ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ


វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

National Institute of Education


# គណិតវិទ្យា

Pierre de Fermat (1601-1665 )

## តក្កវិទ្យា

| $p$ | $q$ | $\bar{p}$ | $\bar{q}$ | $\bar{p} \vee \bar{q}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

## សំណុំ

40
30
10
70
50
80
20

$$1^{1993} + 2^{1993} + 3^{1993} + \ldots + 1000^{1993}$$

$$9 \times 99 \times 999 \times \ldots \times 999\ldots9$$

## ចំនួន

ចំនួនពិត
- ចំនួនអសនិទាន ៖ $\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \ldots.$
- ចំនួនសនិទាន ៖ $\frac{1}{7}, -\frac{3}{8}, 3\frac{1}{4}, 1, 0, -1, \ldots\ldots\ldots.$

### ក្នុងសៀវភៅនេះរួមមាន ៖

- មេរៀនសង្ខេប
- លំហាត់និងចម្លើយតាមមេរៀន
- ការអនុវត្តភាពចែកដាច់


រៀបរៀងដោយ : គរុនិស្សិតជំនាន់ទី ២១



ឆ្នាំសិក្សា ២០១៥ - ២០១៦

គណិតវិទ្យា តក្ក សំណុំ និងចំនួន ឆ្នាំ ២០១៦

# វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ
# National Institute of Education

មុខវិជ្ជាឯកទេស ៖ គណិតវិទ្យា

សាស្ត្រាចារ្យណែនាំ ៖ ឡឹយ សុគា

## ប្រធានបទ៖ តក្កវិទ្យា សំណុំ និងចំនួន

**សិក្សាស្រាវជ្រាវដោយគរុនិស្សិតគណិតវិទ្យា ៖**

| | |
|---|---|
| លោក ខុន ខេត្ត | កញ្ញា ហ៊ុន រីណា |
| លោក ឆាន ឆាយ | លោក ស្រី សំណាង |
| លោក គីម ដា | លោក ម៉ូញ ណុយ |

ឆ្នាំសិក្សា ២០១៥-២០១៦

**រៀបរៀងដោយ**

| | |
|---|---|
| លោក ខុន ខេត្ត | កញ្ញា ហ៊ុន រីណា |
| លោក ឆាន ឆាយ | លោក ស្រី សំណាង |
| លោក គីម ដា | លោក ម៉ូញ ណុយ |

**បច្ចេកទេសកុំព្យូទ័រ**

លោក ខុន ខេត្ត

**គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ និង ឯកភាព**

សាស្ត្រាចារ្យ៖ ឡឹយ សុគា

# អារម្ភកថា

យើងខ្ញុំបានគិតខិតខំរៀបរៀងសៀវភៅរបាយការណ៍ស្រាវជ្រាវក្រោមប្រធានបទ **តក្ក សំណុំ និងចំនួន** នេះឡើងដោយយោងលើមូលហេតុនៃការបំពេញលក្ខខណ្ឌដើម្បីត្រៀមបញ្ចប់ការសិក្សា នៅ **វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ**។ ជាមួយគ្នានេះផងដែរ យើងខ្ញុំបានខិតខំយកអស់កម្លាំងកាយ កម្លាំងចិត្តបង្កើតជារបាយការណ៍ស្រាវជ្រាវនេះដើម្បីចូលរួម បកស្រាយបំភ្លឺ ឲ្យងាយយល់ ឆាប់ចេះ ស៊ីជម្រៅ បានរហ័សបន្ទាប់ពីបានអាន និងពិចារណាឲ្យបានទូលំទូលាយចំពោះរូបមន្ត និងវិធីសាស្ត្រក្នុងប្រធានបទនេះ។

របាយការណ៍ថ្មីនេះ ត្រូវបានយើងខ្ញុំខិតខំសម្រិតសម្រាំង ស្របតាមការណែនាំរបស់អ្នកគ្រូ **ឡឹយ សុគា** សាស្ត្រាចារ្យនៃ **វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ** ។ ក្នុងការស្រាវជ្រាវចងក្រងរបាយការណ៍នេះ យើងខ្ញុំបានជួបការលំបាកជាច្រើន ដោយខ្វះខាតបទពិសោធន៍ និងពេលវេលា ប៉ុន្តែទោះបីជាយ៉ាងណាក៏ដោយ ក៏យើងខ្ញុំមិនរាថយក្នុងការស្រាវជ្រាវនេះឡើយ យើងខ្ញុំបានខិតខំ ធ្វើឲ្យស្នាដៃនៃវិទ្យាសាស្ត្រពិតមួយនេះបានសម្រេចជោគជ័យ និងលេចជារូបរាងឡើង។ យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា វានឹងមានតម្លៃសម្រាប់មិត្តអ្នកអាន អ្នកសិក្សា ទាំងអស់ដែលត្រូវការវា។

យើងខ្ញុំសូម ខន្តីអភ័យទោសទុកជាមុន ចំពោះកំហុសឆ្គងទាំងប៉ុន្មានដែលកើតមានឡើងក្នុងរបាយការណ៍នេះដោយអចេតនា ព្រោះចំណេះដឹង និងបទពិសោធន៍របស់យើងខ្ញុំនៅមានកម្រិតនៅឡើយ។

ជាចុងក្រោយនេះ ក្នុងនាមយើងខ្ញុំជាគរុនិស្សិតនៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ សូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅដល់មិត្តអ្នកអាន អ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវទាំងអស់ ដែលបានចំណាយពេលវេលាដ៏មានតម្លៃក្នុងការអានរបាយការណ៍នេះតាំងពីដើមរហូតដល់ចប់ និងសូមគោរពជូនពរមិត្តអ្នកអាន អ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវទាំងអស់ឲ្យជួបតែសេចក្តីសុខគ្រប់ពេលវេលា។

ភ្នំពេញ , ថ្ងៃទី ១៦ ខែ មិថុនា ឆ្នាំ២០១៦

គរុនិស្សិតគណិតក្រុម៥ជំនាន់ទី២១

# សេចក្ដីថ្លែងអំណរគុណ

(Acknowledgment)

យើងខ្ញុំទាំងអស់គ្នាជាបុគ្គលិក ជានិស្សិតមកពីខេត្តព្រៃវែង ស្វាយរៀង និង តាកែវ សព្វថ្ងៃជាគរុនិស្សិតបរិញ្ញា+១ ជំនាន់ទី២១ ឯកទេសគណិតវិទ្យានៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ឆ្នាំសិក្សា២០១៥-២០១៦។

**សូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅចំពោះ**

១.អ្នកមានគុណ និងក្រុមគ្រួសារទាំងអស់គ្នាដែលមានទីលំនៅខេត្តព្រៃវែង ស្វាយរៀង និង តាកែវ ។ កូនមិនដែលបំភ្លេច គុណណូបការៈគុណដែលលោកបានផ្តល់កំណើតព្រមទាំង ចិញ្ចឹមបីបាច់ថែរក្សា តាំងពីតូចដល់ធំ ទំនុកបម្រុងសព្វបែបយ៉ាងរហូតទទួលបានចំណេះដឹងដូចសព្វថ្ងៃ ។ កូនចងចាំជានិច្ចនូវគុណដ៏សែនធ្ងន់មិនអាចកាត់ថ្លៃបានរបស់លោកទាំងពីរ ។

២.ឯកឧត្តមបណ្ឌិត **សៀង សុវណ្ណា** នាយកវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំដែលបានផ្តល់ឱកាសឲ្យយើងខ្ញុំទាំងអស់គ្នា ប្រឡង និងបានបន្តការសិក្សារហូតដល់ចប់ប្រកបដោយជោគជ័យ ។

៣.លោក-លោកស្រី សាស្ត្រាចារ្យ ទាំងអស់ដែលបានបង្ហាត់បង្រៀនយើងខ្ញុំ នាពេលកន្លងមក សូមលោកជួប តែសំណាងល្អ និងសុខភាពល្អជានិច្ច ។

៤.អ្នកស្រីសាស្ត្រាចារ្យ **ឡឹយ សុគា** ដែលបានបង្ហាត់បង្រៀន និងដឹកនាំធ្វើរបាយការណ៍ស្រាវជ្រាវលើមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យាផ្នែក **តក្ក សំណុំ និងចំនួន** ដែលបានផ្តល់នូវចំណេះដឹង និងវិធីសាស្ត្រល្អៗ ដល់រូបយើងខ្ញុំ ។

ជាទីបញ្ចប់យើងខ្ញុំសូមប្រសិទ្ធិពរជ័យជូនដល់អ្នកមានគុណ ឯកឧត្តម បណ្ឌិត ថ្នាក់ដឹកនាំរាជរដ្ឋាភិបាលព្រមទាំងសាស្ត្រាចារ្យទាំងអស់ឲ្យជួបប្រទះតែពុទ្ធពរទាំងបួនប្រការគឺ អាយុ វណ្ណៈ សុខៈ ពលៈ កុំឃ្លៀងឃ្លាតឡើយ ។

សូមអរគុណ !

# ការឧទ្ទិសស្នាដៃ

(Dedication)

ក្នុងនាមជាអ្នកបន្តវេនពីរៀមច្បង និងដោយទទួលបាននូវការបណ្តុះបណ្តាលនូវទ្រឹស្តីនានាពីវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ នូវចំណេះដឹងជំនាញគណិតវិទ្យាកម្រិតបរិញ្ញា+១ ខ្ញុំបាទសូមឧទ្ទិសស្នាដៃនេះ ថ្វាយ ប្រគេន ជូន ដល់ព្រះវិញ្ញាណក្ខ័ន្ធនៃអតីតព្រះមហាក្សត្រខ្មែរ អតីតព្រះវិញ្ញាណក្ខ័ន្ធនៃព្រះសង្ឃខ្មែរ វិញ្ញាណក្ខ័ន្ធនៃវីរៈបុរសខ្មែរ បុព្វបុរសខ្មែរគ្រប់ជំនាន់ ដែលមានឧត្តមគតិស្រឡាញ់យុត្តិធម៌ ស្នេហាជាតិ សាសនា ដ៏ពិតៗ និងដល់ជីដូនជីតា សាច់ញ្ញាតិ លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកមានគុណទាំងឡាយ ដែលបានចែកឋានទៅកាន់បរិលោកហើយ សូមឱ្យលោកទទួលបាននូវសេចក្តីសុខ រួចចាកទុក្ខពីក្តីលំបាកទាំងឡាយ សមតាមអ្វីដែលលោកបានប្តូរផ្តាច់មិនខ្លាចនឿយហត់ក្នុងការបង្ហាត់បង្ហាញដល់យើងខ្ញុំរហូតទទួលបាននូវផ្លែផ្កាគួរជាទីមោទនៈនៅពេលនេះ ។

ខ្ញុំសូមឧទ្ទិសស្នាដៃនេះ ឲ្យក្លាយជាឧបករណ៍បម្រើឲ្យសេចក្តីត្រូវការនៃវិសាលភាពពុទ្ធិគ្រប់ពេលវេលា ព្រមទាំងយុវ័យមួយចំនួនធំដែលសេចក្តីអស់សង្ឃឹមបានដុតបំផ្លាញគោលបំណងនៃការរៀនសូត្រ ពោលគឺពួកគេត្រូវបង្ខំចិត្តលាសាលារៀន លាវិទ្យាល័យ លាមហាវិទ្យាល័យ ទាំងទឹកភ្នែករហាមទាំងក្តីសោកស្តាយហួសថ្លែងសំដែងចេញពោលគឺ ប្រកបដោយភាពឈឺចុកចាប់ យ៉ាងអស្ចារ្យ សឹងថារកវាចាមកថ្លែងរៀបរាប់ឲ្យចំទៅនឹងទំហំនៃការឈឺចាប់ក្នុងជម្រៅចិត្តមិនបាន ដោយសារតែសេចក្តីក្រីក្រ ។ សេចក្តីតោកយ៉ាកបែបនេះ ក្លាយទៅជាអនុស្សាវរីយ៍ដ៏គ្រោតគ្រាតពេញមួយជីវិត ដែលគប្បីយុវជន យុវតីខ្មែរ ស្វ័យសិក្សាស្វែងរកពុទ្ធិទាំងឡាយមកដាក់ក្នុងខួរក្បាលនៅពេលណាដែលខ្លួនអាច។

នៅចុងបញ្ចប់នៃពាក្យឧទ្ទិសនេះ ខ្ញុំបាទសូមឧទ្ទិសពាក្យមួយឃ្លាដែលខ្ញុំចូលចិត្តជាងគេក្នុងពេលដែលខ្ញុំបាទកំពុងសិក្សាក្នុងមុខវិជ្ជា គណិតវិទ្យា នេះទុកជាការពិចារណាបន្តទៀតនៃ អ្នកសិក្សាជំនាន់ក្រោយៗគឺ បញ្ហា និងការចេះឈឺចាប់ អាចជម្រុញឲ្យយើងបំភ្លេចខ្លួនឯងនៅពេលខ្លះ ហើយតស៊ូក្រាញនៀលសិក្សាបានទៅមុខទៀត ដែលវាទាំងពីរខាងដើមនេះបើកភ្នែកមនុស្សឆ្លាតភាគខ្លះឲ្យមើលឃើញពីដំណោះស្រាយទ្រឹស្តីបទនៃជីវិត បន្ទាប់ពីគេមានភ័ព្វសំណាងបានយល់អំពីអ្វីដែលធ្វើឲ្យគេចេះតស៊ូក្នុងជីវិត។

# អំណះអំណាង

យើងខ្ញុំជាគរុនិស្សិតនៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ឯកទេសគណិតវិទ្យាហើយជាអ្នកសរសេររបាយការណ៍ស្រាវជ្រាវលើប្រធានបទ **តក្ក សំណុំ និងចំនួន** ដើម្បីបញ្ចប់ការសិក្សា ថ្នាក់បរិញ្ញាបត្រ+១ ដែលបានសិក្សាអស់រយៈពេល ១ ឆ្នាំសិក្សាកន្លងមកនេះ។

យើងខ្ញុំសូមធ្វើការអះអាងថា ការសិក្សាស្រាវជ្រាវរបស់យើងខ្ញុំមានភាពពិតទាំងស្រុងទាំងព័ត៌មានដែលប្រមូលបានមក និងសរសេរអត្ថបទ ហើយរបាយការណ៍នេះយើងខ្ញុំបានយកជូនលោកគ្រូណែនាំត្រួតពិនិត្យ គាត់ក៏បានអនុញ្ញាតឲ្យយើងខ្ញុំ សរសេរប្រធានបទ នេះឡើងមក។ យើងខ្ញុំសូមទទួលខុសត្រូវចំពោះការក្លែងបន្លំ ការលួចចម្លងពីអ្នកដទៃ។ ប្រសិនបើវិទ្យាស្ថានពិនិត្យ ឃើញមានករណីណាមួយកើតឡើងខុសពីខ្លឹមសារនៃការអះអាងខាងលើចំពោះរបាយការណ៍ របស់យើងខ្ញុំ នោះយើងខ្ញុំពុំមានលក្ខណៈគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីទទួលសញ្ញាបត្រឡើយ ។

# មាតិកា

ចំណងជើង ទំព័រ

ជំពូក៣ ចំនួន

ជំពូក៤ ការអនុវត្ត



សន្និដ្ឋាន និង អនុសាស្រ្ត

# សេចក្តីផ្តើម

## ១. លំនាំបញ្ហា

ឆ្លងតាមការសិក្សាលើមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យា នៅវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ពិសេសមុខវិជ្ជា **តក្ក សំណុំ និងចំនួន** ដែលបានបង្ហាញនូវទ្រឹស្តីមួយចំនួន និងដោយឃើញពីសារៈសំខាន់ របស់វាទើបយើងខ្ញុំសម្រេចជ្រើសរើសប្រធានបទ **តក្ក សំណុំ និងចំនួន** មកធ្វើការសិក្សាស្រាវជ្រាវ ។

## ២. គោលបំណង និង សារៈសំខាន់នៃការស្រាវជ្រាវ

ការសិក្សាស្រាវជ្រាវនេះ គឺក្នុងគោលបំណង ផ្តល់នូវឯកសារជាជំនួយក្នុងការសិក្សាលើ **តក្ក សំណុំ និងចំនួន** ដល់សិស្ស និស្សិត ។

## ៣. វត្ថុបំណងនៃការស្រាវជ្រាវ

ដោយមើលឃើញពីសារៈសំខាន់ និងកង្វះខាតឯកសារជាខេមរៈភាសាទើបខ្ញុំបាទសម្រេចជ្រើសរើសប្រធានបទ **តក្ក សំណុំ និងចំនួន** មកធ្វើការសិក្សាស្រាវជ្រាវដោយបង្ហាញនូវចំនុចសំខាន់៤គឺ៖

- ទី១: ស្គាល់ពីតក្កវិទ្យា
- ទី២: ស្គាល់ពីសំណុំ
- ទី៣: ស្គាលពីចំនួន
- ទី៤: ការអនុវត្តភាពចែកដាច់

ម្យ៉ាងទៀតនៅចុងជំពូក ១ ២ ៣ យើងមានលំហាត់ និងចម្លើយបន្ថែមផងដែរ ។

## ៤. វិធីសាស្ត្រនៃការស្រាវជ្រាវ

ក្នុងការរៀបចំចងក្រងឯកសារនេះឡើងដំបូងយើងខ្ញុំបានស្វះស្វែងប្រមែប្រមូលរកនូវឯកសារនានា ដែលទាក់ទងទៅនឹងប្រធានបទរួមមាន សៀវភៅពីជគណិតទូទៅ របស់សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ ឯកសារមួយចំនួនពីបណ្ណាល័យ វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ និងតាមប្រព័ន្ធអ៊ីនធឺណែត ។

បន្ទាប់ពីបានឯកសារហើយ យើងខ្ញុំបានវិភាគផ្ទៀងផ្ទាត់ដើម្បីសម្រេចយកខ្លឹមសារដែលច្បាស់លាស់ធ្វើជារបាយការណ៍ ។

ចុងក្រោយទើបយើងខ្ញុំសម្រេចសរសេរខ្លឹមសារទាំងនោះធ្វើជារបាយការណ៍ស្រាវជ្រាវទៅតាមប្លង់នៃរបាយការណ៍ស្រាវជ្រាវរបស់វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ។

# ជំពូក១ តក្កវិទ្យា

## ១.១. សំណើ

**សំណើ**គឺជាប្រយោគឬអំណះអំណាងទាំងឡាយណាដែលគេអាចសម្រេចថាពិតឬក៏មិនពិត។

**ឧទាហរណ៍៖**

ក. “7 ជាចំនួនបឋម” អំណះអំណាងនេះជាសំណើពិតពីព្រោះគេអាចសម្រេចបានថាពិត។

ខ. “ $x=1$ ជាឫសរបស់សមីការ $x^2+1=0$”

អំណះ អំណាងនេះជាសំណើមិនពិត ពីព្រោះគេអាចសម្រេចបានថាមិនពិត។

គ. “ 999999 ជាចំនួនដែលធំជាងគេ” អំណះអំណាងនេះមិនមែនជាសំណើទេពីព្រោះគេមិនអាចសម្រេចបានថាតើវាពិត ឬមិនពិត។

**សម្គាល់៖** គេតាងឈ្មោះនៃសំណើដោយអក្សរ $p,q,r,s,\ldots$

## ១.២. តម្លៃភាពពិត

- បើ $p$ ជាសំណើពិត នោះតម្លៃភាពពិតនៃសំណើ $p$ គឺស្មើនឹង1គេកំណត់សរសេរ ត.$(p)=1$

- បើ $p$ ជាសំណើមិនពិត នោះតម្លៃភាពពិតនៃសំណើ $p$ គឺស្មើនឹង 0 ។

គេកំណត់សរសេរ ត. $(p)=0$ ។

## ១.៣. ឈ្នាប់តក្កវិទ្យា

### ក. ឈ្នាប់និង ( $\wedge$ )

សំណើ $p\wedge q$ ពិតតែក្នុងករណីដែល សំណើ $p$ និង $q$ ពិតទាំងពីរ។

**ចំណាំ៖** $p\wedge q$ អានថា $p$ និង $q$

តារាងភាពពិតនៃសំណើ $p$ និង $q$ ដែលភ្ជាប់គ្នាដោយឈ្នាប់ និង $(\wedge)$

| $p$ | $q$ | $p\wedge q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

**ឧទាហរណ៍៖** គេមានសំណើពីរ $t$:24 ជាពហុគុណនៃ 6 និង $u$:24 ជាចំនួនគត់គូ ។

កំណត់សំណើ $t\wedge u$ និង ត. $(t\wedge u)$។

**ចម្លើយ:**

$t\wedge u$ “24 ជាពហុគុណនៃ 6 និង ជាចំនួនគត់គូ” ដោយ ត.$(p)=1$ ហើយ ត.$(q)=1$

នោះ ត.$(p\wedge q)=1$ ។

**ខ.ឈ្នាប់ឬ** ($\vee$)

សំណើ $p \vee q$ ជាសំណើមិនពិតតែក្នុងករណីដែល សំណើទាំងពីរមិនពិតដូចគ្នា ។

**ចំណាំ៖** $p \vee q$ អានថា $p$ ឬ $q$

តារាងភាពពិតនៃសំណើ $p$ និង $q$ ដែលភ្ជាប់គ្នា ដោយឈ្នាប់ ឬ($\vee$)

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

**ឧទាហរណ៍៖** គេមានសំណើពីរ ៖

$p$ :37 ជាចំនួនបឋម

$q$ :37 ចែកដាច់នឹង 5

ចូរកំណត់សំណើ $p \vee q$ និង ត.( $p \vee q$)

**ចម្លើយ:**

$p \vee q$ : "37 ជាចំនួនបឋម ឬ ចែកដាច់នឹង 5"

ដោយ ត.$(p) = 1$ ហើយ ត.$(q) = 0$

នោះ ត.$(p \vee q) = 1$

**គ.ឈ្នាប់មិន** ($\bar{\ }$) **ឬ**($\neg$)

សំណើ $p$ និងសំណើ $\overline{p}$ មានតម្លៃភាពពិតខុសគ្នា។

តារាងភាពពិត

| $p$ | $\overline{p}$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

**ចំណាំ៖** $\overline{\overline{p}} = p$

**ឧទាហរណ៍៖**គេមានសំណើ $q$: កុំព្យូទ័រនេះមានអានុភាព ខ្លាំង។ កំណាត់សំណើ $\overline{q}$ ។

**ចម្លើយ:**

គេបានសំណើ

$\overline{q}$ : កុំព្យូទ័រនេះមិនមានគុណភាពល្អ

**លក្ខណះ: ដឺម័រហ្គេន** ( De Morgan)

គេមានសំណើពីរ $p$ និង $q$ នោះគេបាន

$i.\ \overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$

$ii.\ \overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$

## សម្រាយបញ្ជាក់:

$i.\ \overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$

តារាងភាពពិត

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $\overline{p \wedge q}$ | $\overline{p}$ | $\overline{q}$ | $\overline{p} \vee \overline{q}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$ii.\ \overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$

តារាងភាពពិត

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $\overline{p \vee q}$ | $\overline{p}$ | $\overline{q}$ | $\overline{p} \wedge \overline{q}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

### ឃ.ឈ្នាប់នាំឲ្យ ($\Rightarrow$)

គេសរសេរ $p \Rightarrow q$ អានថា $p$ នាំឲ្យ $q$ ដែល $p$ ជាបុព្វសំណើ $q$ ជាវិបាក

សំណើ $p \Rightarrow q$ មិនពិតតែក្នុងករណីដែលសំណើ $p$ ពិត ហើយសំណើ $q$ មិនពិត ក្រៅពីនេះវាជាសំណើពិត។

តារាងភាពពិត

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

**សម្គាល់៖**

សំណើ $q \Rightarrow p$ ហៅថាសំណើច្រាសនៃសំណើ $p \Rightarrow q$

សំណើ $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ ហៅថាសំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្មនៃសំណើ $p \Rightarrow q$ ។

### ង.ឈ្នាប់សមមូល ($\Leftrightarrow$)

សំណើឈ្នាប់សមមូលពិតតែក្នុងករណីដែលដែលសំណើទាំងពីរមានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា។

ជាទូទៅ $p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

តារាងភាពពិត

| $p$ | $q$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

## ទ្រឹស្តីបទ:

$(i).\ (p \vee p) \equiv p$ $(ii).(p \wedge p) \equiv p$

$(iii).\ \neg(\neg p) \equiv p$ $(iv).(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$

$(v).\ (p \Leftrightarrow q) \equiv (\neg p \Leftrightarrow \neg q)$ $(vi).(p \vee q) \equiv (q \vee p)$

$(vii).\ (p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ $(viii).\ p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

$(ix).\ p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ $(x).\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$(xi).\ p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

## សម្រាយបញ្ជាក់:

$(i).\ (p \vee p) \equiv p$

តារាងភាពពិត

| $p$ | $p \vee p$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 0 | 0 |

តាមតារាងភាពពិត គេបាន $(p \vee p) \equiv p$ ។

$(ii).(p \wedge p) \equiv p$

តារាងភាពពិត

| $p$ | $p \wedge p$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 0 | 0 |

តាមតារាងតម្លៃភាពពិត គេបាន $(p \wedge p) \equiv p$ ។

$(iii).\ \neg(\neg p) \equiv p$

តារាងតម្លៃភាព

| $p$ | $\neg p$ | $\neg(\neg p)$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |

តាមតារាងភាពពិត គេបាន $(p \wedge p) \equiv p$ ។

$(iv).(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$

តារាងភាពពិត

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $p \Rightarrow q$ | $(\neg q \Rightarrow \neg p)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

តាមតារាងភាពពិត គេបាន$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$ ។

$(v).\ (p \Leftrightarrow q) \equiv (\neg p \Leftrightarrow \neg q)$

តារាងភាពពិត

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $p \Leftrightarrow q$ | $(\neg p \Leftrightarrow \neg q)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

តាមតារាងភាពពិត គេបាន $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$ ។

$(vi).(p \vee q) \equiv (q \vee p)$

តារាងភាពពិត

| $p$ | $q$ | $(p \vee q)$ | $(q \vee p)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

តាមតារាងភាពពិត គេបាន $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$ ។

$(vii).\ (p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$

តារាងភាពពិត

| $p$ | $q$ | $(p \wedge q)$ | $(q \wedge p)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

តាមតារាងភាពពិត គេបាន $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ ។

$(viii).\ p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

តារាងភាពពិត

| $p$ | $q$ | $r$ | $(q \vee r)$ | $(p \vee q)$ | $p \vee (q \vee r)$ | $(p \vee q) \vee r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

តាមតារាងភាពពិត គេបាន $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ ។

$(ix).\ p\wedge(q\wedge r)\equiv(p\wedge q)\wedge r$

តារាងភាពពិត

| $p$ | $q$ | $r$ | $(q\wedge r)$ | $(p\wedge q)$ | $p\wedge(q\wedge r)$ | $(p\wedge q)\wedge r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

តាមតារាងភាពពិត គេបាន $p\wedge(q\wedge r)\equiv(p\wedge q)\wedge r$ ។

$(x).\ p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$

តារាងភាពពិត

| $p$ | $q$ | $r$ | $(q\wedge r)$ | $(p\vee q)$ | $(p\vee r)$ | $p\vee(q\wedge r)$ | $(p\vee q)\wedge(p\vee r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

តាមតារាងភាពពិត គេបាន $p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$ ។

$(xi).\ p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

តារាងភាពពិត

| $p$ | $q$ | $r$ | $(q\vee r)$ | $(p\wedge q)$ | $(p\wedge r)$ | $p\wedge(q\vee r)$ | $(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

តាមតារាងភាពពិត គេបាន $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ ។

## ១.៤. ប្រភេទនៃសម្រាយបញ្ជាក់

### ក. សម្រាយបញ្ជាក់ដោយផ្ទាល់

សម្រាយបញ្ជាក់ដោយផ្ទាល់គឺជាការស្រាយបញ្ជាក់ត្រង់ៗទៅតាមអ្វីដែលគេចង់បាន។

**ឧទាហរណ៍:** ស្រាយថាបើ $x, y$ ជាចំនួនគត់សេស នោះ $x+y$ ជាចំនួនគត់គូ។

**សម្រាយបញ្ជាក់**

ដោយ $x, y$ ជាចំនួនគត់សេស យើងតាង $x=2k+1$ , $y=2k'+1$ ; $k,k'\in\mathbb{Z}$

គេបាន

$$\begin{aligned} x+y &= (2k+1)+(2k'+1) \\ &= 2k+2k'+2 \\ &= 2\left(k+k'+1\right) \\ &= 2m \quad ; \quad m=k+k'+1 \end{aligned}$$

$x+y=2m$ ជាចំនួនគត់គូ ។

### ខ.សម្រាយបញ្ជាក់តាមសំណើផ្ទុយច្រាស

*របៀបដោះស្រាយ៖*

ឧបមាថា គេចង់បង្ហាញថា សំណើ $p\Rightarrow q$ ពិត

+<u>ជំហានទី១៖</u> ត្រូវកំណត់សំណើ $p,q$ អោយបានត្រឹមត្រូវ

+<u>ជំហានទី២៖</u> ត្រូវកំណត់សំណើ $\overline{p},\overline{q}$

+<u>ជំហានទី៣៖</u> គេផ្តើមពី $\overline{q}$ បញ្ជាក់រហូត គេបានសំណើ $\overline{p}$ ដែលជាសំណើផ្ទុយច្រាសគឺមានន័យថាគេបានបង្ហាញ $\overline{q}\Rightarrow\overline{p}$ ពិត។

ដូចនេះ គេបាន $p\Rightarrow q$ ជាសំណើពិត។

### គ.សម្រាយបញ្ជាក់តាមសំណើផ្ទុយពីការពិត

*របៀបដោះស្រាយ៖*

+<u>ជំហានទី១៖</u> ត្រូវកំណត់សំណើ $p$ ជាសំណើដែលត្រូវបង្ហាញ

+<u>ជំហានទី២៖</u> ត្រូវកំណត់សំណើ $\overline{p}$

+<u>ជំហានទី៣៖</u> ឧបមាថាសំណើ $\overline{p}$ ពិត។ រួចស្រាយបន្តបន្ទាប់រហូតដល់បានលទ្ធផលផ្ទុយពីទ្រឹស្តីគណិតវិទ្យា។ គេបានសំណើ $\overline{p}$ មិនពិត។

ដូចនេះ សំណើ $p$ ពិត ។

### ឃ.សម្រាយបញ្ជាក់តាមទ្វេលក្ខខណ្ឌ

*របៀបដោះស្រាយ៖*

ជំហានដែលសម្រាយបញ្ជាក់ $p\Leftrightarrow q$

+<u>ជំហានទី១៖</u> បង្ហាញលក្ខខណ្ឌចាំបាច់ $p\Rightarrow q$

+<u>ជំហានទី២៖</u> បង្ហាញលក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់ $q\Rightarrow p$ ។

### ខ. សម្រាយបញ្ជាក់តាមឧទាហរណ៍ផ្ទុយ

វិធីនេះតម្រូវឲ្យរកឧទាហរណ៍មួយមកបញ្ជាក់ថា សំណើដែលត្រូវបង្ហាញ ជាសំណើមិនពិត។

**ឧទាហរណ៍:** តើពិតដែរឬទេ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $x$ គេបានចំនួនគត់វិជ្ជមាន $y$ ដែល $y^2 = x$

យក $x = 7$ គេបាន $y^2 = 7$

គេមិនអាចរកចំនួនគត់វិជ្ជមាន $y$ ដែល $y^2 = 7$ បានទេ

ដូចនេះសំណើខាងលើមិនពិត។

# លំហាត់

១. គេមានសំណើបី:

$p$: សិស្សានុសិស្សដោះស្រាយលំហាត់ដោយលំបាក

$q$: សិស្សានុសិស្សគិតថាការបង្រៀនរបស់គ្រូមានលក្ខណៈល្អ

$r$: សិស្សានុសិស្សសប្បាយចិត្តក្នុងការរៀនគណិតវិទ្យា

ចូរសរសេរសំណើផ្សំខាងក្រោមដោយប្រើនិមិត្តសញ្ញាគណិតវិទ្យា

ក. សិស្សានុសិស្សដោះស្រាយលំហាត់ដោយលំបាក និងគិតថាការបង្រៀនរបស់គ្រូមានលក្ខណៈមិនល្អ ។

ខ. សិស្សានុសិស្សសប្បាយចិត្តក្នុងការរៀនគណិតវិទ្យា និងគិតថាការបង្រៀនរបស់គ្រូមានលក្ខណៈល្អ ។

គ. សិស្សានុសិស្សដោះស្រាយលំហាត់ដោយលំបាក ឬគិតថាការបង្រៀនរបស់គ្រូមានលក្ខណៈមិនល្អ ។

ឃ. សិស្សានុសិស្សដោះស្រាយលំហាត់ដោយលំបាក ឬគិតថាការបង្រៀនរបស់គ្រូមានលក្ខណៈល្អ ។

២. កំណត់តម្លៃភាពពិតនៃសំណើខាងក្រោម:

ក. ផែនដីមានទំហំមិនធំជាងព្រះច័ន្ទទេ ។

ខ. $3+4=7$ និងខែមករាមានចំនួន $32$ ថ្ងៃ ។

គ. $3+4=7$ ឬខែមករាមានចំនួន $32$ ថ្ងៃ ។

ឃ. និស្សិតមហាវិទ្យាល័យខ្លះផឹកកាហ្វេ និងនិស្សិតមហាវិទ្យាល័យទាំងអស់មានទូរស័ព្ទដៃ។

៣. សង់តារាងភាពពិតនៃសំណើនីមួយៗខាងក្រោម:

ក $\overline{p} \vee \overline{q}$ . ខ. $\overline{\overline{p} \vee q}$ គ. $p \vee \left(q \wedge \overline{p}\right)$

៤. ដោយប្រើតារាងភាពពិត ចូរបញ្ជាក់គូសំណើដែលសមមូលគ្នា:

ក $p \vee \overline{q}$ .និង $\overline{p} \wedge q$ ខ. $\overline{p} \wedge q$ និង $\overline{p \vee \overline{q}}$ គ. $q \wedge \left(\overline{p} \vee q\right)$ និង $\overline{\overline{p} \vee q}$

៥. ចូរស្រាយបញ្ជាក់សំណើខាងក្រោមដោយប្រើសំណើផ្ទុយច្រាស

"ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n$ បើ $n^2$ ជាចំនួនគត់គូនោះ $n$ ក៏ជាចំនួនគត់គូដែរ" ។

៦. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះចំនួនគត់ $m$ និង $n$ បើផលគុណ $mn$ ជាចំនួនគត់គូនោះយ៉ាងហោចណាស់ ក៏មួយក្នុងចំណោម $m$ និង $n$ ជាចំនួនគូដែរ។

៧. គេមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន $a, b, c$។ បង្ហាញថាបើ $a, b, c$ ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $a^2+b^2=c^2$។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា មួយក្នុងចំណោម $a, b$ ជាចំនួនគូ ហើយមួយ ក្នុងចំណោម $a, b$ ជាចំនួនសេស។

៨. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន $a, b, c$ បើ $a^2+b^2=c^2$ នោះ

ក. យ៉ាងហោចណាស់មានមួយក្នុងចំនោម $a,b$ គឺជាចំនួនគូ ។

ខ. យ៉ាងហោចណាស់មានមួយក្នុងចំនោម $a,b$ និង $c$ គឺជាពហុគុណនៃ $3$ ។

៩. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

១០. ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt{6}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

ខ. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $1+\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

គ. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

១១. ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់តាមសំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ចូរបង្ហាញថាបើ $x^2-1<0$ នោះ $-1<x<1$ ។

១២. ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់តាមសំណើផ្ទុយពីការពិត:

ក. បង្ហាញថា $\sqrt{5}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

ខ. បង្ហាញថា $\sqrt{p}$ ជាចំនួនអសនិទាន ចំពោះគ្រប់ចំនួនបឋម $p$ ។

១៣. ប្រើសម្រាយបញ្ជាក់តាមសំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ដើម្បីបង្ហាញករណីខាងក្រោម:

ក. គេមាន $x\,;\,y$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន និង $xy$ ជាចំនួនគត់សេស នោះ $x$ និង $y$ ក៏ជាចំនួនគត់សេសដែរ។

ខ. គេមាន $x(x-2)<0$ នោះ $0<x<2$ ។

១៤. សរសេរសំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្មនៃសំណើខាងក្រោម:

ក. បើខ្ញុំសិក្សាគណិតវិទ្យានោះខ្ញុំនឹងប្រឡងជាប់អាហារូបករណ៍ ។

ខ. បើ $x$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន នោះ $x^2$ ជាចំនួនមិនអវិជ្ជមាន ។

គ. បើផែនដីវិលជុំវិញព្រះអាទិត្យ នោះព្រះច័ន្ទនឹងវិលជុំវិញផែនដី ។

១៥. ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់តាមសំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ។ ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n$ បើ $n^2>25$ នោះ $n>5$ ។

១៦. ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់តាមសំណើផ្ទុយពីការពិត ចូរបង្ហាញថា:

ក. $x+\dfrac{1}{x}>2$ ចំពោះគ្រប់ $x>1$ ។

ខ. គ្មានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $p$ និង $q$ ដែល $\dfrac{p^2}{q^2}=2$ ។

១៧. រកឧទាហរណ៍ផ្ទុយនៃអំណះអំណាងខាងក្រោម:

ក. ផលគុណនៃចំនួនអសនិទានពីរខុសគ្នា ជាចំនួនអសនិទាន ។

ខ. បើ $x \geq \sqrt{7}$ នោះ $x \geq 3$ ។

គ. $f(n)=n^2+n+1$ គឺជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបផង និងជាពហុគុណនៃ $3$ ផង ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបអវិជ្ជមាន $n$ ។

១៨. រកឧទាហរណ៍ផ្ទុយនៃអំណះអំណាងខាងក្រោម:

ក. $f(x)=x^2-27x+k, k\in\mathbb{Z}, f(x)=0$ មានឫសបីចំពោះគ្រប់តម្លៃ $k$ ។

ខ. $f(n)=(n+1)(n+2)(n+3)$ ចែកដាច់នឹង $12$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $n$ ។

# ចម្លើយ

១. សរសេរសំណើដោយប្រើឈ្នាប់គណិតវិទ្យា

ក. $p \wedge \bar{q}$ ខ. $r \wedge q$ គ. $p \vee \bar{q}$

២. កំណត់តម្លៃភាពពិតនៃសំណើ

ក. មិនពិត ខ. មិនពិត គ. ពិត ឃ. មិនពិត

៣. សង់តារាងភាពពិតនៃសំណើ

ក. $\bar{p} \vee \bar{q}$ ខ. $\overline{\bar{p} \vee q}$ គ. $p \vee (q \wedge \bar{p})$

| $p$ | $q$ | $\bar{p}$ | $\bar{q}$ | $\bar{p} \vee \bar{q}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

| $p$ | $q$ | $\bar{p}$ | $\bar{p} \vee q$ | $\overline{\bar{p} \vee q}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

| $p$ | $q$ | $\bar{p}$ | $q \wedge \bar{p}$ | $p \vee (q \wedge \bar{p})$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

៤. ដោយប្រើតារាងភាពពិត បញ្ជាក់គូសំណើដែលសមមូលគ្នា:

ក $p \vee \bar{q}$ .និង $\bar{p} \wedge q$

| $p$ | $q$ | $\bar{p}$ | $\bar{q}$ | $p \vee \bar{q}$ | $\bar{p} \wedge q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |

តាមតារាងភាពពិត $p \vee \bar{q}$ មិនសមមូលនឹង $\bar{p} \wedge q$ ទេ ។

ខ. $\bar{p} \wedge q$ និង $\overline{p \vee \bar{q}}$

| $p$ | $q$ | $\bar{p}$ | $\bar{q}$ | $p \vee \bar{q}$ | $\bar{p} \wedge q$ | $\overline{p \vee \bar{q}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

តាមតារាងភាពពិត $\bar{p} \wedge q$ សមមូលនឹង $\overline{p \vee \bar{q}}$ ។

គ. $q\wedge(\overline{p}\vee q)$ និង $\overline{\overline{p}\vee q}$

| $p$ | $q$ | $\overline{p}$ | $\overline{q}$ | $\overline{p}\vee q$ | $\overline{\overline{p}\vee q}$ | $q\wedge(\overline{p}\vee q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

តាមតារាងភាពពិត $q\wedge(\overline{p}\vee q)$ មិនសមមូលនឹង $\overline{\overline{p}\vee q}$ ទេ ។

៥ . តាងសំណើ: $p{:}n^2$ ជាចំនួនគូ

q $:n$ ជាចំនួនគូ

$\overline{p}{:}n^2$ ជាចំនួនសេស

$\overline{q}{:}n$ ជាចំនួនសេស

ដើម្បីបង្ហាញថា $p\Rightarrow q$ ពិត គេត្រូវបង្ហាញថា $\overline{q}\Rightarrow\overline{p}$ ពិត

បើ $n$ ជាចំនួនសេសគេតាង $n=2k+1\quad,\ k\in\mathbb{Z}$

គេបាន

$$\begin{aligned}n^2&=(2k+1)^2\\&=4k^2+4k+1\\&=2(2k^2+2k)+1\qquad;\qquad k'=2k^2+2k\\&=2k'+1\end{aligned}$$

$n^2=2k'+1$ ជាចំនួនគត់សេស

នោះ $\overline{q}\Rightarrow\overline{p}$ ពិត

ដូចនេះ សំណើ $n$ ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន»បើ $n^2$ ជាចំនួនគូ នោះ $n$ ជាចំនួនគូ។«

៦ . ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះចំនួនគត់ $m$ និង $n$ បើ $mn$ ជាចំនួនគូ នោះយ៉ាងហោចណាស់ក៏មួយក្នុង $m$ និង $n$ ជាចំនួនគូដែរ

បើសិនជាពីរចំនួនគត់ $m$ និង $n$ ជាចំនួនសេស នោះយើងបាន

$m=2s+1\ ,\ n=2t+1\qquad;\quad(s,t\in\mathbb{Z})$

គេបានផលគុណ $mn$ គឺ

$$\begin{aligned}mn&=(2s+1)(2t+1)\\&=4st+2s+2t+1\\&=2(2st+s+t)+1\\&=2x+1\qquad;\ x=2st+s+t\end{aligned}$$

$mn=2x+1$ ជាចំនួនសេស

តាមសម្រាយបញ្ជាក់នេះសំណើខាងលើជាសំណើពិត។

៧. បង្ហាញថាបើ $a,b$ និង $c$ ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $a^2+b^2=c^2$

ឧបមាថា ចំនួនទាំងពីរ $a$ , $b$ ជាចំនួនសេស ឬ ចំនួនទាំងពីរ $a$ , $b$ ជាចំនួនគូ

i) ចំនួនទាំងពីរ $a$ , $b$ ជាចំនួនសេស គេបាន

តាង $a=2m-1$ , $b=2n-1$ ; $m,n\in\mathbb{Z}^+$ នោះគេបាន

$$
\begin{aligned}
c^2 &= a^2+b^2 \\
&= (2m-1)^2+(2n-1)^2 \\
&= 4m^2-4m+1+4n^2-4n+1 \\
&= 4m^2+4n^2-4m-4n+2 \\
&= 2\left(2m^2-2n^2-2m-2n+1\right)
\end{aligned}
$$

$c^2=2\left[2\left(m^2+n^2-m-n\right)+1\right]$ ជាចំនួនគូ នោះ $c$ ក៏ជាចំនួនគូដែរ

បើ $c$ ជាចំនួនគូយើងតាង $c=2k$ , $k\in\mathbb{Z}$ គេបាន

$$(2k)^2=2\left[2\left(m^2+n^2-m-n)+1\right)\right]$$

$$2k^2=2\left(m^2+n^2-m-n\right)+1 \qquad (A)$$

អង្គខាងឆ្វេងនៃ $(A)$ ជាចំនួនគូ ប៉ុន្តែអង្គខាងស្តាំជាចំនួនសេស នោះមានន័យថា មិនមាន ចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a^2+b^2=c^2$ ។

ii) ចំនួនទាំងពីរ $a$ , $b$ ជាចំនួនគូ យើងអាចយក $a=2m$ , $b=2n$ ; $m,n\in\mathbb{Z}^+$

គេបាន

$$
\begin{aligned}
c^2 &= a^2+b^2 \\
&= (2m)^2+(2n)^2 \\
&= 4m^2+4n^2 \\
c^2 &= 2\times 2\left(m^2+n^2\right)
\end{aligned}
$$

ហេតុនេះ $c^2$ ជាចំនួនគត់គូ នោះ $c$ ជាក៏ជាចំនួនគត់គូដែរ ចំនួនទាំងអស់ $a,b,c$ ជាចំនួន គត់គូមានន័យថា $a,b,c$ មិនមែនជាចំនួនបឋមរវាងគ្នានោះទេ។

ដូច្នេះ តាមសម្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើសំណើផ្ទុយច្រាស នោះសំណើដើមពិត។

៨. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

ក. យ៉ាងហោចណាស់មានមួយក្នុងចំណោម $a$ ,$b$ គឺជាចំនួនគូ

ឧបមាថា ពីរចំនួន $a$ ,$b$ ជាចំនួនសេស

យើងតាង $a=2m-1$ , $b=2n-1$ ; $m,n\in\mathbb{Z}^+$ នោះគេបាន

$$
\begin{aligned}
c^2 &= a^2+b^2 \\
&= (2m-1)^2+(2n-1)^2 \\
&= 4m^2-4m+1+4n^2-4n+1 \\
&= 4m^2+4n^2-4m-4n+2
\end{aligned}
$$

$= 2\left(2m^2 - 2n^2 - 2m - 2n + 1\right)$

$c^2 = 2\left[2\left(m^2 + n^2 - m - n\right) + 1\right]$ ជាចំនួនគូ នោះ $c$ ក៏ជាចំនួនគូដែរ

បើ $c$ ជាចំនួនគូយើងតាង $c = 2k$ , $k \in \mathbb{Z}$ គេបាន

$(2k)^2 = 2\left[2\left(m^2 + n^2 - m - n\right) + 1\right)]$

$2k^2 = 2\left(m^2 + n^2 - m - n\right) + 1 \qquad (A)$

អង្គខាងឆ្វេងនៃ $(A)$ ជាចំនួនគូ ប៉ុន្តែអង្គខាងស្តាំជាចំនួនសេស នោះមានន័យថា មិនមានចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a^2 + b^2 = c^2$ ។ តាមសម្រាយបញ្ជាក់ដោយលើកឧទាហរណ៍ផ្ទុយ នោះសំណើដើមពិត។

ខ. យ៉ាងហោចណាស់មួយក្នុងចំណោម $a$ ,$b$ និង $c$ គឺជាពហុគុណនៃ $3$

ឧបមាថា $a$ ,$b$ និង $c$ មិនមែនជាពហុគុណនៃ $3$

យើងយក $a = 3k \pm 1$ , $b = 3m \pm 1$ , $c = 3n \pm 1$ $\left(k, m, n \in \mathbb{Z}^+\right)$

គេបាន

$a^2 + b^2 = c^2$

$(3k \pm 1)^2 + (3m \pm 1)^2 = (3n \pm 1)^2$

$9k^2 \pm 6k + 1 + 9m^2 \pm 6m + 1 = 9n^2 \pm 6n + 1$

$3\left(3k^2 \pm 2k + 3m^2 \pm 2m\right) + 2 = 3\left(3n^2 \pm 2n\right) + 1$

យើងឃើញថាអង្គខាងឆ្វេងនៃ $(A)$ ជាពហុគុណនៃ $(3) + 2$ ហើយអង្គខាងស្តាំជាពហុគុណនៃ $(3) + 1$ នោះមានន័យថាមិនមានចំនួនគត់ណាមួយ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a^2 + b^2 = c^2$ ដូចនេះតាមសម្រាយបញ្ជាក់ដោយសំណើផ្ទុយប្រាស នោះសំណើដើមជាសំណើពិត។

៩ . ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន

តាង $p$ ជាចំនួនអសនិទាន

$\overline{p}$ ជាចំនួនសនិទាន

ឧបមាថា $\sqrt{2}$ ជាចំនួនសនិទាន គេបាន $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ដែល $PGCD(a, b) = 1$

គេបាន

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

$2 = \frac{a^2}{b^2}$

$a^2 = 2b^2$

នោះ $a^2$ ជាចំនួនគូ នាំឲ្យ $a$ ជាចំនួនគូដែរ តាង $a = 2k$ ; $k \in \mathbb{Z}^+$

គេបាន

$2b^2 = a^2$

$2b^2 = (2k)^2$

$b^2 = 2k^2$

នោះ $b^2$ ជាចំនួនគូ នាំឲ្យ $b$ ក៏ជាចំនួនគូដែរ

ដោយ $a$ និង $b$ ជាចំនួនគូ នោះ $a$ និង $b$ មានតួចែករួមដែលផ្ទុយពីលក្ខខណ្ឌ ពីព្រោះ $a$ និង $b$ ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា នោះគេបាន $\sqrt{2}$ មិនមែនជាចំនួនសនិទាន

ដូចនេះ $\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

១០. ក. បង្ហាញថា $\sqrt{6}$ ជាចំនួនអសនិទាន

ឧបមាថា $\sqrt{6}$ ជាចំនួនសនិទាន ។ តាង $\sqrt{6} = \frac{a}{b}$ ដែល $a,b$ ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា យើងបាន

$6 = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow a^2 = 6b^2 = 2\times 3b^2$ នោះ $a$ ជាចំនួនគូ

តាង $a = 2k$ គេបាន $(2k)^2 = 2\times 3b^2 \Rightarrow b^2 = \frac{2k^2}{3}$ ដោយ $b\in\mathbb{N}$ នោះ $k$ ជាពហុគុណនៃ $3$

តាង $k = 3p \Rightarrow b^2 = \frac{2(3p)^2}{3} = 2\times 3p^2$ នោះ $b$ ជាចំនួនគូ

ដោយ $a$ និង $b$ ជាចំនួនគូ នោះ $a,b$ មិនមែនជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ដែលផ្ទុយនឹងលក្ខខណ្ឌ ។

ដូចនេះ $\sqrt{6}$ មិនមែនជាចំនួនសនិទាន ដែលមានន័យថា $\sqrt{6}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

ខ. បង្ហាញថា $1+\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន

ឧបមាថា $1+\sqrt{2}$ ជាចំនួនសនិទាន ។យើងបាន

$$1+\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow b+\sqrt{2}b = a$$
$$\Rightarrow a-b = \sqrt{2}b$$
$$\Rightarrow (a-b)^2 = 2b^2$$

នោះ $a-b$ ជាចំនួនគូ ។តាង $a-b = 2k$ គេបាន

$(2k)^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2$ នោះ $b$ ជាចំនួនគូ

តាង $b = 2p$ នាំឲ្យ $a-2p = 2k \Rightarrow a = 2(k+p)$ នោះ $a$ ជាចំនួនគូ ។

ដោយ $a$ និង $b$ ជាចំនួនគូ នោះ $a,b$ មិនមែនជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ដែលផ្ទុយនឹងលក្ខខណ្ឌ ។

ដូចនេះ $1+\sqrt{2}$ មិនមែនជាចំនួនសនិទាន ដែលមានន័យថា $1+\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

គ. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ បង្ហាញថា ជាចំនួនអសនិទាន

ឧបមាថា $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ជាចំនួនសនិទាន ។យើងបាន

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} = \frac{a}{b} \Rightarrow (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = \frac{a^2}{b^2}$$
$$\Leftrightarrow 5+2\sqrt{6} = \frac{a^2}{b^2}$$
$$\Leftrightarrow a^2-5b^2 = 2\sqrt{6}b^2$$
$$\Rightarrow (a^2-5b^2)^2 = 24b^2 = 2\times 12b^2 = 3\times 8b^2$$

នោះ $a^2-5b^2$ ជាពហុគុណនៃ $2$ និង $3$ ដែលមានន័យថា $a^2-5b^2$ ជាពហុគុណនៃ $6$ ។

តាង $a^2-5b^2=6k$ គេបាន

$$\begin{aligned}(6k)^2=24b^2 &\Leftrightarrow 36k^2=24b^2\\ &\Leftrightarrow 3k^2=2b^2\end{aligned}$$ នោះ $b$ ជាពហុគុណនៃ $3$ ។

តាង $b=3p$ យើងទាញបាន

$a^2-5(3p)^2=6k \Rightarrow a^2=6k+45p^2=3(2k+15p^2)$ នោះ $a$ ជាពហុគុណនៃ $3$ ដែរ ។

ដោយ $a$ និង $b$ ជាពហុគុណនៃ $3$ នោះ $a,b$ មិនមែនជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ដែលផ្ទុយនឹងលក្ខខណ្ឌ ។

ដូចនេះ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ មិនមែនជាចំនួនសនិទាន ដែលមានន័យថា $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

១១. បង្ហាញថាបើ $x^2-1<0$ នោះ $-1<x<1$

តាង $p: x^2-1<0 \Rightarrow \overline{p}: x^2-1\geq 0$ និង $q: -1<x<1 \Rightarrow \overline{q}: x\leq -1$ ឬ $x\geq 1$

ស្រាយថា $p\Rightarrow q$ ពិត $\Leftrightarrow \overline{q}\Rightarrow \overline{p}$ ពិត

ផ្ដើមពី $\overline{q}: x\leq -1$ ឬ $x\geq 1$

**របៀបទី១:**

- បើ $x\leq -1$ នោះ $\begin{cases}x+1\leq 0\\ x-1\leq -2\end{cases}$ គុណអង្គនឹងអង្គ គេបាន $(x+1)(x-1)\geq 0 \Leftrightarrow x^2-1\geq 0$ ពិត

ករណី $x\leq -1$ យើងបាន $\overline{q}\Rightarrow \overline{p}$ ពិត $(1)$

- បើ $x\geq 1$ នោះ $\begin{cases}x-1\geq 0\\ x+1\geq 2\end{cases}$ គុណអង្គនឹងអង្គ គេបាន $(x+1)(x-1)\geq 0 \Leftrightarrow x^2-1\geq 0$ ពិត

ករណី $x\geq 1$ យើងបាន $\overline{q}\Rightarrow \overline{p}$ ពិត $(2)$

តាម $(1)$ និង $(2)$ គេបាន $\overline{q}\Rightarrow \overline{p}$ ពិត ។

វិបាក: $p\Rightarrow q$ ពិត ។

ដូចនេះបើ $x^2-1<0$ នោះ $-1<x<1$ ។

**របៀបទី២:**

- បើ $x\leq -1$ នោះ $x^2\geq 1 \Rightarrow x^2-1\geq 0$ ពិត

ករណី $x\leq -1$ យើងបាន $\overline{q}\Rightarrow \overline{p}$ ពិត $(1)$

- បើ $x\geq 1$ នោះ $x^2\geq 1 \Rightarrow x^2-1\geq 0$ ពិត

ករណី $x\geq 1$ យើងបាន $\overline{q}\Rightarrow \overline{p}$ ពិត $(2)$

តាម $(1)$ និង $(2)$ គេបាន $\overline{q}\Rightarrow \overline{p}$ ពិត ។

វិបាក: $p\Rightarrow q$ ពិត ។

ដូចនេះបើ $x^2-1<0$ នោះ $-1<x<1$ ។

១២. សម្រាយបញ្ជាក់តាមសំណើផ្ទុយពីការពិត:

ក. បង្ហាញថា $\sqrt{5}$ ជាចំនួនអសនិទាន

ឧបមាថា $\sqrt{5}$ ជាចំនួនសនិទាន ។តាង $\sqrt{5}=\frac{a}{b}$ ដែល $a,b$ ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា យើងបាន

$5=\frac{a^2}{b^2}\Leftrightarrow a^2=5b^2$ នោះ $a$ ជាពហុគុណនៃ $5$

តាង $a=5k$ គេបាន $(5k)^2=5b^2\Rightarrow b^2=5k^2$ នោះ $b$ ជាពហុគុណនៃ $5$

ដោយ $a$ និង $b$ ជាពហុគុណនៃ $5$ នោះ $a,b$ មិនមែនជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ដែលផ្ទុយនឹងលក្ខខណ្ឌ ។

ដូចនេះ $\sqrt{5}$ មិនមែនជាចំនួនសនិទាន ដែលមានន័យថា $\sqrt{5}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

ខ. បង្ហាញថា $\sqrt{p}$ ជាចំនួនអសនិទាន ចំពោះគ្រប់ចំនួនបឋម $p$

ឧបមាថា $\sqrt{p}$ ជាចំនួនសនិទាន ។តាង $\sqrt{p}=\frac{a}{b}$ ដែល $a,b$ ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ។

គេបាន

$p=\frac{a^2}{b^2}\Rightarrow a^2=pb^2$ នោះ $a$ ជាពហុគុណនៃ $p$

តាង $a=pk$ គេបាន $(pk)^2=pb^2\Rightarrow b^2=pk^2$ នោះ $b$ ជាពហុគុណនៃ $p$

ដោយ $a$ និង $b$ ជាពហុគុណនៃ $p$ នោះ $a,b$ មិនមែនជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ដែលផ្ទុយនឹងលក្ខខណ្ឌ ។

ដូចនេះ $\sqrt{p}$ មិនមែនជាចំនួនសនិទាន ដែលមានន័យថា $\sqrt{p}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

១៣. សម្រាយបញ្ជាក់តាមសំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម

ក. បង្ហាញថា គេមាន $x\,;\,y$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន និង $xy$ ជាចំនួនគត់សេស នោះ $x$ និង $y$ ក៏ជាចំនួនគត់សេសដែរ

តាង $p:xy$ ជាចំនួនគត់សេស $\Rightarrow \overline{p}:xy$ ជាចំនួនគូ

$q:x$ និង $y$ ជាចំនួនគត់សេស $\overline{q}:x$ និង $y$ យ៉ាងហោចណាស់មាន $1$ គូ

ស្រាយថា $p\Rightarrow q$ ពិត $\Leftrightarrow \overline{q}\Rightarrow\overline{p}$ ពិត

ផ្តើមពី $\overline{q}:x$ និង $y$ យ៉ាងហោចណាស់មាន $1$ គូ

- បើ $x$ ជាចំនួនគូ តាង $x=2k,k\in\mathbb{N}$ និង $\forall y\in\mathbb{N}$ គេបាន

  $xy=2ky=2(ky)$ ជាចំនួនគូ ពិត $(1)$
- បើ $y$ ជាចំនួនគូ តាង $y=2k,k\in\mathbb{N}$ និង $\forall x\in\mathbb{N}$ គេបាន

  $xy=2kx=2(kx)$ ជាចំនួនគូ ពិត $(2)$

តាម $(1)$ និង $(2)$ គេបាន $\overline{q}\Rightarrow\overline{p}$ ពិត ។ វិបាក: $p\Rightarrow q$ ពិត ។

ដូចនេះ $xy$ ជាចំនួនគត់សេស នោះ $x$ និង $y$ ក៏ជាចំនួនគត់សេសដែរ គ្រប់ $x$ និង $y$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន ។

ខ. គេមាន $x(x-2)<0$ នោះ $0<x<2$

តាង $p: x(x-2)<0 \Rightarrow \overline{p}: x(x-2)\geq 0$ និង $q: 0<x<2 \Rightarrow \overline{q}: x\leq 0$ ឬ $x\geq 2$

ស្រាយថា $p\Rightarrow q$ ពិត $\Leftrightarrow \overline{q}\Rightarrow \overline{p}$ ពិត

ផ្តើមពី $\overline{q}: x\leq 0$ ឬ $x\geq 2$

- បើ $x\leq 0$ នោះ $\begin{cases} x\leq 0 \\ x-2\leq -2 \end{cases}$ គុណអង្គនឹងអង្គ គេបាន $x(x-2)\geq 0$ ពិត

ករណី $x\leq 0$ យើងបាន $\overline{q}\Rightarrow \overline{p}$ ពិត (1)

- បើ $x\geq 2$ នោះ $\begin{cases} x-2\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases}$ គុណអង្គនឹងអង្គ គេបាន $x(x-2)\geq 0$ ពិត

ករណី $x\geq 2$ យើងបាន $\overline{q}\Rightarrow \overline{p}$ ពិត (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន $\overline{q}\Rightarrow \overline{p}$ ពិត ។

វិបាក: $p\Rightarrow q$ ពិត ។

ដូចនេះ បើ $x(x-2)<0$ នោះ $0<x<2$ ។

១៤. សំណើរផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម:

ក. បើខ្ញុំប្រឡងធ្លាក់អាហារូបករណ៍នោះខ្ញុំមិនសិក្សាគណិតវិទ្យា ។

ខ. បើ $x^2$ ជាចំនួនអវិជ្ជមាននោះ $x$ មិនមែនជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន ។

គ. បើព្រះច័ន្ទមិនវិលជុំវិញផែនដី នោះផែនដីមិនវិលជុំវិញព្រះអាទិត្យ ។

១៥. បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n$ បើ $n^2>25$ នោះ $n>5$

តាង $p: n^2>25 \Rightarrow \overline{p}: n^2\leq 25$ និង $q: n>5 \Rightarrow \overline{q}: n\leq 5$

ស្រាយថា $p\Rightarrow q$ ពិត $\Leftrightarrow \overline{q}\Rightarrow \overline{p}$ ពិត

មាន $\overline{q}: n\leq 5 \Rightarrow n^2\leq 25$ ដោយ $n\in\mathbb{N}$ ។គេបាន

- បើ $n=1\Rightarrow n^2=1<25$ ពិត
- បើ $n=2\Rightarrow n^2=4<25$ ពិត
- បើ $n=3\Rightarrow n^2=9<25$ ពិត
- បើ $n=4\Rightarrow n^2=16<25$ ពិត
- បើ $n=5\Rightarrow n^2=25$ ពិត

បានន័យថា $\overline{q}\Rightarrow \overline{p}$ ពិត យើងទាញបាន $p\Rightarrow q$ ពិត ។

ដូចនេះ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n$ បើ $n^2>25$ នោះ $n>5$ ។

១៦. ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់តាមសំណើផ្ទុយពីការពិត បង្ហាញថា:

ក. $x+\dfrac{1}{x}>2$ ចំពោះគ្រប់ $x>1$

តាង $p: x+\dfrac{1}{x}>2\ ,\forall x>1 \Rightarrow \overline{p}: x+\dfrac{1}{x}\le 2\ ,\forall x>1$

យើងនឹងបង្ហាញថា $\overline{p}$ មិនពិត នោះ $p$ ពិត

មាន $\overline{p}: x+\dfrac{1}{x}\le 2\ ,\forall x>1 \Rightarrow \dfrac{x^2+1}{x}\le\dfrac{2x}{x}$

$\Leftrightarrow x^2+1\le 2x$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1\le 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2\le 0$ មិនពិតព្រោះ $(x-1)^2\ge 0\ ,\forall x>1$

ដោយ $\overline{p}$ មិនពិត នោះ $p$ ពិត ។

ដូចនេះ $x+\dfrac{1}{x}>2$ ចំពោះគ្រប់ $x>1$ ។

ខ. គ្មានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $p$ និង $q$ ដែល $\dfrac{p^2}{q^2}=2$

តាង $s$ : គ្មាន $p,q\in\mathbb{Z}$ ដែល $\dfrac{p^2}{q^2}=2$

ឧបមាថា $\overline{s}$ : មាន $p,q\in\mathbb{Z}$ ដែល $\dfrac{p^2}{q^2}=2$ ។ គេបាន

$p^2=2q^2 \quad (1)$

តាង $p=a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n$

$q=b_1\times b_2\times b_3\times\cdots\times b_m$

ដែល $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,b_1,b_2,b_3,\cdots,b_m$ ជាចំនួនបឋម ។

តាម (1) យើងបាន

$$p^2=2q^2$$

$$(a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n)^2=2(b_1\times b_2\times b_3\times\cdots\times b_m)^2$$

$$(\underbrace{a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n}_{n})(\underbrace{a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n}_{n})=2(\underbrace{b_1\times b_2\times b_3\times\cdots\times b_m}_{m})(\underbrace{b_1\times b_2\times b_3\times\cdots\times b_m}_{m})$$

$$(\underbrace{a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n\times a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n}_{2n})=(\underbrace{2\times b_1\times b_2\times b_3\times\cdots\times b_m\times b_1\times b_2\times b_3\times\cdots\times b_m}_{2m+1})$$

មិនពិត ព្រោះអង្គទី $1$ មានកត្តាបឋម $2n$ ជាចនួនគត់គូ និងអង្គទី $2$ មានកត្តាបឋម $2m+1$ ជាចំនួនគត់សេស នាំឲ្យ $p$ ពិត ។

ដូចនេះ គ្មានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $p$ និង $q$ ដែល $\dfrac{p^2}{q^2}=2$ ។

១៧. រកឧទាហរណ៍ផ្ទុយនៃអំណះអំណាងខាងក្រោម:

ក. ផលគុណនៃចំនួនអសនិទានពីរខុសគ្នា ជាចំនួនអសនិទាន

**ឧទាហរណ៍:**យកចំនួនទី១: $\sqrt{2}$ និងចំនួនទី២: $\sqrt{8}$ គេបាន $\sqrt{2}\times\sqrt{8}=\sqrt{16}=4$ ជាចំនួនសនិទាន ។

ខ. បើ $x\ge\sqrt{7}$ នោះ $x\ge 3$

**ឧទាហរណ៍:** បើ $x=\sqrt{8}$ នោះ $x=2\sqrt{2}$ ដោយ $2\sqrt{2}<3\Rightarrow x<3$ ។

គ. $f(n)=n^2+n+1$ គឺជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបផង និងជាពហុគុណនៃ $3$ ផង ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបអវិជ្ជមាន $n$

**ឧទាហរណ៍:** បើ $n=-1$ នោះ $f(-1)=(-1)^2+(-1)+1=1$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបតែមិនមែនជាពហុគុណនៃ $3$ ។

១៨. រកឧទាហរណ៍ផ្ទុយនៃអំណះអំណាងខាងក្រោម:

ក. $f(x)=x^2-27x+k, k\in\mathbb{Z}, f(x)=0$ មានឫសបីចំពោះគ្រប់តម្លៃ $k$

**ឧទាហរណ៍:** បើ $k=1$ នោះ $f(x)=0\Leftrightarrow x^2-27x+1=0$

មាន $\Delta=(-27)^2-4(1)=725>0$ សមីការមានឫសពីរគឺ $x_1=\dfrac{27-\sqrt{725}}{2},\ x_2=\dfrac{27+\sqrt{725}}{2}$ ។

ខ. $f(n)=(n+1)(n+2)(n+3)$ ចែកដាច់នឹង $12$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $n$

**ឧទាហរណ៍:**បើ $n=0$ នោះ $f(0)=(0+1)(0+2)(0+3)=6$ ចែកមិនដាច់នឹង $12$ ទេ ។

# ជំពូក២ សំណុំ

## ១. សំណុំ

### ១.១. សញ្ញាណនៃសំណុំ

រាល់អង្គធាតុ ឬ វត្ថុអ្វីក៏ដោយតែងតែផ្សំពីសមាសធាតុផ្សេងៗគ្នា ទើបអាចបង្កើតបានជាអង្គធាតុ ឬ វត្ថុនោះ ឬគេអាចនិយាយថាវត្ថុទាំងអស់ផ្សំពីធាតុមួយ ហើយធាតុមួយតែងតែមាននៅក្នុងវត្ថុនោះ និយាយឲ្យខ្លីគឺមានច្រើនក្នុងមួយ ហើយមានមួយក្នុងច្រើន ។

ឧទាហរណ៍:

១សប្តាហ៍= ៧ថ្ងៃ= { អាទិត្យ, ចន្ទ, អង្គារ, ពុធ, ព្រហស្បតិ៍, សុក្រ, សៅរ៍ }

សិស្សមួយថ្នាក់= 45 នាក់={ សុខ, តារា, ... }

សៀវភៅមួយក្បាល= 500 ទំព័រ $=\{1, 2, 3, ..., 500\}$ ទាំងអស់នេះជាសំណុំ ។

**និយមន័យ:** សំណុំគឺជាបណ្តុំនៃវត្ថុ (មនុស្ស, សត្វ, រុក្ខជាតិ, ....... ) ដែលត្រូវបានកំណត់ដោយលក្ខខណ្ឌជាក់លាក់មួយ ។ គេតាងសំណុំដោយអក្សរធំដូចជា $A, B, C, .......$ ហើយវត្ថុនីមួយនៅក្នុងសំណុំហៅថាធាតុ ( Elements or member )។ ហើយធាតុនីមួយនៃសំណុំតាងដោយអក្សរតូចដូចជា $a, b, c, ...$។ ចំនួនធាតុនៃសណុំតាងដោយ $n(A)$ ឬ $\#A$ ឬ $|A|$ ឬ $Card(A)$ ។

**ឧទាហរណ៍:** $A=\{1, 2, 3, 4\}$ អានថា សំណុំ $A$ មានធាតុ 1, 2, 3, 4

**សម្គាល់:** 1 ជាធាតុរបស់ $A$ គេសរសេរ $1\in A$ ($\in$របស់ )

5 មិនមែនជាធាតុរបស់ $A$ គេសរសេរ $5\notin A$ ( $\notin$ មិនមែនជារបស់ )

### ១.២. ប្រភេទនៃសំណុំ

គេបែកចែកសំណុំជាពីរប្រភេទគឺ

ក) សំណុំរាប់អស់ ឬ សំណុំកំណត់: មានធាតុជាចំនួនកំណត់ ( រាប់អស់ ) ។

**ឧទាហរណ៍:** $A=\{1, 2, x, y\}$

$B=\{x/|x|<2\}$

$C=\{1, 2, 3, ...... ,100\}$

$D=\{(2n+1)/n\in\mathbb{N}\wedge n\le 10\}$

$E=\{(x, y)/x, y\in\mathbb{Z}\wedge x^2+y^2=25\}$

$F=\{\ \}$

$G=\{n/n\in\mathbb{N}\wedge n^2+5=0\}$

$H=\{x/x\in\mathbb{C}, x^2+1=0\}$ ។

ខ) សំណុំរាប់មិនអស់ ឬ សំណុំអនន្ត: មានធាតុជាចំនួនរាប់មិនអស់ ឬ អនន្តធាតុ ។

**ឧទាហរណ៍:** $X=\{2x+3y=5/(x, y)\in\mathbb{R}\}$

$Z=\{n^2/n\in\mathbb{N}\wedge n\ge 10\}$

$W=\{u_n=3n^2-1/n\in\mathbb{N}\}$

$T=\{(x, y)/x^2+y^2\ge 9\}$

## ១.៣. របៀបកំណត់សំណុំ

គេកំណត់សំណុំតាមពីររបៀប:

ក) ការកំណត់សំណុំតាមការរៀបរាប់ឈ្មោះធាតុ

**ឧទាហរណ៍:** $A=\{1,\,2,\,3,\,......\,,\,27\}$

$B=\{\varnothing,\,\{1\},\,\{\{1\}\},\,\{1,\,2\},\,1,\,2\}$

$C=\{\ \}$

ខ) កំណត់សំណុំតាមលក្ខណៈរួមនៃធាតុ

$S=\{x\,/\,P(x)\}$ ដែល $P(x)$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ

**ឧទាហរណ៍:** $A=\{n\,/n\in\mathbb{N}\wedge n\le 27\}$

$B=\{A\,/\,A=P(c),\,c=2n,\,0\le n\le 3\}$

$C=\{(x,\,y,\,z)\,/\,x^2+y^2+z^2=9\}$

$D=\{x\,/\,(x^2-3)(x+5)=0\wedge x\in\mathbb{R}\}$

## ១.៤. សំណុំសំខាន់ៗ

$\mathrm{B}=Boolean\ Value=\{true\ ,\ fales\}$

$\mathbb{N}=\{1,\,2,\,3,\,.......\,\}=$ Natural Numbers

$\mathbb{Z}=$ Integers $=\{\ .....\,-3,-2,-1,\,0,\,1,\,2,\,3,\,.....\ \}$

$\mathbb{Q}=\left\{\dfrac{a}{b}\,/\,a,\,b\in\mathbb{Z},\,b\ne 0\right\}$ សំណុំចំនួនសនិទាន (Rational numbers )

$\mathbb{Q}^c=\{x\,/\,x\notin\mathbb{Q}\wedge\,x\in\mathbb{R}\}$ សំណុំចំនួនអសនិទាន (Irrational numbers)

$\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ សំណុំចំនួនពិត (Real numbers)

$\mathbb{C}=\{a+ib\,/\,a,\,b\in\mathbb{R},\,i=\sqrt{-1}\}$ សំណុំចំនួនកុំផ្លិច (Complex numbers)

**សម្គាល់:**

$\mathbb{N}^*=\mathbb{N}-\{0\}$

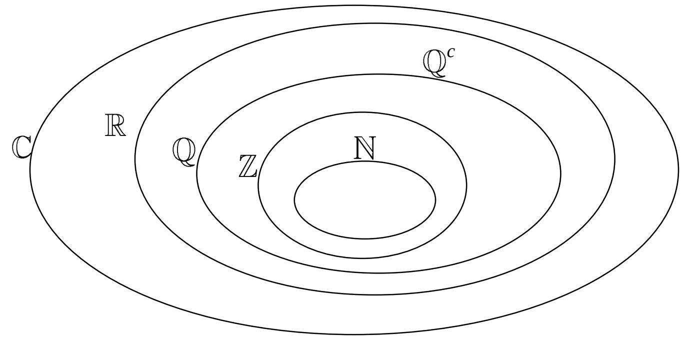
$\mathbb{Z}^+=\mathbb{Z}_{\ge 1}=\mathbb{N}^*=\{1,\,2,\,3,\,......\ \}$

$\mathbb{R}^+=\mathbb{R}_{>0}=(0,\,+\infty)$

$\mathbb{Q}^+=\left\{x\,/\,x\in\mathbb{R},\,\exists p,\,q\in\mathbb{Z}^+,\,x=\dfrac{p}{q}\right\}$ ។

## ១.៥. ទំនាក់ទំនងរវាងសំណុំ

$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$



### ១.៥.១.សំណុំដែលមានធាតុមិនមែនជាចំនួន

សំណុំដែលមានធាតុមិនមែនជាចំនួនវាមានធាតុចំណុច ។

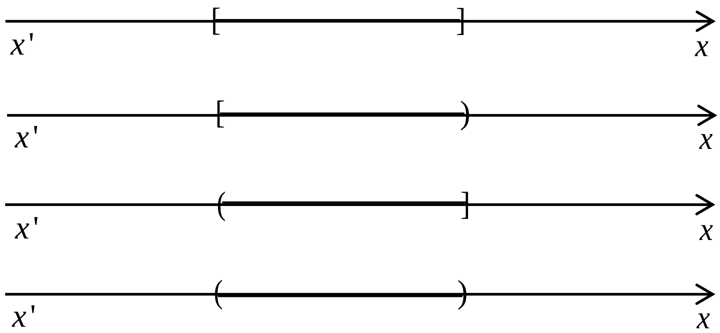
**ឧទាហរណ៍:** សមីការបន្ទាត់ $Ax+By=C$ គឺជាសំណុំចំណុច $P=\{(x,\ y)/Ax+By=C\}$

សមីការរង្វង់ $x^2+y^2=3$

សមីការប្លង់ $(P)$: $x+y+z=0$

### ១.៥.២.សំណុំនៃធាតុនៅក្នុងចន្លោះ

- $[a,\ b]=\{x/\ a\le x\le b\}$ ហៅថាចន្លោះបិទត្រង់ $a$ និង $b$
- $[a,\ b)=\{x/\ a\le x<b\}$ ហៅថាចន្លោះបិទត្រង់ $a$ និង បើកត្រង់ $b$
- $(a,\ b]=\{x/\ a<x\le b\}$ ហៅថាចន្លោះបើកត្រង់ $a$ និង បិទត្រង់ $b$
- $(a,\ b)=\{x/\ a<x<b\}$ ហៅថាចន្លោះបើកត្រង់ $a$ និង $b$




**សម្គាល់:** តាមឯកសារខ្លះគេសរសេរ $x\in(a,\ b)$ ជា $x\in]a,\ b[$ ជំនួសឲ្យចន្លោះបើក ។

## ២. សំណុំសកល សំណុំទទេ ( Universal set , Empty set )

**២.១.សំណុំសកល**គឺជាសំណុំដែលមានគ្រប់ធាតុ ដែលគេលើកយកមកសិក្សាទៅតាមប្រធានបទនីមួយៗ ។ សំណុំសកលអាចមានធាតុច្រើន ឬ តិច ទៅតាមកម្មវត្ថុនៃការលើកឡើង ។ គេតាងសំណុំសកលដោយ $U$ បានមកពីពាក្យ *Universal Set* ។

**ឧទាហរណ៍:** ក្នុងប្លង់ធរណីមាត្រសកល $U$ ជាសំណុំនៃគ្រប់ចំណុចទាំងអស់នៃប្លង់ ។

គេឲ្យសកល $U$ មួយ និង លក្ខណៈ $P$ មួយ ។ វាអាចនឹងគ្មានធាតុណាមួយនៃ $U$ ដែលបំពេញលក្ខណៈ $P$ ។

**ឧទាហរណ៍:** $S=\{x/x$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន , $x^2=3\}$

ក្នុងករណីនេះ គ្មានចំនួនគត់ណាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈខាងលើទេបានន័យថា $S$ ជាសំណុំទទេ ។

**២.២. សំណុំទទេ:** គឺជាសំណុំដែលគ្មានធាតុ តាងដោយ $\varnothing$ ឬ $\{\ \}$ ។ ហើយចំនួនធាតុនៃសំណុំស្មើនឹង $0$ ។ គេបាន $n(\varnothing)=0$ ឬ $n(\{\ \})=0$ ។

**ឧទាហរណ៍:** ចូរកំណត់សំណុំសកលចំពោះសំណុំខាងក្រោម:

$A=\{x/x\in\mathbb{R},\ x^2-25=0\}$, $B=\{3x/\ x\ge 1\}$

$C=\{x/\ x^2+6x+8=0\}$, $D=\{x/\ \sqrt{x}\ \ge 5\wedge x\in\mathbb{R}\}$

ដូចនេះ នាំឲ្យសំណុំសកល $U=\left(-\infty,+\infty\right)=\mathbb{R}$ ។

## ២.៣. សំណុំស្មើគ្នា

**និយមន័យ:** សំណុំពីរស្មើគ្នាកាលណាវាមានបញ្ជីឈ្មោះធាតុដូចគ្នា ។

$$A=B \;\Leftrightarrow\; \forall x\in A \;\Rightarrow\; \forall x\in B \wedge \forall x\in B \;\Rightarrow\; \forall x\in A$$

**ឧទាហរណ៍១:** $A=\left\{n \,/\, n^2-9=0\right\}, \quad B=\left\{-3,\, 3\right\}$

$$\Rightarrow A=B$$

**ឧទាហរណ៍២:** $A=\left\{1,\,5,\,5,\,5,\,3,\,3,\,1\right\}=\left\{1,\,3,\,5\right\}=\left\{5,\,3,1\right\}$

**ឧទាហរណ៍៣:** រកតម្លៃ $x, y$ ដើម្បីឲ្យសំណុំ $A$ ស្មើនឹងសំណុំ $B$ បើ $A=\left\{3,\,4\right\}$ និង $B=\left\{3,\,x,\,y\right\}$

$A=B \Leftrightarrow x=3\,,\; y=4$ ឬ $x=4\,,\; y=3$

**២.៤. សំណុំរង:** $A$ ជាសំណុំរងនៃ $B$ ឬ $A$ នៅក្នុង $B$ ឬ $A$ ជាផ្នែកមួយនៃ $B$ ឬ $B$ ផ្ទុក $A$ កាលណាគ្រប់ធាតុ $x$ នៃ $A$ សុទ្ធតែជាធាតុនៃ $B$ ។ គេកំណត់សរសេរ $A\subset B$ ឬ $B\supset A$ ហើយ $Card(A)\le Card(B)$ ។

គេបាន $A\subset B \;\Leftrightarrow\; \forall x\in A \Rightarrow\; x\in B$

**សម្គាល់:** បើ $Card\,(A)<Card(B)$ នោះគេថា $A$ ជាសំណុំរងផ្ទាល់នៃ $B$ ។

បើ $Card(A)=Card(B)$ នោះគេថា $A$ ជាសំណុំរងនៃ $B$ ហើយច្រាសមកវិញ ។

**កំណត់ចំណាំ:**

1) សំណុំមួយអាចជាធាតុនៃសំណុំផ្សេងទៀត ។

**ឧទាហរណ៍:** $\left\{\left\{1,\,2,\,3\right\},\,a,\,\left\{a\right\},\,\left\{b,\,c\right\}\right\}$

2) សំណុំទទេខុសពីសំណុំដែលមានផ្ទុកធាតុជាសំណុំទទេ ($\varnothing\neq\left\{\varnothing\right\}$ ) ។

ដើម្បីរកចំនួនសំណុំរងនៃសំណុំមួយដែលមាន $n$ ធាតុគេប្រើរូបមន្ត $2^n$ ដែល $n$ ជាចំនួនធាតុនៃសំណុំ ។

**សម្រាយបញ្ជាក់**

តាង $A=\left\{a_1\,,\,a_2\,,\,a_3\,,\,......\,,\,a_n\right\}$ ដែល $n(A)=n$

សំណុំរងនៃ $A$ ដែលគ្មានធាតុគឺ $C_n^0$

សំណុំរងនៃ $A$ ដែលមាន $1$ ធាតុគឺ $C_n^1$

......................................................

សំណុំរងនៃ $A$ ដែលមាន $n$ ធាតុគឺ $C_n^n$

នាំឲ្យចំនួនសំណុំរងនៃ $A$ ទាំងអស់គឺៈ $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\;.....\;+C_n^n=(1+1)^n$

ព្រោះតាមទ្វេធា Newton $(x+1)^n=C_n^0\,x^n+C_n^1\,x^{n-1}+C_n^2\,x^{n-2}+\;.....\;+C_n^n$

យក $x=1$ នោះ $(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\;.....\;+C_n^n=2^n$ ពិត ។

**ឧទាហរណ៍:** ក) រកសំណុំរងនៃ $A$ ដែល $A=\{1, 2, 3\}$

ខ) រកចំនួនរងនៃ $A$ ដែល $A=\left\{n / n\in\mathbb{N},\ n^2\le 81\right\}$

**ចម្លើយ**

ក) សំណុំរងនៃ $A$ ដែលមាន $2^3=8$ សំណុំរងនៃ ព្រោះ $n(A)=3$

សំណុំទាំងអស់ គឺ $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$ ។

ខ) $A \ =\left\{n / n\in\mathbb{N},\ n^2\le 81\right\}$

$=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$\Rightarrow n(A)=9$

ដូចនេះ ចំនួនសំណុំរងនៃ $A$ គឺ $2^9=512$ សំណុំគឺៈ

1. សំណុំដែលគ្មានធាតុមាន $C_n^0=1$ សំណុំ
2. សំណុំដែលមាន 1 ធាតុមាន $C_9^1=9$ សំណុំ
3. សំណុំដែលមាន 2 ធាតុមាន $C_9^2=36$ សំណុំ
4. សំណុំដែលមាន 3 ធាតុមាន $C_9^3=84$ សំណុំ
5. សំណុំដែលមាន 4 ធាតុមាន $C_9^4=$ 126សំណុំ
6. សំណុំដែលមាន 5 ធាតុមាន $C_9^5=126$ សំណុំ
7. សំណុំដែលមាន 6 ធាតុមាន $C_9^6=84$ សំណុំ
8. សំណុំដែលមាន 7 ធាតុមាន $C_9^7=36$ សំណុំ
9. សំណុំដែលមាន 8 ធាតុមាន $C_9^8=9$ សំណុំ
10. សំណុំដែលមាន 9 ធាតុមាន $C_9^9=1$ សំណុំ

**ស្វ័យសត្យ:** សំណុំទទេមានតែមួយគត់ មានន័យថាបើ $S$ និង $T$ ជាពីរសំណុំទទេ នោះគេបាន $S=T$ ។

បើ $A=B \Leftrightarrow \left[(A\subset B)\wedge(B\subset A)\right]$ ឬ $A=B \Leftrightarrow \left\{\forall x / x\in A \Leftrightarrow x\in B\right\}$

បើ $A$ មិនមែនជាសំណុំរងនៃ $B$ មានន័យថាវាមាន ធាតុ $A$ ដែលមិនមែនជាធាតុរបស់ $B$ គេសរសេរ $A\not\subset B$ ។

$Ex:$ គេឲ្យ $A=\{1, 2, 3\}$ , $B=\{1, 2, 5, 6\}$ និង $C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

គេបាន: $A\not\subset B$ តែ $A\subset C$ , $B\subset C$

**ទ្រឹស្តីបទ:**

1) ចំពោះគ្រប់សំណុំ $A$ គេបាន $\varnothing\subset A\subset U$ ( ដែល $U$ ជាសំណុំសកល ) ។
2) ចំពោះគ្រប់សំណុំ $A$ គេបាន $A\subset A$
3) បើ $A\subset B$ និង $B\subset C$ នោះគេបាន $A\subset C$
4) $A=B \Leftrightarrow \left[(A\subset B)\wedge(B\subset A)\right]$ ។

**សម្រាយបញ្ជាក់**

1) ចំពោះ $\forall$ សំណុំ $A$ គេមាន $\forall x: x\in\varnothing \Rightarrow x\in A$ ពិតព្រោះ $\forall x: x\in\varnothing$ ជាសំណើមិនពិត

ចំពោះ $\forall$ សំណុំ $A$ គេមាន $\forall x: x\in A \Rightarrow x\in U$ ( $U$ ជាសំណុំសកល )

ដូចនេះ $\forall$ សំណុំ $A$ គេបាន $\varnothing\subset A\subset U$ ។

2) ចំពោះ $\forall$ សំណុំ $A$ គេមាន $\forall x: x\in A \Rightarrow x\in A$

ដូចនេះ ចំពោះ $\forall$ សំណុំ $A$ គេបាន $A\subset A$ ។

3) គេមាន:

$$\left.\begin{array}{l}\forall x: x\in A\\ A\subset B\end{array}\right| \Rightarrow x\in B$$

ហើយ $B\subset C \Rightarrow x\in C$

ដូចនេះ បើ $A\subset B$ និង $B\subset C$ នោះ $A\subset C$ ។

4) $A=B \Leftrightarrow \left[(A\subset B)\wedge(B\subset A)\right]$

$A=B \Leftrightarrow \forall x\in A \Rightarrow x\in B$ និង $\forall x\in B \Rightarrow x\in A$

$\Leftrightarrow (A\subset B)\wedge(B\subset A)$

**សម្គាល់:** បើ $A\subset B$ ប៉ុន្តែ $A\neq B$ គេថា $A$ ជាសំណុំរង ***Proper*** នៃ $B$ ( $A$ is a proper subset of $B$ )។

**ឧទាហរណ៍:** គេឲ្យ $A=\{1, 3\}$ , $B=\{1, 2, 3\}$ និង $C=\{1, 2, 3\}$ ។

គេបាន $A, B$ សុទ្ធតែជាសំណុំរងនៃ $C$ ហើយ $A$ ជាសំណុំរង Proper នៃ $C$ ចំណែក $B$ មិនមែនជាសំណុំរង Proper នៃ $C$ ទេព្រោះ $B=C$ ។

**ចំណាំ:** បើ $A$ ជាសំណុំរងនៃ $B$ នោះ $n(A)\le n(B)$ តែបើ $n(A)\le n(B)$ នោះ $A$ អាចជាសំណុំរង នៃ $B$ ឬ $A$ មិនអាចជាសំណុំរងនៃ $B$ ។

**ឧទាហរណ៍:** បើ $A=\{1, 2, 3\}$ និង $B=\{1, 2, 3, 4\}$

គេបាន $n(A)=3\le 4=n(B)$

$\Rightarrow A\subset B$ ពិត

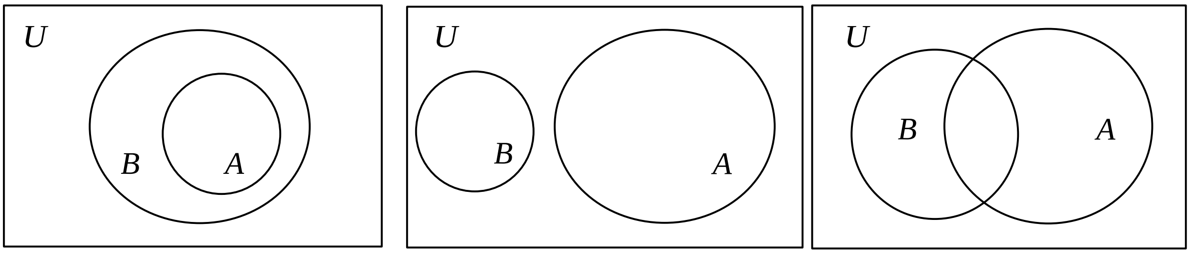
បើ $A=\{1,2, 5\}$ និង $B=\{1, 2, 3, 4\}$

គេបាន $n(A)=3\le 4=n(B)$ តែ $A\not\subset B$ ទេ ។

## ២.៥. ដ្យាក្រាមវិន (VENN DIAGRAMS )

**២.៥.១.ដ្យាក្រាមវិន ឬ ដ្យាក្រាមសំណុំ** គឺជារូបភាពតាងឲ្យសំណុំ ដោយសំណុំចំណុចក្នុងប្លង់ ឬ ជាដ្យាក្រាមដែលបង្ហាញពីទំនាក់ទនង Logic ដែលអាចកើតមានរវាងការប្រមូលផ្តុំសំណុំកំណត់ផ្សេងៗ ។

ដ្យាក្រាមវិនត្រូវបានបង្កើតឡើងនៅចន្លោះឆ្នាំ 1880 ដោយលោក John Venn។ ដ្យាក្រាមទាំងនេះត្រូវបានគេប្រើដើម្បីបង្រៀន Element set theory ហើយនឹងប្រើដើម្បីបកស្រាយទំនាក់ទំនងសាមញ្ញៗ នៃទំនាក់ទនងរវាងសំណុំតាង Probability, Logic , Statistics, Linguistics និង Computer Science ។




(1) $A\subset B$ (2) $A$ និង $B$ ជាសំណុំដាច់គ្នា (3) $A$ និង $B$ មានធាតុរួម

២.៥.២.Russell's Paradox

តាងសំណុំ $S$ ជាសំណុំនៃធាតុទាំងឡាយដែលមានធាតុមិនមែនជាខ្លួនឯក ។

$$S=\{S'/\ S'\notin S'\}$$

**ឧទាហរណ៍:** ជាងកាត់សក់អាចកាត់សក់ កោរសក់ឲ្យមនុស្សគ្រប់គ្នាបាន ប៉ុន្តែជាងកាត់សក់ខ្លួនឯង មិនអាចកាត់សក់ កោសក់គេឲ្យខ្លួនឯងបានទេ ។

# ៣. ប្រមាណវិធីលើសំណុំ

## ៣.១. ប្រសព្វនៃពីរឬច្រើនសំណុំ

ជាសំណុំមួយ ដែលមានធាតុជាធាតុរួមគ្នានៃសំណុំទាំងនោះ ។ សំណុំ $A$ ប្រសព្វ $B$ កំនត់សរសេរដោយ: $A\cap B=\{x/x\in A,\wedge x\in B\}$ ប្រសព្វនៃសំណុំ $A$ និងសំណុំ $B$ ។

**ឧទាហរណ៍:**

$$A=\{1,2,3,4,5,6\}$$
$$B=\{2n/n\geq 1\}$$
$$C=\{n^2/n\geq 3\}$$

យើងបាន

$A\cap B=\{2,4,6\}$ និង $A\cap C=\varnothing$ ។

**ប្រសព្វច្រើនសំណុំ**

$$A_1\cap A_2\cap A_3\ldots\cap A_n=\{x/x\in A_1\wedge A_2\wedge\ldots A_n\}=\bigcap_{i=1}^{n}A_i$$

**លក្ខខណ្ឌប្រសព្វ**

1. $A\cap A=A$
2. $A\cap\overline{A}=\varnothing$
3. $A\cap\varnothing=\varnothing$
4. $A\cap B=B\cap A$
5. $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
6. $[(A\cap B)\subset A]\wedge[(A\cap B)\subset B]$
7. $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subset B$ ។

**៣.២. ប្រជុំនៃពីរឬច្រើនសំណុំ**គឺជាសំណុំមួយដែលមានធាតុនៅក្នុងសំណុំទីមួយឬសំណុំបន្ទាប់។

សំណុំ $A$ ប្រជុំសំណុំ $B$ កំនត់សរសេរដោយ $A\cup B=\{x/x\in A\vee x\in B\}$ ប្រជុំនៃសំណុំ $A$ និង សំណុំ $B$ ។

**ឧទាហរណ៍:** $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ $B=\{1,3,5,7\}$ $C=\mathbb{N}$

យើងបាន $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

$A\cup C=\{1,2,3,4,\ldots\}=\mathbb{N}$

$B\cup C=\{1,2,3,4,5,6,\ldots\}=\mathbb{N}$

**ប្រជុំច្រើនសំណុំ**

$$A_1\cup A_2\cup\ldots A_n=\{x/x\in A_1\vee A_2\vee\ldots\vee A_n\}=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$$

**លក្ខណនៃប្រជុំ**

1. $A\cup A=A$
2. $A\cup\overline{A}=U$
3. $A\cup\varnothing=A$
4. $A\cup B=B\cup A$
5. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
6. $A\subset A\cup B\wedge B\subset A\cup B$
7. $A\cup B=B\Leftrightarrow A\subset B$ ។

**៣.៣. សំណុំរងបំពេញ**

**សំណុំរងបំពេញនៃសំណុំណាមួយ**គឺជាសំណុំដែលមានធាតុមិនមែនជាសំណុំនោះតែធាតុនោះជាធាតុនៃសំណុំសកល។បើជា $\overline{A}$ សំណុំរងបំពេញនៃ $A$ ក្នុ $U$ យើងកំណត់សរសេរ

$\overline{A}=\{x/x\in U\wedge x\notin A\}$ ឬ $\overline{A}=\complement_U A=A'$

$\overline{\overline{A}}=A$

**៣.៤. ទំនាក់ទំនងរវាងប្រសព្វនិងប្រជុំ**

1. $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
2. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$
3. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
4. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ ។

## ៣.៥. ភាពទូទៅនៃប្រសព្វនិងប្រជុំ

**និយមន័យទី១**

គេឱ្យℑជាគ្រួសារនៃសំណុំ។គេបាន៖

$$\bigcap \Im = \{x / x \in A, x \in \Im\}$$

ម្យ៉ាងទៀត

$$\Im = \{A_i / i \in I\}$$

គេបានផងដែរ

$$\bigcap \Im = \bigcup_{i \in I} A_i = \{x / x \in A_i, i \in I\}$$

**និយមន័យទី២**

គេឱ្យជាℑគ្រួសារនៃសំណុំ។គេបាន $\bigcap \Im = \{x / x \in A, A \in F\}$

ម្យ៉ាងទៀត $\Im = \{A_i / i \in I\}$ គេបានផងដែរ $\bigcap \Im = \bigcap_{i \in I} A_i = \{x / x \in A_i, \forall i \in I\}$ ។

**ឧទាហរណ៍:** គេឱ្យ $\Im = \{A_i / i \in I\} = \{\{1,2,3\},\{2,3,4\}\{3,4,5\}\}$ ។គេបាន៖

1) $\bigcup \Im = \{1,2,3,4,5\}$ 2) $\bigcap \Im = \{3\}$

**ឧទាហរណ៍:** គេឱ្យ $\Im = \{A_i / i \in I\} = \{A_i / i \in \mathbb{Z}\}$ ។គេបាន៖

1. $A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \bigcup_{i=2}^{5} A_i$
2. $A_7 \cap A_8 \cap A_9 \cap \ldots = \bigcap_{i=7}^{\infty} A_i$
3. $A_6 \cap A_8 \cap A_{10} \ldots = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_{2i+6}$ ។

**ទ្រឹស្តីបទ**

គេឱ្យ $\{A_i / i \in I\}$ ជាគ្រួសារនៃសំណុំ។ ចំពោះសំណុំ ណាមួយគេបាន៖

1. $B \cup \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$
2. $B \cap \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$

**សម្រាយបញ្ជាក់**

យើងបង្ហាញថា $B \cup \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (B \cap A_i)$?

$$x \in B \cup \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow x \in B \vee x \in \bigcap_{i \in I} A_i$$

$$\Leftrightarrow x \in B \vee (\forall i \in I)(x \in A_i)$$

$$\Leftrightarrow (\forall i \in I)(\forall x \in B \vee x \in A)$$

$$\Leftrightarrow (\forall i \in I)(x \in A \cup B)$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} B \cup A_i$$

ដូចនេះ $B \cup \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$ ។

**ទ្រឹស្តីបទ**

គេឱ្យ $\{A_i / i \in I\}$ ជាគ្រួសារនៃសំណុំ។គេបាន៖

1. $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$

2. $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$ ។

**ទ្រឹស្តីបទ**

គេឱ្យ $\{A_i / i \in I\}$ ជាគ្រួសារនៃសំណុំហើយ $I \subseteq J$ ។គេបាន

1. $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{j\in J} A_j$

2. $\bigcap_{i\in J} A_i \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$ ។

**សម្រាយបញ្ជាក់**

1. យើងបង្ហាញថា $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{j\in J} A_j$

យើងបាន $x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow x \in A_j$ ចំពោះ $j \in I$

តែ $I \subseteq J$ នោះ $j \in I \Rightarrow j \in J$

ដូចនេះ $x \in \bigcup_{i\in J} A_i$ មានន័យថា $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{i\in J} A_j$ ។

**និយមន័យទី៣៖**

សំណុំ $A_i, i \in I$ ហៅថាគម្របនៃសំណុំ $F$ ដែលជាផ្នែកមួយនៃ $E$ លុះត្រាតែ $F \subset \bigcup_{i\in I} A_i$ ។

**និយមន័យទី៤៖**

គេហៅថា( Partitio ) បំណែកនៃសំណុំ E គឺជាគម្របដែលធាតុទាំងអស់របស់វាមិនមែនទទេហើយពីរៗដាច់ពីគ្នាព្រមទាំងប្រជុំរបស់វាស្មើ E មានន័យថា៖

$$\begin{cases} \bigcup_{i\in I} A_i = E \\ \forall i, j \in I, i \notin j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing \end{cases}$$

**ឧទាហរណ៍:** បើ $E = \{1,2,3,4,5\}$ ,$E_1 = \{1,2\}$ ,$E_2 = \{5\}$ ,$E_3 = \{3,4\}$ នោះគេបាន ៖

- គម្រប $\Re = \{E_1, E_2, E_3\}$ ព្រោះ $E \subseteq \bigcup_{i\in I} E_i, I = \{1,2,3\}$
- បំណែក $\mathrm{P} = \{E_1, E_2, E_3\}$ ព្រោះ $E_1 \neq \varnothing; E_2 \neq \varnothing; E_3 \neq \varnothing$

ហើយ $E_1 \cap E_2 = \varnothing; E_1 \cap E_3 = \varnothing; E_2 \cap E_3 = \varnothing$ និង $E = \bigcup_{i\in I} E_i, I = \{1,2,3\}$

ដូចនេះ $\Re = \mathrm{P}$ ។

## ៣.៦. ចំនួនធាតុនៃសំណុំ

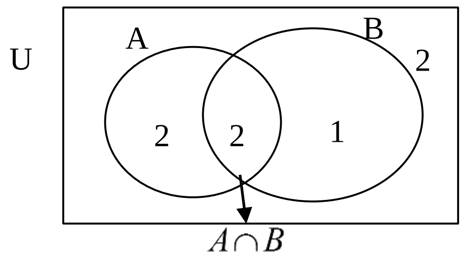
ចំនួនធាតុនៃសំណុ $A$ តាងដោ $n(A)$ ឬ $\#(A)$ ឬ $|A|$ ឬ $Card(A)$ ។

**ឧទាហរណ៍:** $A=\{a,b,c,d,e\}$ សំណុំ $A$ មានចំនួនធាតុ5 ។

**លក្ខណ:នៃចំនួនធាតុ**

- $n(A\cap U)=n(A)$
- $n(A\cap\varnothing)=0$
- $n(A\cap B)\le n(A)$
- $n(A\cap\overline{A})=0$
- $n(A)=n(U)-n(\overline{A})$
- $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
- $n(A\cup B)=n(A)+n(B)\ ,A\cap B=\varnothing$ ឯងឋិ
- $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$
- $n(A\times B)=n(A)\times n(B)$
- $n\left(\prod_{i=1}^{n}A_i\right)=n(A_1)\times n(A_2)\times\ldots\times n(A_n)$

**ឧទាហរណ៍:** គ្រួសារមួយមានសមាជិក៨ នាក់ចូលចិត្តសម្លរកកូរ ៣នាក់ចូលចិត្តឆា ២នាក់ទៀតចូលចិត្តទាំងពីរមុខនេះ ហើយ ២ នាក់ទៀតមិនចូលចិត្តទាំងពីរមុខនេះ។ តើក្នុងគ្រួសារនេះមានសមាជិកប៉ុន្មាននាក់ ?




**ចម្លើយ:**

រកសមាជិកគ្រួសារ

តាង $U$ ជាសំណុំនៃសមាជិកគ្រួសារ

$A$ ជាសំណុំនាក់ចូលចិត្តសម្លរកកូរ

$B$ ជាសំណុំនាក់ចូលចិត្តឆា

$A\cap B$ ជាសំណុំនាក់ចូលចិត្តទាំងពីរមុខ

គេបាន

$$n(U)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)+2$$
$$=4+3-2+2=5$$

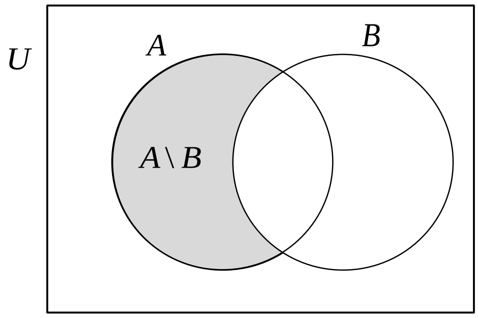
ដូច្នេះ ក្នុងគ្រួសារនេះមានសមាជិក 5 នាក់ ។

## ៣.៧. ផលសងរវាងពីរសំណុំ

**និយមន័យ:** គេឲ្យពីរសំណុំ $A$ និង $B$ ។ ផលសងរវាង $A$ និង $B$ កំណត់សរសេរ $A\setminus B$ គឺជាសំណុំនៃធាតុ $x$ ទាំងឡាយ ដែល $x$ ជាធាតុរបស់ $A$ និង $x$ មិនមែនជាធាតុរបស់ $B$ ។

$A\setminus B=\{x: x\in A\wedge x\notin B\}$

$\forall x: x\in A\setminus B \Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B$




**លក្ខណ:** $A\setminus B=A\cap\overline{B}$

**ស្រាយ:**

គេមាន $\forall x\in A\setminus B \Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in\overline{B}$

$\Leftrightarrow x\in A\cap\overline{B}$

ដូចនេះ $A\setminus B=A\cap\overline{B}$ ។

**ឧទាហរណ៍:** គេដឹងថា៖ $n(A)=17, n(B)=24, n(A\cup B)=35$

គណនា៖ $n(A\cap B), n(A\setminus B), n(B\setminus A)$

**ចម្លើយ**

គណនា

- $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

  $n(A\cup B)=17+24-35=6$
- $n(A\setminus B)=n(A)-n(A\cap B)=17-6=11$
- $n(B\setminus A)=n(B)-n(A\cap B)=24-6=18$

## ៣.៨. ផលសងឆ្លុះរវាងពីរសំណុំ

**និយមន័យ:** គេឲ្យពីរសំណុំ $A$ និង $B$ ។ ផលសងឆ្លុះរវាង $A$ និង $B$ កំណត់សរសេរ $A\Delta B$ គឺ ជាសំណុំនៃ $x$ ទាំងឡាយណា ដែល $x$ ជាធាតុរបស់ $A$ និង $x$ មិនមែនជាធាតុរបស់ $B$ ឬ $x$ ជាធាតុរបស់ $B$ និង $x$ មិនមែនជាធាតុរបស់ $A$ ។

$A\Delta B=\{x:(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)\}$

$\forall x: x\in A\Delta B \Leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)$

**លក្ខណ:**

i $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

ii $A\Delta B=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})$

iii $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(B\cap A)$

**ស្រាយ:**

i គេមាន $\forall x: x\in A\Delta B\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)$

$\Leftrightarrow x\in A\setminus B\vee x\in B\setminus A$

$\Leftrightarrow x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

ដូចនេះគេបាន $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ ។

ii គេមាន $A\setminus B=(A\cap\overline{B})$ និង $B\setminus A=(B\cap\overline{A})$
តាម $i$ គេមាន $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ $\Rightarrow A\Delta B=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})$

iii គេមាន $A\Delta B=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})$

$$=\left[(A\cap\overline{B})\cup B\right]\cap\left[(A\cap\overline{B})\cup\overline{A}\right]$$

$$=\left[(A\cup B)\cap(\overline{B}\cup B)\right]\cap\left[(A\cup\overline{A})\cap(\overline{B}\cup\overline{A})\right]$$

$$=\left[(A\cup B)\cap U\right]\cap\left[U\cap(\overline{A\cap B})\right]$$

$$=(A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})$$

$$=(A\cup B)\setminus(B\cap A)$$

ដូចនេះ គេបាន $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(B\cap A)$ ។

## ៣.៩. ឌុយអាលីតេ: (DUALITY )

ឧបមាថា $E$ ជាសមភាពពីជគណិតនៃសំណុំ ។ គេបាន Dual នៃ $E$ កំណត់សរសេរដោយ $E^{*}$ គឺជាសមភាពដែលបានដោយប្តូររៀងគ្នា $\cup,\ \cap, U$ និង $\varnothing$ ក្នុង $E$ ដោយ$\cap,\cup,\varnothing$ និង $U$ ។

**ឧទាហរណ៍:** Dual នៃ $(U\cap A)\cup(B\cap A)=A$ គឺ $(\varnothing\cup A)\cap(B\cup A)=A$ ។

## ៣.១០. សំណុំរាប់អស់, គោលការណ៍រាប់ ( FINITE SET, COUNTING PRINCIPLE )

**និយមន័យ:** គេថាសំណុំមួយ ជាសំណុំរាប់អស់ (ឬកំណត់) កាលណាសំណុំនេះមាន $m$ ធាតុផ្សេងគ្នា ដែលជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន ។ បើមិនដូចនេះ គេថា ជាសំណុំមិនកំណត់ ។

**ឧទាហរណ៍:** សំណុំទទេជាសំណុំរាប់អស់

សំណុំនៃស្រះខ្មែរជាសំណុំរាប់អស់

សំណុំនៃចំនួនគត់វិជ្ជមានគូ $A=\{2,4,6,\ ...\}$

- បើ $A$ ជាសំណុំរាប់អស់ គេតាង $n(A)$ ជាចំនួនធាតុនៃសំណុំ $A$ ។

**Lemma:** បើ $A$ និង $B$ ជាពីរសំណុំដាច់គ្នា និង រាប់អស់គេបាន $A\cup B$ ជាសំណុំរាប់អស់ ហើយ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$ ។

**ទ្រឹស្តីបទ:** បើ $A$ និង $B$ ជាពីរសំណុំរាប់អស់ គេបាន $A\cup B$ និង $A\cap B$ ជាសំណុំរាប់អស់ ហើយ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ ។

**ស្រាយ:**

គេមាន $A\cup B=(A\setminus B)\cup B$ និង $(A\setminus B)\cap B=\varnothing$

គេបាន $n(A\cup B)=n\left[(A\setminus B)\cup B\right]=n(A\setminus B)+n(B)$ (1)

គេមាន $A=(A\setminus B)\cup(A\cap B)$ និង $(A\setminus B)\cap(A\cap B)=\varnothing$

គេបាន $n(A)=n\left[(A\setminus B)\cup(A\cap B)\right]=n(A\setminus B)+n(A\cap B)$

$$\Rightarrow\ n(A\setminus B)=n(A)-n(A\cap B)\qquad(2)$$

តាម (1) និង (2) គេបាន $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-(A\cap B)$ ។

**Corollary:** បើ $A, B$ និង $C$ ជាបីសំណុំរាប់អស់ គេបាន $A\cup B\cup C$ ជាសំណុំរាប់អស់ ហើយ $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$

គេមាន $n(A\cup B\cup C)=n\left[(A\cup B)\cup C\right]$

$=n(A\cup B)+n(C)-n\left[(A\cup B)\cap C\right]$

$=\left[n(A)+n(B)-n(A\cap B)\right]+n(C)-n\left[(A\cap C)\cup(B\cap C)\right]$

$=\left[n(A)+n(B)-n(A\cap B)\right]+n(C)-\left\{n(A\cap C)+n(B\cap C-n\left[(A\cap C)\cap(B\cap C)\right]\right\}$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$

ដូចនេះ $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$ ។

## ៣.១១.ផលគុណនៃសំណុំ ( PRODUCT OF SET )

យើងបញ្ចូលប្រមាណវិធីមួយដែលពីគណិតវត្ថុពីរ $a$ និង $b$ រៀបក្នុងលំដាប់នេះបង្កើតបានគណិតវត្ថុទី៣ ដែលគេសរសេរ $(a, b)$ និង គេហៅថាគូមានលំដាប់ $(a, b)$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

i បើ $a\neq b$ គេបាន $(a, b)\neq(b, a)$

ii $(a, b)=(c, d) \Leftrightarrow a=c$ and $b=d$

- $z$ ហៅថាគូលុះត្រាតែមាន $a$ និង $b$ ដែល $z=(a, b)$

  $a$ ហៅថាចំណោលទី1 $a=pro_1(a, b)$

  $b$ ហៅថាចំណោលទី2 $b=pro_2(a, b)$

**និយមន័យ:** គេឲ្យពីរសំណុំ $A$ និង $B$ គេហៅថាផលគុណ ឬផលគុណដេកាត នៃពីរសំណុំ $A$ និង $B$ កំណត់សរសេរដោយ $A\times B$ គឺជាសំណុំនៃគូមានលំដាប់ $(a, b)$ ទាំងអស់ដែល $a\in A$ និង $b\in B$ ។

តាមនិយមន័យគេបាន: $A\times B=\{(a,\ b): \mathrm{a}\in A\wedge b\in B\ \}$

**ឧទាហរណ៍:** គេឲ្យ $A=\{1, 2\}$ និង $B=\{a, b,\ c\}$ នោះ

$A\times B=\{(1,\ a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$

$B\times A=\{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$

$A\times A=\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

**លក្ខណ:**

i. $(A\subset X\wedge B\subset Y) \Rightarrow A\times B\subset X\times Y$

ii. $A\times B=\varnothing \Leftrightarrow A=\varnothing\vee B=\varnothing$

iii. $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

iv. $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

v. $(A\neq\varnothing\wedge A\times B=A\times C) \Rightarrow B=C$

**សម្រាយបញ្ជាក់**

i. គេមាន $\forall(x,\ y)\in A\times B \Leftrightarrow x\in A\wedge x\in B$

ដោយ $A\subset X\wedge B\subset Y$

$\Rightarrow x\in X\wedge y\in Y\Rightarrow A\times B\subset X\times Y$ ។

ii. បើ $A\times B=\varnothing$ ស្រាយថា $A=\varnothing\vee B=\varnothing$

ឧបមាថា $A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing \Rightarrow \exists x\in A\wedge\exists x\in B \Rightarrow \exists(x,\, y)\in A\times B \Rightarrow A\times B\neq\varnothing$

(ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម)$\Rightarrow A=\varnothing\vee B=\varnothing$

បើ $A=\varnothing\vee B=\varnothing$ ស្រាយថា $A\times B=\varnothing$

ឧបមាថា $A\times B\neq\varnothing \Rightarrow \exists(x,\, y)\in A\times B \Rightarrow \exists x\in A\wedge\exists x\in B \Rightarrow A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing$

$\Rightarrow A\times B=\varnothing$

ដូចនេះ $A\times B=\varnothing \Leftrightarrow A=\varnothing\vee B=\varnothing$ ។

iii. គេមាន $\forall(x,\, y)\in A\times(B\cup C) \Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup C$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow (x,\, y)\in(A\times B)\cup(A\times C)$

ដូចនេះ គេបាន $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ ។

iv. គេមាន $\forall(x,\, y)\in A\times(B\cap C) \Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup C$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\in A\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow (x,\, y)\in A\times B\wedge(x,\, y)\in A\times C$

$\Leftrightarrow (x,\, y)\in(A\times B)\cap(A\times C)$

ដូចនេះ $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$ ។

v. គេមាន $\forall y\in B$

ដោយ $A\neq\varnothing \Rightarrow \exists x\in A \Rightarrow (x,\, y)\in A\times B$ តែ $A\times B=A\times C$

$\Rightarrow (x,\, y)\in(A\times C) \Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C \Rightarrow y\in C$

គេមាន $\forall y\in C$ ដោយ $A\neq\varnothing \Rightarrow \exists x\in A$

$\Rightarrow (x,\, y)\in A\times C$

តែ $A\times B=A\times C$

$\Rightarrow (x,\, y)\in A\times B \Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B \Rightarrow y\in B$

$\Rightarrow C\subset B$

ដូចនេះ គេបាន $A\neq\varnothing\wedge A\times B=A\times C \Rightarrow B=C$ ។

# លំហាត់

១. គេឲ្យសំណុំ $A=\{a,b,c\}$ ,$B=P(A)-\{\varnothing,A\}$ និង $C=\{D\subset A/n(D)=2\vee n(D)=3\}$ ។
គណនា $n(A\cup B\cup C)$ ។

២. គេឲ្យ $n(A\cup B\cup C)=46, n(A\cup B)=37$ ,$n(B\cup C)=39, n(A\cup C)=38$ និង
$n(A\cap B\cap C)=4$ ។គណនា $n(A)+n(B)+n(C)$ ។

៣. គេឲ្យ $A=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$ និង $X=\{\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\}, Y=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ ។
ចូរពិចារណាសំណើខាងក្រោម:
ក) $X\subset P(P(A))$ ដែល $P(A)$ ជាសំណុំរងនៃសំណុំ $A$
ខ) $n(P(P(X\cap Y)))=16$
តើល្បះខាងក្រោមមួយណាត្រឹមត្រូវ ?
១. ក និង ខ ត្រូវទាំងពីរ ២. ក ត្រូវ និង ខ ខុស ៣. ខ ត្រូវនិង ក ខុស ៤ .ខុសទាំងពីរ

៤ . គេឲ្យ $A,B,C$ ជាសំណុំដែល $A\cup B=[-1,8]$, $B-C=(3,8]$ $and$ $A-B=[-1,1)$
ប្រសិនបើ $B\cap C=[a,b]$ ។គណនា$b-a$ ។

៥. គេឲ្យសំណើខាងក្រោម:
ក) បើ $A=\{x/x\in R\wedge 2x^4+x^2-x-2=0\}$ និង $\{\{1\}\}\in P(P(A))$
ខ) បើ $B=\{0,\{0\}\}$ ហើយ $n(P(B)-B)=2$
តើល្បះខាងក្រោមមួយណាត្រឹមត្រូវ ?
១.ក និង ខ ត្រូវ ២. ក ប៉ុណ្ណោះត្រូវ ៣. ខ ប៉ុណ្ណោះត្រូវ ៤. កនិងខ ខុស

៦. គេឲ្យ $A,B,C$ ជាសំណុំដែល $A\cap B\subset B\cap C$ ។ បើ $n(A)=25, n(C)=23, n(B\cap C)=7,$
$n(A\cap C)=10, n(A\cup B\cup C)=49$ ។គណនា $n(B)$ ។

៧. គេឲ្យសំណុំសកល $U=\{1,2,3,4,5\}$ ហើយ $A,B,C$ ជាសំណុំដែលមានទំនាក់ទំនង
$n(A)=n(B)=n(C)=3$ និង $n(A\cap B)=n(B\cap C)=n(A\cap C)=2$ ។
ប្រសិនបើ $A\cup B\cup C=U$ តើល្បះខាងក្រោមមួយណាខុស ?
១. $n(A\cup B)=4$ ២. $n(A\cup(B\cap C))=3$ ៣. $n(A\cap(B\cup C))=2$ ៤. $n(A\cap B\cap C)=1$

៨. នៅក្នុងសំណុំ $R, E, F, G, H$ ជាសំណុំដែលកំណត់ដូចខាងក្រោម:
$E=\{x\in R/x+5>0\}$, $F=\{x\in R/x-2>0\}$
$G=\{x\in R/x+5<0\}, H=\{x\in R/x-2<0\}$
ចូររកសំណុំ $A=\{x\in R/(x+5)(x-2)>0\}$ ដោយស្គាល់ $E,F,G$ និង $H$ ។

៩ . A, B, C ជាសំណុំមិនទទេ គេពិនិត្យលក្ខខណ្ឌពីរ
១. $A\cap B=A\cap C$ ២. $A\cup B=A\cup C$
ក) តើលក្ខខណ្ឌទី១អាចអោយគេសន្និដ្ឋានបានថា $B=C$ ឬ ទេ?
ខ) តើលក្ខខណ្ឌទី២អាចអោយគេសន្និដ្ឋានបានថា $B=C$ ឬ ទេ?

១០. $E=\{a,b\}$ និង $F=\{1,2\}$

1. រកសំណុំ $E\times F$ 2. រកសំណុំ $P(E,F)$

១១. បើ $A=\{\varnothing,0,1,\{0\},\{0,1\}\}$ ហើយ $P(A)$ គឺជាសំណុំរងនៃ $A$

តើសំណុំ $P(\mathrm{A})-\mathrm{A}$ មានចំនួនធាតុស្មើប៉ុន្មាន ?

១២. បើ $A=\{1,2,3,4,\ldots\}$ ហើយ $B=\{\{1,2\},\{3,4,5\},6,7,8,\ldots\}$

តើ $(A-B)\cup(B-A)$ មានចំនួនធាតុស្មើប៉ុន្មាន ?

១៣. បើ $A=\{1,2,3,\ldots,9\}$ ហើយ $S=\{B/B\subset A,(1\in B,9\in B)\}$

តើចំនួនធាតុរបស់ $S$ ស្មើប៉ុន្មាន ?

១៤. គេកំណត់ $A,B$ ដោយ $n(A)=a,n(B)=b$

បើ $n\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=7$ ហើយ $n(A\times B)=40$

$n\left(\{C/C\subseteq A\cup B,n(C)\le 2\}\right)=?$

១៥. បើ $A=\{\varnothing,0,1,\{0,1\}\}$ ហើយ $B=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{0,\{0,1\}\},\{0,\{1\}\}\}$

ហើយសំណុំ $P(A)-B$ មានចំនួនធាតុស្មើប៉ុន្មាន ?

១៦. គេអោយ $A=\{0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm20\}$ ហើយ $B=\{x\in A\,|\,\sqrt{x}\,|$ ជាចំនួនគត់$\}$

តើចំនួនធាតុរបស់ $\{C\subset B/0\in C,1\notin C\}$ ស្មើប៉ុន្មាន ?

១៧. គេអោយ $A,B,C$ ជាសំណុំដែល $n(A-B)=42,n(A-C)=7,n(C-A)=18$ ហើយ

$n(C-B)=35$

តើចំនួនធាតុរបស់ $n\left((B\cap C)-A\right)$ ស្មើប៉ុន្មាន ?

១៨. គេអោយ $U$ ហើយជាសំណុំចំនួនគត់ចាប់ពី $100$ ដល់ $1000$

ហើយគេអោយ $A_i=\{x\in U/$ ក្នុងល័ក្ខខណ្ឌ $i$ រាប់ចេញពីផ្នែកខាងឆ្វេងបំផុតរបស់ $x$ ដែលមាន តម្លៃស្មើ $i$ នៅពេលដែល $i=1,2,3$ តើចំនួនធាតុរបស់សំណុំ $A_1\cup A_2\cup A_3$ ស្មើប៉ុន្មាន ?

# ចម្លើយ

១. គណនា $n(A\cup B\cup C)$

ដោយ $A=\{a,b,c\}$

យើងបាន $P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},A\}$ ហើយ $B=P(A)-\{\varnothing,A\}$

$B=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{\mathrm{b},c\}\}$ និង $C=\{D\subset A/\,n(D)=2,n(D)=3\}$

$C=\{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

នាំឲ្យ $A\cup B\cup C=\{a,b,c,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

$n(\mathrm{A}\cup B\cup C)=10$

២. គណនា $n(A)+n(B)+n(C)$

ដោយ $n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=n(\mathrm{A})+n(\mathrm{B})-n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$

$37=n(\mathrm{A})+n(\mathrm{B})-n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ (1)

ហើយ $n(B\cup C)=n(\mathrm{B})+n(\mathrm{C})-n(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})$

$39=n(B)+n(C)-n(B\cap C)$ (2)

និង $n(A\cup C)=n(A)+n(C)-n(A\cap C)$

$38=n(A)+n(\mathrm{C})-n(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})$ (3)

យក (1) +(2)+ (3)គេបាន $114=2n(A)+2n(\mathrm{B})+2n(\mathrm{C})-n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})-n(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})-n(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})$

$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})=2n(\mathrm{A})+2n(B)+2n(c)-114$

តែ $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})-n(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})-n(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})+n(\mathrm{A}\cap B\cap C)$

$46=n(A)+n(B)+n(C)-(2n(A)-2n(\mathrm{B})-2n(\mathrm{C})-114)+4$

$\Rightarrow n(A)+n(B)+n(C)=114+4-46=72$ ។

៣. ដោយ $A=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\Rightarrow n(A)=4$

$X=\{\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\}\Rightarrow n(X)=1$

$Y=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\Rightarrow n(Y)=2$

**ចម្លើយ:** ក) ត្រឹមត្រូវ ព្រោះ $\varnothing$ និង $\{\varnothing\}$ ជាធាតុនៃសំណុំA ។

$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\subset A$

$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\in P(A)$

$\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\subset P(A)$

$\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\in P(\mathrm{P(A)})$

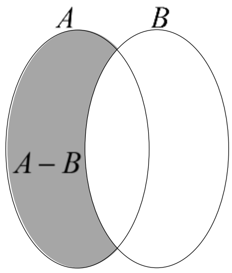
$\{\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\}\subset P(P(A))$

$X\subset P(\mathrm{P(A)})$

ខ. ខុស ព្រោះ $X\cap Y=\varnothing\Rightarrow n(P(X\cap Y))=1$

ហើយ $n(P(P(X\cap Y)))=2$

៤. គណនា $b-a$




$A\cup B=[-1,8]$

$B-C=(3,8]$

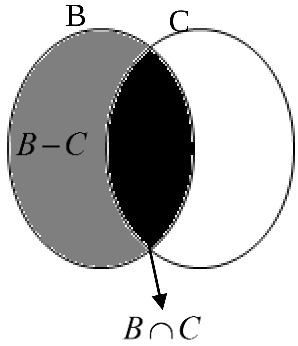
$A-B=[-1,1)$

$B\cap C=?$

$B=(A\cup B)-(A-B)$

$=[-1,8]-[-1,1)$

$=[1,8]$




$B\cap C=B-(B-C)$

$=[1,8]-(3,8]$

$=[1,3]$

$B\cap C=[a,b]$

គេបាន $a=1,b=3\Rightarrow b-a=2$ ។

៥. ក) ត្រូវព្រោះ

$\{\{1\}\}\in P(P(A))$

$\{\{1\}\}\subset P(A)$

$\{1\}\in P(A)$

$\{1\}\subset A$

$1\in A$

តាមសមីការ $2x^4+x^2-x-2=0$ ហើយ $A$ ជាសំណុំចម្លើយ

បើ $x=1:2(1^4)+^2-1-2=0$

$x=1\Rightarrow 1\in A$

នោះ $\{\{1\}\}\in P(P(A))$

$B=\{0,\{0\}\}$

$P(B)=\{\varnothing,\{0\},\{\{0\}\},\{0,\{0\}\}\}$

$P(B)-B=\{\varnothing,\{\{0\}\},\{0,\{0\}\}\}$

$n(P(B)-B)=3$

៦. គណនា $n(B)$

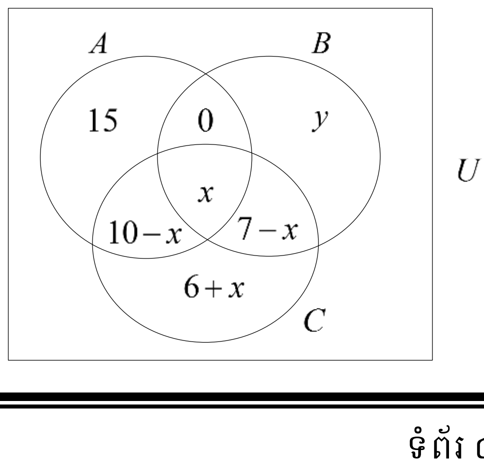
$n(A\cup B\cup C)=49$

$15+(10-x)+x+y+7-x+6+x=49$

$38+y=49\Rightarrow y=11$

$n(B)=x+(7-x)+y+11=18$

ដូចនេះ $n(B)=18$ ។

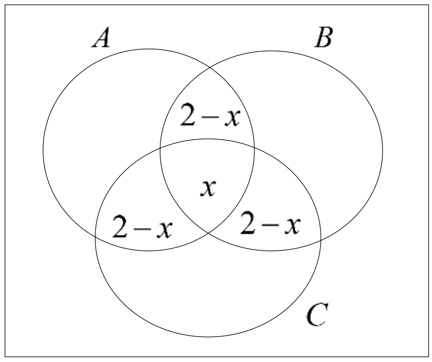


៧.	ដោយ $U=\{1,2,3,4,5\} \Rightarrow n(U)=5$

ហើយ $n(A\cap B)=n(B\cap C)=n(A\cap C)=2$

យក $n(A\cap B\cap C)=x$

តាមដ្យាក្រាមវិន យើងបាន



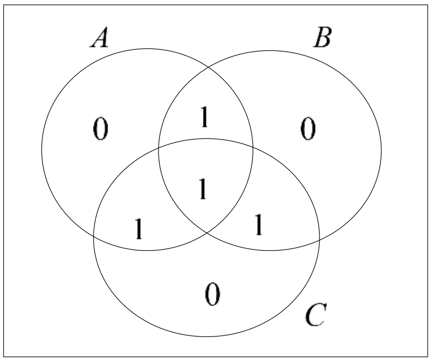

ដោយ $n(A)=n(B)=n(C)=3$

យើងពិភាក្សាតម្លៃ $x$ តាមករណីនីមួយៗខាងក្រោម

**ករណីទី១:** បើ $x=0$ នោះ $n(A)\geq 4$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

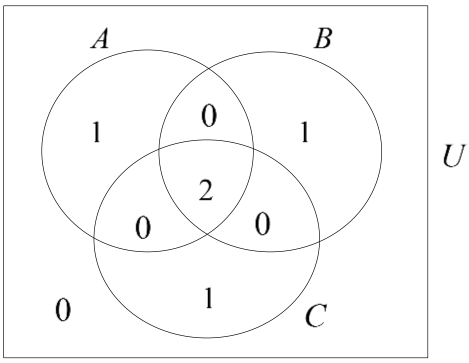
**ករណីទី២:** បើសិន $x=1$ នោះ $n(A)=n(B)=n(C)=3$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\Rightarrow n(A\cup B\cup C)=4$

ដូចនេះ ករណីនេះមិនអាចមានព្រោះ $n(A\cup B\cup C)=n(U)=5$ ។




**ករណីទី៣:**បើ $x=2$ តាមលក្ខខណ្ឌដែលអោយ $n(A)=n(B)=n(C)=3$

ហើយ $A\cup B\cup C=U$




តាមករណីនេះផ្ទៀងផ្ទាត់ចម្លើយតាមដ្យាក្រាមវិន

**ករណីទី៤:** បើ $x>2$ មិនអាចមានព្រោះ $2-x$ ជាចំនួនអវិជ្ជមាន

តាមដ្យាក្រាមក្នុងករណីទី៣យើងបានលទ្ធផលដូចតទៅនេះ

1. $n(A\cup B)=4$	2. $n(A\cup(B\cap C))=3$

3. $n(A\cap(B\cup C))=2$	4. $n(A\cap B\cap C)=2$

ដូចនេះ ចម្លើយដែលខុសគឺលេខ៤ ។

៨. រកសំណុំ $A=\{x\in R/(x+5)(x-2)>0\}$ ដោយស្គាល់ $E,F,G$ និង $H$

$E=\{x\in R/x+5>0\}$ $\quad G=\{x\in R/x+5<0\}$

$F=\{x\in R/x-2>0\}$ $\quad H=\{x\in R/x-2<0\}$

$A=\{x\in R/(x+5)(x-2)>0\}=(E\cap F)\cup(G\cap H)\Rightarrow A=(E\cap F)\cup(G\cap H)$

៩. $A\cap B=A\cap C\Rightarrow B=C?$

លក្ខខណ្ឌ: $A\cap B=A\cap C$ មិននាំឲ្យ $B=C$ ទេជាទូទៅ

$Ex:$ $A=\{a,b,c,d,e,f\}$

$B=\{a,\mathrm{d},\mathrm{e},\mathrm{g},\mathrm{h},\mathrm{i}\}$

$C=\{a,d,e,k,\mathrm{l}\}$

$\Rightarrow A\cap B=\{a,d,e\}$ , $A\cap C=\{a,d,e\}$

ដូចនេះ $A\cap B=A\cap C$ តែ $B\neq C$ ។

លក្ខខណ្ឌ: $A\cup B=A\cup C\Rightarrow B=C?$

លក្ខខណ្ឌ $A\cup B=A\cup C$ មិននាំឲ្យ $B=C$ ទេជាទូទៅ

$A=\{a,b,c,d,e,f\}$

$B=\{a,d,\mathrm{e},\mathrm{g},\mathrm{h},\mathrm{i}\}$

$C=\{a,g,h,i\}$

យើងបាន $A\cup B=A\cup C=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$ តែ $B\neq C$ ។

១០. 1). រកសំណុំ $E\times F$

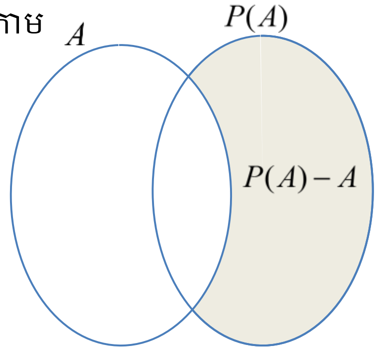
$E=\{a,b\}$ , $F=\{1,2\}\Rightarrow E\times F=\{(a,1);(a,2);(\mathrm{b},1);(\mathrm{b},2)\}$ ។

2). រកសំណុំ $P(E\times F)$

$$P(E\times F)=\left\{\begin{array}{l}\{\varnothing\};\{(a,1)\};\{(a,2)\};\{(b,1)\};\{(b,2)\}\\ ;\{(a,1);(a,2)\};\{(\mathrm{a},1);(b,1)\};\{(a,2);(b,1)\}\\ ;\{(a,1);(b,2)\};\{(a,2);(\mathrm{b},2)\};\{(a,1);(\mathrm{b},1);(\mathrm{a},2)\}\\ ;\{(a,1);(\mathrm{a},2);(\mathrm{b},2)\};\{(a,1);(b,1);(b,2)\};\{(a,2);(b,1);(\mathrm{b},2)\}\\ ;\{(a,1);(a,2);(b,1);(b,2)\}\end{array}\right\}$$

១១. គេមាន $A=\{\varnothing,0,1,\{0\},\{0,1\}\}$

អ្វីដែលយើងត្រូវរកគឺចំនួនធាតុរបស់ $P(A)-A$ ដើម្បីអោយយើងឃើញរូបភាពច្បាស់លាស់ ដូចបង្ហាញដូចរូបខាងក្រោម




នោះចំនួនធាតុដែលយើងចង់រក $=n(P(A))-n(P(A)\cap A)$

ព្រោះ $n(A)=5$ នោះ $n(P(A))=2^5$ ………(1)

តទៅយើងត្រូវពិចារណាថាចំនួនធាតុនីមួយៗនៅក្នុងសំណុំ $A$ មានតួណាខ្លះនៅក្នុង $P(A)$ តាមលំដាប់ដូចតទៅនេះ

តាមលក្ខខណ្ឌ $X\subset A$ ហើយ $X\in P(A)$

| ចំនួនធាតុក្នុងA | មូលហេតុ | ផល |
|---|---|---|
| $\varnothing$ | $\varnothing\subset A$ | $\varnothing\in P(A)$ |
| $0$ | $0\not\subset A$ | $0\notin P(A)$ |
| $1$ | $1\not\subset A$ | $1\notin P(A)$ |
| $\{0\}$ | $\{0\}\subset A$ | $\{0\}\in P(A)$ |
| $\{0,1\}$ | $\{0,1\}\subset A$ | $\{0,1\}\in P(A)$ |

សរុបមកចំនួនធាតុដែលនៅទាំងក្នុងសំណុំAនិងP(A) មានទាំងអស់3តួ….(2)

តាម(1)និង(2)ចំនួនធាតុដែលត្រូវ $=2^5-3=29$ តួ ។

១២. តាម $A=\{1,2,3,4,...\}$ និង $B=\{\{1,2\},\{3,4,5\},6,7,8,...\}$

យើងគួរតែសរសេរចំនួនធាតុនៃសំណុំ $A$ ឲ្យច្រើនជាងនេះដើម្បីឲ្យបានឃើញកាន់តែច្បាស់

$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,...\}$

$\Rightarrow A-B=\{1,2,3,4,5\}$ នោះ $B-A=\{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$

ដូចនេះ $(A-B)\cup(\mathrm{B}-\mathrm{A})=\{1,2,3,4,5,\{1,2\},\{3,4,5\}\}$ នេះបញ្ជាក់ថា $(A-B)\cup(B-A)$ មានចំនួនធាតុ 7 តួ ។

១៣. ដោយ $A=\{1,2,3,4,...,9\}$

$S=\{B/B\subset A$ និង $(1\in \mathrm{B}$ ឬ $9\in B)\}$

យើងត្រូវការរកចំនួនធាតុរបស់សំណុំSនោះគឺត្រូវរកចំនួនធាតុសំណុំBបំពេញតាមលក្ខខណ្ឌដែលឲ្យតែការពិចារណាលើលក្ខខណ្ឌ $1\in B$ រឺ $9\in B$

ត្រូវចំណាយពេលគិតដល់3ករណីដែលយើងចំណាយពេលអស់ច្រើន($1\in B$ តែ $9\notin B$, $1\notin B$ តែ $9\in B$, $1\in B$ តែ $9\in B$)ដូចនោះយើងគួរគិតវិធីដែលងាយជាងគឺចំនួនសំណុំរងរបស់សំណុំ $A$ ទាំងអស់ដកចេញចំនួនសំណុំរងនៃសំណុំ $A$ ដែលមិនមាន1និង9ជាចំនួនធាតុ ។

វិធីរកដោយចំនួននៃ $A$ មាន9តួ

១. ចំនួនសំណុំរងនៃ $A$ ទាំងអស់មាន $2^9$ សំណុំ

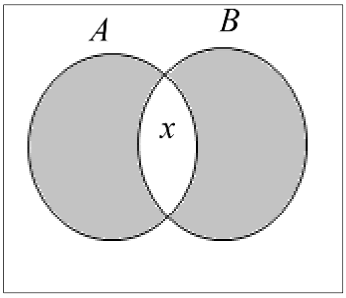
២. រកសំណុំរងនៃ $A$ ដែលមិនមាន1និង9ជាធាតុ

ដូចនេះសំណុំរងដែលលើកឡើងជាសំណុំរងរបស់ $\{2,3,4,...,8\}$ ចំនួនសំណុំរងទាំងអស់នេះមាន $2^7$ ជារួមមកសំណុំ $B$ និងមានធាតុទាំងអស់ $2^9-2^7$=384 ។

១៤. បើយក $n(A)=a, n(B)=b$ ហើយ $n(A\times B)=40$

នោះ $ab=40$ .......(1)

បើយក $n\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=7$




ពិភាក្សាក្នុង 4 ករណីនៃសមីការ (1)

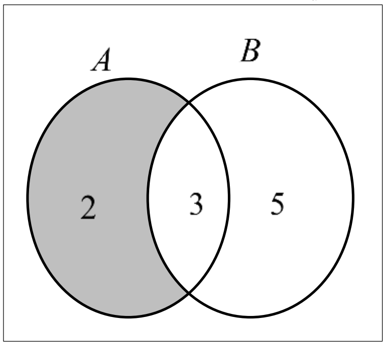
ករណីទី1: $(0+x)(7+x)=40$

ករណីទី2: $(1+x)(6+x)=40$

ករណីទី3: $(2+x)(5+x)=40$

ករណីទី4: $(3+x)(4+x)=40$

ក្នុង 4 ករណីគេឃើញមានតែ 3 ករណីទេដែលមានចំនួនពិត $x$ គឺធ្វើឲ្យ $x=3$ សមីការពិត




សរុបចំនួនធាតុនៃសំណុំ $A\cup B$ នឹងមានតម្លៃស្មើ10នោះសំណុំចំនួនធាតុនៃ $A\cup B$ ដោយ

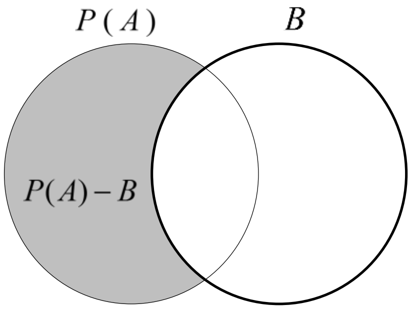
មានចំនួនធាតុក្នុងរងខាងលើ $\le 2$ នឹងមានចំនួនធាតុ

ស្មើផលបូករបស់ចំនួនសំណុំរងដែលមានធាតុ 0 និង 2 នោះគឺ

$C_{10,0}+C_{10,1}+C_{10,2}=1+10+45=56$

ដូចនេះ $n(\{C / C\subseteq A\cup B$ ហើយ $n(C)\le 2\})$ មានតម្លៃស្មើ56 ។

១៥. ដើម្បីឲ្យឃើញពីអ្វីត្រូវរកឲ្យអ្នកសិក្សាគូសរូបជំនួយ




វិធីរក (1) រកចំនួនធាតុនៃP(A)

(2) រកចំនួនធាតុនៃ $P(A)\cap B$

(3) រកចំនួនធាតុនៃ $P(A)-B$ បានមកពី $(1)-(2)$

តាម $A=\{\varnothing,0,1,\{0,1\}\}$

យើងបាន $A$ មានចំនួនធាតុ 4

ដូចនេះP(A)នឹងមានចំនួនធាតុ $2^4=16$ ។

តទៅរកចំនួនធាតុនៅក្នុង $P(A)\cap B$ ដោយគិតពីចំនួនធាតុនៃBធាតុណាដែលជាធាតុនៃP(A)

| ធាតុក្នុងB | ហេតុ | ផល |
|---|---|---|
| $\varnothing$ | $\varnothing\subset A$ | $\varnothing\in P(A)$ |
| $\{\varnothing\}$ | $\{\varnothing\}\subset A$ | $\{\varnothing\}\in P(A)$ |
| $\{0,\{0,1\}\}$ | $\{0,\{0,1\}\}\subset A$ | $\{0,\{0,1\}\}\in P(A)$ |
| $\{0,\{1\}\}$ | $\{0,\{1\}\}\not\subset A$ | $\{0,\{1\}\}\notin P(A)$ |

សរុបធាតុដែលនៅក្នុង $B$ នឹងនៅក្នុងP(A)មាន 3 ធាតុគឺ $\varnothing,\{\varnothing\},\{0,\{0,1\}\}$

នោះចំនួនធាតុនៃ $P(A)\cap$B មាន 3 ធាតុ……..(2)

ដូចនេះ តាម(1)និង(2)យើងបាន $P(A)-B$ មាន16-3=13ធាតុ ។

១៦. តាម $A=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,..,\pm20\}$

$B=\{x\in A\sqrt{|x|}$ ចំនួនធម្មជាតិ$\}$

សរឲ្យឃើញថាធាតុដែលនៅក្នុង $B$ ជាធាតុដែលនៅក្នុងAហើយធ្វើឲ្យ $\sqrt{|x|}$ ជាចំនួនធម្មជាតិ

យើងបាន

$\sqrt{|0|}=0,\sqrt{|1|}=1,\sqrt{|4|}=2,\sqrt{|9|}=3,\sqrt{|16|}=4,\sqrt{|-1|}=1,\sqrt{|-4|}=2,$

$\sqrt{|-9|}=3,\sqrt{|-16|}=4$

នោះគឺ $B=\{0,1,-1,4,-4,9,-9,16,-16\}$

ត្រូវរកCដែល $C\subset B$ ហើយ $0\in C$ តែ $1\notin C$

ដូចនោះលក្ខណ:សំណុំCដែលអាចកើតមានគឺ

$C=\{0\}$ មាន $C_{7,0}$ សំណុំ

$C=\{0,-\}$ មាន $C_{7,1}$ សំណុំ

$C=\{0,-,-\}$ មាន $C_{7,2}$ សំណុំ

$C=\{0,-,-,-\}$ មាន $C_{7,3}$ សំណុំ

$C=\{0,-,-,-,-\}$ មាន $C_{7,4}$ សំណុំ

$C=\{0,-,-,-,-,-\}$ មាន $C_{7,5}$ សំណុំ

$C=\{0,-,-,-,-,-,-\}$ មាន $C_{7,6}$ សំណុំ

$C=\{0,-,-,-,-,-,-,-\}$ មាន $C_{7,7}$ សំណុំ

ដូចនេះ ចំនួនធាតុមានទាំងអស់ $C_{7,0}+C_{7,1}+C_{7,2}+C_{7,3}+C_{7,4}+C_{7,5}+C_{7,6}+C_{7,7}=2^7=128$ សំណុំ ។

១៧. តាមលក្ខខណ្ឌដែលឲ្យនិងសំណុំដ្យាក្រាមនោះ

ដោយ $n(A-B)=42\Rightarrow a+b=42\ldots(1)$

$n(C-A)=18\Rightarrow e+d=18\ldots(3)$

$n(C-B)=35\Rightarrow b+d=35\ldots(4)$

.........................................

$n(B\cap C)=?\Rightarrow e=?$

.........................................

$(1)-(2)\Rightarrow b-c=35\ldots\ldots\ldots(5)$

$(4)-(5)\Rightarrow c+d=0$

យើងបាន $c=0$ នឹង $d=0$

យក $d=0$ ជំនួស $(3)$ យើងបាន $e=18$ ។

១៨. $U=\{100,101,102,\ldots,1000\}$

ដោយ $A_i=\{x\in U$ / តាមលក្ខខណ្ឌ $i$ រាប់ពីឆ្វេងបំផុតរបស់ $x$ ដែលមានតម្លៃស្មើ $i$

យើងបាន $A_1=\{100,101,102,\ldots,199\}\cup\{1000\}$

$$A_2=\{120,121,122,\ldots,129$$
$$220,221,222,\ldots,229$$
$$\vdots$$
$$920,921,922,\ldots,929\}$$

$$A_3=\{103,113,123,\ldots,193$$
$$203,213,223,\ldots,293$$
$$\vdots$$
$$903,913,923,\ldots,993\}$$

យើងបាន $n(A_1)=101$

$n(A_2)=90$

$n(A_3)=90$

តាម $A_1\cap A_2=\{120,121,122,\ldots129\}$

យើងបាន $n(A_1\cap A_2)=10$

តាម $A_1\cap A_3=\{103,113,123,\ldots,193\}$

យើងបាន $n(A_1\cap A_3)=10$

តាម $A_2\cap A_3=\{123,223,323,\ldots,923\}$

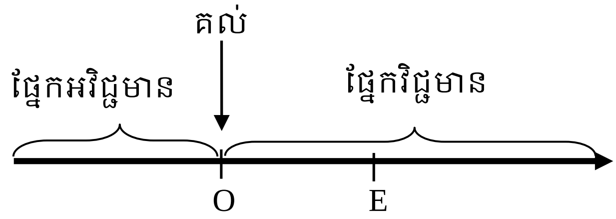
យើងបាន $n(A_2\cap A_3)=9$

តាម $A_1\cap A_2\cap A_3=\{123\}$

យើងបាន $n(A_1\cap A_2\cap A_3)=1$

ដូចនេះ $n(A_1\cap A_2\cap A_3)=101+90+90-10-10-9+1=253$ ។

# ជំពូក៣ ចំនួន




## ១. ចំនួនគត់គូ ចំនួនគត់សេស និងលក្ខណៈ

### ១.១. ចំនួនគត់គូ

- ***ចំនួនគត់គូ ឬ ចំនួនគូ*** ជាចំនួនដែលមានរាង $2k$ ដែល $k$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ។
- ***ចំនួនគូ*** ជាចំនួនដែលចែកដាច់នឹង $2$ ។

**ឧទាហរណ៍:** ចំនួន $\cdots,-6,-4,-2,0,2,4,6,8,10,12,14,\cdots$ ជាចំនួនគូ ។

### ១.២. ចំនួនគត់សេស

- ***ចំនួនគត់សេស*** ជាចំនួនដែលមានរាង $2k+1$ ដែល $k$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ។
- ***ចំនួនគូ*** ជាចំនួនដែលចែកមិនដាច់នឹង $2$ ។

**ឧទាហរណ៍:** ចំនួន $\cdots,-5,-3,-1,1,3,5,7,9,11,13,15,\cdots$ ជាចំនួនគត់សេស ។

### ១.៣. លក្ខណៈ

1) ផលបូករវាងពីរចំនួនគត់សេស ជាចំនួនគត់គូ ។
2) ផលបូករវាងពីរចំនួនគត់គូ ជាចំនួនគត់គូ ។
3) ផលបូករវាងចំនួនគត់គូ និងចំនួនគត់សេស ជាចំនួនគត់សេស ។
4) ផលគុណរវាងពីរចំនួនគត់សេស ជាចំនួនគត់សេស ។
5) ផលគុណរវាងពីរចំនួនគត់ ជាចំនួនគត់គូលុះត្រាតែមានចំនួនគត់មួយយ៉ាងតិចជាចំនួនគត់គូ ។

**សម្រាយបញ្ជាក់:**

1) ផលបូករវាងពីរចំនួនគត់សេស ជាចំនួនគត់គូ

តាង $a=2k_1+1, b=2k_2+1, k_1,k_2\in\mathbb{Z}, (k_1\neq k_2)$

គេបាន $a+b=(2k_1+1)+(2k_2+1)$

$=2(k_1+k_2+1)$

$=2k, (k=k_1+k_2+1)\in\mathbb{Z}$ ជាចំនួនគត់គូ ។

2) ផលបូករវាងពីរចំនួនគត់គូ ជាចំនួនគត់គូ

តាង $a=2k_1, b=2k_2, k_1,k_2\in\mathbb{Z}, (k_1\neq k_2)$

គេបាន $a+b=2k_1+2k_2$

$=2(k_1+k_2) \quad =2k, (k=k_1+k_2)\in\mathbb{Z}$ ជាចំនួនគត់គូ ។

3) ផលបូករវាងចំនួនគត់គូ និងចំនួនគត់សេស ជាចំនួនគត់សេស

តាង $a=2k_1, b=2k_2+1, k_1,k_2\in\mathbb{Z}$

គេបាន $a+b=2k_1+(2k_2+1)$

$=2(k_1+k_2)+1$

$=2k+1,(k=k_1+k_2)\in\mathbb{Z}$ ជាចំនួនគត់សេស ។

4) ផលគុណរវាងពីរចំនួនគត់សេស ជាចំនួនគត់សេស

តាង $a=2k_1+1, b=2k_2+1, k_1,k_2\in\mathbb{Z}$

គេបាន $a\times b=(2k_1+1)(2k_2+1)$

$=2(2k_1k_2+k_1+k_2)+1$

$=2k+1,(k=2k_1k_2+k_1+k_2)\in\mathbb{Z}$ ជាចំនួនគត់សេស ។

5) ផលគុណរវាងពីរចំនួនគត់ជា ចំនួនគត់គូលុះត្រាតែមានចំនួនគត់មួយយ៉ាងតិចជាចំនួនគត់គូ

យើងនឹងបង្ហាញតាមពីរករណីដូចខាងក្រោម:

- ករណីទី១: តាង $a=2k_1, b=2k_2+1, k_1,k_2\in\mathbb{Z}$

  គេបាន $a\times b=2k_1(2k_2+1)$

  $=2(2k_1k_2+k_1)$

  $=2k,(k=2k_1k_2+k_1)\in\mathbb{Z}$ ជាចំនួនគត់គូ ។

- ករណីទី២: តាង $a=2k_1, b=2k_2, k_1,k_2\in\mathbb{Z}$

  គេបាន $a\times b=(2k_1)(2k_2)$

  $=2(2k_1k_2)$

  $=2k,(k=2k_1k_2)\in\mathbb{Z}$ ជាចំនួនគត់គូ ។

## ២. ចំនួនបឋម

**និយមន័យ:** ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n$ ជាចំនួនបឋមលុះត្រាតែ $n>1$ ហើយ $n$ មានតួចែកតែពីរគត់គឺ $1$ នឹង $n$ ខ្លួនឯង ។ ករណីផ្សេងពីនេះ គេហៅថាចំនួនមិនបឋម( ចំនួនពហុគុណ ) ។

ឧទាហរណ៍: • $2,3,5,7,11,13,17,19,\cdots$ ជាចំនួនបឋម

• $4,6,8,10,12,14,16,18,\cdots$ ជាចំនួនមិនបឋម ។

**ចំណាំ:**

- $1$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ហើយក៏មិនមែនជាចំនួនមិនបឋមដែរ ។
- $2$ ជាចំនួនបឋមគូតែមួយគត់ ហើយ $2$ និង $3$ ជាចំនួនគត់តគ្នា ដែលបឋមទាំងពីរ ។

## ៣. ចំនួន ការេ និង គូប

- **ចំនួនការេ** ជាចំនួនដែលមានរាង $k^2, k \in \mathbb{Z}$ ។
- **ចំនួនគូប** ជាចំនួនដែលមានរាង $k^3, k \in \mathbb{Z}$ ។

**ឧទាហរណ៍:** - $121$ ជាចំនួនការេ ព្រោះ $121 = (-11)^2$ ឬ $121 = 11^2$ ។

- $125$ ជាចំនួនគូប ព្រោះ $125 = 5^3$ ។

**ចំណាំ:**

➢ ចំនួនការេមាន $0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, \cdots$ ជាចំនួនការេ ឬចំនួនការេប្រាកដ។

➢ ចំនួនគូបមាន $\cdots, -125, -64, -27, -1, 0, 1, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, 1331, 1728, 2197, 2744, 3375, \cdots$ ជាចំនួនគូប ។

## ៤. លក្ខណៈនៃស្វ័យគុណ

បើ $a$ និង $b$ ជាចំនួនវិជ្ជមាន ដែល $a \neq 1, b \neq 1$ និង $m, n \in \mathbb{R}$ គេបាន

1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

3) $(a^m)^n = a^{m\times n}$

4) $(a\times b)^n = a^n \times b^n$

5) $(\dfrac{a}{b})^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

6) $a^0 = 1$

7) $\dfrac{1}{a^{-n}} = a^n$

8) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

9) $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

10) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, n \geq 2$

11) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, n \geq 2$

12) $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, n \geq 2$

13) $\sqrt[n]{a\times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}, n \geq 2$

14) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m\times n]{a}, m \geq 2, n \geq 2$

15) $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}, n \geq 2, k > 0$

16) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}, n \geq 2$

## សម្រាយបញ្ជាក់:

1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

គេមាន

$$a^m \times a^n = (\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{m})\times(\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n}) = (\underbrace{a\times a\times\cdots\times a\times a\times\cdots\times a}_{m+n}) = a^{m+n} \text{ ។}$$

2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

គេមាន

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\underbrace{\cancel{a}\times\cancel{a}\times\cdots\times a}_{m}}{\underbrace{\cancel{a}\times\cancel{a}\times\cdots\times a}_{n}} = \underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{m-n} = a^{m-n} \text{ ។}$$

3) $(a^m)^n = a^{m\times n}$

គេមាន

$$(a^m)^n = (\underbrace{a^m \times a^m \times \cdots \times a^m}_{n}) = a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n}} = a^{m\times n} \text{ ។}$$

4) $(a\times b)^n = a^n \times b^n$

គេមាន

$$(a\times b)^n = \underbrace{(a\times b)(a\times b)\cdots(a\times b)}_{n} = (\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n})(\underbrace{b\times b\times\cdots\times b}_{n}) = a^n \times b^n \text{ ។}$$

5) $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

គេមាន

$$(\frac{a}{b})^n = \underbrace{(\frac{a}{b})(\frac{a}{b})\cdots(\frac{a}{b})}_{n} = \frac{\overbrace{a\times a\times\cdots\times a}^{n}}{\underbrace{b\times b\times\cdots\times b}_{n}} = \frac{a^n}{b^n} \text{ ។}$$

6) $a^0 = 1$

គេមាន

$\frac{a^n}{a^n} = 1$ និង $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$ នាំឲ្យ $a^0 = 1$ ។

7) $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$

គេមាន

$$\frac{1}{a^{-n}} = \frac{a^0}{a^{-n}} = a^{0-(-n)} = a^n \text{ ។}$$

8) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

គេមាន

$$a^{-n} = \frac{a^{-n}\times a^n}{a^n} = \frac{a^{-n+n}}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n} \text{ ។}$$

9) $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

គេមាន

$\sqrt{a}\times\sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a = a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \sqrt{a}\times\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}$ ផ្ទឹមកត្តានឹងកត្តានៃអង្គទាំងពីររបស់សមភាព នាំឲ្យ $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ ។

10) $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}},n\geq 2$

គេមាន

$$\underbrace{a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{m}{n}}\times\cdots\times a^{\frac{m}{n}}}_{n}=a^{\underbrace{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\cdots+\frac{m}{n}}_{n}}=a^m=(\sqrt[n]{a^m})^n=\underbrace{(\sqrt[n]{a^m})(\sqrt[n]{a^m})\cdots(\sqrt[n]{a^m})}_{n}$$

$\Leftrightarrow \underbrace{(\sqrt[n]{a^m})(\sqrt[n]{a^m})\cdots(\sqrt[n]{a^m})}_{n}=\underbrace{a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{m}{n}}\times\cdots\times a^{\frac{m}{n}}}_{n}$ ផ្ទឹមកត្តានឹងកត្តានៃអង្គទាំងពីររបស់

សមភាពនាំឲ្យ $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ ។

11) $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}},n\geq 2$

តាមលក្ខណៈទី $(10)$ បើ $m=1$ នាំឲ្យ $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ ទៅជា $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ ។

12) $a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}},n\geq 2$

គេមាន

$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$ តាមលក្ខណៈ$(8)$ និង $\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ តាមលក្ខណៈ$(10)$ នាំឲ្យ $a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ ។

13) $\sqrt[n]{a\times b}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b},n\geq 2$

គេមាន

$\sqrt[n]{a\times b}=(a\times b)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}\times b^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$ តាមលក្ខណៈ$(4),(11)$ នាំឲ្យ $\sqrt[n]{a\times b}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$ ។

14) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m\times n]{a},m\geq 2,n\geq 2$

គេមាន

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{m}\times\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{mn}}=\sqrt[mn]{a}$ តាមលក្ខណៈ$(3),(11)$ នាំឲ្យ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m\times n]{a}$ ។

15) $\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m},n\geq 2,k>0$

គេមាន

$\sqrt[nk]{a^{mk}}=a^{\frac{mk}{nk}}=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ នាំឲ្យ $\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ ។

16) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}},n\geq 2$

គេមាន

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ នាំឲ្យ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ ។

ឧទាហរណ៍: សម្រួលកន្សោម $\dfrac{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$

គេមាន

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} &= \frac{(\sqrt[3]{a^2})^2+2\sqrt[3]{a^2b^2}+(\sqrt[3]{b^2})^2-\sqrt[3]{a^2b^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}\\ &= \frac{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^2-(\sqrt[3]{ab})^2}{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}\\ &= \frac{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{ab})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab})}{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab})}\\ &= (\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{ab})\end{aligned}$$

ដូច្នេះ $\dfrac{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{ab})$ ។

## ៥. គោលការណ៍នៃប្រព័ន្ធរាប់

### ៥.១. និយមន័យ(Definition)

*ប្រព័ន្ធរាប់* ជាសំណុំនៃការសន្មតទាំងអស់ដែលសម្រាប់សរសេរចំនួនគត់ ។ គេនឹងសិក្សាអំពីតារាងចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដោយចំនួនរាប់អស់នៃសញ្ញា ដែលហៅថា *លេខ* ។

### ៥.២.គោល(Base)

### ៥.២.១. និយមន័យ(Definition)

*គោល* នៃប្រព័ន្ធរាប់ជាចំនួនលេខដែលប្រើក្នុងប្រព័ន្ធនោះ ។ ក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោល $x$ ដែល $x$ ជាចំនួនគត់ធំជាង 1 គេប្រើ $x$ លេខ គឺ $0,1,2,3,4,\cdots,x-1$ ។

**សម្គាល់:** គេតាងចំនួនគត់ធម្មជាតិដែលតូចជាងគោលដោយលេខតែមួយគត់ ។

- *ប្រព័ន្ធរាប់គោលពីរ:* ប្រើលេខ 0 និង 1 ដែលតាងឲ្យចំនួន សូន្យ និង មួយ ។
- *ប្រព័ន្ធរាប់គោលដប់:* ប្រើលេខ 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 ដែលតាងឲ្យចំនួន សូន្យ មួយ ពីរ បី បួន ប្រាំ ប្រាំមួយ ប្រាំពីរ ប្រាំបី ប្រាំបួន ។
- *ប្រព័ន្ធរាប់គោលដប់ពីរ:* ប្រើលេខ $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B$ ដែលតាងឲ្យចំនួន សូន្យ មួយ ពីរ បី បួន ប្រាំ ប្រាំមួយ ប្រាំពីរ ប្រាំបី ប្រាំបួន ដប់ ដប់មួយ ។

### ៥.២.២. ការសរសេរមួយចំនួននៅក្នុងប្រព័ន្ធគោល $X$

***អត្ថិភាព:*** ក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោល $x$ គេប្រើលេខ $0,1,2,3,4,\cdots,x-1$ ដែល $0<1<2<\cdots<x-1$ ។

គេឲ្យ $N$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ៖

- បើ $N<x$ នោះ $N$ តាងលេខមួយក្នុងបណ្តាលេខខាងលើ ។
- បើ $N\ge x$ គេចែក $N$ និង $x$ គេបាន $\begin{cases}N=xq_1+r_0\\ 0\le r_0<x\end{cases}$ និង $q_1\ge 1$
- បើ $q_1<x$ នោះ $q_1$ តាងឲ្យចំនួនមួយក្នុងបណ្តាចំនួនខាងលើ ហើយសន្មតសរសេរ $N$ ដោយ $N=\overline{q_1r_0}$

- បើ $q_1 \ge x$ គេចែក $q_1$ និង $x$ គេបាន $\begin{cases} q_1 = xq_2 + r_1 \\ 0 \le r_1 < x \end{cases}$ និង $q_2 \ge 1$
- បើ $q_2 < x$ នោះ $q_2$ តាងឲ្យចំនួនមួយក្នុងបណ្តាចំនួនខាងលើ ហើយសន្មតសរសេរ $N$ ដោយ $N = \overline{q_1 r_1 r_0}$
- បើ $q_2 \ge x$ គេធ្វើរបៀបនេះដដែលៗ គេបាន

$$\left.\begin{array}{l} N = xq_1 + r_0 \quad , \quad 0 \le r_0 < x \ , \quad q_1 \ge x \\ q_1 = xq_2 + r_1 \quad , \quad 0 \le r_1 < x \quad , \quad q_2 \ge x \\ q_2 = xq_3 + r_2 \quad , \quad 0 \le r_2 < x \quad , \quad q_3 \ge x \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_{n-1} = xq_n + r_{n-1}, 0 \le r_{n-1} < x, 1 \le q_{n-1} < x \end{array}\right\} + \begin{array}{l} N = xq_1 + r_0 \quad , \quad 0 \le r_0 < x \quad , \quad q_1 \ge x \\ xq_1 = x^2 q_2 + xr_1 \quad , \quad 0 \le r_1 < x \quad , \quad q_2 \ge x \\ x^2 q_2 = x^3 q_3 + x^2 r_2 \quad , \quad 0 \le r_2 < x \quad , \quad q_3 \ge x \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^{n-1} q_{n-1} = x^n q_n + x^{n-1} r_{n-1}, 0 \le r_{n-1} < x, 1 \le q_{n-1} < x \\ \hline N = q_n x^n + r_{n-1} x^{n-1} + \cdots + r_2 x^2 + r_1 x + r_0 \end{array}$$

គេសន្មតសរសេរ $N = q_n x^n + r_{n-1} x^{n-1} + \cdots + r_2 x^2 + r_1 x + r_0$ ដោយ $N = \overline{q_n r_{n-1} r_{n-2} \cdots r_2 r_1 r_0}$ ដែល $n$ សរសេរក្នុងប្រព័ន្ធគោល$10$ ។

**សម្គាល់:** បើគ្មានការច្រឡំនឹងវិធីគុណ គេអាចសរសេរ $N$ ដោយ $N = q_n r_{n-1} r_{n-2} \cdots r_2 r_1 r_0$ ។

***ឧទាហរណ៍១:*** ក្នុងប្រព័ន្ធគោល $10$ ចំនួន $2135 = 2 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10 + 5$ ។

***ឧទាហរណ៍២:*** ក្នុងប្រព័ន្ធគោល $2$ ចំនួន

$$1101001 = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 \text{ ។}$$

### ៥.២.៣.ស្វ័យគុណគោល $x$ :

គេមាន $x^1 = 1 \times x + 0 = \overline{10}$

$x^2 = 1 \times x^2 + 0 \times x + 0 = \overline{100}$

$x^3 = 1 \times x^3 + 0 \times x^2 + 0 \times x + 0 = \overline{1000}$

……………………………………………

**ជាទូទៅ:** $x^n = 1 \times x^n + 0 \times x^{n-1} + 0 \times x^{n-2} + \cdots + 0 \times x + 0 = 1\underbrace{00 \cdots 0}_{n}$ ។

**សម្គាល់:** គេសរសេរ $(N)_x$ តាងឲ្យចំនួន $N$ ដែលសរសេរក្នុងប្រព័ន្ធគោល $x$ ហើយ $x$ សរសេរក្នុងប្រព័ន្ធគោល$10$ ។ ក្នុងប្រព័ន្ធគោល$10$ គេអាចមិនបាច់សរសេរគោលក៏បាន ។

### ៥.២.៤. ចំណោទ និង ឧទាហរណ៍:

**i. សរសេរមួយចំនួនពីប្រព័ន្ធគោល $x$ ទៅជាចំនួននៃប្រព័ន្ធគោល$10$:**

**ឧទាហរណ៍១:** សរសេរក្នុងប្រព័ន្ធគោល$10$ នូវចំនួន $N = (25107)_8$

ក្នុងប្រព័ន្ធគោល$10$ គេបាន $N = 2 \times 8^4 + 5 \times 8^3 + 1 \times 8^2 + 0 \times 8 + 7 = 10823$ ។

**ឧទាហរណ៍២:** សរសេរក្នុងប្រព័ន្ធគោល$10$ នូវចំនួន $N = (2E3D0A)_{16}$

ក្នុងប្រព័ន្ធគោល$10$ គេបាន $N = 2 \times 16^5 + E \times 16^4 + 3 \times 16^3 + D \times 16^2 + 0 \times 16 + A$

$N = 2 \times 16^5 + 14 \times 16^4 + 3 \times 16^3 + 13 \times 16^2 + 0 \times 16 + 10 = 3030282$ ។

**ii. សរសេរមួយចំនួនពីប្រព័ន្ធគោល $10$ ទៅជាចំនួននៃប្រព័ន្ធគោល $x$ :**

**ឧទាហរណ៍១:** សរសេរក្នុងប្រព័ន្ធគោល $2$ នូវចំនួន $N = 25$

គេមាន

$$\begin{array}{rrrrr} 25 & \underline{\vert\ 2} & & & \\ 1 & \vert\ 12 & \underline{\vert\ 2} & & \\ & 0 & \vert\ 6 & \underline{\vert\ 2} & \\ & & 0 & \vert\ 3 & \underline{\vert\ 2} \\ & & & 1 & \vert\ 1 \end{array}$$

ក្នុងប្រព័ន្ធគោល $2$ គេបាន $N = (11001)_2$ ។

**ឧទាហរណ៍២:** សរសេរក្នុងប្រព័ន្ធគោល $8$ នូវចំនួន $N = 2748$

គេមាន

| គោល $10$ | តួចែក | សំណល់ |
|---|---|---|
| 2748 | 8 | 4 |
| 343 | 8 | 7 |
| 42 | 8 | 2 |
| 5 | 8 | 5 |
| 0 | | |

ក្នុងប្រព័ន្ធគោល $8$ គេបាន $N = (5274)_8$ ។

**iii. សរសេរមួយចំនួនពីប្រព័ន្ធគោល $x$ ទៅជាចំនួននៃប្រព័ន្ធគោល $x'$ :**

គេត្រូវសរសេរចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោល $x$ ទៅជាចំនួនក្នុងនៃប្រព័ន្ធគោល $10$ សិន រួចទើបបន្តសរសេរចំនួននេះក្នុងប្រព័ន្ធ $x'$ ។

**ឧទាហរណ៍១:** សរសេរក្នុងប្រព័ន្ធគោល $2$ នូវចំនួន $N = (37)_8$

ក្នុងប្រព័ន្ធគោល $10$ គេបាន $N = 3 \times 8 + 7 = 31$

គេមាន

$$\begin{array}{rrrrr} 31 & \underline{\vert\ 2} & & & \\ 1 & \vert\ 15 & \underline{\vert\ 2} & & \\ & 1 & \vert\ 7 & \underline{\vert\ 2} & \\ & & 1 & \vert\ 3 & \underline{\vert\ 2} \\ & & & 1 & \vert\ 1 \end{array}$$

ក្នុងប្រព័ន្ធគោល $2$ គេបាន $N = (11111)_2$ ។

**ឧទាហរណ៍២:** សរសេរក្នុងប្រព័ន្ធគោល $8$ នូវចំនួន $N = (ABC)_{16}$

ក្នុងប្រព័ន្ធគោល $10$ គេបាន $N = A \times 16^2 + B \times 16 + C = 10 \times 16^2 + 11 \times 16 + 12 = 2748$

គេមាន

$$\begin{array}{rrrr} 2748 & \underline{\vert\ 8} & & \\ 4 & \vert\ 343 & \underline{\vert\ 8} & \\ & 7 & \vert\ 42 & \underline{\vert\ 8} \\ & & 2 & \vert\ 5 \end{array}$$

ក្នុងប្រព័ន្ធគោល $8$ គេបាន $N = (5274)_8$ ។

**iv. វិធីងាយដើម្បីបំលែងចំនួនពីប្រព័ន្ធគោល២ទៅជាប្រព័ន្ធគោល៨**

ដោយ $8=2^3$ គេអាចប្រើតារាងខាងក្រោមដើម្បីបំលែងពីចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោល 2 ទៅជាចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោល 8 :

| គោល2 (Binary Number) | គោល8 (Octal Number) |
|---|---|
| 000 | 0 |
| 001 | 1 |
| 010 | 2 |
| 011 | 3 |
| 100 | 4 |
| 101 | 5 |
| 110 | 6 |
| 111 | 7 |

**ជំហានទី១:** ចែកបណ្តុំលេខរបស់ Binary Number ជាក្រុមដែលមានបីលេខ ពីស្តាំទៅឆ្វេង ។

**ជំហានទី២:** ប្រើការបំបែកតាមតារាងខាងលើ ។

**ឧទាហរណ៍:** សរសេរក្នុងប្រព័ន្ធគោល 8 នូវចំនួន $N=(110011111010)_2$

គេចែក $N$ ជាក្រុមដែលមាន 3 លេខ $\underbrace{110}_{6}\ \underbrace{011}_{3}\ \underbrace{111}_{7}\ \underbrace{010}_{2}$

គេបាន $N=(6372)_8$ ។

**v. វិធីងាយដើម្បីបំលែងចំនួនពីប្រព័ន្ធរបាប់គោល៨ទៅជាប្រព័ន្ធរបាប់គោល២**

ដោយ $8=2^3$ គេអាចប្រើតារាខាងលើដើម្បីបំលែងពីចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោល 8 ទៅជាចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោល 2 ។

**ឧទាហរណ៍:** សរសេរក្នុងប្រព័ន្ធគោល 2 នូវចំនួន $N=(5321)_8$

គេបំលែងលេខនៃ $N$ ជាក្រុមដែលមាន 3 លេខក្នុងប្រព័ន្ធគោល២: $\underbrace{5}_{101}\ \underbrace{3}_{011}\ \underbrace{2}_{010}\ \underbrace{1}_{001}$

គេបាន $N=(101011010001)_2$ ។

**vi. វិធីងាយដើម្បីបំលែងចំនួនពីប្រព័ន្ធរបាប់គោល២ទៅប្រព័ន្ធរបាប់គោល១៦**

ដោយ $16=2^4$ គេអាចប្រើតារាងខាងក្រោមដើម្បីបំលែងពីចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោល 2 ទៅជាចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោល 16

| គោល២ (BinaryNumber) | គោល១៦ (HexadecimalNumber) | គោល២ (BinaryNumber) | គោល១៦ (Hexadecimal Number) |
|---|---|---|---|
| 0000 | 0 | 1000 | 8 |
| 0001 | 1 | 1001 | 9 |
| 0010 | 2 | 1010 | A |
| 0011 | 3 | 1011 | B |
| 0100 | 4 | 1100 | C |
| 0101 | 5 | 1101 | D |
| 0110 | 6 | 1110 | E |
| 0111 | 7 | 1111 | F |

**ជំហានទី១:** ចែកបណ្តុំលេខរបស់ Binary Number ជាក្រុមដែលមានបួនលេខ ពីស្តាំទៅឆ្វេង ។

**ជំហានទី២:** ប្រើការបំលែងតាមតារាងខាងលើ ។

**ឧទាហរណ៍:** សរសេរក្នុងប្រព័ន្ធគោល16 នូវចំនួន $N=(11001111101011)_2$

គេចែក $N$ ជាក្រុមដែលមាន 4 លេខ: $\underbrace{11}_{3}\ \underbrace{0011}_{3}\ \underbrace{1110}_{E}\ \underbrace{1011}_{B}$ គេបាន $N=(33EB)_{16}$ ។

**vii. វិធីងាយដើម្បីបំលែងចំនួនពីប្រព័ន្ធរបាប់គោល១៦ទៅប្រព័ន្ធរបាប់គោល២**

ដោយ $16=2^4$ គេអាចប្រើតារាងខាងលើដើម្បីបំលែងពីចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោល16 ទៅជាចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោល 2 ។

**ឧទាហរណ៍:** សរសេរក្នុងប្រព័ន្ធគោល 2 នូវចំនួន $N=(5AE9)_{16}$

គេបំលែងលេខនៃ $N$ ជាក្រុមដែលមាន 4 លេខក្នុងប្រព័ន្ធគោល២: $\underbrace{5}_{101}\ \underbrace{A}_{1010}\ \underbrace{E}_{1110}\ \underbrace{9}_{1001}$

គេបាន $N=(101101011101001)_2$ ។

**៥.២.៥-ប្រមាណវិធី**

ចំពោះគ្រប់ប្រព័ន្ធគោល $x$ គេធ្វើប្រមាណវិធីដូចក្នុងប្រព័ន្ធគោល10 ដែរ ដោយប្រើតារាងនៃប្រមាណវិធីបូកនិងប្រមាណវិធីគុណក្នុងគោល $x$ នេះ ។

**ឧទាហរណ៍:** ក្នុងប្រព័ន្ធគោល 5 គេធ្វើប្រមាណវិធីដោយផ្អែកលើតារាងដោយប្រើតារាងនៃប្រមាណវិធីបូក និងប្រមាណវិធីគុណដូចខាងក្រោម:

| + | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 10 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 10 | 11 |
| 3 | 3 | 4 | 10 | 11 | 12 |
| 4 | 4 | 10 | 11 | 12 | 13 |

| × | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 11 | 13 |
| 3 | 0 | 3 | 11 | 14 | 22 |
| 4 | 0 | 4 | 13 | 22 | 31 |

# ៦. ភាពចែកដាច់ក្នុង $\mathbb{Z}$

## ៦.១. និយមន័យ(Definition):

គេឲ្យពីរចំនួនគត់ $a$ និង $b$ ,$b\neq 0$ ។ គេថា $a$ ចែកដាច់នឹង $b$ មាននិមិត្តសញ្ញា $a\vdots b$ លុះត្រាតែមានចំនួនគត់ $k$ ដែល $a=bk$ នោះគេថា $a$ ជាពហុគុណនៃ $b$ ឬ គេថា $b$ ជាតួចែកនៃ $a$ ឬ $b$ ចែកដាច់ $a$ ។

គេកំណត់សរសេរ $b|a$ អានថា $b$ ចែកដាច់ $a$ ។

## ៦.២. លក្ខណៈចែកដាច់

តាង $a,b$ និង $c$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ។គេមានលក្ខណៈគ្រឹះដូចខាងក្រោម៖

1) $a|a$ ។
2) បើ $b|a$ និង $a|c$ នោះ $b|c$ ។
3) បើ $b|a$ និង $a\neq 0$ នោះ $|a|\geq|b|$ ។
4) បើ $b|a$ និង $b|c$ នោះ $b|a\alpha+c\beta$ គ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $\alpha,\beta$ ។
5) បើ $b|a$ និង $b|a\pm c$ នោះ $b|c$ ។
6) បើ $b|a$ និង $a|b$ នោះ $|a|=|b|$ ។

7) បើ $b|a$ និង $a\neq 0$ នោះ $\frac{a}{b}|a$ ។

8) បើ $c\neq 0, b|a$ លុះត្រាតែ $bc|ac$ ។

**សម្រាយបញ្ជាក់:**

1) $a|a$

$\forall a\in\mathbb{Z}: a|a$ ព្រោះ $\forall a\in\mathbb{Z}, \exists k=1\in\mathbb{Z}: a=ka \Leftrightarrow a|a$ ។

2) បើ $b|a$ និង $a|c$ នោះ $b|c$

បើ $b|a$ និង $a|c$ នាំឲ្យយើងមាន $k_1, k_2\in\mathbb{Z}$ ដែល $a=bk_1$ និង $c=ak_2$

គេបាន $c=bk_1k_2 \Rightarrow b|c$ ។

ដូច្នេះ $b|a$ និង $a|c$ នោះ $b|c$ ។

3) បើ $b|a$ និង $a\neq 0$ នោះ $|a|\geq|b|$

បើ $b|a$ នាំឲ្យយើងមាន $k\in\mathbb{Z}$ ដែល $a=bk$ ហើយដោយសារតែ $a\neq 0$ នោះ $|k|\geq 1$

នាំឲ្យ $|a|=|bk|=|b|\cdot|k|\geq|b|$ ។

ដូច្នេះ $b|a$ និង $a\neq 0$ នោះ $|a|\geq|b|$ ។

4) បើ $b|a$ និង $b|c$ នោះ $b|a\alpha+c\beta$ គ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $\alpha,\beta$

បើ $b|a$ និង $a|c$ នាំឲ្យយើងមាន $k_1, k_2\in\mathbb{Z}$ ដែល $a=bk_1$ និង $c=bk_2, \forall\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$

គេបាន $a\alpha+c\beta=bk_1\alpha+bk_2\beta$

$$=b(\alpha k_1+\beta k_2)$$

ដូច្នេះ $b|a$ និង $b|c$ នោះ $b|a\alpha+c\beta$ គ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $\alpha,\beta$ ។

5) បើ $b|a$ និង $b|a\pm c$ នោះ $b|c$

បើ $b|a$ និង $b|a\pm c$ នាំឲ្យយើងមាន $k_1, k_2\in\mathbb{Z}$ ដែល $a=bk_1$ និង $a\pm c=bk_2$

គេបាន $a\pm c=bk_2 \Rightarrow \pm c=bk_2-a$

$$=bk_2-bk_1$$

$$=b(k_2-k_1)$$

ដូច្នេះ $b|a$ និង $b|a\pm c$ នោះ $b|c$ ។

6) បើ $b|a$ និង $a|b$ នោះ $|a|=|b|$

បើ $b|a$ នោះ $|a|\geq|b|$ និង $a|b$ នោះ $|b|\geq|a| \Rightarrow |a|\geq|b|\geq|a| \Rightarrow |a|=|b|$ ។

ដូច្នេះ $b|a$ និង $a|b$ នោះ $|a|=|b|$ ។

7) បើ $b|a$ និង $a\neq 0$ នោះ $\frac{a}{b}|a$

បើ $b|a$ នាំឲ្យយើងមាន $k\in\mathbb{Z}$ និង $k\neq 0$ ដែល $a=bk \Rightarrow \frac{a}{b}=k$ ហើយ $k|a \Rightarrow \frac{a}{b}|a$ ។

ដូច្នេះ $b|a$ និង $a\neq 0$ នោះ $\frac{a}{b}|a$ ។

8) ចំពោះ $c\neq 0, b|a$ លុះត្រាតែ $bc|ac$

ដោយ $c\neq 0, a\neq 0 \Rightarrow ac\neq 0$

បើ $b|a$ នាំឲ្យយើងមាន $k\in\mathbb{Z}, k\neq 0$ ដែល $a=bk \Leftrightarrow ac=bck \Rightarrow ac|bc$ ។

បើ $bc|ac$ នាំឲ្យយើងមាន $k'\in\mathbb{Z}, K'\neq 0$ ដែល $ac=k'bc \Rightarrow a=k'b$ នាំឲ្យ $b|a$ ។

ដូច្នេះ ចំពោះ $c\neq 0, b|a$ លុះត្រាតែ $ac|bc$ ។

# ៧. វិធីចែកបែបអឺគ្លីត

## ៧.១. និយមន័យ(Definition)

**ឧទាហរណ៍:** - ចំនួន $65\times 22<1473<65\times 23$ គេឃើញថា $1473=65\times 22+43$ នេះមានន័យថា ការចែក 1473 និង 65 ឲ្យផលចែក 22 និង សំណល់ 43 ។

- ចំនួន $65\times(-23)<-1473<65(-22)$ គេឃើញថា $-1473=65\times(-23)+22$ នេះមានន័យថា ការចែក $-1473$ និង 65 ឲ្យផលចែក $-23$ និង សំណល់ 22 ។ វិធីចែករបៀបនេះ ហៅថា ***វិធីចែកបែបអឺគ្លីត*** ។

**និយមន័យ:** ធ្វើវិធីចែកបែបអឺគ្លីតនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $a$ និងចំនួនគត់ធម្មជាតិ $b$ គឺកំណត់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $q$ និងចំនួនគត់ធម្មជាតិ $r$ ដែល $a=bq+r$ ដោយ $0\leq r<b$ ។ $a$ ហៅថា តំណាំងចែក $b$ ហៅថា តួចែក $q$ ហៅថា ផលចែក និង $r$ ហៅថាសំណល់។

**សម្គាល់:**

- បើ $0\leq a<b$ នោះ $q=0$ និង $r=a$ ។
- បើ $r=0$ នោះ $a$ ជាពហុគុណនៃ $b$ ឬ $b$ ចែកដាច់ $a$ ហើយ $q$ ជាផលចែកប្រាកដនៃ $a$ និង $b$ ។

**ឧទាហរណ៍:** រកផលចែក $q$ និងសំណល់ $r$ ក្នុងវិធីចែកបែបអឺគ្លីតនៃ $a$ និង $b$ ដូចខាងក្រោម:

ក) $a=569, b=7$ ខ) $a=-671, b=6$

**ចម្លើយ:**

ក) ដោយ $569=7\times 81+2$ នាំឲ្យ $q=81$ និង $r=2$

ខ) ដោយ $-671=6\times(-111)+5$ នាំឲ្យ $q=-81$ និង $r=5$ ។

***ទ្រឹស្តីបទ:*** បើ $a$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប និង $b$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ នោះមានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $q$ តែមួយគត់ និងចំនួនគត់ធម្មជាតិ $r$ តែមួយគត់ដែល $a=bq+r$ ដោយ $0\leq r<b$ ។

***សម្រាយបញ្ជាក់:***

បង្ហាញអត្ថិភាពនៃ $q$ និង $r$

- បើ $a$ ជាពហុគុណនៃ $b$ ក្នុង $\mathbb{Z}$ នោះគេបាន

$a=bq+0, r=0$

- បើ $a$ មិនមែនជាពហុគុណនៃ $b$ ក្នុង $\mathbb{Z}$ នោះមានពហុគុណនៃ $b$ ដែលតូចជាង $a$ និងពហុគុណផ្សេងទៀតនៃ $b$ ដែលធំជាង $a$ ។

បើ $bq$ និង $b(q+1)$ ដែលតូចជាង និង ធំជាង $a$ នោះគេបាន $bq<a<b(q+1)$ ឬ $0<a-bq<b$

តាង $r=a-bq$ គេបាន $a=bq+r$ ដែល $0\le r<b$ ។

- បង្ហាញពីភាពមានតែមួយគត់នៃ $q$ និង $r$

បង្ហាញថាមាន $q,r$ តែមួយគត់ ដែល $a=bq+r, 0\le r<b$

ឧបមាថាមាន $q,r$ និង $q',r'$ ,$(q\ne q', r\ne r')$ ដែល $a=bq+r,(0\le r<b)$ និង

$a=bq'+r',(0\le r'<b)$

ឧបមាថា $r<r'$

យើងមាន $a=bq+r$ នាំឲ្យ $r=a-bq$ និង $a=bq'+r'$ នាំឲ្យ $r'=a-bq'$ នោះគេបាន

$r'-r=b(q-q')$ ។

ដោយ $r'>r$ គេបាន $r'-r>0$ ជាពហុគុណនៃ $b$ ដែលជាករណីមិនអាចមានព្រោះ $0\le r<r'<b$ ។

**ឧទាហរណ៍:** ចូររកផលចែក និងសំណល់នៃវិធីចែកបែបអឺគ្លីតរវាង $-122$ នឹង 19 ។

គេមាន $122=19\times 6+8$

ឬ $-122=-19\times 6-8$

$=-6\times 19-19+11$

$=-7\times 19+11$

ដូច្នេះ $-122$ ចែកនឹង 19 បានផលចែក $-7$ និង សំណល់ 11 ។

## ៨. ភាពសមមូល ( Modular Arithmetic )

### ៨.១. និយមន័យ(Definition)

គេយក $a,b$ និង $r$ ជាចំនួនគត់ដែល $b\ne 0$ ។ គេកំណត់សរសេរ $a\equiv r \pmod b$ អានថា $a$ សមមូល $r$ តាម $b$ មានន័យថា $b|a-r$ ($b$ ចែកដាច់ $a-r$ ឬ មានន័យម្យ៉ាងទៀតថា $a$ និង $r$ មានសំណល់ដូចគ្នាពេលចែកជាមួយ $b$ ។

**សម្គាល់:**

- បើ $a-r$ ចែកមិនដាច់នឹង $b$ នោះគេកំណត់សរសេរ $a\not\equiv r \pmod b$
- បើ $a\equiv r \pmod b$ កាលណា $r$ ជាសំណល់នៃវិធីចែករវាង $a$ និង $b$ ។

***ឧទាហរណ៍:*** ក. $25\equiv 3 \pmod{11}$ ព្រោះ $25=11\times 2+3$

ខ. $17\equiv 2 \pmod{19}$ ព្រោះ $17=19\times 1-2$ ។

### ៨.២. លក្ខណៈគ្រឹះ

i. $a\equiv a \pmod b$

ii. $a\equiv r \pmod b$ និង $r\equiv s \pmod b$ នោះ $a\equiv s \pmod b$

iii. $a\equiv r \pmod b$ នោះ $r\equiv a \pmod b$

iv. បើ $a\equiv r \pmod b$ នោះគ្រប់ចំនួនគត់ $\lambda$ គេបាន $\lambda a\equiv \lambda r \pmod b$

v. បើ $a_1\equiv r_1 \pmod b$ និង $a_2\equiv r_2 \pmod b$ នោះ $a_1a_2\equiv r_1r_2 \pmod b$

vi. បើ $b\ne 0$ គេបាន $a\equiv r \pmod b \Leftrightarrow a$ និង $r$ មានសំណល់ស្មើគ្នាក្នុងវិធីចែកបែបអឺគ្លីតនឹង $b$

vii. បើ $a\equiv r \pmod b$ នោះគ្រប់ចំនួនគត់ $k\ge 1$ គេបាន $a^k\equiv r^k \pmod b$

viii. បើ $a_1 \equiv r_1 \pmod b$ និង $a_2 \equiv r_2 \pmod b$ នោះ $a_1 + a_2 \equiv r_1 + r_2 \pmod b$

ix. បើ $a_1 \equiv r_1 \pmod b$ និង $a_2 \equiv r_2 \pmod b$ នោះ $a_1 - a_2 \equiv r_1 - r_2 \pmod b$ ។

**សម្រាយបញ្ជាក់:**

i. $a \equiv a \pmod b$

ចំពោះ $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists k = 0$ ដែល $a - a = bk \Leftrightarrow b \mid a - a \Rightarrow a \equiv a \pmod b$ ។

ii. $a \equiv r \pmod b$ និង $r \equiv s \pmod b$ នោះ $a \equiv s \pmod b$

ចំពោះ $a \equiv r \pmod b, \exists k \in \mathbb{Z}$ ដែល $a = bk_1 + r$ និង $r \equiv s \pmod b, \exists k_2 \in \mathbb{Z}$ ដែល $r = bk_2 + s$ ។ គេបាន

$$a = bk_1 + bk_2 + s$$
$$= b(k_1 + k_2) + s$$
$$a = bk + s \ , k = (k_1 + k_2) \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow a \equiv s \pmod b$$ ។

iii. $a \equiv r \pmod b$ នោះ $r \equiv a \pmod b$

ចំពោះ $a \equiv r \pmod b, \exists k \in \mathbb{Z}$ ដែល $a = bk + r \Rightarrow r = -bk + a$

យក $k' = -k \Leftrightarrow r = bk' + a \Rightarrow r \equiv a \pmod b$ ។

iv. បើ $a \equiv r \pmod b$ នោះគ្រប់ចំនួនគត់ $\lambda$ គេបាន

ចំពោះ $a \equiv r \pmod b, \exists k \in \mathbb{Z}$ ដែល $a = bk + r$ គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\lambda \in \mathbb{Z}$ គេបាន $\lambda a = \lambda(bk + r) \Leftrightarrow \lambda a = b\lambda k + \lambda r$ យក $k' = \lambda k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \lambda a = bk' + \lambda r \Rightarrow \lambda a \equiv \lambda r \pmod b$ ។

v. បើ $a_1 \equiv r_1 \pmod b$ និង $a_2 \equiv r_2 \pmod b$ នោះ $a_1 a_2 \equiv r_1 r_2 \pmod b$

ចំពោះ $a_1 \equiv r_1 \pmod b, \exists k_1 \in \mathbb{Z}: a_1 = bk_1 + r_1$ និង $a_2 \equiv r_2 \pmod b$ , $\exists k_2 \in \mathbb{Z}$ ដែល $a_2 = bk_2 + r_2$

$$\Rightarrow a_1 a_2 = (bk_1 + r_1)(bk_2 + r_2)$$
$$= b^2 k_1 k_2 + bk_1 r_2 + bk_2 r_1 + r_1 r_2$$
$$= b(bk_1 k_2 + k_1 r_2 + k_2 r_1) + r_1 r_2$$ យក $k = (bk_1 k_2 + k_1 r_2 + k_2 r_1) \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow a_1 a_2 = bk + r_1 r_2 \Rightarrow a_1 a_2 \equiv r_1 r_2 \pmod b$ ។

vi. បើ $b \neq 0$ គេបាន $a \equiv r \pmod b \Leftrightarrow a$ និង $r$ មានសំណល់ស្មើគ្នានៅក្នុងវិធីចែកបែបអឺគ្លីតនឹង $b$ ចំពោះ $a \equiv r \pmod b$ , $\exists k_1 \in \mathbb{Z}: a = bk_1 + r$ ។ យើងធ្វើវិធីចែកបែបអឺគ្លីតរវាង $r$ និង $b$ គេបាន $r = bk_2 + s$ ដោយ $0 \le s < b$ ដែល $k_2 \in \mathbb{Z}$ ។ យើងបាន

$$a = bk_1 + bk_2 + s$$
$$a = b(k_1 + k_2) + s$$
$$= bk + s \ , \ k = (k_1 + k_2) \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow a$ និង $r$ មានសំណល់ស្មើគ្នា $s$ ក្នុងវិធីចែកបែបអឺគ្លីតនឹង $b$ (1)

បើ $a$ និង $r$ មានសំណល់ស្មើគ្នា $s$ ក្នុងវិធីចែកបែបអឺគ្លីតនឹង $b$ នោះ $a\equiv r\ (\mathrm{mod}\,b)$

ឧបមាថា $\begin{cases} a=bk_1+s \\ r=bk_2+s \end{cases} \Rightarrow a-r=b(k_1-k_2)$ យក $k=(k_1+k_2)\in\mathbb{Z}\Rightarrow a-r=bk$

$\Rightarrow a=bk+r\Rightarrow a\equiv r\ (\mathrm{mod}\,b)\quad (2)$

តាម (1) និង (2) ពិត ។

vii. បើ $a\equiv r(\mathrm{mod}\,b)$ នោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\geq 1$ គេបាន $a^n\equiv r^n(\mathrm{mod}\,b)$

ចំពោះ $a\equiv r(\mathrm{mod}\,b)\,,\exists k'\in\mathbb{Z}:a=bk'+r$ ។ យើងបាន

$$a^n=(bk'+r)^n$$

$$a^n=b^nk'^n+C_n^1b^{n-1}k'^{n-1}r+C_n^2b^{n-2}k'^{n-2}r^2+\cdots+C_n^{n-1}bk'r^{n-1}+r^n$$

$$=b(b^{n-1}k'^n+C_n^1b^{n-2}k'^{n-1}r+C_n^2b^{n-3}k'^{n-2}r^2+\cdots+C_n^{n-1}k'r^{n-1})+r^n$$

យក $k=(b^{n-1}k'^n+C_n^1b^{n-2}k'^{n-1}r+C_n^2b^{n-3}k'^{n-2}r^2+\cdots+C_n^{n-1}k'r^{n-1})\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow a^n=bk+r^n\ \Rightarrow a^n\equiv r^n\ (\mathrm{mod}\,b)$ ។

viii. បើ $a_1\equiv r_1(\mathrm{mod}\,b)$ និង $a_2\equiv r_2(\mathrm{mod}\,b)$ នោះ $a_1+a_2\equiv r_1+r_2(\mathrm{mod}\,b)$

ចំពោះ $a_1\equiv r_1(\mathrm{mod}\,b)\,,\exists k_1\in\mathbb{Z}:a_1=bk_1+r_1$ និង $a_2\equiv r_2(\mathrm{mod}\,b)\,,\exists k_2\in\mathbb{Z}$ ដែល

$a_2=bk_2+r_2$

$\Rightarrow a_1+a_2=(bk_1+r_1)+(bk_2+r_2)$

$\qquad =b(k_1+k_2)+(r_1+r_2)$ យក $k=(k_1+k_2)\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow a_1+a_2=bk+(r_1+r_2)\Rightarrow a_1+a_2\equiv r_1+r_2(\mathrm{mod}\,b)$ ។

ix. បើ $a_1\equiv r_1(\mathrm{mod}\,b)$ និង $a_2\equiv r_2(\mathrm{mod}\,b)$ នោះ $a_1-a_2\equiv r_1-r_2(\mathrm{mod}\,b)$

ចំពោះ $a_1\equiv r_1(\mathrm{mod}\,b)\,,\exists k_1\in\mathbb{Z}:a_1=bk_1+r_1$ និង $a_2\equiv r_2(\mathrm{mod}\,b)\,,\exists k_2\in\mathbb{Z}$ ដែល

$a_2=bk_2+r_2$

ចំពោះ $a_1\equiv r_1(\mathrm{mod}\,b)\,,\exists k_1\in\mathbb{Z}:a_1=bk_1+r_1$ និង $a_2\equiv r_2(\mathrm{mod}\,b)\,,\exists k_2\in\mathbb{Z}$ ដែល

$a_2=bk_2+r_2$

$\Rightarrow a_1-a_2=(bk_1+r_1)-(bk_2+r_2)$

$\qquad =b(k_1-k_2)+(r_1-r_2)$ យក $k=(k_1-k_2)\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow a_1-a_2=bk+(r_1-r_2)\Rightarrow a_1-a_2\equiv r_1-r_2(\mathrm{mod}\,b)$ ។

## ៩. តួចែករួមធំបំផុត និង ពហុគុណរួមតូចបំផុត

### ៩.១. តួចែករួមធំបំផុត

**ឧទាហរណ៍:** គណនាតួចែករួមនៃ 12 និង 18 ។

តួចែករបស់ 12 មាន $\{2,3,4,6,12\}$ និងតួចែករបស់ 18 មាន $\{2,3,6,9,18\}$ ។ ដូចនេះ 12 និង 18 មានតួចែករួម $\{2,3,6\}$ ។ ក្នុងចំណោមតួចែករួមទាំងនេះ តួចែករួមដែលធំជាងគេគឺ 6 ។ យើងនិយាយថា តួចែករួមរវាង 12 និង 18 ស្មើ 6 ។

**និយមន័យ:** បើ $a,b\in\mathbb{Z}$ មិនសូន្យទាំងពីរព្រមគ្នា នោះចំនួនគត់ធំបំផុត ដែលចែក $a,b$ ដាច់ទាំងពីរហៅថា ***តួចែករួមធំបំផុត***របស់ $a$ និង $b$ ។គេតាងដោយ $(a,b)$ ឬ $PGCD(a,b)$ ឬ $GCD(a,b)$ ។

**លក្ខណ:**

i. បើ $d\,|\,a$ និង $d\,|\,b$ នោះ $d\,|\,PGCD(a,b)$

ii. បើ $PGCD(a,b)=1$ នោះគេថា $a$ និង $b$ ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា

**សម្គាល់:** $PGCD$ គឺជាផលគុណកត្តាបឋមរួមដែលមាននិទស្សន្ត៍តូចជាងគេ ។

**ឧទាហរណ៍:** គណនា $PGCD$ នៃ 30 និង 45

យើងមាន

$$\frac{30=2^0\times3^2\times5^1}{45=2^1\times3^1\times5^1}\Rightarrow PGCD(30,45)=2^0\times3^1\times5^1=15$$

## ៩.២. ពហុគុណរួមតូចបំផុត

**ឧទាហរណ៍:** គណនាពហុគុណរួមនៃ 2 និង 3

យើងមាន

ពហុគុណនៃ 2 មាន $2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,\cdots$

ពហុគុណនៃ 8 មាន $3,6,9,12,15,18,21,24,27,\cdots$

គេបាន ពហុគុណរួមនៃ 2 និង 3 មាន $6,12,18,\cdots$ មានច្រើនរាប់មិនអស់ ។ តែពហុគុណរួមដែលតូចជាងគេគឺ 6 ។

ដូចនេះ ពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃ 2 និង 3 ស្មើ 6 ។

**និយមន័យ:** បើ $a,b\in\mathbb{Z}$ មិនសូន្យទាំងពីរព្រមគ្នានោះចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុតដែលជាពហុគុណនៃ $a$ ផងនិង $b$ ផង ហៅថា *ពហុគុណរួមតូចបំផុត* នៃ $a$ និង $b$ ។ គេតាងដោយ $[a,b]$ ឬ $PPCM(a,b)$ ឬ $LCM(a,b)$ ។

**លក្ខណ:** បើ $a\,|\,c$ និង $b\,|\,c$ នោះ $PPCM(a,b)\,|\,c$ ។

**សម្គាល់:** $PPCM$ គឺជាផលគុណកត្តាបឋមរួម និងមិនរួមដែលមាននិទស្សន្ត៍ធំជាងគេ ។

**ឧទាហរណ៍:** គណនាពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃ 90 និង 100

យើងមាន

$$\frac{90=2^1\times3^2\times5^1}{100=2^2\times3^0\times5^2}\Rightarrow PPCM(90,100)=2^2\times3^2\times5^2=900$$

ដូចនេះ $PPCM(90,100)=900$ ។

# លំហាត់

១. ចូរបង្ហាញថា $7^{2n}-1$ ចែកដាច់នឹង $8$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

២. ក) បង្ហាញថា $2^n-9^n$ និង $11^n-4^n$ ចែកដាច់នឹង $7$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

ខ) ទាញបញ្ជាក់ថា $2009\times 11^n-2010\times 9^n-2009\times 4^n+2010\times 2^n$ ចែកដាច់នឹង $7$ ។

៣. គេឲ្យ $A=n^4+n^2+1$ ដែល $n$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន ។

ក) តើ $A$ អាចជាចំនួនបឋមឬទេ?

ខ) សរសេរ $A$ ជាផលគុណនៃពីរកត្តាដឺក្រេទី $2$ នៃ $n$ ។

គ) ចូរបង្ហាញថាកត្តាដឺក្រេទី $2$ ទាំងពីរនៃ $A$ មានតួចែករួមតែមួយគត់គឺ $1$ ។

៤. គេមាន $(a,b)=1$ ។ចូរបង្ហាញថា $(a^k,b^k)=1$ ចំពោះគ្រប់ $k\in\mathbb{N}$ ។

៥. គេឲ្យ $a,b,m\in\mathbb{N}$ និង $(a,b)=d$ ។ចូរគណនា $(a^m,b^m)$ ជាអនុគមន៍នៃ $d$ និង $m$ ។

៦. ចូរបង្ហាញថា $(n,2n+1)=1$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

៧. ចូរបង្ហាញថា $(a,b)=(a,a^2+b)=(a+b,3a+2b)$ ។

៨. គេឲ្យសមីការ $5x+3y=1$ នៅក្នុង $\mathbb{Z}$ ។

ក) រកគូ $(x_0,y_0)$ មួយដែលជាគូចម្លើយនៃសមីការ ។

ខ) រកគ្រប់គូ $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ ដែលជាចម្លើយនៃសមីការ ។

៩. រក $x,y,z\in\mathbb{Z}$ ដែល $315x+189y+357z=21$ ។

១០. ចូរបង្ហាញថាចំនួនការេមានរាង $4k$ ឬ $4k+1$ ។

១១. ចូរបង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់នៅក្នុងស្វ៊ីត $11,111,1111,\cdots$ ជាចំនួនការេទេ ។

១២. ចូរបង្ហាញថា ក្នុងប្រព័ន្ធរាប់ទាំងអស់ $4.41$ សុទ្ធតែជាចំនួនការេនៃចំនួនសនិទាន ។

១៣. ចូរបង្ហាញថា បើ $n$ សេសនោះ $x^n+y^n$ ចែកដាច់នឹង $(x+y)$ ។

១៤. ចូរបង្ហាញថា $1001$ ចែកដាច់ $1^{1993}+2^{1993}+3^{1993}+\cdots+1000^{1993}$ ។

១៥. ចូរបង្ហាញថាចំពោះចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n$ មួយគេមានចំនួនគត់ធម្មជាតិ $x$ មួយទៀត ដែលតួនីមួយៗរបស់ស្វ៊ីត $x+1,x^x+1,x^{x^x}+1,\cdots$ ចែកដាច់នឹង $n$ ។

១៦. គណនាគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n$ ដែល $n+1$ ចែកដាច់ $n^2+1$ ។

១៧. បើ $7$ ចែកដាច់ $3x+2$ ។ចូរបង្ហាញថា $7$ ចែកដាច់ $15x^2-11x-14$ ។

១៨. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n$

ក) $n^3-n$ ចែកដាច់នឹង $3$ ។

ខ) $n^5-n$ ចែកដាច់នឹង $5$ ។

គ) $n^7-n$ ចែកដាច់នឹង $7$ ។

១៩. តាង $r$ ជាសំណល់នៃវិធីចែក $1059,1417\ ,2312$ នឹង $d>1$ ។គណនា $d-r$ ។

២០. គណនាសំណល់ពេលចែក $9\times 99\times 999\times\cdots\times\underbrace{99\cdots 9}_{999}$ នឹង $1000$ ។

២១. ចូរបង្ហាញថា បើ $2^n-1$ ជាចំនួនបឋមនោះ $n$ ក៏ជាចំនួនបឋមដែរ ។

២២. ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនបឋមដែលមានរាង $n^3-1$ ចំពោះចំនួនគត់ $n>1$ ។

២៣. ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួន $n\geq 1$ ដែល $n^4+4^n$ ជាចំនួនបឋម ។

២៤. ចូរបង្ហាញថាចំពោះ $x=1, x=2, x=3$ ប្រភាគ $\dfrac{36x+25}{20x}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន ។

២៥. រកចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n$ ដែលនាំឲ្យប្រភាគ $\dfrac{n^2+n+6}{n+1}$ ក្លាយទៅជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

# ចម្លើយ

១. បង្ហាញថា $7^{2n}-1$ ចែកដាច់នឹង $8$

*របៀបទី១:*

យើងមាន

$$7^{2n}-1=(7^2)^n-1=49^n-1, \forall n\in\mathbb{N}$$

តាមរូបមន្ត $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+1)$

គេបាន $49^n-1=(49-1)(49^{n-1}+49^{n-2}+\cdots+1)$

$49^n-1=48k$ ដែល $k=49^{n-1}+49^{n-2}+\cdots+1$

ដោយ $48k$ ចែកដាច់នឹង $8$ ឬ $8\,|\,48k$

ដូចនេះ $7^{2n}-1$ ចែកដាច់នឹង $8, \forall n\in\mathbb{N}$ ។

*របៀបទី២:*

ចំពោះ $n=1$ គេបាន $7^2-1=49-1=48=8\times6$ ( ចែកដាច់នឹង $8$ )ពិត

ឧបមាថាវាពិតរហូតដល់ $n=k$ គេបាន $7^{2k}-1$ ចែកដាច់នឹង $8$ បានន័យថាមាន $q\in\mathbb{N}$ ដែល $7^{2k}-1=8q$

យើងនឹងបង្ហាញថា វាពិតរហូតដល់ $n=k+1$ គេបាន

$$7^{2(k+1)}-1=7^{2k+2}-1=7^27^{2k}-1=49\times7^{2k}-1=48\times7^{2k}+7^{2k}-1$$

$7^{2(k+1)}-1=8\times6\times7^{2k}+8q$ ព្រោះ $7^{2k}-1=8q$

$7^{2(k+1)}-1=8(6\times7^{2k}+q)$ នេះបញ្ជាក់ថា $7^{2(k+1)}-1$ ចែកដាច់នឹង $8$

ដូចនេះ $7^{2n}-1$ ចែកដាច់នឹង $8, \forall n\in\mathbb{N}$ ។

២. ក) បង្ហាញថា $2^n-9^n$ និង $11^n-4^n$ ចែកដាច់នឹង $7$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

- ចំពោះ $2^n-9^n$

តាមរូបមន្ត $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})$

គេបាន $2^n-9^n=(2-9)(2^{n-1}+2^{n-2}9+2^{n-3}9^2+\cdots+9^{n-1})$

$$=-7\times q, q=(2^{n-1}+2^{n-2}9+2^{n-3}9^2+\cdots+9^{n-1})$$

$$2^n-9^n=-7q \qquad (1)$$

- ចំពោះ $11^n-4^n$

យើងបាន

$$11^n-4^n=(11-4)(11^{n-1}+11^{n-2}4+11^{n-3}4^2+\cdots+4^{n-1})$$

$=7\times q'$ ដែល $q'=11^{n-1}+11^{n-2}4+11^{n-3}4^2+\cdots+4^{n-1}$

$$11^n-4^n=7\times q' \qquad (2)$$

តាម (1) និង (2) នាំឲ្យ $2^n-9^n$ និង $11^n-4^n$ ចែកដាច់នឹង $7$ ។

ដូចនេះ $2^n-9^n$ និង $11^n-4^n$ ចែកដាច់នឹង $7$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

ខ) ទាញបញ្ជាក់ថា $2009\times 11^n-2010\times 9^n-2009\times 4^n+2010\times 2^n$ ចែកដាច់នឹង $7$

***របៀបទី១:*** យើងមាន

$$2009\times 11^n-2010\times 9^n-2009\times 4^n+2010\times 2^n$$
$$=(2010\times 2^n-2010\times 9^n)+(2009\times 11^n-2009\times 4^n)$$
$$=2010(2^n-9^n)+2009(11^n-4^n)$$

ដោយ $2^n-9^n$ ចែកដាច់នឹង $7$ នោះ $2010(2^n-9^n)$ ចែកដាច់នឹង $7$ $(i)$

$11^n-4^n$ ចែកដាច់នឹង $7$ នោះ $2009(11^n-4^n)$ ចែកដាច់នឹង $7$ $(ii)$

តាម $(i)$ និង $(ii)$ : $2009\times 11^n-2010\times 9^n-2009\times 4^n+2010\times 2^n$ ចែកដាច់នឹង $7$

ដូចនេះ $2^n-9^n$ និង $11^n-4^n$ ចែកដាច់នឹង $7$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

***របៀបទី២:*** យើងមាន

$7\,|\,(2^n-9^n)\Rightarrow 7\,|\,2010(2^n-9^n)$ និង $7\,|\,(11^n-4^n)\Rightarrow 7\,|\,2009(11^n-4^n)$ គេទាញបាន

$$7\,|\,(2010\times 2^n-2010\times 9^n+2009\times 11^n-2009\times 4^n)$$

$$7\,|\,(2009\times 11^n-2010\times 9^n-2009\times 4^n+2010\times 2^n)$$

ដូចនេះ $2^n-9^n$ និង $11^n-4^n$ ចែកដាច់នឹង $7$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

៣. ក) តើ $A$ អាចជាចំនួនបឋមដែរ ឬទេ?

យើងមាន

$$A=n^4+n^2+1$$

ចំពោះ $n=1$ នោះ $A=1^4+1^2+1=3$ ជាចំនួនបឋម

ដូចនេះ $A$ អាចជាចំនួនបឋម ។

ខ) សរសេរ $A$ ជាផលគុណនៃពីរកត្តាដឺក្រេទី $2$ នៃ $n$

យើងមាន

$$\begin{aligned}A&=n^4+n^2+1\\&=n^4-n^3+n^2+n^3-n^2+n+n^2-n+1\\&=(n^4-n^3+n^2)+(n^3-n^2+n)+(n^2-n+1)\\&=n^2(n^2-n+1)+n(n^2-n+1)+(n^2-n+1)\end{aligned}$$

$$A=(n^2-n+1)(n^2+n+1)$$

ដូចនេះ $A=(n^2-n+1)(n^2+n+1)$ ។

គ) បង្ហាញថាកត្តាទាំងពីរនៃ $A$ មានតួចែករួមតែមួយគត់គឺ $1$

យើងមាន

$$A=(n^2-n+1)(n^2+n+1)$$

តាង $d$ ជាតួចែករួមនៃ $(n^2-n+1)(n^2+n+1)$ គេបាន

$$\left.\begin{array}{l}d\,|\,(n^2+n+1)\\ d\,|\,(n^2-n+1)\end{array}\right\}\Rightarrow d\,|\,((n^2+n+1)-(n^2-n+1))$$

$d \mid (\cancel{n^2} + n + \cancel{1} - \cancel{n^2} + n - \cancel{1}) \Rightarrow d \mid 2n$

ដោយ $n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$ ជាចំនួនគត់សេស តែ $2n$ ជាចំនួនគូ

**ម្យ៉ាងទៀត:**

- $d \mid (n^2 + n + 1)$ តែ $(n^2 + n + 1)$ ជាចំនួនសេស នាំឲ្យ $d \neq 2$
- $d \mid 2n$ តែ $d \neq 2$ នាំឲ្យ $d \mid n$ នោះ $d \mid n^2$

ដោយ $d \mid n^2$ និង $d \mid n$ នាំឲ្យ $d \mid (n^2 + n)$

គេបាន $d \mid (\cancel{n^2} + \cancel{n} + 1 - \cancel{n^2} - \cancel{n}) = 1 \Rightarrow d = 1$ ។

ដូចនេះ កត្តា $(n^2 - n + 1)$ និង $(n^2 + n + 1)$ មានតួចែកតែមួយគត់គឺ1 ។

៤. បង្ហាញថា $(a^k, b^k) = 1$ ចំពោះគ្រប់ $k \in \mathbb{N}$

យើងមាន

$(a,b) = 1 \Rightarrow (a^k, b) = 1, \forall k \in \mathbb{N}$

គេបាន $(b^k, a) = 1 \Rightarrow (a^k, b^k) = 1, \forall k \in \mathbb{N}$

ដូចនេះ $(a,b) = 1$ នាំឲ្យ $(a^k, b^k) = 1$ ។

៥. គណនា $(a^m, b^m)$ ជាអនុគមន៍ $d$ និង $m$

យើងមាន

$(a,b) = d$ គេបាន $a = dq$ និង $b = dk$ ដែល $(q,k) = 1$

នាំឲ្យ $a^m = d^m q^m$ និង $b^m = d^m k^m$

តែ $(q,k) = 1 \Rightarrow (q^m, k^m) = 1$

គេទាញបាន $(a^m, b^m) = (d^m q^m, d^m k^m) = d^m (q^m, k^m) = d^m$

ដូចនេះ $(a^m, b^m) = d^m$ ។

៦. បង្ហាញថា $(n, 2n+1) = 1$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

តាង $d$ ជាតួចែករួមនៃ $n$ និង $2n+1$

គេបាន $d \mid n$ និង $d \mid 2n+1$

ដោយ $d \mid n \Rightarrow d \mid 2n$ និង $d \mid (2n+1)$ នាំឲ្យ $d \mid (2n+1-2n) = 1$

ដូចនេះ $(n, 2n+1) = 1$ ។

៧. បង្ហាញថា $(a,b) = (a, a^2 + b) = (a+b, 3a+2b)$

តាង $\alpha = (a,b)$ និង $\beta = (a, a^2 + b)$

គេបាន $\alpha \mid a$ និង $\alpha \mid b$ ដោយ $\alpha \mid a \Rightarrow \alpha \mid a^2$ ហើយ $\alpha \mid b \Rightarrow \alpha \mid (a^2 + b)$

នាំឲ្យ $\alpha \mid \beta$ (1) ព្រោះ $\beta \mid a, \beta \mid (a^2 + b)$

ម្យ៉ាងទៀត $\beta \mid a$ និង $\beta \mid (a^2 + b)$

ដោយ $\beta \mid a \Rightarrow \beta \mid a^2$

គេបាន

$$\left.\begin{array}{r}\beta \mid (a^2+b)\\ \beta \mid a^2\end{array}\right\} \Rightarrow \beta \mid (a^2+b-a^2)=b$$

ដោយ $\left.\begin{array}{l}\beta \mid a\\ \beta \mid b\end{array}\right\} \Rightarrow \beta \mid \alpha$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន $\alpha=\beta$ មានន័យថា $(a,b)=(a,a^2+b)$ ។

យើងនិងបង្ហាញបន្តថា $(a,b)=(a+b,3a+2b)$

តាង $\delta=(a+b,3a+2b)$

យើងមាន $\alpha=(a,b)\Rightarrow \alpha \mid a$ និង $\alpha \mid b \Rightarrow \alpha \mid (a+b)$

តែ $\left.\begin{array}{l}\alpha \mid a \Rightarrow \alpha \mid 3a\\ \alpha \mid b \Rightarrow \alpha \mid 2b\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \mid (3a+2b)$

គេបាន $\alpha \mid \delta$ (3)

ម្យ៉ាងទៀត

- $\delta \mid (a+b) \Rightarrow \delta \mid 2(a+b) \Leftrightarrow \delta \mid (2a+2b)$ និង $\delta \mid (3a+2b)$

  នាំឲ្យ $\delta \mid (3a+2b-2a-2b)=a$
- $\delta \mid (a+b) \Rightarrow \delta \mid 3(a+b) \Leftrightarrow \delta \mid (3a+3b) \Rightarrow \delta \mid (3a+3b-3a-2b)=b$

គេបាន $\delta \mid a$ និង $\delta \mid b$ នោះ $\delta \mid \alpha$ (4)

តាម (3) និង (4) គេបាន $\alpha=\delta$ មានន័យថា $(a,b)=(a+b,3a+2b)$

សរុបមក $\alpha=\beta=\delta$ មានន័យថា $(a,b)=(a,a^2+b)=(a+b,3a+2b)$ ។

ដូចនេះ $(a,b)=(a,a^2+b)=(a+b,3a+2b)$ ។

៨. ក) រកគូ $(x_0,y_0)$ ដែលជាគូចម្លើយ:

យើងមាន

$5x+3y=1$ យក $x=2, y=-3$ គេបាន

$5\times 2+3(-3)=1 \Leftrightarrow 1=1$ ពិត

ដូចនេះ $(x_0=2, y_0=-3)$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ ។

❖**បញ្ជាក់:**ចំពោះសមីការទម្រង់បែបនេះឲ្យចម្លើយយ៉ាងណាឲ្យតែផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

ខ) រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ

យើងមាន

$$\begin{array}{rl} & 5x+3y=1\\ - & \\ & 5\times 2+3(-3)=1\\ \hline & 5(x-2)+3(y+3)=0\end{array}$$

$$5(x-2)=-3(y+3)$$

$$5(x-2)=3(-y-3)$$

តាមសមភាពនោះគេទាញបាន

$$\left.\begin{array}{r}5\,|\,3(-y-3)\\(3,5)=1\end{array}\right\}\Rightarrow 5\,|\,(-y-3)$$

គេបាន $-y-3=5k\Rightarrow y=-5k-3,k\in\mathbb{Z}$

ម្យ៉ាងទៀត $3|5(x-2)\Rightarrow 3|(x-2)\Rightarrow x-2=3k\Rightarrow x=3k+2,k\in\mathbb{Z}$ ។

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅគឺ $(x=3k+2,y=-5k-3),k\in\mathbb{Z}$ ។

៩. រក $x,y,z$

យើងមាន

$$315x+189y+357z=21$$

$15x+9y+17z=1$ (ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $21$)

$$9y+17z=1-15x$$

តាង $x=t,t\in\mathbb{Z}$ គេបាន $9y+17z=1-15t$ (1)

ចំពោះ $y=2+4t\Rightarrow z=-1-3t$

គេបាន

$$9(2+4t)+17(-1-3t)=1-15t$$
$$18+36t-17-51t=1-15t$$
$$1-15t=1-15t \qquad (2)$$

យក $(1)-(2)$: គេបាន

$$9(y-2-4t)+17(z+1+3t)=0$$
$$9(y-2-4t)=-17(z+1+3t)$$
$$9(-y+2+4t)=17(-z-1-3t)$$

គេទាញបាន

$$\left.\begin{array}{r}9\,|\,17(z+1+3t)\\(9,17)=1\end{array}\right\}\Rightarrow z+1+3t=9k\Rightarrow z=9k-3t-1,k\in\mathbb{Z}$$

និង $17\,|\,9(-y+2+4t)\Rightarrow -y+2+4t=17r\Rightarrow y=-17r+4t+2,r\in\mathbb{Z}$

ដូចនេះ $x=t,y=-17r+4t+2,z=9k-3t-1,(t,k,r)\in\mathbb{Z}^3$ ។

១០. បង្ហាញថា ចំនួនការេមានរាង $4k$ ឬ $4k+1$

ចំនួនគត់ទាំងអស់អាចមានរាងមួយក្នុងចំនោម $2n$ និង $2n+1$ ។ដោយលើកវាជាការេយើងទាញបាន

$$(2n)^2=4n^2=4k,k=n^2$$
$$(2n+1)^2=4n^2+4n+1=4(n^2+n)+1=4k+1,k=n^2+n$$

ដូចនេះ ចំនួនការេមានរាង $4k$ ឬ $4k+1$ ។

១១. បង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់នៅក្នុងស៊ីត $11, 111, 1111, \cdots$ ជាចំនួនការេទេ

ការេនៃចំនួនគត់មួយមានរាង $4k$ ឬ $4k+1$ ។គ្រប់ចំនួនតួទាំងអស់នៅក្នុងស៊ីតនេះមានរាង

$4k-1$

គេបាន

$$11 = 4\times 3 - 1$$
$$111 = 4\times 28 - 1$$
$$1111 = 4\times 278 - 1$$

..............................

ដូចនេះ វាមិនអាចជាការេនៃចំនួនគត់ណាមួយទេ ។

១២. បង្ហាញថា ក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់ទាំងអស់ $4.41$ សុទ្ធតែជាការេនៃចំនួនសនិទាន

យើងមាន $4.41$ នៅក្នុងគោល $r$ កំណត់ដោយ

$$4.41 = 4 + \frac{4}{r} + \frac{1}{r^2} = (2 + \frac{1}{r})^2$$

ដូចនេះ ក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់ទាំងអស់ $4.41$ សុទ្ធតែជាការេនៃចំនួនសនិទាន ។

១៣. បង្ហាញថា បើ $n$ សេស នោះ $x^n + y^n$ ចែកដាច់នឹង $x+y$

យើងមាន $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}) \qquad (1)$

ជំនួស $y$ ដោយ $(-y)$ ទៅក្នុង $(1)$ ហើយដោយដឹងថា $(-y)^n = -y^n$ ព្រោះ $n$ ជាចំនួនសេស ។

គេបាន

$$x^n - (-y)^n = (x-(-y))(x^{n-1} + x^{n-2}(-y) + x^{n-3}(-y)^2 + \cdots + x(-y)^{n-2} + (-y)^{n-1})$$
$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$
$$\Rightarrow (x+y) \mid (x^n + y^n)$$

ដូចនេះ បើ $n$ សេស នោះ $x^n + y^n$ ចែកដាច់នឹង $x+y$ ។

១៤. បង្ហាញថា $1001$ ចែកដាច់ $1^{1993} + 2^{1993} + 3^{1993} + \cdots + 1000^{1993}$

យើងមាន

$$1^{1993} + 1000^{1993} = (1+1000)(1 - 1000 + 1000^2 - \cdots - 1000^{1992})$$
$$= 1001(1 - 1000 + 1000^2 - \cdots - 1000^{1992})$$
$$2^{1993} + 999^{1993} = (2+999)(2^{1992} - 2^{1991}999^1 + 2^{1990}999^2 - \cdots - 2^1 999^{1991} + 999^{1992})$$
$$= 1001(2^{1992} - 2^{1991}999^1 + 2^{1990}999^2 - \cdots - 2^1 999^{1991} + 999^{1992})$$

$$3^{1993} + 998^{1993} = (3+998)(3^{1992} - 3^{1991}998^1 + 3^{1990}998^2 - \cdots - 3^1 998^{1991} + 998^{1992})$$
$$= 1001(3^{1992} - 3^{1991}998^1 + 3^{1990}998^2 - \cdots - 3^1 998^{1991} + 998^{1992})$$

..........................................................................................................

..........................................................................................................

$$500^{1993} + 501^{1993} = (500+501)(500^{1992} - 500^{1991}501^1 + \cdots - 500^1 501^{1991} + 501^{1992})$$
$$= 1001(500^{1992} - 500^{1991}501^1 + \cdots - 500^1 501^{1991} + 501^{1992})$$

បូកអង្គនឹងអង្គ គេបាន

$$\begin{aligned}1^{1993}+2^{1993}+3^{1993}+\cdots+1000^{1993} &= 1001(1-1000+1000^2-\cdots-1000^{1992}+\cdots+500^{1992}\\ &\quad -500^{1991}501^1+\cdots-500^1501^{1991}+501^{1992})\\ &= 1001k\end{aligned}$$

ដែល $k=(1-1000+1000^2-\cdots-1000^{1992}+\cdots+500^{1992}-500^{1991}501^1+\cdots+501^{1992})$

នាំឲ្យ $1001 \mid 1^{1993}+2^{1993}+3^{1993}+\cdots+1000^{1993}$ ។

ដូចនេះ $1001$ ចែកដាច់ $1^{1993}+2^{1993}+3^{1993}+\cdots+1000^{1993}$ ។

១៥. យើងយក $x=2n-1$ នោះ $x$ ជាចំនួនសេស

គេបាន $x+1=2n$ ចែកដាច់នឹង $n$ ។ យើងបាន

$x^x+1=(x+1)(x^{x-1}-x^{x-2}+x^{x-3}-\cdots+1)$ ចែកដាច់នឹង $n$

$x^{x^x}+1=(x+1)(x^{x^x-1}-x^{x^x-2}+x^{x^x-3}-\cdots+1)$ ចែកដាច់នឹង $n$

..........................................................................

ដូចនេះ សំណើពិត ។

១៦. គណនាចំនួនគត់ $n$

យើងមាន

$$n^2+1=n^2-1+2=(n-1)(n+1)+2$$

ដោយ $n+1 \mid (n^2+1) \Rightarrow n+1 \mid 2 \Rightarrow n+1=1$ ឬ $n+1=2$ ។

គេបាន $n=0$ ឬ $n=1$ តែ $n\in\mathbb{N} \Rightarrow n=1$

ដូចនេះ $n=1$ ។

១៧. បង្ហាញថា $7$ ចែកដាច់ $15x^2-11x-14$

យើងមាន

$$15x^2-11x-14=(3x+2)(5x-7)$$

ដោយ $7 \mid (3x+2) \Rightarrow 7 \mid (3x+2)(5x-2) \Leftrightarrow 7 \mid 15x^2-11x-14$

ដូចនេះ $7$ ចែកដាច់ $15x^2-11x-14$ ។

១៨. បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n$ គេបាន

ក) $n^2-n$ ចែកដាច់នឹង $3$

យើងមាន $n^2-n=(n-1)n(n+1)$ ជាបីចំនួនគត់តគ្នា។ហេតុនេះ ត្រូវតែមានកត្តាណាមួយចែកដាច់នឹង $3$ ។

ដូចនេះ $n^2-n$ ចែកដាច់នឹង $3$ ។

ខ) $n^5-n$ ចែកដាច់នឹង $5$

តាង $p=n^5-n=(n-1)n(n+1)(n^2+1)$

បើ $n=5k \Rightarrow p=(n-1)(5k)(n+1)(n^2+1)\,\vdots\,5$

បើ $n=5k+1 \Rightarrow p=(5k)n(n+1)(n^2+1)\,\vdots\,5$

បើ $n=5k+2 \Rightarrow p=(n-1)n(n+1)((5k+2)^2+1)$

$$= (n-1)n(n+1)(25k^2+20k+5)$$
$$= 5(n-1)n(n+1)(5k^2+4k+1) \Rightarrow p \vdots 5$$

បើ $n = 5k+4 \Rightarrow p = (n-1)n(5k+5)((n^2+1) = 5(n-1)n(k+1)(n^2+1) \Rightarrow p \vdots 5$

ដូចនេះ $n^5 - n$ ចែកដាច់នឹង $5$ ។

គ) $n^7 - n$ ចែកដាច់នឹង $7$

តាង $q = n^7 - n = (n-1)n(n+1)(n^2-n+1)(n^2+n+1)$

បើ $n = 7k, 7k+1, 7k+6$ នោះមានកត្តាមួយក្នុងចំណោមកត្តាបីដំបូងគឺ $(n-1)n(n+1)$ ចែកដាច់នឹង $7$ ។

បើ $n = 7k+2 \Rightarrow n^2+n+1 \equiv 4+2+1 \pmod 7 \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow q \vdots 7$

បើ $n = 7k+3 \Rightarrow n^2-n+1 \equiv 9-3+1 \pmod 7 \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow q \vdots 7$

បើ $n = 7k+4 \Rightarrow n^2+n+1 \equiv 4^2+4+1 \pmod 7 \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow q \vdots 7$

បើ $n = 7k+5 \Rightarrow n^2-n+1 \equiv 5^2-5+1 \pmod 7 \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow q \vdots 7$

ដូចនេះ $n^7 - n$ ចែកដាច់នឹង $7$ ។

១៩. តាមវិធីចែកបែបអឺគ្លីត យើងបាន

$$1059 = q_1 d + r$$
$$1417 = q_2 d + r$$
$$2312 = q_3 d + r$$

ដែល $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{Z}$

យើងទាញបាន

$$2(179) = 358 = 1417 - 1059 = d(q_2 - q_1)$$
$$7(179) = 1253 = 2312 - 1059 = d(q_3 - q_1)$$
$$5(179) = 895 = 2312 - 1417 = d(q_3 - q_1)$$

គេបាន $d \mid 2(179), d \mid 7(179)$ និង $d \mid 5(179)$ ។ដោយ $d > 1 \Rightarrow d = 179$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $1059 = 5(179) + 164$ នោះ $r = 164$ គេបាន $d - r = 179 - 164 = 15$

ដូចនេះ $d - r = 15$ ។

២០. គណនាសំណល់

យើងមាន

$$999 \equiv -1 \pmod{1000}$$
$$9999 \equiv -1 \pmod{1000}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\underbrace{99\dots9}_{999} \equiv -1 \pmod{1000}$$

គុណអង្គនិងអង្គ គេបាន

$$\underbrace{999\times9999\times\cdots\times99...9}_{999-3+1}\equiv(-1)^{997}(\bmod 1000)$$

$$\equiv -1\ (\bmod 1000)$$

$$\Rightarrow 9\times99\times999\times9999\times\cdots\times\underset{999}{99...9}\equiv 9\times99\times(-1)\ (\bmod 1000)$$

$$\equiv -891\ (\bmod 1000)$$

$$\equiv 109\ (\bmod 1000)$$

ដូចនេះ សំណល់ដែលចង់បានគឺ109 ។

២១. បង្ហាញថា បើ $2^n-1$ ជាចំនួនបឋមនោះ $n$ ក៏ជាចំនួនបឋមដែរ

សន្មត់ថា $n$ ជាចំនួនពហុគុណ ហើយ $d$ ជាតួចែករបស់ $n$ ខុសពីមួយ។យើងបាន

$n=dk$ និង $2^n-1=2^{dk}-1$

គេបាន $2^{dk}-1=(2^d)^k-1$

$$2^{dk}-1=(2^d-1)((2^d)^{k-1}+(2^d)^{k-2}+\cdots+1)$$

$$=(2^d-1)((2^{d(k-1)}+2^{d(k-2)}+\cdots+1)$$

ដោយ $2^d-1\neq1$ នោះ $2^n-1$ ជាចំនួនពហុគុណ ។

ហេតុនេះបើ $2^n-1$ ជាចំនួនបឋម$\Rightarrow n$ ជាចំនួនបឋម ។

ដូចនេះបើ $2^n-1$ ជាចំនួនបឋមនោះ $n$ ក៏ជាចំនួនបឋមដែរ ។

❖ **សម្គាល់:** • បើ $n$ ជាចំនួនបឋម $\Rightarrow 2^n-1$ ជាចំនួនបឋមឬជាចំនួនមិនបឋម ។

• បើ $2^n-1$ ជាចំនួនបឋម $\Rightarrow n$ ជាចំនួនបឋម ។

២២. យើងមាន $n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$ ជាចំនួនបឋម ។ដោយ $n^2+n+1$ ធំជាងមួយជានិច្ចនោះ ដើម្បីឲ្យ $n^3-1$ ជាចំនួនបឋម លុះត្រាតែ $n-1=1\Rightarrow n=2$ ។

ក្នុងករណី $n=2$ យើងមាន $n^3-1=7$ ជាចំនួនបឋម ។

ដូចនេះ $n=2$ ។

២៣. កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ $n\geq1$ ដែល $n^4+4^n$ ជាចំនួនបឋម

បើ $n^4+4^n$ ជាចំនួនបឋមនោះវាត្រូវតែជាចំនួនសេស ហើយនាំឲ្យ $n$ សេស ។

ចំពោះ $n=1$ យើងមាន $n^4+4^n=5$ ជាចំនួនបឋម ។

ករណី $n\geq3$ គេបាន

$$n^4+4^n=n^4+2n^2 2^n+2^{2n}-2n^2 2^n$$

$$=(n^2+2^n)^2-(n2^{\frac{n+1}{2}})^2$$

$$=(n^2+2^n-n2^{\frac{n+1}{2}})(n^2+2^n+n2^{\frac{n+1}{2}})$$

យើងឃើញថា $n\geq3$ ជាចំនួនសេស នោះ $n^4+4^n$ អាចបំបែកជាផលគុណនៃចំនួនគត់ពីរដែលធំជាង1 ។ហេតុនេះ វាមិនអាចជាចំនួនបឋមទេ ។

ដូចនេះ $n=1$ ។

២៤. យើងមាន ប្រភាគ $\frac{36x+25}{30x}$

ចំពោះ $x=1\Rightarrow\frac{36x+25}{30x}=\frac{36\times1+25}{30\times1}=\frac{61}{30}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន

ចំពោះ $x=2\Rightarrow\frac{36x+25}{30x}=\frac{36\times2+25}{30\times2}=\frac{97}{60}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន

ចំពោះ $x=3\Rightarrow\frac{36x+25}{30x}=\frac{36\times3+25}{30\times3}=\frac{133}{90}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន

ព្រោះ $61,97,133$ ជាចំនួនបឋម ។

ដូចនេះ ចំពោះ $x=1, x=2, x=3$ ប្រភាគ $\frac{36x+25}{30x}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន ។

២៥. រកចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n$

យើងមាន $\frac{n^2+n+6}{n+1}=n+\frac{6}{n+1}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន កាលណា $n+1|6\Rightarrow 6=(n+1)k$

នាំឲ្យ $n+1=\frac{6}{k}, k=1,2,3,6$

បើ $k=1\Rightarrow n+1=6\Rightarrow n=5$

បើ $k=2\Rightarrow n+1=3\Rightarrow n=2$

បើ $k=3\Rightarrow n+1=2\Rightarrow n=1$

បើ $k=6\Rightarrow n+1=1\Rightarrow n=0$ មិនយក

ដូចនេះ $n=\{1,2,5\}$ ។

# ជំពូក៤ ការអនុវត្ត

ដើម្បីឲ្យមានភាពងាយស្រួលនៅក្នុងការចែកលេខ ឬ បំបែកមួយចំនួនជាផលគុណកត្តា យើងអាចប្រើលក្ខណៈចែកដាច់ខ្លះៗ ដូចខាងក្រោម ។

## ១. លក្ខខណ្ឌនៃភាពចែកដាច់

- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 2$ បើ $a_0 = 0, 2, 4, 6, 8$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 3$ បើ $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \vdots 3$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 4$ បើ $\overline{a_1 a_0} \vdots 4$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 5$ បើ $a_0 = 0, 5$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 6$ បើ $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 2$ និង $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 3$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 7$ បើ $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1} - 2a_0 \vdots 7$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 8$ បើ $\overline{a_2 a_1 a_0} \vdots 8$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 9$ បើ $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \vdots 9$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 10$ បើ $a_0 = 0$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 11$ បើ $(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots) \vdots 11$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 12$ បើ $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 3$ និង $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 4$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 13$ បើ $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1} + 4a_0 \vdots 13$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 14$ បើ $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 2$ និង $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 7$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 15$ បើ $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 3$ និង $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 5$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 16$ បើ $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 4$ បានផលចែក $q$ ហើយ $q \vdots 4$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 17$ បើ $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1} - 5a_0 \vdots 17$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 18$ បើ $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 2$ និង $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 9$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 19$ បើ $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1} + 2a_0 \vdots 19$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 20$ បើ $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 4$ និង $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 5$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 21$ បើ $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 3$ និង $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 7$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 22$ បើ $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 2$ និង $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 11$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 23$ បើ $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1} + 7a_0 \vdots 23$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 24$ បើ $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 3$ និង $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 8$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 25$ បើ $\overline{a_1 a_0} \vdots 25$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 26$ បើ $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 2$ និង $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 13$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 27$ បើ $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 3$ បានផលចែក $q$ ហើយ $q \vdots 9$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 28$ បើ $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 4$ និង $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 7$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0} \vdots 29$ បើ $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1} + 3a_0 \vdots 29$ ។

- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,30$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,3$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,10$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,31$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1}-3a_0\,\vdots\,31$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,32$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,4$ បានផលចែក $q$ ហើយ $q\,\vdots\,8$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,33$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,3$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,11$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,34$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,2$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,17$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,35$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,5$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,7$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,36$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,4$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,9$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,37$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1}-11a_0\,\vdots\,37$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,38$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,2$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,19$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,39$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,3$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,13$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,40$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,5$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,8$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,41$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1}-4a_0\,\vdots\,41$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,42$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,6$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,7$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,43$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1}+13a_0\,\vdots\,43$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,44$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,4$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,11$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,45$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,5$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,9$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,46$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,2$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,23$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,47$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1}-14a_0\,\vdots\,47$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,48$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,3$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,16$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,49$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1}+5a_0\,\vdots\,49$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,50$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,2$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,25$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,51$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1}-5a_0\,\vdots\,51$ ឬ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,3$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,17$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,52$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,4$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,13$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,53$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1}+16a_0\,\vdots\,53$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,54$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,2$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,47$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,55$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,5$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,11$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,56$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,7$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,8$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,57$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,3$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,19$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,58$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,2$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,29$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,59$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1}+6a_0\,\vdots\,59$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,60$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,5$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,12$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\,\vdots\,61$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1}-6a_0\,\vdots\,61$ ។

- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 62$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 2$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 31$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 63$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 7$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 9$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 64$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 8$ បានផលចែក $q$ ហើយ $q\vdots 8$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 65$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 5$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 13$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 66$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 6$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 11$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 67$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1}-20a_0\vdots 67$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 68$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 4$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 17$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 69$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 3$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 23$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 70$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 7$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 10$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 71$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1}-7a_0\vdots 71$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 72$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 8$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 9$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 73$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1}+22a_0\vdots 73$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 74$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 2$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 37$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 75$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 3$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 25$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 76$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 4$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 19$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 77$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 7$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 11$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 78$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 2$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 39$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 79$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1}+8a_0\vdots 79$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 80$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 5$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 16$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 81$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 9$ បានផលចែក $q$ ហើយ $q\vdots 9$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 82$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 2$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 41$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 83$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1}+25a_0\vdots 83$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 84$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 4$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 21$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 85$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 5$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 17$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 86$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 2$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 43$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 87$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 2$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 29$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 88$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 8$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 11$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 89$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1}+9a_0\vdots 89$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 90$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 9$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 10$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 91$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 7$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 13$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 92$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 4$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 23$ ។
- $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 93$ បើ $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 3$ និង $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\vdots 31$ ។

- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0}\vdots 94$ បើ $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0}\vdots 2$ និង $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0}\vdots 47$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0}\vdots 95$ បើ $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0}\vdots 5$ និង $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0}\vdots 19$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0}\vdots 96$ បើ $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0}\vdots 3$ និង $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0}\vdots 32$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0}\vdots 97$ បើ $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1}-29a_0\vdots 97$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0}\vdots 98$ បើ $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0}\vdots 2$ និង $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0}\vdots 49$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0}\vdots 99$ បើ $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0}\vdots 9$ និង $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0}\vdots 11$ ។
- $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0}\vdots 100$ បើ $\overline{a_1 a_0}\vdots 100$ ។

# សន្និដ្ឋាន និង អនុសាសន៍

## ១. សន្និដ្ឋាន

ឆ្លងតាមរយៈការសិក្សាស្រាវជ្រាវ និងដោះស្រាយខាងលើយើងឃើញថាមុខវិជ្ជា ***តក្ក សំណុំ និងចំនួន*** ជាវិធីសាស្ត្រមួយដែលធ្វើឲ្យអ្នកគណិតវិទ្យាមានភាពងាយស្រួលនៅក្នុងការវិភាគទៅលើតម្លៃភាពពិតនៃសំណើ ប្រភេទសម្រាយបញ្ជាក់ ទំនាក់ទំនងរវាងសំណុំ លក្ខណៈចែកដាច់នឹងមួយចំនួនគត់ និងការបំបែកមួយចំនួនជាផលគុណនៃកត្តាបឋម ជាដើម។

ទោះបីជាការស្រាវជ្រាវនិងចងក្រងរបស់យើងខ្ញុំ ពុំទាន់សម្រេចទៅតាមវត្ថុបំណងដ៏ល្អប្រពៃនៃការរីកចម្រើនរបស់មុខវិជ្ជាវិទ្យាសាស្ត្រពិតក៏ដោយ ប៉ុន្តែទោះបីជាយ៉ាងណាក៏យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថារបាយការណ៍ស្រាវជ្រាវរបស់យើងខ្ញុំនឹងបានចូលរួមចំណែកដល់ការស្រាវជ្រាវរបស់អ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវជំនាន់ក្រោយ ដើម្បីធ្វើការស្រាវជ្រាវបន្តទៀតផងដែរ ។

ហេតុនេះ***តក្ក សំណុំ និងចំនួន*** គឺជាវិធីសាស្ត្រពិសេសមួយនៅក្នុងការកំណត់លក្ខណៈសំណើ សំណុំ និងចំនួន ជាពិសេសភាពចែកដាច់នឹងចំនួនគត់ ដែលត្រូវបានគេយកទៅអនុវត្តន៍ក្នុងការគណនាប្រមាណវិធីចែក ការបំបែកមួយចំនួនជាផលគុណកត្តាបឋម និងប្រើប្រាស់ជាប្រូក្រាមនៅក្នុងម៉ាស៊ីនអេឡិចត្រូនិចជាដើម ។

## ២. អនុសាសន៍

ទន្ទឹមនឹងមានភាពងាយស្រួលនៅក្នុងការអនុវត្តភាពចែកដាច់នឹងមួយចំនួន ក៏របាយការណ៍នេះមិនទាន់បានផ្តល់នូវលក្ខណៈងាយស្រួលនៅឡើយទេ ព្រោះការស្រាវជ្រាវរិះរកលក្ខណៈចែកដាច់នឹងចំនួនណាមួយ ពេលខ្លះមានលក្ខណៈស្មុគស្មាញ ។ កង្វះឯកសារ ជាឧបសគ្គមួយក្នុងការស្រាវជ្រាវ ឯកសារភាគច្រើនដែលយើងខ្ញុំបានយកមកប្រើប្រាស់ជាឯកសារបរទេស នេះជាហេតុធ្វើឲ្យការសរសេរមិនទាន់មានភាពទូលំទូលាយនៅឡើយ ។

# ឯកសារយោង


1) គណិតវិទ្យាកំរិតខ្ពស់ថ្នាក់ទី១២: គ្រឹះស្ថានបោះពុម្ព និងចែកផ្សាយ បោះពុម្ពលើកទី១ ឆ្នាំ២០១០ ។

2) ពីជគណិតទូទៅ:ឈីម ម៉េង ឆ្នាំ ២០១០ ។

3) ទ្រឹស្តីចំនួន: លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ ឆ្នាំ ២០១១ ។

4) Google: www.savory.de/maths1.htm (accessed 14 December 2015, at 10:19pm) .

5) Google: arxiv.org/pdf/math/0001012 (accessed 13 March 2016, at 1:36pm) .