



引文格式:李博峰,苗维凯,陈广鄂.多频多模GNSS高精度定位关键技术与挑战[J].武汉大学学报(信息科学版),2023,48(11):1769-1783.DOI:10.13203/j.whugis20230309

Citation: LI Bofeng, MIAO Weikai, CHEN Guang'e. Key Technologies and Challenges of Multi-frequency and Multi-GNSS High-Precision Positioning[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2023, 48(11): 1769-1783. DOI: 10.13203/j.whugis20230309

多频多模GNSS高精度定位关键技术与挑战

李博峰¹ 苗维凯¹ 陈广鄂¹

¹ 同济大学测绘与地理信息学院,上海,200092

摘要:高精度全球导航卫星系统(global navigation satellite system, GNSS)定位技术拓展了位置服务行业的纵深发展,在智慧城市、智能交通和无人驾驶等领域得到了广泛应用,是当前卫星导航领域的热点。梳理了GNSS定位技术的现状和发展脉络,阐述多频多模GNSS高精度定位所涉及的整数模糊度固定、函数模型和随机模型融合等共性基础理论,介绍提升GNSS定位性能的非模型误差处理以及周跳探测与数据中断修复等关键技术。依托基础理论和关键技术的创新成果,介绍了同济大学GNSS团队近年来发展的4种多频多模GNSS高精度定位应用新技术,并展望了未来以GNSS为核心的高精度定位技术的发展趋势及其挑战。

关键词:整数模糊度;高精度定位;长距离RTK;数据融合;海洋定位

中图分类号:P228

文献标识码:A

收稿日期:2023-08-23

DOI:10.13203/j.whugis20230309

文章编号:1671-8860(2023)11-1769-15

Key Technologies and Challenges of Multi-frequency and Multi-GNSS High-Precision Positioning

LI Bofeng¹ MIAO Weikai¹ CHEN Guang'e¹

¹ College of Surveying and Geoinformatics, Tongji University, Shanghai 200092, China

Abstract: High-precision global navigation satellite system (GNSS) positioning technology, as a hot spot in the field of satellite navigation, has expanded the in-depth development of the location-based service area, and has been widely used in smart cities, intelligent transportation, autonomous driving and other fields. First, this paper presents the current status and development of GNSS positioning technologies. Then, it explains the common basic theories such as integer ambiguity fixation, functional model and stochastic model fusion involved in multi-frequency multi-GNSS high-precision positioning, as well as the key techniques for improving GNSS positioning performance such as the non-model error processing, the cycle slip detection and data interruption repair. Based on the innovations of basic theories and key techniques, this paper introduces four new technologies for multi-frequency multi-GNSS high-precision positioning applications developed by Tongji University GNSS team in recent years. Finally, we remark the future development trend and challenges of GNSS-based high-precision positioning.

Key words: integer ambiguity; high-precision positioning; long-distance RTK; data fusion; ocean positioning

全球导航卫星系统(global navigation satellite system, GNSS)作为重要的国家时空信息基础设施,在经济建设与军事国防领域发挥着重要作用,已被广泛应用于涉及导航、定位和授时的

诸多领域^[1]。目前全球已建成了GPS、GLONASS、Galileo和北斗卫星导航系统(Beidou navigation satellite system, BDS)四大全球导航系统以及以日本准天顶卫星系统(quasi-zenith

基金项目:国家自然科学基金(42225401);上海市科委科技创新行动计划(21511103902, 22511103003);上海市产业协同创新(科技)项目(XTCX-KJ-2023-35, XTCX-KJ-2022-09)。

第一作者:李博峰,博士,教授,研究方向为测量数据处理理论、GNSS精密定轨定位、多传感器融合综合PNT。bofeng_li@tongji.edu.cn

satellite system, QZSS)和印度区域导航卫星系统为代表的区域卫星导航系统, GNSS进入全新的发展阶段, 给用户提供了丰富的卫星和频率资源^[2]。主要表现在: (1) 卫星数成倍增加, 目前在轨的导航卫星多达160颗; (2) 各系统均提供三频甚至更多频率的信号, 其中北斗和Galileo全星座播发五频信号; (3) 全球、区域、国家和城市等不同尺度的地基参考网快速建设, 为用户提供了丰富的数据源。

过去30年间, GNSS定位技术取得了长足发展, 历经了从静态到动态、从事后到实时、从单频单系统到多频多系统、从单站到网络的转变^[3-4]。基于丰富的卫星和频率资源, 现有的定位技术已能较好地满足不同行业应用对精度从米级至毫米级的需求。充分挖掘丰富的卫星、频率和地基参考网的数据资源优势, 发展大尺度、高精度、高可信的定位新技术成为趋势。

高精度定位离不开模糊度正确固定的毫米级载波相位观测值, 因此模糊度固定长期以来是GNSS高精度应用的基础性、热点和难点课题^[5]。业界围绕如何快速、正确、可靠地固定模糊度开展了系统性研究, 发展了整数容许估计、整数孔径估计和整数等变估计等三类模糊度固定方法^[6], 同时针对多频、有偏、病态和 p -范模式下整数的特点, 提出了相应的整数估计策略^[7-9]。GNSS的泛在应用必然涉及更加复杂的场景和环境, 导致载波相位发生信噪比低、频繁周跳和中断等现象^[10], 因此发展适用于复杂场景下的整数估计方法是当前的热点。此外, 多频多模高精度定位的另一关键在于如何有效融合多频多模的观测数据^[11], 包括函数模型的弹性融合、随机模型的精化以及外部约束条件的合理引入。

近年来, 以高精度定位为基础的位置服务大众市场蓬勃发展, 其难点是要以低成本终端实现高精度定位, 这对高精度定位技术提出了新挑战^[12]。此外, 面向“一带一路”、海洋开发利用等国家重大战略需求, 迫切需要发展基准站稀缺、通讯困难等环境下的大尺度高精度定位技术^[13]。低轨卫星增强GNSS已被公认为是未来导航系统的发展方向^[14-15], 大量低轨卫星的引入有望提升全球高精度服务性能, 但对于城市复杂遮挡环境, 频繁中断(碎片化)的载波相位是否能有效解决城市高精度定位依然有待考量。引入与GNSS不同机理的多传感器进行融合定位是解决室内外无缝高精度定位的唯一途径^[16], 多传感器函数

模型的弹性构建、随环境自适应的随机模型精化等问题仍需系统性研究。

本文将梳理GNSS定位技术的发展脉络, 以厘清不同定位技术之间内在联系; 通过归纳总结分析GNSS高精度定位的共性理论和关键技术, 揭示不同方法之间的本质; 介绍以当前丰富卫星和频率资源为基础, 基于创新理论成果和关键技术成果发展的4种GNSS定位新技术。并面向未来大众和无缝定位需求, 展望以GNSS为核心的多源融合定位技术的机遇与挑战, 并给出一些研究思考和建议。

1 GNSS定位技术及其发展脉络

单点定位(single point positioning, SPP)作为GPS设计之初的定位模式, 采用单台接收机的伪距观测值结合广播星历进行定位, 优点在于可以获得接收机实时绝对坐标。然而, 受卫星端误差和大气延迟误差的影响, 伪距观测值精度较低, 导致SPP定位精度较差, 仅适用于米级精度需求的导航定位场景^[17]。为削弱和消除观测值中的一些系统误差, 差分定位的思想应运而生^[18]。差分定位又称为相对定位, 基于伪距的动态相对定位仅可实现亚米级甚至米级精度, 只有长时间的静态观测才有望达到厘米级精度。为满足动态厘米级精度需求, 联合伪距和载波相位的实时动态定位的技术(real-time kinematic, RTK)得到了长足发展并被广泛应用^[19]。单基站RTK以基准站和流动站的空间误差相似为前提, 基线距离增加会导致空间误差相似性减弱, 从而引起定位误差变大, 因此单基站RTK的服务范围通常小于20 km^[20]。为了拓展RTK服务范围和便利性, 在区域范围建设多个基准站(一般相距50~70 km)来实时精确解算空间误差^[21], 从而提供区域用户的RTK定位, 该技术称为网络RTK^[22-23]。目前主流的网络RTK实现方法包括: Trimble的GPSNET采用的虚拟参考站技术^[24], 德国Geo++公司采用的局域改正数技术^[25], Leica的SPIDER NET采用的主辅站技术和单独主辅站改正技术^[26]。在过去20多年中, 网络RTK技术已广泛应用于测绘、导航和地学研究等领域。网络RTK充分利用了多频多模卫星信号和地基参考站数据资源, 同时借助了网络通讯的信息手段, 在实际工程应用和定位技术发展进程中有着举足轻重的地位。

随着卫星精密轨道和钟差产品性能的不断

提升^[27],精密单点定位(precise point positioning, PPP)技术在过去十多年得到了系统深入的研究^[28-29]。总体而言,PPP的研究主要围绕解决非差模糊度固定、实时应用和快速收敛3个问题展开。非差模糊度固定的核心在于改正卫星相位整数偏差,从而恢复非差模糊度的整数特性,先后提出了未校准相位偏差(uncalibrated phase delay, UPD)方法^[30]、整数钟方法^[31]、解耦钟方法^[32]和相位钟方法^[33]等。实验表明,基于区域网数据解算的UPD产品较全球网数据能得到更高的用户模糊度固定率,其原因是全球测站数据存在的非共性误差难以被用户端吸收^[34-35]。实时PPP的前提是实时精密轨道和钟差解算与预报,其难点是实时卫星钟差产品的解算与预报^[36]。全球测站实时数据流的质量限制了全球网实时

钟差产品的可用性;尽管区域网实时数据质量高,能实现区域跟踪卫星的实时精密钟差的解算,但限制了区域网外PPP用户的实时应用。在加快PPP收敛方面,虽然多频多模数据的引入能将收敛时间缩短至10~15 min^[37],但依然无法与网络RTK相媲美。为此,除了精密轨道钟差和卫星相位偏差产品外,还需提供用户基于区域参考站网解算的实时高精度对流层和电离层改正数^[38],该技术称为PPP-RTK^[39-40]。显然,PPP-RTK与网络RTK从理论上是对多频多模数据和区域台站数据的综合利用,尽管采用的解算模式不同,但它们的本质是等价的,因此笔者认为网络RTK和PPP-RTK代表了GNSS应用技术的最高水平。GNSS定位技术的发展历程如图1所示。



图1 GNSS定位技术的发展历程

Fig. 1 Development of GNSS-based Positioning Concepts

2 GNSS高精度定位共性基础理论

本节将阐述GNSS高精度定位所涉及的整数模糊度固定、多频多模函数模型和随机模型融合等共性基础理论,旨在为充分挖掘多频多模数据资源,从而为发展定位新技术提供理论支撑。

2.1 模糊度固定理论

2.1.1 模糊度固定基础理论

含有整数模糊度的GNSS定位模型可抽象为混合整数模型:

$$\begin{cases} E(y) = Aa + Bb \\ D(y) = Q_{yy} \end{cases} \quad (1)$$

式中, $y \in R^m$ 是观测值向量; $a \in Z^n$ 是整参数向量; $b \in R^p$ 是实参数向量; $(A, B) \in R^{m \times (n+p)}$ 是列满秩系数矩阵; Q_{yy} 是观测值向量的方差-协方差矩阵; $E(\cdot)$ 和 $D(\cdot)$ 分别为期望和方差算子。该模型的求解在数学上属于NP-Hard问题^[41],没有成熟完备的数学理论支撑。在GNSS学界,一般将该问题分解为3个步骤,首先采用最小二乘准则求解整参数和实参数的估值及其方差-协方差矩阵:

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Q_{aa} & Q_{ab} \\ Q_{ba} & Q_{bb} \end{bmatrix} \quad (2)$$

整数估计的本质是基于浮点解 \hat{a} 和 Q_{aa} 的信息选定合理的映射函数 $f: R^n \mapsto Z^n$,将实数估值 $\hat{a} \in R^n$ 映射为整数 $z \in Z^n$ 。由于整数的离散性, f 必然是多对一映射,即不同的实数可以映射为同一个整数。Teunissen^[42]将映射为同一整数 z 的实数集合形象地定义为该整数的拉入域,在数学上对应维诺单元^[43]。通过构造不同的映射函数,先后发展了三类整数估计方法,分别是整数类(Integer, I)、整数孔径类(integer-aperture, IA)和整数等变类(integer-equivariant, IE),且满足 $I \subset IA \subset IE$ ^[5-6]。

整数类方法包括四舍五入、整数序贯和整数最小二乘。四舍五入的计算效率最高,但其完全忽略了模糊度之间的相关性,准确率最低。整数序贯考虑了部分模糊度的相关性,固定准确率高于四舍五入。整数最小二乘充分顾及了所有模糊度的方差和协方差信息,是整数类最严密的方法,固定准确率最高,但计算效率较低。为提高计算效率,Teunissen发明了以去相关技术为核心的LAMBDA(least-squares ambiguity decorrela-

tion adjustment)算法^[44],另有诸多学者提出了多种去相关策略^[45-46]。整数固定方法只给出在该方法对应准则下的最优整数解,但该整数是否正确需要对其可靠性进行检验。常用的整数可靠性检验方法有 R 检验、 W 检验、差分检验和投影检验^[5],这些方法的本质都是检验最优整数和次优整数的可区分度,因为只有最优解显著优于次优解的整数才是可靠的,一旦整数错误会导致错误的定位解。在当前的定位软件应用中,一旦整数检验不通过就会彻底放弃整数解而采用浮点解,这将导致在复杂环境下出现大量浮点解,降低了高精度定位的可用性。事实上,即使整数检验没有通过,也并不代表整数完全错误,如何在整数可信度不高的情况下利用整数的潜在信息仍然有待深入研究。

为了灵活控制整数可靠性,将整数检验纳入到整数固定的过程中,不同整数检验策略得到的孔径取整空间的形状和大小不同,从而起到调控整数成功概率的作用,该类估计称为整数孔径类估计^[47]。相比整数类方法,整数孔径类方法从理论上提供了更多的整数估计结果,提高了精密定位的可用性。最优整数孔径估计是通过控制整数失败概率来实现孔径调控的^[48],但失败概率的计算需在复杂空间的积分,实际中难以实现,这也限制了最优整数孔径估计的应用。整数等变类估计是较整数类和整数孔径类更加广义的整数估计类^[49]。其中,最优整数等变(best integer equivariant, BIE)估计在IE类中具有最小均方误差而被广泛采用。BIE顾及了模糊度的整数特性但不提供整数估值,而是提供多个整数备选向量的加权和,是一种全概率的整数估计方法^[50]。该方法理论上规避了最优解作为正确解的风险,本质上是根据每个整数解的可靠性综合考虑它们对定位的贡献。

此外,针对快速定位中法方程病态,有学者提出了对坐标参数和模糊度参数正则化的模糊度解算方法^[9,41,51],提高浮点模糊度的精度,减小浮点模糊度协方差阵的相关性,从而提高模糊度解的成功率。针对非正态误差分布下,发展了 p -范模式下的混合整数模型解算方法^[52];同时厘清了附加整参数和实参数约束方程对模糊度解的影响,结果表明,实参数约束方程能提高浮点模糊度的质量,但整参数约束方程不改变浮点解质量,只能辅助改善搜索效率^[41]。

2.1.2 多频模糊度快速固定

多频信号的最大优势在于能构成更多的满足不同应用需求的组合观测值。对于模糊度求解而言,这些组合具有更长的波长和相对更小的噪声,从而能够提高解算效率。事实上,采用非组合多频观测值能充分发挥所有频率信号的观测信息,得到的定位模型也是最严密的。以非组合双差观测值为例,构建顾及电离层约束条件的广义RTK定位模型为^[53]:

$$E \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{\phi} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} p - \mu \otimes \mathbf{t}_0 \\ \phi + \mu \otimes \mathbf{t}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_f \otimes \mathbf{A} & 0 \\ \mathbf{e}_f \otimes \mathbf{A} & \mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ a \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中, $p = [p_1^T, p_2^T, \dots, p_f^T]^T$; $\phi = [\phi_1^T, \phi_2^T, \dots, \phi_f^T]^T$ 是双差伪距和相位观测值; p_j 和 ϕ_j 为第 j 个频率对应的双差观测值; $\bar{p} = p - \mu \otimes \mathbf{t}_0$ 和 $\bar{\phi} = \phi + \mu \otimes \mathbf{t}_0$ 是经双差电离层先验值 \mathbf{t}_0 改正后的观测值, $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_f]^T$ 且 $\mu_j = f_1^2/f_j^2$; \mathbf{A} 为位置参数 x 的系数矩阵; $\mathbf{A} = \text{diag}([\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_f])$ 是频率波长构成的对角阵, 对应双差模糊度 $a = [a_1^T, a_2^T, \dots, a_f^T]^T$; \mathbf{e}_f 为 f 阶元素全为 1 的向量; \mathbf{I}_s 是 s 阶单位矩阵; s 为卫星数; f 为频率数。观测值对应的随机模型为:

$$D \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_p^2 \mathbf{I}_f + \sigma_i^2 \mu \mu^T & -\sigma_i^2 \mu \mu^T \\ -\sigma_i^2 \mu \mu^T & \sigma_\phi^2 \mathbf{I}_f + \sigma_i^2 \mu \mu^T \end{bmatrix} \otimes \mathbf{Q} \quad (4)$$

其中, σ_p^2 和 σ_ϕ^2 分别为非差伪距和相位观测值方差; σ_i^2 为非差电离层先验值精度; \mathbf{Q} 为双差观测值的协因数阵, 通常采用高度角加权模式。

基于最小二乘准则可导出上述基于几何(geometry-based, GB)的电离层加权(ionosphere-weighted, IW)模型的参数 \hat{x} 和 \hat{a} 的法方程, 在此基础上法方程约化消去参数 \hat{x} , 得到浮点模糊度的方差-协方差解析公式^[53]:

$$\mathbf{Q}_{aa}^{(\text{GB, IW})} = \left[\mathbf{A}^{-1} (\sigma_\phi^2 \mathbf{I}_f + \frac{\sigma_p^2 \mu \mu^T}{\sigma_p^2 / \sigma_i^2 + \mu^T \mu}) \mathbf{A}^{-1} \right] \otimes \mathbf{Q} + \mathbf{\Theta} \otimes \mathbf{P}_A \mathbf{Q} \quad (5)$$

式中, $\mathbf{P}_A = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1}$; $q = \mathbf{A}^{-1} \cdot \left[\mathbf{I}_f + \frac{\mu \mu^T}{\sigma_p^2 / \sigma_i^2 + \mu^T \mu} \right] \mathbf{e}_f$; $\mathbf{\Theta} = \frac{q q^T}{\mathbf{e}_f^T (\sigma_p^2 \mathbf{I}_f + \sigma_i^2 \mu \mu^T)^{-1} \mathbf{e}_f}$ 。

该模型是差分定位中浮点模糊度的通用公式, 可根据基线长短调节电离层约束方差 σ_i^2 , 根据需要调节 \mathbf{A} 矩阵形式得到 6 种不同模型对应的模糊度方差-协方差矩阵。比如短基线情况下 $\sigma_i^2 \mapsto 0$, 长

基线情况下 $\sigma_i^2 \mapsto \infty$; 无几何模型情况下 $A = I_s^{[13]}$ 。

基于浮点非差模糊度 \hat{a} 及其方差-协方差矩阵 $Q_{aa}^{(GB, IW)}$, 直接采用 LAMBDA 解算整数模糊度在理论上是最严密的方法。然而, 多频信号对应的 \hat{a} 的维度迅速增加, 导致上述方法的解算效率急剧降低。因此, 需要充分挖掘多频信号的组合优势, 寻找能充分提升计算效率且能保持与严密方法正确率相当的组合。这类组合正是波长较长、模糊度极易固定的宽巷和超宽巷组合^[7, 54-55], 大量的文献已表明这类组合的模糊度固定正确率和计算效率都极高^[56-58]。必须指出的是, f 个频率观测值最多只能构成 $f-1$ 个宽巷和超宽巷组合, 对于剩余频率模糊度求解依然需采用严密的方法。换句话说, 多频组合只是降低了多频模糊度解算的复杂性, 并不会完全提升模糊度固定的正确率。如图 2 所示, 以双频宽巷(wideline, WL)组合为例, 宽巷模糊度的方差明显小于原始模糊度 N_1 和 N_2 , 因此宽巷模糊度较原始模糊度更易固定, 但对剩余单频的模糊度固定, 依然需要采用严密的方法求解。

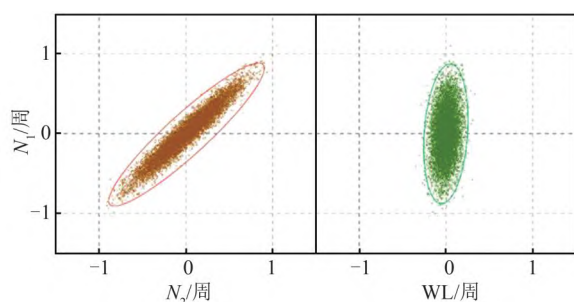


图 2 宽巷模糊度和双频窄巷模糊度 N_1 、 N_2 的分布图

Fig. 2 Scatterplot of Wideline and Narrowlane N_1 and N_2 Ambiguities for Two Frequencies

2.1.3 部分模糊度固定

发展部分模糊度固定策略的原因有两方面: 首先只有当模糊度固定成功率大于设定阈值时才能得到可靠的固定结果, 但是满足该条件时固定全部模糊度比固定部分模糊度需要更多时间; 其次, 从定位的角度而言, 也没有必要一味追求固定全部模糊度, 只要固定足够的模糊度, 即可实现高精度定位。事实上, 在实际应用中, 由于模糊度固定的成功率受数据质量差异、卫星几何强度差异和观测环境差异的影响, 固定全部模糊度也是不现实的。因此, 部分模糊度固定的本质是用户可根据实际需求自主调控模糊度可信度指标, 从而用较短的时间固定部分模糊度, 最终提升高精度定位的可用性。目前提出的部分模

糊度固定方法可分为两类: 第一类是根据浮点模糊度的精度只固定高精度的模糊度^[59-60]; 第二类是根据实际经验只固定卫星高度角较高或观测时长较长的模糊度^[61]。然而, 模糊度正确固定的难点在于如何顾及由非模型误差引起的浮点模糊度 \hat{a} 本身的偏差。因此, 笔者率先提出了顾及模糊度偏差的纳伪概率可控的部分模糊度固定方法^[62-63], 随后建立了兼顾多因子的部分模糊度子集选取策略, 主要包括浮点解偏差、精度、卫星高度角、观测时长等因素, 提高了定位解的可用性。

2.2 多频多模 GNSS 数据融合

多频多模 GNSS 高精度定位的关键在于多频多模信号的有效融合, 包括函数模型融合和随机模型融合。不正确的函数模型会导致定位误差大甚至错误, 而不正确的随机模型不仅影响定位效果, 也会对质量控制和可信度指标评估造成不利影响^[64-65]。

函数模型描述待估参数与观测值的数学关系。长期以来, 高精度定位采用系统间的双差观测值, 多频多模定位模型是各系统观测值的叠加/扩充。看似消除了系统间偏差(inter-system bias, ISB)和频间偏差(inter-frequency bias, IFB), 本质上是将这些偏差作为动态变量处理, 即未顾及这些偏差的稳定性。近年来, 许多学者对伪距和相位的 ISB 和 IFB 的稳定性进行了深入研究^[66-68], 充分验证了 ISB 和 IFB 短时间的高稳定性(通常 24 h 具有较好的稳定性)。因此, 为了充分利用多频多模观测值信息, 实现最优的函数模型融合以及系统间的兼容互操作, 需要根据 ISB 和 IFB 的稳定性构建其强度随时间弹性变化的约束模型^[69-70]。

随机模型用于描述观测值的精度及其相关程度, 只有采用正确的随机模型才能得到最优的定位结果以及实现可信的精度评定。由于不同系统的信号体制、信号精度、抗干扰能力等性能不同, 各系统、各频率和各类观测值的随机模型确定是多频多模 GNSS 数据融合的另一关键问题。通常采用方差-协方差分量估计(variance-covariance component estimation, VCE)方法来确定观测值的随机模型, 根据不同的估计准则先后发展了赫尔默特估计、极大似然估计、最小范数二次无偏估计、最小二乘方差分量估计和贝叶斯估计等方法^[71]。笔者指出 VCE 的本质是利用最小二乘残差来估计观测值的二阶中心矩, 从而统

一了所有VCE方法,并提出了基于等效残差的VCE方法^[72-73]以及高计算效率的VCE方法^[74]。多频多模的随机模型涉及到不同系统、不同频率、不同观测类型的精度、交叉相关性和时间相关性,对应的随机模型是复杂庞大的,要严密估计这些要素是不现实的。因此,笔者提出先采用短基线或零基线构建先验随机模型^[75],在此基础上构建参数尽量少且能有效表征观测随机特性的待估随机模型^[76],从而满足高精度定位的实际需求。

3 GNSS高精度定位关键技术

充分发挥多频多模信号在复杂场景下的定位效果,提升复杂场景下的定位精度、可靠性和稳定性,需要持续发展提升GNSS定位性能的关键技术。下文将介绍近年来笔者团队发展的非模型化误差处理以及周跳探测与中断修复等关键技术。

3.1 非模型化误差的探测与补偿

GNSS载波相位观测值能够达到毫米级精度,加之当前有丰富的卫星和频率信号资源,但人们长期习惯被动地接受厘米级的动态定位结果。究其原因这是由于长期沿用的GNSS定位模型存在非模型化误差,引起该误差的原因包括:(1)对某些GNSS系统误差的物理背景认知有限(如卫星轨道摄动、多路径等),不能对其精确建模;(2)诸如大气误差的时空变化特性极其复杂,传统的参数化方式无法精确吸收对定位的影响;(3)为了提高定位模型强度,要求尽可能引入少量的参数模型化系统误差,但少量参数可能对系统误差吸收不充分。

对于定位模型 $y = Ax + e$,观测值 y 和真误差 e 对应的协方差阵为 Q ,则最小二乘残差 v 与真误差满足 $v = Re$,其中 $R = I - A(AQ^{-1}A)^{-1}AQ^{-1}$ 是秩亏幂等阵,说明从真误差到残差是线性压缩投影,即残差的信息量少于真误差,无法用残差来恢复全部的真误差信息,但残差能一定程度上反映真误差的特性。当多频多模融合定位提供了大量多余观测时,残差反映真误差的能力提升,为通过残差探测真误差中的非模型化误差提供了机遇。基于该出发点,笔者完成了国家自然科学基金项目《非模型化误差理论及其GNSS应用》,提出了一套顾及非模型化误差的GNSS数据处理理论和方法体系,包括非模型化误差的检测理论^[77],以

及非模型化误差的随机模型或函数模型补偿^[78-79],有效提升了复杂场景下的高精度定位性能。

3.2 周跳探测与中断修复

受多路径、电离层变化、信号遮挡等复杂应用场景影响,相位观测值极易发生周跳甚至中断。双频无几何组合(geometry-free, GF)消除了卫地距的影响,模型计算简单常被用于周跳探测^[80]。GF模型存在3个缺陷:(1)GF模型只能用于双频及多频观测值,无法用于单频周跳探测;(2)周跳探测效果受历元间电离层变化的影响。当电离层活跃或采样间隔较大时,周跳探测准确性降低;(3)只能探测但不能估计每个频率的周跳,所以该模型只探测不修复周跳。一旦发生周跳,就采取初始化,导致复杂周跳环境下频繁重新初始化,极大地降低定位可用性。

GF模型的周跳探测是对每颗卫星单独处理,即没有周跳的观测值不能助力其他卫星的周跳探测。GB模型能通过位置参数将所有卫星观测值联系起来,使得在周跳探测中相互辅助,达到良好效果。文献[10]提出了附加电离层时变约束的GB周跳探测模型,不仅解决了电离层活跃场景的周跳探测与修复,还能实现数据中断3~5 min的修复,避免了长期以来数据中断重新初始化的难题。

然而,对于单频的周跳探测,GF组合模型无法使用,通常采用三差GB模型的观测值残差来探测周跳,称为三差法(triple-differenced residual-based snooping, TRS)^[3]。但单频观测值数量有限,TRS模型的强度较低以至于周跳探测效果较差。为此,文献[81]提出了根据构造载体运动位置参数的多项式约束条件(positional polynomial fitting, PPF)来增强TRS模型的强度,从而提升单频周跳探测效果。如图3所示的复杂环境下ublox单频周跳探测结果表明,PPF方法相比于TRS方法显著提升了固定解的比例,改善了定位效果,提高了高精度定位可用性。

4 GNSS定位新技术

以模糊度固定和数据融合共性基础理论创新成果,以及GNSS高精度定位关键技术为基础,充分发挥多频多模信号资源优势,团队近年来发展了多项GNSS高精度定位新技术。本节将简要介绍长距离RTK技术(long-baseline

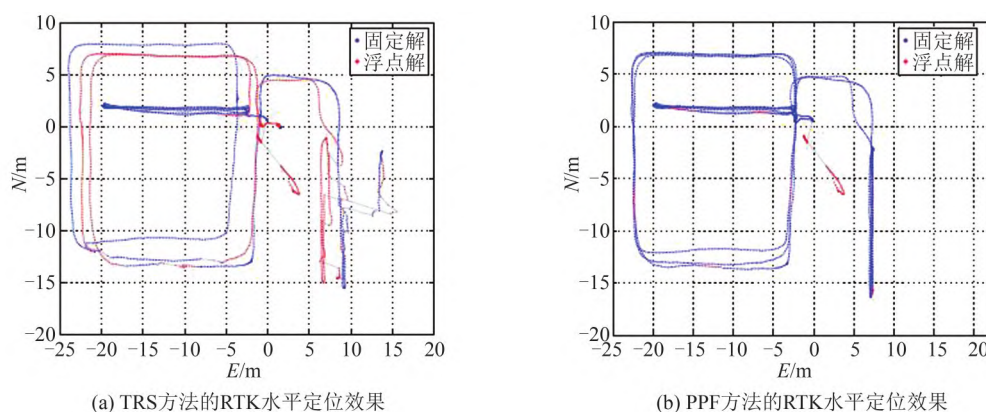


图 3 TRS 和 PPF 周跳探测方法的 RTK 水平定位效果

Fig. 3 RTK Horizontal Results with TRS and PPF Methods for ublox Dataset

RTK, LRTK)、北斗通导一体化的 RTK 技术 (ocean RTK, ORTK), 以及多频多模紧组合 RTK 技术 (tightly combined RTK, TRTK), 这些技术满足了当前不同场景下多类用户的定位需求。

4.1 LRTK 技术

目前商用 GNSS 定位服务主要采用单基站 RTK、网络 RTK 和 PPP-RTK 技术, 其中单基站 RTK 技术具有无需地基参考网、维护成本低且算法简单等优势, 但作业范围有限。网络 RTK 和 PPP-RTK 技术在地基参考网的辅助下, 能够提供比单基站 RTK 更大范围的定位服务, 但这两种技术依赖建设和维护成本巨大的地基参考网。近年来, 多频多模的发展为拓展单基站 RTK 的作业范围提供了机遇, 基于多频多模 GNSS 共性基础理论研究的基础, 笔者带领团队历时数年研发了单站长距离高精度 RTK 技术, 将单基站 RTK 作业范围由 10~20 km 扩展到 300 km 左右, 且收敛时间和定位精度与短距离 RTK 相当。

LRTK 的难点在于长距离差分观测值中的各类误差依然显著且不同卫星的差异明显, 同时这些误差与模糊度和位置参数是相互耦合的。因此, 如何实现在残余误差显著的情况下模糊度快速正确固定仍是难点, 这需要充分利用多频多模信息进行空间误差的精细化处理。在模糊度固定方面, 文献[62]指出长距离残余误差影响下的模糊度可靠固定需要高精度的浮点解和合理的固定策略, 并提出了一种顾及多路径效应的宽巷模糊度自适应固定以及误差概率可控的窄巷模糊度固定策略。对于长达 100 km 的基线, 仅利用 GPS 双频数据, 该策略即能实现宽巷模糊度 99.4%、窄巷模糊度

89% 的正确固定率。

LRTK 除了利用较多的多频多模观测值外, 还利用上文提到的非模型化误差理论对非模型化误差进行探测, 并对其来源、成分进行深入分析, 从而合理地引入补偿参数进行函数模型补偿, 或者采用随机模型优化进行随机模型补偿, 最终达到削弱非模型化误差影响的目的。依托上述技术, 文献[82]采用 GPS 和北斗非组合观测值, 在基线长度 319 km 的情况下, 实现首次初始化时间 6 s、平面精度小于 5 cm、高程精度小于 10 cm 的定位效果。

4.2 ORTK 技术

远海、沙漠等区域存在基准站稀少、通讯困难等问题, 导致此类场景中高精度定位服务发展缓慢。在 OmniStar、NavCom 的 StarFire 以及天宝等商业解决方案中, 利用通讯卫星来播发精密轨道和钟差产品, 采用 PPP 技术实现远海和沙漠等区域的高精度定位。然而, 这类产品不仅通讯成本昂贵, 定位精度低 (通常只有分米级至亚分米级), 且收敛时间也在 0.5 h 左右^[83]。北斗短报文通信 (short message communication, SMC) 作为北斗特色功能之一有望代替通讯卫星实现高精度定位改正数的播发。团队瞄准海上高精度定位需求, 率先提出了利用北斗 SMC 播发改正数的 LRTK 技术, 实现了真正意义上北斗通导一体化的高精度定位解决方案, 该技术被称为 ORTK^[84]。

ORTK 的系统原型如图 4 所示^[84], 包括: (1) 在参考站端, 实现简化差分改正数计算、编码与压缩; (2) 在通讯段, 实现多卡编排的改正数高效率播发、接收与解码; (3) 在用户端, 实现利用简化差分改正数的高精度 RTK 解算。这里采用无电离层组合的简化差分改正数以及编

码和压缩的目的都是为了减少通讯量。这些操作将双频北斗+GPS的原始单历元差分改正数从1 000多字节缩减到300字节,有效克服了通讯受限难题。实验结果表明,对于长达240 km和420 km基线仅需约3 min收敛时间即可达到平面优于5 cm、高程优于15 cm的定位精度。

文献[82]对ORTK系统进行了全面升级优化,具体内容包括:(1)采用非组合改正数代替无电离层组合简化改正数,以便在用户算法端对电离层延迟进行精细化处理;(2)在非组合改正数中融入了精密轨道信息,以削弱长基线情况下轨道误差对定位的影响;(3)考虑到改正数时延引起的差分观测值的时间相关性,在用户算法端引入了顾及时间相关性的滤波算法,显

著提高了模糊度固定效果和定位精度。如图5所示,对于320 km的长基线,升级后的ORTK可实现快速模糊度固定(约5~10 s),水平定位精度优于5 cm、高程精度优于10 cm。

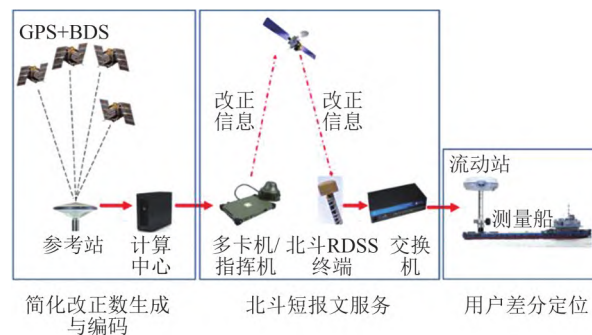
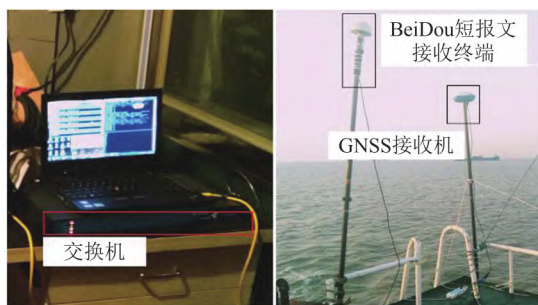
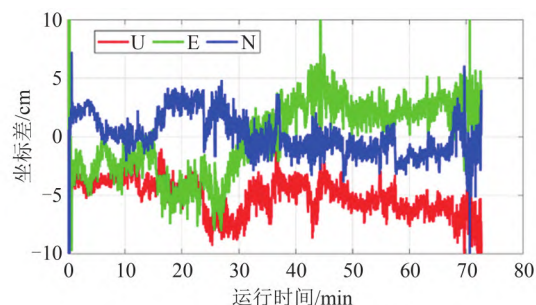


图4 ORTK系统原型^[84]

Fig. 4 Diagram of ORTK with BeiDou SMC^[84]



(a) 设备安装情况与实验场景



(b) ORTK定位误差序列

图5 海上动态定位实验与结果

Fig. 5 ORTK Kinematic Experiment and Result

4.3 TRTK技术

传统RTK算法中每个卫星系统各自选取参考卫星,该模式称为松组合RTK。当所有卫星系统共用一颗参考卫星时,该模式称为紧组合RTK(TRTK)。如图6所示,TRTK相比松组合RTK增加了与接收机相关的硬件延迟偏差参数,恰当处理该偏差能显著提升TRTK模型强度,进而提高模糊度解算和定位性能。文献[85]提出了TRTK概念,并通过仿真数据研究了GPS/Galileo组合的TRTK效果,证明了TRTK在加快模糊度固定、提高定位精度方面的优势。随着GNSS系统的发展,文献[86]利用GPS和Galileo数据验证了接收机端硬件延迟具有较高稳定性。

考虑到不同卫星系统观测值类型、用户采用的硬件设备型号等各不相同,多频多模TRTK比松组合RTK更加复杂。但不同卫星系统相同频率间的硬件延迟具有较好的时域稳定性,只需出厂前进行全温标定便可供后续使

用,因此基于重叠频率的TRTK近年来得到了学者们的广泛关注。文献[87]研究了GPS、Galileo、BDS和QZSS系统间偏差的稳定性,证明了系统间偏差与接收机类型、卫星系统和频率相关。在此基础上,文献[88]详细研究了重叠频率TRTK,通过动态和静态数据验证了TRTK在快速模糊度固定和定位精度方面的优势。

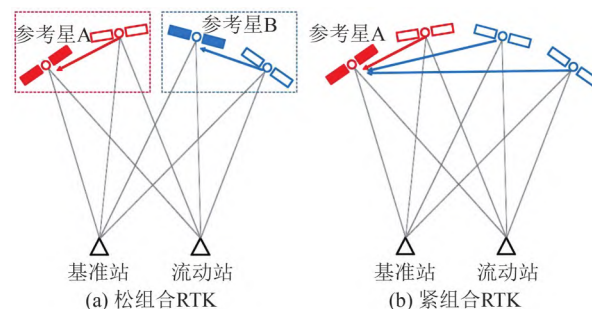


图6 松组合RTK与紧组合RTK原理示意图

Fig. 6 Schematic Illustration of Loosely Combined RTK and TRTK

以单频(频率 j)双系统(系统 Q, K)为例,重叠频率 TRTK 的模型为:

$$E \begin{bmatrix} \phi_j^Q \\ \phi_j^K \\ p_j^Q \\ p_j^K \\ \phi_j^{1_{Q1K}} \\ p_j^{1_{Q1K}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^Q & \lambda_j I_{n-1} & 0 \\ H^K & 0 & \lambda_j I_{m-1} \\ H^Q & & & 0 \\ H^K & & & \\ h^{1_{Q1K}} & 0 & \lambda_j & 1 & 0 \\ h^{1_{Q1K}} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ a_j^Q \\ a_j^K \\ a_j^{1_{Q1K}} \\ b_j^{QK} \\ d_j^{QK} \end{bmatrix} \quad (6)$$

与松组合 RTK 相比,TRTK 引入了两个系统间差分的新观测值($\phi_j^{1_{Q1K}}$ 和 $p_j^{1_{Q1K}}$),同时也引入了 3 个未知数($a_j^{1_{Q1K}}$ 、 b_j^{QK} 和 d_j^{QK})。但考虑到硬件延迟 b_j^{QK} 和 d_j^{QK} 具有良好的时域稳定性,可根据其先验值事先校正,因此 TRTK 拥有比松组合 RTK 更多的多余观测分量。图 7 展示了模拟不同遮挡环境下 TRTK 和松组合 RTK 的定位效果,其中方案 A、B、C 分别表示只保留各卫星系统高度角最高的 4、3、2 颗卫星。显然遮挡越严重、观测值越少的情况下,TRTK 的优势越明显。

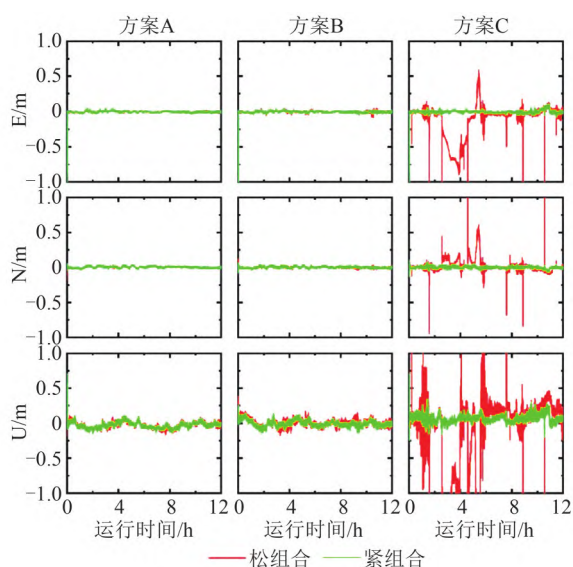


图 7 GPS/BDS/Galileo/QZSS 重叠频率松、紧组合 RTK 动态定位

Fig. 7 GPS/BDS/Galileo/QZSS Loosely and Tightly Combined RTK Kinematic Positioning Results with Overlapping Frequencies

5 高精度定位发展趋势与挑战

随着中国“海洋强国”战略持续推进、大众市

场低成本终端高精度定位需求井喷式增长,低轨卫星星座的蓬勃发展,以及对室内外实现无缝定位的需求持续增加,GNSS 高精度定位技术迎来了新的发展机遇和挑战。

5.1 通讯受限场景下的高精度定位

海洋强国、“一带一路”建设等国家重大战略加速了中国及周边地区日益频繁的经济社会活动,这些都需要高精度位置服务作为支撑。然而由于地面增强基础设施贫乏,支撑高精度定位的改正信息难以获取,导致在这些区域内实现低成本、高精度、高可靠的定位服务充满挑战。尽管近年来 PPP 定位技术得到了深入发展,且北斗系统的 PPP-B2b^[89] 提供全球实时 PPP 服务,但在没有地基参考网的支撑下,依然无法避免 PPP 技术固有的收敛时间长、定位精度低的缺陷。

以满足快速高精度定位为目标,在大范围内建设稀疏参考站,大力发展 LRTK 技术是潜在的解决方案。例如,利用海洋岛礁建设稀疏参考站,或在“一带一路”区域合理选址建设参考站,采用 LRTK 就可满足这些区域的定位需求。在这其中仍然需要再深入研究大尺度/长基线的定位模型、误差精细化处理和模糊度固定等关键问题。

5.2 低轨卫星增强 GNSS 定位

作为近地空间的通导基础设施,低轨星座具有信号强度高、相对地面测站几何图形变化快、建设和发射成本低的特点。同时能够与中高轨 GNSS 星座形成互补,在增强 GNSS 完好性、连续性和可用性等方面具有显著优势^[15]。2015 年开始,低轨卫星星座进入了蓬勃发展的阶段,SpaceX、OneWeb、星网等多家知名企业启动建设大型低轨互联网星座的计划,大量的低轨星座为低轨增强 GNSS (LEO enhanced GNSS, LeGNSS) 创造了有利的条件。

目前低轨星座较为单一,卫星的全球可用性不均匀,如何根据低轨卫星数量、卫星轨道倾角以及星座融合,设计出合理有效的低轨卫星星座构型是发挥 LeGNSS 优势、实现多场景应用的基础^[90]。图 8 给出了 240 颗低轨卫星混合轨道倾角的星座优化设计图,证明了混合倾角的星座设计可提供较好的卫星可见性和位置精度影响因子值;此外,如何进行高精度的轨道钟差预报以满足实时应用需求,也是低轨卫星发展中面临的挑战^[91]。

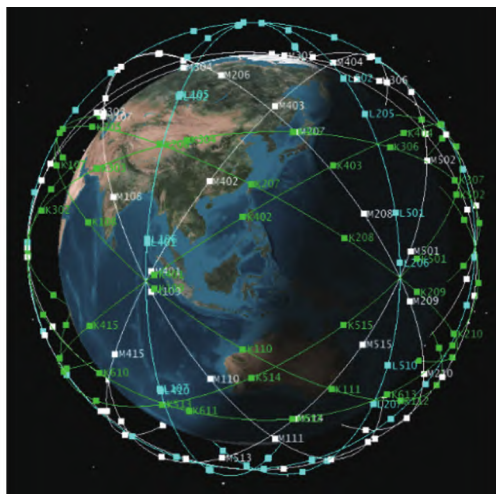
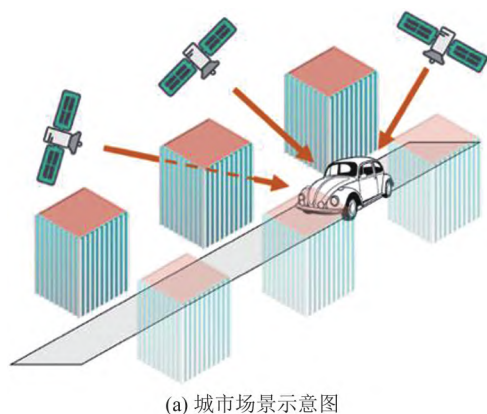
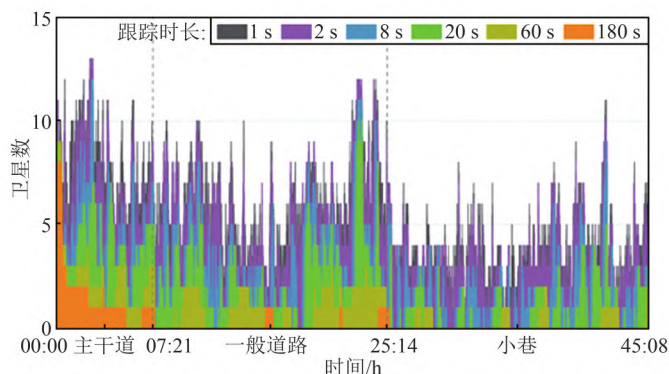


图8 240颗低轨卫星混合轨道倾角的星座优化设计
Fig. 8 Constellation Optimization Design for 240 LEO Satellites with Mixed Orbital Inclinations

城市复杂环境的导航应用始终是行业难题,低轨卫星星座的建设与发展为其提供了全新的解决思路,然而楼宇的复杂遮挡导致低轨卫星观测数据碎片化,制约了低轨增强在城市峡谷地区



(a) 城市场景示意图



(b) 不同区域下不同连续跟踪时长的卫星数

图9 城市场景示意图和不同区域下不同连续跟踪时长的卫星数

Fig. 9 Schematic Overview of the Urban Canyon and the Number of Satellites with Different Continuous Tracking Durations Across Various Regions

然而由于低成本终端自身硬件条件的限制,如采用低成本线性极化天线、不同于GNSS的芯片组结构和锁相环设计等^[93],导致终端信号强度低且不规则,在城市峡谷等地区易产生极化方向改变、中断频繁、多径干扰等现象,观测质量普遍较差^[94]。将现有的GNSS定位方法照搬用于低成本终端显然是无法获得理想定位性能的。如何针对低成本终端自身特点^[95-96],发展异常数据诊断及补偿、周跳探测与修复、综合考虑信噪比/高度角参数的随机模型精化^[97]、顾及手机姿态与模糊度特性的模糊度固定^[98]等关键技术,是实现低成本终端高精度定位的可行途径。

的可用性。图9给出了城市场景下不同区域连续跟踪卫星时长的信息,结果表明大多数低轨卫星只能连续跟踪10~20 s,甚至相当数量的低轨卫星只能连续跟踪几秒,因此有效利用碎片化的观测值是提升复杂环境下LeGNSS定位性能的关键。

5.3 大众市场低成本终端高精度定位

基于位置服务(location-based service, LBS)的大众市场近年来呈现持续快速增长态势,传统智慧终端(手机、手表等)存在定位精度低、可用性差等问题,导致众多LBS难以提高服务效率、扩大市场份额,因此大众市场对基于智能终端的高精度定位需求变得愈发旺盛;另一方面,为了更好地占有市场、提高用户黏性,传统高精度定位应用领域(变形监测、工程测量、精准农业等)也迫切需要降低系统软硬件成本^[92]。可以预见,低成本终端高精度定位技术将是未来行业发展的趋势,也是位置服务企业的生命线。

5.4 多源融合室内外无缝定位

随着城市化进程的推进,智慧城市和智慧交通等概念的提出对定位服务的连续性、可用性和可靠性提出了更高的要求。然而只利用GNSS实现的定位服务受到了以下限制:(1)在建筑物密集的区域,GNSS信号容易受到遮挡而中断,且往往伴随着严重的多路径效应;(2)在地下车库、隧道等封闭场景,GNSS将不可用。为满足全场景无缝高精度定位需求,唯一途径势必是GNSS与不同机理的多传感器进行融合定位。

目前,不同传感器(如惯性导航系统(inertial navigation system, INS)、相机、激光雷达、超宽带技术(ultra wide band, UWB)等)的定位技术已取

得了长足的发展,它们能与 GNSS 形成良好的互补。INS 可以提供高频、丰富的导航信息,能够在 GNSS 短时失效的情况下通过递推方式维持高精度定位^[12];相机和激光雷达能够通过图像/点云配准的方式实现相对定位^[99];相较于 INS,相机和激光雷达还可以利用获取的环境信息进行回环检测,从而消除累积误差^[100]。对于 GNSS 失效的室内场景,UWB 可作为替代为室内物体提供绝对的位置基准^[101]。

多源融合定位技术近年来受到众多行业追捧,已成为相关行业研究热点。然而一味地融合传感器不仅带来了极为昂贵的成本,也无法解决全场景高精度定位难题。如何根据特定场景下不同用户需求选择合适的传感器组合,挖掘各传感器自身极限精度显得更有实际意义。此外,不同类型传感器也带来了异构异质数据融合难题,主要体现在:(1)如何顾及传感器、场景特点,实现不同类型观测值的合理定权;(2)如何发挥不同传感器特点,实现各类观测值的交叉互检验。因此,多源融合随机模型精化仍需更进一步的研究。且如何借助多源数据实现导航结果的可信评估已成为业界迫切需求,有必要开展从理论到应用的全链条研究。

6 结 语

GNSS 高精度定位技术在当今国际社会中的重要性早已不言而喻,如何充分挖掘和利用现有多频多模 GNSS 资源发展新的定位技术具有重要意义。本文厘清了 GNSS 高精度定位技术的内在联系,揭示了不同方法的本质;归纳总结分析了其中的模糊度固定、数学模型融合等共性理论以及非模型化误差处理、周跳探测与中断修复等关键技术。笔者结合团队前期研究成果,简要介绍了 LRTK、ORTK 和 TRTK 多频多模 GNSS 高精度定位新技术。并面向未来大众和无缝定位需求,针对未来高精度定位需求,分析和展望了高精度定位技术的发展机遇与挑战,为高精度定位从业者提供参考。

GNSS 作为重要的时空基础设施,在高精度定位相关行业起着无可替代的作用。因此,如何提升 GNSS 可用性、降低 GNSS 高精度定位成本仍是行业奋斗目标。通过低轨卫星、多源传感器辅助可提高 GNSS 可用性;研究低成本终端的高精度定位算法可降低用户终端成本,研究长距离 RTK 算法可降低对地基参考网的依赖。如何借

助北斗导航卫星系统通导一体优势,更好地服务于“一带一路”建设、海洋强国重大战略,也值得从业者关注。

参 考 文 献

- [1] Yang Yuanxi. Concepts of Comprehensive PNT and Related Key Technologies [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2016, 45(5): 505-510. (杨元喜. 综合 PNT 体系及其关键技术[J]. 测绘学报, 2016, 45(5): 505-510.)
- [2] Teunissen P, Montenbruck O. Springer Handbook of Global Navigation Satellite Systems[M]. Cham: Springer International Publishing, 2017.
- [3] Leick A. GPS Satellite Surveying [M]. 3rd ed. New York: John Wiley, 2004.
- [4] Hofmann-Wellenhof B, Lichtenegger H, Collins J. Global Positioning System: Theory and Practice [M]. 5th ed. New York: Springer Wien, 2001.
- [5] Verhagen S. The GNSS Integer Ambiguities: Estimation and Validation [D]. Delft: Delft University of Technology, 2004.
- [6] Teunissen P. Towards a Unified Theory of GPS Ambiguity Resolution [J]. *Journal of Global Positioning Systems*, 2003, 2(1): 1-12.
- [7] Feng Y, Li B. Three Carrier Ambiguity Resolution: Generalised Problems, Models, Methods and Performance Analysis Using Semi-generated Triple Frequency GPS Data [C]//ION GNSS, Savannah, USA, 2008.
- [8] Teunissen P. Integer Estimation in the Presence of Biases [J]. *Journal of Geodesy*, 2001, 75 (7): 399-407.
- [9] Li B, Shen Y, Feng Y. Fast GNSS Ambiguity Resolution as an Ill-posed Problem [J]. *Journal of Geodesy*, 2010, 84(11): 683-698.
- [10] Li B, Qin Y, Liu T. Geometry-based Cycle Slip and Data Gap Repair for Multi-GNSS and Multi-frequency Observations [J]. *Journal of Geodesy*, 2019, 93(3): 399-417.
- [11] Yang Yuanxi. Resilient PNT Concept Frame [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2018, 47 (7): 893-898. (杨元喜. 弹性 PNT 基本框架[J]. 测绘学报, 2018, 47(7): 893-898.)
- [12] Shin E. Estimation Techniques for Low-Cost Inertial Navigation [D]. Calgary: University of Calgary, 2005.
- [13] Zhang Zhiteng. Multi-frequency and Multi-GNSS Long-Range RTK Theory and Methods [D]. Shanghai: Tongji University, 2021. (张治腾. 多频多系统 GNSS 长距离 RTK 理论与方法 [D]. 上海: 同济

- 大学, 2021.)
- [14] Ge H, Li B, Jia S, et al. LEO Enhanced Global Navigation Satellite System (LeGNSS): Progress, Opportunities, and Challenges[J]. *Geo-spatial Information Science*, 2022, 25(1): 1-13.
- [15] Zhang Xiaohong, Ma Fujian. Review of the Development of LEO Navigation-Augmented GNSS[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2019, 48(9): 1073-1087. (张小红, 马福建. 低轨导航增强GNSS发展综述[J]. 测绘学报, 2019, 48(9): 1073-1087.)
- [16] Rogers R. Applied Mathematics in Integrated Navigation Systems[M]. 3rd ed. Reston, VA, USA: AIAA, 2007.
- [17] Bock Y, Abbot R, Counselman C, et al. Geodetic Accuracy of the Macrometer Model V-1000[J]. *Bulletin Geodesique*, 1984, 58(2): 211-221.
- [18] Bock Y, Abbot R, Counselman C, et al. Three-dimensional Geodetic Control by Interferometry with GPS: Processing of GPS Phase Observables[C]//The 1st International Symposium on Precise Positioning with the Global Positioning System, Rockville, Maryland, 1985.
- [19] Edwards S, Cross P, Barnes J, et al. A Methodology for Benchmarking Real-Time Kinematic GPS[J]. *Survey Review*, 1999, 35(273): 163-174.
- [20] Han S. Carrier Phase-Based Long-Range GPS Kinematic Positioning[D]. Sydney, Australia: UNSW University, 1997.
- [21] Wanninger L. Improved Ambiguity Resolution by Regional Differential Modelling of the Ionosphere[C]//The 8th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation, Palm, USA, 1995.
- [22] Gao Xingwei. The Algorithmic Research of GPS/GLONASS Network RTK and Its Program Realization[D]. Wuhan: Wuhan University, 2002. (高星伟. GPS/GLONASS网络RTK的算法研究与程序实现[D]. 武汉: 武汉大学, 2002.)
- [23] Blewitt G. Carrier Phase Ambiguity Resolution for the Global Positioning System Applied to Geodetic Baselines up to 2 000 km[J]. *Journal of Geophysical Research*, 1989, 94(B8): 10187-10203.
- [24] Trimble. Trimble — VRS[OL]. [2010-01-21]. <http://www.trimble.com/vrs.shtml>.
- [25] Wübbena G, Bagge A, Seeber G, et al. Reducing Distance Dependent Errors for Real-Time Precise DGPS Applications by Establishing Reference Station Networks[C]//The 9th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GPS 1996), CityKansas, MO, 1996.
- [26] Leica Geosystems. White Paper: GPS SpiderNET — Take It to the MAX[OL]. [2005-03-22]. <http://www.leica-geosystems.com>.
- [27] Kouba J, Mireault Y, Lahaye F. IGS Orbit/Clock Combination and Evaluation[C]//International GPS Service for Geodynamics (IGS), California, USA, 1995.
- [28] Zumberge J, Heflin M, Jefferson D, et al. Precise Point Positioning for the Efficient and Robust Analysis of GPS Data from Large Networks[J]. *Journal of Geophysical Research*, 1997, 102(B3): 5005-5017.
- [29] Liu Jingnan, Ye Shirong. GPS Precise Point Positioning Using Undifferenced Phase Observation[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2002, 27(3): 234-240. (刘经南, 叶世榕. GPS非差相位精密单点定位技术探讨[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2002, 27(3): 234-240.)
- [30] Ge M, Gendt G, Rothacher M, et al. Resolution of GPS Carrier-Phase Ambiguities in Precise Point Positioning (PPP) with Daily Observations[J]. *Journal of Geodesy*, 2008, 82(7): 389-399.
- [31] Laurichesse D, Mercier F, Berthias J, et al. Integer Ambiguity Resolution on Undifferenced GPS Phase Measurements and Its Application to PPP and Satellite Precise Orbit Determination[J]. *Annual of Navigation*, 2007, 56(2): 135-149.
- [32] Collins P. Isolating and Estimating Undifferenced GPS Integer Ambiguities[C]//The 2008 National Technical Meeting of the Institute of Navigation, San Diego, USA, 2008.
- [33] Geng J, Chen X, Pan Y, et al. A Modified Phase Clock/Bias Model to Improve PPP Ambiguity Resolution at Wuhan University[J]. *Journal of Geodesy*, 2019, 93(10): 2053-2067.
- [34] Wang S, Li B, Li X, et al. Performance Analysis of PPP Ambiguity Resolution with UPD Products Estimated from Different Scales of Reference Station Networks[J]. *Advances in Space Research*, 2018, 61(1): 385-401.
- [35] Yao Yibin, Peng Wenfei, Kong Jian, et al. Analysis of Ambiguity Fixing in Precise Point Positioning[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2013, 38(11): 1281-1285. (姚宜斌, 彭文飞, 孔建, 等. 精密单点定位模糊度固定效果分析[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2013, 38(11): 1281-1285.)
- [36] Zhang X, Li X, Guo F. Satellite Clock Estimation

- at 1 Hz for Real Time Kinematic PPP Applications [J]. *GPS Solutions*, 2011, 15(4): 315-324.
- [37] Li X, Ge M, Dai X, et al. Accuracy and Reliability of Multi-GNSS Real-Time Precise Positioning: GPS, GLONASS, BeiDou, and Galileo[J]. *Journal of Geodesy*, 2015, 89(6): 607-635.
- [38] Yao Yibin, Feng Xinying, Peng Wenjie, et al. Local Atmosphere Augmentation Based on CORS for Real-Time PPP [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2019, 44(12): 1739-1748. (姚宜斌, 冯鑫滢, 彭文杰, 等. 基于 CORS 的区域大气增强产品对实时 PPP 的影响[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2019, 44(12): 1739-1748.)
- [39] Teunissen P, Khodabandeh A. Review and Principles of PPP-RTK Methods[J]. *Journal of Geodesy*, 2015, 89(3): 217-240.
- [40] Wabben G, Schmitz M, Bagge A. PPP-RTK: Precise Point Positioning Using State-Space Representation in RTK Networks[C]//The 18th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation, Long Beach, USA, 2005.
- [41] Li Bofeng. Theory and Method of Parameter Estimation for Mixed Integer GNSS Stochastic and Function Models[D]. Shanghai: Tongji University, 2010. (李博峰. 混合整数 GNSS 函数模型及随机模型参数估计理论与方法[D]. 上海: 同济大学, 2010.)
- [42] Teunissen P. An Optimality Property of the Integer Least-Squares Estimator[J]. *Journal of Geodesy*, 1999, 73(11): 587-593.
- [43] Xu P. Voronoi Cells, Probabilistic Bounds and Hypothesis Testing in Mixed Integer Linear Models [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(7): 3122-3138.
- [44] Teunissen P. The Least-Squares Ambiguity Decorrelation Adjustment: A Method for Fast GPS Integer Ambiguity Estimation[J]. *Journal of Geodesy*, 1995, 70(1): 65-82.
- [45] Chang X, Yang X, Zhou T. MLAMBDA: A Modified LAMBDA Algorithm for Integer Least-Squares Estimation[J]. *Journal of Geodesy*, 2005, 79(9): 552-565.
- [46] Xu P. Random Simulation and GPS Decorrelation [J]. *Journal of Geodesy*, 2001, 75(7): 408-423.
- [47] Teunissen P. Integer Aperture GNSS Ambiguity Resolution[J]. *Artificial Satellites*, 2003, 38(3): 79-88.
- [48] Teunissen P. GNSS Ambiguity Resolution with Optimally Controlled Failure-Rate[J]. *Artificial Satellites*, 2005, 40(4): 219-227.
- [49] Teunissen P. Theory of Integer Equivariant Estimation with Application to GNSS[J]. *Journal of Geodesy*, 2003, 77(7): 402-410.
- [50] Teunissen P. Best Integer Equivariant Estimation for Elliptically Contoured Distributions[J]. *Journal of Geodesy*, 2020, 94(9): 82.
- [51] Shen Y, Li B. Regularized Solution to Fast GPS Ambiguity Resolution[J]. *Journal of Survey Engineering*, 2007, 133(4): 168-172.
- [52] Li Bofeng, Shen Yunzhong. Maximum Likelihood Estimation in Mixed Integer Linear Model with p -norm Distribution[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2010, 39(2): 141-145. (李博峰, 沈云中. P 范分布混合整数模型参数估计理论[J]. 测绘学报, 2010, 39(2): 141-145.)
- [53] Li B, Zhang Z, Miao W, et al. Improved Precise Positioning with BDS-3 Quad-Frequency Signals [J]. *Satellite Navigation*, 2020, 1(1): 1-10.
- [54] Feng Y, Li B. A Benefit of Multiple Carrier GNSS Signals: Regional Scale Network-Based RTK with Doubled Inter-Station Distances[J]. *Journal of Spatial Science*, 2008, 53(2): 135-147.
- [55] Li B. Review of Triple-Frequency GNSS: Ambiguity Resolution, Benefits and Challenges[J]. *The Journal of Global Positioning Systems*, 2018, 16(1): 1-15.
- [56] Li B, Feng Y, Shen Y. Three Carrier Ambiguity Resolution: Distance-Independent Performance Demonstrated Using Semi-Generated Triple Frequency GPS Signals[J]. *GPS Solutions*, 2010, 14(2): 177-184.
- [57] Li B, Feng Y, Gao W, et al. Real-Time Kinematic Positioning over Long Baselines Using Triple-Frequency BeiDou Signals[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2015, 51(4): 3254-3269.
- [58] Feng Y. GNSS Three Carrier Ambiguity Resolution Using Ionosphere-Reduced Virtual Signals[J]. *Journal of Geodesy*, 2008, 82(12): 847-862.
- [59] Parkins A. Increasing GNSS RTK Availability with a New Single-epoch Batch Partial Ambiguity Resolution Algorithm[J]. *GPS Solutions*, 2011, 15(4): 391-402.
- [60] Wang J, Feng Y. Reliability of Partial Ambiguity Fixing with Multiple GNSS Constellations[J]. *Journal of Geodesy*, 2013, 87(1): 1-14.
- [61] Teunissen P, Odolinski R, Odijk D. Instantaneous BeiDou+GPS RTK Positioning with High Cut-off

- Elevation Angles[J]. *Journal of Geodesy*, 2014, 88(4): 335-350.
- [62] Li B, Shen Y, Feng Y, et al. GNSS Ambiguity Resolution with Controllable Failure Rate for Long Baseline Network RTK [J]. *Journal of Geodesy*, 2014, 88(2): 99-112.
- [63] Li Bofeng, Shen Yunzhong, Zhang Xingfu. Error Probability Controllable Integer Rounding Method and Its Application to RTK Ambiguity Resolution [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2012, 41(4): 483-489. (李博峰, 沈云中, 张兴福. 纳伪概率可控的四舍五入法及其在RTK模糊度固定中的应用[J]. 测绘学报, 2012, 41(4): 483-489.)
- [64] Li B, Lou L, Shen Y. GNSS Elevation-Dependent Stochastic Modeling and Its Impacts on the Statistic Testing [J]. *Journal of Surveying Engineering*, 2016, 142(2): 04015012.
- [65] Li B, Zhang L, Verhagen S. Impacts of BeiDou Stochastic Model on Reliability: Overall Test, w-test and Minimal Detectable Bias [J]. *GPS Solutions*, 2017, 21(3): 1095-1112.
- [66] Tian Y, Ge M, Neitzel F, et al. Multi-Dimensional Particle Filter-Based Estimation of Inter-System Phase Biases for Multi-GNSS Real-Time Integer Ambiguity Resolution [J]. *Journal of Geodesy*, 2019, 93:1073-1087.
- [67] Zhang B, Liu T, Yuan Y. GPS Receiver Phase Biases Estimable in PPP-RTK Networks: Dynamic Characterization and Impact Analysis[J]. *Journal of Geodesy*, 2018, 92(6): 659-674.
- [68] Geng J, Wen Q, Zhang Q, et al. GNSS Observable-specific Phase Biases for All-Frequency PPP Ambiguity Resolution [J]. *Journal of Geodesy*, 2022, 96(2): 11.
- [69] Zang N, Li B, Nie L, et al. Inter-System and Inter-Frequency Code Biases: Simultaneous Estimation, Daily Stability and Applications in Multi-GNSS Single-Frequency Precise Point Positioning [J]. *GPS Solutions*, 2019, 24(1): 18.
- [70] Li B, Zang N, Ge H, et al. Single-Frequency PPP Models: Analytical and Numerical Comparison [J]. *Journal of Geodesy*, 2019, 93(12): 2499-2514.
- [71] Teunissen P, Amiri-Simkooei A. Least-Squares Variance Component Estimation [J]. *Journal of Geodesy*, 2008, 82(2): 65-82.
- [72] Li Bofeng, Shen Yunzhong, Lou Lizhi. Variance-Covariance Component Estimation Based on the Equivalent Residuals [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2010, 39(4): 349-354. (李博峰, 沈云中, 楼立志. 基于等效残差的方差-协方差分量估计[J]. 测绘学报, 2010, 39(4): 349-354.)
- [73] Li Bofeng, Shen Yunzhong. Equivalent Residual Product Based Outlier Detection for Variance and Covariance Component Estimation [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2011, 40(1): 10-14. (李博峰, 沈云中. 基于等效残差探测粗差的方差-协方差分量估计[J]. 测绘学报, 2011, 40(1): 10-14.)
- [74] Li B, Shen Y, Lou L. Efficient Estimation of Variance and Covariance Components: A Case Study for GPS Stochastic Model Evaluation [J]. *IEEE Transaction on Geosciences and Remote Sensing*, 2011, 49(1): 203-210.
- [75] Li B, Shen Y, Xu P. Assessment of Stochastic Models for GPS Measurements with Different Types of Receivers [J]. *Chinese Science Bulletin*, 2008, 53(20): 3219-3225.
- [76] Li B. Stochastic Modeling of Triple-Frequency BeiDou Signals: Estimation, Assessment and Impact Analysis [J]. *Journal of Geodesy*, 2016, 90(7): 593-610.
- [77] Li B, Zhang Z, Shen Y, et al. A Procedure for the Significance Testing of Unmodeled Errors in GNSS Observations [J]. *Journal of Geodesy*, 2018, 92(10): 1171-1186.
- [78] Zhang Z, Li B. Unmodeled Error Mitigation for Single-Frequency Multi-GNSS Precise Positioning Based on Multi-epoch Partial Parameterization [J]. *Measurement Science and Technology*, 2020, 31(2): 025008.
- [79] Zhang Z, Li B, Shen Y. Efficient Approximation to a Fully Populated Variance-Covariance Matrix for RTK Positioning [J]. *Journal of Surveying Engineering*, 2018, 144(4): 04018005.
- [80] Dach R, Hugentobler U, Fridez P, et al. Bernese GPS Software Version 5.0 [R]. Bern: University of Bern, 2007.
- [81] Li B, Liu T, Nie L, et al. Single-Frequency GNSS Cycle Slip Estimation with Positional Polynomial Constraint [J]. *Journal of Geodesy*, 2019, 93(9): 1781-1803.
- [82] Zhang Z, Li B, Gao Y, et al. Asynchronous and Time-Differenced RTK for Ocean Applications Using the BeiDou Short Message Service [J]. *Journal of Geodesy*, 2023, 97(1): 7.
- [83] Dixon, K. StarFire: A Global SBAS for Sub-Decimeter Precise Point Positioning [C]//The 19th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS 2006),

- Fort Worth, TX, USA, 2006.
- [84] Li B, Zhang Z, Zang N, et al. High-Precision GNSS Ocean Positioning with BeiDou Short-Mesage Communication [J]. *Journal of Geodesy*, 2019, 93(2): 125-139.
- [85] Julien O, Alves P, Cannon M E, et al. A Tightly Coupled GPS/Galileo Integration for Improved Ambiguity Resolution [C]//Proceedings of ENC-GNSS 2003, Graz, Austria, 2003.
- [86] Odijk D, Teunissen P, Huisman L. First Results of Mixed GPS+GIOVE Single-Frequency RTK in Australia[J]. *Journal of Spatial Science*, 2012, 57(1): 3-18.
- [87] Odijk D, Teunissen P. Estimation of Differential Inter-System Biases Between the Overlapping Frequencies of GPS, Galileo, BeiDou and QZSS[C]//The 4th International Colloquium Scientific and Fundamental Aspects of the Galileo Program, Prague, Czech Republic, 2013.
- [88] Chen G, Li B, Zhang Z, et al. Integer Ambiguity Resolution and Precise Positioning for Tight Integration of BDS-3, GPS, Galileo, and QZSS Overlapping Frequencies Signals[J]. *GPS Solutions*, 2021, 26(1): 26.
- [89] Geng T, Li Z, Xie X, et al. Real-Time Ocean Precise Point Positioning with BDS-3 Service Signal PPP-B2b[J]. *Measurement*, 2022, 203: 111911.
- [90] Ge H, Li B, Ge M, et al. Improving Low Earth Orbit (LEO) Prediction with Accelerometer Data[J]. *Remote Sensing*, 2020, 12(10): 1599.
- [91] Ge H, Wu T, Li B. Characteristics Analysis and Prediction of Low Earth Orbit (LEO) Satellite Clock Corrections by Using Least-squares Harmonic Estimation[J]. *GPS Solutions*, 2022, 27(1): 38.
- [92] Zangenehjad F, Gao Y. GNSS Smartphones Positioning: Advances, Challenges, Opportunities, and Future Perspectives [J]. *Satellite Navigation*, 2021, 2(1): 24.
- [93] Humphreys T, Murrian M, Van Diggelen F, et al. On the Feasibility of cm-accurate Positioning via a Smartphone's Antenna and GNSS Chip [C]//2016 IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium (PLANS), Savannah, USA, 2016.
- [94] Zhang X, Tao X, Zhu F, et al. Quality Assessment of GNSS Observations from an Android N Smartphone and Positioning Performance Analysis Using Time-Differenced Filtering Approach[J]. *GPS Solutions*, 2018, 22(3): 70.
- [95] Zhang Xiaohong, Tao Xianlu, Wang Yingzhe, et al. MEMS-Enhanced Smartphone GNSS High-Precision Positioning for Vehicular Navigation in Urban Conditions[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2022, 47(10): 1740-1749. (张小红, 陶贤露, 王颖喆, 等. 城市场景智能手机 GNSS/MEMS 融合车载高精度定位[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2022, 47(10): 1740-1749.)
- [96] Zhang Xiaohong, Zhang Yuantai, Zhu Feng. Factor Graph Optimization for Urban Environment GNSS Positioning and Robust Performance Analysis [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2023, 48(7): 1050-1057. (张小红, 张元泰, 朱锋. 城市复杂场景下 GNSS 定位的因子图优化方法及其抗差性能分析[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2023, 48(7): 1050-1057.)
- [97] Miao W, Li B, Gao Y. The Superiority of Multi-GNSS L5/E5a/B2a Frequency Signals in Smartphones: Stochastic Modeling, Ambiguity Resolution and RTK Positioning [J]. *IEEE Internet of Things Journal*, 2023, 10(8): 7315-7326.
- [98] Li B, Miao W, Chen G, et al. Ambiguity Resolution for Smartphone GNSS Precise Positioning: Effect Factors and Performance [J]. *Journal of Geodesy*, 2022, 96(9): 63.
- [99] Engel J, Koltun V, Cremers D. Direct Sparse Odometry[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2018, 40(3): 611-625.
- [100] Latif Y, Cadena C, Neira J. Robust Loop Closing over Time for Pose Graph Slam [J]. *International Journal of Robotics Research*, 2013, 32(14): 1611-1626.
- [101] Liu T, Li B, Yang L. Phase Center Offset Calibration and Multipoint Time Latency Determination for UWB Location [J]. *IEEE Internet of Things Journal*, 2022, 9(18): 17536-17550.