ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

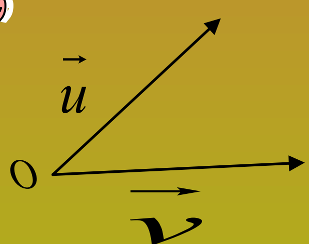
វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

ជំពូកទី៩ ៖ វ៉ិចទ័រ ក្នុង ប្លង់

មេរៀនទី១ ៖ វ៉ិចទ័រ និង ប្រមាណវិធី លើ វ៉ិចទ័រ

មេរៀនទី២ ៖ ការអនុវត្តន៍ នៃ វ៉ិចទ័រ

ថ្នាក់ទី ១០ ភាគ២



$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$$

$$(\vec{a}+\vec{b}).\vec{c} = \vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}$$

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\theta$$

សាស្ត្រាចារ្យណែនាំ ៖ អនុបណ្ឌិត ថៃ ហេង

គរុនិស្សិតជំនាន់ទី ១៨ ៖ ស ផល្លី

មុត សំអុល ជា សុផល

ប្រាក់ ទិត្យ ឃុំ រ៉ិច

២០០៩-២០១០

អារម្ភកថា

កម្រងមេរៀនសង្ខេប និងលំហាត់ - ចម្លើយលើមេរៀន "វ៉ិចទ័រ ក្នុង ប្លង់" ថ្នាក់ទី១០ ភាគ២នេះ ត្រូវបានរៀបរៀងដោយយកចិត្តទុកដាក់បំផុត ក្រោមការណែនាំរបស់លោកអនុបណ្ឌិត ថៃ ហេង ដែលជាសាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យានៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ។ ការរៀបរៀងនេះផ្តោតសំខាន់ទៅលើ រូបមន្ត ទ្រឹស្តីបទគ្រឹះ និងការអនុវត្តខ្លះៗក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃដែលវាស្របទៅតាមកម្រិត នៃការសិក្សារបស់សិស្សនៅមធ្យមសិក្សា។

ក្នុងសៀវភៅនេះមានខ្លឹមសារដូចតទៅ ៖

- មេរៀនសង្ខេប វ៉ិចទ័រ និង ប្រមាណវិធីលើវ៉ិចទ័រ និង ដំណោះស្រាយ នូវរាល់លំហាត់នីមួយៗ នៅក្នុង មេរៀននេះ ។
- មេរៀនសង្ខេប ការអនុវត្តន៍ នៃ វ៉ិចទ័រ និង ដំណោះស្រាយ នូវរាល់លំហាត់នីមួយៗ ក្នុងមេរៀននេះ ។
- ព្រមទាំង ដំណោះស្រាយ នូវលំហាត់ជំពូក ថែមទៀតផង ។

ជាចុងបញ្ចប់យើងខ្ញុំនឹងទទួលរាល់មតិរិះគន់ និង កែលំអក្នុងន័យស្ថាបនាដើម្បីឲ្យសៀវភៅនេះកាន់តែប្រសើរឡើងមួយកំរិតទៀតព្រមទាំងទទួលស្គាល់រាល់កង្វះខាតដែលឡើងដោយយថាហេតុ ។

វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ, ថ្ងៃទី ០១ ខែ កក្កដា ឆ្នាំ២០១០

រៀបរៀង និង វាយអត្ថបទដោយ ៖

ស ~ ផល្លី

សូមអរគុណ !

បញ្ជីអត្ថបទ

ជំពូកទី៩ ៖ វិុចទ័រ ក្នុង ប្លង់

ជំពូកទី៩ : វ៉ិចទ័រ ក្នុង ប្លង់

មេរៀនទី១ : វ៉ិចទ័រ និង ប្រមាណវិធី លើ វ៉ិចទ័រ

មេរៀនសង្ខេប

១.១ អត្ថន័យនៃវ៉ិចទ័រ

និយមន័យ : *អង្កត់មានទិសដៅ ដែលមិនគិតពីទីតាំង ហៅថា* ***វ៉ិចទ័រ*** ។

វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ គឺមានចំនុច A ជាគល់ និង ចំនុច B ជាចុង ។

ក. *វ៉ិចទ័រស្មើគ្នា*

ជាទូទៅ : *វ៉ិចទ័រ ពីរស្មើគ្នា លុះត្រាតែ*

_ *វាមាន ប្រវែងស្មើគ្នា*

_ *វាមាន ទិសដៅដូចគ្នា*

ខ. *វ៉ិចទ័រពីរផ្ទុយគ្នា*

ជាទូទៅ: *វ៉ិចទ័រ ពីរផ្ទុយគ្នា លុះត្រាតែ*

_ *វាមាន ប្រវែងស្មើគ្នា*

_ *វាមាន ទិសដៅផ្ទុយគ្នា*

សម្គាល់ : $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

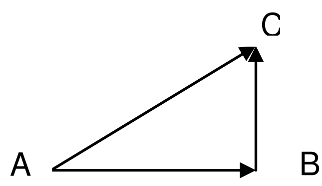
វ៉ិចទ័រ $\vec{a}=\vec{0}$ *លុះត្រាតែ* $|\vec{a}|=0$

- *ប្រមាណវិធីបូកវ៉ិចទ័រ*

_ *ច្បាប់ត្រីកោណ នៃវិធីបូកវ៉ិចទ័រ*

ជាទូទៅ: *បើគេមានវ៉ិចទ័រពីរ* $\overrightarrow{AB}$ *និង* $\overrightarrow{BC}$ *នោះផលបូករវាងវ៉ិចទ័រ* $\overrightarrow{AB}$ *និង* $\overrightarrow{BC}$ *គឺ* $\overrightarrow{AC}$ *ដែលកំណត់សរសេរដោយ*

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$



_ច្បាប់ប្រលេឡូក្រាម នៃវិធីបូកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ ឬ $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$

ជាទូទៅ: បើគេមានវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ ដែលមាន A ជាចុងរួមនោះ

ផលបូករវាងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ (តាមអង្កត់ទ្រូង ប្រលេឡូក្រាម គឺ $\overrightarrow{AD}$)

_ លក្ខណ:គ្រឹះ នៃប្រមាណវិធីវ៉ិចទ័រ

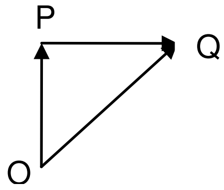
(1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ លក្ខណ:ត្រលប់

(2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ លក្ខណ:ផ្តុំ

\ _ លក្ខណ:គ្រឹះ នៃវ៉ិចទ័រសូន្យ

(1) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

(2) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$



- ប្រមាណវិធីដក វ៉ិចទ័រ

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$ ចំពោះគ្រប់ចំណុច O នៃប្លង់ ។

- ប្រមាណវិធីគុណ វ៉ិចទ័រ និង ចំនួនពិត

ជាទូទៅ: បើគេឲ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង ចំនួនពិត m មួយ នោះយើងអាចកំណត់

$m\vec{a}$ ដែល m គុណនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ ដូច វិធីខាងក្រោម ៖

_ បើ $\vec{a}$ មិនស្មើទៅនឹង $\vec{0}$ នោះ

(1) បើ $m>0$ នោះ $m\vec{a}$ ជា វ៉ិចទ័រដែលមាន ទិសដៅដូចវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$

ហើយមានប្រវែង $|m||\vec{a}|$

(2) បើ $m<0$ នោះ $m\vec{a}$ ជា វ៉ិចទ័រដែលមាន ទិសដៅផ្ទុយពី $\vec{a}$

ហើយមានប្រវែង $|m||\vec{a}|$ ។

(3) បើ $m=o$ នោះ $m\vec{a}$ ជាវ៉ិចទ័រ $\vec{0}$ ។

_ បើ $\vec{a}$ ស្មើទៅនឹង $\vec{0}$ នោះ $m\vec{a}$ ជាវ៉ិចទ័រ $\vec{0}$ ។

- ***វិចទ័រកូលីនេអ៊ែរ***

<u>**និយមន័យ**</u>: *វិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ជាវិចទ័រកូលីនេអ៊ែរ កាលណា $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ មាន ទិសដៅដូចគ្នា ឬ ទិសផ្ទុយគ្នា គេកំណត់សរសេរ $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ។*

លក្ខណៈគ្រឹះ:
(1) $(mn)\vec{a} = m(n\vec{a})$ *លក្ខណៈផ្តុំ*
(2) $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$ *លក្ខណៈបំបែក*
(3) $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$ *លក្ខណៈបំបែក*

- ***វិចទ័រឯកតា***

*វិចទ័រ ដែលមាន ប្រវែងស្មើ ១ ហៅថា **វិចទ័រឯកតា** ។*

- ***វិចទ័រនិងកូអរដោនេ***

ប្រវែង នៃវិចទ័រ គឺ $\vec{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

- ***កូអរដោនេនៃវិចទ័រ***

_ *វិចទ័រ* $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ *តាងជាអនុគមន៍ នៃ វិចទ័រឯកតា*
_ *វិចទ័រ* $\vec{a} = (a_1 , a_2)$ *តាងកូអរដោនេ នៃ វិចទ័រ*
$\vec{a} = (a_1, a_2)$ *ដែល* $a_1 = x' - x$, $a_2 = y' - y$

- ***ការគណនាវិចទ័រដោយប្រើកូអរដោនេ***

(1) $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1 , a_2 + b_2)$
(2) $(a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1 , a_2 - b_2)$
(3) $m(a_1, a_2) = (ma_1 , ma_2)$

ផលគុណស្កាលែ

ជាទូទៅ: *បើ θ ជាមុំដែលកើតឡើងដោយវិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$*

គេបាន $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$

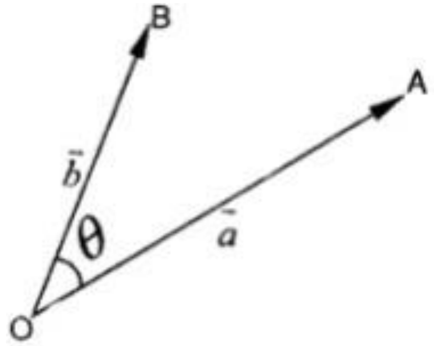
_ *ចំពោះ* $\vec{a} = \vec{0}$ *ឬ* $\vec{b} = \vec{0}$ *គេបាន* $\vec{a}.\vec{b} = 0$ ។

ផលគុណស្កាលែ នៃ ពីរ វិចទ័រកែងគ្នា

$\vec{a} \perp \vec{b}$ *លុះត្រាតែ* $\vec{a}.\vec{b} = 0$ *ក្នុងករណីនេះ មានន័យថា* $\cos\theta = 0$ ។

គេសន្មត់ថា $\vec{0}$ ជាវិចទ័រកែង ទៅនឹង វិចទ័រ មួយទៀត ។

ការគណនាផលគុណស្កាលែតាមកូអរដោនេ



បើ $\vec{a} = (a_1, a_2)$ និង $\vec{b} = (b_1, b_2)$ គេបាន $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

ករណី ពិសេស : $\vec{a} \perp \vec{b}$ លុះត្រាតែ $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$

ជាទូទៅ បើតាង θ ជាមុំដែលកើតឡើងដោយ $\vec{a} = (a_1, a_2)$ និង $\vec{b} = (b_1, b_2)$ នោះ

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$ ។

លក្ខណៈ: ចំពោះគ្រប់វ៉ិចទ័រ $\vec{a}$, $\vec{b}$ និង $\vec{c}$:

(1) $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$

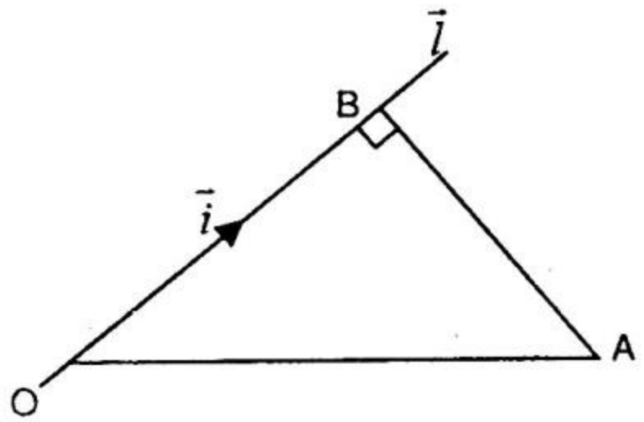
(2) $(\vec{a}+\vec{b}).\vec{c} = \vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}$

(3) $(m\vec{a}).\vec{b} = m(\vec{a}.\vec{b})$

(4) $\vec{a}.(m\vec{b}) = m(\vec{a}.\vec{b})$

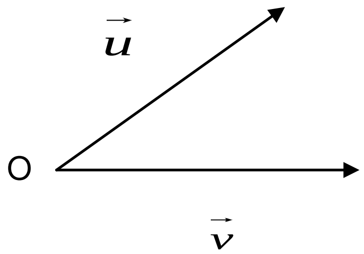
លំហាត់

1. គេអោយវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ដូចរូបខាងស្តាំ
   គណនាកន្សោមខាងក្រោម :
   ក. $6\vec{u}-5\vec{v}-4\vec{u}+2\vec{v}$ ខ. $7(\vec{u}-2\vec{v})-4(2\vec{u}+3\vec{v})$
2. រកចំនួនពិត k និង l ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$ បើ $\vec{a}=(-2,3)$, $\vec{b}=(1,-4)$ និង $\vec{c}=(8,-17)$ ។
3. បង្ហាញថាសមភាពខាងក្រោម :
   ក. $(4\vec{a}+3\vec{b}).(4\vec{a}-3\vec{b}) = 16|\vec{a}|^2-9|\vec{b}|^2$
   ខ. $|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2 = 4\vec{a}.\vec{b}$
4. រកមុំ θ ដែលកើតឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ចំពោះករណីខាងក្រោម :
   ក. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $\vec{a}.\vec{b}$
   ខ. $|\vec{a}|=|\vec{b}|=\vec{a}.\vec{b}=\sqrt{2}$
5. គេអោយវ៉ិចទ័រ $\vec{a}=(2,1)$ និង $\vec{b}=(-1,2)$ ។ រកតម្លៃនៃចំនួនពិត x ដែលថាវ៉ិចទ័រ
   $4x\vec{a}+\vec{b}$ និង $x\vec{a}-3\vec{b}$ កែងគ្នា ។
6. បង្ហាញថា ចំពោះវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ មិនស្មើ 0 ហើយបើ $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ នោះ $\vec{a}\perp\vec{b}$ ។
7. តាង $\vec{i}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកតា ហើយស្របទៅនឹងបន្ទាត់ l ដែល l កាត់តាមចំនុច O
   និងតាង B ជាចំនុចដែលបន្ទាត់គូសចេញពី A កាត់បន្ទាត់ l ហើយកែងគ្នា
   បង្ហាញថា $|\overrightarrow{OA}.\vec{i}| = OB$ ។



ដំណោះស្រាយលំហាត់

1. គណនា កន្សោម



ក . $6\vec{u}-5\vec{v}-4\vec{u}+2\vec{v}$

គេបាន $6\vec{u}-5\vec{v}-4\vec{u}+2\vec{v}=\left(6\vec{u}-4\vec{u}\right)+\left(-5\vec{v}+2\vec{v}\right)$

$=2\vec{u}-3\vec{v}$

ដូចនេះ $6\vec{u}-5\vec{v}-4\vec{u}+2\vec{v}=2\vec{u}-3\vec{v}$

ខ . $7\left(\vec{u}-2\vec{v}\right)-4\left(2\vec{u}+3\vec{v}\right)$

គេបាន $7\left(\vec{u}-2\vec{v}\right)-4\left(2\vec{u}+3\vec{v}\right)=7\vec{u}-14\vec{v}-8\vec{u}-12\vec{v}$

$=\left(7\vec{u}-8\vec{u}\right)+\left(-14\vec{v}-12\vec{v}\right)$

$=-\vec{u}-26\vec{v}$

ដូចនេះ $7\left(\vec{u}-2\vec{v}\right)-4\left(2\vec{u}+3\vec{v}\right)=-\vec{u}-26\vec{v}$

2 . កំណត់ចំនួនពិត k និង l ដែល $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$

គេមាន $\vec{a}=(-2,3)$, $\vec{b}=(1,-4)$ និង $\vec{c}=(8,-17)$

គេបាន $k\vec{a}+l\vec{b}=k(-2,3)+l(1,-4)$

$=(-2k,3k)+(l,-4l)$

$=(-2k+l,\ 3k-4l)$

នោះ $(8,-17)=(-2k+l;3k-4l)$

$$\begin{cases} 8=-2k+l & (1) \\ -17=3k-4l & (2) \end{cases}$$

តាម(1) : $l=8+2k$

យក $l=8+2k$ ជួសក្នុង (2) : $-17=3k-4(8+2k)$

$$-17 = 3k - 32 - 8k$$

$$0 = 15 - 5k$$

នាំអោយ $k = -\frac{15}{5} = -3$

យក $k = 3$ ជួសក្នុង (1) : $l = 8 + 2(-3) = 0$

ដូចនេះ $k = -3$ និង $l = 2$

3 . បង្ហាញថាសមភាព

ក . $\left(4\vec{a} + 3\vec{b}\right).\left(4\vec{a} - 3\vec{b}\right) = 16\left|\vec{a}\right|^2 - 9\left|\vec{b}\right|$

គេបាន $\left(4\vec{a} + 3\vec{b}\right).\left(4\vec{a} - 3\vec{b}\right) = 4\vec{a}\left(4\vec{a} - 3\vec{b}\right) + 3\vec{b}\left(4\vec{a} - 3\vec{b}\right)$

$$= 16\vec{a}^2 - 12\vec{a}\vec{b} + 12\vec{b}\vec{a} - 9\overrightarrow{b^2}$$

$$= 16\left|\vec{a}\right|^2 - 12\vec{a}\vec{b} + 12\vec{a}\vec{b} - 3\left|\vec{b}\right|^2$$

$$16\left|\vec{a}\right|^2 - 9\left|\vec{b}\right|^2 \text{ : ពិត}$$

(ព្រោះផលគុណស្កាលែ មានលក្ខណ:ត្រលប់)

ដូចនេះ $\left(4\vec{a} + 3\vec{b}\right).\left(4\vec{a} - 3\vec{b}\right) = 16\left|\vec{a}\right|^2 - 9\left|\vec{b}\right|$

ខ . $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2 = 4\vec{a}.\vec{b}$

គេបាន $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a} + \vec{b}\right)\left(\vec{a} + \vec{b}\right) - \left(\vec{a} - \vec{b}\right)\left(\vec{a} - \vec{b}\right)$

$$= \vec{a}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{b}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) - \left[\vec{a}\left(\vec{a} - \vec{b}\right) - \vec{b}\left(\vec{a} - \vec{b}\right)\right]$$

$$= \left|\vec{a}\right|^2 + \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{a} + \left|\vec{b}\right|^2 - \left(\left|\vec{a}\right|^2 - \vec{a}.\vec{b} - \vec{b}.\vec{a} + \left|\vec{b}\right|^2\right)$$

$$= \left|\vec{a}\right|^2 + \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{a} + \left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}\right|^2 + \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}\vec{a} - \left|\vec{b}\right|^2$$

$$= 2\vec{a}.\vec{b} + 2\vec{b}.\vec{a}$$

$$= 4\vec{a}.\vec{b}$$

ដូចនេះ $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a} - \vec{b}\right| = 4\vec{a}\vec{b}$

4 . រកមុំ θ ដែលកើតឡើងដោយ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ចំពោះករណី:

ក . $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4, \vec{a}\vec{b}=6$

គេបាន $\cos\theta=\frac{6}{3.4}=\frac{1}{2}$

នាំអោយ $\theta=60^\circ$

ដូចនេះ $\theta=60^\circ$

ខ . $|\vec{a}|=|\vec{b}|=\vec{a}\vec{b}=\sqrt{2}$

តាមរូបមន្ត $\cos\theta=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

គេបាន $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

នាំអោយ $\theta=45^\circ$

ដូចនេះ $\theta=45^\circ$

5 .រកតំម្លៃ នៃចំនួនពិត x ដែលថាវ៉ិចទ័រ $4x\vec{a}+\vec{b}$ និង $x\vec{a}-3\vec{b}$ កែងគ្នា ។

គេមាន $\vec{a}=(2,1), \vec{b}=(-1,2)$

គេបាន $(4x\vec{a}+\vec{b}).(x\vec{a}-3\vec{b})=0$

$$4x\vec{a}.(x\vec{a}-3\vec{b})+\vec{b}.(x\vec{a}-3\vec{b})=0$$

$$4x^2|\vec{a}|^2-12x\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.x\vec{a}-3|\vec{b}^2|=0$$

$$4x^2.|\vec{a}|^2-12\vec{a}.\vec{b}+x\vec{a}.\vec{b}-3|\vec{b}^2|=0$$

$$4x^2.|\vec{a}|^2-11x\vec{a}.\vec{b}-3|\vec{b}|^2=0$$

ដោយ
$$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$
$$\vec{a}.\vec{b}=(2,1).(-1,2)=2.(-1)+1.2=-2+2=0$$
$$|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}\ \sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

$$4x^2|\vec{a}|^2-11\vec{a}.\vec{b}-3|\vec{b}|^2=0$$

គេបាន $4x^2(\sqrt{5})^2-11x.0-3(\sqrt{5})^2=0$

$$4x^2-3=o$$

នាំអោយ $x^2 = \frac{3}{4}$

ឬ $x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ដូចនេះ $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

6 . បង្ហាញ ចំពោះវ៉ិចទ័រ ពីរ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ មិនស្មើ 0 ហើយ បើ $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$ នោះ

នោះ $\vec{a}\perp\vec{b}$ ។

យើងមាន $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$ លើកអង្គទាំងពីរជាការេ

គេបាន $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}-\vec{b}|^2$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + |\vec{b}|^2$

$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}.\vec{b} = 0$

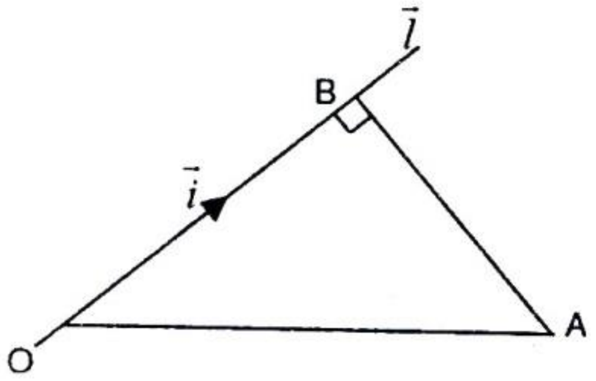
$4\vec{a}.\vec{b} = 0$ ($\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ខុសពី 0)

$\vec{a}.\vec{b} = o$

នោះ $\vec{a}\perp\vec{b}$

ដូចនេះ $\vec{a}.\vec{b} = 0$ នាំអោយ $\vec{a}\perp\vec{b}$

7 . បង្ហាញថា $|\overrightarrow{OA}\vec{i}| = OB$



តាមរូប $\overrightarrow{OA}.\vec{i}=\vec{i}.\overrightarrow{OB}$ (ព្រោះ $\vec{i}$ ស្របនិងបន្ទាត់ l ដែល l កាត់តាម ចំនុច O និង $B\in l$

គេបាន $\overrightarrow{OA}.\vec{i}=\vec{i}.\overrightarrow{OB}$ នាំអោយ $\left|\overrightarrow{OA}.\vec{i}\right|=\left|\overrightarrow{OB}.\vec{i}\right|\overrightarrow{OA}.\vec{i}\left|\vec{i}\right|.\left|\overrightarrow{OB}\right|$ ដោយ $\vec{i}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកតា

នោះគេបាន $\left|\vec{i}\right|=1$ ហើយ $\left|\overrightarrow{OB}\right|=OB$

នាំអោយ $\left|\overrightarrow{OA}.\vec{i}\right|=OB$

ដូចនេះ $\left|\overrightarrow{OA}.\vec{i}\right|=OB$

ជំពូកទី៩ : វ៉ិចទ័រ ក្នុង ប្លង់
មេរៀនទី២: ការអនុវត្តន៍នៃ វ៉ិចទ័រ

សង្ខេបមេរៀន

2.1 វ៉ិចទ័រទីតាំង

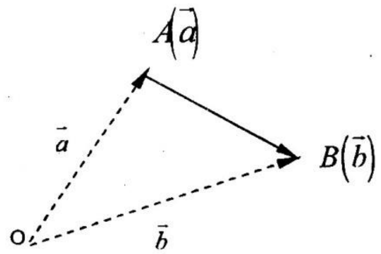
_ វ៉ិចទ័រទីតាំងនៃចំនុច p គឺ $\vec{p}$ ដែលកំណត់ដោយ $P(\vec{p})$ ។

_ វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ ស្មើនឹង ផលដក រវាង វ៉ិចទ័រទីតាំង នៃចំនុចចុង B និង វ៉ិចទ័រទីតាំងនៃចំនុចគល់ A ។

_ វ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ជាវ៉ិចទ័រទីតាំងនៃចំនុច A និង B រៀងគ្នា ។

គេបាន $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

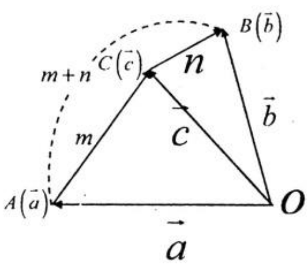
វ៉ិចទ័រទីតាំងនៃចំនុចចែកក្នុង និង ចែកក្រៅ នៃអង្កត់



_ វ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{c}$ នៃចំនុច C ចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុង តាមផលធៀប

$m:n$ គឺ $:\vec{c} = \dfrac{m\vec{b} + m\vec{a}}{m+n}$

ករណីពិសេស វ៉ិចទ័រទីតាំងនៃចំនុចកណ្តាលរបស់អង្កត់ AB គឺ $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$



_ កូអរដោនេនៃចំនុច C ដែលចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុង $A(x_1 , y_1)$ និង $B(x_2 , y_2)$ តាមផលធៀប $m:n$ គឺ

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n} \quad , \quad y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$$

បន្ទាត់ និង វ៉ិចទ័រ

_ សមីការវ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់ L កាត់តាមចំនុចនឹង $P_0(\vec{p}_0)$ ហើយស្របទៅនឹង វ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ ដែល $\vec{u}\neq\vec{0}$ គឺ $\vec{p}=\vec{p}_0+t\vec{u}$ (1)

$\vec{p}=\vec{p}_0+t\vec{u}$ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់ វ៉ិចទ័រ

_ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ ដែលកាត់តាមចំនុច $p_0(x_o , y_0)$ និង មានវ៉ិចទ័រ ប្រាប់ទិស $\vec{u}=(a , b)$ គឺ $\begin{cases} x=x_0+ta \\ y=y_0+ta \end{cases}$ ដែល t ជាប៉ារ៉ាម៉ែត (2)

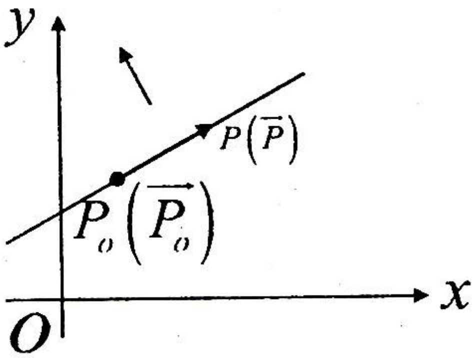
_ បើ $a\neq 0$ និង $b\neq 0$ គេបាន $y-y_0=\frac{b}{a}(x-x_0)$ ជាសមីការបន្ទាត់កាត់តាមចំនុច (x_0 , y_o) ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិស ស្មើ $\frac{b}{a}$ ។

_ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់កាត់តាមពីរចំនុច $A(\vec{a})$ និង $B(\vec{b})$ គឺ $L:\vec{p}=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})$

បន្ទាត់ និង វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់

គេមានបន្ទាត់ $L ,\vec{n}\neq\vec{0}$ ហើយបន្ទាត់ L កែងទៅនឹងវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$ ។

តាង $P(\vec{p})$ ជាចំនុចចល័តលើបន្ទាត់ L



_ សមីការវ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់ L កាត់តាមចំនុចនឹង $P_0(\vec{p}_0)$ ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ ណរម៉ាល់ $\vec{n}$ គឺ $L : \vec{n}.(\vec{p}-\vec{p}_0)=o$ (1)

បើ $\vec{p}=(x,y),\vec{P}_0=(x_0,y_0),\vec{n}=(a,b)$

សមីការកូអរដោនេនៃបន្ទាត់ គឺ $L:a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ ។

វិចទ័រ $\vec{n}=(a,b)$ ហៅថា ***វិចទ័រណរម៉ាល់*** នៃបន្ទាត់នេះ ។

ចម្ងាយរវាងចំនុច និង បន្ទាត់

ចម្ងាយរវាងចំនុច $P(x_1,y_1)$ និងបន្ទាត់ $L: ax+by+c=o$ គឺ $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

រង្វង់ និង វិចទ័រ

សមីការវិចទ័រនៃរង្វង់ដែលមានផ្ចិតត្រង់ចំនុច $C(\vec{c})$ និងកាំ r $|\overrightarrow{CP}|=r$ នាំឲ្យ $|\vec{p}-\overrightarrow{xc}|=r$

បើតាង $\vec{p}=(x,y)$ និង $\vec{c}=(x_0,y_0)$ នោះគេបានរង្វង់ផ្ចិត $C(x_0,y_0)$ និងកាំ r មាន

សមីការ $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ ។

_ សមីការរង្វង់ផ្ចិត $O(o,o)$ និងកាំ r មានរាង $x^2+y^2=r^2$ ។

លំហាត់

1. តាង $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ជាវ៉ិចទ័រទីតាំងនៃពីរចំនុច A និង B ។បង្ហាញថា វ៉ិចទ័រនៃចំនុចខាងក្រោមជាអនុគមន៍នៃ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$:

   ក.ចំនុចចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុងតាមផលធៀប 3:2 ។

   ខ. ចំនុចចែកអង្កត់ AB ខាងក្រៅតាមផលធៀប 1:2 ។

   គ.ចំនុចស៊ីមេទ្រីទៅនឹង A ធៀបទៅនឹង B ។

2. $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ជាវ៉ិចទ័រមិនស្របគ្នា ហើយវ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{p}$,$\vec{q}$ និង $\vec{r}$ នៃបី ចំនុច P,Q និង R រៀងគ្នា ត្រូវបានបង្ហាញដូចខាងក្រោម :

   $\vec{p}=2\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{q}=-6\vec{a}+6\vec{b}$, $\vec{r}=6\vec{a}$

   ក.បង្ហាញ $\overrightarrow{PQ}$ និង $\overrightarrow{PR}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ។

   ខ.តើទំនាក់ទំនងក្នុងចំណោមបីចំនុច P ,Q និង R ជាទំនាក់ទំនងអ្វី ?

3. តាង $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ជាវ៉ិចទ័រទីតាំងនៃពីរចំនុច A និង B ដែលចំនុច O ជាចំនុចគល់។ ចូររកសមីការវ៉ិចទ័រ នៃកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ $\angle AOB$ ចំពោះ

   ក. $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$

   ខ. $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$

4. L_1 ជាបន្ទាត់កាត់តាមចំនុច $(1,1)$ ដែលមាន វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(1,2)$ ហើយ L_2 ជាបន្ទាត់កាត់តាមចំនុច $(1,5)$ ដែលមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(3,-4)$

   ក.រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃ L_1 និង L_2 ជាអនុគមន៍ប៉ារ៉ាម៉ែត s និង t ។

   ខ.រកកូរដោនៃចំនុចដែល L_1 ប្រសព្វ L_2 ។

5. តើប្រភេទចតុកោណ $ABCD$ ជាចតុកោណអ្វី បើទំនាក់ទំនងខាងក្រោមពិត ៖

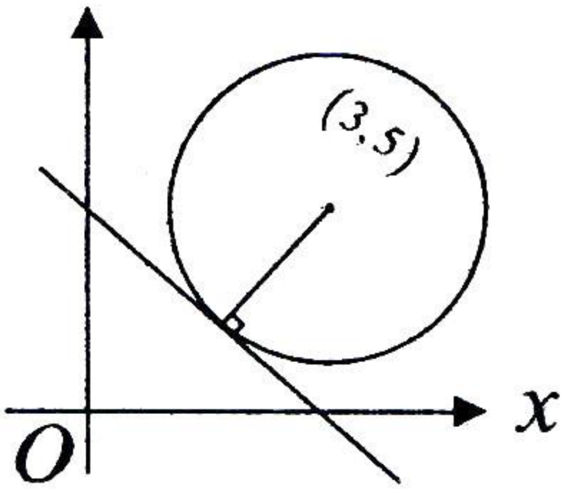
   ក. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AD}$

   ខ. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ និង $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD})=0$

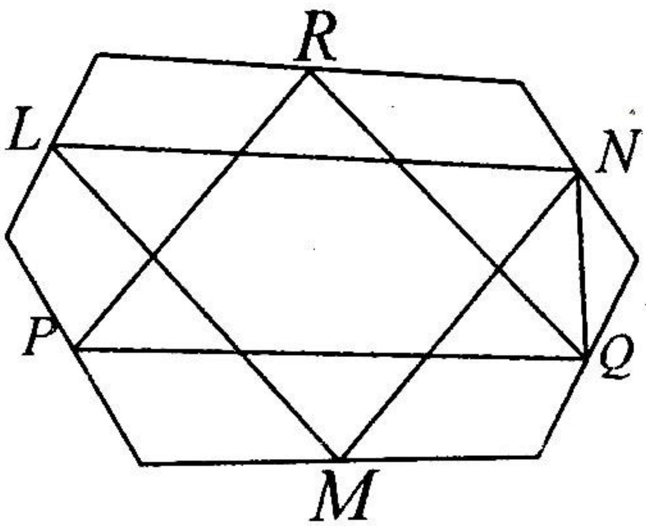
6. រកចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ $3x+4y+5=0$ និង ចំនុចខាងក្រោម :

   ក.$(2,1)$ ខ.$(-8,1)$ គ.$(0,0)$

7. រកចម្ងាយរវាងចំនុច $(5,3)$ និង បន្ទាត់ $x+2y=6$ ។រកសមីការរង្វង់មានផ្ចិត $(5,3)$ និង បន្ទាត់ប៉ះ $x+2y=6$ ។



8.បើយើងបង្កើតត្រីកោណពីរ ΔLMN និង ΔPQR ដោយភ្ជាប់ចំនុចកណ្តាលនៃឆកោណ ដូចបង្ហាញ ក្នុងរូប នោះត្រីកោណទាំងពីរនេះ មានប៉ារីសង់ តែមួយ ។ បង្ហាញដោយប្រើវិចទ័រទីតាំង នៃ កំពូលឆកោណ ។



ដំណោះស្រាយលំហាត់

1. បង្ហាញវ៉ិចទ័រទីតាំងនៃចំនុចខាងក្រោម ជាអនុគមន៍នៃ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$

ក. ចំនុចចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុងតាមផលធៀប $3:2$

គេមាន $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ជាវ៉ិចទ័រទីតាំងនៃ ចំនុច A និង B

តាមរូបមន្ត $\vec{c}=\dfrac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$ ដែល $m=3$, $n=2$ នាំអោយ

$$\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}=\frac{3\vec{b}+2\vec{a}}{3+2}=\frac{3\vec{b}+2\vec{a}}{5}$$

ដូចនេះ វ៉ិចទ័រទីតាំង គឺ $\dfrac{3\vec{b}+2\vec{a}}{5}$

ខ. ចំនុចចែកអង្កត់ AB ខាងក្រៅតាមផលធៀប $1:2$

គេមាន $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ជាវ៉ិចទ័រទីតាំងនៃចំនុច A និង B

តាមរូបមន្ត $\vec{c}=\dfrac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$ ដែល $m=1$, $n=2$ នាំអោយ

$$\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}=\frac{\vec{b}-2\vec{a}}{1-2}=2\vec{a}-\vec{b}$$

ដូចនេះ វ៉ិចទ័រទីតាំង គឺ $2\vec{a}-\vec{b}$

គ. ចំនុចស៊ីមេទ្រីទៅនឹង A ធៀបទៅនឹង B

ដោយ: ចំនុចស៊ីមេទ្រី ទៅនឹង A ធៀបនិង B នោះ វ៉ិចទ័រទីតាំងនៃចំនុច

កណ្តាលរបស់អង្កត់ AB គឺ $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

ដូចនេះ ចំនុចស៊ីមេទ្រីទៅនឹង A ធៀបនិង B គឺ $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

2. បង្ហាញថា $\overrightarrow{PQ}$ និង $\overrightarrow{PR}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$

គេមានវ៉ិចទ័រទីតាំងនៃ P , Q និង R កំណត់ដោយ

$\vec{p}=2\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{q}=-6\vec{a}+6\vec{b}$ និង $\vec{r}=6\vec{a}$ រៀងគ្នាដែល $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ មិនស្របគ្នា

គេបាន $\overrightarrow{PQ}=\left(-6\vec{a}+6\vec{b}\right)-\overrightarrow{AB}\left(2\vec{a}+2\vec{b}\right)$

$$=-6\vec{a}-2\vec{a}+6\vec{b}-2\vec{b}$$

$$=-8\vec{a}-4\vec{b}$$

$$=-4\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$$

$\overrightarrow{PR}=6\vec{a}-\left(2\vec{a}+2\vec{b}\right)$

$= 6\vec{a} - 2\vec{a} - 2\vec{b}$

$= 4\vec{a} - 2\vec{b}$

$= 2\left(2\vec{a} - \vec{b}\right)$

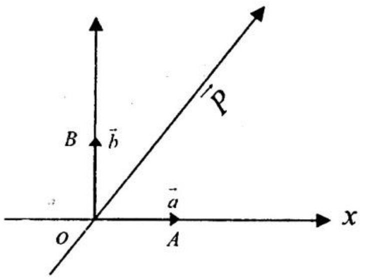
ដូចនេះ $\overrightarrow{PQ} = -4\left(2\vec{a} - \vec{b}\right)$ និង $\overrightarrow{PR} = 2\left(2\vec{a} - \vec{b}\right)$

ខ. ទំនាក់ទំនងរវាង P, Q និង R

តាមសំនួរក គេបាន $\overrightarrow{PQ} = -4\left(2\vec{a} - \vec{b}\right)$ និង $\overrightarrow{PR} = 2\left(2\vec{a} - \vec{b}\right)$ នោះ $\overrightarrow{PQ} = -2\overrightarrow{PR}$ នាំអោយ $\overrightarrow{PQ}$ និង $\overrightarrow{PR}$ នៅលើបន្ទាត់តែមួយ

ដូចនេះ P, Q និង R រត់ត្រង់គ្នា នៅលើ បន្ទាត់តែមួយ

3. រកសមីការវ៉ិចទ័រនៃកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ $\angle AOB$ ចំពោះ



ក. $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$

សមីការដែលកាត់តាមចំនុច $P(0,0)$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}(a,b)$

កំណត់ដោយ $\vec{P} = \vec{P_0} + t\vec{u}\ t \in \mathbb{R}$

$$= \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y + tb \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x = ta \\ y = tb \end{cases}$$

តែ $a = b = |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$

ដូចនេះ $\vec{P} = t\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$

ខ. $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$

សមីការដែលកាត់តាមចំនុច $P_0(0,0)$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (a,b)$

កំណត់ដោយ $\vec{P} = \begin{cases} x = at \\ y = bt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

$$=\begin{cases} x=\frac{1}{2}\vec{a}t \\ y=\frac{1}{3}\vec{b}t \end{cases}$$

ដូចនេះ $\vec{P}=t\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)$

4. ក. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃ L_1 និង L_2 ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃ s និង t

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រមានទម្រង់ $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$

ដោយ L_1 កាត់ចំនុច $(1,1)$ និង មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(1,2)$ ហើយ L_2 កាត់ចំនុច $(1,5)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(3,-4)$

គេបាន $L_1:\begin{cases} x=1+s \\ y=1+2s \end{cases}$

$L_2:\begin{cases} x=1+3t \\ y=5-4t \end{cases}$

ដូចនេះ $L_1:\begin{cases} x=1+s \\ y=1+2s \end{cases}$ និង $L_2:\begin{cases} x=1+3t \\ y=5-4t \end{cases}$

ខ. រកចំនុចប្រសព្វនៃ L_1 និង L_2

គេបាន $L_1:\begin{cases} x=1+s \\ y=1+2s \end{cases}$, $L_2:\begin{cases} x=1+3t \\ y=5-4t \end{cases}$

L_2 ប្រសព្វ L_1 កាលណា $\begin{cases} 1+s=1+3t\,(1) \\ 1+2s=5-4t\,(2) \end{cases}$

$$\begin{cases} s=3t\ (1) \\ 2s=4-4t\ (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s=3t\ (1) \\ s=2-2t\ (2) \end{cases}$$

ផ្ទឹម (1) និង (2) $:3t=2-2t$

$$5t=2$$

នាំអោយ $t=\frac{2}{5}$

យក $t=\frac{2}{5}$ ជួសក្នុង (1) $:s=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$

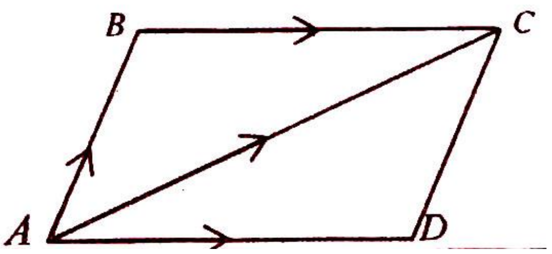
យក $s=\frac{6}{5}$ ឬ $t=\frac{2}{5}$ ទៅជួសក្នុង L_1 ឬ L_2

គេបាន $\begin{cases} x=1+s=1+\frac{6}{5}=\frac{11}{5} \\ y=1+2s==1+2\times\frac{6}{5}=\frac{17}{5} \end{cases}$

ដូចនេះ L_1 និង L_2 ប្រសព្វត្រង់ $\left(\frac{11}{5},\frac{17}{5}\right)$

5. តើ ប្រភេទចតុកោណ $ABCD$ ជាចតុកោណអ្វី បើទំនាក់ទំនងខាងក្រោមពិត

ក. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AD}$



ដោយ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{Bc}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$ តែ $\overrightarrow{BC}//\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AD}$

ដូចនេះ ចតុកោណ $ABCD$ ជា ប្រលេឡូក្រាម

ខ. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ និង $\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right).\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}\right)=0$

គេបាន $\begin{cases} \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\ (1) \\ \left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right).\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}\right)=0\ (2) \end{cases}$

តាម (1) $\Rightarrow \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$

តាម (2) $\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right).\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}\right)=0$

$\Leftrightarrow -\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right).\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)=0$

$\Leftrightarrow -\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC}=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}.\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right)=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AB}=0$

$\Leftrightarrow 0+0=0$

(ព្រោះ $\overrightarrow{DB}\perp\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DB}\perp\overrightarrow{AB}$)

ដូចនេះ ចតុកោណ $ABCD$ ជាការេ

6. រកចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ $3x+4y+5=0$ និង ចំនុច :

ក. $(2,1)$

ចម្ងាយរវាងចំនុច និង បន្ទាត់ គឺ $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

គេបាន $a=3$, $b=4$, $c=5$, $x_1=2$, $y_1=1$

នោះ $d=\dfrac{|3\times 2+4\times 1+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|6+4+5|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{15}{\sqrt{25}}=\dfrac{15}{5}=3$

ដូចនេះ ចម្ងាយ $d=3$ (ឯកតាប្រវែង)

ខ. $(-8,1)$

គេបាន $x_1=-8$, $y_1=1$

នោះ $d=\dfrac{|3\times(-8)+4\times 1+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|-24+4+5|}{\sqrt{25}}=\dfrac{|-15|}{5}=3$

ដូចនេះ $d=3$ (ឯកតាប្រវែង)

គ. $(0,0)$

គេបាន $x_1=0$, $y_1=0$

នោះ $d=\dfrac{|3\times 0+4\times 0+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|5|}{\sqrt{25}}=\dfrac{5}{5}=1$

ដូចនេះ $d=1$ (ឯកតាប្រវែង)

7 . +រកចម្ងាយរវាងចំនុច $(5,3)$ និង បន្ទាត់ $x+2y=6$

តាមរូបមន្ត $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

គេបាន $x+2y-6=0$

នោះ $d=\dfrac{|1\times 5+2\times 3-6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|5+6-6|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

ដូចនេះ ចម្ងាយ $d=\sqrt{5}$ (ឯកតាប្រវែង)

+រកសមីការរង្វង់ មានផ្ចិត $(5,3)$ និង បន្ទាត់ $x+2y=6$

សមីការរង្វង់មានទម្រង់ $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ ដែល $(x_0\ ,\ y_0)$ ជា ផ្ចិត និង r ជាកាំ ដែល ជាចម្ងាយពីផ្ចិត $(5,3)$ ទៅបន្ទាត់ប៉ះ $x+2y=6$

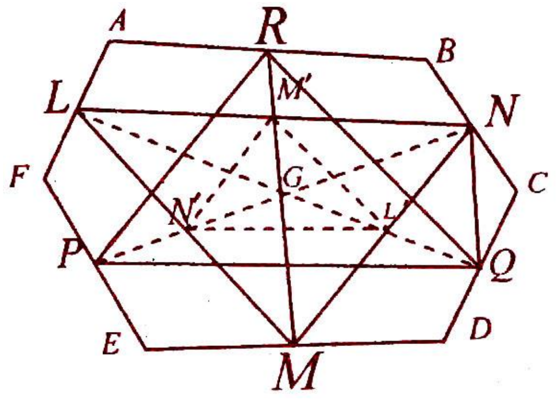
គេបាន $r=d=\sqrt{5}$

គេបាន $(x-5)^2+(y-3)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2$

$(x-5)^2+(y-3)^2=5$

ដូចនេះ សមីការរង្វង់កំណត់ដោយ $(x-5)^2+(y-3)^2=5$

8 . បង្ហាញថាត្រីកោណ ΔLMN និង ΔPQR មានប៉ារីសង់រួមដោយប្រើវិចទ័រទីតាំង នៃកំពូលឆកោណ



តាមរូប : យើងភ្ជាប់ L ទៅ Q

គេបាន $\overrightarrow{LL'}//\overrightarrow{LQ}$ (ព្រោះ L, L' និង Q ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ)

\+ យើងភ្ជាប់ M ទៅ R

គេបាន $\overrightarrow{MM'}//\overrightarrow{MR}$ (ព្រោះ M , M' និង R ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ)

\+ យើងភ្ជាប់ N ទៅ P

គេបាន (ព្រោះ N , N' និង P ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ)

ដោយ R ក $\overrightarrow{NN'}//\overrightarrow{NP}$ ណ្ដាល AB , N កណ្ដាល BC , Q កណ្ដាល EF និង L កណ្ដាល FA

នោះ $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{LM}$

$\Rightarrow M'$ កណ្ដាល LM

$\overrightarrow{CD}//\overrightarrow{LM}$

$\Rightarrow L'$ កណ្ដាល NM

$\overrightarrow{EF}//\overrightarrow{ML}$

$\Rightarrow N'$ កណ្ដាល MN

គេបាន ΔLMN ដែល L' , M' និង N' ជាចំនុចកណ្ដាលរៀងគ្នានៃ MN , LM , និង ML

យើងត្រូវស្រាយ ΔABC និង $\Delta L'M'N'$ មានប៉ារីសង់រួមគ្នា គឺ ត្រូវស្រាយថា : $\overrightarrow{LL'}+\overrightarrow{MM'}+\overrightarrow{NN'}=0$

គេបាន $\overrightarrow{LN}+\overrightarrow{NL'}+\overrightarrow{ML}+\overrightarrow{LM'}+\overrightarrow{NL'}+\overrightarrow{LN'}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{LN} - \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{NL'} + \overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LM'} + \overrightarrow{LN'}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{NM}}{2} + \overrightarrow{ML} + \frac{\overrightarrow{LN}}{2} + \frac{\overrightarrow{LM}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{LN} + \overrightarrow{NM}\right) - \overrightarrow{LM} + \frac{\overrightarrow{LM}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{LM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{LM} = \vec{0}$$

ដូចនេះ ΔLMN និង ΔPQR មានប៉ារីសង់រួម

លំហាត់ជំពូកទី៩

1. រកកូអរដោនេនៃចំនុច P និង Q ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម ហើយគេអោយ ពីរចំនុច $A(-3,4)$ និង $B(2,-1)$ និង O ជាគល់ :

   ក. $\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{AB}$ ខ. $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

2. គេអោយ $\overrightarrow{OA}=2\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=3\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=6\vec{a}-6\vec{b}$ និង $\overrightarrow{OD}=6\vec{b}-4\vec{a}$ ។ បង្ហាញថា

   ក. បីចំនុច A,B និង C ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ

   ខ. $AB \parallel OD$

3. គេអោយ $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=2$ និង $|\vec{a}+\vec{b}|=1$ រក

   ក. $\vec{a}.\vec{b}$ ខ. $(\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}+2\vec{b})$

4. គេអោយ $\overrightarrow{OP}=(1,1)$ និង $\overrightarrow{OQ}=(1-\sqrt{3},1+\sqrt{3})$

   ក. រកមុំដែលកើតឡើងដោយ $\overrightarrow{OP}$ និង $\overrightarrow{OQ}$

   ខ. រកក្រឡាផ្ទៃ នៃ ΔOPQ

5. រកវិចទ័រណរម៉ាល់នៃបន្ទាត់ $\sqrt{3x}+y-1=0$ និង $x+\sqrt{3y}+2=0$ ហើយ រកមុំដែលកើតឡើងដោយបន្ទាត់ ។

6. វិចទ័រ $\vec{p}$ និង $\vec{q}$ ចល័ត ហើយ $|\vec{p}.\vec{q}| \le |\vec{p}|.|\vec{q}|$ ពិត ។ ប្រើវិសមភាពនេះដើម្បីបង្ហាញវិសមភាពខាងក្រោម ដោយសន្មត់ថា : $\vec{p}=(a,b)$ និង $\vec{q}=(x,y):(ax+by)^2 \le (a^2+b^2)^2(x^2+y^2)$

7. ចំនុច P ផ្លាស់ទីនៅលើប្លង់ ដែលមានវិចទ័រល្បឿន $\vec{v}=(2,5)$ ។ ពេល $t=0$ ហើយ P ស្ថិតនៅទីតាំងត្រង់ចំនុច $A(-6,-2)$ ហើយឯកតា នៃ រយៈពេល គឺ ១ វិនាទី ។

   ក. រកវិចទ័រទីតាំង $\vec{p}$ នៃ ចំនុច P បន្ទាប់ពី t វិនាទី ។

   ខ. តើ ពេលណាដែល P ខិតទៅជិត ចំនុច $(0,2)$?

8. នៅក្នុងប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ គេតាង E ជា ចំនុចចែកជ្រុង AB ខាងក្នុងតាមផលធៀប $2:1$ ហើយតាង F ជា ចំនុចចែកអង្កត់ទ្រូង BD ខាងក្នុង តាមផលធៀប $1:3$ ។

   ក. តាង $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$ និង $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ ។ បង្ហាញថា $\overrightarrow{CE}$ និង $\overrightarrow{CF}$ ជាអនុគមន៍ នៃ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ។

   ខ. បង្ហាញថា បីចំនុច C, E និង F ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។

9. នៅក្នុង ΔABC ដែលកំពូលទាំងបី $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ និង $C(\vec{c})$ ហើយតាង $P(\vec{p})$ ជា ចំនុចចែក AB ខាងក្នុងតាមផលធៀប $1:2$ និង $Q(\vec{q})$ ជា ចំនុចកណ្តាល AC ហើយ $R(\vec{r})$ ជា ចែក BC ខាងក្រៅតាមផលធៀប $2:1$ ។ បង្ហាញថា $\vec{q}=\frac{3}{4}\vec{p}+\frac{1}{4}\vec{r}$ និងបង្ហាញចំនុចទាំង

បី P, Q និង R ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។

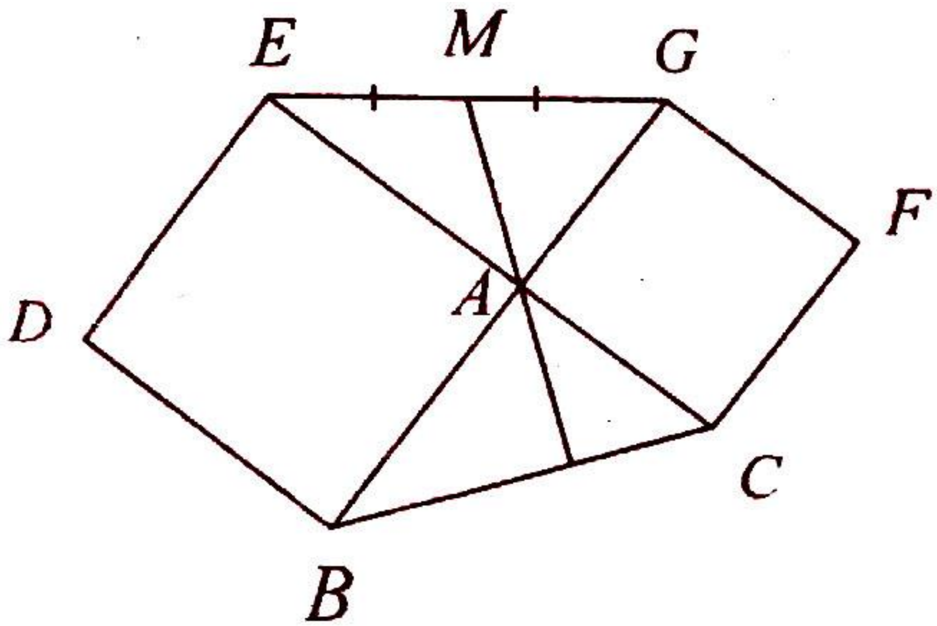
10 . តាង s ជាក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម ដែលពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ មិនស្របគ្នា ដែលកើតឡើងដោយជ្រុងពីរ ។ បង្ហាញថា $s^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}.\vec{b})$ ។ ហើយបង្ហាញផងដែរថា $s=|a_1 b_2-a_2 b_1|$ ដោយតាង $\vec{a}=(a_1, a_2)$ និង $\vec{b}=(b_1, b_2)$ ។

11 . គេអោយ $\vec{a}\neq 0$, $|\vec{b}|=2|\vec{a}|$ ហើយវ៉ិចទ័រ $\vec{a}+\vec{b}$ និង $5\vec{a}-2\vec{b}$ កែងគ្នា រកមុំដែលកើតឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ។

12 . O ជាចំនុចគល់ និង ពីរវ៉ិចទ័រ $A(\vec{a})$ និង $B(\vec{b})$ មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។ បង្ហាញថា វ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{c}$ នៃចំនុច C ដែលមិនស្ថិតនៅក្នុង ΔABC គឺ

$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$, $m>0$ $n>0$, $m+n<1$ ។

13 . នៅក្នុងរូបខាងក្រោម គេមានចតុកោណ $ABDE$ និង $ACFG$ ជាការេ ។ តាង M ជាចំនុចកណ្តាល នៃអង្កត់ EG ។ បង្ហាញថា បន្ទាត់ MA កែងទៅនឹងបន្ទាត់ BC ដោយប្រើវ៉ិចទ័រ ។



ដំណោះស្រាយលំហាត់

1. រកកូអរដោនេ នៃ P និង Q ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ :

ក. $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{AB}$

គេបាន $A(-3, 4)$; $B(2, -1)$

តាង $\vec{P} = (x_1, y_1)$

គេបាន $\overrightarrow{PO} = (0-x_1, 0-y_1) = (-x_1, -y_1)$

$\overrightarrow{AB} = (2-(-3), -1-4) = (5, -5)$

ដោយ $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{AB}$ នោះ $\begin{cases} -x_1 = 5 \\ -y_1 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ y_1 = 5 \end{cases}$

ដូចនេះ $P(-5, 5)$

ខ. $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

តាង $\vec{Q} = (x_2, y_2)$

គេបាន $\overrightarrow{AQ} = (x_2-(-3); y_2-4) = (x_2+3; y_2-4)$

$\overrightarrow{AB} = (5, -5)$

ដោយ . $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ នោះ $\begin{cases} (x_2+3) = \frac{1}{2}\times 5 \\ y_2-4 = \frac{1}{2}\times(-5) \end{cases}$
$\begin{cases} x_2 = \frac{5}{2} - 3 = -\frac{1}{2} \\ y_2 = -\frac{5}{2} + 4 = \frac{3}{2} \end{cases}$

ដូចនេះ $Q\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

2 . ក. បង្ហាញថា A, B និង C ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ

គេបាន $\overrightarrow{OA} = 2\vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = 6\vec{a} - 6\vec{b}$

ដោយ $O(0, 0)$

គេបាន $A(2a)$; $B(3b)$; និង $C(6a-6b)$

នោះ $\overrightarrow{AB} = 3\vec{b} - 2\vec{a}$; $\overrightarrow{AC} = (6\vec{a}-6\vec{b}) - 2\vec{a}$

$= 4\vec{a} - 6\vec{b}$

$= -2(3\vec{b} - 2\vec{a})$

ដោយ $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ នាំអោយ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ

ដូចនេះ A, B និង C ស្ថិតនៅបន្ទាត់ តែមួយ

ខ. $AB//OD$

គេមាន $\overrightarrow{OD}=6\vec{b}-4\vec{a}$

គេបាន $\overrightarrow{AB}=3\vec{b}-2\vec{a}$

ដោយ $\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{AB}$ នោះ $\overrightarrow{OD}$ កូលីនេអ៊ែរ $\overrightarrow{AB}$

ដូចនេះ $AB//OD$

3. ក. រក $\vec{a}.\vec{b}$

គេមាន $|\vec{a}|=\sqrt{3}$; $|\vec{b}|=2$ និង $|\vec{a}+\vec{b}|=1$ ត្រូវប្រើឯកលក្ខណៈភាព $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

គេបាន $|\vec{a}|^2=(\sqrt{3})^2=3$; $|\vec{b}|^2=2^2=4$

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=1^2=1$

គេបាន $3+4=1-2\vec{a}.\vec{b}$ នាំអោយ $2\vec{a}.\vec{b}=1-7$

$$\vec{a}.\vec{b}=-\frac{6}{2}=-3$$

ដូចនេះ $\vec{a}.\vec{b}=-3$

ខ. $(\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}+2\vec{b})$

គេបាន $(\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}+2\vec{b})=\vec{a}.(\vec{a}+2\vec{b})-\vec{b}.(\vec{a}+2\vec{b})$

$$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}.\vec{b}-\vec{b}.\vec{a}-2|\vec{b}|^2$$

$$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}.\vec{b}-\vec{a}.\vec{b}-2|\vec{b}|^2$$

$$=|\vec{a}|^2+\vec{a}.\vec{b}-2|\vec{b}|^2$$

ដោយ $|\vec{a}|^2=3$; $|\vec{b}|^2=4$ និង $\vec{a}.\vec{b}=-3$

នោះ $(\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}+2\vec{b})=3-3-2\times4=-8$

ដូចនេះ $(\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}+2\vec{b})=-8$

4 . ក. រកមុំកើតឡើងដោយ $\overrightarrow{OP}$ និង $\overrightarrow{OQ}$

គេមាន $\overrightarrow{OP}=(1,1)$ និង $\overrightarrow{OQ}=(1-\sqrt{3},1+\sqrt{3})$

តាមរូបមន្ត $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}|.|\overrightarrow{OQ}|}$

ដោយ $\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\left|\overrightarrow{OQ}\right| = \sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2+\left(1+\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3}+3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ} = 1\times\left(1-\sqrt{3}\right)+1\times\left(1+\sqrt{3}\right) = 1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3} = 2$

គេបាន $\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{2}\times2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$

នាំអោយ $\theta = 60^\circ$

ដូចនេះ $\theta = 60^\circ$

ខ. រកក្រឡាផ្ទៃនៃ ΔOPQ

តាមរូបមន្ត $S_{\Delta OPQ} = \dfrac{1}{2}OP\times OQ\times\sin\theta$

គេបាន $OP = \left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{2}$; $OQ = \left|\overrightarrow{OQ}\right| = 2\sqrt{2}$; $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

នោះ $S_{\Delta OPQ} = \dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

ដូចនេះ $S_{\Delta OPQ} = \sqrt{3}$ (ឯកតា ផ្ទៃ)

5 . រកវិចទ័រណរម៉ាល់ នៃបន្ទាត់ $\sqrt{3}x+y-1=0$ និង $x+\sqrt{3}y+2=0$

បន្ទាត់ $\sqrt{3}x+y-1=0$ និង $x+\sqrt{3}y+2=0$ មានវិចទ័រណរម៉ាល់រៀងគ្នា

$\overrightarrow{u_1} = \left(\sqrt{3},1\right)$ និង $\overrightarrow{u_2} = \left(1,\sqrt{3}\right)$

រកមុំដែលកើតឡើងដោយបន្ទាត់ $\sqrt{3}x+y-1=0$ និង $x+\sqrt{3}y+2=0$

គេបាន $\overrightarrow{u_1} = \left(\sqrt{3},1\right)$ និង $\overrightarrow{u_2} = \left(\sqrt{3},1\right)$ ជាវិចទ័រណរម៉ាល់នៃបន្ទាត់

$\sqrt{3}x+y-1=0$ និង $x+\sqrt{3}y+2=0$ រៀងគ្នា

តាមរូបមន្ត $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$

ដោយ $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = \left(\sqrt{3},1\right).\left(1,\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}\times1+1\times\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$\left|\overrightarrow{u_1}\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$\left|\overrightarrow{u_2}\right| = \sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$

នោះ $\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{3}}{2\times2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

នាំអោយ $\theta = 30^\circ$

ដូចនេះ $\theta = 30^\circ$

6 . បង្ហាញថាវិសមភាព $(ax+by)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2)$

សន្មត់ $\vec{p}=(a,b)$ និង $\vec{q}=(x,y)$; $\vec{p}$ និង $\vec{q}$ ចល័ត

គេមាន $|\vec{p}.\vec{q}| \le |\vec{p}|.|\vec{q}|$

គេបាន $|\vec{p}.\vec{q}|^2 \le |p|^2.|q|^2$

ដោយ $\vec{p}.\vec{q}\ (a,b).(x,y)=ax+by$ សមមូល $|\vec{p}.\vec{q}|^2=(ax+by)^2$

$|\vec{p}|.|\vec{q}|=\left(\sqrt{a^2+b^2}\right).\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ សមមូល $(a^2+b^2).(x^2+y^2)$

ដូចនេះ $(ax+by)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2)$

7 . ក. រកវ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{p}$ នៃចំនុច P

តាម $\vec{h}=\vec{a}+t\vec{p}$

$=(-6,-2)+t(2,5)$

$=(-6,-2)+(2t,5t)$

$=(-6+2t,-2+5t)$

ដូចនេះ $\vec{h}=(-6+2t,-2+5t)$

ខ. រករយៈពេល t

ដោយ $\vec{h}=(-6+2t,-2+5t)$

$\Rightarrow |\vec{h}|^2=(-6+2t)^2+(-2+5t)^2$

តែ $P=h^2$ ខិតទៅរក 0

$\Rightarrow (-6+2t)^2+(-2+5t)^2=0$

$\Leftrightarrow 29t^2+64t+52=0$

$\Leftrightarrow 29\left(t-\frac{32}{29}\right)+\frac{484}{29}=0$

$\Rightarrow t=\frac{32}{29}$

ដូចនេះ $t=1{,}1$ វិនាទី

8 . ក. បង្ហាញថា $\overrightarrow{CE}$ និង $\overrightarrow{CF}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$

ដោយ $\vec{E}=\frac{2\vec{b}+\vec{a}}{3}$, $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$

ដូចនេះ $\overrightarrow{CE}=\frac{\vec{a}-3\vec{b}}{3}$, $\overrightarrow{CF}=\frac{\vec{a}-3\vec{b}}{4}$

ខ. បង្ហាញថាបី ចំនុច $c\,, E$ និង F ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ

តាមសំនួរ ក: $\begin{cases} \overrightarrow{CE} = \dfrac{\vec{a}-3\vec{b}}{3} & (1) \\ \overrightarrow{CF} = \dfrac{\vec{a}-3\vec{b}}{4} & (2) \end{cases}$

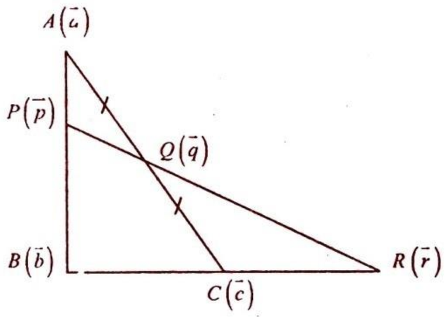
យក $\dfrac{(1)}{(2)}$ គេបាន $\dfrac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{CF}} = \dfrac{4}{3}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{CF} = 3\overrightarrow{CE}$ នោះ

គេបាន $\overrightarrow{CE}$ និង $\overrightarrow{CF}$ ជាវ៉ិចទ័រ តែមួយ

ដូចនេះ $C\,, E$ និង F នៅលើបន្ទាត់តែមួយ

9 . បង្ហាញថា $\vec{q} = \frac{3}{4}\vec{p} + \frac{1}{4}\vec{r}$



ដោយ $\vec{q}$ ជា ចំនុច កណ្ដាលនៃ AC

$$\Rightarrow \vec{q} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

$$\vec{r} = 2\vec{c}-\vec{b}$$

$$\vec{p} = \frac{\vec{b}+2\vec{a}}{3}$$

គេបាន $\frac{3}{4}\vec{p} + \frac{1}{4}\vec{r}$

$$\frac{3}{4}\left(\frac{\vec{b}+2\vec{a}}{3}\right) + \frac{1}{4}\left(2\vec{c}-\vec{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(\vec{b}+2\vec{a}+2\vec{c}-\vec{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(2\vec{a}+2\vec{c}\right) = \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2} = \vec{q}$$

ដូចនេះ $\vec{q}=\frac{3}{4}\vec{p}+\frac{1}{4}\vec{r}$

បង្ហាញថាចំនុច P, Q និង R ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ

តាមរូប គេឃើញថា $\overrightarrow{PR}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$ នោះ $\overrightarrow{PR}$ និង $\overrightarrow{PQ}$ ជាវ៉ិចទ័រ តែមួយ

ដូចនេះ P , Q និង R ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ

10. បង្ហាញថា $S^2=|\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2-(\vec{a}.\vec{b})$

ដោយក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម

$S=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin\theta$ តែ $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

នាំអោយ $S=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\sqrt{|\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2\cos^2\theta}$

តែ $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos^2\theta$

$(\vec{a}.\vec{b})^2=|\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2.\cos^2\theta$

នាំអោយ $S=\sqrt{|\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2-(\vec{a}.\vec{b})^2}$

នោះ $S^2=|\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2-(\vec{a}.\vec{b})$ ពិត

ដូចនេះ $S^2=|\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2-(\vec{a}.\vec{b})$

\+ បង្ហាញថា $S=|a_1.b_2-a_2.b_1|$

តាម $S=\det(\vec{a},\vec{b})=\left\|\begin{matrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{matrix}\right\|=|a_1.b_2-a_2.b_1|$

ដូចនេះ $S=|a_1.b_2-a_2.b_1|$

11. រកមុំដែលកើតឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$

យើងមាន វ៉ិចទ័រ $\begin{cases}\vec{a}+\vec{b}\\ 5\vec{a}-2\vec{b}\end{cases}$ កែងគ្នា

គេបាន $(\vec{a}+\vec{b}).(5\vec{a}-2\vec{b})=0$

$$\Leftrightarrow \vec{a}\left(5\vec{a}-2\vec{b}\right)+\vec{b}\left(5\vec{a}-2\vec{b}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 5\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}.\vec{b}+5\vec{a}.\vec{b}-2\left|\vec{b}\right|^2=0$$

$$\Leftrightarrow 5\left|\vec{a}\right|^2+3\vec{a}.\vec{b}-\left(2\left|\vec{a}\right|\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow 5\left|\vec{a}\right|^2+3\vec{a}.\vec{b}-8\left|\vec{a}^2\right|=0$$

$$\Leftrightarrow -3\left|\vec{a}\right|^2+3\vec{a}.\vec{b}=0$$

តែ $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\theta$

គេបាន $3\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\theta=3\left|\vec{a}\right|^2$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{3\left|\vec{a}\right|^2}{3\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\frac{\left|\vec{a}\right|^2}{\left|\vec{a}\right|.2\left|\vec{a}\right|}$$

$$=\frac{\left|\vec{a}\right|^2}{\left|\vec{a}\right|.2}=\frac{1}{2}=\cos 60^\circ$$

ដូចនេះ $\theta=60^\circ$

12. បង្ហាញថា វ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{C}$ នៃចំនុច C ដែលមិនស្ថិតនៅក្នុង ΔABC គឺ $\vec{C}=m\vec{a}+n\vec{b}$

ដោយ $\vec{C}=\vec{a}+t_0\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\vec{a}+\vec{b}.t_0-\vec{a}.t_0$

$$\Leftrightarrow (1-t_0).\vec{a}+\vec{b}.\vec{t_0} \qquad (1)$$

តាង $m=1-t_0$, $t_0=n$

ដែល $m>0$, $n>0$ ហើយ $m+n>1$

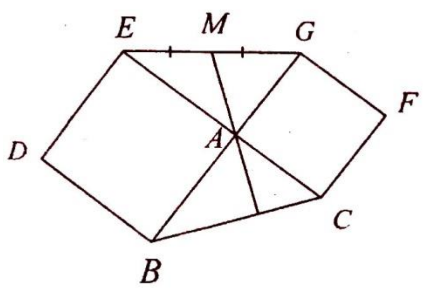
$$\Rightarrow t_0=1-m \text{ , } t_0=n$$

តាម (1) $\Rightarrow \vec{C}\left[1-(1-m)\right].\vec{a}+n\vec{b}$

$$\vec{C}=m\vec{a}+n\vec{b}$$

ដូចនេះ $\vec{C}=m\vec{a}+n\vec{b}$

13 . បង្ហាញថា បន្ទាត់ $MA\perp BC$ ដោយប្រើវ៉ិចទ័រ



ត្រូវស្រាយថា $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=0$

គេបាន $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{EM}\right).\overrightarrow{BC}$

$$=\left(\overrightarrow{EA}-\frac{\overrightarrow{EG}}{2}\right).\overrightarrow{BC}$$

$$=\left(\overrightarrow{EA}-\frac{\overrightarrow{EG}}{2}\right).\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\overrightarrow{EA}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)-\frac{\overrightarrow{EG}}{2}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{BA}\right)-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=0+\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{BA}\right)-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AC}-\frac{\overrightarrow{BA}}{2}\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AG}\right)-\frac{\overrightarrow{AC}}{2}\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AG}\right)$$

$$=\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AC}-\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{EA}}{2}-\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AG}}{2}-\frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{EA}}{2}-\frac{\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AC}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AC}\right)-0-\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AG}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AC}\right)-\left(\overrightarrow{BA}\right)-\overrightarrow{AG}\right]$$

ដោយ $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AC}$ ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ

$\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AC}\right| \quad (1)$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AG}$ ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ

$\Rightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AG}=\left|\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AG}\right| \quad (2)$

តាម (1) និង (2)

$$\Rightarrow \begin{cases} EC=\left|\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AC}\right| \\ BG=\left|\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AG}\right| \end{cases}$$

តែ $BG=EC$

$\frac{1}{2}\left(EC-EC\right)=0$ ពិត

ដូចនេះ $\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{BC}$