

## H.10: Solitonlösungen der KORTEWEG-DE VRIES-Gleichung

*In diesem pdf-Dokument sind Videos eingebunden, diese werden von okular angezeigt. Sollte Ihnen diese nicht angezeigt werden, haben wir die .mp4-Dateien auch nochmal separat angefügt.*

In dieser Aufgabe untersuchen wir Lösungen der Korteweg-de Vries-Gleichung. Diese Gleichung beschreibt die Ausbreitung von Wellen in Kanälen.

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) = 6u(t, x)\frac{\partial}{\partial x}u(t, x) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}u(t, x)$$

Ein besonderer Satz Lösungen sind die Solitonen. Diese beschreiben einzelne Wellen, die sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, ohne zu zerfließen. Die Anfangsbedingung:

$$u^{[N]}(0, x) = \frac{-N(N+1)}{\cosh^2(x)} \quad (1)$$

erzeugt N Solitonen, die sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten ausbreiten.

### H10.1

Zunächst betrachten wir die analytische Lösung zu  $u^{[2]}$ :

$$u^{[2]}(t, x) = -12 \frac{3 + 4 \cosh(2x - 8t) + \cosh(4x - 64t)}{\{3 \cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t)\}^2}$$

im Bereich  $t \in [-1, 1]$ . In Video 1 sieht man, dass zwei Solitonen erzeugt werden. Um die Geschwindigkeit der Solitonen zu bestimmen, kann man die Position bei  $t = 1$  ablesen, da beide Solitonen zur Zeit  $t = 0$  am Ort  $x = 0$  anfangen. Dabei ergibt sich:

$$\begin{aligned} v_1 &= 3.45 \\ v_2 &= 16.27 \end{aligned}$$

### H10.2

Nun lösen wir  $u^{[N]}$  numerisch. Dazu nutzen wir die Zeitdiskretisierung  $t_n = n \cdot d$  mit der Zeitschrittweite  $d$  und die Ortsdiskretisierung  $h_j = j \cdot h$  mit der Schrittweite  $h$ . Mit der

```

11//240.09195pt/217.27562ptfstreamVPlayer9.swfdict/Type/Filespec/F
(VPlayer9.swf)/EF «/F »fstreamExact.mp4dict/Type/Filespec/F (Exact.mp4)/EF «/F
»dict/Type/RichMediaInstance/Subtype/Flash/Asset /Params
«/Binding/Foreground/FlashVars (sour-
ce=Exact.mp4loop=truescaleMode=letterbox)»dict/Type/RichMediaConfiguration/Subtype/Flash/Instances
[]dict/Type/RichMediaContent/Assets «/Names [ (VPlayer9.swf) (Exact.mp4)
]»/Configurations []dict/Activation «/Condition/PO/Presentation «/Transparent
true/Style/Embedded/PassContextClick false»»/Deactivation
«/Condition/PC»0.0pt0.0pt0.0pt/Subtype/RichMedia/F 4/BS «/W 0/S/S»/Contents (media
embedded by media9 [1.11(2020/05/06)])/NM (rm@0)/AP «/N »/RichMediaSettings
/RichMediaContent dict/S/JavaScript/JS
(trify(typeof(annotRM))==undefined')annotRM=new Ar-
ray();if(typeof(annotRM['rm@0'])==undefined')annotRM['rm@0']=this.getAnnotRichMedia(this.pageN
65537/F 2/BS «/W 0»/T (fd@rm@0)/AA «/PO /PV »

```

Abbildung 1: Darstellung von  $u^{[2]}(x)$  im Bereich von  $t \in [-1, 1]$

Notation:  $u_j^n = u(t_n, x_j)$  lassen sich die einzelnen Teile der partiellen Differentialgleichung schreiben als:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \right|_{t=t_n, x=x_j} &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2d} + O(d^2) \\
 u(t, x) \left. \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) \right|_{t=t_n, x=x_j} &= \frac{u_{j+1}^n + u_j^n + u_{j-1}^n}{3} \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} + O(h^2) \\
 \left. \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(t, x) \right|_{t=t_n, x=x_j} &= \frac{u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n}{2h^3} + O(h^2) \\
 \Rightarrow \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2d} &= 6u_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} - \frac{u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n}{2h^3} \\
 \Rightarrow u_j^{n+1} &= 2d \left( 6u_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} - \frac{u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n}{2h^3} \right) + u_j^{n-1}
 \end{aligned}$$

Mit dem Anfangsschritt:

$$\begin{aligned}
 \frac{u_j^1 - u_j^0}{d} &= 6u_j^0 \frac{u_{j+1}^0 - u_{j-1}^0}{2h} - \frac{u_{j+2}^0 - 2u_{j+1}^0 + 2u_{j-1}^0 - u_{j-2}^0}{2h^3} \\
 \Rightarrow u_j^1 &= d \left( 6u_j^0 \frac{u_{j+1}^0 - u_{j-1}^0}{2h} - \frac{u_{j+2}^0 - 2u_{j+1}^0 + 2u_{j-1}^0 - u_{j-2}^0}{2h^3} \right) + u_j^0
 \end{aligned}$$

können wir  $u^{[N]}(t, x)$  numerisch berechnen. In Abbildung 2 haben wir für  $N = 1, 2$  und  $h = 0.05, 0.1, 0.2, 0.4$  die analytische mit der numerischen Lösung verglichen. Man sieht, dass diese Kurven recht gut konvergieren. Nur  $h = 0.4$  konvergiert für  $N = 2$  nicht. Um

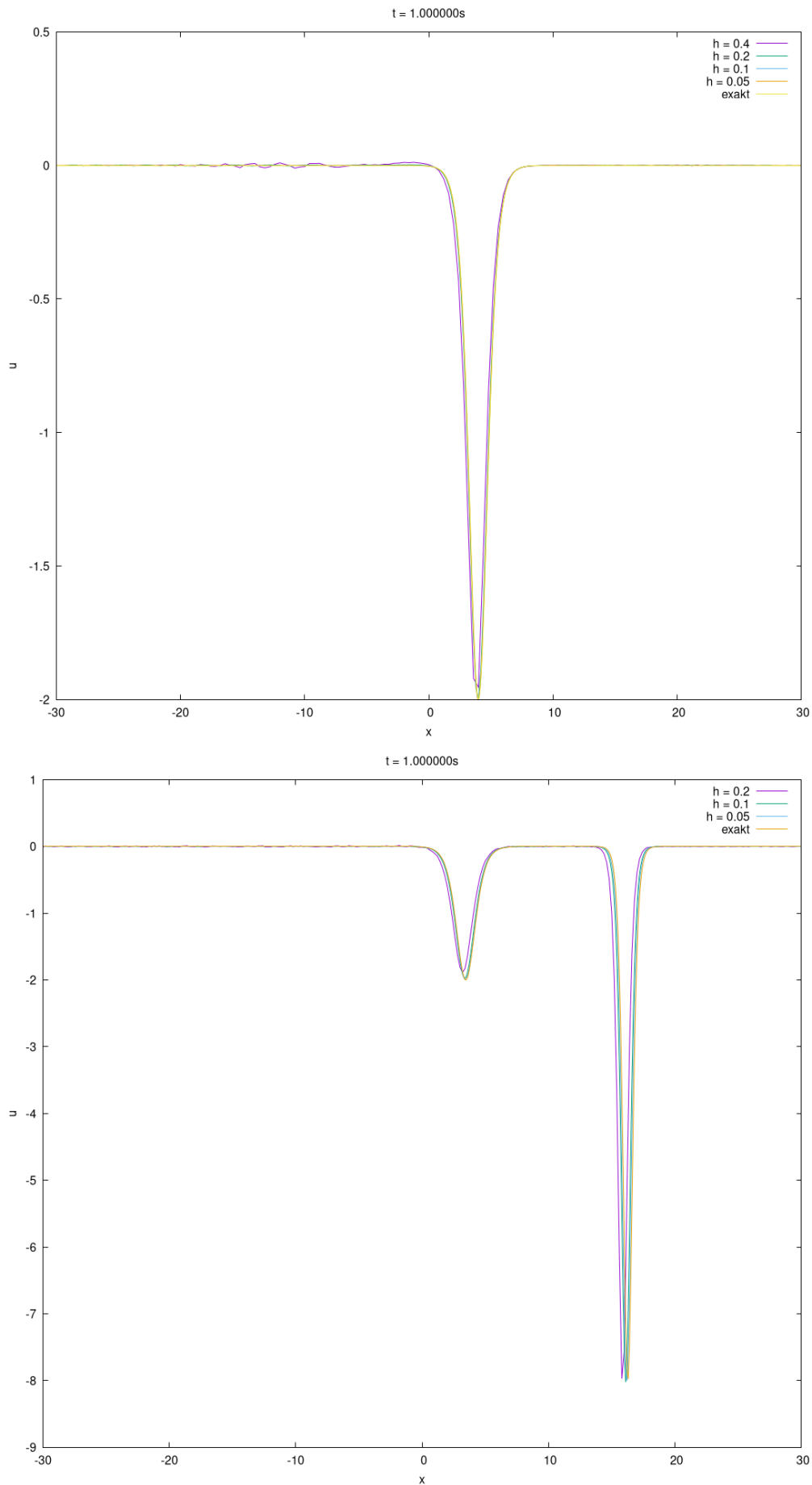


Abbildung 2: Vergleich der numerischen und analytischen Lösung  $u^{[1]}(1, x)$  (oben) und  $u^{[2]}(1, x)$  (unten)

diese Konvergenz genauer zu untersuchen haben wir für alle  $d \in [3 \cdot 10^{-5}, 2.5 \cdot 10^{-4}]$  und alle  $h \in [0.05, 0.4]$  die Gesamtabweichung des numerischen Verfahren für  $u^{[1]}$  und  $u^{[2]}$  berechnet und in eine Heatmap geplottet. Zusätzlich haben wir  $d = \frac{1}{2.6}h^3$  geplottet, um zu zeigen, dass das Verfahren für größere  $d$  nicht konvergiert. In Abbildung 3 sieht man außerdem, dass  $u^{[2]}$  eine viel stärkere  $h$ -Abhängigkeit hat als  $u^{[1]}$ , was man auch in der Abbildung 2 gesehen hat.

### H10.3

Nun haben wir  $u^{[3]}(t, x)$  numerisch in den Intervallen  $t \in [0, 1]$  und  $x \in [-5, 45]$  berechnet und im Video 4 dargestellt. Man sieht drei Solitonen, die unterschiedliche Geschwindigkeiten und Amplituden haben. Diese befinden sich alle bei  $t = 0$  am Ort  $x = 0$ .

### H10.4

Zuletzt betrachten wir Lösungen für  $N \notin \mathbb{N}$ . Wir haben die Lösungen für  $N \in [1.0, 1.9]$  betrachtet und in Video 5 dargestellt. Man sieht, dass diese Anfangsbedingungen keine perfekten Solitonen ergeben; Die resultierenden Kurven zerfließen leicht und erzeugen hinter sich Wellen, die auch positive Anteile haben. Trotzdem erkennt man wie sich zwei immer besser getrennte Wellen bilden.

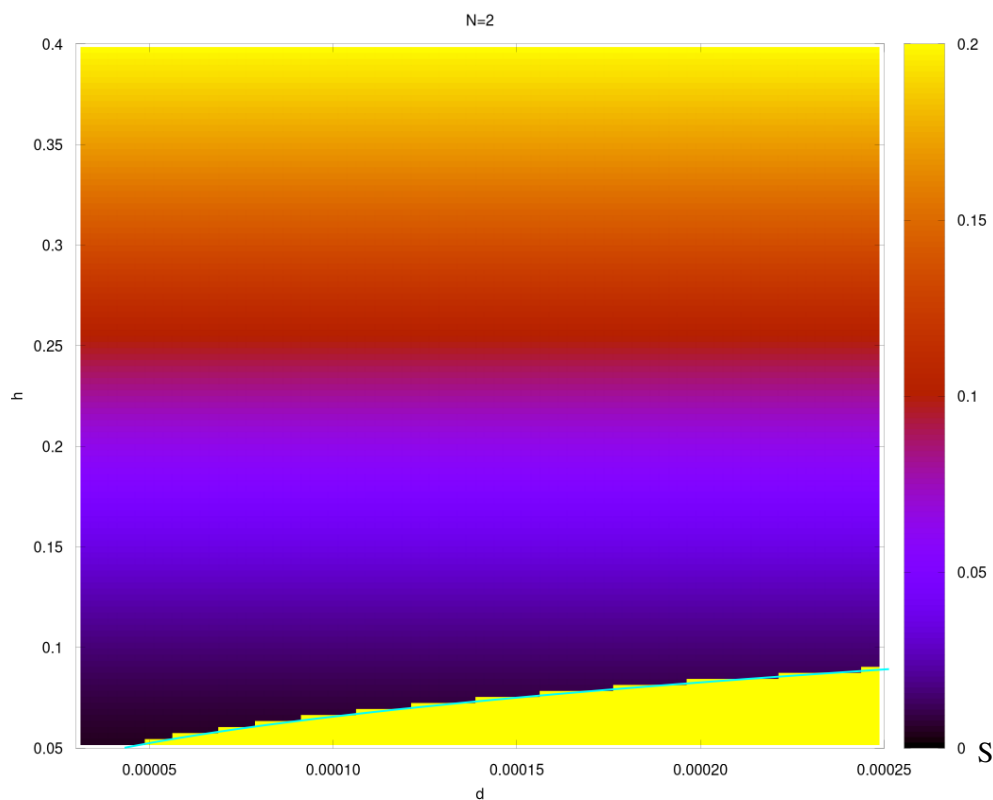
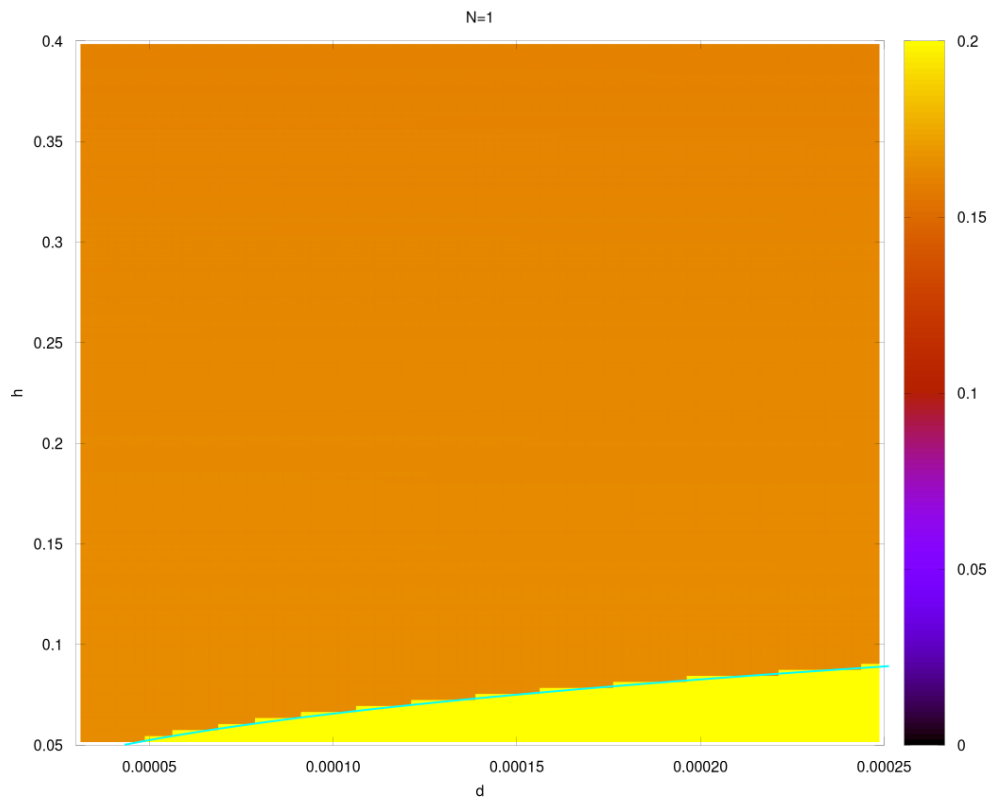


Abbildung 3: Vergleich der Differenzen der numerischen und analytischen Lösung der DGL für  $N = 1$  (oben) und  $N = 2$  (unten)

```

/240.09195pt/217.27562ptfstreamN3.mp4dict/Type/Filespec/F (N3.mp4)/EF </F
    »dict/Type/RichMediaInstance/Subtype/Flash/Asset /Params
        <</Binding/Foreground/FlashVars (sour-
ce=N3.mp4loop=truescaleMode=letterbox)»dict/Type/RichMediaConfiguration/Subtype/Flash/Instances
    []dict/Type/RichMediaContent/Assets <</Names [ (VPlayer9.swf) (N3.mp4)
    ]»/Configurations []dict/Activation <</Condition/PO/Presentation <</Transparent
        true/Style/Embedded/PassContextClick false»»/Deactivation
<</Condition/PC>0.0pt0.0pt0.0pt/Subtype/RichMedia/F 4/BS <</W 0/S/S»/Contents (media
    embedded by media9 [1.11(2020/05/06)])/NM (rm@1)/AP <</N »/RichMediaSettings
        /RichMediaContent dict/S/JavaScript/JS
        (tryif(typeof(annotRM)==’undefined’)annotRM=new Ar-
ray();if(typeof(annotRM[’rm@1’])==’undefined’)annotRM[’rm@1’]=this.getAnnotRichMedia(this.pageN
        65537/F 2/BS <</W 0»/T (fd@rm@1)/AA <</PO /PV »

```

Abbildung 4: Hier ist  $u^{[3]}(t, x)$  im Bereich von  $t \in [0, 1]$  und  $t \in [-5, 45]$  dargestellt.

```

/240.09195pt/217.27562ptfstreamNalle.mp4dict/Type/Filespec/F (Nalle.mp4)/EF </F
    »dict/Type/RichMediaInstance/Subtype/Flash/Asset /Params
        <</Binding/Foreground/FlashVars (sour-
ce=Nalle.mp4loop=truescaleMode=letterbox)»dict/Type/RichMediaConfiguration/Subtype/Flash/Instances
    []dict/Type/RichMediaContent/Assets <</Names [ (VPlayer9.swf) (Nalle.mp4)
    ]»/Configurations []dict/Activation <</Condition/PO/Presentation <</Transparent
        true/Style/Embedded/PassContextClick false»»/Deactivation
<</Condition/PC>0.0pt0.0pt0.0pt/Subtype/RichMedia/F 4/BS <</W 0/S/S»/Contents (media
    embedded by media9 [1.11(2020/05/06)])/NM (rm@2)/AP <</N »/RichMediaSettings
        /RichMediaContent dict/S/JavaScript/JS
        (tryif(typeof(annotRM)==’undefined’)annotRM=new Ar-
ray();if(typeof(annotRM[’rm@2’])==’undefined’)annotRM[’rm@2’]=this.getAnnotRichMedia(this.pageN
        65537/F 2/BS <</W 0»/T (fd@rm@2)/AA <</PO /PV »

```

Abbildung 5: Hier ist  $u^{[N]}(t, x)$  für  $N \in [1.0, 1.9]$  dargestellt.