លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

# លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

# គណិតវិទ្យា

## ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រទុតិយភូមិ

## និង អាហារូបករណ៍

**Problems and Solutions**

# ស្នាដៃបោះពុម្ពផ្សាយ

***សៀវភៅគណិតវិទ្យា*** ៖

១_ដំណោះស្រាយលំហាត់គណិតវិទ្យា បោះពុម្ព ឆ្នាំ២០០០

( សម្រាប់ត្រៀមប្រឡងចូលសាកលវិទ្យាល័យ និង អាហារូបករណ៍ )

២_ពិភពស្វ៊ីតចំនួនពិត ( សម្រាប់ថ្នាក់ទី១១ និង សិស្សពូកែគណិតវិទ្យា )

៣_ អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ( សម្រាប់ថ្នាក់ទី១១ និង សិស្សពូកែគណិតវិទ្យា )

៤_ ដំណោះស្រាយគំរូ ចំនួនកុំផ្លិច លីមីត ដេរីវេ ( សម្រាប់ថ្នាក់ទី១២)

៥_ សង្ខេបរូបមន្តគណិតវិទ្យា ( សម្រាប់ថ្នាក់ទី១១_១២ )

៦_ គំរូសិក្សាអនុគមន៍ ( សម្រាប់ថ្នាក់ទី១១_១២ )

៧_ កំនែលំហាត់គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១០កម្មវិធីសិក្សាថ្មី ( ភាគ១ ឆ្នាំ២០០៨ )

៨_ **151** គណនាលីមីត ( សម្រាប់ថ្នាក់ទី១១_១២ )

៩_ **202** លំហាត់មានដំណោះស្រាយ ( សម្រាប់ថ្នាក់ទី១២ )

✍✍✍✍✍

**អ្នកចូលរួមត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស**

លោក លឹម ឆុន

លោក សែន ពិសិដ្ឋ

លោកស្រី ទុយ រីណា

លោក ទិត្យ ម៉េង

លោក ព្រឹម សុនិត្យ

លោក ផល ប៊ុនឆាយ

**អ្នកត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ**

លោក លឹម មិគ្គសិរ

**ការីកុំព្យូទ័រ**

កញ្ញា លី គុណ្ណាកា

**អ្នកនិពន្ធ និង រៀបរៀង**

លោក លឹម ផល្លុន និង លោក សែន ពិសិដ្ឋ

# អារម្ភកថា

សៀវភៅ **លំហាត់មានដំណោះស្រាយ** ដែលអ្នកសិក្សាកំពុងកាន់នៅក្នុងដៃនេះ ខ្ញុំបាទបានរៀបរៀងឡើងក្នុងគោលបំនងទុកជាឯកសារ សម្រាប់ជាជំនួយដល់អ្នកសិក្សាយកទៅសិក្សាស្រាវជ្រាវដោយខ្លួនឯង និង ម្យ៉ាងទៀតក្នុងគោលបំនងចូលរួមលើកស្ទួយវិស័យគណិតវិទ្យានៅប្រទេសកម្ពុជាយើងឲ្យកាន់តែរីកចម្រើនថែមទៀតដើម្បីបង្កើនធនធានមនុស្សឲ្យមានកាន់តែច្រើនដើម្បីជួយអភិវឌ្ឍន៍ប្រទេសជាតិរបស់យើង ។

នៅក្នុងសៀវនេះយើងខ្ញុំបានខិតខំស្រាវជ្រាវជ្រើសរើសយកលំហាត់យ៉ាងសម្រាំងបំផុតយកមកធ្វើដំណោះស្រាយយ៉ាងក្បោះក្បាយដែលអាចឲ្យលោកអ្នកងាយយល់ឆាប់ចងចាំអំពីសិល្បះនៃការដោះស្រាយទាំងអស់នេះ ។ ប៉ុន្តែទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ កង្វះខាត និង កំហុសឆ្គងដោយអចេតនាប្រាកដជាមានទាំងបច្ចេកទេស និង អក្ខរាវិរុទ្ធ ។ អាស្រ័យហេតុនេះ យើងខ្ញុំជាអ្នករៀបរៀងរង់ចាំដោយរីករាយជានិច្ចនូវមតិរិះគន់បែបស្ថាបនាពីសំណាក់អ្នកសិក្សាក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានដើម្បីជួយកែលំអ សៀវភៅនេះឲ្យបានកាន់តែសុក្រិត្រភាពថែមទៀត ។

ជាទីបញ្ចប់នេះយើងខ្ញុំអ្នករៀបរៀងសូមគោរពជូនពរដល់អ្នកសិក្សាទាំងអស់ឲ្យមានសុខភាពមាំមួន និង ទទួលជ័យជំនះគ្រប់ភារកិច្ច ។

**បាត់ដំបងថ្ងៃទី១៧ កុម្ភះ ២០០៩**

**អ្នកនិពន្ធ លឹម ផល្គុន**

# លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

១_គេឲ្យសមីការ $(E): z^2 + iaz + a + ib = 0$ ដែល $a, b \in IR$

ក_កំនត់ $a$ និង $b$ ដើម្បីឲ្យ $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ ជាឬសមួយរបស់

សមីការ $(E)$ រួចគណនាឫសមួយទៀត $z_2$ ។

ខ_ចូរសរសេរ $z_1$ , $z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ_ទាញបញ្ជាក់តម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$ ។

២_គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់លើ $IR$ ដោយ ៖

$$f(x) = \ln(x^2 - x\sqrt{2} + 1) - \ln(x^2 + x\sqrt{2} + 1)$$

ក_ចូរគណនាតម្លៃ $f(-\sqrt{2})$ , $f(0)$ និង $f(\sqrt{2})$ ។

បង្ហាញថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍សេស ។

ខ_គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង $f''(x)$ ។

៣_គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = x + i.y$ ដែល $x$ និង $y$ ជាពីរចំនួនពិត ។

ចូរកំនត់តម្លៃ $x$ និង $y$ បើគេដឹងថា៖

$$(3 + 2i)z + (1 + 3i)\bar{z} = \frac{10}{2 - i}$$

( $\bar{z}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ $z$ ) ។

៤_គេអោយចំនួនកុំផ្លិច $z = \cos\frac{4\pi}{7} + i.\sin\frac{4\pi}{7}$ ។

ចូរសរសេរ $(1+z)^4$ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

៥_គេអោយចំនួនកុំផ្លិច : $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i.\sqrt{2}}{2}$ និង $z_2 = 1 - i$

ក.ចូរសរសេរ $z_1$ ,$z_2$និង $Z = \frac{z_1}{z_2}$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

ខ.ចូរសរសេរ $Z = \frac{z_1}{z_2}$ ជារាងពិជគណិត ។

គ.ទាញអោយបានថា $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ ។

៦_គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x + 2\sin x - 1}{x}$ ខ. $\lim\limits_{n\to +\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{n+1}$

៧_ចូរគណនាលីមីត ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x^2} - \cos x}{x^2}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

៨_ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{n\to +\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+5}$ ខ. $\lim\limits_{n\to +\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}$

៩_កំនត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីអោយ $(x+1) + (3+2y).i = \frac{7+9i}{3+2i}$

១០_គេអោយ $f(z)=z^3-2(\sqrt{3}+i).z^2+4(1+i\sqrt{3}).z-8i$

ក.ចូរបង្ហាញថា $\forall z\in ¢\ \ f(z)=(z-2i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)$

ខ.ដោះស្រាយសមីការ $f(z)=0$ ក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ។

១១_ចូរគណនាលីមីត :

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+x\sin 2009x}{x^2}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x^2+(a-1)x+3-3a}{x^2-4x+3}$

១២_គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=x^3-6x^2+9x-3$

ក.បង្ហាញថាមានតំលៃ $x_0$ ដែល $1<x_0<2$ ហើយ $f(x_0)=0$ ។

ខ.គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។

សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

១៣_គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{3x+1}$ កំនត់លើ $\left[-\dfrac{1}{3},+\infty\right[$

ក. ចំពោះគ្រប់ $x\in[1,5]$ ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{3}{8}\le f'(x)\le\dfrac{3}{4}$ ។

ខ. ដោយប្រើវិសមភាពកំណើនមានកំនត់ទៅនឹងអនុគមន៍ $f$ ចំពោះគ្រប់

$x\in[1,5]$ ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{3}{8}x+\dfrac{13}{8}\le\sqrt{3x+1}\le\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$

១៤_គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = ax + 2 + b.\ln x$ កំនត់លើចន្លោះ $]0,+\infty[$

ចូរកំនត់ចំនួនពិត $a$ និង $b$ ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង $(c)$ តាងអនុគមន៍ $y = f(x)$

ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $(T): y = 2x - 3$ ត្រង់ចំនុច $A(1,-2)$ ។

១៥_គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x + \cos x - \sqrt{2}}{(\frac{\pi}{4} - x)^2} & \text{បើ } x \neq \dfrac{\pi}{4} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \text{បើ } x = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

ចូរសិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f$ ត្រង់ចំនុច $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$ ។

១៦_គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = ax + b - \dfrac{\ln x}{x}$

ដែល $x > 0$ ហើយ $a$ និង $b$ ជាចំនួនពិត។

ក-បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a$ និង $b$ ដែល $a \neq 0$ ខ្សែកោង $(C)$

តាងអនុគមន៍ $f(x)$ មានអាស៊ីមតូតទ្រេតមួយដែលគេនឹងបញ្ជាក់សមីការ ។

ខ-កំនត់ចំនួនពិត $a$ និង $b$ ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង $(C)$ តាងអនុគមន៍ $f(x)$

ប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ $(T): y = x + 4$ ត្រង់ចំនុច $A(1,5)$ ។

១៧_គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{1 - x^3}$ កំនត់គ្រប់ $x \neq 1$ ។

តើគេអាចបន្លាយអនុគមន៍ $f$ ឱ្យជាប់ត្រង់ចំនុច $x_0 = 1$ បានឬទេ ?

បើអាចកំនត់រកអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រង់ $x_0 = 1$

១៨_គេឱ្យអនុគមន៍ពីរ

$F(x)=\left(ax^3+bx^2+cx+d\right).e^x$ និង $f(x)=x^3.e^x$ កំនត់លើ IR ។

កំនត់ចំនួនពិត $a,b,c$ និង $d$ ដើម្បីឱ្យ$F(x)$ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$

១៩_គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=ax+b-e^x$ មានក្រាបតំនាង $(c)$ ។

កំនត់ចំនួនពិត $a$ និង $b$ ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង $(c)$ ប៉ះនឹងបន្ទាត់$(d): y=x+3$

ត្រង់ចំនុច $A(0,3)$ ។

២០_គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=ax+b-x.\ln x$ មានក្រាបតំនាង $(c)$ ។

កំនត់ចំនួនពិត $a$ និង $b$ ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង $(c)$ ប៉ះនឹងបន្ទាត់

$(d): y=x+1$ ត្រង់ចំនុច $A(1,2)$ ។

២១_គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+mx+4}{x^2+1}$

ដែល $x$ ជាចំនួនពិត និង $m$ ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

ក. ចូរកំនត់តម្លៃ $m$ ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃបរមាត្រង់ចំនុច $x=2$ ។

ខ. ចូរកំនត់តម្លៃ $m$ ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃបរមាតែមួយគត់ ។

២២_គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{3x^2-7x+6}{(x-3)^2(x+1)}$

ក-សរសេរ $f(x)$ជាទំរង់ $\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{C}{(x-3)^2}$

រួចគណនាតំលៃ $A,B$ និង $C$ ។

ខ-គណនា $\int_1^2 f(x).dx$ ដោយសរសេរចំលើយជាទំរង់ $a+\ln b$ ដែល $a$ និង$b$ ជាចំនួនសនិទាន ។

២៣_គេឲ្យអនុគមន៍ $g(x)=\dfrac{2x^2-5x-1}{x^3-x}$ ដែល $x\neq 0$ , $x\neq \mp 1$ ។

ក.កំនត់ចំនួនពិត $A, B$ និង $C$ ដើម្បីឲ្យ $g(x)=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+1}$

ខ.ចូរគណនា $I=\int g(x).dx$ ។

២៤_គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2x^2+2x+1}{x^3+x^2}$ ដែល $x\neq 0$ និង $x\neq -1$

ក_កំនត់ចំនួនពិត $A, B, C$ ដើម្បីឲ្យ $f(x)=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x+1}$ ។

ខ_គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$ ។

២៥_គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{3x^2-7x+6}{(x-3)^2(x+1)}$

ដែល $x\neq -1$ និង $x\neq 3$ ។

ក_កំនត់បីចំនួនពិត $a, b, c$ ដើម្បីឲ្យ $f(x)=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-3}+\dfrac{c}{(x-3)^2}$

ខ_គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 f(x).dx$ ។

២៦_គេឱ្យអនុគមន៏ $f(x)$ កំនត់ និង មានដេរីវេត្រង់ចំនុច $x=c$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(c+h)-f^2(c-h)}{h}=4f'(c).f(c)$ ។

២៧_គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{e^x}{ax+b}$ ដែល $a\neq 0, a, b\in IR$

ក-ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង $f''(x)$

ខ-កំនត់ចំនួនពិត $a$ និង $b$ ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ $e$ ចំពោះ $x=1$ ។

២៨_គេឱ្យអនុគមន៍ $f$ កំនត់លើ $IR$ ដោយ $f(x)=\sin x$

ចូរបង្ហាញថាដេរីវេទី $n$ នៃអនុគមន៍ $f$ កំនត់ដោយ $f^{(n)}(x)=\sin(x+\dfrac{n\pi}{2})$

២៩_គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{4x^2-x+1}{x^3+1}$ ដែល $x\neq -1$ ។

ក-កំនត់បីចំនួនពិត $a, b, c$ ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$ ។

៣០_គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{5x^2-14x+13}{(x+1)(x-3)^2}$ ដែល $x\neq -1$ និង $x\neq 3$ ។

ក-កំនត់បីចំនួនពិត $a, b, c$ ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-3}+\dfrac{c}{(x-3)^2}$

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$ ។

៣១_គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1}{x(1+x^4)}$ ដែល $x$ ជាចំនួនពិតខុសពីសូន្យ ។

ក-ចូរកំនត់បីចំនួនពិត $A, B$ និង $C$ ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx^3+C}{1+x^4}$

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x).dx$ ។

គ-ទាញរកអាំងតេក្រាល $J = \int \frac{4x^3 \ln x.dx}{(1+x^4)^2}$

៣២_គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \frac{1}{e^{2x}+1}$ ដែល x ជាចំនួនពិត ។

ក-ចូរកំនត់បីចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឱ្យ $f(x) = A + \frac{B.e^{2x}}{e^{2x}+1}$

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x).dx$ ។

គ-ទាញរកអាំងតេក្រាល $J = \int \frac{2xe^{2x}.dx}{(e^{2x}+1)^2}$

៣៣_គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I = \int e^x \cos^2 x.dx$ និង $J = \int e^x \sin^2 x.dx$

ក-ចូរគណនា $I + J$ និង $I - J$

ខ-ទាញរក $I$ និង $J$

៣៤_គេឱ្យអាំងតេក្រាល :

$I = \int \frac{1+\cos x}{2+\sin x+\cos x}.dx$ និង $J = \int \frac{1+\sin x}{2+\sin x+\cos x}.dx$

ក-គណនា $I + J$ និង $I - J$

ខ-ទាញរក $I$ និង $J$

៣៥_ គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2}$

និង $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+t^2}.dt$ , ( $n \in IN$ )

ក_ចូរគណនាតម្លៃនៃ $I_0$ រួច ស្រាយថា $(I_n)$ជាស្វ៊ីតចុះ។

ខ_ស្រាយបញ្ជាក់ថា $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ ។

គ_ទាញឲ្យបានថា $\frac{1}{3(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{3(n-1)}$ , $\forall n \ge 2$ ។

ទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(n I_n)$។

៣៦_គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I = \int x\cos^2 x.dx$ និង $J = \int x\sin^2 x.dx$

ក-ចូរគណនា $I + J$ និង $I - J$

ខ-ទាញរក $I$ និង $J$

៣៧_គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \frac{6x^2 - 22x + 18}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ ដែល$x \neq \{1, 2, 3\}$ ។

ក-កំនត់បីចំនួនពិត $a, b, c$ ដើម្បីឱ្យ $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x).dx$ ។

៣៨_គេមានអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x.dx$ និង $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x.dx$

ក-ចូរគណនា $I+J$ និង $I-J$ ។

ខ-ទាញរកតម្លៃនៃ $I$ និង $J$ ។

៣៩_គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{2x+1}{x(x+1)}$ ដែល $x\neq -1$ និង $x\neq 0$ ។

ក-កំនត់បីចំនួនពិត $A$ និង $B$ ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^3 f(x).dx$ ។

៤០_គេមានអាំងតេក្រាល $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}$ និង $J=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^3 x}$

ក-កំនត់ពីរចំនួនពិត $a, b$ ដើម្បីឱ្យ $\frac{1}{\sin x}=\frac{a\sin x}{1+\cos x}+\frac{b\sin x}{1-\cos x}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I$ រួចទាញរកតម្លៃ $J$ ។

៤១_គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{e^{4x}+1}{(e^{2x}+1)^2}$ ដែល $x$ ជាចំនួនពិត ។

ក-កំនត់បីចំនួនពិត $A , B$ ដើម្បីឱ្យ $f(x)=A+\frac{B.e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x).dx$ ។

៤២_គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2x^2+4x+3}{(x+1)(x+2)^2}$ ។

ក-កំនត់បីចំនួនពិត $A,B$ និង $C$ ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ អាចសរសេរជារាង

$f(x)=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{(x+2)^2}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 f(x).dx$ ។

៤៣_គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ កំនត់លើ IR ។

ក-ចូរសរសេរ $f(x)$ ជារាង $f(x)=A+\dfrac{B.e^{-x}}{1+e^{-x}}$

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 f(x).dx$

ដោយសរសេរលទ្ធផលជារាង $a+\ln b$ ដែល $a$ និង $b$ ជាពីរចំនួនពិតត្រូវរក

៤៤_គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=(x^2+x-7).e^x$ កំនត់លើ IR ។

ក-កំនត់ចំនួនពិត $a,b$ និង $c$ ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $F(x)=(ax^2+bx+c).e^x$

ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^3 f(x).dx$

៤៥_គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

ក-កំនត់ចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}$

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_2^5 f(x).dx$ ។

៤៦_គេដឹងថា $\int_0^{x^2} f(2t-1).dt=4x^6$ ។ចូររកអនុគមន៍ $f(x)$ ។

៤៧១.ដោះស្រាយសមីការ $g''(x)-5g'(x)+6g(x)=0 \ (E)$

២. កំនត់ចំលើយ $g(x)$ មួយនៃសមីការ $(E)$ ដែល $g(0)=0$ និង $g'(0)=1$

៤៨_ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-3y'+2y=0$

ដោយដឹងថា $y(0)=1 \ , y'(0)=0$ ។

៤៩_គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-4y'+4y=4x^2-24x+34$

ក-កំនត់ចំនួនពិត $a,b$ និង $c$ ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $y_P(x)=ax^2+bx+c$

ជាចំលើយដោយឡែកមួយរបស់សមីការ $(E)$ ។

ខ-បង្ហាញថាអនុគមន៍ $y=y_P(x)+y_h(x)$ ជាចំលើយទូទៅរបស់ $(E)$

លុះត្រាតែអនុគមន៍ $y_h(x)$ ជាចំលើយរបស់សមីការអូម៉ូសែន

$(E'): y''-4y'+4y=0$ ។

គ-ដោះស្រាយសមីការ $(E')$ រួចទាញរកចំលើយទូទៅរបស់សមីការ $(E)$ ។

៥០_ក-ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): f''(x)-f'(x)-6f(x)=0$

ខ-កំនត់អនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាចំលើយមួយរបស់សមីការ $(E)$

បើគេដឹងថាខ្សែកោង $(C)$ តាង $f(x)$ ប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ $(T): y=-x+3$

ត្រង់ចំនុច $M(0,3)$ ។

៥១_គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+9y=0$

ក-ដោះស្រាយសមីការ $(E)$ ។

ខ-កំនត់អនុគមន៍ $f(x)$ ជាចំលើយមួយរបស់សមីការ $(E)$ បើគេដឹងថា ៖

$f(0)=\sqrt{3}$ , $f'(0)=3$ ។

៥២_គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល : $y''-4y=8x-12$ $(E)$

ក-កំនត់អនុគមន៍ $\varphi(x)=ax+b$ ជាចំលើយដោយឡែកមួយរបស់ $(E)$ ។

ខ-រកចំលើយទូទៅរបស់សមីការ $(E)$ ។

៥៣_គេឱ្យប្រវែងប្រែប្រួលមួយ MN ដែល $MN = f(x)$ ។

អនុគមន៍ $f(x)$ ជាចំលើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល :

$(E): f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0$ ។

ក-គណនាប្រវែង MN បើគេដឹងថា $f(0) = 2$ និង $f'(0) = 1$ ។

ខ-កំនត់ប្រវែងអតិបរមានៃ MN ។

៥៤_គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' + 4y = 0$ ។

ក-ដោះស្រាយសមីការ $(E)$ ។

ខ-កំនត់អនុគមន៍ $f(x)$ ជាចំលើយមួយនៃសមីការ $(E)$ បើគេដឹងថា $f(0) = 1$ និង $f'(0) = 2\sqrt{3}$ ។

គ-ចូរសរសេរអនុគមន៍ $f(x)$ ជារាង $f(x) = k.\cos(\omega x + \varphi)$ ដែល $k$ , $\omega$ និង $\varphi$ ជាបីចំនួនពិត ។

ឃ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{f^2(x)}$ ។

៥៥_គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x + 1}.dx$ , $n \in IN$ ។

ក-គណនា $I_0 + I_1$ , $I_1$ រួចទាញរក $I_0$ ។

ខ-គណនា $I_n + I_{n+1}$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$ ។

៥៦_គេឱ្យអនុគមន៍ $f$ កំនត់លើ $IR-\{-1\}$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង:

$$x^2f(x^3)+\frac{1}{(1+x)^2}f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=4x^3(1+x^4)^5$$

ចូរគណនាអាំងតេក្រាល: $I=\int_0^1 f(x).dx$ ។

៥៧_គេសន្មត់ថា $f$ ជាអនុគមន៍មួយកំនត់លើ $IR$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង:

$f(x)+f(-x)=\sqrt{2-2\cos 2x}$ ។

ចូរគណនា $I=\int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx$ ។

៥៨_ចូរបង្ហាញថា $\int_a^b f(x).dx=\int_a^b f(a+b-x).dx$

អនុវត្តន៍ : ចូរគណនា $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\log_2(1+\sqrt{3}\tan x).dx$

៥៩_គេឱ្យ $f$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[0,1]$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$ ?

អនុវត្តន៍: ចូរគណនា $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x.dx}{1+\cos^2 x}$ ។

៦០_គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍គូលើ $[-a,a]$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}f(x).dx$ , $q>0, q\neq 1$ ។

ខ. អនុវត្តន៍ ៖ គណនា $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+3^x}.dx$

៦១_ក-គណនាអាំងតេក្រាលកំនត់ $I_n=\int_0^1(1+x)^n.dx$ , $n\in IN$ ។

ខ-ទាញបង្ហាញថា $C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+.....+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

៦២_គេមានស្វ៊ីត $(I_n)$ កំនត់ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$ ដោយ

$$I_n=\frac{1}{n!}.\int_0^1(1-x)^n.e^x.dx$$

ក-ចូរគណនាតួ $I_1$ ។

ខ-ចូរបញ្ជាក់ $I_{n+1}$ ជាអនុគមន៍នៃ $I_n$ រួចទាញឱ្យបានថា $I_n=e-\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{P!}\right)$

គ-ចូររកលីមីត $\lim_{n\to+\infty}I_n$ ។

ទាញថា $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}\right)=e=2.71828$ ។

# ផ្នែកដំណោះស្រាយ

## លំហាត់ទី១

គេឲ្យសមីការ $(E): z^2 + iaz + a + ib = 0$ ដែល $a , b \in IR$

ក_កំនត់ a និង b ដើម្បីឲ្យ $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ ជាឫសមួយរបស់សមីការ (E) រួចគណនាឫសមួយទៀត $z_2$ ។

ខ_ចូរសរសេរ $z_1$ , $z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ_ទាញបញ្ជាក់តម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក_កំនត់ a និង b ÷

ដើម្បីឲ្យ $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ ជាឫសមួយរបស់ (E)លុះណាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ

គេបាន $(-1 + i\sqrt{3})^2 + ia(-1 + i\sqrt{3}) + a + ib = 0$

$$1 - 2\sqrt{3}\, i - 3 - ia - a\sqrt{3} + a + ib = 0$$

$$(-2 + a - a\sqrt{3}) + i(-2\sqrt{3} - a + b) = 0$$

គេទាញ $\begin{cases} -2 + a - a\sqrt{3} = 0 \\ -2\sqrt{3} - a + b = 0 \end{cases}$ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធគេបាន ÷

ដូចនេះ $\boxed{a = \frac{2}{1 - \sqrt{3}} = -1 - \sqrt{3} \text{ និង } b = -1 + \sqrt{3}}$

គណនាឫសមួយទៀត $z_2$ ៖

ដោយ $z_1$ និង $z_2$ ជាឫសរបស់សមីការ (E)

នោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតយើងបាន $z_1 + z_2 = -ia$ នាំឲ្យ

$$z_2 = -ia - z_1 = -i(-1-\sqrt{3}) - (-1+i\sqrt{3}) = 1+i$$

ដូចនេះ $z_2 = 1+i$ ។

ខ-សរសេរ $z_1$ , $z_2$ និង $\frac{z_2}{z_1}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

យើងបាន $z_1 = -1+i\sqrt{3} = 2(-\frac{1}{2}+i.\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos\frac{2\pi}{3}+i.\sin\frac{2\pi}{3})$

$$z_2 = 1+i = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i.\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4})$$

និង $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left[\cos(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4})+i.\sin(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4})\right] = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{12}+i.\sin\frac{5\pi}{12})$ ។

គ-ទាញបញ្ជាក់តម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{12}+i.\sin\frac{5\pi}{12}) \quad (1)$

ម្យ៉ាងទៀត $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{(-1+i\sqrt{3})(1-i)}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}+1}{2} \quad (2)$

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន ៖

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{និង} \quad \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

## លំហាត់ទី២

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់លើ $IR$ ដោយ ÷

$$f(x)=\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)-\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)$$

ក_ចូរគណនាតម្លៃ $f(-\sqrt{2})$ , $f(0)$ និង $f(\sqrt{2})$ ។

បង្ហាញថា $f(x)$ជាអនុគមន៍សេស ។

ខ_គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង $f''(x)$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក.គណនាតម្លៃ $f(-\sqrt{2})$ , $f(0)$ និង $f(\sqrt{2})$

មាន $f(x)=\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)-\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)$

យើងបាន $f(-\sqrt{2})=\ln(2+2+1)-\ln(2-2+1)=\ln 5$

$$f(0)=\ln(0-0+1)-\ln(0+0+1)=0$$

$$f(\sqrt{2})=\ln(2-2+1)-\ln(2+2+1)=-\ln 5$$

ដូចនេះ $\boxed{f(-\sqrt{2})=\ln 5\ ,\ f(0)=0\ ,f(\sqrt{2})=\ln 5}$

បង្ហាញថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍សេស ÷

យើងមាន $x\in IR$ និង $-x\in IR$

យើងបាន $f(-x)=\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)-\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)=-f(x)$

ដូចនេះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍សេស ។

ខ_គណនាដេរីវេ $f'(x)$និង $f''(x)$

យើងបាន $f'(x)=\dfrac{(x^2-x\sqrt{2}+1)'}{(x^2-x\sqrt{2}+1)}-\dfrac{(x^2+x\sqrt{2}+1)'}{(x^2+x\sqrt{2}+1)}$

$$=\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}$$

$$=\frac{(2x-\sqrt{2})(x^2+x\sqrt{2}+1)-(2x+\sqrt{2})(x^2-x\sqrt{2}+1)}{(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1)}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\,x^2-2\sqrt{2}}{x^4+1}=\frac{2\sqrt{2}(x^2-1)}{x^4+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=2\sqrt{2}\,\dfrac{x^2-1}{x^4+1}}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $f''(x)=2\sqrt{2}\,\dfrac{(x^2-1)'(x^4+1)-(x^4+1)'(x^2-1)}{(x^4+1)^2}$

$$=2\sqrt{2}\,\frac{2x(x^4+1)-4x^3(x^2-1)}{(x^4+1)^2}$$

$$=2\sqrt{2}\,\frac{2x^5+2x-4x^5+4x^3}{(x^4+1)^2}$$

$$=-4\sqrt{2}\,\frac{x\,(x^4-2x^2-1)}{(x^4+1)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f''(x)=-4\sqrt{2}\,\dfrac{x\,(x^4-2x^2-1)}{(x^4+1)^2}}$ ។

## លំហាត់ទី៣

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = x + i.y$ ដែល $x$ និង $y$ ជាពីរចំនួនពិត ។

ចូរកំនត់តម្លៃ $x$ និង $y$ បើគេដឹងថា៖

$$(3+2i)z+(1+3i)\overline{z} = \frac{10}{2-i}$$

( $\overline{z}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ $z$ ) ។

## ដំណោះស្រាយ

កំនត់តម្លៃ $x$ និង $y$

គេមាន $(3+2i)z+(1+3i)\overline{z} = \dfrac{10}{2-i}$

ដោយ $z = x + i.y$ នាំឲ្យ $\overline{z} = x - i.y$

គេបាន $(3+2i)(x+iy)+(1+3i)(x-iy) = \dfrac{10}{2-i}$

$$3x+3iy+2ix-2y+x-iy+3ix+3y = \frac{10(2+i)}{5}$$

$$(4x+y)+i.(5x+2y) = 4+2i$$

គេទាញបាន $\begin{cases} 4x+y=4 \\ 5x+2y=2 \end{cases}$

គេមាន $D = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 8-5=3$ , $D_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8-2=6$

និង $D_y = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 20 = -12$

គេបាន $x = \frac{D_x}{D} = \frac{6}{3} = 2$ , $y = \frac{D_y}{D} = -\frac{12}{3} = -4$

ដូចនេះ $\boxed{x = 2 \text{ , } y = -4}$ ។

**លំហាត់ទី៤**

គេអោយចំនួនកុំផ្លិច $z = \cos\frac{4\pi}{7} + i.\sin\frac{4\pi}{7}$ ។

ចូរសរសេរ $(1+z)^4$ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

**ដំណោះស្រាយ**

សរសេរ $(1+z)^4$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ៖

គេបាន $1 + z = 1 + \cos\frac{4\pi}{7} + i.\sin\frac{4\pi}{7}$

ដោយ $\begin{cases} 1 + \cos\frac{4\pi}{7} = 2\cos^2\frac{2\pi}{7} \\ \sin\frac{4\pi}{7} = 2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} \end{cases}$

គេទាញ

$$1 + z = 2\cos^2\frac{2\pi}{7} + 2i.\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} = 2\cos\frac{2\pi}{7}(\cos\frac{2\pi}{7} + i.\sin\frac{2\pi}{7})$$

តាមរូបមន្តដឺម័រគេអាចសរសេរ៖

$$(1+z)^4=\left[2\cos\frac{2\pi}{7}(\cos\frac{2\pi}{7}+i.\sin\frac{2\pi}{7})\right]^4$$

$$=16\cos^4\frac{2\pi}{7}\left(\cos\frac{8\pi}{7}+i.\sin\frac{8\pi}{7}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{(1+z)^4=16\cos^4\frac{2\pi}{7}\left(\cos\frac{8\pi}{7}+i.\sin\frac{8\pi}{7}\right)}$ ។

## លំហាត់ទី៥

គេអោយចំនួនកុំផ្លិច : $z_1=\frac{\sqrt{6}-i.\sqrt{2}}{2}$ និង $z_2=1-i$

ក.ចូរសរសេរ $z_1$ ,$z_2$ និង $Z=\frac{z_1}{z_2}$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

ខ.ចូរសរសេរ $Z=\frac{z_1}{z_2}$ ជារាងពិជគណិត ។

គ.ទាញអោយបានថា $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរ $z_1$ ,$z_2$ និង $Z=\frac{z_1}{z_2}$ ជារាងត្រីកោណមាត្រៈ

គេមាន $z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i.\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}-i.\sin\frac{\pi}{6}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{z_1=\sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{6})+i.\sin(-\frac{\pi}{6})\right]}$ ។

គេមាន $z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i.\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i.\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{z_2 = \sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i.\sin(-\frac{\pi}{4})\right]}$ ។

គេមាន $Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left[\cos(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}) + i.\sin(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4})\right]$

ដូចនេះ $\boxed{Z = \cos\frac{\pi}{12} + i.\sin\frac{\pi}{12}}$ ។

ខ. សរសេរ $Z = \frac{z_1}{z_2}$ ជារាងពិជគណិត

គេបាន $Z = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(1+i)}{2(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{6} - i\sqrt{2} + \sqrt{2}}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{Z = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i.\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$ ។

គ. ទាញអោយបានថា $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន :

$Z = \cos\frac{\pi}{12} + i.\sin\frac{\pi}{12} \quad (1)$ និង $Z = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i.\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad (2)$

ផ្ទឹមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន :

$$\cos\frac{\pi}{12} + i.\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i.\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$ និង $\boxed{\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$ ។

## លំហាត់ទី៦

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+2\sin x-1}{x}$ ខ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n}{2n-1}\right)^{n+1}$

## ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+2\sin x-1}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}+2\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}+2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1+2=3$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+2\sin x-1}{x}=3}$ ។

ខ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n}{2n-1}\right)^{n+1}$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{n+1}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1}\right)^{\frac{n+1}{2n-1}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n}{2n-1}\right)^{n+1}=\sqrt{e}}$ ។

**លំហាត់ទី៧**

ចូរគណនាលីមីត ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2}-\cos x}{x^2}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$

**ដំណោះស្រាយ**

គណនាលីមីត

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2}-\cos x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{-x^2}-1)+(1-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1+2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2}-\cos x}{x^2}=-\dfrac{1}{2}}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x}-1)-(e^{-x}-1)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{\sin x}-\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}.\frac{x}{\sin x}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{-x}.\frac{x}{\sin x}=1+1=2$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}=2}$ ។

## លំហាត់ទី៨

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}$ ខ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}$

## ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត ៖

ក. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}$

តាង $x=\frac{1}{n}$ កាលណា $n\to+\infty$ នោះ $x\to 0$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}+5}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}.(1+x)^{5}=e$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}=e}$ ។

ខ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}$

តាង $1+x=\frac{n-1}{n+1}$ នាំឲ្យ $x=-\frac{2}{n+1}$ និង $n=-\frac{2+x}{x}$

កាលណា $n\to+\infty$ នោះ $x\to 0$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{2+x}{x}+2}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{2}{x}+1}$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}\right]^{-2}.(1+x) = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2} = \frac{1}{e^2}}$ ។

## លំហាត់ទី៩

កំនត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីអោយ $(x+1)+(3+2y).i = \frac{7+9i}{3+2i}$

## ដំណោះស្រាយ

កំនត់ចំនួនពិត x និង y

គេមាន $(x+1)+(3+2y).i = \frac{7+9i}{3+2i}$

$$= \frac{(7+9i)(3+2i)}{(3+2i)(3-2i)}$$

$$= \frac{21-14i+27i-18i^2}{9-4i^2}$$

$$= \frac{39+13i}{13} = 3+i$$

គេបាន $\begin{cases} x+1=3 \\ 3+2y=1 \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{x=2, y=-1}$ ។

## លំហាត់ទី១០

គេអោយ $f(z)=z^3-2(\sqrt{3}+i).z^2+4(1+i\sqrt{3}).z-8i$

ក.ចូរបង្ហាញថា $\forall z\in ¢\ \ f(z)=(z-2i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)$

ខ.ដោះស្រាយសមីការ $f(z)=0$ ក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ។

## ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $\forall z\in ¢ : f(z)=(z-2i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)$

យើងមាន $f(z)=(z-2i).(z^2-2\sqrt{3}z+4)$

ដោយពន្លាតអនុគមន៍នេះយើងបាន :

$$\begin{aligned} f(z) &= z^3-2\sqrt{3}z+4z-2i(z^2-2\sqrt{3}z+4) \\ &= z^3-2\sqrt{3}.z^2+4z-2iz^2+4\sqrt{3}iz-8i \\ &= z^3-2(\sqrt{3}+i).z^2+4(1+i\sqrt{3}).z-8i \quad \text{ពិត} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\forall z\in ¢\ \ f(z)=(z-2i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ

បើ $f(z)=0$ នាំអោយ $(z-2i).(z^2-2\sqrt{3}.z+4)=0$

គេទាញឫស $z=2i$ ហើយ $,z^2-2\sqrt{3}.z+4=0\ \ ,\Delta'=3-4=-1=i^2$

នាំអោយ $z_1=\sqrt{3}+i\ \ ,z_2=\sqrt{3}-i$ ។

## លំហាត់ទី១១

ចូរគណនាលីមីត :

ក. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x + x\sin 2009x}{x^2}$

ខ. $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2+(a-1)x+3-3a}{x^2-4x+3}$

## ដំណោះស្រាយ

ក. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x + x\sin 2009x}{x^2}$ ដោយ $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x + x\sin 2009x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(2.\frac{\sin^2 x}{x^2}+\frac{\sin 2009x}{2009x}.2009\right)$$

$$= 2+2009 = 2011.$$

ខ. $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2+(a-1)x+3-3a}{x^2-4x+3}$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x^3-3x^2)+(a-1)x-3(a-1)}{(x^2-x)-(3x-3)}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x^2(x-3)+(a-1)(x-3)}{x(x-1)-3(x-1)} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+a-1)}{(x-1)(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x^2+a-1}{x-1} = \frac{9+a-1}{3-1} = \frac{a+8}{2}.$$

## លំហាត់ទី១២

គេអោយអនុគមន៏ $f(x)=x^3-6x^2+9x-3$

ក.បង្ហាញថាមានតំលៃ $x_0$ ដែល $1<x_0<2$ ហើយ $f(x_0)=0$ ។

ខ.គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។

សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក-បង្ហាញថាមានតំលៃ $x_0$ ដែល $1<x_0<2$ ហើយ $f(x_0)=0$

$f(x)$ ជាអនុគមន៏កំនត់ជាប់លើ IR

គេមាន $f(1)=1^3-6.1^2+9.1-3=1$ និង $f(2)=2^3-6.2^2+9.2-3=-1$

ដោយ $f(1).f(2)=-1<0$ តាមទ្រឹស្តីបទតំលៃកណ្តាលមានតំលៃ $x_0$

ដែល $1<x_0<2$ ហើយ $f(x_0)=0$ ។

ខ-គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

យើងបាន $f'(x)=3x^2-12x+9$

សមីការ $f'(x)=3x^2-12x+9=0$ មានឫស $x_1=1\ ,x_2=3$ ។

| $x$ | $-\infty$ | 1 | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | | |

**តាមតារាងខាងលើគេបាន**

**$f'(x) > 0$ ចំពោះ $x \in \left]-\infty\ ,\ 1\right[ \cup \left]3\ ,\ +\infty\right[$**

**$f'(x) < 0$ ចំពោះ $x \in \left]1\ ,\ 3\right[$ ។**

**សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$**

**គេមាន $f(1) = 1$ និង $f(3) = -3$**

| x | $-\infty$ | | 1 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | | | | | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

## លំហាត់ទី១៣

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{3x+1}$ កំនត់លើ $\left[-\frac{1}{3},+\infty\right[$

ក. ចំពោះគ្រប់ $x\in[1,5]$ ចូរបង្ហាញថា $\frac{3}{8}\leq f'(x)\leq\frac{3}{4}$ ។

ខ. ដោយប្រើវិសមភាពកំណើនមានកំនត់ទៅនឹងអនុគមន៍ $f$ ចំពោះគ្រប់

$x\in[1,5]$ ចូរបង្ហាញថា $\frac{3}{8}x+\frac{13}{8}\leq\sqrt{3x+1}\leq\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$

## ដំណោះស្រាយ

ក. ចំពោះគ្រប់ $x\in[1,5]$ បង្ហាញថា $\frac{3}{8}\leq f'(x)\leq\frac{3}{4}$

គេមាន $f(x)=\sqrt{3x+1}$ នាំឱ្យ $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

ចំពោះគ្រប់ $x\in[1,5]$ គេមាន $1\leq x\leq 5$ ឬ $4\leq 3x+1\leq 16$

$$\frac{1}{4}\leq\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\leq\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{8}\leq\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}\leq\frac{3}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{3}{8}\leq f'(x)\leq\frac{3}{4}}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[1,5]$ ។

ខ. បង្ហាញថា $\frac{3}{8}x+\frac{13}{8} \le \sqrt{3x+1} \le \frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$

ចំពោះគ្រប់ $x \in [1,5]$ គេមាន $\frac{3}{8} \le f'(x) \le \frac{3}{4}$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទវិសមភាពកំណើនមានកំនត់

ចំពោះ $x \ge 1$ គេមាន $\frac{3}{8}(x-1) \le f(x)-f(1) \le \frac{3}{4}(x-1)$

ដោយ $f(x)=\sqrt{3x+1}$

គេបាន $\frac{3}{8}x-\frac{3}{8} \le \sqrt{3x+1}-2 \le \frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$

នាំឱ្យ $\frac{3}{8}x+\frac{13}{8} \le \sqrt{3x+1} \le \frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\frac{3}{8}x+\frac{13}{8} \le \sqrt{3x+1} \le \frac{3}{4}x+\frac{5}{4}}$ ។

## លំហាត់ទី១៤

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=ax+2+b.\ln x$ កំនត់លើចន្លោះ $]0,+\infty[$

ចូរកំនត់ចំនួនពិត $a$ និង $b$ ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង $(c)$ តាងអនុគមន៍ $y=f(x)$

ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $(T): y=2x-3$ ត្រង់ចំនុច $A(1,-2)$ ។

## ដំណោះស្រាយ

កំនត់ចំនួនពិត $a$ និង $b$

ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង $(c)$ តាងអនុគមន៍ អនុគមន៍ $y=f(x)$ ប៉ះនឹងបន្ទាត់

$(T): y = 2x - 3$ ត្រង់ចំនុច $A(1,-2)$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} f'(1) = 2 \\ f(1) = -2 \end{cases}$

គេមាន $f(x) = ax + 2 + b\ln x$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \left]0,+\infty\right[$

គេបាន $f'(x) = (ax + 2 + b.\ln x)' = a + \dfrac{b}{x}$

គេបាន $\begin{cases} f'(1) = a + b = 2 \\ f(1) = a + 2 + b.\ln 1 = -2 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} b = 2 - a = 6 \\ a = -4 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a = -4 \quad , b = 6}$ ។

## លំហាត់ទី១៥

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x + \cos x - \sqrt{2}}{(\frac{\pi}{4} - x)^2} & \text{បើ } x \neq \dfrac{\pi}{4} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \text{បើ } x = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

ចូរសិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f$ ត្រង់ចំនុច $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$ ។

## ដំណោះស្រាយ

សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f$ ត្រង់ចំនុច $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$

គេមាន $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x + \cos x - \sqrt{2}}{(\frac{\pi}{4} - x)^2}$

តាង $t = \frac{\pi}{4} - x$ នាំឱ្យ $x = \frac{\pi}{4} - t$

កាលណា $x \to \frac{\pi}{4}$ នោះ $t \to 0$

គេបាន $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - t) + \cos(\frac{\pi}{4} - t) - \sqrt{2}}{t^2}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos t - \sin t\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\cos t + \sin\frac{\pi}{4}\sin t - \sqrt{2}}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t - \sqrt{2}}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{2}\cos t - \sqrt{2}}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{2}(\cos t - 1)}{t^2} = \frac{-2\sqrt{2}\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} . \lim_{t\to 0} \frac{\sin^2\frac{t}{2}}{(\frac{t}{2})^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = f(\frac{\pi}{4})$$

ដោយ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) = f(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

នាំឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x_0 = \frac{\pi}{4}$ ។

## លំហាត់ទី១៦

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=ax+b-\dfrac{\ln x}{x}$

ដែល $x>0$ ហើយ $a$ និង $b$ ជាចំនួនពិត។

ក-បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a$ និង $b$ ដែល $a\neq 0$ ខ្សែកោង $(C)$ តាងអនុគមន៍ $f(x)$ មានអាស៊ីមតូតទ្រេតមួយដែលគេនឹងបញ្ជាក់សមីការ ។

ខ-កំនត់ចំនួនពិត $a$ និង $b$ ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង $(C)$ តាងអនុគមន៍ $f(x)$ ប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ $(T): y=x+4$ ត្រង់ចំនុច $A(1,5)$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថាខ្សែកោង $(C)$ តាងអនុគមន៍ $f(x)$ មានអាស៊ីមតូតទ្រេតមួយ

គេមាន $f(x)=ax+b-\dfrac{\ln x}{x}$ ដែល $x>0$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $y=ax+b$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ$(C)$ ។

ដូចនេះ ខ្សែកោង $(C)$ តាងអនុគមន៍ $f(x)$ មានអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=ax+b$ ។

ខ.កំនត់ចំនួនពិត $a$ និង $b$

គេមាន $f(x)=ax+b-\dfrac{\ln x}{x}$

គេបាន $f'(x)=(ax+b)'-\dfrac{(\ln x)'.x-(x)'.\ln x}{x^2}=a-\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ ។

ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង $(C)$ តាងអនុគមន៍ $f(x)$ ប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ $(T): y=x+4$ ។

ត្រង់ចំនុច $A(1,5)$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} f'(x_A) = a_T \\ f(x_A) = y_A \end{cases}$

នាំឱ្យ $\begin{cases} a-1=1 \\ a+b=5 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a=2 \;\;, b=3}$ ។

**លំហាត់ទី១៧**

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{1-x^3}$ កំនត់គ្រប់ $x \neq 1$ ។

តើគេអាចបន្លាយអនុគមន៍ $f$ ឱ្យជាប់ត្រង់ចំនុច $x_0 = 1$ បានឬទេ ?

បើអាច ចូរកំនត់រកអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f(x)$

ត្រង់ចំនុច $x_0 = 1$ ។

**ដំណោះស្រាយ**

កំនត់រកអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់

គេមាន $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{1-x^3}$

តាង $t = 1-x$ នាំឱ្យ $x = 1-t$ ។

កាលណា $x \to 1$ នោះ $t \to 0$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin(\pi - \pi t)}{1-(1-t)^3}$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi t)}{1-1+3t-3t^2+t^3}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi t)}{t(3-3t+t^2)}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\cdot\frac{\pi}{3-3t+t^2} = \frac{\pi}{3}$$

ដោយ $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{\pi}{3}$ កំនត់ នោះគេអាចបន្លាយអនុគមន៍ $f(x)$ ឱ្យជាប់

ត្រង់ចំនុច $x_0 = 1$ ។

បើយើងតាង $g(x)$ ជាអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f(x)$

ត្រង់ចំនុច $x_0 = 1$

ដូចនេះ $g(x) = \begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{1-x^3} & \text{បើ } x \neq 1 \\ f(1) = \dfrac{\pi}{3} & \text{បើ } x = 1 \end{cases}$

## លំហាត់ទី១៨

គេឱ្យអនុគមន៍ពីរ

$F(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d).e^x$ និង $f(x) = x^3.e^x$ កំនត់លើ IR ។

កំនត់ចំនួនពិត $a, b, c$ និង $d$ ដើម្បីឱ្យ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$

**ដំណោះស្រាយ**

កំនត់ចំនួនពិត $\mathbf{a,b,c}$ និង $\mathbf{d}$

គេមាន $\mathbf{F(x)=(ax^3+bx^2+cx+d).e^x}$ និង $\mathbf{f(x)=x^3.e^x}$

ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{F(x)}$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $\mathbf{f(x)}$ លើ $\mathbf{IR}$ លុះត្រាតែ

$$\forall \mathbf{x}\in \mathbf{IR}:\mathbf{F'(x)=f(x)}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F'(x)}&=\mathbf{(ax^3+bx^2+cx+d)'.e^x+(e^x)'.(ax^3+bx^2+cx+d)}\\&=\mathbf{(3ax^2+2bx+c).e^x+e^x.(ax^3+bx^2+cx+d)}\\&=\mathbf{[ax^3+(3a+b)x^2+(2b+c)x+(c+d)].e^x}\end{aligned}$$

គេបាន $\mathbf{[ax^3+(3a+b)x^2+(2b+c)x+(c+d)].e^x=x^3.e^x}$

គេទាញ $\begin{cases}\mathbf{a=1}\\\mathbf{3a+b=0}\\\mathbf{2b+c=0}\\\mathbf{c+d=0}\end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases}\mathbf{a=1}\\\mathbf{b=-3}\\\mathbf{c=6}\\\mathbf{d=-6}\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{a=1\ ,b=-3\ ,c=6\ ,d=-6}}$ ។

## លំហាត់ទី១៩

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=ax+b-e^x$ មានក្រាបតំនាង $(c)$ ។
កំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង $(c)$ ប៉ះនឹងបន្ទាត់$(d): y=x+3$ ត្រង់ចំនុច $A(0,3)$ ។

## ដំណោះស្រាយ

កំនត់ចំនួនពិត a និង b

គេមាន $f(x)=ax+b-e^x$ នាំអោយ $f'(x)=a-e^x$

ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង $(c)$ ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $(d): y=x+3$ ត្រង់ចំនុច $A(0,3)$

លុះត្រាតែ :

$$\begin{cases} f'(0)=1 \\ f(0)=3 \end{cases} \text{ នាំអោយ } \begin{cases} a-1=1 \\ b-1=3 \end{cases} \text{ សមមូល } \begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{a=2 \ ,b=4}$ ។

## លំហាត់ទី២០

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=ax+b-x.\ln x$ មានក្រាបតំនាង $(c)$ ។
កំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង $(c)$ ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $(d): y=x+1$ ត្រង់ចំនុច $A(1,2)$ ។

## ដំណោះស្រាយ

កំនត់ចំនួនពិត a និង b

គេមាន $f(x) = ax + b - x.\ln x$

គេបាន $f'(x) = (ax + b - x\ln x)'$

$$= a - \ln x - 1$$

ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង $(c)$ ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $(d): y = x + 1$ ត្រង់ចំនុច $A(1,2)$

លុះត្រាតែ :

$\begin{cases} f'(1) = 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} a - 1 = 1 \\ a + b = 2 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a = 2 \ , b = 0}$ ។

## លំហាត់ទី២១

គេឱ្យអនុគមន៏ $f(x) = \dfrac{x^2 + mx + 4}{x^2 + 1}$

ដែល x ជាចំនួនពិត និង m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

ក. ចូរកំនត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៏ $f(x)$ មានតម្លៃបរមាត្រង់ចំនុច $x = 2$ ។

ខ. ចូរកំនត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៏ $f(x)$ មានតម្លៃបរមាតែមួយគត់ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក. កំនត់តម្លៃ $m$

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃបរមាត្រង់ចំនុច $x=2$ លុះត្រាតែ $f'(2)=0$

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2+mx+4}{x^2+1}$

តាមរូបមន្ត $\left(\dfrac{u}{v}\right)^{/}=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{(x^2+mx+4)'(x^2+1)-(x^2+1)'(x^2+mx+4)}{(x^2+1)^2}$

$$=\frac{(2x+m)(x^2+1)-2x(x^2+mx+4)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2x^3+2x+mx^2+m-2x^3-2mx^2-8x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-mx^2-6x+m}{(x^2+1)^2}$$

ចំពោះ $x=2$ គេបាន $f'(2)=\dfrac{-4m+12+m}{(4+1)^2}=\dfrac{12-3m}{25}=0$

នាំឱ្យ $\boxed{m=4}$ ។

ខ. កំនត់តម្លៃ $m$

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃបរមាតែមួយគត់លុះត្រាតែសមីការ

$f'(x)=0$ សមមូល $-mx^2+6x+m=0$ មានឬសតែមួយគត់

ពោលគឺត្រូវឱ្យ $m=0$ ។

## លំហាត់ទី២២

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{3x^2-7x+6}{(x-3)^2(x+1)}$

ក-សរសេរ $f(x)$ ជាទំរង់ $\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{C}{(x-3)^2}$

រួចគណនាតំលៃ $A,B$ និង $C$ ។

ខ-គណនា $\int_1^2 f(x).dx$ ដោយសរសេរចំលើយជាទំរង់ $a+\ln b$ ដែល $a$ និង$b$

ជាចំនួនសនិទាន ។

## ដំណោះស្រាយ

ក-សរសេរ $f(x)$ ជាទំរង់ $\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{C}{(x-3)^2}$

ដោយគេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{3x^2-7x+6}{(x-3)^2(x+1)}$ នោះគេបាន :

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}=\frac{3x^2-7x+6}{(x-3)^2(x+1)}$$

$$\frac{A(x-3)^2+B(x+1)(x-3)+C(x+1)}{(x+1)(x-3)^2}=\frac{3x^2-7x+6}{(x-3)^2(x+1)}$$

$$A(x-3)^2+B(x+1)(x-3)+C(x+1)=3x^2-7x+6 \quad (1)$$

**ចំពោះ $x=-1$ តាម (1) គេបាន :**

$16A=3+7+6=16$ **នាំឱ្យ** $A=1$ ។

**ចំពោះ $x=3$ តាម (1) គេបាន :**

$$A.(3-3)^2+B(3+1)(3-3)+C(3+1)=3(3)^2-7(3)+6$$

$4C=27-21+6=12$ **នាំឱ្យ** $C=3$ ។

**ចំពោះ $x=0$ តាម (1) គេបាន :**

$9A-3B+C=6$ **នាំឱ្យ** $B=2$ ។

**ដូចនេះ** $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-3}+\frac{3}{(x-3)^2}$

**ហើយ** $A=1, B=2$ **និង** $C=3$

**ខ-គណនា** $\int_1^2 f(x).dx$ **ដោយសរសេរចំលើយជាទំរង់** $a+\ln b$

**គេបាន** $\int_1^2 f(x).dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-3}+\frac{3}{(x-3)^2}\right).dx$

$$= \int_1^2 \left[ \frac{(x+1)'}{(x+1)} + 2.\frac{(x-3)'}{(x-3)} + 3.\frac{(x-3)'}{(x-3)^2} \right].dx$$

$$= \left[ \ln|x+1| + 2\ln|x-3| - \frac{3}{x-3} \right]_1^2$$

$$= [\ln 3 + 2\ln 1 + 3] - \left[ \ln 2 + 2\ln 2 + \frac{3}{2} \right]$$

$$= \ln 3 + 0 + 3 - 3\ln 2 - \frac{3}{2}$$

$$= \ln 3 - \ln 2^3 + \frac{6-3}{2} = \frac{3}{2} + \ln\frac{3}{8}$$

ដូចនេះ $\boxed{\int_1^2 f(x).dx = \frac{3}{2} + \ln\frac{3}{8}}$ ។

## លំហាត់ទី២៣

គេឲ្យអនុគមន៍ $g(x) = \frac{2x^2 - 5x - 1}{x^3 - x}$ ដែល $x \neq 0$ , $x \neq \mp 1$ ។

ក.កំនត់ចំនួនពិត $A, B$ និង $C$ ដើម្បីឲ្យ $g(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$

ខ.ចូរគណនា $I = \int g(x).dx$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក. កំនត់ចំនួនពិត $A, B$ និង $C$ ដើម្បីឲ្យ

$$g(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

យើងបាន $\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}=\frac{2x^2-5x-1}{x^3-x}$

ឬ $A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)=2x^2-5x-1$

បើ $x=0$ នោះ $-A=-1$ ឬ $A=1$

បើ $x=-1$ នោះ $2C=6$ ឬ $C=3$

បើ $x=1$ នោះ $2B=-4$ ឬ $B=-2$

ដូចនេះ $\boxed{A=1\ ,\ B=-2\ ,C=3}$ ។

ខ. គណនា $I=\int g(x).dx$

ចំពោះ $A=1\ ,B=-2\ ,C=3$

គេមាន $g(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}$

គេបាន ៖

$$I=\int\frac{dx}{x}-2\int\frac{dx}{x-1}+3\int\frac{dx}{x+1}$$

$$=\ln|x|-2\ln|x-1|+3\ln|x+1|+C$$

ដូចនេះ

$$\boxed{I=\int g(x).dx=\ln|x|-2\ln|x-1|+3\ln|x+1|+C}$$ ។

## លំហាត់ទី២៤

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2x^2+2x+1}{x^3+x^2}$ ដែល $x\neq 0$ និង $x\neq -1$

ក_កំនត់ចំនួនពិត $A , B , C$ ដើម្បីឲ្យ $f(x)=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x+1}$ ។

ខ_គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក.កំនត់ចំនួនពិត $A , B , C$

គេបាន $\dfrac{2x^2+2x+1}{x^3+x^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x+1}$

$$\frac{2x^2+2x+1}{x^2(x+1)}=\frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)}$$

$$2x^2+2x+1=(A+C)x^2+(A+B)x+B$$

គេទាញបាន $\begin{cases}A+C=2\\A+B=2\\B=1\end{cases}$ នាំឲ្យ $A=1 , B=1 , C=1$ ។

ដូចនេះ $\boxed{A=1 , B=1 , C=1}$ ។

ខ_គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $A=1 , B=1 , C=1$

គេបាន ៖

$$f(x)=\frac{2x^2+2x+1}{x^3+x^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}$$

យើងបាន $I=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}\right).dx=\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{x+1}$

ដូចនេះ $\boxed{I=\ln|x|-\frac{1}{x}+\ln|x+1|+C}$ ។

**លំហាត់ទី២៥**

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{3x^2-7x+6}{(x-3)^2(x+1)}$

ដែល $x\neq-1$ និង $x\neq3$ ។

ក_កំនត់បីចំនួនពិត $a, b, c$ ដើម្បីឲ្យ $f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-3}+\frac{c}{(x-3)^2}$

ខ_គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 f(x).dx$ ។

**ដំណោះស្រាយ**

កំនត់បីចំនួនពិត $a, b, c$

គេបាន $\frac{3x^2-7x+6}{(x-3)^2(x+1)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-3}+\frac{c}{(x-3)^2}$

ឬ $3x^2-7x+6=a(x-3)^2+b(x+1)(x-3)+c(x+1)$

ចំពោះ $x=-1$ គេបាន $16=16a$ នាំឲ្យ $a=1$

ចំពោះ $x=3$ គេបាន $12=4c$ នាំឲ្យ $c=3$

ចំពោះ $x=0$ គេបាន $6=9a-3b+c$ នាំឲ្យ $b=\dfrac{9a+c-6}{3}=2$

ដូចនេះ $\boxed{a=4\ ,\ b=2\ ,c=3}$ ។

ខ_គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 f(x).dx$

$$f(x)=\frac{3x^2-7x+6}{(x-3)^2(x+1)}=\frac{4}{x+1}+\frac{2}{x-3}+\frac{3}{(x-3)^2}$$

គេបាន $I=\int_0^1\left[\dfrac{4}{x+1}+\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{3}{(x-3)^2}\right].dx$

$$=\left[4\ln|x+1|+2\ln|x-3|-\frac{3}{x-3}\right]_0^1$$

$$=\left[4\ln 2+2\ln 2+\frac{3}{2}\right]-\left[4\ln 1+2\ln 3+1\right]$$

$$=6\ln 2+\frac{3}{2}-2\ln 3-1=\frac{1}{2}+2\ln\frac{8}{3}$$

ដូចនេះ $I=\int_0^1 f(x).dx=\dfrac{1}{2}+2\ln\dfrac{8}{3}$ ។

## លំហាត់ទី២៦

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់ និង មានដេរីវេត្រង់ចំនុច $x = c$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(c+h)-f^2(c-h)}{h} = 4f'(c).f(c)$

## ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(c+h)-f^2(c-h)}{h} = 4f'(c).f(c)$

តាង
$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{h\to 0}\frac{f^2(c+h)-f^2(c-h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{[f(c+h)-f(c-h)].[f(c+h)+f(c-h)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c-h)}{h}\times\lim_{h\to 0}[f(c+h)+f(c-h)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c-h)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(c+h)-f(c)]-[f(c-h)-f(c)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(c-h)-f(c)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(c+(-h))-f(c)}{(-h)} \\
&= f'(c)+f'(c) = 2f'(c)
\end{aligned}
$$

និង $\lim\limits_{h\to 0}[f(c+h)+f(c-h)] = f(c)+f(c) = 2f(c)$

នាំឱ្យ $L = 2f'(c)\times 2f(c) = 4f'(c).f(c)$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(c+h)-f^2(c-h)}{h} = 4f'(c).f(c)}$ ។

## លំហាត់ទី២៧

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{e^x}{ax+b}$ ដែល $a\neq 0, a, b\in IR$

ក-ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង $f''(x)$

ខ-កំនត់ចំនួនពិត $a$ និង $b$ ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ $e$ ចំពោះ $x=1$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង $f''(x)$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{(e^x)'(ax+b)-(ax+b)'e^x}{(ax+b)^2}$

$$=\frac{e^x(ax+b)-ae^x}{(ax+b)^2}=\frac{(ax+b-a).e^x}{(ax+b)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\dfrac{(ax+b-a).e^x}{(ax+b)^2}}$ ។

និង $f''(x)=\dfrac{[(ax+b-a)e^x]'(ax+b)^2-[(ax+b)^2]'(ax+b-a)e^x}{(ax+b)^4}$

$$=\frac{[ae^x+e^x(ax+b-a)](ax+b)^2-2a(ax+b)(ax+b-a)e^x}{(ax+b)^4}$$

$$=\frac{(ax+b)^2.e^x-2a(ax+b-a)e^x}{(ax+b)^3}=\frac{\left[(ax+b)^2-2a(ax+b-a)\right].e^x}{(ax+b)^3}$$

ដូចនេះ $\boxed{f''(x)=\dfrac{\left[(ax+b)^2-2a(ax+b-a)\right].e^x}{(ax+b)^3}}$ ។

ខ-កំនត់ចំនួនពិត a និង b

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ $e$ ចំពោះ $x=1$ លុះត្រាតែ

$$\begin{cases} f'(1)=0 \\ f(1)=e \\ f''(1)>0 \end{cases}$$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $\boxed{a=1\ \ ,b=0}$

**លំហាត់ទី២៨**

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំនត់លើ IR ដោយ $f(x)=\sin x$

ចូរបង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ f កំនត់ដោយ $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$

**ដំណោះស្រាយ**

បង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ f កំនត់ដោយ $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$

គេមាន $f(x)=\sin x$

គេបាន $f'(x)=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$ ( ព្រោះ $\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\sin\theta$ )

$$f''(x)=(x+\frac{\pi}{2})'\cos(x+\frac{\pi}{2})=\sin(x+\pi)$$

$$f'''(x)=(x+\pi)'\cos(x+\pi)=\sin(x+\frac{3\pi}{2})$$

..................................................................

ឧបមាថាវាពិតដល់ដេរីវេលំដាប់ទី n គឺ $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ដេរីវេលំដាប់ទី $(n+1)$ គឺ

$f^{(n+1)}(x)=\sin\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right)$ ពិត

យើងមាន $f^{(n+1)}(x)=(f^{(n)}(x))'$

ដោយ $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$

$$f^{(n+1)}{}'(x)=(x+\frac{n\pi}{2})'\cos(x+\frac{n\pi}{2})$$

$$=\sin(x+\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\sin\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})}$ ។

## លំហាត់ទី២៩

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{4x^2-x+1}{x^3+1}$ ដែល $x\neq -1$ ។

ក-កំនត់បីចំនួនពិត $a\,,b\,,c$ ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់ចំនួនពិត $a\,,b\,,c$

គេបាន $\frac{4x^2-x+1}{x^3+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}$

$$\frac{4x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{a(x^2-x+1)+(x+1)(bx+c)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$4x^2-x+1=ax^2-ax+a+bx^2+cx+bx+c$$

$$4x^2-x+1=(a+b)x^2+(-a+b+c)x+(a+c)$$

គេទាញបាន $\begin{cases}a+b=4\\-a+b+c=-1\\a+c=1\end{cases}$ នាំឱ្យ $a=2\ ,\ b=2\ ,c=-1$ ។

ដូចនេះ $\boxed{a=2\ ,\ b=2\ ,c=-1}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $a=2\ ,\ b=2\ ,c=-1$ គេមាន :

$$f(x)=\frac{4x^2-x+1}{x^3+1}=\frac{2}{x+1}+\frac{2x-1}{x^2-x+1}$$

គេបាន $I=\int(\ \frac{2}{x+1}+\frac{2x-1}{x^2-x+1}\ ).dx$

$$=\int\frac{2dx}{x+1}+\int\frac{(2x-1).dx}{x^2-x+1}$$

$$=2\int\frac{(x+1)'}{(x+1)}.dx+\int\frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}.dx$$

$$=2\ln|x+1|+\ln|x^2-x+1|+C$$

## លំហាត់ទី៣០

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{5x^2-14x+13}{(x+1)(x-3)^2}$ ដែល $x\neq -1$ និង $x\neq 3$ ។

ក-កំនត់បីចំនួនពិត $a , b , c$ ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-3}+\dfrac{c}{(x-3)^2}$

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់ចំនួនពិត $a , b , c$

គេបាន $\dfrac{5x^2-14x+13}{(x+1)(x-3)^2}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-3}+\dfrac{c}{(x-3)^2}$

$$\frac{5x^2-14x+13}{(x+1)(x-3)^2}=\frac{a(x-3)^2+b(x+1)(x-3)+c(x+1)}{(x+1)(x-3)^2}$$

$$5x^2-14x+13=ax^2-6ax+9a+bx^2-2bx-3b+cx+c$$

$$5x^2-14x+13=(a+b)x^2+(-6a-2b+c)x+(9a-3b+c)$$

គេទាញបាន $\begin{cases} a+b=5 \\ -6a-2b+c=-14 \\ 9a-3b+c=13 \end{cases}$

នាំឱ្យ $a=2 , b=3 , c=4$ ។

ដូចនេះ $\boxed{a=2 , b=3 , c=4}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $a=2$ , $b=3$ , $c=4$ គេមាន :

$$f(x)=\frac{5x^2-14x+13}{(x+1)(x-3)^2}=\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-3}+\frac{4}{(x-3)^2}$$

គេបាន $I=\int (\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-3}+\frac{4}{(x-3)^2}).dx$

$$=2\int\frac{dx}{x+1}+3\int\frac{dx}{x-3}+4\int\frac{dx}{(x-3)^2}$$

$$=2\ln|x+1|+3\ln|x-3|-\frac{4}{x-3}+c$$

## លំហាត់ទី៣១

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{x(1+x^4)}$ ដែល x ជាចំនួនពិតខុសពីសូន្យ ។

ក-ចូរកំនត់បីចំនួនពិត A ,B និង C ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\frac{A}{x}+\frac{Bx^3+C}{1+x^4}$

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$ ។

គ-ទាញរកអាំងតេក្រាល $J=\int\frac{4x^3\ln x.dx}{(1+x^4)^2}$

## ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់បីចំនួនពិត A , B , C

គេបាន $\frac{1}{x(1+x^4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx^3+C}{1+x^4}$

$$\frac{1}{x(1+x^4)}=\frac{A(1+x^4)+x(Bx^3+C)}{x(1+x^4)}$$

$$1 = A+Ax^4+Bx^4+Cx$$

$$1 = (A+B)\,x^4+Cx+A$$

គេទាញ $\begin{cases}A+B=0\\C=0\\A=1\end{cases}$ នាំឱ្យ $A=1\ ,\ B=-1\ ,\ C=0$ ។

ដូចនេះ $\boxed{A=1\ ,\ B=-1\ ,\ C=0}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $A=1\ ,\ B=-1\ ,\ C=0$

គេមាន $f(x)=\dfrac{1}{x(1+x^4)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x^3}{1+x^4}$

គេបាន $I=\int f(x).dx=\int\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x^3}{1+x^4}\right).dx=\int\dfrac{dx}{x}-\dfrac{1}{4}\int\dfrac{4x^3dx}{1+x^4}$

ដូចនេះ $\boxed{I=\ln|x|-\dfrac{1}{4}\ln(1+x^4)+C}$ ។

គ-ទាញរកអាំងតេក្រាល $J=\int\dfrac{4x^3\ln x.dx}{(1+x^4)^2}$

តាង $\begin{cases}u=\ln x\\dv=\dfrac{4x^3.dx}{(1+x^4)^2}\end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases}du=\dfrac{1}{x}.dx\\v=\int\dfrac{4x^3.dx}{(1+x^4)^2}=-\dfrac{1}{1+x^4}\end{cases}$

គេបាន $J=-\frac{\ln x}{1+x^4}-\int(-\frac{1}{1+x^4}).\frac{1}{x}.dx$

$$=-\frac{\ln x}{1+x^4}+\int\frac{dx}{x(1+x^4)}=-\frac{\ln x}{1+x^4}+I$$

ដោយ $I=\ln|x|-\frac{1}{4}\ln(1+x^4)+C$

ដូចនេះ $\boxed{J=-\frac{\ln x}{1+x^4}+\ln|x|-\frac{1}{4}\ln(1+x^4)+C}$ ។

## លំហាត់ទី៣២

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{e^{2x}+1}$ ដែល $x$ ជាចំនួនពិត ។

ក-ចូរកំនត់បីចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឱ្យ $f(x)=A+\frac{B.e^{2x}}{e^{2x}+1}$

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$ ។

គ-ទាញរកអាំងតេក្រាល $J=\int\frac{2xe^{2x}.dx}{(e^{2x}+1)^2}$

## ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់បីចំនួនពិត A , B

គេបាន $\frac{1}{e^{2x}+1}=A+\frac{B.e^{2x}}{e^{2x}+1}$

$$\frac{1}{e^{2x}+1}=\frac{A(e^{2x}+1)+B.e^{2x}}{e^{2x}+1}=\frac{(A+B)e^{2x}+A}{e^{2x}+1}$$

គេទាញ $\begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases}$ នាំឱ្យ $A=1\ ,\ B=-1$ ។

ដូចនេះ $\boxed{A=1\ ,\ B=-1}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $A=1\ ,\ B=-1$

គេមាន $f(x)=1-\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$

គេបាន $I=\int (1-\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}).dx=\int dx-\dfrac{1}{2}\int \dfrac{2e^{2x}.dx}{e^{2x}+1}=x-\dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+C$

ដូចនេះ $\boxed{I=x-\dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+C}$ ។

គ-ទាញរកអាំងតេក្រាល $J=\int \dfrac{2xe^{2x}.dx}{(e^{2x}+1)^2}$

តាង $\begin{cases} u=x \\ dv=\dfrac{2e^{2x}.dx}{(e^{2x}+1)^2} \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du=dx \\ v=\int \dfrac{2e^{2x}.dx}{(e^{2x}+1)^2}=-\dfrac{1}{e^{2x}+1} \end{cases}$

គេបាន $J=-\dfrac{x}{e^{2x}+1}+\int \dfrac{dx}{e^{2x}+1}=-\dfrac{x}{e^{2x}+1}+I$

ដោយ $I=x-\dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+C$

ដូចនេះ $\boxed{J=-\dfrac{x}{e^{2x}+1}+x-\dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+C}$ ។

## លំហាត់ទី៣៣

គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I=\int e^x\cos^2 x.dx$ និង $J=\int e^x\sin^2 x.dx$

ក-ចូរគណនា $I+J$ និង $I-J$

ខ-ទាញរក $I$ និង $J$

## ដំណោះស្រាយ

ក-គណនា $I+J$ និង $I-J$

គេបាន $I+J=\int e^x\cos^2 x.dx+\int e^x\sin^2 x.dx$

$$=\int (e^x\cos^2 x+e^x\sin^2 x).dx=\int e^x.dx$$

ដូចនេះ $\boxed{I+J=e^x+C_1}$ ។

គេបាន $I-J=\int e^x\cos^2 x.dx-\int e^x\sin^2 x.dx$

$$=\int (e^x\cos^2 x-e^x\sin^2 x).dx=\int e^x(\cos^2 x-\sin^2 x).dx$$

$$=\int e^x\cos 2x.dx$$

តាង $\begin{cases} u=e^x \\ dv=\cos 2x.dx \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du=e^x dx \\ v=\dfrac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

គេបាន $I-J=\dfrac{1}{2}e^x\sin 2x-\int \dfrac{1}{2}e^x\sin 2x.dx$

តាង $\begin{cases} u = \frac{1}{2}e^x \\ dv = \sin 2x.dx \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du = \frac{1}{2}e^x.dx \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$

គេបាន $I - J = \frac{1}{2}e^x \sin 2x - \left[ -\frac{1}{4}e^x \cos 2x + \frac{1}{4}\int e^x \cos 2x.dx \right]$

$$I - J = \frac{1}{2}e^x \sin 2x + \frac{1}{4}e^x \cos 2x - \frac{1}{4}\int e^x \cos 2x.dx$$

$$I - J = \frac{1}{2}(\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x)e^x - \frac{1}{4}(I - J)$$

$$\frac{5}{4}(I - J) = \frac{1}{2}(\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x)e^x$$

ដូចនេះ $\boxed{I - J = \frac{2}{5}(\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x)e^x + C_2}$ ។

ខ-ទាញរក I និង J

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\begin{cases} I + J = e^x + C_1 \\ I - J = \frac{2}{5}(\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x)e^x + C_2 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងលើនេះគេបាន :

$$I = \frac{1}{2}(1 + \frac{2}{5}\sin 2x + \frac{1}{5}\cos 2x)e^x + K_1$$

និង $J = \frac{1}{2}(1 - \frac{2}{5}\sin 2x - \frac{1}{5}\cos 2x)e^x + K_2$ ។

## លំហាត់ទី៣៤

គេឱ្យអាំងតេក្រាល :

$I = \int \frac{1+\cos x}{2+\sin x+\cos x}.dx$ និង $J = \int \frac{1+\sin x}{2+\sin x+\cos x}.dx$

ក-គណនា $I+J$ និង $I-J$

ខ-ទាញរក $I$ និង $J$

## ដំណោះស្រាយ

ក-គណនា $I+J$ និង $I-J$

គេបាន $I+J = \int \frac{1+\cos x}{2+\sin x+\cos x}.dx + \int \frac{1+\sin x}{2+\sin x+\cos x}.dx$

$$= \int \left(\frac{1+\cos x}{2+\sin x+\cos x} + \frac{1+\sin x}{2+\sin x+\cos x}\right).dx$$

$$= \int \frac{2+\cos x+\sin x}{2+\sin x+\cos x}.dx = \int dx = x + C_1$$

ដូចនេះ $\boxed{I+J = x + C_1}$ ។

គេបាន $I-J = \int \frac{1+\cos x}{2+\sin x+\cos x}.dx - \int \frac{1+\sin x}{2+\sin x+\cos x}.dx$

$$= \int \left(\frac{1+\cos x}{2+\sin x+\cos x} - \frac{1+\sin x}{2+\sin x+\cos x}\right).dx$$

$$= \int \frac{\cos x-\sin x}{2+\sin x+\cos x}.dx = \int \frac{(2+\sin x+\cos x)'}{2+\sin x+\cos x}dx$$

$$= \ln|2+\sin x+\cos x| + C_2$$

ដូចនេះ $\boxed{I - J = \ln|2+\sin x+\cos x| + C_2}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I$ និង $J$

គេមាន $\begin{cases} I + J = x + C_1 & (1) \\ I - J = \ln|2+\sin x+\cos x| + C_2 & (2) \end{cases}$

បូកសមីការ (1) និង (2) គេបាន :

$$2I = x + \ln|2+\sin x+\cos x| + C_1 + C_2$$

ដូចនេះ $\boxed{I = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln|2+\sin x+\cos x| + K_1}$ ដែល $K_1 = \frac{C_1 + C_2}{2}$

ដកសមីការ (1) និង (2) គេបាន :

$$2J = x - \ln|2+\sin x+\cos x| + C_1 - C_2$$

ដូចនេះ $\boxed{I = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln|2+\sin x+\cos x| + K_2}$ ដែល $K_2 = \frac{C_1 - C_2}{2}$

## លំហាត់ទី៣៥

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2}$

និង $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+t^2}.dt \quad , \ ( n \in IN )$

ក_ចូរគណនាតម្លៃនៃ $I_0$ រួច ស្រាយថា $(I_n)$ជាស្វ៊ីតចុះ។

ខ_ស្រាយបញ្ជាក់ថា $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ ។

គ_ទាញឲ្យបានថា $\frac{1}{3(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{3(n-1)}$ , $\forall n \ge 2$ ។

ទាញរកលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(n I_n)$។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក. គណនាតម្លៃនៃ $I_0$ រួច ស្រាយថា $(I_n)$ ជាស៊ីតចុះ

យើងបាន $I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{\frac{3}{4}+(\frac{1}{2}+t)^2}$

តាង $U = \frac{1}{2}+t$ នាំឱ្យ $dU = dt$

ហើយចំពោះ $\forall t \in [0,1]$ នោះ $U \in \left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

គេបាន $I_0 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dU}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + U^2} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2U}{\sqrt{3}}\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

ដូចនេះ $I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+t^2}.dt$ និង $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t+t^2}.dt$

ចំពោះគ្រប់ $t \in [0,1]$ គេមាន $t^{n+1} \le t^n$ នាំឱ្យ $\frac{t^{n+1}}{1+t+t^2} \le \frac{t^n}{1+t+t^2}$

គេទាញ $\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t+t^2}.dt \le \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+t^2}.dt$ ឬ $I_{n+1} \le I_n \ , \forall n \in IN$

ដូចនេះ $(I_n)$ ជាស្វ៊ីតចុះ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$

យើងបាន $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t+t^2} + \int_0^1 \frac{t^{n+1} dt}{1+t+t^2} + \int_0^1 \frac{t^{n+2} dt}{1+t+t^2}$

$$= \int_0^1 \frac{(t^n + t^{n+1} + t^{n+2})dt}{1+t+t^2} = \int_0^1 \frac{t^n(1+t+t^2).dt}{1+t+t^2}$$

$$= \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

ដូចនេះ $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ ។

គ. ទាញឱ្យបានថា $\frac{1}{3(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{3(n-1)} \ , \forall n \ge 2$

យើងមាន $(I_n)$ ជាស្វ៊ីតចុះ ។ តាមលក្ខណៈនៃស្វ៊ីតចុះយើងមាន :

$I_n + I_{n+1} + I_{n+2} \le 3I_n \le I_{n-2} + I_{n-1} + I_n$

ដោយ $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ នាំឱ្យ $I_{n-2} + I_{n-1} + I_n = \frac{1}{n-1}$

គេទាញ $\frac{1}{n+1} \le 3I_n \le \frac{1}{n-1}$

នាំឱ្យ $\frac{1}{3(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{3(n-1)}$ , $\forall n \ge 2$ ។

ទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\,I_n)$

មាន $\frac{1}{3(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{3(n-1)}$ , $\forall n \ge 2$

នាំឱ្យ $\frac{n}{3(n+1)} \le nI_n \le \frac{n}{3(n-1)}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(nI_n\right) = \frac{1}{3}$ ។

## លំហាត់ទី៣៦

គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I=\int x\cos^2 x.dx$ និង $J=\int x\sin^2 x.dx$

ក-ចូរគណនា $I+J$ និង $I-J$

ខ-ទាញរក $I$ និង $J$

## ដំណោះស្រាយ

ក-គណនា $I+J$ និង $I-J$

គេបាន $I+J=\int x\cos^2 x.dx+\int x\sin^2 x.dx$

$$=\int (x\cos^2 x+x\sin^2 x).dx=\int x(\cos^2 x+\sin^2 x).dx=\int x.dx$$

ដូចនេះ $\boxed{I+J=\frac{1}{2}x^2+C_1}$ ។

គេបាន $I-J=\int x\cos^2 x.dx-\int x\sin^2 x.dx$

$$=\int (x\cos^2 x-x\sin^2 x).dx=\int x(\cos^2 x-\sin^2 x).dx$$

$$=\int x\cos 2x.dx$$

តាង $\begin{cases}u=x\\ dv=\cos 2x.dx\end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases}du=dx\\ v=\frac{1}{2}\sin 2x\end{cases}$

គេបាន $I-J=\frac{1}{2}x\sin 2x-\int \frac{1}{2}\sin 2x.dx$

ដូចនេះ $I - J = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$ ។

ខ-ទាញរក $I$ និង $J$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\begin{cases} I + J = \frac{1}{2}x^2 + C_1 \\ I - J = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C_2 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងលើនេះគេបាន :

$$I = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x) + K_1$$

និង $J = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x) + K_2$ ។

## លំហាត់ទី៣៧

គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \frac{6x^2 - 22x + 18}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ ដែល $x \neq \{1, 2, 3\}$ ។

ក-កំនត់បីចំនួនពិត $a, b, c$ ដើម្បីឱ្យ $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x).dx$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក- កំនត់បីចំនួនពិត $a, b, c$

គេបាន $\frac{6x^2 - 22x + 18}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$

$$\frac{6x^2-22x+18}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{a(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-3)+c(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$6x^2-22x+18=a(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-3)+c(x-1)(x-2)$$

-ចំពោះ $x=1$ គេបាន $2=2a$ នាំឱ្យ $a=1$

-ចំពោះ $x=2$ គេបាន $-2=-b$ នាំឱ្យ $b=2$

-ចំពោះ $x=3$ គេបាន $6=2c$ នាំឱ្យ $c=3$

ដូចនេះ $\boxed{a=1\ ,\ b=2\ ,\ c=3}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$

ចំពោះ $a=1, b=2\ , c=3$

គេមាន $f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}$

គេបាន $I=\int(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}).dx$

$$=\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{x-2}+3\int\frac{dx}{x-3}$$

$$=\ln|x-1|+2\ln|x-2|+3\ln|x-3|+C$$

ដូចនេះ $\boxed{I=\int f(x).dx=\ln|x-1|+2\ln|x-2|+3\ln|x-3|+C}$

## លំហាត់ទី៣៨

គេមានអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x.dx$ និង $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x.dx$

ក-ចូរគណនា $I+J$ និង $I-J$ ។

ខ-ទាញរកតម្លៃនៃ $I$ និង $J$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក-គណនា $I+J$ និង $I-J$

យើងបាន $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x.dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x.dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2 x+\sin^2 x).dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=\frac{\pi}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{I+J=\frac{\pi}{4}}$ ។

យើងបាន $I-J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x.dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x.dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2 x-\sin^2 x).dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin 0=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{I-J=\frac{1}{2}}$ ។

ខ-ទាញរកតម្លៃនៃ I និង J

គេមាន $\begin{cases} I+J=\frac{\pi}{4} \\ I-J=\frac{1}{2} \end{cases}$ នាំឱ្យ $I=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$ និង $J=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$ ។

## លំហាត់ទី៣៩

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{2x+1}{x(x+1)}$ ដែល $x\neq -1$ និង $x\neq 0$ ។

ក-កំនត់បីចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^3 f(x).dx$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក- កំនត់បីចំនួនពិត A និង B

គេបាន $\frac{2x+1}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$ នាំឱ្យ $2x+1=A(x+1)+Bx$

-ចំពោះ $x=0$ នាំឱ្យ $1=A$ ឬ $A=1$

-ចំពោះ $x=-1$ នាំឱ្យ $-1=-B$ ឬ $B=1$

ដូចនេះ $\boxed{A=1\ ,\ B=1}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^3 f(x).dx$

ចំពោះ $A=1$ , $B=1$ គេមាន $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$

គេបាន $I=\int_1^3(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}).dx=\left[\ln|x|+\ln|x+1)\right]_1^3=\left(\ln 3+\ln 4\right)-\left(\ln 1+\ln 2\right)$

ដូចនេះ $\boxed{I=\ln 12-\ln 2=\ln 6}$ ។

**<u>លំហាត់ទី៤០</u>**

គេមានអាំងតេក្រាល $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}$ និង $J=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^3 x}$

ក-កំនត់ពីរចំនួនពិត $a, b$ ដើម្បីឱ្យ $\frac{1}{\sin x}=\frac{a\sin x}{1+\cos x}+\frac{b\sin x}{1-\cos x}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I$ រួចទាញរកតម្លៃ $J$ ។

**<u>ដំណោះស្រាយ</u>**

ក- កំនត់បីចំនួនពិត $a, b$

យើងបាន $\frac{1}{\sin x}=\frac{a\sin x}{1+\cos x}+\frac{b\sin x}{1-\cos x}$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{a\sin x(1-\cos x) + b\sin x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$
$$\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x(a - a\cos x + b + b\cos x)}{\sin^2 x}$$
$$\frac{1}{\sin x} = \frac{(a+b)-(a-b)\cos x}{\sin x}$$

គេទាញបាន $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=0 \end{cases}$ នាំឱ្យ $a = b = \frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{a = \frac{1}{2} , \, b = \frac{1}{2}}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល I រួចទាញរកតម្លៃ J

ចំពោះ $a = \frac{1}{2} , \, b = \frac{1}{2}$

គេមាន $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2}\frac{\sin x}{1-\cos x} + \frac{1}{2}\frac{\sin x}{1+\cos x}$

គេបាន $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\frac{\sin x}{1-\cos x} + \frac{1}{2}\frac{\sin x}{1+\cos x}\right).dx$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1-\cos x}.dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}.dx$$

$$I=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\cos x)'}{(1-\cos x)}.dx-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\cos x)'}{(1+\cos x)}.dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln|1-\cos x|\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\left[\ln|1+\cos x|\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln 1-\ln(1-\frac{1}{\sqrt{2}})\right]-\frac{1}{2}\left[\ln 1-\ln(1+\frac{1}{\sqrt{2}})\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\ln(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}})+\ln(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}})\right]$$

$$=\frac{1}{2}\ln(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1})=\ln(\sqrt{2}+1)$$

ដូចនេះ $\boxed{I=\ln(1+\sqrt{2})}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $J=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^3 x}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}.\frac{dx}{\sin^2 x}$

តាង $\begin{cases}u=\dfrac{1}{\sin x}\\ dv=\dfrac{dx}{\sin^2 x}\end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases}du=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}\\ v=\int\dfrac{dx}{\sin^2 x}=-\cot x=-\dfrac{\cos x}{\sin x}\end{cases}$

គេបាន $J=\left[-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}.dx$

$$J=\sqrt{2}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x}.dx=\sqrt{2}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^3 x}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}$$

$J=\sqrt{2}-J+I$ នាំឱ្យ $J=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{I}{2}$ ដោយ $I=\ln(1+\sqrt{2})$

ដូចនេះ $\boxed{J=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})}$ ។

## លំហាត់ទី៤១

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{e^{4x}+1}{(e^{2x}+1)^2}$ ដែល $x$ ជាចំនួនពិត ។

ក-កំនត់បីចំនួនពិត $A$ , $B$ ដើម្បីឱ្យ $f(x)=A+\frac{B.e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{1}{2}}f(x).dx$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក- កំនត់បីចំនួនពិត $A , B$

គេមាន $f(x)=\frac{e^{4x}+1}{(e^{2x}+1)^2}=\frac{(e^{4x}+2e^{2x}+1)-2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}=\frac{(e^{2x}+1)^2-2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

$$f(x)=1-\frac{2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}=A+\frac{Be^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{A=1\ ,\ B=-2}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{1}{2}}f(x).dx$

គេមាន $f(x)=1-\dfrac{2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

គេបាន $I=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}[1-\frac{2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}].dx$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}dx-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(e^{2x}+1)'}{(e^{2x}+1)^2}.dx$$

$$=\frac{1}{2}-\left[-\frac{1}{e^{2x}+1}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{e+1}-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{e+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{I=\dfrac{1}{e+1}}$ ។

## លំហាត់ទី៤២

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{2x^2+4x+3}{(x+1)(x+2)^2}$ ។

ក-កំនត់បីចំនួនពិត $A,B$ និង $C$ ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ អាចសរសេរជារាង

$f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 f(x).dx$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់បីចំនួនពិត $A,B$ និង $C$

គេមាន $f(x)=\frac{2x^2+4x+3}{(x+1)(x+2)^2}$ និង $f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$

គេបាន $\frac{2x^2+4x+3}{(x+1)(x+2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$

$$\frac{2x^2+4x+3}{(x+1)(x+2)^2}=\frac{A.(x+2)^2+B.(x+1)(x+2)+C.(x+1)}{(x+1)(x+2)^2}$$

$$2x^2+4x+3=A.(x+2)^2+B.(x+1)(x+2)+C.(x+1) \quad (1)$$

ចំពោះ $x=-1$ តាម $(1)$ គេបាន $2-4+3=A$ នាំឱ្យ $A=1$

ចំពោះ $x=-2$ តាម $(1)$ គេបាន $8-8+3=-C$ នាំឱ្យ $C=-3$

ចំពោះ $x=0$ តាម $(1)$ គេបាន $3=4A+2B+C$

នាំឱ្យ $B=\frac{3-4A-C}{2}=\frac{3-4+3}{2}=1$ ។

ដូចនេះ $\boxed{A=1\ \ ,B=1\ \ ,C=-3}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 f(x).dx$

ចំពោះ $A=1,B=1,C=-3$ គេបាន $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{3}{(x+2)^2}$

គេបាន $I=\int_0^1 f(x).dx=\int_0^1\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{3}{(x+2)^2}\right].dx$

$$I=\int_0^1\frac{1}{x+1}.dx+\int_0^1\frac{1}{x+2}.dx-3\int_0^1\frac{1}{(x+2)^2}.dx$$

$$I=\int_0^1\frac{(x+1)'}{(x+1)}.dx+\int_0^1\frac{(x+2)'}{(x+2)}.dx-3.\int_0^1\frac{(x+2)'}{(x+2)^2}.dx$$

$$I=\left[\ln|x+1|\right]_0^1+\left[\ln|x+2|\right]_0^1-3.\left[-\frac{1}{x+2}\right]_0^1$$

$$I=\left[\ln 2-\ln 1\right]+\left[\ln 3-\ln 2\right]+3\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right]$$

$$I=\ln 2-0+\ln 3-\ln 2+1-\frac{3}{2}$$

$$I=\ln 3-\frac{1}{2}=\frac{-1+2\ln 3}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{I=\int_0^1 f(x).dx=\frac{-1+2\ln 3}{2}}$ ។

## លំហាត់ទី៤៣

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ កំនត់លើ IR ។

ក-ចូរសរសេរ $f(x)$ ជារាង $f(x)=A+\dfrac{B.e^{-x}}{1+e^{-x}}$

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 f(x).dx$

ដោយសរសេរលទ្ធផលជារាង $a+\ln b$ ដែល $a$ និង $b$ ជាពីរចំនួនពិតត្រូវរក

## ដំណោះស្រាយ

ក- សរសេរ $f(x)$ ជារាង $f(x)=A+\dfrac{B.e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{(e^x+1)-2}{e^x+1}=1-\frac{2}{e^x+1}$$

$$=1-\frac{2e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)}=1-\frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

ដូចនេះ $f(x)=1+\dfrac{-2e^{-x}}{1+e^{-x}}$ ហើយ $A=1$ និង $B=-2$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 f(x).dx$

គេបាន $I=\int_0^1\left(1+\dfrac{-2e^{-x}}{1+e^{-x}}\right).dx$ ព្រោះ $f(x)=1+\dfrac{-2e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$$= \int_0^1 \left[1 + 2.\frac{(1+e^{-x})'}{(1+e^{-x})}\right].dx = \left[x + 2\ln(1+e^{-x})\right]_0^1$$

$$= \left[1 + 2\ln(1+e^{-1})\right] - \left[0 + 2\ln(1+1)\right] = 1 + 2\ln\left(\frac{e+1}{e}\right) - 2\ln 2$$

$$= 1 + 2\ln(e+1) - 2\ln e - 2\ln 2$$

$$= 1 + 2[\ln(e+1) - \ln 2] - 2 = -1 + 2\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

ដូចនេះ $I = \int_0^1 f(x).dx = -1 + 2\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$

ហើយ $a = -1$ និង $b = \frac{e+1}{2}$ ។

## លំហាត់ទី៤៤

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = (x^2 + x - 7).e^x$ កំនត់លើ IR ។

ក-កំនត់ចំនួនពិត $a, b$ និង $c$ ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $F(x) = (ax^2 + bx + c).e^x$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^3 f(x).dx$

## ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់ចំនួនពិត $a, b$ និង $c$

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ លុះត្រាតែ :

$\forall x \in IR : F'(x) = f(x)$

គេបាន $F'(x) = (ax^2 + bx + c)'.e^x + (e^x)'.(ax^2 + bx + c)$

$$= (2ax + b).e^x + e^x(ax^2 + bx + c)$$
$$= [ax^2 + (2a + b)x + (b + c)].e^x$$

ដោយ $F'(x) = f(x)$

នាំឱ្យ $[ax^2 + (2a + b)x + (b + c)].e^x = (x^2 + x - 7).e^x$

គេទាញបាន $\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 1 \\ b + c = -7 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -6 \end{cases}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{a = 1 \;\; , b = -1 \;\; , c = -6}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^3 f(x).dx$

ដោយ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ នោះគេបាន :

$$I = \int_0^3 f(x).dx = [F(x)]_0^3 = F(3) - F(0)$$

ចំពោះ $a = 1, b = -1, c = -6$ គេមាន $F(x) = (x^2 - x - 6).e^x$

គេបាន $F(3) = (9 - 3 - 6).e^3 = 0$ និង $F(0) = (0 - 0 - 6).e^0 = -6$

ដូចនេះ $I = 0 - (-6) = 6$ ។

## លំហាត់ទី៤៥

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$

ក-កំនត់ចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_2^5 f(x).dx$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់ចំនួនពិត a និង b

គេបាន $\frac{1}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A.(x+1)+B.(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$1=A.(x+1)+B.(x-1)$$

$$1=Ax+A+Bx-B$$

$$1=(A+B)x+(A-B)$$

គេទាញបាន $\begin{cases}A+B=0\\A-B=1\end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases}A=\frac{1}{2}\\B=-\frac{1}{2}\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{A=\frac{1}{2}\ ,B=-\frac{1}{2}}$ ។

ខ- គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_2^5 f(x).dx$

ចំពោះ $A=\frac{1}{2}\ \ ,B=-\frac{1}{2}$

គេបាន $f(x)=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}$

គេបាន $I=\int_2^5 f(x).dx$

$$=\int_2^5\left[\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}\right].dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_2^5\frac{1}{x-1}.dx-\frac{1}{2}.\int_2^5\frac{1}{x+1}.dx$$

$$=\frac{1}{2}.\int_2^5\frac{(x-1)'}{(x-1)}.dx-\frac{1}{2}.\int_2^5\frac{(x+1)'}{(x+1)}.dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln|x-1|\right]_2^5-\frac{1}{2}\left[\ln|x+1|\right]_2^5$$

$$=\frac{1}{2}[\ln 4-\ln 1]-\frac{1}{2}[\ln 6-\ln 3]$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2^2-0-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{6}{3}\right)=\ln 2-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}\ln 2=\ln\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $I=\int_2^5 f(x).dx=\ln\sqrt{2}$ ។

## លំហាត់ទី៤៦

គេដឹងថា $\int_0^{x^2} f(2t-1).dt = 4x^6$ ។

ចូររកអនុគមន៍ $f(x)$ ។

## ដំណោះស្រាយ

រកអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $\int_0^{x^2} f(2t-1).dt = 4x^6$

តាង $g(t) = f(2t-1)$ និង $G(t)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $g(t)$ ។

គេបាន $\int_0^{x^2} g(t).dt = 4x^6$

$$[G(t)]_0^{x^2} = 4x^6$$

$$G(x^2) - G(0) = 4x^6$$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃទំនាក់ទំនងនេះគេបាន :

$2x.G'(x^2) = 24x^5$ នាំឱ្យ $G'(x^2) = 12x^4$ ដោយ $G'(t) = g(t)$

គេទាញ $g(x^2) = 12x^4$ តែ $g(t) = f(2t-1)$

គេបាន $f(2x^2-1) = 12x^4$ តាង $2x^2 - 1 = y$ នាំឱ្យ $x^2 = \dfrac{y+1}{2}$

នាំឱ្យ $f(y)=12\left(\frac{y+1}{2}\right)^2=3(y+1)^2$ ។

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=3(x+1)^2}$ ។

**លំហាត់ទី៤៧**

១.ដោះស្រាយសមីការ $g''(x)-5g'(x)+6g(x)=0 \quad (E)$

២. កំនត់ចំលើយ $g(x)$ មួយនៃសមីការ $(E)$ ដែល $g(0)=0$ និង $g'(0)=1$

**ដំណោះស្រាយ**

១. ដោះស្រាយសមីការ $g''(x)-5g'(x)+6g(x)=0 \quad (E)$

មានសមីការសំគាល់ $r^2-5r+6=0$

ដោយ $\Delta=25-24=1$ នាំឱ្យមានឫស $r_1=\frac{5-1}{2}=2 \;, r_2=\frac{5+1}{2}=3$

តាមរូបមន្ត $g(x)=A.e^{r_1x}+B.e^{r_2x} \;, A,B\in IR$

ដូចនេះចំលើយសមីការជាអនុគមន៍ $g(x)=A.e^{2x}+B.e^{3x} \;, A,B\in IR$ ។

២. កំនត់ចំលើយ $g(x)$ មួយនៃសមីការ $(E)$ ដែល $g(0)=0$ និង $g'(0)=1$

គេមាន $g(x)=A.e^{2x}+B.e^{3x}$ នាំឱ្យ $g'(x)=2A.e^{2x}+3B.e^{3x}$

តាមបំរាប់គេមាន $\begin{cases} g(0)=0 \\ g'(0)=1 \end{cases}$

សមមូល $\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+3B=1 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{g(x)=-e^{2x}+e^{3x}}$ ។

## លំហាត់ទី៤៨

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-3y'+2y=0$

ដោយដឹងថា $y(0)=1\ , y'(0)=0$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលៈ

$(E): y''-3y'+2y=0$ មានសមីការសំគាល់ $r^2-3r+2=0$

ដោយ $a+b+c=0$ នាំឱ្យ $r_1=1\ , r_2=\frac{c}{a}=2$

តាមរូបមន្ត $y=Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$

គេបាន $y = A.e^{x} + B.e^{2x}$ និង $y' = A.e^{x} + 2B.e^{2x}$ , $A, B \in IR$

ដោយតាមបំរាប់គេមាន $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} A + B = 1 \\ A + 2B = 0 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \end{cases}$

ដូចនេះ $y = 2e^{x} - e^{2x}$ ជាចំលើយសមីការ ។

## លំហាត់ទី៤៩

គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-4y'+4y = 4x^{2} - 24x + 34$

ក-កំនត់ចំនួនពិត $a, b$ និង $c$ ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $y_{P}(x) = ax^{2} + bx + c$

ជាចំលើយដោយឡែកមួយរបស់សមីការ $(E)$ ។

ខ-បង្ហាញថាអនុគមន៍ $y = y_{P}(x) + y_{h}(x)$ ជាចំលើយទូទៅរបស់ $(E)$

លុះត្រាតែអនុគមន៍ $y_{h}(x)$ ជាចំលើយរបស់សមីការអូម៉ូសែន

$(E'): y''-4y'+4y = 0$ ។

គ-ដោះស្រាយសមីការ $(E')$ រួចទាញរកចំលើយទូទៅរបស់សមីការ $(E)$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក. កំនត់ចំនួនពិត $a,b$ និង $c$

$$(E): y''-4y'+4y = 4x^2 - 24x + 34$$

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $y_P(x) = ax^2 + bx + c$ ជាចំលើយដោយឡែកមួយ

របស់សមីការ $(E)$ លុះត្រតែអនុគមន៍ $y_p(x), y'_p(x)$ និង $y''_p(x)$

ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ $(E)$ ។

គេបាន$(E): y''_p(x) - 4y'_P(x) + 4y_p(x) = 4x^2 - 24x + 34$

ដោយ $\begin{cases} y_P(x) = ax^2 + bx + c \\ y'_p(x) = 2ax + b \\ y''_p(x) = 2a \end{cases}$

គេបាន $(2a) - 4(2ax + b) + 4(ax^2 + bx + c) = 4x^2 - 24x + 34$

នាំឱ្យ $4ax^2 + (4b - 8a)x + (2a - 4b + 4c) = 4x^2 - 24x + 34$

គេទាញបាន $\begin{cases} 4a = 4 \\ 4b - 8a = -24 \\ 2a - 4b + 4c = 34 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 4 \end{cases}$

ដូចនេះ $a = 1 \ , b = -4 \ , c = -4$ និង $y_P(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ ។

ខ-ការបង្ហាញ

អនុគមន៍ $y = y_P(x) + y_h(x)$ ជាចំលើយរបស់ $(E)$ លុះត្រាអនុគមន៍

$y, y', y''$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ ។

ដោយគេមាន $y' = y'_p(x) + y'_h(x)$ និង $y'' = y''_p(x) + y''_h(x)$

នោះគេបាន :

$$\left[y''_p(x) + y''_h(x)\right] - 4\left[y'_p(x) + y'_h(x)\right] + 4\left[y_p(x) + y_h(x)\right] = 4x^2 - 24x + 34$$

$$\left[y''_p(x) - 4y'_p(x) + 4y_p(x)\right] + \left[y''_h(x) - 4y'_h(x) + 4y_h(x)\right] = 4x^2 - 24x + 34 \quad (1)$$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន

$$y''_p(x) - 4y'_P(x) + 4y_p(x) = 4x^2 - 24x + 34 \quad (2)$$

( ព្រោះ $y_p(x)$ ជាចំលើយរបស់សមីការ $(E)$ ) ។

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេទាញបាន :

$$4x^2 - 24x + 34 + [y''_h(x) - 4y'_h(x) + 4y_h(x)] = 4x^2 - 24x + 34$$

$y''_h(x) - 4y'_h(x) + 4y_h(x) = 0$ ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $y_h(x)$

ជាចំលើយរបស់សមីការ $(E') : y'' - 4y' + 4y = 0$ ។

គ-ដោះស្រាយសមីការ $(E') : y'' - 4y' + 4y = 0$

សមីការសំគាល់ $r^2 - 4r + 4 = 0$ , $\Delta' = 4 - 4 = 0$

នាំឱ្យសមីការមានឬសឌុប $r_1 = r_2 = r_0 = 2$ ។

ដូចនេះចំលើយសមីការ $(E')$ ជាអនុគមន៍

$y_h(x) = (Ax + B).e^{2x}$ , $A, B \in IR$ ។

ទាញរកចំលើយទូទៅរបស់សមីការ $(E)$ ។

តាមសំរាយខាងលើចំលើយសមីការ $(E)$ គឺជាអនុគមន៍ទំរង់

$y = y_p(x) + y_h(x)$

ដោយគេមាន $y_p(x)=(x-2)^2$ និង $y_h(x)=(Ax+B).e^{2x}$

ដូចនេះ $y=(x-2)^2+(Ax+B).e^{2x}\quad ,A,B\in IR$

ជាចំលើយរបស់សមីការ ។

## លំហាត់ទី៥០

ក-ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E):f''(x)-f'(x)-6f(x)=0$

ខ-កំនត់អនុគមន៏ $y=f(x)$ ជាចំលើយមួយរបស់សមីការ $(E)$

បើគេដឹងថាខ្សែកោង $(C)$ តាង $f(x)$ ប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ $(T):y=-x+3$

ត្រង់ចំនុច $M(0,3)$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក-ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលៈ

$(E):f''(x)-f'(x)-6f(x)=0$

មានសមីការសំគាល់ $r^2-r-6=0$

$$\Delta=1+24=25 \text{ នាំឱ្យ } \left[\begin{array}{l} r_1=\dfrac{1-5}{2}=-2 \\ r_2=\dfrac{1+5}{2}=3 \end{array}\right.$$

សមីការមានចំលើយជាអនុគមន៏ $f(x)=A.e^{-2x}+B.e^{3x}\quad ,A,B\in IR$ ។

ខ-កំនត់អនុគមន៍ $y=f(x)$

បើ $y=f(x)$ ជាចំលើយរបស់សមីការ $(E)$ នោះគេបាន :

$(C): y=f(x)=A.e^{-2x}+B.e^{3x}$

និង $y'=f'(x)=-2A.e^{-2x}+3B.e^{3x}$ ។

ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង $(C)$ តាង $f(x)$ ប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ $(T): y=-x+3$

ត្រង់ចំនុច $M(0,3)$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} f'(0)=-1 \\ f(0)=3 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} -2A+3B=-1 \\ A+B=3 \end{cases}$

នាំឱ្យ $A=2$ , $B=1$ ។

ដូចនេះ $\boxed{y=f(x)=2e^{-2x}+e^{3x}}$ ។

## លំហាត់ទី៥១

គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+9y=0$

ក-ដោះស្រាយសមីការ $(E)$ ។

ខ-កំនត់អនុគមន៍ $f(x)$ ជាចំលើយមួយរបស់សមីការ $(E)$ បើគេដឹងថា :

$f(0)=\sqrt{3}$ , $f'(0)=3$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក-ដោះស្រាយសមីការ $(E)$

$(E): y''+9y=0$ មានសមីការសំគាល់ $r^2+9=0$

$r^2=-9$ នាំឱ្យ $r_1=-3i$ ឬ $r_2=3i$

គេទាញបាន $\alpha=0$ និង $\beta=3$ ។

ចំលើយសមីការជាអនុគមន៍ទំរង់ $y=(A\cos\beta x+B\sin\beta x).e^{\alpha x}$

ដូចនេះ $\boxed{y = A\cos 3x + B\sin 3x}$ ។

ខ-កំនត់អនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $f(x)=A\cos 3x+B\sin 3x$

នាំឱ្យ $f'(x)=-3A\sin 3x+3B\cos 3x$

ដោយ $f(0)=A.\cos 0+B.\sin 0=\sqrt{3}$ នាំឱ្យ $A=\sqrt{3}$

និង $f'(0)=-3A\sin 0+3B\cos 0=3$ នាំឱ្យ $B=1$ ។

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=\sqrt{3}\cos 3x+\sin 3x}$ ។

## លំហាត់ទី៥២

គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល : $y''-4y=8x-12 \quad (E)$

ក-កំនត់អនុគមន៍ $\varphi(x)=ax+b$ ជាចំលើយដោយឡែកមួយរបស់$(E)$ ។

ខ-រកចំលើយទូទៅរបស់សមីការ $(E)$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់អនុគមន៍ $\varphi(x)=ax+b$

គេមាន : $y''-4y=8x-12 \quad (E)$

បើ $\varphi(x)$ ជាចំលើយសមីការ $(E)$ នោះវាត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ $(E)$ ។

គេបាន $\varphi''(x)-4\varphi(x)=8x-12 \quad (E_1)$

ដោយ $\varphi(x)=ax+b$ នាំឱ្យ $\varphi'(x)=a$ និង $\varphi''(x)=0$

សមីការ $(E_1)$ អាចសរសេរ: $0-4(ax+b)=8x-12$

$$-4ax-4b=8x-12$$

នាំឱ្យ $\begin{cases}-4a=8\\ -4b=-12\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}a=-2\\ b=3\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{\varphi(x)=-2x+3}$ ។

ខ-រកចំលើយទូទៅរបស់សមីការ $(E)$

ដកសមីការ $(E)$ និង $(E_1)$ គេបាន $(y''-\varphi''(x))-4(y-\varphi(x))=0$

តាង $z=y-\varphi(x)$ នាំឱ្យ $z'=y'-\varphi'(x)$ និង $z''=y''-\varphi''(x)$

គេបាន $z''-4z=0$ មានសមីការសំគាល់ $r^2-4=0$

មានឬស $r_1=-2, r_2=2$ ។

សមីការមានចំលើយ $z=A.e^{-2x}+B.e^{2x}$ ដែល $A,B\in IR$

ដោយ $z=y-\varphi(x)$ នាំឱ្យ $y=\varphi(x)+z$

ដូចនេះ $y=-2x+3+A.e^{-2x}+B.e^{2x}\ \ ,A,B\in IR$ ។

## លំហាត់ទី៥៣

គេឱ្យប្រវែងប្រែប្រួលមួយ $MN$ ដែល $MN=f(x)$ ។

អនុគមន៍ $f(x)$ ជាចំលើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល :

$(E): f''(x)-2f'(x)+f(x)=0$ ។

ក-គណនាប្រវែង $MN$ បើគេដឹងថា $f(0)=2$ និង $f'(0)=1$ ។

ខ-កំនត់ប្រវែងអតិបរមានៃ $MN$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាប្រវែង

$(E): f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0$ មានសមីការសំគាល់ $r^2 - 2r + 1 = 0$

$\Delta' = 1 - 1 = 0$ សមីកាសំគាល់មានឫសឌុប $r_1 = r_2 = r_0 = -\dfrac{b'}{a} = 1$

ចំលើយសមីការ $(E)$ ជាអនុគមន៏ $f(x) = (Ax + B).e^x$

ដោយ $f(0) = (A.0 + B).e^0 = 2$ នាំឱ្យ $B = 2$

ហើយ $f'(x) = (Ax + B)'.e^x + (e^x)'.(Ax + B)$

$$= A.e^x + e^x.(Ax + B)$$

ដោយ $f'(0) = A.e^0 + e^0(A.0 + B) = 1$ នាំឱ្យ $A = -1$

នាំអោយចំលើយដោយឡែកនៃសមីការ $(E)$ គឺជាអនុគមន៏

$f(x) = (-x + 2).e^x$

ដូចនេះប្រវែង $MN = f(x) = (-x + 2).e^x$ ដែល $x < 2$ ។

ខ-កំនត់ប្រវែងអតិបរមានៃ MN

គេមាន $MN = f(x) = (-x + 2).e^x$ ដែល $x < 2$

គេបាន $f'(x) = (-x + 2)'.e^x + (e^x)'.(-x + 2)$

$$= -e^x + e^x(-x + 2) = (-x + 1).e^x$$

បើ $f'(0)=(-x+1).e^{x}=0$ នាំឱ្យ $x=1$ ។

ចំពោះ $x=1$ នាំឱ្យ $f(1)=(-1+2).e^{1}=e=2,71828$ ។

គណនាដេរីវេទីពីរ $f''(x)=-e^{x}+(-x+1)e^{x}=-xe^{-x}$

ដោយ $f''(1)=-e^{-1}<0$ នាំឱ្យអនុគមន៍មានអតិបរមាត្រង់ $x=1$ ។

ដូចនេះប្រវែងអតិបរមានៃ MN គឺ $MN_{max}=e=2,71828$

(ឯកតាប្រវែង) ។

## លំហាត់ទី៥៤

គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+4y=0$ ។

ក-ដោះស្រាយសមីការ $(E)$ ។

ខ-កំនត់អនុគមន៍ $f(x)$ ជាចំលើយមួយនៃសមីការ $(E)$ បើគេដឹងថា

$f(0)=1$ និង $f'(0)=2\sqrt{3}$ ។

គ-ចូរសរសេរអនុគមន៍ $f(x)$ ជារាង $f(x)=k.\cos(\omega x+\varphi)$

ដែល $k$ ,$\omega$ និង $\varphi$ ជាបីចំនួនពិត។

ឃ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{f^{2}(x)}$ ។

## ដំណោះស្រាយ

ក-ដោះស្រាយសមីការ $(E)$

$(E): y''+4y=0$ មានសមីការសំគាល់ $r^2+4=0$

នាំឱ្យ $r_1=-2i\ , r_2=2i$ គេទាញបាន $\alpha=0\ , \beta=2$ ។

ចំលើយសមីការ $(E)$ ជាអនុគមន៍ទំរង់ $y=(A\cos\beta x+B\sin\beta x).e^{\alpha x}$

ដូចនេះ $y=A\cos 2x+B\sin 2x$ ដែល $A,B\in IR$ ។

ខ-កំនត់អនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $f(x)=A\cos 2x+B\sin 2x$

នាំឱ្យ $f'(x)=-2A\sin 2x+2B\cos 2x$

ដោយ $f(0)=A.\cos 0+B.\sin 0=1$ នាំឱ្យ $A=1$

និង $f'(0)=-2A\sin 0+2B\cos 0=2\sqrt{3}$ នាំឱ្យ $B=\sqrt{3}$

ដូចនេះ $f(x)=\cos 2x+\sqrt{3}.\sin 2x$ ។

គ-សរសេរអនុគមន៍ $f(x)$ ជារាង $f(x)=k.\cos(\omega x+\varphi)$

គេមាន $f(x)=\cos 2x+\sqrt{3}.\sin 2x$ ដោយ $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

គេបាន $f(x)=\cos 2x+\tan\frac{\pi}{3}.\sin 2x$

$$= \cos 2x + \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}.\sin 2x = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}\left(\cos 2x \cos\frac{\pi}{3} + \sin 2x \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2.\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

ដូចនេះ $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = k.\cos(\omega x + \varphi)$

ឃ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{f^2(x)}$

ដោយគេមាន $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

គេបាន $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{4\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{4}.\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}$

តាង $u = 2x - \frac{\pi}{3}$ នាំឱ្យ $du = 2.dx$ ឬ $\frac{1}{2}.du = dx$

ចំពោះ $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ នាំឱ្យ $u \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$

គេបាន $I = \frac{1}{4}.\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{1}{2}.du}{\cos^2 u} = \frac{1}{8}.\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{1}{8}.[\tan u]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{8}\left(\sqrt{3} + \sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{f^2(x)} = \frac{\sqrt{3}}{4}}$ ។

## លំហាត់ទី៥៥

គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x + 1}.dx\ ,\ n \in IN$ ។

ក-គណនា $I_0 + I_1$ , $I_1$ រួចទាញរក $I_0$ ។

ខ-គណនា $I_n + I_{n+1}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

## ដំណោះស្រាយ

ក-គណនា $I_0 + I_1$ , $I_1$ រួចទាញរក $I_0$

យើងមាន $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}.dx$ , $I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}$

យើងបាន

$$I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}.dx + \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}.dx = \int_0^1 \frac{1+e^x}{e^x+1}.dx = \int_0^1 dx = 1$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}.dx = \int_0^1 \frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)}.dx = \left[\ln(e^x+1)\right]_0^1 = \ln(e+1) - \ln 2 = \ln\frac{e+1}{2}$$

ដោយ $I_0 + I_1 = 1$ នាំឱ្យ $I_0 = 1 - I_1 = 1 - \ln(\frac{e+1}{2})$ ។

ដូចនេះ $\boxed{I_0 + I_1 = 1\ ,\ I_1 = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)\ ,\ I_0 = 1 - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)}$ ។

ខ-គណនា $I_n + I_{n+1}$ ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងបាន $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1}.dx + \int_0^1 \frac{e^{(n+1)x}}{e^x+1}.dx$

$$= \int_0^1 \frac{e^{nx} + e^{(n+1)x}}{e^x + 1}.dx = \int_0^1 \frac{e^{nx}(1+e^x)}{e^x+1}.dx$$

$$= \int_0^1 e^{nx}.dx = \left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^1 = \frac{e^n - 1}{n}$$

ដូចនេះ $\boxed{I_n + I_{n+1} = \frac{e^n - 1}{n}}$ ។

## លំហាត់ទី៥៦

គេឱ្យអនុគមន៍ $f$ កំនត់លើ $IR - \{-1\}$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង:

$$x^2 f(x^3) + \frac{1}{(1+x)^2} f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 4x^3(1+x^4)^5$$

ចូរគណនាអាំងតេក្រាល: $I = \int_0^1 f(x).dx$ ។

## ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាល: $I = \int_0^1 f(x).dx$

តាង $x = t^3$ នាំឱ្យ $dx = 3t^2.dt$

ចំពោះ $x \in [\,0,1\,]$ នាំឱ្យ $t \in [\,0,1\,]$

គេបាន $I = \int_0^1 f(x).dx = \int_0^1 f(t^3).3t^2 dt$

នាំឱ្យ $\frac{1}{3} I = \int_0^1 t^2 f(t^3).dt \quad (1)$

ម្យ៉ាងទៀតបើគេតាង $x=\dfrac{1-t}{1+t}$ នាំឱ្យ $dx=-\dfrac{2dt}{(1+t)^2}$

ចំពោះ $x\in[\,0,1\,]$ នាំឱ្យ $t\in[1,0]$

គេបាន $I=\int_0^1 f(x).dx=\int_1^0 f\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right).(-\dfrac{2dt}{(1+t)^2})=2\int_0^1\dfrac{1}{(1+t)^2}f(\dfrac{1-t}{1+t}).dt$

គេទាញបាន $\dfrac{1}{2}I=\int_0^1\dfrac{1}{(1+t)^2}f(\dfrac{1-t}{1+t}).dt \quad (2)$

បូកទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន :

$$\frac{1}{3}I+\frac{1}{2}I=\int_0^1\left[t^2f(t^3)+\frac{1}{(1+t)^2}f(\frac{1-t}{1+t})\right].dt$$

តាមសម្មតិកម្មគេមាន $x^2f\left(x^3\right)+\dfrac{1}{(1+x)^2}f\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=4x^3\left(1+x^4\right)^5$

គេបាន $\dfrac{5}{6}I=\int_0^1 4t^3(1+t^4)^5.dt=\left[\dfrac{1}{6}(1+t^4)^6\right]_0^1=\dfrac{64}{6}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{63}{6}$

ដូចនេះ $\boxed{I=\int_0^1 f(x).dx=\dfrac{63}{5}}$ ។

## លំហាត់ទី៥៧

គេសន្មត់ថា f ជាអនុគមន៍មួយកំនត់លើ IR ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង៖

$f(x)+f(-x)=\sqrt{2-2\cos 2x}$ ។

ចូរគណនា $I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx$ ។

## ដំណោះស្រាយ

គណនា $I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx$

យើងមាន $I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} f(x).dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx$

តាង $x=-t$ នាំឱ្យ $dx=-dt$ និង ចំពោះ $x\in\left[-\frac{\pi}{3}\ ,\ 0\right]$

នាំឱ្យ $t\in\left[\frac{\pi}{3},0\right]$ ។

គេបាន $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} f(x).dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{0} f(-t).(-dt)=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(-t).dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(-x).dx$

គេទាញ $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(-x).dx+\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}[f(-x)+f(x)].dx$

ដោយ $f(x)+f(-x)=\sqrt{2-2\cos 2x}=\sqrt{4\sin^2 x}=2|\sin x|$

គេបាន $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2|\sin x|.dx=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x.dx=2[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{3}}=2\left(-\frac{1}{2}+1\right)=1$

ដូចនេះ $\boxed{I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx=1}$ ។

## លំហាត់ទី៥៨

ចូរបង្ហាញថា $\int_a^b f(x).dx=\int_a^b f(a+b-x).dx$

អនុវត្តន៍ ៖ ចូរគណនា $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\log_2(1+\sqrt{3}\tan x).dx$

## ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\int_a^b f(x).dx=\int_a^b f(a+b-x).dx$

តាង $x=a+b-t$ នាំឱ្យ $dx=-dt$ ចំពោះ $x\in[a,b]$ នាំឱ្យ $t\in[b,a]$

គេបាន $\int_a^b f(x).dx=\int_b^a f(a+b-t)(-dt)=\int_a^b f(a+b-t).dt$

ដូចនេះ $\boxed{\int_a^b f(x).dx=\int_a^b f(a+b-x).dx}$ ។

អនុវត្តន៍ ៖ គណនា $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log_2(1+\sqrt{3}\tan x).dx$

យើងបាន $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log_2\left[1+\sqrt{3}\tan(\frac{\pi}{3}-x)\right].dx$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log_2\left[1+\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}-\tan x}{1+\sqrt{3}\tan x}\right].dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log_2\left(\frac{1+\sqrt{3}\tan x+3-\sqrt{3}\tan x}{1+\sqrt{3}\tan x}\right).dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log_2\left(\frac{4}{1+\sqrt{3}\tan x}\right).dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[\log_2 4-\log_2(1+\sqrt{3}\tan x)\right].dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log_2 4.dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log_2(1+\sqrt{3}\tan x).dx = \frac{\pi}{3}\log_2 2^2 - I = \frac{2\pi}{3} - I$$

នាំឱ្យគេទាញបាន $\boxed{I = \frac{\pi}{3}}$ ។

## លំហាត់ទី៥៩

គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[0,1]$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$ ?

អនុវត្តន៍: ចូរគណនា $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x.dx}{1+\cos^2 x}$ ។

## ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$

តាង $x = \pi - t$ នាំឱ្យ $dx = -dt$

ចំពោះ $x \in [0,\pi]$ នាំឱ្យ $t \in [\pi, 0]$

គេបាន $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = -\int_{\pi}^{0} (\pi - t).f[\sin(\pi - t)].dt$

$$\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \int_0^{\pi} (\pi - t).f(\sin t).dt = \pi\int_0^{\pi} f(\sin t).dt - \int_0^{\pi} t.f(\sin t).dt$$

$$\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x).dx - \int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx$$

នាំឱ្យគេទាញបាន $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$ ។

អនុវត្តន៍: គណនា $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x.dx}{1+\cos^2 x}$

គេមាន $I=\int_0^{\pi}\frac{x.\sin x.dx}{1+\cos^2 x}=\int_0^{\pi}x.\frac{\sin x.dx}{2-\sin^2 x}=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x.dx}{2-\sin^2 x}$

តាង $z=\cos x$ នាំឱ្យ $dz=-\sin x.dx$

ហើយចំពោះ $x\in[0,\pi]$ នោះ $z\in[1,-1]$

គេបាន $I=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{-dz}{1+z^2}=\frac{\pi}{2}[\arctan z]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{4}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x.dx}{1+\cos^2 x}=\frac{\pi^2}{4}}$ ។

## លំហាត់ទី៦០

គេឱ្យ $f$ ជាអនុគមន៍គូលើ $[-a,a]$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_0^a f(x).dx$ , $q>0, q\neq 1$ ។

ខ. អនុវត្តន៍ ៖ គណនា $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+3^x}.dx$

## ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថា $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_0^a f(x).dx$ , $q>0, q\neq 1$ ។

គេមាន $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{-a}^{0}\frac{f(x).dx}{1+q^x}+\int_0^a\frac{f(x).dx}{1+q^x}$ $(1)$

តាង $x=-t$ នាំឱ្យ $dx=-dt$ និងចំពោះ $x\in[-a,0]$ នំាឱ្យ $t\in[a,0]$

គេបាន $\int_{-a}^{0}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=-\int_{a}^{0}\frac{f(-t).dt}{1+q^{-t}}=\int_{0}^{a}\frac{q^t.f(-t)dt}{1+q^t}=\int_{0}^{a}\frac{q^x f(-x).dx}{1+q^x}$

ដោយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍គូនោះ $f(-x)=f(x)\ ,\ \forall x\in[-a,a]$

គេទាញបាន $\int_{-a}^{0}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}\frac{q^x.f(x)}{1+q^x}.dx\ (2)$

យក (2) ទៅជួសក្នុង (1) គេបាន :

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}\frac{q^x.f(x).dx}{1+q^x}+\int_{0}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}\frac{(q^x+1)f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}f(x).dx$$

ដូចនេះ $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}f(x).dx\ ,\ q>0\ ,q\neq 1$ ។

ខ. អនុវត្តន៍ : គណនា $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+3^x}.dx$

ដោយ $\cos x$ ជាអនុគមន៍គូនោះគេបាន :

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x.dx=[\sin x]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=1-0=1$$ ។

ដូចនេះ $\boxed{I=1}$ ។

## លំហាត់ទី៦១

ក-គណនាអាំងតេក្រាលកំនត់ $I_n = \int_0^1 (1+x)^n.dx \quad ,n \in IN$ ។

ខ-ទាញបង្ហាញថា $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ..... + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

## ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាអាំងតេក្រាលកំនត់

$$I_n = \int_0^1 (1+x)^n.dx \quad ,n \in IN$$

$$= \left[\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.2^{n+1} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

ខ-ទាញបង្ហាញថា $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ..... + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

តាមរូបមន្តទ្វេធាញូតុនគេមាន :

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + .......... + C_n^n x^n$$

ធ្វើអាំងតេក្រាលកំនត់ក្នុងចន្លោះ $[0,1]$ នៃសមភាពនេះគេបាន :

$$\int_0^1 (1+x)^n.dx = \int_0^1 \left(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ..... + C_n^n x^n\right).dx$$

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \left[C_n^0 x + \frac{1}{2}C_n^1 x^2 + \frac{1}{3}C_n^2 x^3 + ...... + \frac{1}{n+1}C_n^n x^{n+1}\right]_0^1$$

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ........... + \frac{1}{n+1}C_n^n$$

ដូចនេះ $\boxed{C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ..... + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}}$ ។

## លំហាត់ទី៦២

គេមានស្វ៊ីត $(I_n)$ កំនត់ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ដោយ

$$I_n = \frac{1}{n!}.\int_0^1 (1-x)^n.e^x.dx$$

ក-ចូរគណនាតួ $I_1$ ។

ខ-ចូរបញ្ជាក់ $I_{n+1}$ ជាអនុគមន៍នៃ $I_n$ រួចទាញឱ្យបានថា $I_n = e - \sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{P!}\right)$

គ-ចូររកលីមីត $\lim_{n\to+\infty} I_n$ ។

ទាញថា $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}\right) = e = 2.71828$

## ដំណោះស្រាយ

ក-ចូរគណនាតួ $I_1$

គេមាន $I_1 = \frac{1}{1!}\int_0^1 (1-x)e^x.dx = \int_0^1 (1-x).e^x.dx$

តាង $\begin{cases} u = 1-x \\ dv = e^x dx \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du = -dx \\ v = e^x \end{cases}$

គេបាន $I = \left[(1-x)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x(-dx) = -1 + \left[e^x\right]_0^1 = e - 2$

ដូចនេះ $\boxed{I = e - 2}$ ។

ខ-បញ្ជាក់ $I_{n+1}$ ជាអនុគមន៍នៃ $I_n$

គេមាន $I_n = \frac{1}{n!}.\int_0^1 (1-x)^n.e^x.dx$

នាំឱ្យ $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}.\int_0^1 (1-x)^{n+1}.e^x dx$

តាង $\begin{cases} u = (1-x)^{n+1} \\ dv = e^x dx \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du = -(n+1)(1-x)^n \\ v = e^x \end{cases}$

គេបាន $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left[(1-x)^{n+1}e^x\right]_0^1 + \frac{n+1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-x)^n e^x.dx$

$$I_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x.dx = \frac{1}{(n+1)!} + I_n$$

ដូចនេះ $\boxed{I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}}$ ។

ទាញឱ្យបានថា $I_n = e - \sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{P!}\right)$

គេមាន $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$

ចំពោះ $n = 1\ :\ I_2 = I_1 - \frac{1}{2!}$

ចំពោះ $n = 2 : I_3 = I_2 - \frac{1}{3!}$

..................................................................

ចំពោះ $n = n-1 : I_n = I_{n-1} - \frac{1}{n!}$

ដោយធ្វើផលបូកទំនាក់ទំនងនេះអង្គ និង អង្គ គេបាន :

$I_n = I_1 - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - .... - \frac{1}{n!}$ ដោយ $I_1 = e - 2 = e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}$

ដូចនេះ $\boxed{I_n = e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - .... - \frac{1}{n!} = e - \sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right)}$ ។

គ-ចូររកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

ចំពោះ $x \in [0, 1]$ គេមាន $1 \le e^x \le e$ និង $(1-x)^n \ge 0$

គេបាន $(1-x)^n \le e^x(1-x)^n \le e(1-x)^n$

នាំឱ្យ $\frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n.dx \le \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x.dx \le \frac{e}{n!}\int_0^1 (1-x)^n.dx$

ដោយ $\int_0^1 (1-x)^n.dx = \left[-\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

គេទាញបាន $\frac{1}{n!(n+1)} \le I_n \le \frac{e}{n!(n+1)}$ ។

កាលណា $n \to +\infty$ នាំឱ្យ $\frac{1}{n!(n+1)} \to 0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$ ។

ទាញថា $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}\right) = e = 2.71828$

គេមាន $I_n = e - \sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right)$ នាំឱ្យ $\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right) = e - I_n$

គេបាន $\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right) = \lim_{n\to+\infty}(e - I_n) = e$ ព្រោះ $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}\right) = e = 2.71828}$ ។

# លំហាត់អនុវត្តន៍

**1**.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = x + iy$ ដែល $x$ និង $y$ ជាចំនួនពិត ។

ចូរកំនត់តម្លៃ $x$ និង $y$ បើគេដឹងថា ៖

$$\frac{5(1+i)}{2-i}.z + \frac{1+12i}{1+2i}.\overline{z} = \frac{7-11i}{1-i}$$

**2**.ក_គេឲ្យ $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ។

ចូរសរសេរ $z^9$ និង $z^{2009}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ.កំនត់ពីរចំនួនពិត $p$ និង $q$ ដើម្បីឲ្យ $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ជាឬស

របស់សមីការ $z^{2009} + pz^9 + q = 0$ ។

**3**.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = \sqrt{2-\sqrt{2}} + i.\sqrt{2+\sqrt{2}}$

ចូរសរសេរ $z^2$ និង $z$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួចទាញរកតម្លៃ

ប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{8}$ និង $\sin\frac{\pi}{8}$ ។

**4**.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = -\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $W = \frac{1+z^{2009}}{1-z}$

ចូរសរសេរ $z$ និង $W$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

5 .ដោះស្រាយសមីការ $z^2-2(1+i\sqrt{3})z-1+2i\sqrt{3}=0$

6 .គេតាង $z_1$ និង $z_2$ ជាឫសរបស់សមីការ $z^2-\sqrt{3}z+1=0$

ចូរគណនា $S=z_1^{2009}+z_2^{2009}$ ។

7 .ដោះស្រាយសមីការ $|1+z|+2z=9+8i$

8 .គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $\alpha=3+i\sqrt{3}$ និង $\beta=1+i\sqrt{3}$

គេតាង $Z_n=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)....(\alpha^{2^n}+\beta^{2^n})$ ។

ចូរកំនត់រកផ្នែកពិត និង ផ្នែកនិម្មិតនៃ $Z_n$ ។

9 .គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_n=\dfrac{1}{n^2+n-1+i.(2n+1)}$

ដែល $n\in IN$ ។

ក.កំនត់ពីរចំនួនពិត $A$ និង $B$ បើគេដឹងថា ៖

$$Z_n=\frac{A}{n+i}+\frac{B}{n+1+i}$$

ខ.គណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=0}^{n}(Z_k)=Z_0+Z_1+....+Z_n$

ដោយសរសេរលទ្ធផលជារាងពីជគណិត ។

10 .គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=-1+i\sqrt{2}$ ។

គេតាង $S_n=z^2+\overline{z}^n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ $n$ ។

ចូរបង្ហាញថា $S_{n+2}+2S_{n+1}+3S_n=0$ ។

**11** .គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $w=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{1-i}$

ចូរសរសេរ w ជាទម្រង់ពីជគណិត និង ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

រួចទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\dfrac{\pi}{12}$ និង $\sin\dfrac{\pi}{12}$ ។

**12** .គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច ៖

$$z=(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x})+i.(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x})$$

ដែល $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ ។

ចូរគណនាតម្លៃតូចបំផុតនៃម៉ូឌុលរបស់ z ។

**13** .គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច ៖

$$z=2(a+1)(2a-3)+i(a-4)(3a-2)$$

ដែល a ជាចំនួនពិត ។

ក.ចូរស្រាយថា $|z|=5(a^2-2a+2)$

ខ.ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(o,\vec{i},\vec{j})$ គេសន្មតថា M ជារូបភាពនៃ z ។

កំនត់ទីតាំង M ដើម្បីឲ្យចម្ងាយ OM ខ្លីបំផុត ។

14 .ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(o,\vec{i},\vec{j})$ គេឲ្យបួនចំនុច $A , B , C$ និង $D$ មានអាហ្វិករៀងគ្នា $-2+4i$ , $4-2i$ , $5-i$ និង $6+2i$ ។

ក.ចូរដៅចំនុច $A , B , C$ និង $D$ ។

ខ.ចូរស្រាយថាចតុកោណ $ABCD$ ចារិកក្នុងរង្វង់មួយ ។

15 .គេមានសមីការ $(E): 2z^4+3z^2+3\sqrt{3}z+9=0$

ក.បង្ហាញថាបើ $z_0$ ជាឬសរបស់សមីការ $(E)$ នោះ $\bar{z}_0$ ក៏ជាឬសរបស់សមីការ $(E)$ ដែរ ។

ខ.ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិចនូវសមីការ $(E)$ ដោយដឹងថាឬសមួយរបស់វាមានទម្រង់ $a(1+i)$ ដែល $a\in IR$ ។

16 .គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\dfrac{1}{2}+\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$

ក.បង្ហាញថា $\cos\dfrac{\pi}{5}-\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{1}{2}$

ខ.ចូរសរសេរ $z$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

17 .គេឲ្យសមីការ ៖

$$(E): z^3-(1+3i)z^2+(1+2i)z-3-3i=0$$

ក.កំនត់ចំនួនពិត $b$ ដើម្បីឲ្យ $z=i.b$ ជាឬសរបស់ $(E)$

ខ.ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិចនូវសមីការ (E) ។

**18**.ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(o,\vec{i},\vec{j})$ គេឲ្យចំនុច M មានអាហ្វិក z

ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $\left|\dfrac{z-2+2i}{z+1+i}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ។

ចូររក និងសង់សំណុំចំនុច M ។

**19**.គេឲ្យសមីការដឺក្រេទីពីរ ៖

$$(E): z^2-(\sqrt{3}-1+2i)z-\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}-i=0$$

ក.ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិចនូវសមីការ (E) ។

ខ.សរសេរឬសទាំងពីរនៃសមីការ (E)ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

**20**.គេឲ្យពហុធា $P(z)=\left(\dfrac{z^2+z-1}{2}\right)^{2009}$ ដែល z ជាចំនួនកុំផ្លិច។

ចូររកអនុគមន៍សំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(z)$ នឹង $z^2-z+1$

**21**.គេឲ្យសមីការ $(E): z^2+(4+4i)z+(7+32i)=0$

ក.កំនត់ឬស $z_1$ និង $z_2$ នៃសមីការ (E)ដែល $|z_1|<|z_2|$។

ខ.ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(o,\vec{i},\vec{j})$ គេតាង A,B,C ជារូបភាពរៀងគ្នា

នៃចំនួនកុំផ្លិច $i, z_1, z_2$ ។ ចូរដៅចំនុចទាំងនេះ ។

គ. $G$ ជាបារីសង់នៃប្រព័ន្ធ $(A;2),(B;-2)$ និង $(C;-1)$ ។

ចូររកអាហ្វិកនៃចំនុច $G$ ។

**22** . គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)$ កំនត់គ្រប់ $n \in IN$ ដោយ ៖

$u_0 = 0\ ;\ u_1 = 1$ និងទំនាក់ទំនង $u_{n+2} = \sqrt{3}u_{n+1} - 4u_n$

ក. គេតាង $z_n = u_{n+1} - \dfrac{\sqrt{3}-i}{2}.u_n$ គ្រប់ $n \in IN$ ។

ចូរស្រាយថា $z_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}.z_n$ រួចគណនា $u_n$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$ ។

ខ. ទាញរកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $(u_n)$ ។

**23** . គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត $(a_n)$ និង $(b_n)$ កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} a_0 = 1\ ;\ b_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n - b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \quad , \forall n \in IN \end{cases}$$

ក. តាង $z_n = a_n + i.b_n$ ។ ចូរស្រាយថា $z_{n+1} = (1+i)z_n$

ខ. ចូរសរសេរ $z_0$ និង $z_n$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ. ទាញរកតួ $a_n$ និង $b_n$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$ ។

24 .គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច $(z_n)$ កំនត់ដោយ ៖

$z_0 = 2$ និង $z_{n+1} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} z_n + \dfrac{\sqrt{2}-1-i}{\sqrt{2}}$

ដែល $n \in IN$ ។

ក.គេតាង $w_n = z_n - 1$ ។ ចូរស្រាយថា $w_{n+1} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} w_n$

ខ.ចូរសរសេរ $w_0$ និង $w_n$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ.ចូរសរសេរ $z_n$ ជាទម្រង់ $z_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$ ។

25 .គេឲ្យសមីការដឺក្រេទីពីរ $(E): az^2 + bz + c = 0$

ដែល $a \neq 0$ , $a , b , c \in IR$ ។សន្មតថា $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

នោះសមីការ $(E)$ មានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាដែលតាងដោយ

$z$ និង $\bar{z}$ ។ចំពោះគ្រប់ $n \in Z$ គេយក $S_n = z^n + \bar{z}^n$ ។

ចូរស្រាយថា $aS_{n+2} + bS_{n+1} + cS_n = 0$ ។

***អនុវត្តន៍*** ៖ ដោយមិនបាច់ពន្លាតចូរគណនាតម្លៃ

$M = (1 - i\sqrt{3})^7 + (1 + i\sqrt{3})^7$

$N = \dfrac{1}{(1 - i\sqrt{2})^5} + \dfrac{1}{(1 + i\sqrt{2})^5}$

**26**.គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 1 - 2i$ និង $z_2 = -1 + 3i$

តាង $\alpha$ និង $\beta$ រៀងគ្នាជាអាគុយម៉ង់នៃ $z_1$ និង $z_2$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ ។

**27**.គេឲ្យ $C_n = \sum_{k=1}^{n} (\cos k\theta)$ និង $S_n = \sum_{k=1}^{n} (\sin k\theta)$

ក.ចូរបង្ហាញថា $C_n + iS_n = \frac{1 - z^n}{1 - z}$

ដែល $z = \cos\theta + i.\sin\theta$ ។

ខ.ចូរស្រាយថា $\frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} . \left(\cos\frac{n\theta}{2} + i.\sin\frac{n\theta}{2}\right)$

គ.ទាញរកតម្លៃនៃ $C_n$ និង $S_n$ ។

**28**.គេឲ្យ $C_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\cos^k x}{\cos kx}\right)$ និង $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\sin^k x}{\cos kx}\right)$

ក.បង្ហាញថា $C_n + i.S_n$ ជាផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចមួយ ។

ខ.ទាញរកតម្លៃនៃ $C_n$ និង $S_n$ ។

**29**.គណនាផលបូក ៖

$$C_n=\sum_{p=0}^{n}\left(C_n^p\cos px\right) \text{ និង } S_n=\sum_{p=0}^{n}\left(C_n^p\sin px\right)$$

ដែល $C_n^p=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ ។

**30**.គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច $(z_n)$ កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} z_0=0\ ,\ z_1=1 \\ z_{n+2}=\dfrac{3+i}{2}z_{n+1}-\dfrac{1+i}{2}z_n\ ,\ \forall n\in IN \end{cases}$$

ក.គេតាង $w_n=z_{n+1}-z_n$ ។

ស្រាយថា $w_{n+1}=\dfrac{1+i}{2}.w_n$ រួចទាញថា $|w_n|=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

ខ.ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(o,\vec{i},\vec{j})$ គេហៅ $M_0,M_1,....,M_n$

ជាចំនុចមានអាហ្វិករៀងគ្នា $z_0,z_1,....,z_n$ ។

គេតាង $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\ \|\overrightarrow{M_kM_{k+1}}\|\ \right)$ ។ ចូររកលីមីត $\lim_{n\to+\infty}S_n$

**31**.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ $\alpha$ និង $\beta$ ដែល $|\alpha|=|\beta|=1$

និង $1+\alpha\beta\neq 0$ ។ បង្ហាញថា $\dfrac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}$ ជាចំនួនពិត ។

**32** .គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$

ក.រកចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n$ ដែលធ្វើឲ្យ $z^n$ ជាចំនួនពិត ។

គណនា $z^n$ ចំពោះតម្លៃតូចជាងគេនៃ $n$ ដែលបានរកឃើញ ។

ខ.គណនា $n$ ដើម្បីឲ្យ $z^n$ ជាចំនួននិម្មិតសុទ្ធ ។

**33** .គេឲ្យ $z$ ជាចំនួនកុំផ្លិចមានម៉ូឌុលស្មើ $1$ និងអាគុយម៉ង់ $\alpha$ ។

ចូរសរសេរ $Z=1+z+z^2$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

**34** .ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(o,\vec{i},\vec{j})$ ចំនុច $M$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច ៖

$z=\cos\theta+i.\sin\theta$ ដោយ $\theta\in]0;\pi[$ ។

ក.ចូររកសំណុំនៃចំនុច $M$ ។

ខ.ចំនុច $N$ មានអាហ្វិក $z_N=1+z$ ។

រកសំណុំចំនុច $N$ កាលណា $\theta$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $\theta\in]0;\pi[$ ។

**35** .គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=x+iy$ និង $Z=\frac{z+4i}{z-4i}$

ដែល $x$ និង $y$ ជាចំនួនពិត ។

តើ $x$ និង $y$ ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌយ៉ាងណាដើម្បីឲ្យ $Z$ ៖

ក.ទៅជាចំនួនពិត ខ.ទៅជាចំនួននិម្មិតសុទ្ធ ។

**36** .គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $|2z-\sqrt{3}+5i|=6$

ហើយ $M$ ជារូបភាពនៃ $z$ ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក.ចូររក និង សង់សំណុំនៃចំនុច $M$ ។

ខ.ចូរកំនត់ទីតាំងនៃចំនុច $M$ ដើម្បីឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z$ មានអាគុយម៉ង់អប្បបរមា រួចកំនត់រកអាគុយម៉ង់អប្បរមានោះ ។

**37** .គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $|z-8+6i|=5$

ហើយ $M$ ជារូបភាពនៃ $z$ ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

១.ចូររក និង សង់សំណុំនៃចំនុច $M$ ។

២.ចូរកំនត់ទីតាំងនៃចំនុច $M$ ដើម្បីឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z$ មានម៉ូឌុល ៖

ក_ អប្បបរមា ?                    ខ_អតិបរមា ?

**38** .ក្នុងប្លង់កុំផ្លិចគេឲ្យបីចំនុច $A$ , $M$ និង $M'$ មានអាហ្វិករៀងគ្នា $2+2i$ , $z$ និង $i.z$ ។

ចូរកំនត់សំណុំចំនុច $M$ ដោយដឹងថា $A,M,M'$រត់ត្រង់គ្នា ។

**39** .គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=x+i.y$ និង $Z=\dfrac{z-3}{z-1}$

ដែល $z\neq 1$ ; $x,y\in IR$ ។

គេហៅ $M$ ជាចំនុចមានអាហ្វិក $z$ និង $M'$ ជាចំនុចមានអាហ្វិក $Z$ ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក.កំនត់សំណុំចំនុច $M$ កាលណា $M'$ប្រែប្រួលលើអក្ស័ $(ox)$

ខ.កំនត់សំណុំចំនុច $M$ កាលណា $M'$ប្រែប្រួលលើអក្ស័ $(oy)$

**40**.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+i.\dfrac{2t}{1+t^2}$ ដែល $t\in IR$ ។

ក.ចូរបង្ហាញថាចំនួនកុំផ្លិច $z$ មានម៉ូឌុលថេរគ្រប់តម្លៃ $t$ ។

ខ.$M$ ជារូបភាពនៃ $z$ ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

ចូរកំនត់សំណុំចំនុច $M$ កាលណា $t$ ប្រែប្រួលតម្លៃ ។

**41**.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^3+2x^2+3x+4$

ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ ។

**42**.គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2x^4-3x^3+3x^2+3x-5}{x^2-1}$

ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ ។

**43**.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x+\sqrt[15]{x}-2}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[3]{x}-2}$ ។

ចូរគណនា $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ ។

44 .គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos 2x}$

ចូរគណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ $f(x)$ កាលណា $x$ ខិតទៅជិត $0$ ។

45 .គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\cos(\dfrac{\pi\cos 2x}{2})}{2x^2} & \text{បើ } x\neq 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{បើ } x=0 \end{cases}$

ចូរសិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រង់ចំនុច $x=0$ ។

46 .គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^3+ax+b}{x-1}$ ដែល $x\neq 1$

កំនត់ពីរចំនួនពិត $a$ និង $b$ ដើម្បីឲ្យ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$ ។

47 .គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x^2+2x-4}}$

48 .គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{mx^{m+1}-(m+1)x^m+1}{x^{n+1}-x^n-x+1}$

ដែល $m\in IN^*$ និង $n\in IN^*$ ។

ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ។

49 .គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=x+2x^2+3x^3+...+nx^n$

ក.គណនាតម្លៃ $f(1)$ ។

ខ.គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\dfrac{n(n+1)}{2}}{x-1}$ ។

50 .គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left( x\tan x-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$

51 .គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\cos(x\sin x)}{\pi-2x}$ ដែល $x\neq\dfrac{\pi}{2}$

ចូររកលីមីតនៃអនុគមន៍ $f$ កាលណា $x\to\dfrac{\pi}{2}$ ។

52 .គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\cos(\dfrac{\pi\cos x}{2})}{x^2}$ , $x\neq 0$

53 .ចូររកលីមីតនៃអនុគមន៍ $f$ កាលណា $x\to 0$ ។

54 .គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2x^2+3x-4)}{x^2-1}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan^2 x}-\cos 2x}{x^2}$

គ. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sqrt{2}\sin x}{\ln(\tan x)}$

**55**. គណនាលីមីត ៖

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}-\sqrt[4]{x^4+4x^3}\right)$

ខ. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+6x^2}-x\right)$

**56**. ចូរគណនាលីមីត ៖

ក. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1^2+2^2+3^2+....+n^2}{n^2}-\dfrac{n}{3}\right)$

ខ. $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+a)(1+a^2)(1+a^4)....(1+a^{2^n})\ ,\ 0<a<1$

**57**. គណនាលីមីត ៖

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2x}+...+\sqrt{x^2+nx}-nx\right)$

**58**. គេឲ្យអនុគមន៍ ៖

$$f_n(x)=\frac{\sqrt{6+\sqrt{6+....+\sqrt{6+\sqrt{6+x}}}}-3}{x-3}$$

មាន n ឫសការេ ។ ចូរគណនា $\lim\limits_{x\to3}f_n(x)$ ។

**59**. ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម ៖ ( nរ៉ាឌីកាល់)

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{2x+\sqrt{2x+....+\sqrt{2x+\sqrt{2x+3}}}}}{x-3}$$ ។

**60**.ចូរគណនា $S_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + .... + \frac{1}{n(n+2)}$

រួចគណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

**61**.គេឲ្យ $f$ ជាអនុគមន៍កំនត់ $\forall x \ge 0$ ដោយ ៖

$x - \frac{x^2}{2} \le f(x) \le x$ ។ គេតាង $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left[ f(\frac{k}{n^2}) \right]$

ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

**62**.គេឲ្យ $P_n = \frac{2^3-1}{2^3+1} \times \frac{3^3-1}{3^3+1} \times ..... \times \frac{n^3-1}{n^3+1}$

ចូរគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$ ។

**63**.គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)$ កំនត់ដោយ ៖

$u_1 = 1$ និង $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+4u_n^2}}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$

ចូរគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n}.u_n)$

**64**.គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត $(a_n)$ កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 4 \ , \forall n \in IN \end{cases}$$

ក.គេតាង $v_n = u_n - 12$ ។

ស្រាយថា $(v_n)$ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្ររួចគណនា $v_n$ជាអនុគមន៍$n$។

ខ.គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ដែល $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(v_k)$

**65**.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{បើ } x < 1 \\ 3x + 2 & \text{បើ } x \geq 1 \end{cases}$

ចូរកំនត់ចំនួនពិត $a$ និង $b$ ដើម្បីឲ្យ $f$ មានដេរីវេលើ $IR$

**66**.$f$ ជាអនុគមន៍កំនត់លើចន្លោះ $]0\,;+\infty[$ ដែល

$$f(x) = \begin{cases} ax + b + \dfrac{\ln x}{x} & \text{បើ } x \geq 1\,;\ a, b \in IR \\ 3x + 2 & \text{បើ } 0 < x < 1 \end{cases}$$

ចូរកំនត់ចំនួនពិត $a$ និង $b$ ដើម្បីឲ្យ $f$ មានដេរីវេត្រង់ $x = 1$

**67**.ចូរគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x) = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} + 1})$

**68**.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = e^{-2x} + (x+1)e^x$

ចូរស្រាយទំនាក់ទំនង $f^{(3)}(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0$

**69**.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x$

ក.បង្ហាញថាអនុគមន៍ $f$ មិនអាស្រ័យនឹង $x$ ។

ខ.រកលទ្ធផលនេះឡើងវិញដោយចាត់ទុកថា $f$ ជាអនុគមន៍អថេរ $x$។

**70**.គេឲ្យអនុគមន៍ $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$

ក.ចូររកដែនកំនត់នៃអនុគមន៍នេះ ។

ខ.ចំពោះគ្រប់ $x$ ក្នុងដែនកំនត់ចូរស្រាយថា $2xy'+(1+y)^2=0$

**71**.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\cos x$

ក.ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)\,;f''(x)$ និង $f^{(3)}(x)$ ។

ខ.ដោយធ្វើវិចារតាមកំនើនចូរស្រាយថាដេរីវេទី $n$ នៃអនុគមន៍នេះ

កំនត់ដោយ $f^{(n)}(x)=\cos(x+\dfrac{n\pi}{2})$ ។

**72**.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=e^x\sin x$

ក.គណនា $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា $f'(x)=\sqrt{2}e^x\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$

ខ.ដោយធ្វើវិចារតាមកំនើនចូរស្រាយថា ដេរីវេទី $n$ នៃអនុគមន៍នេះ

កំនត់ដោយ $f^{(n)}(x)=(\sqrt{2})^n e^x\sin(x+\dfrac{n\pi}{4})$

**73**.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=(x+1)e^{2x}$

ក.ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)\,;f''(x)$ និង $f^{(3)}(x)$ ។

ខ.ដោយធ្វើវិចារតាមកំនើនចូរស្រាយថាដេរីវេទី $n$ នៃអនុគមន៍នេះ

កំនត់ដោយ $f^{(n)}(x) = 2^n(x+1+\frac{n}{2})e^{2x}$ ។

74 .គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \ln x \;\; ; x > 0$

ដោយធ្វើវិចារតាមកំនើនចូរស្រាយថាដេរីវេទី $n$នៃអនុគមន៍នេះ

កំនត់ដោយ $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} . \frac{n!}{x^n}$ ។

75 .គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = (\cos x + \sqrt{3}\sin x)e^x$

ក.ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x) \,; f''(x)$ និង $f^{(3)}(x)$ ។

ខ.ដោយធ្វើវិចារតាមកំនើនចូរស្រាយថាដេរីវេទី $n$នៃអនុគមន៍ $f$

មានរាង $f^{(n)}\left(x\right) = (a_n \cos x + b_n \sin x)e^x$

ដែល $(a_n)$ និង $(b_n)$ ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតកំនត់លើ $IN*$

ដោយ $a_{n+1} = a_n + b_n$ និង $b_{n+1} = b_n - a_n$ ។

គ.គេតាង $z_n = a_n + i.b_n$ ។ បង្ហាញថា $z_{n+1} = (1-i)z_n$

រួចគណនា $z_n$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$ ។

ឃ.ទាញរក $a_n$ និង $b_n$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$ ។

ង.ទាញរកអនុគមន៍ $f^{(n)}(x)$

76 .គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+1}$ ។

សន្មតថាមានចំនួនពិត $\varphi\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ ដែល $f(\tan\varphi)=0$។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(\tan\varphi)=\sin 2\varphi+a\cos^2\varphi$ ។

77 .ចូរកំនត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $(c): y=f(x)=\dfrac{2e^x}{x+1}$

ត្រង់ចំនុចដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើ $0$ ។

78 .គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2x^2-9x+12}{x^2-3x+3}$

ដោយមិនប្រើដេរីវេចូររកតម្លៃបរមានៃអនុគមន៍នេះ ។

79 .គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{e^x}{ax+b}$ ដែល $a$ និង $b$ ជាចំនួនពិត

ក.គណនា $f'(x)$ និង $f''(x)$ ។

ខ.កំនត់ពីរចំនួនពិត $a$ និង $b$ ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f$ មានអប្បបរមា

ស្មើ $e$ ត្រង់ $x=1$ ។

80 .គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x}$ ដែល $x>0$

គណនាដេរីវេ $f'(x)$។បង្ហាញថា $f$ មានតម្លៃអតិបរិមាមួយត្រូវកំនត់។

81 .គេឲ្យអនុគមន៍ $g(x)=ax+1+b\ln x$ មានក្រាប $(H)$ ។
បន្ទាត់ $(D)$ មានសមីការ $y=x-1$ ។
កំនត់ចំនួនពិត $a$ និង $b$ ដើម្បីឲ្យបន្ទាត់$(D)$ប៉ះនឹងក្រាប $(H)$ ត្រង់ចំនុច $A(1;0)$ ។

82 .គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

ក.គណនា $f'(x)$ ។

ខ.ចំពោះគ្រប់ $x\in[\frac{3}{4};\frac{4}{3}]$ បង្ហាញថា $0.6\le f'(x)\le 0.8$

គ.ដោយប្រើវិសមភាពកំនើនមានកំនត់ចំពោះគ្រប់ $x\in[\frac{3}{4};\frac{4}{3}]$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{3x}{5}-\frac{9}{20}+\ln 2\le \ln(x+\sqrt{1+x^2})\le \frac{4x}{5}-\frac{3}{5}+\ln 2$$

83 .គេមានអនុគមន៍ $g:x\ \mapsto\ \sqrt{x+2}$ កំនត់លើ $[-2,+\infty[$
ដោយប្រើវិសមភាពកំនើនមានកំនត់បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x\in[-1;2]$

គេបាន $\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}\le\sqrt{x+2}\le\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ ។

84. $f$ ជាអនុគមន៍កំនត់លើ $[0\,;+\infty[$ ដោយ ៖

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x+1}{x^2}.e^{-\frac{1}{x}} & \text{បើ } x>0\\ 0 & \text{បើ } x=0\end{cases}$$

ក.គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ ។

តើគេអាចថាយ៉ាងណាចំពោះអនុគមន៍ $f$ ? ចំពោះក្រាបតាង $f$ ?

ខ.ចំពោះគ្រប់ $x\in]0\,,+\infty[$ បង្ហាញថា $f'(x)=\dfrac{1-x}{x^4}.e^{-\frac{1}{x}}$

គ.គូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f$ ។

85.ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $0<a\le b$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{b-a}{b}\le \ln b-\ln a\le \frac{b-a}{a}$$

86. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $0<a\le b<\dfrac{\pi}{2}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{b-a}{\cos^2 a}\le \tan b-\tan a\le \frac{b-a}{\cos^2 b}$$

87.ចំពោះគ្រប់ $x\in[-1\,;3\,]$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}\le \sqrt{2x+3}\le x+2$$ ។

**88**.ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j})$ គេឲ្យបន្ទាត់មានសមីការ ៖

$(d): y = 12 - 3x$ ។ $M$ ជាចំនុចស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ $(d)$

មានអាប់ស៊ីស $r$ ដែល $0 < r < 4$ ។

$P$និង $Q$ ជាចំណោលកែងនៃ $M$ រៀងគ្នាលើអក្ស័ $(ox)$

និង $(oy)$ ។ កំនត់តម្លៃរបស់ $r$ ដើម្បីឲ្យចតុកោណ $OPMQ$

មានផ្ទៃក្រឡាអតិបរមា។

**89**. ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j})$ គេឲ្យខ្សែកោងមានសមីការ

$(c): y = \frac{8}{x^2} + 2$ ។ $M$ ជាចំនុចស្ថិតនៅលើ $(c)$ មានអាប់ស៊ីស

$r$ ដែល $r > 0$ ។ $P$និង $Q$ ជាចំណោលកែងនៃ $M$

រៀងគ្នាលើអក្ស័ $(ox)$ និង $(oy)$ ។

កំនត់តម្លៃរបស់ $r$ ដើម្បីឲ្យចតុកោណ $OPMQ$មានផ្ទៃក្រឡា

អប្បបរមា ។

**90**.ផលបូកពីរចំនួនវិជ្ជមានស្មើ $120$ ។

កំនត់ពីរចំនួននេះដោយដឹងថាផលគុណរវាងចំនួនទីមួយនឹងការេនៃ

ចំនួនទីពីរមានតម្លៃអតិបរមា ។

**91**.គេឲ្យប៉ារ៉ាបូល $(P): y = x^2$ ហើយ $A$ , $B$ , $C$ ជាបីចំនុច ស្ថិតនៅលើ $(P)$។ គេដឹងថា $A$ និង $B$ ជាពីរចំនុចមាន អាប់ស៊ីសរៀងគ្នា $-1$ និង $2$ ហើយ$C$ ជាចំនុចមានអាប់ស៊ីស $r$ ដែល $-1 < r < 2$ ។

កំនត់ $r$ ដើម្បីឲ្យត្រីកោណ $ABC$ មានផ្ទៃក្រឡាអតិបរមា ។

**92**.ត្រីកោណកែងមួយមានបរិមាត្រ $6m$ ។

កំនត់ជ្រុងរបស់ត្រីកោណនេះដើម្បីឲ្យផ្ទៃក្រឡាវាអតិបរមា ?

**93**.ត្រីកោណ $ABC$ មួយមានបរិមាត្រ $6m$ និងមុំ $A = 60^o$ ។

កំនត់ជ្រុងរបស់ត្រីកោណនេះដើម្បីឲ្យផ្ទៃក្រឡាវាអតិបរមា ?

**94**.គេឲ្យប៉ារ៉ាបូល $(P): y = \dfrac{x^2}{2}$ និងចំនុច $A(6;0)$ ។

$M$ ជាចំនុចស្ថិតនៅលើ $(P)$ មានអាប់ស៊ីស $r$ ។ កំនត់តម្លៃ $r$ ដើម្បីឲ្យ $AM$ មានតម្លៃអប្បបរមា ?

**95**.គេឲ្យ $(P): y = 4x - x^2$ និង $(d): 2x + y = 12$ ។

$M$ ជាចំនុចស្ថិតនៅលើ $(P)$មានអាប់ស៊ីស $r$ ។

កំនត់តម្លៃ $r$ ដើម្បីឲ្យ $d(M;(d))$ មានតម្លៃអប្បបរមា ?

**96** .គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយដែលមានរង្វាស់ជ្រុង ៖

$AB = 10cm$ ; $BC = 8cm$ ; $CA = 6cm$ ។

$M$ ជាចំនុចមួយនៃ $[BC]$ ដែល $CM = x$ cm ។

គេតាង $T = 5MA + 4MB$ ។

ចូរកំនត់ $x$ដើម្បីឲ្យ $T$ មានតម្លៃតូចបំផុតរួចរកតម្លៃតូចបំផុតនៃ $T$ ?

**97** .កោនបរិវត្តន៍មួយចារិកក្រៅស្វ៊ែកាំ $R = 8cm$ ។តាង $r$ និង $h$ រៀងគ្នាជាកាំថាសបាតនិងកំពស់របស់កោណនេះ ។

កំនត់ $r$ និង $h$ ដើម្បីឲ្យកោននេះមានមាឌអប្បបរមា ?

**98** .ចូរកំនត់កំពស់របស់ស៊ីឡាំងត្រង់មួយដែលមានមាឌអតិបរមាហើយ អាចចារិកក្រៅស្វ៊ែមួយដែលមានកាំ $R = 4\sqrt{3}$ cm ។

**99** .កំនត់ចម្ងាយអប្បបរមាពីចំនុច $M(4;2)$ទៅប៉ារ៉ាបូល $y^2 = 8x$ ។

**100** .ចតុកោណកែងមួយចារិកក្នុងអេលីប $\dfrac{x^2}{400} + \dfrac{y^2}{225} = 1$

ហើយជ្រុងរបស់ចតុកោណនេះស្របជាមួយនឹងអក្ស័របស់អេលីប ។

ក.កំនត់វិមាត្ររបស់ចតុកោណនេះដើម្បីឲ្យវាមានផ្ទៃក្រឡាអតិបរមា ?

ខ.កំនត់វិមាត្ររបស់ចតុកោណនេះដើម្បីឲ្យវាមានបរិមាត្រអតិបរមា ?

**101.** គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$ កំនត់ចំពោះ $x>0$

ក. ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងបញ្ជាក់សញ្ញានៃ $f'(x)$ ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f$ ។

គ. ចូរទាញថាគ្រប់ $x\geq 1$ គេបាន $\ln x\geq \frac{2(x-1)}{x+1}$ ។

**102.** គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=e^{\frac{1}{2}x}-\frac{x}{2}-1$ កំនត់គ្រប់ $x\in IR$

ក. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f$ ។

គ. ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ ចូរបង្ហាញថា $e^{\frac{x}{2}}\geq\frac{x}{2}+1$ ។

**103.** គេមានអនុគមន៍ $f(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cos x$

ក. ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)\,;f''(x), f^{(3)}(x)$ និង $f^{(4)}(x)$ ។

ខ. ចំពោះគ្រប់ $x\geq 0$ ចូរបញ្ជាក់សញ្ញា $f^{(4)}(x)$ រួចទាញរកសញ្ញារបស់ $f^{(3)}(x)\,,f''(x)$ និង $f'(x)$ ។

គ.ទាញថាគ្រប់ $x \ge 0$ គេបាន $\cos x \le 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

**104** .គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - e^x$

ក.ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)\ ; f''(x), f^{(3)}(x)$ និង $f^{(4)}(x)$ ។

ខ.ចូរសិក្សាសញ្ញា $f^{(4)}(x)$ ។

ទាញរកសញ្ញារបស់ $f^{(3)}(x)\ , f''(x)$ និង $f'(x)$ ។

គ.ទាញថាគ្រប់ $x \in IR$ គេបាន ៖

$$e^x \ge 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

**105** .ក_ចំពោះគ្រប់ $x \ge 0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពខាងក្រោម ៖

$$x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$$

ខ_គេពិនិត្យស្វ៊ីត $P_n = (1 + \frac{1}{n^3})(1 + \frac{4}{n^3})....(1 + \frac{n^2}{n^3})$ ។

ដោយប្រើវិសមភាពខាងលើ ចូររកតម្លៃអមនៃ $\ln P_n$ ។

គ_ទាញរកលីមីតនៃ $P_n$ កាលណា $n \to +\infty$ ។

**106** .គេពិនិត្យស្វ៊ីត ៖

$$U_n = \sin(\frac{1}{n^2}) + \sin(\frac{2}{n^2}) + \sin(\frac{3}{n^2}) + ... + \sin(\frac{n}{n^2})$$

កំនត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n$ ។

ក.ចំពោះគ្រប់ $x \geq 0$ ចូរស្រាយថា $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ ។

ខ.ដោយប្រើវិសមភាពខាងលើនេះចូរសរសេរកន្សោមអមនៃ $U_n$ ។

គ.ទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ ។

**107** .គេមានស្វ៊ីត ៖

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (\frac{1}{n+k}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n+n}$$

ក.ចំពោះគ្រប់ $p \in IN^*$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{1}{p+1} \leq \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$$

ខ.ចូរសរសេរកន្សោមអមរបស់ $S_n$ រួចទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ ។

**108** .គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិតកំនត់គ្រប់ $n \in IN^*$ ដោយ ៖

$$S_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{9}} + ... + \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}})$$

ក.ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a$ និង $b$ ដែល $0<a\le b$

ចូរស្រាយថា $\frac{1}{3}.\frac{b-a}{\sqrt[3]{b^2}} \le \sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a} \le \frac{1}{3}.\frac{b-a}{\sqrt[3]{a^2}}$

ខ.គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

**109** .ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

**110** .គេឲ្យ $f$ ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ $f(x)=\frac{x^2+6x}{2(x^2-2x+2)}$ ។

(c) ជាក្រាបតំនាងនៃ $f$ នៅក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក.បញ្ជាក់ថា $f$ កំនត់ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ ។

ខ.គណនាលីមីតនៃ $f$ កាលណា $x$ ខិតទៅជិត $+\infty,-\infty$

រួចទាញថា(c)មានអាស៊ីមតូតមួយ។

គ.គណនា $f'(x)$រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា ។

ទាញថា $f$ មានធតិបរមាមួយ និង អប្បបរមាមួយរួចគណនាតម្លៃ

បរមាទាំងនោះ ។

ឃ.គូសតារាងអថេរភាពនៃ $f$ ។

ង.គណនាកូអរដោនេនៃចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (c) និងអក្ស័

ទាំងពីរនៃតំរុយនិងចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោងជាមួយនឹងអាស៊ីមតូតដេក

ច.គណនា $f(2)$ និង $f(3)$ ។ ចូរសង់ខ្សែកោង $(c)$ ។

**111**.គេឲ្យ $g(x)=\dfrac{4x-4}{x^2}$ , $x\neq 0$ ។ $(c)$ ជាក្រាបនៃ $g$ ។

ក.គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ , $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

រួចទាញរកអាស៊ីមតូតនៃ $(c)$។

ខ.គូសតារាងអថេរភាពនៃ $g$ ។

គ.បង្ហាញថា $(c)$ មានចំនុចរបត់មួយដែលគេនឹងរកកូអរដោនេវា ។

ឃ.គណនា $g(-4)$ , $g(-2)$ , $g(1)$ និង $g(4)$ ។

ង.សង់ខ្សែកោង $(c)$ នៅក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់ ។

**112**.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^3-6x^2+9x}{x^3-6x^2+9x-4}$ មានក្រាប $(c)$។

ក.ចូររកដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ $f$ ។

ខ.គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ , $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ។

ទាញបញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតដេកនៃ $(c)$ ។

គ.គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។

ឃ.គូសតារាងអថេរភាពនៃ $f$ រួចគូសក្រាប $(c)$ ។

**113** .១.អនុគមន៍ $h$ កំនត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x$ ដោយ $h(x) = e^{2x} - 2x - 1$

ហើយមានតារាងអថេរភាពដូចខាងក្រោម ៖

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | | |
| $h(x)$ | $+\infty \searrow$ | $0$ | $\nearrow +\infty$ |

ដោយប្រើតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $h$ ចូរបញ្ជាក់ថា $e^{2x} \geq 2x + 1$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x$ ។

២.$f$ ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ $f(x) = (x+1)(e^{-2x}+1)$ ចំពោះ

គ្រប់ចំនួនពិត $x$ និងមានក្រាប $(c)$ ។

ក_គណនា $f'(x)$ និង $f'(0)$ ។ បញ្ជាក់ថាដេរីវេ $f'(x)$ និង

អនុគមន៍ $h(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នាចំពោះគ្រប់ $x \neq 0$ ។

ខ_គណនា $f(0)$ ; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ។

សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f$ ។

គ_បង្ហាញថា $f(x) = x + 1 + (\frac{x}{e^x})(\frac{1}{e^x}) + (\frac{1}{e^x})^2$ ។

បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(D)$ មានសមីការ $y = x + 1$ ជាអាសុីមតូត ទ្រេតនៃ $(c)$ នៅខាង $+\infty$ ។

ឃ.សិក្សាទីតាំងរវាងក្រាប $(c)$ និងបន្ទាត់ $(D)$ ។

ង.បន្ទាត់ $(\Delta)$ មួយស្របនឹងបន្ទាត់ $(D)$ហើយប៉ះនឹងក្រាប$(c)$ ត្រង់ $M$ ។ កំនត់កូអរដោនេ $M$ និងសរសេរសមីការនៃ $(\Delta)$។

ច_សង់បន្ទាត់ $(D);(\Delta)$និងក្រាប$(c)$នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ តែមួយ ។ គេឲ្យ $e = 2.7$ ។

114.១.$f$ ជាអនុគមន៍កំនត់លើ $IR$ដោយ $f(x) = (1-x)e^{x} - 1$ គណនា $f'(x)$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f$ ។ (មិនបាច់គណនាលីមីតត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ )។រកសញ្ញា$f(x)$

២.$g$ជាអនុគមន៍កំនត់លើ$IR$ដោយ$g(x) = (2-x)e^{x} + 2 - x$

ក.គណនា $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ។ គណនា $g'(x)$។ ដោយប្រើលទ្ធផលដែលបាននៅសំនួរទី១.ចូរសិក្សាសញ្ញានៃ $g'(x)$ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $g$ ។

ខ.បង្ហាញថាខ្សែកោង$(c)$តាងអនុគមន៍ $g$ មាន$(D): y = 2 - x$ ជាអាសុីមតូតទ្រេតកាលណា $x \to -\infty$ ។

បញ្ជាក់ទីតាំងនៃខ្សែកោង $(c)$ ធៀបនឹង $(D)$ ។

គ.កំនត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង$(c)$ដែលស្របនឹង$(D)$។

ឃ.រកកូអរដោនេចំនុចរបត់របស់ខ្សែកោង$(c)$ ។

ង.សង់ខ្សែកោង$(c)$ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$។

115 .$f$ ជាអនុគមន៍កំនត់ចំពោះ$x>0$ដោយ $f(x)=1+2\left(\frac{\ln x}{x}\right)$

ហើយមានក្រាប $(c)$ ។

១.គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ។

កំនត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង ដេកនៃក្រាប $(c)$ ។

២.គណនាដេរីវេ$f'(x)$និងសិក្សាសញ្ញានៃ$f'(x)$ ។

សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f$ ។

៣.កំនត់កូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ $A$រវាងក្រាប$(c)$និង$(D):y=1$

កំនត់សមីការបន្ទាត់$(L)$ដែលប៉ះក្រាប$(c)$ត្រង់$A$។

៤.គណនា $f(\frac{1}{2})$ ។ សង់បន្ទាត់$(L)$អាស៊ីមតូតនិងក្រាប$(c)$

នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ ។ គេយក$e=2.7,\frac{2}{e}=0.7$ ,$\ln 2=0.7$

116 .គេឲ្យ $y = x\ln x - x + 1$ ; $x$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

១.រកលីមីត $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ។

២.គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$។

គណនាតម្លៃបរមានៃ $f$ ។

៣.គូសតារាងអថេរភាពនៃ $f$ ។

៤.គណនា $f(2)$ ។ រក $x$ បើ $f(x) = 1$។គេឲ្យ $\ln 2 = 0.69$។

៥.សង់ក្រាបនៃ $f$ ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ ។

117 .គេមានអនុគមន៍ $f$ កំនត់ដោយ $f(x) = \dfrac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x}$

១.សរសេរ $f$ ជារាង $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{(x+1)^2}$ ដែល $A;B$

និង $C$ ជាចំនួនថេរត្រូវកំនត់ ។

២.គណនាអាំងតេក្រាល $\displaystyle\int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x}.dx$

118 .គេឲ្យ $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 2x - 3}$

១.កំនត់ចំនួនពិត $m, n$ និង $p$ ដើម្បីឲ្យគេបាន ៖

$$g(x)=m+\frac{n}{x+1}+\frac{p}{x-3}$$ ចំពោះគ្រប់ $x\in]-1,3[$

២.គណនា $I=\int_0^2 g(x).dx$ ។

**119** .អនុគមន៍ $f$ កំនត់ដោយ $f(x)=\frac{e^{2x}+e^x+1}{(1+e^x)^2}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x$ ។

១.កំនត់ចំនួនពិត $A$ និង $B$ ដើម្បីឲ្យ $f(x)=A+\frac{B.e^x}{(1+e^x)^2}$

២.គណនាអាំងតេក្រាលកំនត់ $J=\int_0^1 f(x).dx$ ។

**120** .គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

ក.ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ ។

ខ.គណនា $I=\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.dx$

**121** .គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

ក.បង្ហាញថា $f'(x)=\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

ខ.គណនា $I=\int_0^{\frac{4}{3}}\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

**122**.ក.គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)=\tan x-x$ ។

ខ.ទាញរកតម្លៃនៃ $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x.dx$

**123**.ក.គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^2\ln x-x$ ។

ខ.ទាញរកតម្លៃនៃ $I=\int_1^{e}x\ln x.dx$ ។

**124**.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}$

ក.កំនត់ពីរចំនួនពិត $A$ និង $B$ ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f$ អាចសរសេរជារាង

$$f(x)=A+\frac{B(\cos x-\sin x)}{\cos x+\sin x}$$

ខ.គណនា $I=\int f(x).dx$ ។

**125**.គេឲ្យ $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x.dx$ និង $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x.dx$

ក.ចូរគណនា $I+J$ និង $I-J$ ។

ខ.ទាញរកតម្លៃនៃ $I$ និង $J$ ។

126 .គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=(\cos x+\sin x)e^{x}$

ក.ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ ។

ខ.ចូរគណនា $I=\int_{0}^{\pi}e^{x}\cos x.dx$ ។

127 .គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{4x^{2}-x+1}{x^{3}+1}$

ក.កំនត់បីចំនួនពិត $a,b,c$ ដើម្បីឲ្យបាន ៖

$$f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^{2}-x+1}$$

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{0}^{2}\dfrac{4x^{2}-x+1}{x^{3}+1}.dx$

128 .ចូរគណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \dfrac{\cos 8x-\cos 7x}{1+2\cos 5x}.dx$

129 .គេឲ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កំនត់ក្នុងចន្លោះ $[0;\pi]$ ។

ក.ចូរបង្ហាញថា $\int_{0}^{\pi}xf(\sin x).dx=\dfrac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}f(\sin x).dx$

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{0}^{\pi}\dfrac{x\sin x}{1+\cos^{2}x}.dx$

130 .គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់លើ $[a;b]$ ដែល $f(a+b-x)=f(x)$

ចូរស្រាយថា $\int_{a}^{b}xf(x).dx=\dfrac{a+b}{2}\int_{a}^{b}f(x).dx$ ។

*អនុវត្តន៍* ៖ គណនា $I=\int_0^{\pi} x\sin x\cos^4 x.dx$ ។

**131** .ក.ចូរស្រាយថា $\int_0^a f(x).dx=\int_0^a f(a-x).dx$

ខ.*អនុវត្តន៍* ៖ គណនា $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(1+\sqrt{3}\tan x).dx$

**132** .គេឲ្យស្វ៊ីត $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}.dx$ ដែល $n\in IN$

ក.ចូរគណនា $I_0$ និង $I_1$ ។ ស្រាយថា $(I_n)$ជាស្វ៊ីតចុះ ។

ខ.ចូរបង្ហាញថា $I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

គ.ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{2(n+1)}\le I_n\le \frac{1}{2(n-1)}$ $;\forall n\ge 2$ ។

ឃ.ចូរគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_n)$ ។

**133** .គេឲ្យស្វ៊ីត $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx$ ដែល $n\in IN$

ក.ចូរគណនា $I_0$ និង $I_1$ ។ ស្រាយថា $(I_n)$ជាស្វ៊ីតចុះ ។

ខ.ចូរសរសេរទំនាក់ទំនងរវាង $I_n$ និង $I_{n+2}$ ។

គ.ចូរគណនាផលគុណ $P_n=I_n.I_{n+1}$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$ ។

ឃ.គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}\frac{I_n}{I_{n+1}}$ និង $\lim_{n\to+\infty}\frac{I_n}{I_{n+2}}$ ។

ង.ចូរស្រាយថា $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n}.I_n\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ។

ច.រករូបមន្តសម្រាប់គណនា $I_n$ ។

**134 . គេឱ្យអាំងតេក្រាល :**

$I=\int e^{-2x}\cos^2 x.dx$ **និង** $J=\int e^{-2x}\sin^2 x.dx$

**ក-គណនា** $I+J$ **និង** $I-J$

**ខ-ទាញរក** $I$ **និង** $J$ ។

**135 . គេឱ្យអាំងតេក្រាល :**

$I=\int x\cos^2 x.dx$ **និង** $J=\int x\sin^2 x.dx$

**ក-គណនា** $I+J$ **និង** $I-J$

**ខ-ទាញរក** $I$ **និង** $J$ ។

**136 . គេឱ្យអាំងតេក្រាល :**

$I=\int\frac{x+1}{e^{-x}+x}.dx$ **និង** $J=\int\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+x}.dx$

**គណនា** $I+J$ , $J$ **រួចទាញរក** $I$ ។

**137 .** គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int \sin^n x.dx \ ,n \in IN$ ។

ក. គណនាតួ $I_0$ និង $I_1$ ។

ខ. រកទំនាក់ទំនងរវាង $I_n$ និង $I_{n-2}$ ។

គ. គណនា $K = \int \sin^7 x.dx$ ។

**138 .** គេអោយអាំងតេក្រាល : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^{n-1} x \ ,n \in IN^*$

ក-គណនា $I_n$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$ ។

ខ-គេតាង $S_n = I_1 + I_2 + I_3 + ....... + I_n = \sum_{k=1}^{n} (I_k)$ ។

ចូរបង្ហាញថា $S_n = \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} \ ,n \in IN^*$ ?

គ-គណនាលីមីត $\lim_{n \to +\infty} S_n$ ។

**139 .** គេអោយអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^n x.dx \ ,n \in IN$

ក-ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(I_n)_{n \in IN}$ ជាស្វ៊ីតចុះ រួចគណនា $I_0$ និង $I_1$ ។

ខ-ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំពោះគ្រប់ $n \ge 2$ គេមាន $I_n = \frac{n-1}{n+2}.I_{n-2}$ ។

គ-គេតាង $P_n = I_n.I_{n-1}$ ដែល $n \ge 1$ ។

គណនា $P_n$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$ រួចគណនាលីមីត $\lim_{n \to +\infty} (n^2.P_n)$ ។

ឃ-គេតាង $S_n = P_1 + P_2 + P_3 + ........ + P_n = \sum_{k=1}^{n}(P_k)$ ។

បង្ហាញថា $S_n = \frac{\pi}{8}\cdot\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$ រួចទាញរកលីមីត $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

ង-គណនាផលគុណ $\Pi_n = S_1 \times S_2 \times S_3 \times .... \times S_n$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$

ច-គណនា $I_{2n}$ និង $I_{2n+1}$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$ ។

**140** . គេឱ្យស្វ៊ីត $I_n = \int_{na}^{(n+1)a} \frac{dx}{\cos^2 x}$ និង $J_n = \int_{a}^{(n+1)a} \frac{dx}{\cos^2 x}$ $, n \in IN^*, a > 0$ ។

ក-បង្ហាញថា $I_1 + I_2 + I_3 + .... + I_n = J_n$ ។

ខ-គណនា $I_n$ និង $J_n$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$ ។

គ-ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរបង្រួមផលបូក ៖

$$S_n = \frac{1}{\cos a \cos 2a} + \frac{1}{\cos 2a \cos 3a} + ......... + \frac{1}{\cos(na)\cos(n+1)a}$$

**141** . គេអោយស្វ៊ីត $I_n = \int_{e^{-(n+1)\pi}}^{e^{-n\pi}} \cos(\ln x).dx$ $, n \in IN$

ក-ស្រាយបញ្ជាក់ $(I_n)_{n\in IN}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ-សរសេរកន្សោម $I_n$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$ ។

គ-គណនាផលបូក $S_n = I_0 + I_1 + I_2 + ... + I_n$ រួចទាញរក $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

**142**. គេអោយអាំងតេក្រាលៈ

$$I_n(t)=\int_0^t\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}+\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x}}+\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x}}+...+\frac{2x+n}{\sqrt{x^2+nx}}-\frac{2nx}{\sqrt{x^2+1}}\right).dx$$

ក-គណនាកន្សោម $I_n(t)$ ។

ខ-គណនាលីមីតនៃកន្សោម $I_n(t)$ កាលណា $t\to+\infty$ ។

**143**. គេឱ្យ $f$ ជាអនុគមន៍ មានខួប $p$ និងកំនត់លើ $[np,(n+1)p]$

ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ និង $a>0, a\neq 1$ ។

គេតាង $I_n=\int_{np}^{(n+1)p}a^x.f(x).dx$ ។

ក-ស្រាយថា $(I_n), n\in IN$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ-សរសេរ $I_n$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$ និង $I_0$ ។

គ-អនុវត្តន៍ ចូរគណនា $I_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^x.\cos 2x.dx$ ។

**144**. គេអោយអាំងតេក្រាល

$$I_n=\int_1^e\frac{x^{-(2n+1)}}{1+x^2}.dx\quad ,n\in IN, e=2,718...$$

ក-ចូរគណនាតួ $I_0$ ។

ខ-ចូរបង្ហាញថាៈ $I_{n+1}+I_n=\dfrac{e^{2n+2}-1}{2(n+1).e^{2n+2}}$ ។

គ-ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព ៈ

$$\frac{1}{2}x^{-2(n+1)} \le \frac{x^{-2n}}{1+x^2} \le \frac{1}{2}x^{-2n} \quad , \forall x \ge 1$$ ។

ឃ-គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_n)$ ។

**145 .** គណនាអាំងតេក្រាល :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^n x} \quad \text{និង} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cot^n x}$$

**146 .** គេឱ្យអាំងតេក្រាលៈ

$$I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln x}{x^2}.dx \quad \forall n \in IN, e = 2{,}71828....$$

ក-ចូរបង្ហាញថា $I_n = \left(\frac{n}{e^n} - \frac{n+1}{e^{n+1}}\right) + \left(1-\frac{1}{e}\right)\left(\frac{1}{e}\right)^n$

ខ-គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ ។

គ-គណនាផលបូក $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(I_k) = I_0 + I_1 + I_2 + .... + I_n$ ។

ទាញបញ្ជាក់លីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

**147 .** គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត $(I_n), n \in IN$ ដោយ :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx.dx$$

ក-គណនាតួ $I_0$ និង $I_1$ ។

ខ-ស្រាយថា $(I_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនាតួទូទៅ $I_n$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$ ។

គ-រកផលបូក $S_n = I_0 + I_1 + I_3 + ... + I_n$ រួចគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

**148**. គេឱ្យស្វ៊ីត $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n .\sqrt{\tan x.dx}\ , n \in IN$

ក-គណនាតួ $I_0$ រួចបង្ហាញថា $I_n$ គ្រប់ $n \in IN$ ជាស្វ៊ីតចុះ ។

ខ-គណនា $I_n + I_{n+2}$ ជាអនុគមន៍នៃ$n$ ។

គ-ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ $n \in IN^* : \frac{1}{2n+3} \le I_n \le \frac{1}{2n-1}$

រួចគណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$ ។

**149**. គេអោយអនុគមន៍ៈ

$$y = f_n(x) = \int_{nx}^{(n+1)x} e^{-t^2}.dx \ ;\ \left(n \in IN \quad e = 2.71828...\right)$$

ក-គណនាដេរីវេ $: y' = f'_n(x)$

ខ-ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ គេសន្មត $\Omega_n = f'_n(1)$ ។

គណនា $S_n = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + ... + \Omega_n$ រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

**150**. គេអោយអនុគមន៍ពីរ $f(x)$ និង $g(x)$ កំណត់ក្នុង $[a,b]$ ។

ក-ចូរស្រាយបញ្ជាក់អោយឃើញថា:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x).dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x).dx \times \int_a^b g^2(x).dx}$$ ។

ខ-អនុវត្តន៍: ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព

$$\left|\int_0^1 \sqrt{\frac{a\cos x + b\sin x}{1+x^2}}.dx\right| \le \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{4}} \quad a,b \in IR$$

**151**. គេអោយស្វ៊ីត: $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2-x+1}}.dx$

ក-គណនាតួ $I_0$ និង $I_1$ ។

ខ-រកទំនាក់ទំនងរវាង $I_n$ , $I_{n+1}$ និង $I_{n+2}$ ។

គ-អនុវត្តន៍: ចូរគណនា $k = \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{x^2-x+1}}.dx$ ។

**152**. គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left[\int_1^\lambda \frac{1}{(1+x)^2}.\sqrt[n]{\frac{x-1}{x+1}}.dx\right]$ ។

ក-ចូរបង្ហាញថា $I_n = \frac{1}{2}.\frac{n}{n+1}$ រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ ។

ខ-គណនាផលគុណ $P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(I_k\right) = I_1.I_2.I_3.......I_n$

ជាអនុគមន៍នៃ n ។

153 .គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 \frac{dx}{x^4+1}$ ។

154 .គណនាអាំងតេក្រាល $I=12\int_0^4 |x^3-6x^2+11x-6|.dx$

155 .គេឲ្យអាំងតេក្រាល ៖

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2\sin^n x}{1+\sin^n x+\cos^n x}.dx$$

$$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2\cos^n x}{1+\sin^n x+\cos^n x}.dx$$

ក.ចូរស្រាយថា $I_n=J_n$ ។

ខ.ទាញរកតម្លៃ $I_n$ និង $J_n$ ។

156 .គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 x^3e^x.dx$

ក.កំនត់ចំនួនពិត $a , b , c , d$ ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍កំនត់ដោយ $F(x)=(ax^3+bx^2+cx+d)e^x$ ជាព្រីមីទីវរបស់អនុគមន៍ $f(x)=x^3e^x$ លើ $IR$ ។

157 .គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-4y'+4y=0$

ក.ដោះស្រាយសមីការ $(E)$ ។

២.កំនត់អនុគមន៍ $g(x)$ ជាចម្លើយមួយរបស់ (E) បើគេដឹងថា

ក្រាប (c)តាងអនុគមន៍ gប៉ះបន្ទាត់ $y = x + 2$ត្រង់ $A(0;2)$

158 .ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-2y'+2y = 0$

បើគេដឹងថា $f(0) = 1$ និង $f'(0) = 3$ ។

159 .១.ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$g''(x) - 5g'(x) + 6g(x) = 0 \ (E)$$

២.រកចម្លើយ $g(x)$មួយនៃសមីការ(E)ដែល$g(0) = 0$ ,$g'(0) = 1$

160 .ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''+4y = 0$

បើគេដឹងថា $y(0) = 1$ ; $y'(0) = -1$ ។

161 .១.ដោះស្រាយសមីការ $(E): y''+4y = 0$

( $y_1$ ជាចម្លើយរបស់ (E) ) ។

២.រកចម្លើយនៃសមីការ(E)ដោយដឹងថា $y(0) = 1$ , $y'(0) = 4$

៣.កំនត់ a និង b ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = ax + b$

ជាចម្លើយនៃសមីការ $(F): y''+4y = x - 1$ ។

៤.បង្ហាញថាបើ $f(x)$ ជាចម្លើយនៃ (F) នោះ $y_1 + f(x)$

ជាចម្លើយរបស់សមីការ (F) ។

**162** .ក.ដោះស្រាយសមីការ $(E): y''+9y=0$ ។

ខ.រកចម្លើយ $(E)$ ជារាង $r\cos(x+\varphi)$ បើ $y(0)=1, y'(0)=-3$ ។

**163** .គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

$(E): y''-3y'+2y=0$

$(F): y''-3y'+2y=2x^3-15x^2+30x-17$

ក.ដោះស្រាយសមីការ $(E)$ ( តាង $h(x)$ ជាចម្លើយសមីការ )។

ខ. $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបីជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ $(F)$ ។

ចូរកំនត់រកពហុធា $P(x)$ ។

គ.ចូរស្រាយថាអនុគមន៍ $y=h(x)+P(x)$ ជាចម្លើយទូទៅ

របស់សមីការ $(F)$ លុះត្រាតែអនុគមន៍ $h(x)$ ជាចម្លើយ $(E)$។

ឃ.ទាញរកចម្លើយរបស់ $(F)$ ។

**164** .គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែ ៖

$(E): y''-4y'+4y=(x-1)e^x$

ក.កំនត់ពីរចំនួនពិត $a$ និង $b$ ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=(ax+b)e^x$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ $(E)$ ។

ខ.ចូរស្រាយថាអនុគមន៍ $y=f(x)+h(x)$ ជាចម្លើយទូទៅ

របស់សមីការ (E) លុះត្រាតែអនុគមន៍ $h(x)$ ជាចម្លើយទូទៅ

របស់សមីការ $(F): y''-4y'+4y=0$ ។

គ.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E)។

**165** .គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

$$(E): y''-4y=2(3\cos x-\sin x)e^{x}$$

ក.កំនត់ពីរចំនួនពិត $a$ និង $b$ ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f$ កំនត់ដោយ៖

$f(x)=(a\cos x+b\sin x)e^{x}$ ជាចម្លើយមួយរបស់ (E) ។

ខ.ចូរស្រាយថាអនុគមន៍ $y=f(x)+h(x)$ ជាចម្លើយទូទៅ

របស់សមីការ (E) លុះត្រាតែអនុគមន៍ $h(x)$ ជាចម្លើយទូទៅ

របស់សមីការ $(F): y''-4y=0$ ។

គ.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E)។

**166** .គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

$$(E): y''-2y'+5y=2(3\sin x+\cos x)$$

ក.កំនត់ពីរចំនួនពិត $a$ និង $b$ ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f$ កំនត់ដោយ៖

$f(x)=a\cos x+b\sin x$ ជាចម្លើយមួយរបស់ (E) ។

ខ.ចូរស្រាយថាអនុគមន៍ $y=f(x)+h(x)$ ជាចម្លើយទូទៅ

របស់សមីការ (E) លុះត្រាតែអនុគមន៍ $h(x)$ ជាចម្លើយទូទៅ

របស់សមីការ $(F): y''-2y'+5y=0$ ។

គ.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E)។

**167** .គេឲ្យសមីការ $(E): y'-2y=(-x^2+4x+6)e^x$

ក.កំនត់ពីរចំនួនពិត $a$ , $b$និង $c$ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍កំនត់ដោយ៖

$f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ ជាចម្លើយមួយរបស់ (E) ។

ខ.ចូរស្រាយថាអនុគមន៍ $y=f(x)+h(x)$ ជាចម្លើយទូទៅ

របស់សមីការ (E) លុះត្រាតែអនុគមន៍ $h(x)$ ជាចម្លើយទូទៅ

របស់សមីការ $(F): y'-2y=0$ ។

គ.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E)។

**168** .គេឲ្យអនុគមន៍ $f$ កំនត់និងមានដេរីវេលើ $]-1;+1[$ ដោយ៖

$f'(0)=1$ និង $f(x)+f(x)=f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$

ចំពោះគ្រប់ $x\in]-1;1[$ និង $y\in]-1;1[$ ។

ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ ។

**169**.គេឲ្យ $f$ ជាអនុគមន៍កំនត់និងមានដេរីវេលើ $]0;+\infty[$ ដោយ

$f'(1)=1$ និង $\forall x>0, y>0 : f(xy)=f(x)+f(y)$

ក.គ្រប់ $n\in IN^*$ បង្ហាញថា $f(x^n)=nf(x)$ ។

ខ.ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ ។

**170**.គេឲ្យអនុគមន៍ $f$ កំនត់និងមានដេរីវេលើ $IR$ ដោយ ៖

$f'(0)=f(0)$ និង $\begin{cases} f(x)>0 \\ f(x+y)=f(x)f(y)\ ,\forall x,y\in IR \end{cases}$

ក.គ្រប់ $n\in IN^*$ បង្ហាញថា $f(x^n)=\left[f(x)\right]^n$ ។

ខ.ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ ។

**171**.គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

$(E): xy+2y'=4x^2+9x$

ក.កំនត់ $a,b,c$ ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=ax^2+bx+c$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ $(E)$ ។

ខ.ចូរស្រាយថាអនុគមន៍ $g(x)$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ $(E)$

លុះត្រាតែអនុគមន៍ $h(x)=g(x)-f(x)$ ជាចម្លើយរបស់

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(F): xy+2y'=0$ ។

គ.ដោះស្រាយសមីការ $(F)$ រួចទាញរកចម្លើយរបស់សមីការ $(E)$។

172 .កំនត់រកអនុគមន៍ $y = f(x)$ បើគេដឹងថា ៖

$$(x^2+1)f'(x) + 2x\,f(x) = 4x^3 + 2x + 1 \ , \ f(0) = 1$$

173 .ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $y = f(x)$ បើគេដឹងថា ៖

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x+1}f''(x) - \dfrac{2}{(2x+1)^2}f'(x) = 4x - 1 \\ f'(0) = f(0) = 0 \end{cases}$$

174 .គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 2y' + y = 0$

ក.កំនត់រកអនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាចម្លើយរបស់$(E)$ បើគេដឹងថា $f(0) = 2$ និង $f(-2) = 0$ ។

ខ.គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ រួចទាញរកសមីការ អាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប $(c)$ តាងអនុគមន៍ $f$ ។

គ.គណនា $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ ។ គូសតារាងអថេរភាពតាងអនុគមន៍ $f$ ។

ឃ. $I$ ជាចំនុចរបត់នៃក្រាប $(c)$ ។ កំនត់កូអរដោនេនៃចំនុច $I$ រួចសរសេរសមីការបន្ទាត់ $(T)$ ប៉ះខ្សែកោង $(c)$ត្រង់ $I$ ។

ង.ចូរសង់បន្ទាត់ $(T)$ និង ក្រាប $(c)$ ក្នុងតំរុយតែមួយ ។

ច.គណនាផ្ទៃក្រឡា $S(\lambda)$ នៃមណ្ឌលប្លង់ខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង$(c)$ ជាមួយនឹងអក្សអាប់ស៊ីសក្នុងចន្លោះ$[0;\lambda]$។គណនា $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} S(\lambda)$។

175 .ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់គេឲ្យប៉ារ៉ាបូល $(P): y = \dfrac{x^2}{2}$ ហើយ $A$ និង $B$ ជាពីរចំនុចនៃ $(P)$ ដែល $AB = 2$ ។ កំនត់កូអរដោនេនៃចំនុច $A$ និង $B$ ដើម្បីឲ្យផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌដោយ $(P)$ និង បន្ទាត់ $(AB)$ មានតម្លៃអតិបរមា ។

176 .ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់គេឲ្យប៉ារ៉ាបូល $(P): y = 4 - x^2$ $(D)$ ជាបន្ទាត់មានមេគុណប្រាប់ទិស $m$ វិលជុំវិញ $A(1;2)$។ កំនត់តម្លៃ $m$ ដើម្បីឲ្យផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌដោយ$(P)$និងបន្ទាត់ $(D)$ មានតម្លៃអប្បបរមា ។

177 .គណនាផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌដោយ៖

$(C): y = x^2$និង$(d): y = x + 2$

178 .គណនាផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរប្រសព្វគ្នា ៖

$(C_1): y = 4x - x^2$ និង $(C_2): y = x^2 - 2x$ ។

**179** .គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោង ÷

$$(C): y = f(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{3}{2}$$ ជាមួយអក្សអាប់ស៊ីស $(ox)$

ក្នុងចន្លោះ $[1; 3]$ ។

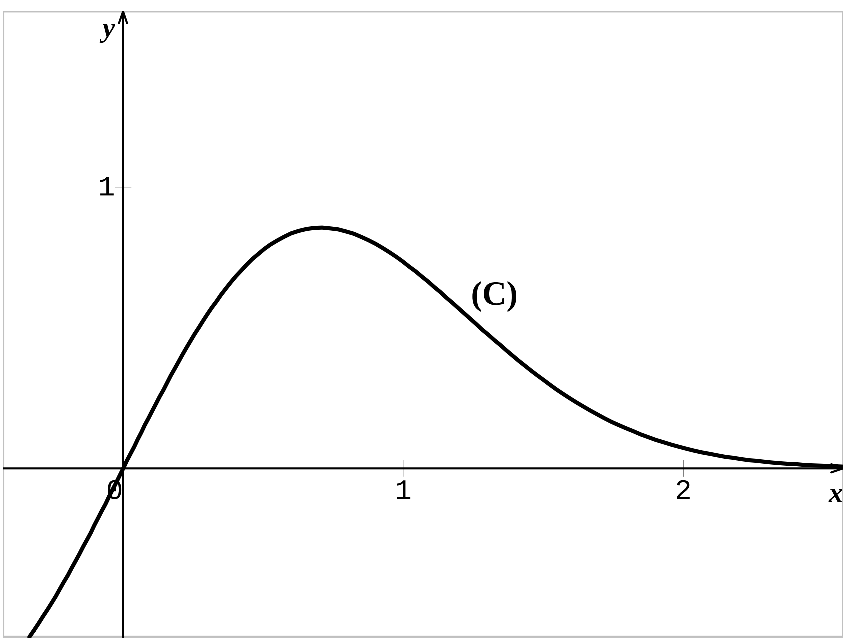
**180**.គេឲ្យខ្សែកោង $(c): y = \dfrac{2}{1+e^x}$

ក.គណនាផ្ទៃក្រឡា $S(\alpha)$ខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $(c)$ជាមួយអក្ស័

អាប់ស៊ីសក្នុងចន្លោះ $[0;\alpha]$ ។

ខ.គណនា $\lim_{\alpha \to +\infty} S(\alpha)$ ។

**181** .ខាងក្រោមនេះគឺជាក្រាប $(c)$ តាងអនុគមន៍ $f(x) = 2x e^{-x^2}$

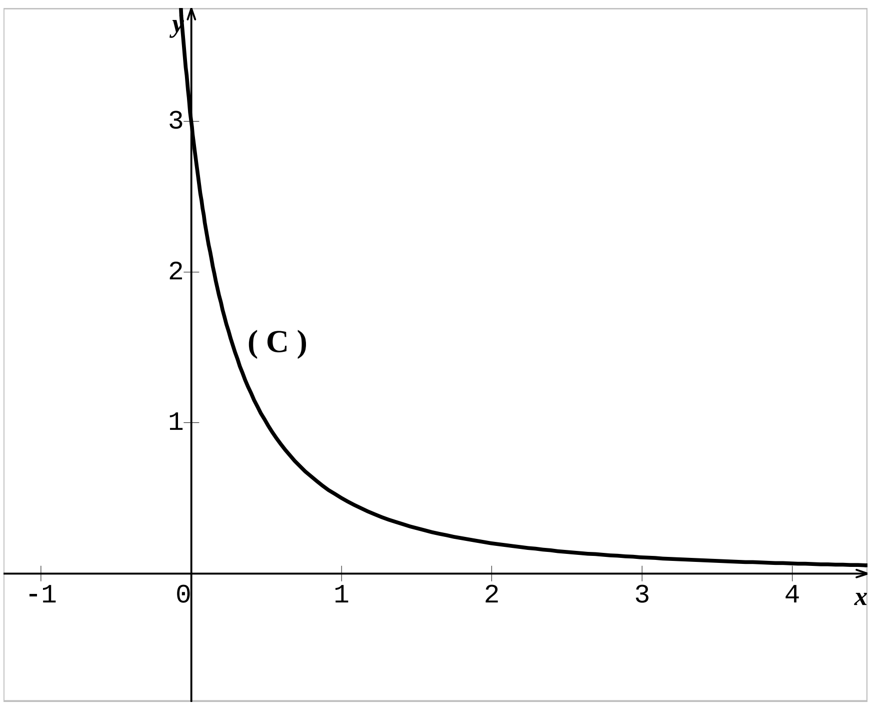


ក.គណនាផ្ទៃក្រឡា $S(\alpha)$ខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $(c)$ជាមួយអក្ស័
អាប់ស៊ីសក្នុងចន្លោះ $[0;\alpha]$ ។

ខ.គណនា $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} S(\alpha)$

**182**.ខាងក្រោមនេះគឺជាក្រាប $(c)$ តាងអនុគមន៍ ៖

$$f(x)=\frac{3}{2x^2+3x+1}$$




ក.គណនាផ្ទៃក្រឡា $S(\alpha)$ខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $(c)$ជាមួយអក្ស័
អាប់ស៊ីសក្នុងចន្លោះ $[0;\alpha]$ ។

ខ.គណនា $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} S(\alpha)$ ។

**183** .គណនាផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $(c): y = \frac{4x^3}{x^4+1}$

ជាមួយអក្ស័ $(x'ox)$ ក្នុងចន្លោះ $[0\,,1]$ ។

**184** .ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាកោណបរិវត្តន៍ដែលមានកំពស់ $h$ និងកាំថាស

បាតស្មើ $r$ ត្រូវមានមាឌ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ។

**185** .ចូរស្រាយថាស្វ៊ែដែលមានកាំស្មើ $R$ ត្រូវមានមាឌ $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ។

**186** .គណនាមាឌសូលីដបរិវត្តន៍កំនត់បានពីរង្វិលផ្ទៃខណ្ឌ័ដោយក្រាបតាង

អនុគមន៍ $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ ជាមួយអក្ស័អាប់ស៊ីសក្នុងចន្លោះ $[0;2]$

ជុំវិញអក្ស័អាប់ស៊ីស ។

**187** .គេឲ្យស្វ៊ីត $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + .... + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

ក.ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\int_1^n \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \le u_n \le 1 + \int_1^n \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I_n = \int_1^n \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

គ.គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$ ។

**188**.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\tan x+\cot x)^2.dx$ ។

**189**.គេឲ្យអាំងតេក្រាល ៖

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+2\sin x}.dx \text{ និង } J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+2\sin x}.dx$$

ក.ចូរគណនា $I+J$ ។

ខ.ចូរគណនា $J$ រួចទាញរកតម្លៃ $I$ ។

**190**.គេឲ្យ $f$ ជាអនុគមន៍កំនត់លើ $IR$ ដោយ $f(x)=(1-x)e^x$

ក.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $f(x)+f''(x)=2f'(x)$ គ្រប់ $x\in IR$ ។

ខ.ទាញរកតម្លៃ $I=\int_0^1(1-x)e^x.dx$ ។

**191**.ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ គេឲ្យ $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(\sin x)^n}{\cos x}.dx$

ក.ចូរគណនា $\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin x)^n\cos x.dx$ រួចទាញរក $I_{n+2}-I_n$

ជាអនុគមន៍នៃ $n$ ។

ខ.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ $F(x) = \ln\left(\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right)$

ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ លើ $[0;\frac{\pi}{3}]$ ។

គ.ទាញរកតម្លៃនៃ $I_0, I_1, I_2$ ។

**192**.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលតាមផ្នែកចូរគណនា ៖

$I_n(x) = \int_1^x t^n \ln t.dt$ ដែល $n \geq 1$ ។

**193**.គេឲ្យ $I_n = \int_0^{\pi} x(\pi - x)\cos(nx).dx \quad , n \in IN$

ដោយប្រើអាំងតេក្រាលតាមផ្នែកចូរគណនា $I_n$ រួចបញ្ចាក់ $I_{2p}$

និង $I_{2p+1}$ ។

**194**.គេឲ្យ $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$ ; $n \in IN$

ក.ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$$

ខ.ទាញរកតម្លៃ $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^5 x}$ ។

**195** .ចូរបង្ហាញថា $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^x \sin^5 t\cos t.dt\right).dx = \frac{15\pi - 44}{1152}$ ។

**196** .ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ គេឲ្យអាំងតេក្រាល ៖

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\sin x.dx \quad \text{និង} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\cos x.dx$$

១.ចូរគណនា $I_0$ និង $J_0$

២.គេសន្មតថា $n \geq 1$ ។

ក_ដោយប្រើអាំងតេក្រាលតាមផ្នែកចូរបង្ហាញថា ៖

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}} \end{cases}$$

ខ_ចូរទាញរកកន្សោម $I_n$ និង $J_n$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$ ។

គ_គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$ ។

**197** .គេឲ្យស្វ៊ីត $(I_n)$ កំនត់គ្រប់ $n \geq 1$ ដោយ៖

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x.dx$$

ក.ចូរគណនា $I_1$ ។

ខ.ចូរបញ្ជាក់ $I_{n+1}$ ជាអនុគមន៍នៃ $I_n$ រួចទាញបង្ហាញថាគ្រប់ $n \geq 1$

គេបាន $I_n = e - \sum_{p=0}^{n}(\frac{1}{p!})$ ។

គ.ដោយប្រើវិធីអមចំពោះអនុគមន៍ $(1-x)^n e^x$ក្នុងចន្លោះ$[0;1]$

ចូររកលីមីត $\lim_{n\to+\infty} I_n$ រួចទាញបង្ហាញថា ៖

$$e = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+....+\frac{1}{n!})$$ ។

**198** .ចូរគណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \ln(\sqrt{3}+\tan x)$ ។

**199** .ចូរគណនាអាំងតេក្រាល ៖

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}.dx \quad \text{និង} \quad J = \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}.dx$$

**200** .គេឲ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍គូកំនត់លើ $[-a\,;a\,]$ ។

ក.ចូរស្រាយថា $\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+q^x}.dx = \int_0^a f(x).dx$

ដែល $q>0\ ;q\neq 1$ ។

ខ.*អនុវត្តន៍* ៖

ចូរគណនា $I = \int_{-1}^{1} \frac{3x^2-4|x|+1}{1+2^x}.dx$

**201**.គេឲ្យ $f$ ជាអនុគមន៍ជាប់ក្នុងចន្លោះ $[a\,;b]$ ។

ក.ចូរស្រាយថា $\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(a+b-x).dx$

ខ.គណនា $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x).dx$ ។

**202**.ចូរស្រាយថា $\int_{-1979}^{1979} \frac{1-2009^x}{1+2009^x} = 0$ ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី១៦ ខែកុម្ភៈ ឆ្នាំ២០០៩

អ្នករៀបរៀង **លឹម ផល្លុន**
TeL : (017) 768 246