅក្នុង Margin Account ដើម្បី លក់ភាគហ៊ុនរយៈពេលខ្លី។ នៅពេលតម្លៃដល់ ក្នុងមួយភាគហ៊ុន វិនិយោគិនត្រូវបង់ប្រាក់បន្ថែម \$5500 ក្នុង Maintenance fee។ ការលក់រយៈពេលខ្លីមិនខិតជិតចំនួនប្រាក់ដែលអាចបាត់បង់។ នៅក្នុងឧទាហរណ៍ តម្លៃមួយដងនៃភាគហ៊ុនកើនដល់ \$60 ក្នុងមួយភាគហ៊ុនចំពោះគ្រប់ \$1000 កើនឡើងក្នុងតម្លៃទីផ្សារភាគហ៊ុន វិនិយោគិនត្រូវតែកក់ប្រាក់បន្ថែម \$1300 ដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់ Maintenance Requirement។

សំគាល់ពីតារាងខាងលើថា ចំណុចខ្លះរវាងតម្លៃហ៊ុន \$50 និងតម្លៃហ៊ុន \$60 ត្រូវតែមានតម្លៃ S ដែលនៅពេល Required Equity ស្មើនឹង Equity ខាងលើដែល Maintenance call ត្រូវបានចែកឱ្យ។ ក្នុងករណីនេះវានឹងកើតឡើងនៅពេល

$$7500 - 100S = 0.3 \times 100S \Rightarrow S = \$57.69$$

សំណួរសួរថា"តើកម្រិតណាដែលតម្លៃហ៊ុនកើនឡើងមុនពេល Maintenance call ត្រូវបានបង្កើតឡើង?"

សំណួរនេះនឹងត្រូវបានឆ្លើយក្នុងទ្រឹស្តីបទខាងក្រោម៖

ទ្រឹស្តីបទ ៧.៣.៣. ទ្រឹស្តីបទកម្រិតថិតថេរភាពលក់រយៈពេលខ្លី

បើវិនិយោគិនលក់ហ៊ុនក្នុងរយៈពេលខ្លី និងមានប្រាក់ឥណទានដំបូង C_0 ហើយ *Maintenance level* គឺ m នោះ *Maximum level* តាងដោយ V^* ដែលតម្លៃទីផ្សារភាគហ៊ុនអាចកើនឡើង និងមិនបង្ក *Maintenance call* គឺ

$$V^* = \frac{1}{1+m}C_0$$

សម្រាយបញ្ជាក់

បើភាគហ៊ុនត្រូវបានទិញក្នុងMargin

V_0 ជាតម្លៃទីផ្សារដើមនៃភាគហ៊ុនបានទិញ

E_0 ជាOriginal equity នោះ $C_0 = V_0 + E_0$

V ជាតម្លៃទីផ្សារភាគហ៊ុនបច្ចុប្បន្ន

E ជាCurrent equity នោះយើងបាន $C_0 = V + E$

ដរាបណាequityត្រូវបានផ្ទុកយ៉ាងហោចណាស់ធំស្មើRequired Equity។(ហេតុអ្វី?)

នៅកម្រិតខ្ពស់បំផុត V^* យើងបាន $C_0 = V^* + E^*, \quad E^* = mV^*$

ដែលត្រូវដោះស្រាយចំពោះ V^* គេបាន

$$V^* = \frac{C_0}{1+m} \quad or \quad V^* = \frac{V_0+E_0}{1+m}$$

ដើម្បីបង្ហាញថា $\frac{V_0+E_0}{1+m}$ នៅកម្រិតខ្ពស់បំផុត

សន្មតថា $V > \frac{V_0+E_0}{1+m}$

នោះ Equity គឺ

$$\begin{aligned} C_0 - V &= (V_0 - E_0) - V \\ &< (V_0 - E_0) - \frac{V_0+E_0}{1+m} \\ &= \frac{m}{1+m}(V_0+E_0) \end{aligned}$$

តែ Required Equity គឺ

$$mV > \frac{m}{1+m}(V_0+E_0)$$

ដូចនេះ $\boxed{E = C_0 - V < mV \text{ , Maintenance call}}$

ឧទាហរណ៍ ៧.៣.៩. ដើម្បីចៀសវាង Maintenance call តើកម្រិតខ្ពស់ បំផុតប៉ុន្មាន ដែលតម្លៃហ៊ុនអាចកើតឡើង ក្នុងគណនេយ្យ Margin ផ្ទុក 100 ភាគហ៊ុន និងប្រាក់ឥណទានដំបូង \$7500 បើកម្រិតបិតថេរ (Maintenance level) គឺ 0.3 ? តើតម្លៃភាគហ៊ុនប៉ុន្មានកើតឡើង?

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $C_0 = \$7500$, $m = 0.3$ ដូចនេះ តម្លៃទីផ្សារអតិបរមា

$$V^* = \frac{10}{13}C_0 = \frac{10}{13} \times \$7500 = \$5769.23$$

$$required\, equity\ : 0.3 \times \$5769.23 = \$1730.77$$

និង equity គឺ

$$\$7500 - \$5769.23 = \$1730.77$$

នៅកម្រិតនេះ តម្លៃភាគហ៊ុនគឺ $\dfrac{\$5769.23}{100} = \$57.69$ ត្រូវជាមួយនឹងលទ្ធផលខាងលើ។

៧.៤. តម្លៃ និងហានិភ័យ

៧.៤.១. Dow Jones Industrial Average(DJIA)

មធ្យម Dow Jones ដើមគឺ ជាមធ្យមទម្ងន់ស្មើ នៃតម្លៃភាគហ៊ុន ដែលធ្វើឱ្យ មានមធ្យម។ ទោះបីជាយ៉ាងណា ដោយសារតែចម្រៀកភាគហ៊ុន ប្រាក់ចំណេញដែលក្រុមហ៊ុនទទួលបាន និងផលបូក និងផលដកភាគហ៊ុនពីសន្ទស្សន៍ ការគណនានៃ DJIA ឥឡូវកាន់តែស្មុគស្មាញ។

ឧទាហរណ៍ ៧.៤.១. ឧបមាថាយើងប្រើវិធី DJIA ដើម្បី គណនាមធ្យមចំពោះភាគហ៊ុន S , T , U, V ដែលជាតម្លៃភាគហ៊ុនបច្ចុប្បន្នគឺ \$15 , \$20, \$20, \$25 ។
នោះសន្ទស្សន៍នៅថ្ងៃទីមួយគឺ

$$\frac{15 + 20 + 20 + 25}{4} = 20$$

ឥឡូវ ឧបមាថា នៅថ្ងៃទីពីរ ក្រុមហ៊ុន T ច្រៀក ភាគហ៊ុន មួយជាពីរ។ ក្នុងករណី នេះម្ចាស់ភាគហ៊ុន នីមួយៗទទួលពីរភាគហ៊ុនថ្មី សម្រាប់ភាគហ៊ុនចាស់នីមួយៗ និងតម្លៃនៃភាគហ៊ុនថ្មី នី

មួយៗ គឺថ្លៃពាក់កណ្ដាលនៃភាគហ៊ុនចាស់ $\frac{\$20}{2} = \$10$ ។
DJIA កែតម្រូវចំពោះការច្រៀក ភាគហ៊ុនដោយផ្លាស់ប្ដូរតួចែក 4 ដោយ DJIA មិនប្រែប្រួលខណៈដែលភាគយកគឺជាផលបូកនៃតម្លៃភាគហ៊ុនដែលបានច្រៀករួចហើយ។
គេបាន $\frac{15+20+20+25}{d} = 20$ ដែល ជាតួចែកថ្មី
ការដោះស្រាយរក d គឺ $d = 3.5$ ។ តួចែកថ្មីនេះមានឥទ្ធិពលរហូតដល់ មានភាគហ៊ុនផ្សេងទៀតដែលច្រៀកបាន ប្រាក់ចំណេញដែលកូនហ៊ុន ទទួល បានពីភាគហ៊ុន 10% ឬច្រើនដោយមួយនៃក្រុមហ៊ុនច្រើន ឬការជំនួសនៃក្រុមហ៊ុនដែលមានដោយក្រុមហ៊ុនថ្មីមួយ។

ឧទាហរណ៍ ៧.៤.២. តារាងបង្ហាញតម្លៃភាគហ៊ុនជាប់ ចំពោះក្រុមហ៊ុន S, T, U, V នៅថ្ងៃទី $1 \to 5$ ដែលថ្ងៃទី 2 ក្រុមហ៊ុន T ច្រៀកភាគហ៊ុនជាពីរ។ បំពេញតារាងសម្រាប់ថ្ងៃទី $3 \to 5$ សន្មតថាមិនមានការច្រៀកភាគហ៊ុនទៀតទេ ហើយមិនមានប្រាក់ចំណេញដែលកូនហ៊ុនទទួលបាន និងគ្មានក្រុមហ៊ុនត្រូវបានផ្លាស់ប្ដូរ។

ថ្ងៃ	តម្លៃ				តួចែក	DJLA
	S	T	U	V		
1	15	20	20	25	4.0	20.00
2	15	10	20	25	3.5	20.00
3	16	11	21	26		
4	15	10	20	25		
5	16	10	19	26		

ដំណោះស្រាយ

ដោយសារមិនមានការច្រៀកភាគហ៊ុនបន្តទៀត និងមិនមានប្រាក់ចំណេញ ដែលកូនហ៊ុនទទួលបាន តួចែកនៅ 3.5 សម្រាប់ថ្ងៃទី $3 \to 5$ ។
មធ្យមនៅថ្ងៃទាំងនេះគឺ

$$\frac{16+11+21+26}{3.5} = 21.14$$
$$\frac{15+10+20+25}{3.5} = 20.00$$
$$\frac{16+10+19+26}{3.5} = 20.29$$

ឥឡូវយើង ពិភាក្សាឥទ្ធិពល នៃ ការច្រៀកភាគហ៊ុន និង ប្រាក់ចំណេញ ដែល ក្រុមហ៊ុន ទទួលបាន នៅលើ DJIA និង មូលហេតុ ដែល ពួកគេអាចនាំមក downward bias (តម្លៃតិចជាងការរំពឹងទុក) ក្នុង DJIA។ ឧបមាថា ក្រោយមក ការច្រៀកភាគហ៊ុន(តួចែកគឺ) តម្លៃភាគហ៊ុនក្រុមហ៊ុន T កើន ឡើង 10% ពី \$10 ទៅ \$11 ។
នោះមធ្យមថ្មីគឺ

$$\frac{15+11+20+25}{3.5}=20.29$$

ម៉្យាងវិញទៀត បើតម្លៃភាគហ៊ុន របស់ក្រុមហ៊ុន កើនឡើង 10% ពី \$20 ទៅ \$22 ខណៈពេលតម្លៃភាគហ៊ុនផ្សេងៗទៀតមិនប្រែប្រួល នោះមធ្យមថ្មីគឺ

$$\frac{15+10+22+25}{3.5}=20.57$$

វាឱ្យន័យថាផលប៉ះពាល់នៃភាគហ៊ុនដែលច្រៀក គឺតិចជាងភាគហ៊ុនដែលមិនបានច្រៀកក្នុងមធ្យមគណនា។

ឥឡូវយើង ពិចារណាឥទ្ធិពល នៃការមិន កែតម្រូវ នៃប្រាក់ចំណេញ ដែលក្រុមហ៊ុនទទួលបានពី ភាគហ៊ុនតិចជាង 10% ។ ឧបមាថាតម្លៃនៃភាគហ៊ុន 4 របស់យើងគឺ $\$15,\ \$10,\ \$20,\ \$25$ និង $d=3.5$ តម្លៃភាគហ៊ុន និងតួចែកតាមចម្រៀកភាគហ៊ុន នៃក្រុមហ៊ុនT ។ បើក្រុមហ៊ុនបែងចែកប្រាក់ចំណេញដែល ក្រុមហ៊ុនទទួលបានពីភាគហ៊ុន 5% (\$1 ក្នុងមួយចំណែកហ៊ុន) នោះលទ្ធផលតម្លៃភាគហ៊ុនគឺ $\frac{\$20}{1.05}=\$19.05$ ដែលមធ្យមទាបមិនពិត។
(សំគាល់ថា តួចែកមិនផ្លាស់ប្តូរក្នុងករណីនេះ)

៧.៤.២. Standard and Poor's 500 Index($S\&P500$)

$S\&P500$ ថ្លឹងភាគហ៊ុនទាំងអស់ក្នុងសន្ទស្សន៍ជា ទំហំសមាមាត្រទៅជាផលបូកនៃទីផ្សារមូលធនកម្មរបស់ពួកគេ។ គេបានរូបមន្តគឺ

$$\boxed{S\&P\ 500(t)=10\frac{\sum_{i=1}^{500}S_i(t)N_i(t)}{\sum_{i=1}^{500}S_i(1)N_i(1)}}$$

- $S_i(1)$ ជាតម្លៃក្នុងមួយចំណែកហ៊ុននៃ i^{th} ភាគហ៊ុននៅរយៈពេលដើម។
- $S\&P\ 500$ វាជាមធ្យមនៃតម្លៃរបស់i^{th} ភាគហ៊ុន

បរិមាណ $S_i(t)$ ជាតម្លៃក្នុងមួយចំណែកហ៊ុននៃ i^{th} ភាគហ៊ុននៅរយៈពេល t

- $N_i(t)$ ជាចំនួនចំណែកភាគហ៊ុន ដែលបានចែកនៃ i^{th} ភាគហ៊ុនក្នុងរយៈពេល t

ត្រឡប់ទៅឧទាហរណ៍១ បើយើង គណនាមធ្យមនេះនៅថ្ងៃទី1 សន្មតថា 100 ចំណែកហ៊ុនត្រូវបានចែកចំពោះក្រុមហ៊ុននីមួយៗ នោះយើងបាន

$$\sum_{i=1}^{4} S_i(1)N_i(1) = 15(100) + 20(100) + 20(100) + 25(100) = \$8000$$

នៅថ្ងៃទី 1 ភាគយកនេះផងដែរ នោះសន្ទស្សន៍ដើមគឺ

$$S\&P\ 500(1) = 10 \times \frac{8000}{8000} = 10$$

នៅថ្ងៃទី 2 ក្រោយពីការច្រៀកភាគហ៊ុនយើងបាន៖

$$\sum_{i=1}^{4} S_i(2)N_i(2) = 15(100) + 10(200) + 20(100) + 25(100) = \$8000$$

ដូចនេះ ចម្រៀកភាគហ៊ុនមិនផ្លាស់ប្តូរផលចែក។
សន្ទស្សន៍គឺទៅតាមចម្រៀក ភាគហ៊ុន

$$S\&P\ 500(2) = 10 \times \frac{8000}{8000} = 10$$

ជាមួយគ្នានេះ សន្ទស្សន៍ចម្រៀកភាគហ៊ុន និង ប្រាក់ចំណេញពី ភាគហ៊ុនត្រូវបានគិតនៅក្នុងភាគយក។ ភាគបែងផ្លាស់ប្តូរ បើភាគហ៊ុនថ្មី ត្រូវបានបង្ហាញ ក្នុងសន្ទស្សន៍ ជំនួស ភាគហ៊ុនផ្សេងទៀត។ ក្នុងករណី នេះ ភាគយក ប្រើប្រាស់ ទីផ្សារមូលធន កម្មសរុប នៃ 500 ភាគហ៊ុន ក្រោយពីការជំនួស និងភាគបែងត្រូវបានកែតម្រូវ ប្រយោជន៍ឱ្យមធ្យមថ្មីគឺដូចជាមធ្យមចាស់។

ឧទាហរណ៍ ៧.៤.៣. តារាងបង្ហាញតម្លៃភាគហ៊ុន ចំពោះក្រុមហ៊ុន S, T, U, V នៅថ្ងៃទី១ដល់ទី៥ ដែលថ្ងៃទី២ ក្រុមហ៊ុន T បានច្រៀកភាគហ៊ុនមួយ ជាពីរភាគហ៊ុន។ បំពេញតារាងចំពោះថ្ងៃទី៣ដល់ទី៥។ សន្មតថាមិនមានការច្រៀកភាគហ៊ុនបន្ត និងមិនមានប្រាក់ចំណេញបន្ថែម។

ថ្ងៃ	តម្លៃ				$S\&P$ 500
	S	T	U	V	
1	15	20	20	25	10.00
2	15	10	20	25	10.00
3	16	11	21	26	
4	15	10	20	25	
5	16	10	19	26	

ដោយមិនមានការច្រៀកភាគហ៊ុនបន្ត និងមិនមានប្រាក់ចំណេញបន្ថែម

មានតែ 100 ចំណែកភាគហ៊ុនត្រូវបាន ចែកសម្រាប់ក្រុមហ៊ុន S, U, V និង 200 ចំណែកភាគហ៊ុនសម្រាប់ក្រុមហ៊ុនT ។ សន្ទស្សន៍នៅថ្ងៃទាំងនោះគឺ

$$10\left(\frac{16(100)+11(200)+21(100)+26(100)}{8000}\right)=10.63(\text{ថ្ងៃទី៣})$$

$$10\left(\frac{15(100)+10(200)+20(100)+25(100)}{8000}\right)=10.00\ (\text{ថ្ងៃទី៤})$$

$$10\left(\frac{16(100)+10(200)+19(100)+26(100)}{8000}\right)=10.13(\text{ថ្ងៃទី៥})$$

៧.៤.៣. អត្រានៃផលលាភភាពចំពោះភាគហ៊ុន និងសន្ទស្សន៍ភាគហ៊ុន

បើ

- $S(0)$ ជាតម្លៃនៃភាគហ៊ុនដើមគ្រា
- $S(1)$ ជាតម្លៃនៃភាគហ៊ុនចុងគ្រា
- D ជាសាច់ប្រាក់ចំណេញដែលភ្នាក់ហ៊ុនទទួលបាន

នោះ $R=\dfrac{S(1)-S(0)+D}{S(0)}$

យើងឃើញថា

$$1+R=\frac{S(1)+D}{S(0)}>0 \quad coz\ S(0)>0\ ,\ S(1)>0\ \&\ D\geqslant 0$$

ឧទាហរណ៍ ៧.៤.៤. ភាគហ៊ុនកំពុងតែជួញដូរនៅតម្លៃ \$50 ក្នុងមួយភាគហ៊ុននៅថ្ងៃ 31/12/2004 ។ ខាងក្រោមនេះជាបញ្ជីនៃតម្លៃភាគហ៊ុន និងប្រាក់ចំណេញបានបង់ពីថ្ងៃ

$1/1/2005 \to 31/12/2005$ នៅថ្ងៃចុងក្រោយនៃត្រីមាសនីមួយៗ។
តើអ្វីទៅជាអត្រាធនលាភភាពចំពោះត្រីមាសនីមួយៗ?

កាលបរិច្ឆេទ	31/3/2005	30/6/2005	30/09/2005	31/12/2005
ថ្លៃ	\$52	\$54	\$35	\$56
ប្រាក់ចំណេញ	\$0.50	\$0.50	\$0.50	\$0.50

ដំណោះស្រាយ

អត្រាសងត្រឡប់ចំពោះ៤ត្រីមាសគឺ

$$\frac{(52-50)+0.50}{50} = 0.05 = 5\%$$
$$\frac{(54-52)+0.50}{52} = 0.0481 = 4.81\%$$
$$\frac{(53-54)+0.50}{54} = -0.0093 = -0.93\%$$
$$\frac{(56-53)+0.50}{53} = 0.066 = 6.6\%$$

- បើយើងប្រើការប្រាក់សាមញ្ញ នោះតម្លៃចុងឆ្នាំនៃការវិនិយោគ \$1 គឺ

$$1 + R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$

និងយើងចង់បានវាស្មើ $1 + 4R$ គេបាន

$$1 + 4R = 1 + R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$

គេបាន មធ្យមពិជគណិតធនលាភភាពប្រចាំត្រីមាស $R_A = \dfrac{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{4}$

- បើយើងប្រើការប្រាក់សមាសនោះ តម្លៃចុងឆ្នាំនៃការវិនិយោគ \$1 គឺ

$$(1+R_1)(1+R_2)(1+R_3)(1+R_4)$$

ហើយយើងចង់បានវាស្មើ $(1+R)^4$ គេបាន

$$(1+R)^4 = (1+R_1)(1+R_2)(1+R_3)(1+R_4)$$

គេបាន មធ្យមធរណីមាត្រនៃធនលាភភាពប្រចាំត្រីមាស

$$R_G = \left[(1+R_1)(1+R_2)(1+R_3)(1+R_4)\right]^{\frac{1}{4}} - 1$$

គ្រប់ផលគុណសុទ្ធតែវិជ្ជមាន នោះ R_G តែងតែរកបាន។

ឧទាហរណ៍ ៧.៤.៥. ចំពោះភាគហ៊ុន នៅឧទាហរណ៍(៧.៤.៤) ចូរគណនាមធ្យមពិជគណិត នៃធនលាភភាព និងមធ្យមធរណីមាត្រនៃធនលាភភាពប្រចាំត្រីមាស។

ដំណោះស្រាយ

មធ្យមពិជគណិតធនលាភភាពប្រចាំត្រីមាសគឺ

$$\frac{0.05 + 0.0481 + (-0.0093) + 0.066}{4} = 0.0387 = 3.87\%$$

មធ្យមធរណីមាត្រធនលាភភាពប្រចាំត្រីមាសគឺ

$$\left[(1.05)(1.0481)(0.9907)(1.066)\right]^{\frac{1}{4}} - 1 = 0.0383 = 3.83\%$$

សំគាល់៖

មធ្យមធរណីមាត្រធនលាភភាពជាត្រីមាសគឺតិចជាងមធ្យមពិជគណិតធនលាភភាពជាត្រីមាស។

ទ្រឹស្តីបទ ៧.៤.១. ទ្រឹស្តីបទមធ្យមធនលាភភាព ជាត្រីមាស $R_G \leqslant R_A$

សម្រាយបញ្ជាក់

តាម $Arithmetic - Geometric\ \ Mean\ \ Inequity$

បើ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ មិនអវិជ្ជមាន និងមិនសូន្យ នោះ

$$(a_1 a_2 a_3 ... a_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$$

សមភាពមានលុះត្រាតែ $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n$

បើ $n = 4 \Rightarrow a_i = 1 + R_i > 0\ , \forall i = 1, 2, 3, 4$

គេបានវិសមភាព៖

$$\left[(1+R_1)(1+R_2)(1+R_3)(1+R_4)\right]^{\frac{1}{4}} \leqslant \frac{(1+R_1)+(1+R_2)+(1+R_3)+(1+R_4)}{4}$$

សមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ $R_1 = R_2 = R_3 = ... = R_n$ ។

នេះបង្ហាញថាមធ្យមធរណីមាត្រធនលាភភាពជាត្រីមាស គឺតិចជាងមធ្យមពិជគណិតធនលាភភាពជាត្រីមាស លើកលែងតែធនលាភភាពជាត្រីមាសស្មើគ្នាក្នុងករណីមធ្យមដូចគ្នា។

សំគាល់៖

- សន្មតថាប្រាក់ចំណេញត្រូវបានបង់នៅថ្ងៃចុងក្រោយនៃត្រីមាសនីមួយៗ។ បើនេះមិនមែនជាករណីនោះ ការគណនាគឺរួចរាល់ជាប្រចាំថ្ងៃ។
- សន្មតថាប្រាក់ចំណេញមិនត្រូវបានវិនិយោគឡើងវិញក្នុងភាគហ៊ុន
- យើងមិនអាចគណនារូបមន្ត នៃធនលាភភាពនេះ បានទេ បើយើងមិនដឹងពីបរិមាណទឹកប្រាក់ និងពេលវេលានៃការបង់ប្រាក់ចំណេញ។

៧.៤.៤. តម្លៃ និងហានិភ័យ

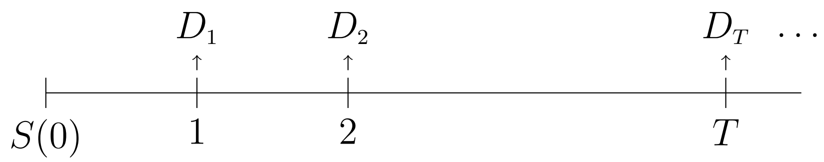
យក

- $S(0)$ ជាថ្លៃបច្ចុប្បន្នក្នុងមួយភាគហ៊ុន
- D_t ជាប្រាក់ចំណេញដែលសង្ឃឹម បាននៅខណៈពេល t ជាត្រីមាស
- T ជារយៈពេលដែលកាន់កាប់ជាត្រីមាស
- k ជាអត្រាធនលាភភាពជាត្រីមាស(គិតជាទសភាគ)

សន្មតថាប្រាក់ចំណេញ ត្រូវបានបង់ជាត្រីមាស និង ថ្លៃហ៊ុន នោះត្រូវបានកំណត់ភ្លាមៗតាមរយៈការបង់ប្រាក់ចំណេញ។

វិនិយោគិនសង្ឃឹមថាទទួលបាន ប្រាក់ចំណេញក្នុងចំនួនទឹកប្រាក់ D_1 នៅចុងត្រីមាសទី១ D_2 នៅចុងត្រីមាសទី២ និងបន្តបន្ទាប់ទៀត។ វិនិយោគិនសុខចិត្តបង់ $S(0)$ ចំពោះភាគហ៊ុនសព្វថ្ងៃ។ លំហូរសាច់ប្រាក់ទាំងនេះត្រូវបានតាងដោយដ្យាក្រាមខាងក្រោម៖

ដ្យាក្រាមពេលវេលានៃការកាន់ប្រភេទភាគហ៊ុនជារៀងរហូត

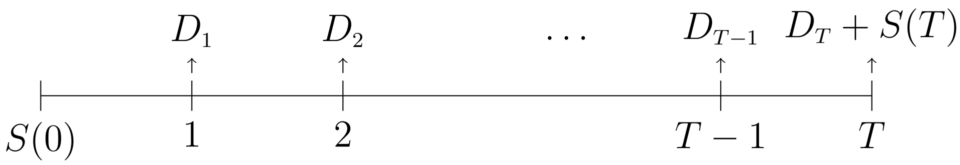


ថ្លៃដែលវិនិយោគិនសុខចិត្តបង់សម្រាប់ភាគហ៊ុនថ្ងៃនេះ ត្រូវបានឱ្យតម្លៃបច្ចុប្បន្ន នៃប្រាក់ចំណេញ អប្បហារសង្ឃឹមអនាគតនៅអត្រាធនលាភភាពដែលតម្រូវសមរម្យ។

ឧបមាថា អត្រាធនលាភភាពដែលតម្រូវ សមរម្យជាត្រីមាសគឺ k គេបានរូបមន្តទូទៅសម្រាប់ថ្លៃនៃភាគហ៊ុនថ្ងៃនេះគឺ

$$S(0) = \frac{D_1}{(1+k)^1} + \frac{D_2}{(1+k)^2} + \dots$$

$$\boxed{\text{ឬ} \quad S(0) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+k)^t}} \qquad (៧.៣)$$



រូបមន្តបញ្ច្រាសសម្រាប់ថ្លៃភាគហ៊ុនថ្ងៃនេះ

$$S(0) = \frac{D_1}{(1+k)^1} + \frac{D_2}{(1+k)^2} + \dots + \frac{D_{T-1}}{(1+k)^{T-1}} + \frac{D_T + S(T)}{(1+k)^T}$$

$$\boxed{\text{ឬ} \quad S(0) = \sum_{t=1}^{T} \frac{D_t}{(1+k)^t} + \frac{S(T)}{(1+k)^T}} \qquad (៧.៤)$$

ទ្រឹស្តីបទ ៧.៤.២. ទ្រឹស្តីបទភាគហ៊ុនធម្មតា បើតម្លៃនៃ ចំណែកភាគហ៊ុននៃភាគហ៊ុន ធម្មតា (៧.៣) នោះថ្លៃអាចសរសេរជា (៧.៤)

ឧទាហរណ៍ ៧.៤.៦. Helen Kendrick សង្ឃឹមទទួលបានប្រាក់ចំណេញ $\$1.50$ ក្នុងទឹកប្រាក់នៅចុងបញ្ចប់នៃ៤ត្រីមាស នីមួយៗបន្ទាប់និង $\$1.75$ នៅចុងនៃ៤ត្រីមាសនីមួយៗ។ លើសពីនេះ នាងរំពឹងថា អាចលក់ភាគហ៊ុននោះ ក្នុងតម្លៃ $\$94.50$ នៅចុងឆ្នាំទី២។ បើអត្រា ធនលាភភាព ដែលត្រូវការគឺ 0.025 តើថ្លៃប៉ុន្មានដែលនាងបង់សម្រាប់ភាគហ៊ុន?

ដំណោះស្រាយ

$$T = 8, D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = 1.5$$

$$D_5 = D_6 = D_7 = D_8 = 1.75$$

$$k = 0.025 \quad \& \quad S(T) = \$94.50$$

ជំនួសក្នុងសមីការ (៧.៤) គេបាន

$$S(0)=\sum_{t=1}^{4}\frac{1.5}{(1.025)^t}+\sum_{t=5}^{8}\frac{1.75}{(1.025)^t}+\frac{94.5}{(1.025)^8}=89.168$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{Helen គួរតែបង់\$89.17 សម្រាប់ភាគហ៊ុន}}$

ទ្រឹស្តីបទ ៧.៤.៣. ការកើនឡើងនូវចំនួនថេរ
បើប្រាក់ចំណេញកើនឡើង អាស្រ័យលើ $D_n=D_0(1+g)^n$ ដែល g ជា អត្រាប្រាក់ចំណេញកើនឡើង ជាត្រីមាស(គិតជាទសភាគ)
បើ $k>g\Rightarrow S(0)=D_0\dfrac{1+g}{k-g}$
គេមាន

$$\begin{aligned}S(0)&=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{D_0(1+g)^t}{(1+k)^t}\\&=D_0\left(\frac{1+g}{1+k}\right)^t=D_0\left(\frac{1+g}{1+k}\right)\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1+g}{1+k}\right)^t\qquad\text{ជាស៊ីតធរណីមាត្រ}\end{aligned}$$

ព្រោះ $k>g\Rightarrow\left(\dfrac{1+g}{1+k}\right)<1$ នោះសេរីរួម

$$\Rightarrow S(0)=D_0\left(\frac{1+g}{1+k}\right)\frac{1}{1-\left(\frac{1+g}{1+k}\right)}=D_0\left(\frac{1+g}{k-g}\right)$$

ឧទាហរណ៍ ៧.៤.៧. ក្រុមហ៊ុនមួយទើបតែ បានបង់ប្រាក់ចំណេញ \$2.25 និង ប្រាក់ចំណេញអនាគតត្រូវបាន រំពឹងថាកើនឡើងនៅអត្រា 1% ជាត្រីមាស។ បើអត្រាធនលាភភាពជាត្រីមាសលើភាគហ៊ុនរបស់ក្រុមហ៊ុនគឺ 2% នោះតើថ្លៃប៉ុន្មានដែលវិនិយោគិនគួរបង់សម្រាប់ភាគហ៊ុន?

ដំណោះស្រាយ

$$D_0=2.25\ \ ,g=0.01\ \ ,k=0.02$$

នោះ $k>g\ \Rightarrow S(0)=D_0\left(\dfrac{1+g}{k-g}\right)=2.25\left(\dfrac{1.01}{0.01}\right)=\$227.25$
ដូចនេះ $\boxed{\text{វិនិយោគិនគួរតែបង់ \$227.25}}$

⋆ **ហានិភ័យ**

- តើយើងវាស់ហានិភ័យរបស់ភាគហ៊ុនដោយរបៀបណា?
- តើយើងប្រើការវាស់ហានិភ័យដើម្បីគណនាអត្រាអប្បហារត្រឹមត្រូវដោយរបៀបណា?

ហានិភ័យអាចត្រូវបានប៉ាន់ ប្រមាណបានដោយការប្រើចំនួន នៃការវាស់ស្ទង់ដូចជា រ៉ង់ (Range) គម្លាតមធ្យមដាច់ខាត (Mean absolute deviation) ប្រូបាបនៃធនលាភភាពអវិជ្ជមាន (Probability of negative return) ពាក់កណ្តាលវ៉ារ្យង់ (Semi variance) និងគម្លាតស្តង់ដា (standard deviation) នៃធនលាភភាពលើភាគហ៊ុន។ តាង

- R_s ជាធនលាភភាព
- S ជាតម្លៃដែលអាចទៅរួចលើភាគហ៊ុន $\Rightarrow 1 < s < S$
- P_s ជាប្រូបាបនៃ R_s គឺ $R_1, R_2, ..., R_s$
- R ជាអថេរចៃដន្យដែលផ្តល់ធនលាភភាពនៃភាគហ៊ុន នោះតម្លៃដែលអាចទៅរួចលើភាគហ៊ុន R គឺ $R_1, R_2, \cdots, R_s$
- ធនលាភភាពសង្ឃឹមលើភាគហ៊ុនគឺ $E(R) = \sum_{s=1}^{S} P_s R_s$
- រ៉ង់ $range = \max_{s\in S} R_s - \min_{s\in S} R_s$
- គម្លាតមធ្យមដាច់ខាត $MAD = \sum_{s=1}^{S} P_s \left|R_s - E(R)\right|$
- ប្រូបាបនៃធនលាភភាពអវិជ្ជមាន $= \sum_{s=1}^{S} P_s 1_{R_s<0}$
- ពាក់កណ្តាលវ៉ារ្យង់ $semi\,\mathrm{var} = \sum_{s=1}^{S} P_s [R_s - E(R)]^2 1_{R_s<E(R)}$
- គម្លាតស្តង់ដា $\sigma = \sqrt{\sum_{s=1}^{S} P_s [R_s - E(R)]^2}$, σ^2 ជាវ៉ារ្យង់នៃ R

សំគាល់ បើ X ជាអថេរចៃដន្យ ហើយ $X \subset A$ ជាព្រឹត្តិការណ៍នោះ Indicator Variable $1_{x\subset A}$ ត្រូវបានកំណត់ដោយ

$$1_{X\subset A} = \begin{cases} 1 & , X \subset A \\ 0 & , X \not\subset A \end{cases}$$

ឧទាហរណ៍ ៧.៤.៨. ឧបមាថាការវិនិយោគមួយ មានអត្រាធនលាភភាពអាច ទៅរួចប្រចាំឆ្នាំ ធនលាភភាពនៃ 0.10 ជាមួយនឹងប្រូបាប 0.50 0.15 នៃធនលាភភាពជាមួយនឹងប្រូបាប 0.30

និងធនលាភភាពនៃ -0.05 (ខាត 5%) ជាមួយនឹងប្រូបាប 0.20 ។ បើយើងយក R ជាអត្រាធនលាភភាពប្រចាំឆ្នាំនោះ $P(R = 0.10) = 0.50, P(R = 0.15) = 0.30, P(R = -0.05) = 0.20$ ។ ចូររករង្វង់ ធនលាភភាពសង្ឃឹម គម្លាតមធ្យមដាច់ខាត ប្រូបាបនៃធនលាភភាពអវិជ្ជមាន ពាក់កណ្ដាលវ៉ារ្យង់ និងគម្លាតស្តង់ដា។

ដំណោះស្រាយ

$range = 0.15 - (-0.05) = 0.20$

$expected\ return:\ \ E(R) = 0.5(0.10) + 0.3(0.15) + 0.2(0.05) = 0.085$

$MAD = 0.5|0.10 - 0.085| + 0.3|0.15 - 0.085| + 0.2| - 0.05 - 0.085| = 0.054$

$The\ probability\ of\ a\ negative\ return\ is\ 0.2$

$semiva = 0.2(-0.05 - 0.085)^2 = 0.0036$

$\sigma = \sqrt{0.5(0.10 - 0.085)^2 + 0.3(0.15 - 0.085)^2 + 0.2(-0.05 - 0.085)^2} = 0.0709$

ហានិភ័យចែកចេញជា ២ប្រភេទគឺ

- **ហានិភ័យជាប្រព័ន្ធ** (Systematic Risk)ជាហានិភ័យដែលមានឥទ្ធិពលនាំឱ្យមានហានិភ័យលើភាគហ៊ុនទាំងអស់។
- **ហានិភ័យមិនជាប្រព័ន្ធ** (Unsystematic Risk) ជាហានិភ័យដែលកើតឡើងតែមួយគត់លើក្រុមហ៊ុនមួយ។ ហានិភ័យនេះមានដូចជាប្រភេទ បណ្ដឹង កូដកម្ម ការប្រកួតប្រជែង និងការប្ដូរអតិថិជនសំខាន់។

មេគុណកូរីឡាស្យុង(Correlation Coefficient)

- $R_{is}\&R_{js}$ ជាធនលាភភាពលើភាគហ៊ុន $i\&j$
- S ជាតម្លៃដែលអាចទៅរួច $\Rightarrow 1 < s < S$
- P_s ជាប្រូបាបនៃ $R_{is}\&R_{js}$
- $E(R_i)\&E(R_j)$ ជាធនលាភភាពសង្ឃឹមលើភាគហ៊ុន $i\&j$
- σ_i, σ_j ជាគម្លាតស្តង់ដានៃធនលាភភាពលើ ភាគហ៊ុន $i\&j$

$$\rho_{ij} = \frac{\sum_{s=1}^{S} P_s\left[R_{is} - E(R_i)\right]\left[R_{js} - E(R_j)\right]}{\sigma_i\sigma_j}$$

ឧទាហរណ៍ ៧.៤.៩. បន្ថែមលើ ឧទាហរណ៍(៧.៤.៨) ឧបមាថា មានការវិនិយោគលើកទី២ នៅអត្រាធនលាភភាពប្រចាំឆ្នាំ U មានទំនាក់ទំនងជាមួយ R ដែល

$$P(R=0.10\ ,U=0.15)=0.50, P(R=0.15\ ,U=0.20)=0.30,$$
$$P(R=-0.05\ ,U=-0.10)=0.20$$

រកមេគុណកូរីឡាស្យុង ρ_{RU}

ដំណោះស្រាយ

$$\begin{aligned}
E(U) &= 0.5(0.15)+0.3(0.20)+0.2(-0.10)=0.115\\
\sigma &= \sqrt{0.5(0.15-0.115)^2+0.30(0.20-0.115)^2+0.2(-0.10-0.115)^2}\\
&= 0.1097\\
\rho_{RU} &= \frac{1}{0.0709(0.1097)}[0.5(0.10-0.085)(0.15-0.115)\\
&\quad +0.3(0.15-0.085)(0.20-0.115)\\
&\quad +0.2(-0.05-0.085)(-0.10-0.115)]\\
&= 0.993
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\rho_{RU}=0.993}$

- បើមេគុណកូរីឡាស្យុងរវាងធនលាភភាព របស់ភាគហ៊ុនពីរស្មើ -1 នោះហានិភ័យអាចត្រូវបានបំបាត់តាមរយៈការធ្វើវាឱ្យដាច់គ្នា។
- បើមេគុណកូរីឡាស្យុងរវាងធនលាភភាព របស់ភាគហ៊ុនពីរស្មើ 1 នោះហានិភ័យមិនអាចត្រូវបានបំបាត់តាមរយៈការធ្វើវាឱ្យដាច់គ្នាបានទេ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

លំហាត់ ៧.១. ប្រើInternetដើម្បីរកពត៌មាន *Microsoft* ខាងក្រោម៖

១. តើថ្ងៃដំបូងភាគហ៊ុនរបស់ *Microsoft* ត្រូវបានធ្វើជំនួញជាសាធារណៈយ៉ាងដូចម្ដេច?

២. តើថ្លៃ *Microsoft* ខ្ពស់បំផុត ប៉ុន្មានពីកាលបរិច្ឆេទក្នុង ១) រហូតដល់ឥឡូវ? (សំគាល់ថាមានការបែងចែកភាគហ៊ុនមួយចំនួនក្នុងកំឡុងពេលនេះ។ តើ″ថ្លៃខ្ពស់បំផុត″មានន័យដូចម្ដេចក្នុងបរិបទនេះ?)

លំហាត់ ៧.២. *Helen Kendrick* ទិញភាគហ៊ុនចំនួន 10 ក្នុងមួយដងរយៈពេល 1 ខែសម្រាប់រយៈពេល 4 ខែ។ *Hugh Kendrick* ទិញភាគហ៊ុនក្នុងតម្លៃ 100$ ក្នុងខែនីមួយៗនៅ រយៈពេលដូចគ្នាដូចគ្នា នឹង *Helen Kendrick*។ តើអ្នកណាគួរតែមានតម្លៃភាគហ៊ុនទាបជាង បើថ្លៃភាគហ៊ុនប្ដូរនៅក្នុងកំឡុងពេល 4 ខែ? បញ្ជាក់បើថ្លៃភាគហ៊ុន 20$, 21$, 22$, 23$ ក្នុងរយៈពេល 4 ខែ។

លំហាត់ ៧.៣. នៅពេលណា ដែលធ្វើឱ្យ ការលក់ភាគហ៊ុន នូវចំនួនថេរលើគោល ទៀងទាត់ប្រសើរជាងការប្រើមធ្យមតម្លៃ ប្រាក់ដុល្លាបើមនុស្សម្នាក់គឺកំពុងលក់ ភាគហ៊ុន? *Helen Kendrick* ទិញភាគហ៊ុនចំនួន 100 លើ *margin*។ បើ *margin requirement* គឺ 50% បើ *maintenance requirement* គឺ 25% និងបើភាគហ៊ុនកំពុងលក់តម្លៃ 30$ ក្នុងមួយហ៊ុន នោះនាងនឹងទទួល *maintenance call* នៅថ្លៃប៉ុន្មាន? បង្កើតតារាងស្រដៀងគ្នានឹងតារាង ខាងក្រោមជាមួយនឹងថ្លៃភាគហ៊ុនគឺ 30$, 25$, 15$, 10$ ៖

ថ្លៃ	ចំនួនភាគហ៊ុន	តម្លៃទីផ្សារ	*Debit balance*	*Equity*	*Required Equity*	*Margin Equity*
20$	500	10000$	5000$	5000$	2500$	5000$
15$	500	7500$	5000$	2500$	1875$	3750$
10$	500	5000$	5000$	0$	1250$	2500$

លំហាត់ ៧.៤. តាមលំហាត់ទី *Hugh Kendrick* ជឿថាថ្លៃភាគហ៊ុននឹងធ្លាក់ចុះលក់ រយៈពេលខ្លី 100 ភាគហ៊ុន។ បើ *maintenance requirement* សម្រាប់ការលក់រយៈពេលខ្លីគឺ នោះតើ *Hugh* នឹងទទួល *maintenance call* នៅថ្លៃប៉ុន្មាន? បង្កើតតារាងស្រដៀងនឹងតារាង ខាងក្រោមជាមួយនឹងថ្លៃហ៊ុន 30$, 35$, 40$, 45$, 50$ ៖

Credit balance	តម្លៃក្នុងមួយភាគហ៊ុន	ចំនួនភាគហ៊ុន	តម្លៃទីផ្សារ	*Equity*	*Required Equity*
$7500	$50	100	$5000	$2500	$1500
$7500	$60	100	$6000	$1500	$1800
$7800	$60	100	$6000	$1800	$1800

លំហាត់ ៧.៥. យក $S(t)$ ជាថ្លៃនៃ XYZ នៅរយៈពេល t ក្នុងមួយខែ។ ឧបមាថា $S(1) = 10, S(2) = 15, S(3) = 18, S(4) = 20 \& S(5) = 24$ ។ *Wendy* និង *Tom Kendrick* លក់ 100 ភាគហ៊ុនដូចគ្នានៅរយៈពេល $t = 1$ ។ បង្ហាញថា *Tom* មានប្រាក់ចំណេញនៅរយៈពេល $t = 5$ ច្រើនជាង *Wendy* ដែលប្រើមធ្យមតម្លៃប្រាក់ដុល្លាជារៀងរាល់ខែ បើគាត់ទិញ 100 ភាគហ៊ុននៅពេលវេលានីមួយៗ $t = 1, 2, 3, 4, 5$ ។
តើនេះផ្ទុយពីមធ្យមតម្លៃដុល្លាត្រូវបានពិភាក្សាដូចម្ដេច? ចូរពន្យល់។

លំហាត់ ៧.៦. *Hugh Kendrick* លក់រយៈពេលខ្លី 100 ភាគហ៊ុនលើ *margin*។ បើ *margin requirement* គឺ 50% *maintenance requirement* សម្រាប់ការលក់រយៈពេលខ្លីគឺ 30% ហើយ បើភាគហ៊ុនត្រូវបានលក់ 60$ នៅក្នុងមួយភាគហ៊ុន នោះភាគហ៊ុនបន្ថែមប៉ុន្មានដែល *Hugh* លក់រយៈពេលខ្លី បើថ្លៃហ៊ុនធ្លាក់ដល់ 55$ ក្នុងមួយភាគហ៊ុន? ចូរបង្កើតតារាងត្រឹមត្រូវមួយជាមួយនឹងថ្លៃភាគហ៊ុន $\$60, \$55, \$50, \$45 \& \$40$ ។

លំហាត់ ៧.៧. តារាងខាងក្រោមផ្ទុកទិន្នន័យលើភាគហ៊ុនបី

	31/12/98	31/3/99	30/6/99	30/9/99	31/12/99
ថ្លៃ S	25	27	28	28	28
T	30	32	33	35	33
U	40	42	43	45	43
ភាគហ៊ុន S	100	200	200	200	200
បានចេញ T	500	500	500	500	500
U	300	450	450	550	550

- ប្រើវិធីសាស្ត្រ $DJIA$ ដើម្បីគណនា ថ្លៃសន្ទស្សន៍សម្រាប់ភាគហ៊ុន ទាំងបីចំពោះពេលវេលានីមួយៗ។
- គណនាថ្លៃសន្ទស្សន៍ជាគម្រូក្រោយ $S\&P500$

- គណនាមធ្យមធនលាភភាព ពិជគណិត និង ធរណីមាត្រ ជាត្រីមាសចំពោះ ស៊េរីធនលាភភាពនីមួយៗ។

លំហាត់ ៧.៨. បើ $x_i > 0$ ចំពោះ $i = 1, 2, \cdots, n$ នោះចំពោះ $n \geqslant 2$ មធ្យមពិជគណិតរបស់វាគឺ $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

១. ចំពោះតម្លៃ d ប៉ុន្មានដែល $\dfrac{1}{d}(x_i + ... + x_{j-1} + \dfrac{1}{2}x_j + x_{j+1} + ... + x_n) = \overline{x}$

២. យក $a, b\&d_1$ ជាចំនួនវិជ្ជមាន ហើយយក d_2 នោះ $\dfrac{a+b}{d_1} = \dfrac{a+\frac{1}{2}b}{d_2}$

  (ក) សរសេរ d_2 ជាអនុគមន៍នៃ $a, b\&d_1$

  (ខ) បង្ហាញថា $\dfrac{1}{2}d_1 < d_2 < d_1$

៣. តើលទ្ធផលពីផ្នែក១)និង២)មាន ទំនាក់ទំនងនឹងការគណនា $DJIA$ ដូចម្ដេចខ្លះ?

លំហាត់ ៧.៩. គណនាភាគរយការកើនឡើងក្នុង $DJIA, S\&P500, NASDAQ$ សន្ទស្សន៍សមាសធាតុពី $1980 \to 2005$ ។

ជំពូកទី ៨

វិធីសាស្ត្រចៃដន្យក្នុងរយៈពេលដាច់

៨.១. ស្វ៊ីតនៃអថេរចៃដន្យ

៨.១.១. សញ្ញាណស្វ៊ីតនៃអថេរចៃដន្យ

ស្វ៊ីតមួយនៃអថេរចៃដន្យត្រូវបានគេប្រើធម្មតាជាគម្រូគណិតវិទ្យានៃលទ្ធផលដែលជាស៊េរីនៃព្រឹត្តិការណ៍ចៃដន្យដូចជាការបោះកាក់ ឬថ្លៃហ៊ុន $FTSE$ ទាំងអស់ ចៃករំលែក នៅទីក្រុងឡុងនៅផ្សារហ៊ុននៅថ្ងៃជាប់គ្នា។ អថេរចៃដន្យដូចជា ស្វ៊ីតមួយ ត្រូវដាក់បញ្ចូល ដោយលេខទាំងអស់ដែលត្រូវបានហៅថារយៈពេលដាច់ពីគ្នា $Discrete\,time\,i.e.\ n = 1,\,2,\,\cdots$ ។ វាជាការសំខាន់ក្នុងការយល់ថាលេខទាំងនេះ មិនត្រូវបាន ទាក់ទងនឹង រយៈពេលជាក់ស្តែង នៅពេលដែលព្រឹត្តិការណ៍ នេះយកគម្រូតាមស្វ៊ីត ដែល កើតមានឡើង។ **រយៈពេលដាច់ពីគ្នា** ត្រូវបានប្រើដើម្បីរក្សាលំដាប់នៃព្រឹត្តការណ៍ដែលអាច ឬមិនអាច ជាលំហាំរាប់ស្មើ នៅខណៈ ពេលជាក់ស្តែង។

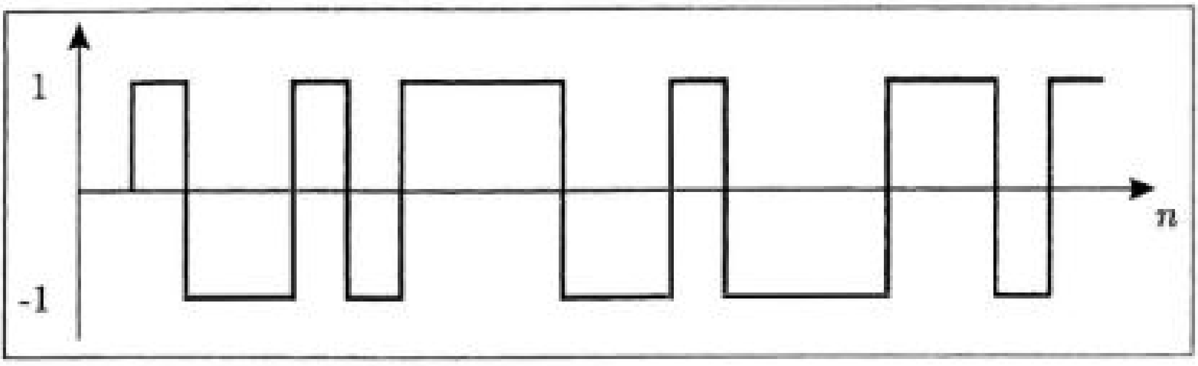
ឧទាហរណ៍ ៨.១.១. សន្ទស្សន៍ភាគហ៊ុន ត្រូវបានកត់ត្រានៅតែថ្ងៃធ្វើការប៉ុណ្ណោះ ប៉ុន្តែមិនមែននៅថ្ងៃសៅរ៍ អាទិត្យ ឬថ្ងៃឈប់សម្រាកផ្សេងទៀតទេក៏ដូចជា ការបោះកាក់ម្តងហើយម្តងទៀតយើង ក៏អាចបោះ កាក់ផងដែរនៅរយៈពេលតែមួយ និង រាប់លទ្ធផល ដែល ទទួលបាន។

៨.១.២. និយមន័យ

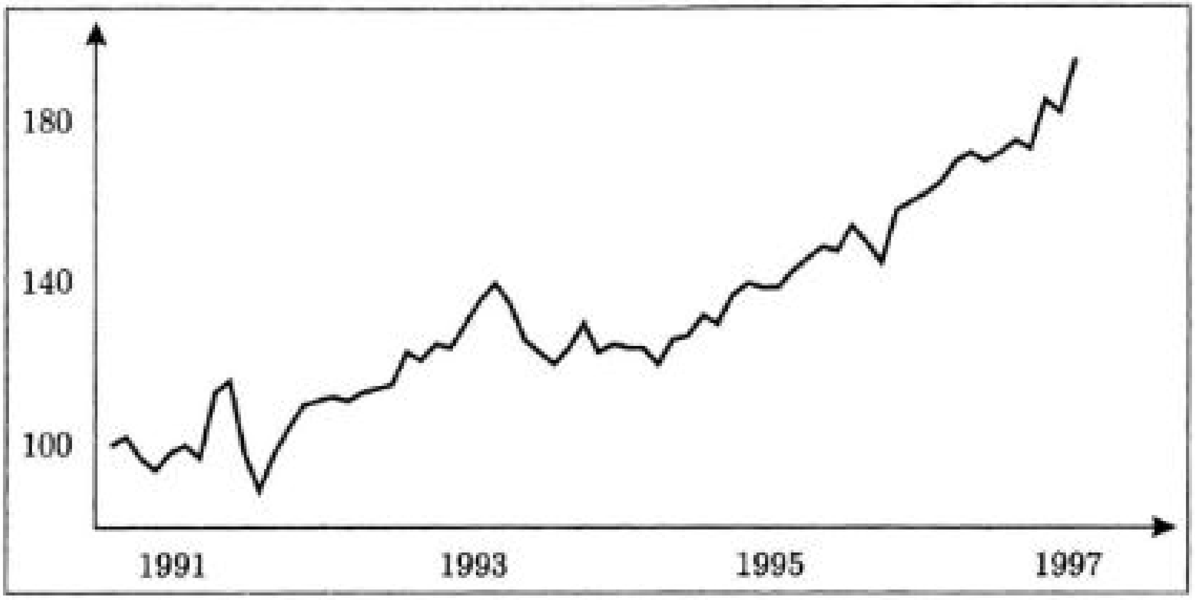
និយមន័យ ៨.១.១. ស្វ៊ីតនៃចំនួនមួយ $\xi_1\,(w)\,,\xi_2\,(w)\,,\cdots$ សម្រាប់ថេរណាមួយ $w \in \Omega$ ត្រូវបានហៅថាគន្លងគម្រូ។

- គន្លងគម្រូមួយសម្រាប់លំដាប់ស្វ៊ីតនៃការបោះកាក់មួយ ត្រូវបានបង្ហាញនៅក្នុងរូបភាព (៨.១) ($+1$ តំណាងឱ្យមុខ និង -1 តំណាងឱ្យខ្នង)។
- រូបភាព (៨.២) បង្ហាញពីគន្លងគម្រូនៃ ភាគហ៊ុន $FTSE$ ទាំងអស់ ដែលមានសន្ទស្សន៍ឡើងដល់ ១៩៨៧។

រូបភាពដែលបានបង្ហាញគួរ តែមានចំនុចដែលតំណាងឱ្យតម្លៃ $\xi_1(w), \xi_2(w), \cdots$ ប៉ុន្តែវាជាទម្លាប់ដើម្បីភ្ជាប់ពួកគេ ដោយ បន្ទាត់ដាច់ក្នុងគោលបំណងពន្យល់ឱ្យកាន់តែច្បាស់លាស់។



រូប ៨.១. គន្លងគម្រូស៊ីតនៃការបោះកាក់



រូប ៨.២. គន្លងគម្រូតំណាងអោយភាគហ៊ុន $FTSE$ ទាំងអស់ដែលមានសន្ទស្សន៍ឡើងដល់ 1997

៨.២. សំនុំពត៌មានដែលបានដឹងពីអតីតកាល

៨.២.១. សំនុំព័ត៌មានដឹងពីអតីតកាលនៅក្នុងលំហប្រូបាប៊ីលីតេ

៨.២.១.១. និយមន័យ

នៅពេល ដែលរយៈពេលកើនឡើងនោះ ជាព័ត៌មាន របស់យើង ពីអ្វី ដែលបានកើតឡើងនៅក្នុងអតីត កាល។

នេះត្រូវបានយកជាគម្រូដោយ "**សំនុំពត៌មានដែលបានដឹងពីអតីតកាល** (*Filtrations*)" ដូចដែលបានកំណត់ដូចខាងក្រោម៖

និយមន័យ ៨.២.១. ស្វ៊ីតមួយនៃកាយ σ : $F_1, F_2, \cdots$ នៅលើសំណុំ Ω ដែល $F_1 \subset F_2 \cdots \subset F$ ត្រូវបានហៅថា *Filtrations* ។

ដែល F_n តំណាងឱ្យពត៌មានរបស់យើងនៅរយៈពេល n ដែលផ្ទុកគ្រប់ព្រឹត្តិការណ៍ A ទាំងអស់ ដូចនេះ នៅរយៈពេល n វាអាចសម្រេចចិត្តបានថាតើ A បានកើតឡើងឬអត់ ។ (អ្នករស់នៅបានយូរប៉ុណ្ណានោះពត៌មានដែលអ្នកទទួលបាន ប៉ុណ្ណោះដែរ)

ឧទាហរណ៍ ៨.២.១. សម្រាប់ស្វ៊ីតមួយនៃការបោះកាក់ $\xi_1, \xi_2, \cdots$ យើងយក F_n ជាកាយ σ បន្សំដោយ $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n$, $_n = \sigma(\xi_1, \xi_2, ...\xi_n)$

គេឱ្យ A = ការបោះកាក់ 5 ដងដំបូង ទទួលបានលទ្ធ ផលយ៉ាងហោចណាស់ខាងមុខចំនួន 2 លើក

- នៅរយៈពេលដាច់ $n = 5$ មានន័យថាពេលដែលកាក់ត្រូវបានបោះ 5 ដង នោះវានឹងអាចសម្រេចចិត្ត ថាតើ A បាន កើតឡើង ឬអត់។ នេះមានន័យថា $A \in F_5$ ។ នេះមិនមានន័យថា នៅខណៈពេល $n = 4$ វាមិនតែងតែ អាចបកស្រាយថា A អាច កើតឡើង ឬ មិនបានកើតឡើង ទេ។ ប្រសិនបើជាលទ្ធផល នៃការបោះកាក់ ចំនួន 4 ដង ដំបូងចេញលទ្ធផលជា ខ្នង ខ្នង មុខ ខ្នង នោះ ព្រឹត្តិការណ៍ A នេះមិនទាន់មានការសម្រេចចិត្តទេ។ យើងនឹងធ្វើការបោះកាក់ម្តងទៀតជាថ្មីដើម្បី មើលថាមានអ្វីកើតឡើងនោះគឺ $A \notin F_4$។
- ឧទាហរណ៍ (៨.២.១) នេះបង្ហាញពី បញ្ហាដែលពាក់ព័ន្ធ ផ្សេងទៀត។ ឧបមាថា លទ្ធផលនៃការបោះ កាក់ 4 ដងដំបូងគឺ ខ្នង មុខ ខ្នង មុខ។ ក្នុងករណីនេះ វាអាចប្រាប់ថាព្រឹត្តិការណ៍បានកើតឡើងរួចទៅហើយនៅខណៈពេល $n = 4$ តែយ៉ាងណា ក៏ដោយ លទ្ធផលនៃការបោះកាក់លើកទី 5 នឹង អាចកើតមាន។ វាមិនមានន័យថា មួយជារបស់ព្រឹត្តិការណ៍ $A \in F_4$ ។ ចំនុចនោះគឺ ដើម្បីឱ្យ $A \in F_4$ ត្រូវតែអាចប្រាប់ថាតើ A បានកើតឡើង ឬមិនបានកើតឡើង បន្ទាប់ពីការបោះកាក់ 4 ដងដំបូងមិនថា លទ្ធផលនៃការបោះកាក់ 4 ដងដំបូង នោះយ៉ាងមិចទេ។ នេះជាការបញ្ជាក់យ៉ាង ច្បាស់ពីឧទាហរណ៍។

៨.២.១.២. វិធីសាស្ត្រសម្របសម្រួល និងការព្យាករណ៍

- ព័ត៌មានដែលបានមកពីវិធីសាស្ត្រថៃជន្យ X មួយគឺជាកើនឡើងនៃរយៈពេល ហើយយើងត្រូវការនូវ អត្ថន័យ ឱ្យច្បាស់ពី " កុំបំភ្លេច ពីអ្នកតំណាង ខាងជំនួញ" និង "$X(t)$ មិនមែន

អថេរចៃដន្យបន្ទាប់ពីថ្ងៃ t" ។ យើងធ្វើការពិចារណា ពីថ្លៃហ៊ុនអនាគត របស់ IBM ដែលជាវិធីសាស្រ្តចៃដន្យ នោះគឺជាស្វ៊ីតនៃ អថេរចៃដន្យ។ នៅថ្ងៃដែល អ្នកវិនិយោគ ធ្វើការសង្កេតអំពីថ្លៃហ៊ុន $X(t)$ ហើយ $X(t)$ នឹងមិនផ្លាស់ ប្តូរនៅថ្ងៃ $t+1$ (វា នឹងក្លាយជា $X(t+1)$ សម្រាប់ ថ្ងៃអនាគត)។ វា មានន័យថា $X(t)$ គឺជា អថេរចៃដន្យ កើននៅថ្ងៃ t ហើយនឹងក្លាយជាចំនួនថេរ (ឬជាអថេរចៃដន្យថេរ)បន្ទាប់ពីថ្ងៃ t។

- បើ $F = \{F_1, F_2, \cdots, F_T\}$ បកស្រាយអំពីការវិវត្តន៍នៃព័ត៌មានលើសម៉ោង នោះ F_t គឺជា បញ្ជីនៃព្រឹត្តិការណ៍នៅ ថ្ងៃ T ដែលអ្នកដឹងថាវាត្រូវ ឬខុស។ $X_t \leqslant 100$ ពិត ឬមិនពិត ដែល X_t គឺជាថ្លៃហ៊ុន IBM ។ វាមានន័យថា គឺជារង្វាស់ ធៀបទៅនឹង F_t (វាផ្ទៀងផ្ទាត់ទៅគ្រប់ថ្ងៃ t)

និយមន័យ ៨.២.២. យើងថាស្វ៊ីតនៃអថេរចៃដន្យមួយ $\xi_1, \xi_2, \cdots$ ត្រូវបានផ្លាស់ប្តូរស្របជាទម្រង់ $F_1, F_2, \cdots$ បើ ξ_n ជារង្វាស់ F_n $(F_n - measurable)$ សម្រាប់ $F_1, F_2, \cdots$ ។

ឧទាហរណ៍ ៨.២.២. បើ $F_n = \sigma(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ ជាកាយ σ បន្សំដោយ $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ នោះ $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ ត្រូវបានប្តូរទៅជា $F_1, F_2, \cdots$។

និយមន័យ ៨.២.៣. វិធីចៃដន្យមួយ $X = \{X_1, X_2, \cdots, X_T\}$ គឺ ការជាព្យាករណ៍បើ $\forall t \geqslant 1,\ X_t$ គឺ ជារង្វាស់ F_{t-1} ។

ឧទាហរណ៍ ៨.២.៣. វិធីសាស្រ្តចៃដន្យផ្សេងទៀត ដែលជាចំនួនគឺ ជាធម្មជាតិនៃការព្យាករណ៍ដែល ពិចារណាទៅលើ ទីផ្សារដែលវាអាចធ្វើការវិនិយោគនៅថ្ងៃនិមួយៗ និង សម្រាប់ កំឡុងពេល ប្រាក់កើនទ្វេដង (ការសន្សំប្រាក់ក្នុងគណនី)។

- តាង r_t ជាអត្រារបស់ធនលាភភាពជាសាច់ប្រាក់ ក្នុងគណនីនេះ សម្រាប់កំឡុងពេល $[t; t+1]$
- និង B_t ជាចំនួនដែលផ្ទុកនៅថ្ងៃ ដោយធ្វើការវិនិយោគ $1\$$ នៃប្រាក់ នៅក្នុងគណនីសន្សំប្រាក់ចាប់ពីថ្ងៃ 0 ។

ដោយ r_t គឺត្រូវបានដឹងនៅថ្ងៃ t ហើយដំណើរការ r គឺត្រូវការប្តូរ ទៅតាម សំនុំ ព័ត៌មាន F ដែលមានការ ពន្យល់ពីការបញ្ជាក់ " កំណើនទ្វេដងតាមតំបន់ " (មានតែកំឡុងពេលមួយនៃកំណើនទ្វេរដង)។ បន្ទាប់មក ដំណើរការ B គឺជាការព្យាករណ៍។

ជាការពិត វាអាចសរសេរ

$$\boxed{B_t = \prod_{s=0}^{t-1}(1+r_s)} \qquad (៨.១)$$

ដែល B_t ត្រូវបានដឹងនៅថ្ងៃ $t-1$ នោះគឺជារង្វាស់ F_{t-1}

៨.៣. សេចក្តីផ្តើមនៃវិធីសាស្ត្រចៃដន្យ

៨.៣.១. និយមន័យ

វិធីសាស្ត្រចៃដន្យមួយដាច់នៅក្នុងលំហទាំងពីរ ហើយរយៈពេលគឺជាស៊ីតនៃ អថេរចៃដន្យ នោះកំនត់លើលំហាគម្រូដូចគ្នា (គឺពួកគេជាបំណែងចែករួមគ្នា) $\{X_0, X_1, \cdots\}$ ដែលតម្លៃសរុប នៃ X_t ទាំងអស់បន្សំ ជាទម្រង់សំនុំដាច់។
តម្លៃខុសៗគ្នានៃ $X(t)$ ទាំងអស់ហៅថា **ស្តេតនៃវិធីសាស្ត្រចៃដន្យ**។

និយមន័យ ៨.៣.១. វិធីសាស្ត្រចៃដន្យមួយក្នុងរយៈពេលដាច់ គឺ ជាសំណុំគ្រួសារនៃអថេរចៃដន្យ $X(t)$ កំនត់សរសេរដោយ $\{X(t), t\in T\}$ ត្រូវបានកំណត់លើលំហាគម្រូ Ω ដែល $D_T \subseteq R(N,\ N_0,\ Z,\ [0,+\infty))$ ដោយ $t\in T$ (t ជារយៈពេលដាច់ $t=0,1,2,\cdots$)។

- យើងបានកំនត់សម្គាល់ថា $\forall\omega$ នៅក្នុងលំហាគម្រូ Ω នោះត្រូវបានកំណត់ហៅថា អនុគមន៍គម្រូ $T(.,\omega)\ :T\to R$ លើដែនកំណត់ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ T
- នៅក្នុងការបកស្រាយវិធីសាស្ត្រចៃដន្យដែលយើង ត្រូវតែយល់ដឹងពីបំនែងចែកអនុគមន៍នៃវិធីសាស្ត្រចៃដន្យមានន័យថា

$$P\{X(t_1)\leqslant x_1 \wedge X(t_2)\leqslant x_2 \wedge \ldots \wedge X(t_n)\leqslant x_n\}$$

ដែល $\forall t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$ និង $\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in R,\ \ n\in N$

$\star$ ករណីពិសេសសំខាន់ខ្លាំងណាស់ បានកើតឡើងនៅពេលអថេរចៃដន្យ $X(t)$ មានតម្លៃ ដាច់ទាំងអស់នៅក្នុង N_0 ។ នៅក្នុងករណីបើ $X(t)$ នោះគេនិយាយថាវិធីសាស្ត្រនៅខណៈពេល t គឺជាស្តេត E_k។

យើងត្រូវបានចាប់អារម្មណ៍នៅក្នុងការយល់ដឹង អំពីបន្លាស់ប្តូរនៃវិធីសាស្ត្រនេះ។ វិធីមួយដើម្បីបកស្រាយពីវត្ថុអ្វីមួយ គឺត្រូវធ្វើដើម្បីគិតថាតើ $X(t)$ អាស្រ័យលើ $X_0, X_1, \cdots, X_{t-1}$ ឬទេ?

ឧទាហរណ៍ ៨.៣.១. គេឱ្យ W_t ជាជំហានចៃដន្យ នៅខណៈពេល t_0, $W_0 = 0$ ហើយនៅខណៈពេលនិមួយៗនោះ ជំហានចៃដន្យមានប្រូបាប៊ីលីតេ p នៃជំហានខាងឆ្វេង និង $1-p$ នៃជំហានខាងស្តាំ។ ដូចនេះ បើ នៅខណៈពេល t, $W(t) = k$ មានប្រូបាប៊ីលីតេ p នៃខណៈ $k-1$ និងប្រូបាប៊ីលីតេ $1-p$ នៃខណៈ $k-1$ ពេល $t+1$ ដែរ។ យើងអាចសរសេរជា៖

$$P\left(W\left(t+1\right)=j/W\left(t\right)=k\right)=\begin{cases} p & \text{បើ} \quad j=k-1 \\ 1-p & \text{បើ} \quad j=k-1 \\ 0 & \text{បើ} \quad j\neq k-1 \end{cases}$$

ជាទូទៅ សម្រាប់វិធីសាស្ត្រចៃដន្យ $X(t)$ យើងអាចបញ្ជាក់ថា

$$\left(X\left(t+1\right)=j/X_t=k_t\,,\,X_{t-1}=k_{t-1}\,,\,\ldots,X_0=k_0\right)$$

បើដូចជានៅក្នុងករណីជំហានចៃដន្យ

$$\boxed{P\left(X_{t+1}=j/X_t=k_t\,,X_{t-1}=k_{t-1}\,,\,\cdots\,,X_0=k_0\right)=P\left(X_{t+1}=j/X_t=k_t\right)} \tag{៨.២}$$

ទំនាក់ទំនងនេះហៅថា **ចង្វាក់ម៉ាកូវ** ។ យើងអាចសរសេរ៖

$$\boxed{P_{jk}=P\left(X_{t+1}=k/X_t=j\right)} \tag{៨.៣}$$

ដោយចំនួន P_{jk} ជាទម្រង់ម៉ាទ្រីស(ម៉ាទ្រីសមិនកំនត់ បើអថេរចៃដន្យ $X(t)$ មិនកំនត់) ត្រូវបានហៅថា **ប្រូបាប៊ីលីតេនៃម៉ាទ្រីសឆ្លុះ** កាលណាវាបំពេញលក្ខណៈ ៖

១. $P_{jk} \leqslant 0$

២. $\sum\limits_k P_{jk} = 1,\ \ \forall j$

ដែលម៉ាទ្រីស P_{jk} ដូចជាអ្វីដែលយើងធ្លាប់បានកំណត់មក វាប្រាប់យើងអំពី ថាតើ ប្រូបាប៊ីលីតេនៃជំហានដែល ផ្លាស់ពីលើកទីt ទៅលើកទី $t+1$ ស្មើប៉ុន្មាន។ ដូចនេះមានន័យថា P_{jk} ដំបូងអាស្រ័យលើ t។
បើវាមិនអាស្រ័យនោះ វិធីសាស្ត្រនេះអោយឈ្មោះថា វិធីសាស្ត្រ $Markov$។
ដោយធ្វើវាម្តងទៀត P_{jk} តាងឱ្យប្រូបាប៊ីលីតេ(ពីស្តេត $j \to k$) នៅជំហានមួយ។

ដូច្នេះ បើ X_n គឺជាវិធីសាស្ត្រម៉ាកូវ នោះ P_{jk} ជាព័ត៌មានតែមួយគត់ដែលបានដឹងនោះ គឺ P_{jk} ជាបំនែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេដើមនៃ X_0 ដែល $P_0(k) = P(X_0 = k)$ ។ សំណួរងាយគឺគេឱ្យ P_0 និង P_{jk} តើបំនែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ នៃ X_n ស្មើប៉ុន្មាន? ចុងបញ្ចប់ យើងណែនាំពី "ភាពស៊ីជម្រៅនៃប្រូបាប៊ីលីតេឆ្លង៖" ដែល $P_{jk}^{(t)} = P\left(X_t = k/X_0 = j\right)$ កៀកទៅស្មើនឹង $P\left(X_{t+m} = k/X_m = j\right)$ ជាប្រូបាប៊ីលីតេពី $j \to k$ ក្នុង t ជំហាន។ យើងបាន

សំណើ ៨.៣.១. $$\boxed{{P_{jk}}^{(t)} = \sum_h {P_{jh}}^{(t-1)} P_{hk}}$$

៨.៣.២. អនុគមន៍បង្ក

៨.៣.២.១. និយមន័យ

មុនពេលដល់ឧទាហរណ៍ យើងចង់ណែនាំពីតិចនិចសម្រាប់ធ្វើការ គណនាជាមួយអថេរចៃដន្យ។ គេឱ្យ X ជាអថេរ ចៃដន្យដាច់ដែល ស្តេត $State$ ជា ចំនួនគត់វិឡាទីប j ហើយមានបំនែងចែក $p(k)$។

យើងបាន

និយមន័យ ៨.៣.២. អនុគមន៍បង្ក គឺ

$$\boxed{F_X\left(t\right) = \sum_k p\left(k\right) t^k} \qquad (៨.៥)$$

នៅចំនុចនេះ យើងមិនបានគិតគូរល្អិតល្អន់ទៅនឹង ភាពរួមនៃ F_x តែយើងនឹងធ្វើការរៀបចំធម្មតា នឹង F_x ដូច្នេះ ហើយ

F_x ត្រូវបាន ហៅថា **ស៊េរីស្វ័យគុណ** (ឬស៊េរីឡូរ៉ង់ព្រោះវាមានស្វ័យគុណអវិជ្ជមាននៃ t)។

៨.៣.២.២. លក្ខណៈរបស់អនុគមន៍បង្ក

លក្ខណៈទូទៅនៃអនុគមន៍បង្កនៃ X គឺ ៖

១. $F_X(1) = 1$ ព្រោះផលបូកនៃប្រូបាប៊ីលីតេស្មើ១

២. $E\left(X\right) = F'_X\left(1\right)$ ដោយ $F'_X\left(t\right) = \sum_k kp\left(k\right) t^{k-1}$

៣. $Var\left(X\right) = F"_X\left(1\right) + F"_X\left(1\right) - \left(F'_X\left(1\right)\right)^2$

៤. បើ X, Y ជាអថេរចៃដន្យមិនអាស្រ័យ នោះ $F_{X+Y}\left(t\right) = F_X\left(t\right)\ F_Y\left(t\right)$

ឧទាហរណ៍ ៨.៣.២. គេឱ្យ X ជាអថេរចៃដន្យតំណាងឱ្យពិសោធន៍ប៊ែរនូលី នោះ

$$P\left(X=-1\right)=p\,,\ \ P\left(X=1\right)=1-p\quad \text{និង}\quad P\left(X=k\right)=0$$

ដូច្នេះ $F_X=pt^{-1}+\left(1-p\right)t$ ពេលនេះ ជំហានចៃដន្យអាចបកស្រាយ ដោយ

$$W_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$$

ដែល X_k និមួយៗមិនអាស្រ័យ

X_k តាងឱ្យជំហានខាងឆ្វេង និងទៅខាងស្តាំនៅពេលជំហានលើកទី k

ដោយ X_k ជាអថេរមិនអាស្រ័យ

យើងមាន

$$\begin{aligned}FW_n&=F_{X_1}F_{X_2}.\cdots F_{X_n}\\&=\left(FX\right)^n\\&=\left(pt^{-1}+\left(1-p\right)t\right)^n\\&=\sum_{j=0}^{n}\left(j\right)^n\left(pt^{-1}\right)^j\left(\left(1-p\right)t\right)^{n-1}\\&=\sum_{j=0}^{n}\left(j\right)^np^j\left(1-p\right)^{n-j}t^{n-2j}\end{aligned}$$

យើងបានបំនែងចែកសម្រាប់ ជំហានចៃដន្យ W_n អាចជាមេគុណនៃអនុគមន៍បង្ក ។

ដូច្នេះ

$$\boxed{P\left(W_n=n-2j\right)=\left(j\right)^np^j\left(1-p\right)^{n-j}\ ,\ j=0,1,\cdots,n}$$

ចំណាំ នេះជាលើកទី៣ ក្នុងការគណនាបំនែងចែកនេះ ដែលគណនាវានៅខណៈ n ។ ជាមួយគ្នាផងដែរ ការគណនាវានៅខណៈ n ។

សង្កេតមើលបទពិសោធន៍ខាងក្រោមនេះ

សំណើ ៨.៣.២. គេឱ្យ X ជាបន្សំនៃអថេរចៃដន្យពីរ N និង Y នោះ

$$F_X\left(t\right)=F_N\left(F_Y\left(t\right)\right)=F_NoF_Y$$

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន $$P(X=K)=\sum_{n=0}^{\infty}P(N=n)\,P\left(\sum_{j=1}^{n}Y_j=K\right)$$

តែ $F_{\sum_{j=1}^{n}Y_j}=(F_Y(t))^n$, Y_j ជាពហុអថេរមិនអាស្រ័យ

ដូចនេះ

$$\boxed{F_X=\sum_{n=1}^{\infty}P(N=n)(F_Y(t))^n=F_N(F_Y(t))} \qquad (៨.៥)$$

៨.៣.៣. សង្ឃឹមគណិតមានលក្ខខណ្ឌ

ឥលូវនេះ យើងណែនាំអំពីល្បិច ដែលមានគំនិតដ៏សំខាន់ សម្រាប់យើងនោះ គឺ សង្ឃឹមគណិតមានលក្ខខណ្ឌ។ យើងចាប់ផ្តើមកំនត់វា ដោយ មានភាពងាយបំផុត នៃ អថេរ ចៃដន្យក្នុងសង្ឃឹមគណិតមានលក្ខខណ្ឌ នៅក្នុង ហេតុការណ៍មួយ។ គេឱ្យព្រឹត្តិការណ៍ A កំណត់ជាអថេរចៃដន្យ

$$1_A=\begin{cases}1 & \text{បើ} \quad \omega\in A\\ 0 & \text{បើ} \quad \omega\notin A\end{cases}$$

កំណត់ដោយ

$$E(X/A)=\frac{E(X\,.1_A)}{P(A)}$$

នៅក្នុង

- ករណីដាច់ $$\boxed{E(X/A)=\sum_X x\,P(X=x/A)} \qquad (៨.៦)$$
- ករណីជាប់ $$\boxed{E(X/A)=\int X\,P(X/A)\,dx} \qquad (៨.៧)$$

សំណើ ៨.៣.៣. លក្ខណៈនៃសង្ឃឹមគណិតមានលក្ខខណ្ឌរួមមាន

១. $E(X+Y/A)=E(X/A)+E(Y/A)$

២. បើ $X=c$ ថេរលើ A នោះ $E(XY/A)=cE(Y/A)$

៣. បើ $B = \prod_{i=1}^{n} A_i$ នោះ $E(X/B) = \sum_{i=1}^{n} E(X/A_i) \dfrac{P(A_i)}{P(B)}$

(**វិសមភាព** *Jensen*)

អនុគមន៍ f មួយប៉ោង បើ $\forall t \in [0,1]$, $x < y$ នោះ f ផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព ៖

$$\boxed{f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t) f(x) + t f(y)} \qquad (៨.៨)$$

យើងបាន f ប៉ោង ដែល $E(f(x)) \geqslant f(E(x))$ និង $E(f(X/A)) \geqslant f(E(X/A))$

បើ X និង Y ជាអថេរចៃដន្យពីរ កំនត់លើលំហាគម្រូដូចគ្នានោះយើងអាចនិយាយពីប្រភេទពិសេសនៃព្រឹត្តិការណ៍ $\{y = j\}$។

ដូច្នេះ វាអាចធ្វើឱ្យយល់ដើម្បីធ្វើការជជែកអំពី $E(X/Y = j)$។ វាគ្មានអ្វីដែលថ្មីនៅទីនេះទេ ប៉ុន្តែ វិធី ដែលមានអត្ថប្រយោជន៍ ដើម្បីគិតពី សង្ឃឹមមានលក្ខខណ្ឌនៃ X ដែលមានលក្ខខណ្ឌលើ Y គឺ ដូចជាអថេរចៃដន្យមួយ។ J រត់លើតម្លៃនៃអថេរ Y ដែល $E(E/Y = j)$ មានតម្លៃខុសគ្នាទៅតាម j ដែល មានតម្លៃថ្មីមួយនៃអថេរចៃដន្យ។ ដូចនេះ យើងធ្វើវាតាមលំដាប់។

និយមន័យ ៨.៣.៣. X, Y ជាពីរអថេរចៃដន្យកំណត់ លើលំហាគម្រូដូចគ្នា។ ការកំណត់អថេរចៃដន្យមួយគឺ $E(X/Y)$ ហើយអានថា " សង្ឃឹមនៃអថេរចៃដន្យX ផ្តល់ដោយលក្ខខណ្ឌY "។ តម្លៃនៃអថេរចៃដន្យនេះគឺ $E(X/Y = j)$ ដែល j រត់លើតម្លៃនៃ Y ។ យើងបាន

$$P[E(X/Y) = e] = \sum_{\{j/E(X/Y=j)=e\}} P[Y = j]$$

ជាទូទៅ៖ ប្រសិនបើ $Y_0, Y_1, \cdots, Y_n$ មានការប្រមូលផ្តុំ នៃអថេរចៃដន្យនោះ យើងអាចកំណត់ $E(X/Y_0 = y_0, Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n)$ និង $E(X/Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)$ លក្ខណៈ ទូទៅ មួយចំនួននៃអថេរចៃដន្យ $E(X/Y)$ ត្រូវបានរាយទៅតាមសំណើ។

សំណើ ៨.៣.៤. X, Y ជាពីរអថេរចៃដន្យកំនត់លើលំហាគម្រូដូចគ្នា នោះ

១. (លក្ខណៈ *Tower*) $E(E(X/Y)) = E(X)$

២. បើ X, Y ជាអថេរមិនអាស្រ័យនោះ $E(X/Y) = E(X)$

៣. តាង $Z = f(Y_0, Y_1, \cdots, Y_n)$ នោះ $E(ZX/Y) = Z\,E(X/Y)$

សំណើ ៨.៣.៥. X , $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ ជាអថេរចៃដន្យកំនត់លើលំហាគម្រូដូចគ្នា នោះ

១. (លក្ខណៈ $Tower$) $E\left(E\left(X/Y\right)\right)=E\left(X\right)$

២. បើ X មិនអាស្រ័យ $Y_0,Y_1,\cdots,Y_n$ នោះ $E\left(X/Y_0,Y_1,\ldots,Y_n\right)=E\left(X\right)$

៣. តាង $Z=f\left(Y_0,Y_1,\ldots,Y_n\right)$

នោះ $E\left(ZX/Y_0,Y_1,\ldots,Y_n\right)=ZE\left(X/Y_0,Y_1,\ldots,Y_n\right)$

៨.៤. ម៉ាធីងហ្គែល

គំនិតនៃម៉ាធីងហ្គែល $(Martingales)$ នេះមានប្រភពដើមរបស់វាមកពីការលេង ល្បែង ពោលគឺ **ឱកាសនៃការប្រកួតដ៏ត្រឹមត្រូវ** ដែលនឹងពិភាក្សាយ៉ាងល្អិតល្អន់នៅ ក្នុងផ្នែកបន្ទាប់ទៀត។ ស្រដៀងគ្នាដែរ សញ្ញាណនៃ $Submartingale$ និង $Supermartingale$ បានកំណត់ដូចខាងក្រោមត្រូវបានទាក់ទងទៅនឹង **ឱកាសនៃការលេងល្បែង ជោគជ័យ និងបរាជ័យ** ។ ទិដ្ឋភាពមួយចំនួននៃការលេងល្បែងដែលមាននៅក្នុងគណិតវិទ្យាហិរញ្ញវត្ថុ ជាពិសេស គឺទ្រឹស្តីដេរីវេនៅក្នុងហិរញ្ញវត្ថុដូចជាជម្រើសដែលបានកំណត់ ។ មិនមានអ្វីគួរឱ្យប្លែកទេ **ម៉ាធីងហ្គែល** ដើរតួនាទីយ៉ាងសំខាន់នៅទីនេះ ។ ជាការពិតណាស់ **ម៉ាធីងហ្គែល** បានឈាន ដល់ទ្រឹស្តីនៃការលេងល្បែង និងការកើតឡើងក្នុងការប្រកួតនានានៃប្រូបាប៊ីលីតេ និង Stochastic វិភាគ ជាពិសេសនៅក្នុងទ្រឹស្តីផ្សព្វផ្សាយ ។ សរុបមកយើងនឹងណែនាំអំពី ម៉ាធីងហ្គែលដែលនឹងនិយាយពី និយមន័យជាមូលដ្ឋាន និងលក្ខណៈ ក្នុងករណី រយៈពេល ដាច់ពីគ្នា $(i.e \quad t=0,1,2,\ldots)$ ។

និយមន័យ ៨.៤.១. ស្វ៊ីតមួយនៃអថេរចៃដន្យ $\xi_1,\xi_2,\ldots$ ដែលត្រូវបានហៅថា **ម៉ាធីងហ្គែល** ធៀបនឹងសំណុំព័ត៌មានរៀងគ្នា $F_1,F_2,\cdots$ បើ

១. ξ_n មានអាំងតេក្រាលដែល $n=1,2,\cdots$

២. $\xi_1,\xi_2,\cdots$ ត្រូវបានផ្លាស់ប្តូរជា $F_1,F_2,\cdots$

៣. $E\left(\xi_{n+1}/_n\right)=\xi_n$ ដែល $n=1,2,\cdots$

ឧទាហរណ៍ ៨.៤.១. គេឱ្យជាស្វ៊ីតនៃអថេរចៃដន្យ η_1 , η_2 , ... មិនអាស្រ័យអាំងតេក្រាលដែល

$$E\left(\eta_n\right)=0\ ,\ \forall n=1\,,\,2\,,\,3\,,\,\ldots$$

យើងអាចសរសេរ

$$\xi_n=\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_n$$
$$F_n=\sigma\left(\eta_1\,,\,\eta_2,\cdot,\eta_n\right)$$

នោះ ξ_n ត្រូវបានផ្លាស់ប្តូរទៅជាសំណុំព័ត៌មាន F_n ហើយវាមានអាំងតេក្រាលដែល

$$\begin{aligned}E\left(|\xi_n|\right) &= E\left(|\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_n|\right)\\&\leqslant E\,|\eta_1|+E\,|\eta_2|+\cdots+E\,|\eta_n|\\&<\infty\\E\left(\xi_{n+1}/F_n\right) &= E\left(\eta_{n+1}/F_n\right)+E\left(\xi_n/F_n\right)\\&= E\left(\eta_{n+1}\right)+\xi_n\\&= \xi_n\end{aligned}$$

ដូចនេះ

ស្វ៊ីតនៃអថេរចៃដន្យ $\eta_1,\eta_2,\cdots$ ជាម៉ាធីងហ្គែលធៀបនឹងសំណុំពត៌មានរៀងគ្នា $F_1,F_2,\cdots$

ម្យ៉ាង

ដោយ η_{n+1} ជាសំណុំព័ត៌មានមិនអាស្រ័យ F_n (លក្ខណៈមិនអាស្រ័យ) ហើយ ξ_n ជារង្វាស់ $F_n\,(F_n{-}measurable)$ (យកអ្វីដែលធ្លាប់បានដឹងរួចមកហើយ) មានន័យថា ξ_n ជា ម៉ាធីងហ្គែល រៀងៗគ្នានៃ F_n ។

ឧទាហរណ៍ ៨.៤.២. គេឱ្យ ξ មានអាំងតេក្រាលនៃអថេរចៃដន្យនិង $F_1,F_2,\cdot$ ជាសំណុំព័ត៌មាន។ យើងអាចសរសេរ

$$\xi_n=E\left(\xi/F_n\right)\qquad \text{ដែល}\qquad n=1,2,3,...$$

នោះ ξ_n ជារង្វាស់ F_n ដែល $|\xi_n|=|E\left(\xi/F_n\right)|\leqslant E\left(|\xi|\,/_n\right)$ នាំឲ្យ

$$E\left(|\xi_n|\right)\leqslant E\left(E\left(|\xi|\,/F_n\right)\right)=E\left(|\xi|\right)<\infty$$

ហើយ

$$\begin{aligned}E\left(\xi_{n+1}/_n\right) &= E\left(E\left(\xi/F_{n+1}\right)/F_n\right)\\&= E\left(\xi/F_n\right)\\&= \xi_n\end{aligned}$$

ដោយ $F_n\subset F_{n-1}$ (តាមលក្ខណៈ សង្ឃឹមគណិតមានលក្ខខណ្ឌ)

ដូចនេះ $\boxed{\xi_n \text{ ជាម៉ាធីងហ្គែលរៀងគ្នានៃ } F_n}$ ។

និយមន័យ ៨.៤.២. ស្វ៊ីតមួយ $\xi_1, \xi_2, \cdots$ នៃអថេរចៃដន្យដែលត្រូវបានហៅថា Super martingale (Submartigale) ជាមួយសំណុំព័ត៌មានរៀងគ្នា $F_1, F_2, \cdots$ បើ

១. ξ_n មានអាំងតេក្រាលដែល $n = 1, 2, \cdots$

២. $\xi_1, \xi_2, \cdots$ ត្រូវបានផ្លាស់ប្តូរជា $F_1, F_2, \cdots$

៣. $E\left(\xi_{n+1}/F_n\right) \leqslant \xi_n$ (រៀងគ្នា) $E\left(\xi_{n+1}/F_n\right) \geqslant \xi_n$ គ្រប់ ។

សំណើ ៨.៤.១. គេឱ្យ (X, Y) ជាអថេរចៃដន្យពីរនៅក្នុង $L^2(\Omega, A, P)$ ហើយ B, B' ជាសំណុំរងពីរនៃ A ដែលបំពេញ $B \subset B'$ ៖

១. បើ Z មានអថេរ $c \in R$, $E(Z|B) = c$

២. $\forall (a\,, b) \in R^2$, $E(aZ + bY|B) = aE(Z|B) + bE(Y|B)$

៣. បើ $Z \leqslant Y$, $E(Z|B) \leqslant E(Y|B)$

៤. $E(E(Z|B')|B) = E(Z|B)$ (ច្បាប់នៃសង្ឃឹមគណិត)

៥. បើ Z ជារង្វាស់ B : $E(ZY|B) = ZE(Y|B)$

៦. បើ Z ជាសំណុំ B មិនអាស្រ័យ $E(Z|B) = E(Z)$

ឥឡូវនេះយើងអាចកំណត់ពីវិធីសាស្ត្រចៃដន្យ *Stochastis processes* ដូចទៅនឹងម៉ាធីងហ្កែល *(Martingale)* ។

និយមន័យ ៨.៤.៣. .

១. គេឱ្យ $(\Omega, A, \mathbb{F}, P)$ ក្នុងលំហប្រូបាប៊ីលីតេ និងវិធីសាស្ត្រចៃដន្យ (Stochastic process) ដែល $X = (X_0, X_1, ..., X_T)$ ជាសំណុំម៉ាធីងហ្កែល $(\mathbb{F}, P)$ បើ

(ក) X ត្រូវបានប្តូរជា $\mathbb{F}$

(ខ) $\forall t \in J\,, X_t \in L^1(\Omega, A, P)$

(គ) $\forall t \in J^*, X_{t-1} = E\left[X_t/\mathbb{F}_{t-1}\right]$

២. X ជា Super martingale នៅលើលំហ $(\mathbb{F}, P)$ បើ $X_{t-1} \geqslant E[X_t/\mathbb{F}_{t-1}]$

៣. X ជា Submartingale នៅលើលំហ $(\mathbb{F}, P)$ បើ $X_{t-1} \leqslant E[X_t/\mathbb{F}_{t-1}]$

សម្គាល់

ការប្រើប្រាស់ច្បាប់នៃសង្ឃឹមគណិត វាច្បាស់ណាស់ ដើម្បីមើលឃើញថា ប្រសិនបើ X

ជាម៉ាធីងហ្គេល $Martingale$ $(Supermartingale, Submartingale)$ មួយសម្រាប់គូ (s,t) ដែល

$$\boxed{s \leqslant t \;:\; E\left[X_t/\mathbb{F}_s\right] = (\leqslant, \geqslant)\, X_s} \qquad (៨.៩)$$

ទំនាក់ទំនងនេះអាចត្រូវបានប្រើនៅចំនុច (គ) នៃនិយមន័យ(៨.៤.៣)
សង្កេតមើល $E[X_{t+1}/\mathbb{F}-1]$
តាមនិយមន័យ(៨.៤.៣) យើងមាន

$$X_{t-1} = E[X_t/\mathbb{F}_{t-1}] \qquad \text{និង} \qquad X_t = E[X_{t-1}/\mathbb{F}_t]$$

នាំឱ្យ

$$X_{t-1} = E[E[X_{t+1}]/\mathbb{F}_{t+1}]$$

តាមសំនើ(៨.៤.១) (ចំនុច៤) នាំឱ្យ

$$X_{t-1} = E[X_{t+1}/\mathbb{F}_{t-1}] \qquad \text{ដែល} \qquad \mathbb{F}_{t-1} \subset \mathbb{F}_{t+1}$$

និយមន័យ ៨.៤.៤. ជំហានចៃដន្យមួយគឺ ជាវិធីសាស្ត្រចៃដន្យ X ដែល $X_0 = c, \;\; c \in \mathbb{R}$ ហើយ $X_t = X_{t-1} + Y_t$ ដែល Y_t ជាអថេរមិនអាស្រ័យ

ឧទាហរណ៍ ៨.៤.៣. អ្នកលេងល្បែងមួយបានចាប់ផ្តើម ការប្រកួតនៅថ្ងៃ0 ជាមួយប្រាក់ X_0 និងប្រាក់ X_t របស់គាត់នៅថ្ងៃ t ត្រូវបានកំណត់ដោយ $X_t = X_{t-1}+Y_t$ ដែល Y_t ជាតម្លៃនៃការកើនឡើង ឬបាត់បង់នៃការចាប់ឆ្នោតលើកទី t ។ Y_s មិនអាស្រ័យ និង $Zeromean$ (ធានាភាពត្រឹមត្រូវនៃការប្រកួតនេះ) នៃអថេរចៃដន្យ។
ជាមួយគ្នាដែរ ប្រាក់នៅថ្ងៃ អាចសរសេរជា

$$\boxed{X_t = X_0 + \sum_{s=1}^{t} Y_s} \qquad (៨.១០)$$

សន្មតថា $\mathbb{F}$ ជាដំណើរការនៃសំណុំព័ត៌មានពីធម្មជាតិ Y នោះគឺ $\mathbb{F}_t$ ជាសំណុំបន្សំដោយ Y_u ដែល $u \leqslant s$ ។ដូចដែល Y_s ជាលទ្ធផលនៃ ការលេងនេះនៅ លើកទី៥ និង X_s ជាប្រាក់ របស់អ្នកលេង

ល្បែង បន្ទាប់ពីការលេងលើកទី៥នោះ X ជា $\mathbb{F}-adapted$
ហើយយើងបាន៖

$$E[X_t/\mathbb{F}_{t-1}] = E[X_{t-1}+Y_t/\mathbb{F}_{t-1}] \quad (៨.១១)$$
$$= E[X_{t-1}/\mathbb{F}_{t-1}] + E[Y_t/\mathbb{F}_{t-1}] \quad (៨.១២)$$

យើងបាន

$$E[Y_t/\mathbb{F}_{t-1}] = E[Y_t] = 0$$
$$\Longrightarrow \quad E[X_t/\mathbb{F}_{t-1}] = X_{t-1}$$

នោះ X ជាម៉ាធីងហ្គែល

ឧទាហរណ៍ ៨.៤.៤. យើងពិចារណាទៅលើកោដ្ឋ ដែលផ្ទុកចំនួនគូនៃបាល់ T ដែលពាក់កណ្ដាលជាពណ៌ស និងពាក់កណ្ដាលជាពណ៌ខ្មៅ។ នៅកាលបរិច្ឆេទនិមួយៗ $t \leqslant T$ បាល់មួយគ្រាប់ត្រូវបានបោះដោយចៃដន្យ ដោយគ្មានជំនួស។ គេឱ្យ Y (ឬ Z) ជាវិធីសាស្ត្រចៃដន្យ នៃការរាប់ចំនួនបាល់ពណ៌ស (ឬខ្មៅ)ដែលត្រូវបានលេង។ សំណុំព័ត៌មាន ដែលពាក់ព័ន្ធ ជាសំណុំព័ត៌មានធម្មជាតិនៃ $Y(Z)$ ។

គេតាង $X_t = Y_t - Z_t$ ជាផលដករវាងចំនួនគ្រាប់បាល់ពណ៌ស និងពណ៌ខ្មៅ បន្ទាប់ពីចាប់យកដោយចៃដន្យលើកទី t ។ វិធីសាស្ត្រចៃដន្យ Stochastic Process ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះ $X_0 = 0$ ហើយយើងអាចសរសេរ៖

$$X_t = X_{t-1} + S_t$$

- បើបាល់សលើកទី t នោះ $S_t = 1$
- បើបាល់ខ្មៅលើកទី t នោះ $S_t = -1$

គេបាន

$$E[X_t/\mathbb{F}_{t-1}] = X_{t-1} + E[S_t/\mathbb{F}_{t-1}]$$

ផលដករវាងវិធីសាស្ត្រនេះ និងជំហានចៃដន្យ S_t (មិនអាស្រ័យ $\mathbb{F}_{t-1}$ ទៀតទេ)។
ជាក់ស្តែង សន្មតយក $Y_t = s\ ,\ \ Z_t = t-s$ នាំឱ្យ

$$P\left(S_{t+1}=1/Y_t=s\right)=\frac{\frac{T}{2}-s}{T-t}$$

ហើយ $P\left(S_{t+1}=1/Y_t=s\right)\neq\frac{1}{2}$ នៅពេល $S\neq\frac{1}{2}$ យើងបាន

$$E[S_{t+1}/Y_t=s]\neq 0$$

នេះវាបង្ហាញថា X មិនមែនជាម៉ាធីងហ្គែល ផ្ទុយទៅវិញ

$$\forall t\,,E\left(Y_t\right)=E\left(Z_t\right)=\frac{t}{2}\qquad \text{នោះ}\qquad E[X_t]=0$$

បន្ទាប់មក X គឺជាឧទាហរណ៍ នៃ វិធីសាស្ត្រចៃដន្យ Stochastic Process មធ្យមថេរដែលមិនមែនជាម៉ាធីងហ្គែល ។ ជាក់ស្តែង លក្ខណៈពិសេសនេះបានមកពី "ដោយគ្មានការជំនួស" លក្ខណៈនៃការបោះដោយចៃដន្យ។ បន្ទាប់ពី ការបោះបាល់និមួយៗនោះ ប្រូបាប៊ីលីតេនៃការបោះបាល់ពណ៌ស ឬខ្មៅនៅក្នុងការបោះបាល់បន្ទាប់ទៀតគឺ ត្រូវបានផ្លាស់ប្តូរ។ ប៉ុន្តែ ចាប់ផ្តើមពីថ្ងៃ០ នោះវាជាការប្រកួតដ៏ត្រឹមត្រូវពេលដែល មធ្យមនៃចំនួនបាល់ពណ៌ស (ខ្មៅ) ដែលបានបោះនៅចន្លោះពេល ០និង t ស្មើ $\frac{t}{2}$ ។

វាគឺជាការចាំបាច់សម្រាប់ ធ្វើការកត់ សម្គាល់ថា "បញ្ហា" ដែល បានកើតឡើងពីភាពពិតជាក់ស្តែង ដោយ តម្លៃចុងក្រោយនៃ Y និង Z ត្រូវបានស្គាល់នៅថ្ងៃ០។ ជាការពិតណាស់ មុនពេលការបោះបាល់ជាលើកដំបូង តម្លៃមួយបានដឹងថា $Y_T=Z_T=\frac{T}{2}$ នាំឱ្យ $X_T=0$។ នៅក្នុងទម្រង់ជាវិទ្យាសាស្ត្រ អថេរចំនួន៣ ជារង្វាស់ $\mathbb{F}_0$ $(\mathbb{F}_0-measurable)$

៨.៥. ភាពជឿជាក់នៃល្បែង

ឧបមាថា អ្នកចូលរួមក្នុងការលេងល្បែងដូចជា roulette តាង $\eta_1\,,\eta_2\,,\,...$ ជាស្វ៊ីតនៃអាំងតេក្រាលអថេរចៃដន្យ ដែល η_n ជា(ការឈ្នះ ឬ ការចាញ់) សម្រាប់ មួយ ភាគហ៊ុនក្នុងការប្រកួត n ។ បើមានភាគហ៊ុន របស់អ្នកនៅ ក្នុងការលេងល្បែង និមួយៗ ឈ្នះម្តងនោះ ការទទួលជ័យជំនះសរុបរបស់អ្នកនឹង ទទួលបាន

$$\boxed{\xi_n=\eta_1+\eta_2+\,...+\eta_n} \tag{៨.១៣}$$

យើងបាន សំនុំពត៌មាន

$$\mathbb{F}_n = \sigma\left(\eta_1\,, \eta_2\,,\,\ldots\,, \eta_n\right)$$

ហើយយក $\xi_0 = 0$ និង $\mathbb{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ សម្រាប់ភាពសាមញ្ញនៃសញ្ញា
បើនៅជុំ $n{-}1$ នៃល្បែងដែលបានលេងល្បែងយ៉ាងយូរ នោះពត៌មាន កើនរបស់អ្នកនឹង ត្រូវបាន តំណាងដោយ កាយ $\sigma\mathbb{F}_{n-1}$ ។

- **ការប្រកួតដោយសុក្រិតបើ**

$$\boxed{E\left(\xi_n/\mathbb{F}n-1\right) = \xi_{n-1}} \qquad (៨.១៤)$$

នោះគឺ អ្នកបានរំពឹងថា សំណាងរបស់ អ្នកនៅជំហាន n នឹងក្លាយជាមធ្យមនៅជំហានដូច $n-1$ ដែរ។

- **ការប្រកួតនេះ អំណោយផល បើ**

$$\boxed{E\left(\xi_n/\mathbb{F}n-1\right) =\geqslant \xi_{n-1}} \qquad (៨.១៥)$$

- **និង មិនអំណោយផលទៅ កាន់អ្នកបើ**

$$\boxed{E\left(\xi_n/\mathbb{F}n-1\right) \leqslant \xi_{n-1}\,,\,\forall n = 1\,, 2\,,\ldots} \qquad (៨.១៦)$$

ចម្លើយនេះទាក់ទងទៅនឹង ξ_n រៀងគ្នា
$(Martingale\,,\,Submartingale\,\&\,Supermartingale)$ ដោយ ធៀប ទៅនឹង $\mathbb{F}_n$
ចូរមើលនិយមន័យ(៨.៤.១) និង(៨.៤.២)។

ឧបមាថា អ្នកអាចបែងចែកភាគហ៊ុនទៅជា α_n នៅក្នុងការប្រកួត n ដង (ពិសេស α_n អាចស្មើ 0 បើអ្នកជៀសវាងពីការលេងល្បែងលើកទី n វាអាចអវិជ្ជមាន បើអ្នកជា ម្ចាស់ កាស៊ីណូ ហើយអាចទទួលយកការភ្នាល់របស់មនុស្សផ្សេងទៀត)។ នៅពេលដែល ពេលវេលា បានមកដល់ដើម្បីសម្រេចភាគហ៊ុន α_n របស់អ្នកនោះ អ្នកនឹងដឹង លទ្ធផល ជាលើកដំបូងនៃការលេងល្បែង $n-1$ ប្រកួត។ ដូច្នោះ វាជាការសមហេតុផលដើម្បីសន្មតថា α_n គឺជារង្វាស់ $\mathbb{F}_{n-1}$ ដែល $\mathbb{F}_{n-1}$ តំណាងឱ្យពត៌មានដែលបានបង្កើនឡើង និងរួមបញ្ចូលការលេង ល្បែង $n-1$ ប្រកួត។ ជាពិសេស ចាប់តាំងពីគ្មានអ្វីដែលត្រូវបានគេស្គាល់មុនពេលដែលការប្រកួតដំបូង នោះគេយក $\mathbb{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$។

និយមន័យ ៨.៥.១. យុទ្ធសាស្ត្រការលេងល្បែងមួយ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ (ធៀបនឹងសំនុំព័ត៌មាន $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \cdots$) គឺជាលំដាប់នៃអថេរចៃដន្យមួយ α_n ជារង្វាស់ $\mathbb{F}_{n-1}$, $\forall n = 1, 2, \cdots$ ដែល $\mathbb{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$។(ខាងក្រៅបរិបទនៃការលេងល្បែង ដូចជាលំដាប់នៃអថេរចៃដន្យ α_n ហៅថា ការព្យាករណ៍(Previsible))បើអ្នកអនុវត្តតាមយុទ្ធិសាស្ត្រ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ នោះការឈ្នះសរុបរបស់អ្នកបន្ទាប់ពីការប្រកួត n ដង ដែល

$$\begin{aligned}\varsigma_n &= \alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2 + \alpha_n\eta_n \\ &= \alpha_1\left(\xi_1 - \xi_n\right) + \cdots + \alpha_n\left(\xi_n - \xi_{n-1}\right)\end{aligned}$$

យើងយក $\varsigma = 0$ សម្រាប់ភាពងាយស្រួល

តាមរយៈសំណើនេះមានវិបាកដ៏មាន សារៈសំខាន់សម្រាប់ការលេងល្បែង។ វាមានន័យថា ការប្រកួតដ៏សុក្រិត និងជាធម្មតាបានត្រឡប់ភាពសុក្រិតម្តង មិនថាយុទ្ធសាស្ត្រនៃការលេងល្បែងមួយណាដែលត្រូវបានប្រើទេ។ បើ គ្មាននរណាម្នាក់ ធ្វើការ ភ្នាល់នូវប្រាក់អវិជ្ជមានសរុប(ដើម្បីរត់ការបើកកាស៊ីណូមួយ) នោះវានឹងមិនអាចប្រែក្លាយពី ការប្រកួតមួយដែលមិនអំណោយផលទៅជាការប្រកួត អំណោយផល ឬក៏ផ្ទុយមកវិញ។ អ្នកមិនអាចផ្តួលប្រព័ន្ធនេះដាច់ខាត **ភាពទ័លនៃស៊្វីត** α_n មានន័យថា មូលធន ដែល អាច កើតមានរបស់អ្នកគឺទ័ល និង ជាឥណទានកំនត់របស់អ្នកដែរ។

សំណើ ៨.៥.១. គេឱ្យ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ ជាយុទ្ធសាស្ត្រនៃការលេងល្បែង

១. បើ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ ជាស៊្វីតទាល់ និង $\xi_0, \xi_1, \cdots$ ជាម៉ាធីងហ្គែល នោះ $\varsigma_0, \varsigma_1, \ldots$ ជា ម៉ាធីងហ្គែល(ការប្រកួតសុក្រិតកើតឡើងម្តងមិនថាអ្នកលេងយ៉ាងម៉េចក៏ដោយ)

២. បើ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ ជាស៊្វីតទាល់មិនអវិជ្ជមាន និង $\xi_0, \xi_1, \cdots$ ជា *Supermartingale* នោះ $\varsigma_0, \varsigma_1, \ldots$ ជា *Supermartingale* (ការប្រកួតមិនអំណោយផលទៅជាអំណោផល)

៣. បើ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ ជា ស៊្វីតទាល់ មិនអវិជ្ជមាន និង $\xi_0, \xi_1, \cdots$ ជា *Submartingale* នោះ $\varsigma_0, \varsigma_1, \ldots$ ជា *Submartingale* (ការប្រកួតអំណោយផលទៅជាមិនអំណោយផល)

៨.៦. ពេលវេលាបញ្ឈប់

៨.៦.១. . សញ្ញាណនៃពេលវេលាបញ្ឈប់

ឱកាសមួយនៅក្នុងការលេងល្បែងរ៉ូឡែត និងល្បែងដទៃទៀត ជាធម្មតាមានជម្រើសដើម្បីចេញបានគ្រប់ពេល។ ចំនួនជុំនៃការប្រកួតនៅមុនពេលចាកចេញពីការប្រកួតនឹងត្រូវបានកំនត់ដោយ T។EX:T ថេរ $(T = 10)$ បើនរណាម្នាក់ សម្រេចចិត្ត ដ៏ខ្ពស់ដើម្បីបញ្ឈប់ការលេងបន្ទាប់ពីបាន 10 ជុំ នោះ មិនថាមានអ្វីកើតឡើងទេ ត្រូវតែ បញ្ឈប់។ ប៉ុន្តែ ជាទូទៅការសម្រេចចិត្តថាតើត្រូវឈប់ ឬ បន្តនឹងត្រូវធ្វើឡើង បន្ទាប់ពីជុំនិមួយៗ អាស្រ័យលើពត៌មាន ដែល បង្កើនរួចមកហើយ ដូច្នេះ ត្រូវបាន សន្មតថាជា អថេរចៃដន្យជាមួយសំណុំតម្លៃ $\{1 , 2 , . . .\} \cup \{\infty\}$ ។ ភាពមិនកំណត់ ត្រូវបានបញ្ចូល ដើម្បី គ្របនូវលទ្ធផលជាទ្រឹស្តី (ក៏ដូចជាក្តីសុបិនសេណារីយ៉ូនៃកាស៊ីណូមួយចំនួន) ដែលការប្រកួត នេះមិនដែលបញ្ចប់។ នៅជំហាន និមួយៗ គួរតែមាន ម្នាក់ដើម្បីអាចធ្វើការសម្រេចចិត្ត ថាតើត្រូវបញ្ឈប់ ឬបន្តការប្រកួតនេះ? មានន័យថា ទោះបីបញ្ឈប់ ឬបន្ត $T = n$។ ដូច្នេះ ព្រឹត្តិការណ៍ $T = n$ គួរតែនៅក្នុងកាយ σ ដែល $\mathbb{F}_n$ តំណាង ឱ្យពត៌មានរបស់យើងនៅខណៈពេល n។ នេះបានផ្តល់នូវការកើនឡើងជានិយមន័យជាលំដាប់។

៨.៦.២. និយមន័យ

និយមន័យ ៨.៦.១. អថេរចៃដន្យ T ជាមួយសំនុំតម្លៃ $\{1 , 2 , . . .\} \cup \{\infty\}$ ត្រូវបានឱ្យឈ្មោះថា Stopping Time (ធៀបនឹងសំនុំព័ត៌មាន $\mathbb{F}_n$) បើ $\forall n = 1, 2, \cdots$ ដែល

$$\{T = n\} \in \mathbb{F}_n$$

ឧទាហរណ៍ ៨.៦.១. (ការវាយលុកជាលើកដំបូង)

ឧបមាថា កាក់មួយត្រូវបានបោះម្តងហើយម្តងទៀត ហើយអ្នកឈ្នះ ឬចាញ់ 1$ អាស្រ័យលើវិធីដែលប្រើ។ ឧបមាថា អ្នកចាប់ផ្តើមប្រកួតជាមួយលុយ 5$ នៅ ក្នុង ហោប៉ៅ របស់អ្នក ហើយអ្នកសម្រេចចិត្តក្នុងការលេងរហូតដល់អ្នកមាន 10$ ឬ អ្នក ត្រូវ ចាញ់ អស់ លុយទាំងអស់។ បើ ξ_n ជាចំនួន ទឹកប្រាក់ដែលអ្នកមាន នូវជំហាន នោះខណៈពេល ដែល អ្នកបញ្ឈប់ការប្រកួតគឺ $T = \min \{n : \xi_n = 10 \; or \; 0\}$ ហៅថា ការវាយលុកដំបូង (10 ឬ 0 ដោយ ស៊ីតនៃអថេរ $\mathbb{F}_n$) ដែល $\mathbb{F}_n = \sigma\left(\xi_1 , \xi_2 , \; . . . , \xi_n\right)$ ព្រោះ

$$\{T = n\} = \{0 < \xi_1 < 10\} \cap \{0 < \xi_{n-1} < 10\} \cap \{\xi_n = 10, or \, 0\}$$

ឥលូវនេះ សំនុំនិមួយៗនៃផ្នែកខាងស្តាំដៃជារបស់ $\mathbb{F}_n$ នោះ ប្រសព្វរបស់វាក៏ជារបស់ $\mathbb{F}_n$ ដែរ។ នេះវាបង្ហាញថា

$$\{T = n\} \in \mathbb{F}_n, \quad \forall n$$

ដូច្នេះ $\boxed{T \text{ គឺជាពេលវេលាបញ្ឈប់ Stopping Time}}$

និយមន័យ ៨.៦.២. យើងហៅ $\xi_{T\wedge n}$ ជាស្ទីតពេលវេលាបញ្ឈប់Stopping Time នៅពេលT។ វាកំនត់ដោយ ξ_n^T ។ ដូចនេះ

$$\forall w \in \Omega\,, \xi_n{}^T(w) = \xi_T(w) \wedge n(w)$$

សំណើ ៨.៦.១. គេឱ្យ T ជាពេលវេលាបញ្ឈប់ *Stopping Time*

១. បើ ξ_n ជាម៉ាធីងហ្គែល នោះ $\xi_{T\wedge n}$ ជា $martingel$

២. បើ ξ_n ជា $Supermartingel$ នោះ $\xi_{T\wedge n}$ ជា $Supermartingel$

៣. បើ ξ_n ជា $Submartingel$ នោះ $\xi_{T\wedge n}$ ជា $Submartingel$

ឧទាហរណ៍ ៨.៦.២. (អ្នកអាចព្យាយាមដើម្បីផ្តលប្រព័ន្ធបើអ្នកមានមូលធន និងពេលវេលា មិនកំនត់) ការអនុវត្តន៍ តាមយុទ្ធសាស្រ្ត លេងល្បែង ត្រូវបាន ហៅថា "**ម៉ាធីងហ្គែល**"(សូមកុំច្រលំការហៅនេះទៅនឹងនិយមន័យទូទៅនៃម៉ាធីងហ្គែលនៅផ្នែកមុន)។

ឧបមាថា កាក់មួយត្រូវបានបោះម្តងហើយម្តងទៀត។ យើងកំនត់លទ្ធផលដោយ $\eta_1\,, \eta_2\,, \ldots$ ដែលអាចយកតម្លៃ $+1$ (មុខ) ឬ -1 (ខ្នង)។ អ្នកភ្នាល់ $1\$$ នៅខាងមុខ។ បើ អ្នកឈ្នះ នោះ អ្នក ឈប់លេង តែបើអ្នកចាញ់ អ្នកត្រូវដាក់លុយថែម២ដងនៃការភ្នាល់ ហើយ លេង ម្តងទៀត។ បើអ្នកឈ្នះនៅជុំនេះ នោះអ្នកឈប់លេង។ ផ្ទុយទៅវិញ បើអ្នកថែមលុយ ឬ ភាគហ៊ុនរបស់អ្នក ម្តងហើយ បន្ថែមតទៅទៀត ដូចនេះ យុទ្ធសាស្រ្តលេងល្បែងរបស់អ្នកគឺ

$$\alpha_n = \begin{cases} 2^{n-1} & \text{បើ} \quad \eta_1 = \eta_2 = \cdots = \eta_n = trail \\ 0 & \text{បើ} \quad other \end{cases}$$

យើងបាន

$$\boxed{\varsigma_n = \eta_1 + 2\eta_2 + \cdots + 2^{n-1}\eta_n} \tag{៨.១៧}$$

ហើយគិតគួដល់ពេលវេលាបញ្ឈប់ នោះ $T = \min\{n : \eta_n = \text{មុខ}\}$ នោះ $\varsigma_{T\wedge n}$ និងជាការឈ្នះរបស់អ្នកបន្ទាប់ពីការប្រកួត n ជុំ វាជាម៉ាធីងហ្គែល(ពិនិត្យវា)។

វាអាចបញ្ជាក់ថា $P\{T < \infty\} = 1$ (ទីបំផុតវានឹងលេចចេញមុខនៅក្នុងស៊ីត $\eta_1, \eta_2, \ldots$ ជាមួយ $P = 1$)។ ដូច្នេះ វាត្រូវតែគិតដល់ ς_T។ នេះគួរតែអាចជាការឈ្នះសរុបរបស់អ្នក បើអ្នកអាចបន្តដើម្បី លេងល្បែងមិនថា ការលេចឡើង នៅមុខ ជាដំបូង យូរប៉ុណ្ណា។ វាអាចត្រូវពេលវេលាមិនកំនត់រួមជាមួយមូលធន(លុយ) បើអ្នកអាចទ្រាំទ្រទាំងនេះបាន អ្នកនឹងឈ្នះជាមិនខាន ទោះបី ς_T ដែល

$$\boxed{-1 - 2 - \cdots - 2^{n-1} + 2^n = 1, \ \ \forall n} \qquad (៨.១៨)$$

៨.៧. ច្រវ៉ាក់ម៉ាកូវ

៨.៧.១. ឧទាហរណ៍ និងនិយមន័យ

ឧទាហរណ៍ ៨.៧.១. នៅក្នុងផ្ទះមួយ ចំនួននៃការប្រើប្រាស់ទូរស័ព្ទនេះ អាចក្លាយជាបញ្ហាដែលគួរតែគិត។ ឧបមាថា បើទូរស័ព្ទនេះទំនេរក្នុងអំឡុងពេលវេលាណាមួយ បានន័យថាការនិយាយនូវនាទីទី n ជាមួយនឹងប្រូបាប៊ីលីតេ p ដែល $0 < p < 1$ នោះវានឹងត្រូវបានរវល់ក្នុង អំឡុងពេលនាទីបន្ទាប់ $n+1$។ តែបើទូរស័ព្ទបានរវល់នៅក្នុងអំឡុងពេលនាទីទី n នោះ វានឹង ទំនេរនៅក្នុងអំឡុងពេលនាទីបន្ទាប់ $n+1$ ជាមួយប្រូបាប៊ីលីតេ q ដែល $0 < q < 1$ ។ សន្មតថា ទូរស័ព្ទ ទំនេរនៅនាទីទី 0 យើងនឹងបង្ហាញចម្លើយទៅតាមពីរសំណួរដូចខាងក្រោម

១. តើប្រូបាប៊ីលីតេ x_n ស្មើប៉ុន្មានពេលដែលទូរស័ព្ទនឹងទំនេរនៅនាទីទី n ?

២. តើ $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ ស្មើប៉ុន្មាន?(បើមាន)

ដំណោះស្រាយ

តាង

- A_n ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលទូរស័ព្ទទំនេរក្នុងអំឡុងពេលនាទីទី n
- $B_n = \Omega / A_n$ ជាបំពេញនៃព្រឹត្តិការណ៍ ដែលទូរស័ព្ទរវល់ កំឡុងពេលនាទីទី n

(ថ្នាក់នៃធាតុទាំងអស់មិនមែនជាធាតុនៃសំនុំដែលគេឱ្យ)

តាមសម្មតិកម្ម

$$P\left(B_{n+1}/A_n\right) = p\,(1) \qquad (៨.១៩)$$

$$P\left(A_{n+1}/B_n\right) = q \qquad (៨.២០)$$

យើងយក $P(A_0) = 1$ $i.e.$ $x_0 = 1$
តាមការកំនត់ យើងមាន $X_n = P(A_n)$
នោះរូបមន្តប្រូបាប៊ីលីតេសរុប យើងយក

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}/A_n) - P(A_{n+1}/B_n) &= p - q \\ x_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\ &= P(A_{n+1}/A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}/B_n)P(B_n) \\ &= (1-p)x_n + q(1-x_n) \\ &= q + (1-p-q)x_n \end{aligned}$$

$$x_{n+1} = q + (1-p-q)x_n \tag{៨.២១}$$

វាជារឿងពិបាកបន្តិចក្នុងការស្វែងរករូបមន្តជាក់លាក់ សម្រាប់ x_n ។
ដើម្បីរកជាដំបូងយើងឧបមាថាស្វ៊ីត $\{x_n\}$ រួមនោះ

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \tag{៨.២២}$$

លក្ខណៈងាយនៃលីមីត និងសមីការ $i.e.$ $x_{n+1} = q + (1-p-q)x_n$ យើងបាន

$$x = q + (1-p-q)x \tag{៨.២៣}$$

ដំណោះស្រាយដែលខុសគ្នាទៅកាន់សមីការចុងក្រោយគឺ

$$x = \frac{q}{q+p} \tag{៨.២៤}$$

យក $x = \dfrac{q}{q+p}$ ជំនួសក្នុង (៨.២៣) យើងបាន

$$\frac{q}{q+p} = q + (1-p-q) \times \frac{q}{q+p} \tag{៨.២៥}$$

ធ្វើផលដករវាង (៨.២.១)&(៨.២៥) យើងបាន

$$x_{n+1} - \frac{q}{q+p} = (1-p-q)\left(x_n - \frac{q}{q+p}\right) \qquad (៨.២៦)$$

ដូចនេះ $\left\{x_n - \frac{q}{q+p}\right\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដូច្នេះ

$$\forall n \in , x_n - \frac{q}{q+p} = (1-p-q)^n \times \left(x_0 - \frac{q}{q+p}\right)$$

តែ $x_0 = 1$

យើងបាន $x_n = \frac{q}{q+p} + \left(1 - \frac{q}{q+p}\right)(1-p-q)^n$

$$\Longrightarrow x_n = \frac{q}{q+p} + \frac{p}{p+q}(1-p-q)^n \qquad (៨.២៧)$$

ទោះបីជា យើង បានប្រើនូវការសន្មត់(៨.២២) ដើម្បី ទាញរក (៨.២៦) តែការស្រាយ បញ្ជាក់នៅពេលក្រោយគឺ ត្រូវបានស្រាយជារួចរាល់។ ជាការពិត ការស្រាយបញ្ជាក់ (៨.២៧) យើងអាចបង្ហាញថាការសន្មត់ (៨.២២) គឺពិតត្រឹមត្រូវ។ នេះគឺ ដោយសារតែលក្ខខណ្ឌ $0 < p, q < 1$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $(1-p-q) < 1$ នោះ $(1-p-q)^n \to 0$ ពេល $n \to \infty$

ដូចនេះ (៨.២២) នៅមិនទាន់បកស្រាយ តែវាបានបែងចែកចម្លើយទៅជាផ្នែកទី២ នៃ ឧទាហរណ៍

យើងបាន
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{q}{q+p}$$

ចំណាំ រូបមន្ត (៨.២១) និង (៨.២២) អាចសរសេរផ្គុំដោយទម្រង់កុំប៉ាក់ ដែលប្រើប្រាស់ វ៉ិចទ័រ និងម៉ាទ្រីស

ដោយ $x_n + y_n = 1$

យើងបាន
$$x_{n+1} = (1-p)\,x_n + qy_n$$
$$y_{n+1} = px_n + (1-q)\,y_n$$

យើងអាចសរសេរជាទម្រង់ម៉ាទ្រីស

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

នេះជាការបកស្រាយ ពីឧទាហរណ៍(៨.៧.១) ដែល សាមញ្ញណាស់ជាញឹកញាប់ប្រូបាប៊ីលីតេ នៃព្រឹត្តិការណ៍ជាក់លាក់នៅខណ:ពេល $n+1$ អាស្រ័យត្រឹមតែពីអ្វីដែលកើតឡើងនៅខណ:ពេល n តែវាមិនមាននៅក្នុងអតីតកាល។ ឧទាហរណ៍(៨.៧.១) បែងចែក ឱ្យយើង ជាមួយករណីធម្មតា នៃច្រវ៉ាក់ម៉ាកូវ។ ចូរមើលពីនិយមន័យ និងលំហាត់ក្រោយៗទៀត។

និយមន័យ ៨.៧.១. ឧបមាថា S ជាសំនុំកំនត់ឬសំនុំរាប់បាន។ និង ឧបមាថាលំហប្រូបាប៊ីលីតេ ត្រូវបានស្គាល់ $(\Omega, \mathbb{F}, P)$។ ស្វីតនៃអថេរចៃដន្យត្រូវបានហៅថា **ច្រវ៉ាក់ម៉ាកូវ** $S-Valued$ ឬ **ច្រវ៉ាក់ម៉ាកូវនៅលើសំនុំ** S បើ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall s \in S \,:\, P\left(\xi_{n+1} = s / \xi_0\,, \xi_1\,, \ldots, \xi_n\right) = P\left(\xi_{n+1} = s / \xi_n\right) \qquad (៨.២៨)$$

ដែល $P\left(\xi_{n+1} = s / \xi_n\right)$ ជាប្រូបាប៊ីលីតេមានលក្ខខណ្ឌ នៃព្រឹត្តិការណ៍ $\{\xi_{n+1} = s\}$ រៀងគ្នានៃអថេរចៃដន្យ ξ_n ឬអាចស្មើគ្នាជាមួយ $\sigma - field \sigma\left(\xi_n\right)$ បន្សំដោយ ។ ជាមួយគ្នាដែរ $P\left(\xi_{n+1} = s / \xi_0\,, \xi_1\,, \ldots, \xi_n\right)$ ជាប្រូបាប៊ីលីតេមានលក្ខខណ្ឌនៃ $\{\xi_{n+1} = s\}$ ធៀបជាមួយ $\sigma - field \, \sigma\left(\xi_0\,, \xi_1\,, \ldots, \xi_n\right)$ បន្សំ ដោយអថេរចៃដន្យ $\xi_0\,, \xi_1\,, \ldots, \xi_n$

លក្ខណ: (៨.២៨) បញ្ជាក់ដូចជា លក្ខណ:ម៉ាកូវនៃច្រវ៉ាក់ម៉ាកូវ ξ_n, $n \in \mathbb{N}$។ សំនុំ S ហៅថា លំហស្តេត ហើយធាតុនៃ S ហៅថាស្តេត។

និយមន័យ ៨.៧.២. $S - Valued$ នៃច្រវ៉ាក់ម៉ាកូវ ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ ហៅថា $time - homogeneous$ ឬអ៊ូម៉ូសែន បើ $\forall n \in \mathbb{N}, \forall i\,, j \in \mathbb{S}$ គេបាន

$$P\left(\xi_{n+1} = j / \xi_n = i\right) = P\left(\xi_1 = j / \xi_0 = i\right) \qquad (៨.២៩)$$

ចំនួន $P\left(\xi_1 = j / \xi_0 = i\right)$ ត្រូវកំណត់ដោយ $P(j/i)$ ហើយហៅថាប្រូបាប៊ីលីតេឆ្លងពីស្តេត i ទៅ j ។ ម៉ាទ្រីស $P[P\left(j/i\right)]_{j\,,i\in\mathbb{S}}$ ហៅថា ម៉ាទ្រីសឆ្លងនៃច្រវ៉ាក់ ξ_n។

និយមន័យ ៨.៧.៣. $A = [a_{ji}]_{i,j\in}$ ហៅថាម៉ាទ្រីសចៃដន្យ (a $stochastic$ $matrix$) បើ

១. $a_{ji} \geqslant 0, \forall i, j \in \mathbb{S}$

២. $\sum_{j\in\mathbb{S}} a_{ji} = 1, \forall i \in \mathbb{S}$ $i.e.$ A ជាម៉ាទ្រីសចៃដន្យឌុប បើ $A\&A'$ ជាម៉ាទ្រីសចៃដន្យ

សំណើ ៨.៧.១. បង្ហាញថា ម៉ាទ្រីសចៃដន្យ ជាម៉ាទ្រីសចៃដន្យឌុប ប្រសិនបើផលបូកចំនួនជួរដេកស្មើ១

$$i.e \sum_{i\in\mathbb{S}} a_{ji} = 1 \ \forall j \in \mathbb{S}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន $A^t = [b_{ij}]$ នោះ

តាមរូបមន្ត ម៉ាទ្រីសត្រង់ស្ប៉ូ $b_{ij} = a_{ji}$

ដូច្នេះ $\boxed{A^t \text{ ជាម៉ាទ្រីសចៃដន្យ ប្រសិនបើ } \sum_i a_{ji} = \sum_i b_{ij} = 1}$

និយមន័យ ៨.៧.៤. ម៉ាទ្រីសឆ្លងលំដាប់ n នៃច្រវ៉ាក់ម៉ាកូវ ξ_n ជាមួយប្រូបាប៊ីលីតេឆ្លះ $P(j/i)$ ដែល $i, j \in \mathbb{S}$ ជាម៉ាទ្រីស

$$P_n : \ P_n(j/i) = P(\xi_n = j/\xi_0 = i)$$

ឧទាហរណ៍ ៨.៧.២. តាង ជាម៉ាទ្រីសចៃដន្យសម្រាប់ច្រវ៉ាក់ម៉ាកូវនៃស្តេត $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ បង្ហាញថា៖

១. $P_{ij}^{(n_1+n_2+n_3)} \geqslant P_{ik}^{(n_1)}.P_{kk}^{(n_2)}.P_{kj}^{(n_3)}$ $, \forall 1 \leqslant i, j, k \leqslant m, \ n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}_0$

២. បើច្រវ៉ាក់ម៉ាកូវមិនអាចសម្រួលបាន និង $P_{ii} > 0$ សម្រាប់(មិនទាំងអស់)នោះច្រវ៉ាក់ម៉ាកូវគឺគ្រប់លក្ខខណ្ឌទាំងអស់ គ្រប់ i

ដំណោះស្រាយ

១. ដោយ $P^{n_1+n_2+n} = P^{n_1}P^{n_2}P^{n_3}$ និងគ្រប់ធាតុនៃម៉ាទ្រីសទាំងអស់ $\geqslant 0$ យើងបាន

$$P_{ij}^{(n_1+n_2+n_3)} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} P_{ik}^{(n_1)}.P_{kl}^{(n_2)}.P_{lj}^{(n_3)} \geqslant P_{ik}^{(n_1)}.P_{kk}^{(n_2)}.P_{kj}^{(n_3)}$$

២. សន្មតថា ច្រវ៉ាក់ម៉ាកូវមិនអាចសម្រួលបាន និង $\exists i$, $P_{ii} > 0$

ដោយ $P_{ii}^{(n)} \geqslant (P_{ii})^n < 0$ ដែលយើងត្រូវតែមាន $P_{ii}^{(n)} > 0$,$\forall n \in {}_0$

យើងបាន

P មិនអាចសម្រួលបាន

ដូច្នេះ $\forall j$,$\exists n_1$ ដែល $P_{ji}^{(n_1)} > 0$ និង $\forall k$,$\exists n_2$ ដែល $P_{ik}^{(n_2)} > 0$

បន្ទាប់មក ធ្វើតាមលក្ខណៈនេះគ្រប់គូ (j,k) បើយើងជ្រើសយក N_1 ជាចំនួនដែលធំបំផុតដែលអាចមាន n_1 និង N_2 ជាចំនួនដែល ធំ បំផុត ដែលអាចមាន n_2 នោះវាយកតាមសំនួរទី១ ដែល

$$P_{jk}^{(N_1+N_2)} \geqslant P_{ji}^{(n_1)} P_{ik}^{(n_2)} P_{ii}^{(N_1-n_1+N_2-n_2)} > 0 \ , n_1 = n_1(j) \ \& \ n_2 = n_2(k)$$

អាស្រ័យលើ $j\&k$ រៀងគ្នា

ដូច្នោះ $\boxed{\text{គ្រប់ធាតុនៃ } P^{N_1+N_2} > 0 \text{ នោះម៉ាទ្រីសចៃដន្យ } P \text{ និយ័ត}}$

សំណើ ៨.៧.២. (សមីការ $Chapman - Kolmogorov$)

ឧបមាថា $\xi_n, n \in \mathbb{N}$ ជាច្រវ៉ាក់ម៉ាកូវ $S - Valued$ ជាមួយនឹងប្រូបាប៊ីលីតេឆ្លុះលំដាប់ $nP_n(j/i)$ នោះ $\forall k, n \in \mathbb{N}$ ដែល

$$P_{n+k}(j/i) = \sum_{s\in\mathbb{S}} P_n(j/S)\,P_k(S/i) \qquad \text{និង} \qquad i,j\in\mathbb{S}$$

សំណើ ៨.៧.៣. $\forall p \in (0,1)$: $P(\xi_n = i/\xi_0 = i) \to 0$ ពេល $n \to \infty$

សំណើ ៨.៧.៤. ប្រូបាប៊ីលីតេនៃជំហានចៃដន្យ ξ_n គឺចាប់ផ្តើមកៀកទៅរកចំនុច $1 - |p - q|$

ឧទាហរណ៍ ៨.៧.៣. គេឱ្យច្រវ៉ាក់ម៉ាកូវនិយ័តនៃស្តេត $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ និងជាមួយម៉ាទ្រីសចៃដន្យ P នោះ $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = g_i$ ដែល $g = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$ គឺជាដេទៃមីណាង់ មិនប្រែប្រួលតែមួយគត់នៃប្រូបាប៊ីលីតេនៃវ៉ិចទ័រ P ។ បង្ហាញថាមានថេរ $k > 0$ និងថេរ $a \in]0,1[$ ដែល $\left|p_{ij}^{(n)} - g_j\right| \leqslant Ka^n$ សម្រាប់ i , $j = 1, 2, \ldots, m \,\&\, n \in \mathbb{N}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\exists k>0, a\in]0,1[$ ដែល $|P_{ij}^n - g_j| \leqslant ka^n,\ \ i,j=1,2,\cdots,m\&n\in\mathbb{N}$
បើ P និយ័ត នោះ $\exists n_0$ ដែល $p_{ij}^{(n)}>0\ ,\forall n\geqslant n_0$ និង $\forall i\,,j=1\,,2\,,\ldots,m$
តាង Q_t ជាវ៉ិចទ័រជួរឈរដែលមាន១នៅក្នុងជួរដេកj និង 0 សម្រាប់ផ្សេងទៀត។
នោះគឺ

$$P^nQ_j=\left(p_{1j}^{(n)},\,p_{2j}^{(n)}\,,\,\ldots,\,p_{mj}^{(n)}\right)^T \qquad \text{បើ} \qquad 0<\varepsilon\,:=\min_{i,j}p_{ij}^{(n_0)}\ \left[clearly<\frac{1}{2}\right]$$

ហើយ $m_n^j\ =\ \min\limits_i p_{ij}^{(n)}$ និង $\ M_n^j\ =\max\limits_i p_{ij}^{(n)}$ នោះ

$$M_n^j-m_n^j\leqslant(1-2\varepsilon)^n=a^n\ \forall j \qquad \text{ហើយ} \qquad m_n^j\leqslant\left\{\begin{matrix}q_j\\ p_{ij}^{(n)}\end{matrix}\right\}M_n^j\ \ \forall n\geqslant n_0$$

ដូច្នេះ $\left|p_{ij}^{(n)}-g_j\right|\leqslant M_n^j-m_n^j\leqslant a^n$ សម្រាប់ $\forall i,j$ និង $\forall n\geqslant n_0$
យើងបាន

$$\left|p_{ij}^{(n)}-g_j\right|\leqslant 1,\qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

សម្រាប់ ដូច្នោះ យើងទទួលបានវិសមភាពទូទៅ បើយើងយក

$$K=(1-2\varepsilon)^{-n_0}=\left(\frac{1}{a}\right)^{n_0}$$

ចំនាំថា ដោយ $0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}$ យើងមាន $a=1-2\varepsilon\in]0,1[$

សំណើ ៨.៧.៥. ប្រូបាប៊ីលីតេនៃលំហាត់៥.១២ ផ្អែក២ស្មើ ០ បើ $\lambda\geqslant 1\,,1-\overset{k}{\Upsilon}$ បើ $\lambda>1$ ដែល k ជាកំណើន $Vugiel$ ដំបូងនិង $\Upsilon\in(0,1)$ ជាចម្លើយ $r=e^{(r-1)\lambda}$

ចំណាំ

វិធីសាស្ត្រ ដែលបានបង្ហាញ នៅក្នុងដំណោះស្រាយចុងក្រោយ ដែលធ្វើសម្រាប់ បំនែងចែកនៃ អថេរ X_t ណាមួយ។ វាប្រែចេញ តម្លៃមធ្យម λ នៃ X_t បានដើរតួនាទី ដូចខាង លើ។ មួយអាច បង្ហាញថា បើ $\lambda\leqslant 1$ នោះកំណើននឹងមានប្រូបាប៊ីលីតេស្មើ១ ខណៈពេល $\lambda>1$ នោះ $0\leqslant P_0<1$ ដែល P_n ជាប្រូបាប៊ីលីតេនៃ $Extinction$

៨.៧.២. . ចំណាត់ថ្នាក់នៃស្តេត

ដូចអ្វីនៅខាងក្រោមនេះ យើងយក S_Valued នៃច្រវ៉ាក់ម៉ាកូវមួយជាមួយម៉ាទ្រីសឆ្លះ

$$P=[p(j/i)]_{j,i\in\mathbb{S}}$$

ដែល $\mathbb{S}$ ជាសំនុំមិនទទេ និងជាសំនុំរាប់បាន។

និយមន័យ ៨.៧.៥. ស្តេត i មួយហៅថា *recurrent* បើ ξ_n កៀកទៅរក i
$i.e\ P(\xi_n=i\,,\exists n\geqslant 1/\xi_0=i)=1 \quad (5.36)$ ដែលបានផ្តល់ឱ្យដែលវាចាប់ផ្តើមនៅពេល
បើលក្ខខណ្ឌ (5.36) មិនបំពេញនោះស្តេត ហៅថា *transient*

សំណើ ៨.៧.៦. បង្ហាញថា ជំហានចៃដន្យលើ ជាមួយប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $p\in(0,1)$ ដែលស្តេត ជា ប្រសិនបើ $p=\dfrac{1}{2}$ ។ បង្ហាញថា ដូចគ្នានេះដែរ បើ 0 ត្រូវបាន ជំនួស ដោយគ្រប់ ស្តេត i ផ្សេងទៀត $i\in\mathbb{Z}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងស្គាល់ពី (5.25) ដែល

$$P(\xi_n=i\,,\exists n\geqslant 1/\xi_0=i)=1-|p-q|\ \ \forall i\in\mathbb{Z}$$

និយមន័យ ៨.៧.៦. យើងថាស្តេត i មួយមានទំនាក់ទំនងជាមួយស្តេត j
បើប្រូបាប៊ីលីតេវិជ្ជមាន នោះច្រវ៉ាក់ : $P(\xi_n=j\,,\exists n\geqslant 0/\xi_0=i)>0$

បើ i មានទាក់ទងនឹង j នោះយើងនឹងសរសេរ $i\to j$
យើងថាស្តេត i ទាក់ទងនឹងស្តេត j ដែលអាចសរសេរ $i\leftrightarrow j$ បើ $i\to j$ និង $j\to i$ ។

ឧទាហរណ៍ ៨.៧.៤. ពិចារណាម៉ាទ្រីសខាងក្រោម π

$$\pi=\begin{bmatrix}0.6&0.4&0&0\\0.3&0.7&0&0\\0&0&0.5&0.5\\0&0&0.7&0.3\end{bmatrix}$$

វាត្រូវបានសង្កេតឃើញថានៅពេលដែលដំណើរការនេះ ចាប់ផ្តើមនៅស្តេត $i=1$ ឬស្តេត $j=2,\ i=3$ និង $j=4$ មិនអាចឈានបានសម្រេច។

យើងអាចថា $i=1$ និង $j=2$ ទាក់ទងគ្នា។ វាពិតចំពោះ $i=3$ និង $j=4$ ។ ខណៈពេលដែលចាប់ផ្តើមពីមួយក្នុងចំណោម ស្តេតពីរគឺ $i=1$ ឬ $j=2$ មិនត្រូវបានដល់។ ជាការពិត សម្រាប់ច្រវ៉ាក់ពិតជាក់លាក់នេះ វាមានពីរថ្នាក់បិទគឺ $\{i=1,j=2\}$ និង $\{i=3,j=4\}$

ទ្រឹស្តីបទ ៨.៧.១. ស្តេត j មួយដែល $j\in\mathbb{S}$

- ជា *recurrent* ប្រសិនបើ $P\left(\xi_n=j\right.$ សម្រាប់ n ច្រើនមិនកំណត់ $\left.n/\xi_0=j\right)=1$
- ហើយវាជា *transient* ប្រសិនបើ $P\left(\xi_n=j\right.$ សម្រាប់ n ច្រើនមិនកំណត់ $\left.n/\xi_0=j\right)=0$

និយមន័យ ៨.៧.៧. សម្រាប់ច្រវ៉ាក់ម៉ាកូវ $S-Valued\ \xi_n/n\in\mathbb{N}$ ដែលស្តេត $i\in\mathbb{S}$ ត្រូវបានហៅថា *recurrent* សូន្យបើវាជា *recurrent* ហើយ $m_i\,(mean\ recurrence\ time)$ កំនត់ដោយ

$$m_i=\sum_{n=0}^{\infty}nf_n\left(i/i\right)\qquad(5.44)$$

m_i ស្មើ ∞។ ស្តេតមួយ $i\in\mathbb{S}$ ហៅថា *recurrent* វិជ្ជមានបើវាជា *recurrent* ហើយ m_i កំនត់។

ចំណាំ

យើងអាចបង្ហាញថា ស្តេតផ្នូន គឺជាផ្នូនសូន្យ ប្រសិនបើ $P_n\left(i/i\right)\to 0$ យើងបានដឹងហើយថា ជំហានចៃដន្យលើ $\mathbb{Z}$ ស្តេត 0 គឺផ្នូន ប្រសិនបើ $p=\dfrac{1}{2},\ \ i.e.$ លុះត្រាតែ ជំហានចៃដន្យគឺឆ្លុះ។ លំហាត់ខាងក្រោមនេះ យើងគួរតែព្យាយាមរកចម្លើយ បើ 0 ជាផ្នូនសូន្យ ឬស្តេតផ្នូនវិជ្ជមាន(ពេល $p=\dfrac{1}{2}$)។

និយមន័យ ៨.៧.៨. ឧបមាថា $\xi_n, n \in \mathbb{N}$ ជាច្រវ៉ាក់ម៉ាកូវលើលំហាស្តេតS ។ គេឱ្យ $i \in S$ យើងថា i ជាស្តេតខួបលុះត្រាតែ តួចែករួមធំបំផុត នៃ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ដោយ $\mathbb{N}^* = \{1,2,3,\dots\}$ ដែល $P_n(i/i) > 0$ គឺ $i \geqslant 2$ ផ្ទុយពីនេះ ស្តេត i ហៅថា *aperiodic*។ នៅក្នុងករណីទាំងពីរនេះ gcd ត្រូវ កំណត់សរសេរដោយ $d(i)$ ហើយ $d(i)$ ហៅថាស្តេតខួប i ដូច្នោះ i គឺជាខួបលុះត្រាតែ $d(i) \geqslant 2$ ។ ស្តេត i មួយដែលផ្ទួនវិជ្ជមាន និង *aperiodic* ហៅថា *ergodic*។

សាមយិកភាព *Periodicity*

ពិចារណាលើ គម្រូទ្វេធាសម្រាប់បរិវត្តនៃ តម្លៃភាគហ៊ុន S កំនត់ ដោយគ្រប់ថ្ងៃ $t+1$ ដោយ

$$S_{t+1} = \begin{cases} uS_t & with \quad p \\ dS_t & with \; 1-p \end{cases}$$

ការក្រិតធម្មតាសម្រាប់គម្រូនេះ គឺដើម្បីសន្មត់ $d = \frac{1}{u}$។ នៅក្នុងករណីនេះ បើតម្លៃដើមS_0 គឺ $100\$$ នោះអ្នកប្រាកដថាតម្លៃមិនអាច ត្រឡប់ទៅជា $d = \frac{1}{u}$ ទេនៅ ក្នុងកំឡុងពេលមិន តិចជាពីរ។

សំណើ ៨.៧.៧. ឧបមាថា $i, j \in \mathbb{S}$ និង $i \leftrightarrow j$ បង្ហាញថា

១. i ជា *transient* លុះត្រាតែ j ក៏ជា *transient* ដែរ

២. i ជា *recurrent* លុះត្រាតែ j ក៏ជា *recurrent* ដែរ

៣. i ជា *recurrent* សូន្យលុះត្រាតែ j ក៏ជា *recurrent* សូន្យដែរ

៤. i ជា *recurrent* វិជ្ជមានលុះត្រាតែ j ក៏ជា *recurrent* វិជ្ជមានដែរ

៥. i ជាខួបលុះត្រាតែ j ខួបដែល $d(i) = d(j)$

៦. i ជា *ergodic* លុះត្រាតែ j ជា *ergodic*

.

និយមន័យ ៨.៧.៩. ឧបមាថា $\xi_n, n \in \mathbb{N}$ ជាច្រវ៉ាក់ម៉ាកូវលើលំហាស្តេត រាប់បាន $\mathbb{S}$

១. សំនុំ $C \subset S$ ហៅថាបិទ បើច្រវ៉ាក់មួយបានចូលក្នុង C ម្តង នោះវា

$$P(\xi_n \; S \backslash c, \exists k \geqslant n / \xi_n \in C) = 0 \quad (5.45)$$

២. សំនុំ $C \subset S$ ហៅថាមិនអាចសម្រួលបាន បើគ្រប់ពីរធាតុ i, j នៃ C ទាក់ទងគ្នាទៅវិញទៅមក មានន័យថា $\forall i, j \in C, \exists n \in \mathbb{N}$ ដែល $P_n(j/i) > 0$

លំហាត់អនុវត្តន៍

លំហាត់ ៨.១. គេឱ្យ $\xi_1, \xi_2, \cdots$ ជាស៊ីត នៃការបោះកាក់ និង $\mathbb{F}_n$ ជាកាយ $\sigma\,(\sigma - field)$ បន្សំដោយ $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ ។ សម្រាប់ព្រឹត្តិការណ៍បន្តបន្ទាប់និមួយៗ ចូររកតម្លៃ n តូចបំផុតដែល $n \in \mathbb{F}_n$

- $A =$" ព្រឹត្តិការណ៍កើតឡើងដំបូងនៃមុខ ដែលត្រូវបាននាំមុខ ដោយ មិនលើសពី ការចេញខ្នងចំនួន 10 ដង"
- $B =$ " ព្រឹត្តិការណ៍ដែល យ៉ាងហោចណាស់បោះបានមុខម្តងនៅក្នុងស៊ីត $\xi_1, \xi_2, \cdots$"
- $C =$ "ព្រឹត្តិការណ៍ដែលបោះកាក់ 100 ដងដំបូងទទួលបានលទ្ធផលដូចគ្នា"
- $D =$" ព្រឹត្តិការណ៍ដែលបោះកាក់បានយ៉ាងច្រើនមុខ 2 និងខ្នង 2 ក្នុងពេលបោះកាក់ចំនួន 5 ដងដំបូង"

លំហាត់ ៨.២. បង្ហាញថា $\mathbb{F}_n = \sigma\,(\xi_1\,,\,\xi_2\,,\,\ldots,\,\xi_n)$ ជាសំនុំព័ត៌មានដែល បានដឹងដ៏តូចបំផុតដែលក្នុងនោះ ស៊ីត $\xi_1\,,\,\xi_2\,,\,\ldots,\,\xi_n$ ត្រូវបានប្តូរស្របទៅជា $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2$ ។ ដូចនោះ បើ $\zeta_1\,,\,\zeta_2\,,\,\ldots$ ជាសំនុំព័ត៌មាន ផ្សេងទៀតដែល $\xi_1\,,\,\xi_2\,,\,\ldots$ ត្រូវបានប្តូរស្របទៅជា $\zeta_1\,,\,\zeta_2\,,\,\ldots$ នោះ $\mathbb{F}_n \subset \zeta_n\,, \forall\, n$

ណែនាំ៖ បើ $\sigma\,(\xi_1\,,\,\xi_2\,,\,\ldots,\,\xi_n) \subseteq \zeta_n$ នោះអ្នកត្រូវបង្ហាញថា $\xi_1\,,\,\xi_2\,,\,\ldots,\,\xi_n$ ជារង្វាស់ ζ_n

លំហាត់ ៨.៣. គេឱ្យ W_n តំណាងឱ្យជំហានចៃដន្យឆ្លុះចាប់ផ្តើមនៅថ្ងៃ 0 នោះគឺ $p = \dfrac{1}{2}$ និង $W_0 = 0$ ។ តាង X តំណាងឱ្យ ចំនួនជំហាន ទៅខាងស្តាំ នៃអ្នកដើរ ដោយចៃដន្យ ដែលបាន 6 ជំហានដំបូង។ គណនា៖

១. $E(X/W_1 = -1)$

២. $E(X/W_1 = 1)$

៣. $E(X/W_1 = 1, W_2 = -1)$

៤. $E(X/W_1 = 1, W_2 = -1, W_3 = -1)$

លំហាត់ ៨.៤. បង្ហាញថា ξ_n បើជាម៉ាធីងហ្គែលរៀងគ្នាទៅ $\mathbb{F}_n$ នោះ $E\,(\xi_1) = E\,(\xi_2) = \ldots$

ណែនាំ តាម $\zeta_n \subset \mathbb{F}_n$ និងប្រើលក្ខណៈ $Tower$ នៃសង្ឃឹមមានលក្ខខណ្ឌ

លំហាត់ ៨.៥. គេឱ្យ ξ_n ជាជំហានចៃដន្យស៊ីមេទ្រីឆ្លុះនោះ $\xi_n = \eta_1 + \ldots + \eta_n$ ដែល $\eta_1\,,\,\ldots,\,\eta_n$ ជា ស្វ៊ីតនៃបំនែងចៃកអថេរចៃដន្យ មិនអាស្រ័យគឺ $P\left\{\eta_1 = 1\right\} = P\left\{\eta_n = -1\right\} = \dfrac{1}{2}$ (ស្វ៊ីតមួយនៃការបោះកាក់ ជាឧទាហរណ៍)។ បង្ហាញថា ${\xi_n}^2 - n$ ជា ម៉ាធីងហ្គែល ធៀបនឹង សំនុំព័ត៌មាន $_n = \sigma\left(\eta_1,\,\ldots,\eta_n\right)$

ណែនាំ អ្នកប្តូរទៅជា $E\left({\xi_{n+1}}^2 - (n+1)\,/_n\right)$ ទៅជា ${\xi_n}^2 - n$

យើងបាន

$$\begin{aligned} {\xi_{n+1}}^2 &= \left(\xi_n + \eta_{n+1}\right)^2 \\ &= \eta_{n+1}^2 + 2\times\eta_{n+1}\times\xi_n + {\xi_n}^2 \end{aligned}$$

និងសន្មតយក ξ_n ជារង្វាស់ $\mathbb{F}_n$ ខណៈដែល η_{n-1} មិនអាស្រ័យ $\mathbb{F}_n$

ដើម្បីប្តូរសង្ឃឹមគណិតមានលក្ខខណ្ឌ អ្នកអាចប្រើនៅអ្វីដែលអ្នកបានដឹងហើយប្រើប្រាស់នូវភាពពិតដែល ដកចេញនូវលក្ខខណ្ឌឯករាជ្យ តែកុំភ្លេច បញ្ជាក់ថា ${\xi_n}^2 - n$ មាន អាំងតេក្រាល ហើយប្តូរស្របនឹង $\mathbb{F}_n$ ។

លំហាត់ ៨.៦. គេឱ្យ ξ_n ជាជំហានចៃដន្យ និង $\mathbb{F}_n$ ជាសំនុំព័ត៌មានដែលបានកំនត់នៅក្នុង លំហាត់ (៨.៥) ចូរបង្ហាញថា $\varsigma_n = (-1)^n\cos\left(\pi\xi_n\right)$ ជាម៉ាធីងហ្គែលធៀបនឹង $\mathbb{F}_n$ ។

ណែនាំ អ្នកប្តូរ $E\left((-1)^{n+1}\cos\left(\pi\xi_{n+1}/\mathbb{F}_n\right)\right)$ ទៅជា $(-1)^n\cos\left(\pi\xi_n\right)$។ ប្រើនៅ ដំណោះស្រាយដូចលំហាត់(៨.៥)។ តែដំបូង ត្រូវប្រាកដថា ς_n មាន អាំងតេក្រាល និងប្តូរស្របទៅនឹង $\mathbb{F}_n$ ។

លំហាត់ ៨.៧. គេឱ្យ ξ_n ជាស្វ៊ីតនៃអថេរចៃដន្យដែលមានអាំងតេក្រាលឧប។ បង្ហាញថា បើ ξ_n ជា ម៉ាធីងហ្គែលធៀបទៅនឹងសំនុំព័ត៌មាន $\mathbb{F}_n$ នោះ ξ_n^2 ជា $Supermartingale$ ធៀបទៅនឹង $\mathbb{F}_n$ ។

ណែនាំ ប្រើវិសមភាព $Jensen$ ជាអនុគមន៍ $convex$ $\varphi(x) = x^2$

លំហាត់ ៨.៨. បង្ហាញថា លក្ខខណ្ឌខាងក្រោមនេះគឺសមភាព៖

១. $\{\tau \leqslant n\} \in \mathbb{F}_n\,, \forall n = 1\,,2\,,\ldots$

២. $\{\tau = n\} \in \mathbb{F}_n, \forall n = 1\,,2\,,\ldots$

ណែនាំ តើអ្នកអាចបញ្ជាក់ $\{\tau \leqslant n\}$ ជាទម្រង់នៃព្រឹត្តិការណ៍ $\{\tau = k\}\,, k = 1\,,2\,,\ldots,n$ ឬទេ? និងតើអ្នកអាចបញ្ជាក់ $\{\tau = n\}$ ជាទម្រង់នៃព្រឹត្តិការណ៍ $\{\tau \leqslant k\}\,, k = 1\,,2\,,\ldots,n$ ឬទេ?

លំហាត់ ៨.៩. គេឱ្យ ξ_n ជាស៊ីតនៃអថេរចៃដន្យដែលប្រែប្រួលទៅតាម $\mathbb{F}_n$ និង $B \subset \mathbb{R}$ ជាសំនុំ $Borel$ ។ បង្ហាញថា ពេលវេលានៃការចូលដំបូងនៃ ξ_n ទៅក្នុង B
$T = \min\{n : \xi_n \in B\}$ ជាពេលវេលាបញ្ឈប់

ណែនាំ មើលឧទាហរណ៍(៨.៥) ក្នុងករណីពេល $B = (-\infty, 0] \cup [10, +\infty)$ ពង្រីក នូវបញ្ហា ដើម្បីជាសំនុំ $Borel\ B$ ណាមួយ។ ដោយតាង ξ_n ជា ស៊ីតនៃ អថេរចៃដន្យ ប្រែប្រួល ទៅតាម សំនុំព័ត៌មាន $\mathbb{F}_n$ និង τ ជាពេលវេលាបញ្ឈប់(ធៀបទៅនឹងសំនុំព័ត៌ដូចគ្នា)។ ឧបមាថា ξ_n តំណាងឱ្យការឈ្នះ(ឬចាញ់)បន្ទាបពីការប្រកួត n ជុំ។
បើអ្នកសម្រេចចិត្តឈប់លេងបន្ទាប់ពី τ ជុំ នោះការឈ្នះសរុបរបស់អ្នកគឺ ξ_τ ។ នៅក្នុងករណីនេះ ការឈ្នះរបស់អ្នកបន្ទាប់ពី n ជុំ នោះអ្នកនឹងឈ្នះបាន $\xi_{\tau\wedge n}$។ នេះ $a \wedge b$ តំណាងឱ្យ ចំនួនលេខដែលតូចជាងគេ a និង b គឺ $a \wedge b = \min(a, b)$

លំហាត់ ៨.១០. បង្ហាញថា បើ ξ_n ជាស៊ីតនៃអថេរចៃដន្យប្រែប្រួលទៅតាម សំនុំព័ត៌មាន $\mathbb{F}_n$ នោះ $\mathbb{F}_n$ គឺជាស៊ីតនៃ $\xi_{\tau\wedge n}$ ។

ណែនាំ គ្រប់សំនុំ $Borel\ B$ បញ្ជាក់ $\{\xi_{\tau\wedge n} \in B\}$ នៅក្នុងទម្រង់នៃព្រឹត្តិការណ៍ $\{\xi_k \in B\}$ និង $\{\tau = k\}$ ដែល $k = 1, 2, \ldots, n$ ។

លំហាត់ ៨.១១. បង្ហាញថា បើអ្នកលេងល្បែងប្រកួត ម៉ាធីងហ្គែល ការសង្ឃឹមទុករបស់អ្នកនឹងបាត់បន្ទាប់មុនពេលការឈ្នះដែលគ្មានដែនកំណត់ គឺមិនកំនត់ នោះគឺ $E(\varsigma_{\tau-1}) = -\infty$

ណែនាំ តើប្រូបាប៊ីលីតេស្មើប៉ុន្មានបើល្បែងនឹងបញ្ចប់នៅ ជំហាន n មានន័យថា $\tau = n$? បើ $\tau = n$ តើ $\varsigma_{\tau-1}$ ស្មើប៉ុន្មាន? នេះនឹងឱ្យអ្នកគ្រប់តម្លៃ ដែលអាចមាននៃ $\tau = n$ និងប្រូបាប៊ីលីតេរបស់វា។ ឥលូវ ចូរគណនាសង្ឃឹមនៃ $\varsigma_{\tau-1}$

លំហាត់ ៨.១២. បង្ហាញថា បើ ξ_n គឺជា $Supermartigale$ មិនអវិជ្ជមាន នោះវារួម ទៅជាអាំងតេក្រាលនៃអថេរចៃដន្យមួយ

ណែនាំ ដើម្បីយកទ្រឹស្តីបទនៃ $Doob$ មកស្រាយបញ្ជាក់ពីស៊ីត ξ_n គឺទាល់នៅក្នុង L^1 មានន័យថា $supremum$ នៃ $E(|\xi_n|)$ គឺតូចជាង ∞

លំហាត់ ៨.១៣. នៅក្នុងទម្រង់ឧទាហរណ៍៥.១ y_n តំណាងឱ្យប្រូបាប៊ីលីតេដែលទូរស័ព្ទជាប់រវល់នៅនាទីទី n ។ ឧបមាថា $y_0 = 1$ ចូររករូបមន្តអាំភ្លីស៊ីត y_n ហើយបើមាន រក $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$

ណែនាំ លំហាត់នេះអាចត្រូវបានដោះស្រាយផ្ទាល់ ដោយបញ្ហាខាងលើម្តងទៀត ឬមិនផ្ទាល់ ដោយប្រើប្រាស់លទ្ធផលមួយចំនួននៅក្នុងឧទាហរណ៍។

លំហាត់ ៨.១៤. នៅក្នុងការពិភាក្សាយ៉ាងយូរ យើងធ្លាប់បានឃើញឧទាហរណ៍នៃម៉ាទ្រីសឆ្លង $P = \begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix}$ ផ្ទុយពីនេះ ផលបូកនៃការចូលនៅក្នុងជួរឈរនិមួយៗនៃ P គឺស្មើនឹង១។ បង្ហាញថា វាពិតជាទូទៅ។

ណែនាំ ចាំថា $P(\Omega/A) = 1\ ,\ \ \forall A$

លំហាត់ ៨.១៥. បង្ហាញថា $P = [p_{ji}]_{j,i \in S}$ បើជាម៉ាទ្រីសចៃដន្យ នោះគ្រប់ចំនួន ស្វ័យគុណធម្មជាតិ P_n នៃ P គឺជាម៉ាទ្រីសចៃដន្យ។ តើមានលទ្ធផលពិតទេសម្រាប់ម៉ាទ្រីសចៃដន្យឌុប?

ណែនាំ បង្ហាញថា បើ A និង B ជាម៉ាទ្រីសចៃដន្យពីរ នោះគឺ BA ។ សម្រាប់បញ្ហាទី២ យក $(BA)^t = A^t B^t$ ។

លំហាត់ ៨.១៦. គេឱ្យ $P = \begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix}$ បង្ហាញថា

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1+p^2-2p+pq & 2q-pq-q^2 \\ 2p-pq-p^2 & 1+q^2-2q+pq \end{bmatrix}$$

លំហាត់ ៨.១៧. បង្ហាញថា $P_n = P^n$ សម្រាប់ $\forall n \in \mathbb{N}$ ដែល P^n ជាម៉ាទ្រីសស្វ័យគុណនៃ P។

លំហាត់ ៨.១៨. សម្រាប់ច្រវ៉ាក់ម៉ាកូវ ξ_n ជាមួយម៉ាទ្រីសឆ្លង $P = \begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix}$ បង្ហាញថាស្តេតទាំងពីរជា $recurrent$ ។

លំហាត់ ៨.១៩. បង្ហាញថា បើ ξ_n គឺជាច្រវ៉ាក់ម៉ាកូវជាមួយនឹងលំហស្តេតកំនត់ S នោះ មានយ៉ាងតិចណាស់មួយជាស្តេត $recurrent\ i \in S$ ។

លំហាត់ ៨.២០. ឧបមាថា $a \geqslant 1$ គឺជាចំនួនពិតធម្មជាតិ។ ពិចារណាទៅលើជំហានចៃដន្យនៅលើ $S = \{0\,,1\,,2\,,\,\ldots\,,\,a\}$ ជាមួយនឹងការរាំងនៅខណៈ 0 និង a ហើយជាមួយ ប្រូបាប៊ីលីតេ p នៃ ការផ្លាស់ប្តូរទៅខាងស្តាំ និងប្រូបាប៊ីលីតេ $q = 1-p$ នៃការផ្លាស់ប្តូរទៅខាងឆ្វេងពីគ្រប់ស្តេត $1\,,\,2\,,\,\ldots\,,a-1$ ដូច្នោះ ជំហានចៃដន្យរបស់យើង គឺជាច្រវ៉ាក់ម៉ាកូវជាមួយនឹងប្រូបាប៊ីលីតេឆ្លង

$$p\,(j/i) = \begin{cases} p & \text{បើ} \quad 1 \leqslant i \leqslant a-1\,, j = i+1 \\ q & \text{បើ} \quad 1 \leqslant i \leqslant a-1\,,\, j = i-1 \\ 1 & \text{បើ} \quad i = j = 0 \quad \text{ឬ} \quad i = j = a \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

ចូររកៈ

១. គ្រប់រង្វាស់មិនប្រែប្រួល(ប្រហែលមានត្រឹមតែមួយ)

២. ប្រូបាប៊ីលីតេនៃការប្រថុយនូវការរាំងខាងស្តាំដៃមុនពេលទៅកាន់ខាងឆ្វេងដៃ។

ឯកសារយោង

[1] Patrick Roger, Stochastic Processes for Finance, Strasbourg University,Em Stras bourg Business School, June 2010

[2] CLARENCE H. RICHARDSON, PH.D.,ISAIAH LESLIE MILLER, Finance Mathematics,NEW YORK D. VAN NOSTRAND COMPANY, INC. 250 FOURTH AVENUE, 1946

[3] Ahmad Nazi Wahidudin,Ph.D, Ventus Publishing Aps ,Interest Rates in Financial Analysis and Valuation,2011

[4] Dennis Cox and Michael Cox, The Mathematics of Banking and Finance ,England , 2006

[5] Marek Capinski, Tomasz ZastaWniak, Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering , Springer, January 2003

[6] David LoveLock, Marilou Mendel, A Lerry Wright , An Introduction to the Mathematics of Money Saving and Investing ,Springer,2007

[7] Steven Roman , Introduction to the Mathematics of Finance, Springer,2012

[8] Leif Mejlbro, Stochastic Processes 1, 2009

[9] Patrick Roger, Stochastic Processes for Finance, Strasbourg University, Em Strasbourg Business School, 2010

[10] J.J. McCUTCHEON and W.F. SCOTT, An Introduction to the Mathematics of Finance

[11] Basic Stochastic Processes (Zdzislaw Brzezniak and Tomasz Zastawniak)

[12] Jonathan Block, Stochastic Processes and the mathematics of Finance, 2008

[13] Patrick Roger, Probability for Finance, Strasbourg University, Em Strasbourg Business School, 2010

[14] Clarence H.Richardson, PH.D , Isaiah Leslie Miller, Financial Mathematics , New York, D.VAN NOSTRAND COMPANY 250 Fourth Avenue , 1946