



# Języki programowania (Informatyka) – Haskell

## Pula zadań projektowych 2024/25

**T. Goluch**

### Zadania (5 pkt.)

- 1) Dla danej liczby naturalnej  $n$  podaj taką liczbę  $x \leq n$ , która da się rozłożyć na największą liczbę różnych trójek  $a, b, c$ . Takich, że  $a + b + c = x$  i z boków o długości  $a, b, c$  można zbudować trójkąt prostokątny. W przypadku kilku wartości maksymalnych  $x$  należy zwrócić wszystkie. Przykładowo dla  $n=100$  liczby 60, 84 oraz 90 mają po 2 rozkłady. Wówczas wynikiem powinno być: [60, 84, 90].
- 2) dla danego zbioru w postaci listy  $L$  obliczyć jego zbiór potęgowy.
- 3) Dla danej liczby naturalnej  $n$  wyświetl pierwszą liczbę trójkątną (suma kolejnych liczb naturalnych, kolejne to: 0, 1, 3, 6, 10, 15,...) która posiada więcej niż  $n$  dzielników. Np. siódma liczba trójkątna  $28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$  posiada 6 dzielników: 1, 2, 4, 7, 14, 28.
- 4) Podwójny pandigital rozmiaru  $n$  to liczba w której skład wchodzi cyfry od 0 do  $n$  dokładnie 2 razy (zero nie może być na najstarszej pozycji). Przykładowo 5046170132637542 jest podwójnym pandigitalem rozmiaru 7. Dla podanych liczb heksadecymalnych  $0 \leq n \leq F$  podać największy podwójny pandigital rozmiaru  $n$ . Rozwiązanie nie może być oparte o zwykłe zakodowanie wszystkich 17 możliwych  $n$ .
- 5) Dla podanej liczby  $n$  podaj, jeśli to możliwe, trójkę pitagorejską  $a, b, c$  taką, że  $a + b + c = n$ . Dla  $n = 12$  jest nią odpowiednio: (3, 4, 5) ponieważ  $3^2 + 4^2 = 5^2$ . Dodatkowo należy narzucić ograniczenie, aby generować tylko pierwotne trójki pitagorejskie. Przykładowo (6, 8, 10) nie jest pierwotną trójką pitagorejską bo wszystkie jej wartości mają wspólny dzielnik równy 2. Jeśli to niemożliwe podaj trójkę pitagorejską dla największego możliwego  $m$  gdzie  $m < n$ .
- 6) Dla podanej liczby  $n$  podaj, jeśli to możliwe, czwórkę pitagorejską  $a, b, c, d$  taką, że  $a + b + c + d = n$ . Dla  $n = 8$  jest nią odpowiednio: 1, 2, 2, 3 ponieważ  $1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$ . Dodatkowo należy narzucić ograniczenie, aby generować tylko pierwotne czwórki pitagorejskie. Przykładowo (2, 4, 4, 6) nie jest pierwotną czwórką pitagorejską bo wszystkie jej wartości mają wspólny dzielnik równy 2. Jeśli to niemożliwe podaj czwórkę pitagorejską dla największego możliwego  $m$  gdzie  $m < n$ .
- 7) Dla danej liczby naturalnej  $n$  podaj najmniejszą liczbę naturalną  $x$  posiadającą  $m \geq n$  dzielników (łącznie z 1 i  $x$ ). Przykładowo dla  $n = 16$ ,  $x$  będzie równe 120 ponieważ jest pierwszą liczbą posiadającą  $m = 16$  dzielników.
- 8) Dla trójkąta podanego przy pomocy trzech różnych punktów  $a, b, c$  na płaszczyźnie kartezjańskiej, dla której  $-1000 \leq x, y \leq 1000$ . Podać odpowiedź czy zawiera środek układu współrzędnych  $(x,y)=(0,0)$ . Przykładowo trójkąt:  $a=(-100,100)$ ,  $b=(-100, -100)$ ,  $c=(100, 100)$  zawiera a trójkąt  $a=(-100,100)$ ,  $b=(-100, -99)$ ,  $c=(100, 100)$  nie zawiera punktu  $(0,0)$ .
- 9) Dla danej liczby naturalnej  $n$  podaj od dla jakiej liczby naturalnej  $m \leq n$  zaczyna się najdłuższy ciąg Collatza.
- 10) Dla danych liczb naturalnych  $n$  i  $m$  podać  $n$ -tą liczbę z porządku leksykograficznego liczb od  $01 \dots m$  do  $m(m-1) \dots 0$  (liczbą jest dowolną permutacją cyfr od 0 do  $m$ ). Przykładowo dla  $n = 2$  i  $m = 3$  wynikiem jest 0132. Dla  $9 < m < 16$  należy używać liczb heksagonalnych. Przykładowo dla  $n = 2$  i  $m = 10$  wynikiem jest 012345678A9.

- 11) Dla danej liczby naturalnej  $n$  istnieje ciąg ułamków od  $1/2, 1/3, \dots, 1/n$ . Wskaż którego okres w reprezentacji dziesiętnej jest najdłuższy. Dla  $n = 10$ , wynikiem jest  $1/7 = 0.(142857)$ . Jeśli rozwiązań jest więcej niż jedno należy wskazać wszystkie.
- 12) Dla danej liczby naturalnej  $n$  istnieje ciąg ułamków od  $1/2, 1/3, \dots, 1/n$ . Wskaż którego okres w reprezentacji binarnej jest najdłuższy. Dla  $n = 10$ , wynikiem jest  $1/9 = 0.(000111)$ . Jeśli rozwiązań jest więcej niż jedno należy wskazać wszystkie.
- 13) Dla danej liczby naturalnej  $n$  istnieje ciąg ułamków od  $1/2, 1/3, \dots, 1/n$ . Wskaż którego okres w podanej dowolnej reprezentacji jest najdłuższy. Jeśli rozwiązań jest więcej niż jedno należy wskazać wszystkie.
- 14) Dla danej liczby naturalnej  $n \leq 30000$  podaj największą liczbę naturalną  $\leq n$ , która nie może zostać zapisana przy pomocy sumy dwóch liczb obfitych<sup>1</sup>. Najmniejsza liczba obfita to 12 zatem 24 jest najmniejszą liczbą która może być zapisana za pomocą dwóch liczb obfitych. Zatem dla  $n = 24$  poprawna odpowiedź będzie 23. Dla  $n = 1000$  będzie to 997, a dla  $n = 10000$ , 9733. Ile będzie dla  $n = 30000$ ?
- 15) Dla danej liczby naturalnej  $n \leq 10000$  podaj listę liczb naturalnych z przedziału domkniętego  $[1, n]$  które mogą być zapisane przy pomocy sumy dwóch liczb obfitych<sup>2</sup>. Lista musi zawierać unikalne wartości posortowane w kolejności rosnącej.
- 16) Dla danych liczb całkowitych:  $n, m, p$  podać  $n$ -tą liczbę z ciągu rosnącego liczb od 0 do  $x$  gdzie  $x$  to maksymalna liczba zawierająca, każdą cyfrę od 0 do  $m$ ,  $p$  razy. Każda liczba z ciągu zawiera cyfry od 0 do  $m$  maksymalnie  $p$  razy. Przykładowo dla  $m = 4$  i  $p = 2$ ,  $x$  będzie równe 4433221100. Przykładowo dla  $n = 14$ ,  $m = 2$  i  $p = 2$  wynikiem będzie 112.  
 (1) 0  
 (2) 1  
 (3) 2  
 (4) 10  
 (5) 11  
 (6) 12  
 (7) 20  
 (8) 21  
 (9) 22  
 (10) 100  
 (11) 101  
 (12) 102  
 (13) 110  
 (14) 112
- 17) Dla danej liczby naturalnej  $n \leq 999$  podaj liczbę znaków w jej reprezentacji słownej. Dla  $n = 345$  wynikiem jest 23, z tyłu znaków składa się napis „trzysta czterdzieści pięć”.
- 18) Dla danej liczby naturalnej  $n$  podaj liczbę pierwszą  $\leq n$ , która równa jest sumie składającej się z największej liczby różnych liczb pierwszych. Dla  $n = 81$ , wynikiem jest 79. Można ją zapisać przy pomocy sumy 7 liczb pierwszych:  $3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 23$ .
- 19) Dla danej liczby naturalnej  $n$  podaj wszystkie liczby pierwsze  $\leq n$  dla których każda rotacja ich cyfr nadal jest liczbą pierwszą<sup>3</sup>. Taką liczbą jest 197 i jej dwie możliwe rotacje: 971 i 719.
- 20) Dla danej liczby naturalnej  $n \leq 5$  podaj sumę liczb które mogą zostać zapisane jako suma  $n$ -tych potęg swoich cyfr. Dla  $n = 4$  wynikiem jest  $19316 = 1634 + 8208 + 9474 = 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4 + 8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4 + 9^4 + 4^4 + 7^4 + 4^4$ .
- 21) Dla danej liczby naturalnej  $n$  znaleźć największy palindrom który można uzyskać z mnożenia liczb  $n$ -cyfrowych. Dla  $n=2$  największym palindromem jest  $9009 = 91 \times 99$ .
- 22) Dla danej liczby naturalnej  $n$  podaj sumę wszystkich liczb  $\leq n$ , które jednocześnie są palindromami w reprezentacji dziesiętnej i binarnej. Taką liczbą jest  $585_{10} = 1001001001_2$ . Przykładowo dla  $n=10$  wynikiem będzie  $25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$ , a ich reprezentacje binarne to odpowiednio: 1, 11, 101, 111, 1001. W celu optymalizacji obliczeniowej należy generować jedynie palindromy tego rodzaju, których jest mniej. W celu optymalizacji pamięciowej można przechowywać tylko połowę palindromu, +1 liczbę w przypadku palindromów o nieparzystej długości.

<sup>1</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Abundant\\_number](https://en.wikipedia.org/wiki/Abundant_number)

<sup>2</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Abundant\\_number](https://en.wikipedia.org/wiki/Abundant_number)

<sup>3</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Circular\\_prime](https://en.wikipedia.org/wiki/Circular_prime)

- 23) Dla danej liczby naturalnej  $n$  podaj największą, jeśli istnieje, parę liczb zaprzyjaźnionych  $a$  i  $b$  takich, że  $a \leq n$ ,  $b \leq n$ .
- 24) Podwójny pandigital to liczba w której skład wchodzi cyfry od 0 do 9 dokładnie 2 razy (zero nie może być na najstarszej pozycji). Przykładowo 59046817091326387542 jest podwójnym pandigitaliem. Dla danej liczby  $n$  zwrócić informację ile istnieje podwójnych pandigitali podzielnych przez  $n$ .
- 25) Niech  $d(n)$  oznacza liczbę dzielników  $n$ .  $M(n, k)$  będzie maksymalną wartością  $d(j)$  for  $n \leq j \leq n+k-1$ . Napisz funkcję obliczającą  $S(u, k)$  będącą sumą  $M(n, k)$  for  $1 \leq n \leq u-k+1$ . Przykładowo  $S(1000, 10) = 17176$ ,  $S(10000, 100) = 420524$ ,  $S(100000, 1000) = 8968220$ . Jakie będą wyniki dla  $S(1000000, 10000)$  i  $S(100000000, 100000)$ ?
- 26) Palindrom 595 możemy zapisać jako sumę kwadratów kolejnych liczb naturalnych:  $6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2$ . Dla danego  $n$  wydrukować wszystkie palindromy mniejsze od  $n$ , które możemy zapisać jako sumę kwadratów kolejnych liczb naturalnych.
- 27) Liczba Lychrel'a to taka liczba dla której nie da się wygenerować palindromu w dowolnie długiej sekwencji ściśle określonych przekształceń. Przekształcenia te polegają na kolejnym sumowaniu liczby z jej kontrliczbą<sup>4</sup> i jeśli wynik nie jest palindromem to powtarzanie tych operacji dla kolejno tak pozyskanych sum. Przykładowo 59 nie jest liczbą Lychrel'a bo ciąg przekształceń:  $59 \rightarrow 59+95=154 \rightarrow 154+451=605 \rightarrow 605+506=1111$  jest kontrprzykładem. Napisz funkcję przyjmującą dwa parametry  $n$  i  $x$ , gdzie  $n$  – liczba przekształceń, a  $x$  to –kandydat na liczbę Lychrel'a. Funkcja powinna zwracać palindrom powstały z  $n$  lub mniej przekształceń liczby  $x$  dowodzący, że liczba ta nie jest liczbą Lychrel'a. W przeciwnym przypadku funkcja zwraca informację, że nie udało się znaleźć kontrprzykładu.
- 28) Kod Prüfer'a<sup>5</sup> pozwala przekształcić dowolne drzewo na unikalną sekwencję liczb. Zaimplementować funkcję kodującą drzewo podane w postaci ciągu krawędzi (lista par liczb) kodem Prüfera (lista liczb):
- `prufer_code [(1, 2)]`  
`> []`
  - `prufer_code [(1, 2), (1, 3)]`  
`> [1]`
  - `prufer_code [(1, 2), (2, 3)]`  
`> [2]`
  - `prufer_code [(1, 3), (2, 3)]`  
`> [3]`
  - `prufer_code [(1, 4), (2, 4), (3, 4)]`  
`> [4, 4]`
- 29) Kod Prüfer'a<sup>6</sup> pozwala przekształcić dowolne drzewo na unikalną sekwencję liczb. Zaimplementować funkcję dekodującą kod Prüfer'a (lista liczb) na drzewo binarne podane w postaci ciągu krawędzi (lista par liczb):
- `prufer_decode([])`  
`> [(1, 2)]`
  - `prufer_decode([1])`  
`> [(1, 2), (1, 3)]`
  - `prufer_decode([2])`  
`> [(1, 2), (2, 3)]`
  - `prufer_decode([3])`  
`> [(1, 3), (2, 3)]`
  - `prufer_decode([4, 4])`  
`> [(1, 4), (2, 4), (3, 4)]`

<sup>4</sup> Kontrliczba to liczba powstała przez odwrócenie kolejności cyfr. Dla 3476576 kontrliczbą będzie 6756743. Dla liczb kończących jednym bądź większą liczbą zer kontrliczba będzie ich pozbawiona na początku. Kontrliczbą 138000 będzie 831.

<sup>5</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%BCfer\\_sequence](https://en.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%BCfer_sequence)

<sup>6</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%BCfer\\_sequence](https://en.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%BCfer_sequence)

- 30) Dla danej liczby naturalnej  $n$  podaj najmniejszą liczbę naturalną  $m \geq n$  z której można utworzyć zbiór  $A$  składający się z dwóch rodzajów elementów  $x$  i  $y$  o mocy  $|A| = |x| + |y| = m$  gdzie  $|x| \geq |y|$ . Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch elementów  $x$  ze zbioru  $A$  powinno być równe  $\frac{1}{2}$ . Przykładowo dla  $n=20$ ,  $m=21$ ,  $|x| = 15$  a  $|y| = 6$ , prawdopodobieństwo wylosowania dwóch elementów  $x = P(xx) = \frac{15}{21} \cdot \frac{14}{20} = \frac{1}{2}$ .
- 31) Dla podanego zbioru  $A$  liczb naturalnych zwrócić informację czy zawiera on dwa równoliczne rozłączne podzbiory  $B$  i  $C$  dla których sumy ich elementów są identyczne. Przykładowo zbiór  $A_1 = \{81, 88, 75, 42, 87, 84, 86, 65\}$  zawiera takie zbiory  $B_1 = \{65, 87, 88\}$  i  $C_1 = \{75, 81, 84\}$  ponieważ  $65 + 87 + 88 = 75 + 81 + 84$ , podczas gdy zbiór  $C_2 = \{157, 150, 164, 119, 79, 159, 161, 139, 158\}$  już nie posiada takich podzbiorów.
- 32) Dla danej liczby naturalnej  $n$  podaj liczbę naturalną  $m$  dla której liczba możliwych rozwiązań równania  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{m}$  (gdzie  $a$  i  $b$  są liczbami naturalnymi) jest większa albo równa  $n$ . Przykładowo dla  $n = 3$  będzie to  $m = 4$  ponieważ istnieją dokładnie trzy rozwiązania tego równania:  $a_1 = 5$  i  $b_1 = 20$ ,  $a_2 = 6$  i  $b_2 = 12$ ,  $a_3 = 8$  i  $b_3 = 8$  czyli:  $\frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$  i  $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ .
- 33) Dla podanej liczby wymiernej  $0 \leq p \leq 0.99$  podaj najmniejszą liczbę  $n$  taką że  $p$  jest mniejsze niż odsetek wszystkich liczb „niemonotonicznych” w zbiorze liczb całkowitych od 0 do  $n$ . Zakładamy, że liczba jest „monotoniczna” kiedy jej kolejne cyfry nie rosną albo nie maleją w innym przypadku liczba jest „niemonotoniczna”. Przykładowo liczby 222, 1334578 i 9962 są „monotoniczne” a 253, 2286 i 888878 są „niemonotoniczne”. Łatwo zauważyć, że dla  $m \leq 100$ ,  $p = 0$ .
- 34) Dla danej liczby naturalnej  $n$  podaj  $n$ -tą liczbę naturalną  $a \geq 10$  której suma cyfr podniesiona do pewnej potęgi  $x$  gdzie  $x$  jest liczbą naturalną równa jest jej samej. Przykładowo dla  $n = 2$ ,  $a = 512$  ponieważ  $(5+1+2)^3 = 512$  i jest to druga taka liczba rozpoczynając ich szukanie od najmniejszej składającej się z dwóch cyfr czyli 10. Dla  $n = 10$ ,  $a = 614656$ .
- 35) Podać  $n$ -tą pozycję z porządku leksykograficznego ciągów cyfr od 0 do  $x$  gdzie  $x$  to maksymalna wartość ciągu zawierająca, każdą cyfrę od 0 do  $m$ ,  $p$  razy. Przykładowo dla  $m = 4$  i  $p = 2$ ,  $x$  będzie równe 4433221100 (pozycją jest dowolny ciąg cyfr od 0 do  $m$ , gdzie każda z cyfr może, ale nie musi wystąpić  $p$  razy). Dozwolone są zatem ciągi rozpoczynające się od 1 do  $p$  zer. Przykładowo dla  $n = 3$ ,  $m = 2$  i  $p = 2$  wynikiem będzie 001.
- 36) Dla dowolnego zbioru liczb  $S$  niech  $\text{sum}(S)$  będzie sumą jego elementów. Dla pewnego zbioru  $T$  i pewnego  $k < n$  gdzie  $n = |T|$ . Rozważmy wszystkie  $\text{sum}(U_i)$  wszystkich podzbiorów  $U_i$  (gdzie  $0 < i \leq C_{n,k}$ ) o mocy  $k$  zbioru  $T$ . Podzbiory  $U_i$  reprezentują wszystkie  $C_{n,k}$   $k$ -elementowe kombinacje  $n$ -elementowego zbioru  $T$ . Niektóre z tych  $\text{sum}(U_i)$  występują więcej niż raz, inne są unikalne. Podaj sumę unikalnych  $\text{sum}(U_i)$  zbioru  $T$ . Przykładowo: dla zbioru  $T = \{1, 3, 6, 8, 10, 11\}$  i  $k = 3$ , będziemy mieli  $C_{6,3} = 20$  podzbiorów  $U_i$  z czego tylko 8 z nich będzie miało unikalne  $\text{sum}(U_i)$  a ich suma będzie równa 156.
- 37) Znajdź sumę różnych liczb bezkwadratowych w pierwszych  $x$  wierszach trójkąta Pascala. Liczbą bezkwadratową  $n$  to dodatnia liczba całkowita, która nie jest podzielna przez żaden kwadrat liczby całkowitej z wyjątkiem 1. Przykładowo dla  $n = 8$ , w pierwszych ośmiu wierszach trójkąta Pascala istnieje 12 różnych liczb  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 15, 20, 21, 35\}$ . Wszystkie oprócz 4 i 20 są bezkwadratowe, a ich suma wynosi 105.
- 38) Liczby B-gładkie to takie, których dzielniki pierwsze są mniejsze lub równe  $B$ . Dla danego  $B$  i  $n$  ile jest liczb B-gładkich nie przekraczających  $n$ ? Przykładowo dla  $B = 5$  i  $n = 30$  początkowe liczby 5-gładkie inaczej zwane liczbami Hamming’a to: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 27, 30... więc odpowiedź wynosi: 18.
- 39) Dwóch graczy rzuca  $n_i$  kostkami  $k_i$ -ściennymi (rozkład oczek na ścianie to  $1, 2, \dots, k$ ), gdzie  $i \in \{1, 2\}$ . Przykładowo dla  $(n_1 = 3, k_1=12)$  i  $(n_2 = 6, k_2=6)$ , gracz pierwszy rzuca trzema kostkami 12-ściennymi a drugi sześcioma 6-ściennymi. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pierwszy wyrzuci większą sumę oczek od drugiego?
- 40) Dla zbioru  $S(r)$  punktów  $(x, y)$  o współrzędnych całkowitych spełniających warunek:  $|x| + |y| \leq r$ . Niech 0 będzie punktem  $(0,0)$ , a  $C$  punktem  $(r/4, r/4)$ . Dla danego  $r$  podaj  $N(r)$  będącą liczbą punktów  $B$  w  $S(r)$  takich, że trójkąt  $OBC$  ma kąt rozwarty, czyli największy kąt  $\alpha$  spełnia warunek:  $\pi/2 \text{ rad} < \alpha < \pi \text{ rad}$ . Dla  $r = 4$ ,  $N(4) = 24$ , a dla  $r = 8$ ,  $N(8) = 100$ .
- 41) Dla liczby całkowitej dodatniej  $n$ , niech  $\sigma_2(n)$  będzie sumą kwadratów jej dzielników. Na przykład:  $\sigma_2(10) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 10^2 = 130$ . Podaj dla danego  $x$  największą wartość  $y \leq x$  taką, że  $\sigma_2(y)$  jest kwadratem dowolnej liczby naturalnej.
- 42) Niech  $t(n) = 2n^2 - 1$  gdzie  $n > 1$ . Tworzą one następujący ciąg: 7, 17, 31, 49, 71, 97, 127, 162 .... Tylko dwie z nich są złożone 49 i 161. Dla danej liczby naturalnej  $x$  ile liczb  $t(n)$  gdzie  $n < x$  jest liczbą pierwszą? Przykładowo dla  $x = 10000$ , otrzymamy 2202 (tyle będzie  $t(n)$  liczb pierwszych).
- 43) Liczba naturalna  $x$  jest zbalansowana kiedy suma połowy jej początkowych liczb jest równa sumie połowy końcowych. Jeśli liczba  $x$  posiada nieparzystą liczbę cyfr to centralna liczba jest brana pod uwagę w obydwu

sumach. Łatwo zauważyć, że wszystkie składające się z jednej liczby oraz wszystkie palindromy są zrównoważone. Przykładowe, inne zbalansowane liczby: 3737, 1231222, 926458. Dla danego  $n$  podaj  $T(n)$  będące sumą wszystkich zbalansowanych liczb mniejszych od  $10^n$ . Przykładowo: dla  $T(1) = 45$ ,  $T(2) = 540$ ,  $T(5) = 334795890$ .

- 44) Niech  $A$  i  $B$  będą ciągami bitów (sekwencjami zer i jedynek). Bezprefiksowy kod o rozmiarze  $n$  to zbiór  $n$  odrębnych ciągów bitów, tak że żaden ciąg nie jest prefiksem żadnego innego. Przykładowy kod bezprefiksowy o rozmiarze 6: 0000, 0001, 001, 01, 10, 11. Załóżmy teraz, że przesłanie bitu „0” kosztuje jeden, ale przesłanie „1” kosztuje cztery. W takim razie całkowity koszt kodu bez prefiksu pokazanego powyżej wynosi 35, co jest najniższym możliwym kosztem dla podanego schematu cenowego. Zapisujemy to jako  $\text{Cost}(6) = 35$ . Zaimplementuj funkcję zwracającą  $\text{Cost}(n)$  dla zadanego  $n$ .
- 45) Liczbę naturalną  $A$  nazywamy „liczbą całkowitą aleksandryjską”, jeżeli istnieją liczby całkowite  $p, q, r$  takie, że:  $A = p * q * r$  oraz  $1/A = 1/p + 1/q + 1/r$ . Na przykład, 630 jest szóstą liczbą aleksandryjską ( $p=5, q=-7, r=-18$ ),  $630 = 5 * (-7) * (-18)$  oraz  $1/630 = 1/5 - 1/7 - 1/18 = 126/630 - 90/630 - 35/630 = 1/360$ . Początkowe liczby aleksandryjskie to: 6, 42, 120, 156, 420, 630. Napisz program znajdujący te liczby aleksandryjskie.
- 46) Nazwijmy trójkąt o bokach całkowitych  $a, b, c$  spełniający równość  $a^2 + b^2 = c^2 + 1$  trójkątem ledwo ostrym. Dla danego  $n$  ile jest trójkątów ledwo ostrych o obwodzie  $< n$ .
- 47) Nazwijmy trójkąt o bokach całkowitych  $a, b, c$  spełniający równość  $a^2 + b^2 = c^2 - 1$  trójkątem ledwo rozwartym. Dla danego  $n$  ile jest trójkątów ledwo rozwartych o obwodzie  $< n$ .
- 48) The Chase to gra rozgrywana dwoma kośćmi dla parzystej liczby graczy. Gracze siadają wokół stołu, a gra rozpoczyna się od dwóch z nich siedzących naprzeciwko siebie. Rozpoczynają z jedną kostką. W każdej turze dwaj gracze z kostką rzucają nią. Jeśli gracz wyrzuci 1, kość przechodzi do sąsiada po lewej stronie. Jeśli gracz wyrzuci 6, kość przechodzi do sąsiada po prawej stronie. W przeciwnym razie gracz zatrzymuje kość na następną turę. Gra kończy się, gdy jeden z graczy ma obie kostki po rzucie i przekazaniu; gracz ten przegrywa. W grze z  $n$  graczami, jaka jest oczekiwana liczba tur, po których gra się kończy?
- 49) Znajdź liczbę  $n$ , która dopuszcza reprezentacje wszystkich czterech równań:  $n = (a_1)^2 + (b_1)^2$ ,  $n = (a_2)^2 + 2(b_2)^2$ ,  $n = (a_3)^2 + 3(b_3)^2$ ,  $n = (a_4)^2 + 7(b_4)^2$ , gdzie  $a_n$  i  $b_n$  to dowolne liczby naturalne. Przykładowe takie liczby to  $3600 = (48)^2 + (36)^2 = (20)^2 + 2(40)^2 = (30)^2 + 3(30)^2 = (45)^2 + 7(15)^2$  i  $88201 = (99)^2 + (280)^2 = (287)^2 + 2(54)^2 = (283)^2 + 3(52)^2 = (187)^2 + 7(84)^2$ . Dla danego  $n$  podaj ile istnieje takich liczb nie przekraczających  $n$ .
- 50) Znajdź sumę czynników pierwszych dwumianu newtona  $\binom{n}{k}$  dla jak największych  $n$  i  $k$ , np.:  $n = 2000000$  i  $k = 15000000$ . Dla  $n = 10$  i  $k = 3$ , będzie to 14,  $\binom{10}{3} = 120$ , a rozkład 120 na czynniki pierwsze =  $\{2, 2, 2, 3, 5\}$ , zatem ich suma to 14.

#### Uwagi:

- a. wszystkie funkcje powinny posiadać odpowiedni nagłówek z typem funkcji,
- b. w programach nie można korzystać z funkcji z `Data.List`, `Data.Array` lub podobnych modułów.

#### Zasady zaliczenia zadania domowego:

- Studenci dzielą się na 3 osobowe grupy zadaniowe.
- Każda grupa dostaje trzy losowo przydzielone zadania (każde za 5 pkt).
- W skrajnych przypadkach – kiedy liczba osób w grupie nie jest wielokrotnością trójki – dla grup 2 osobowych losowane są dwa a dla 4 osobowych cztery zadania.
- Sumarycznie grupa zawsze może uzyskać 15 p. p.
- Numery wylosowanych zadań dostępne są na arkuszu ocen umieszczonym na stronie przedmiotu na platformie eNauczenie.
- Na stronie przedmiotu należy umieścić w terminie rozwiązania zadań.
- Oddawanie zadań domowych z Haskella odbywa się na drugich zajęciach. Dla pierwszej podgrupy jest to kolejny tydzień a dla drugiej podgrupy po dwóch tygodniach po zajęciach wprowadzających. Te okresy mogą się ponieważ nie uwzględniają dni w których nie ma zajęć (tn. świąt, godzin rektorskich itp...).