H.10: Solitonlösungen der Korteweg-de Vries-Gleichung

In diesem pdf-Dokument sind Videos eingebunden, diese werden von okular *angezeigt. Sollte Ihnen diese nicht angezeigt werden, haben wir die .mp4-Dateien auch nochmal separat angefügt.*

In dieser Aufgabe untersuchen wir Lösungen der Korteweg-de Vries-Gleichung. Diese Gleichung beschreibt die Ausbreitung von Wellen in Kanälen.

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = 6u(t,x)\frac{\partial}{\partial x}u(t,x) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}u(t,x)$$

Ein besonderer Satz Lösungen sind die Solitonen. Diese beschreiben einzelne Wellen, die sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, ohne zu zerfließen. Die Anfangsbedingung:

$$u^{[N]}(0,x) = \frac{-N(N+1)}{cosh^2(x)} \tag{1}$$

erzeugt N Solitonen, die sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten ausbreiten.

H10.1

Zunächst betrachten wir die analytische Lösung zu $u^{[2]}$:

$$u^{[2]}(t,x) = -12\frac{3+4\cosh(2x-8t)+\cosh(4x-64t)}{\{3\cosh(x-28t)+\cosh(3x-36t)\}^2}$$

im Bereich $t \in [-1,1]$. In Video 1 sieht man, dass zwei Solitonen erzeugt werden. Um die Geschwindigkeit der Solitonen zu bestimmen, kann man die Position bei $t = 1$ ablesen, da beide Solitonen zur Zeit $t = 0$ am Ort $x = 0$ anfingen. Dabei ergibt sich:

$$v_1 = 3.45$$
$$v_2 = 16.27$$

H10.2

Nun lösen wir $u^{[N]}$ numerisch. Dazu nutzen wir die Zeitdiskretisierung $t_n = n \cdot d$ mit der Zeitschrittweite d und die Ortsdiskretisierung $h_j = j \cdot h$ mit der Schrittweite h. Mit der

Abbildung 1: Darstellung von $u^{[2]}(x)$ im Bereich von $t \in [-1, 1]$

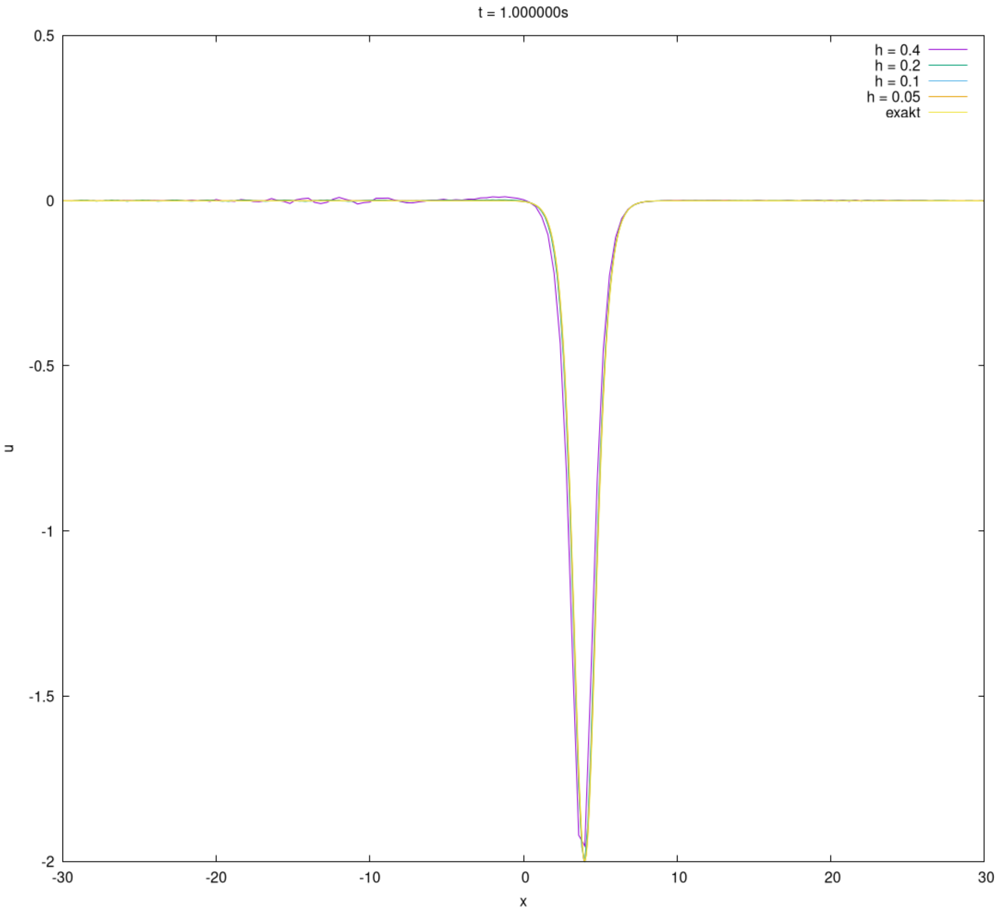
Notation: $u_j^n = u(t_n, x_j)$ lassen sich die einzelnen Teile der partiellen Differentialgleichung schreiben als:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} u(t,x)\Big|_{t=t_n, x=x_j} &= \frac{u_j^{n+1} - n_j^{n-1}}{2d} + O(d^2) \\
u(t,x)\frac{\partial}{\partial x} u(t,x)\Big|_{t=t_n, x=x_j} &= \frac{u_{j+1}^n + u_j^n + u_{j-1}^n}{3} \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} + O(h^2) \\
\frac{\partial^3}{\partial x^3} u(t,x)\Big|_{t=t_n, x=x_j} &= \frac{u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n}{2h^3} + O(h^2) \\
\Rightarrow \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2d} &= 6u_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} - \frac{u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n}{2h^3} \\
\Rightarrow u_j^{n+1} &= 2d\left(6u_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} - \frac{u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n}{2h^3}\right) + u_j^{n-1}
\end{aligned}$$

Mit dem Anfangsschritt:

$$\begin{aligned}
\frac{u_j^1 - u_j^0}{d} &= 6u_j^0 \frac{u_{j+1}^0 - u_{j-1}^0}{2h} - \frac{u_{j+2}^0 - 2u_{j+1}^0 + 2u_{j-1}^0 - u_{j-2}^0}{2h^3} \\
\Rightarrow u_j^1 &= d\left(6u_j^0 \frac{u_{j+1}^0 - u_{j-1}^0}{2h} - \frac{u_{j+2}^0 - 2u_{j+1}^0 + 2u_{j-1}^0 - u_{j-2}^0}{2h^3}\right) + u_j^0
\end{aligned}$$

können wir $u^{[N]}(t, x)$ numerisch berechnen. In Abbildung 2 haben wir für $N = 1, 2$ und $h = 0.05, 0.1, 0.2, 0.4$ die analytische mit der numerischen Lösung verglichen. Man sieht,



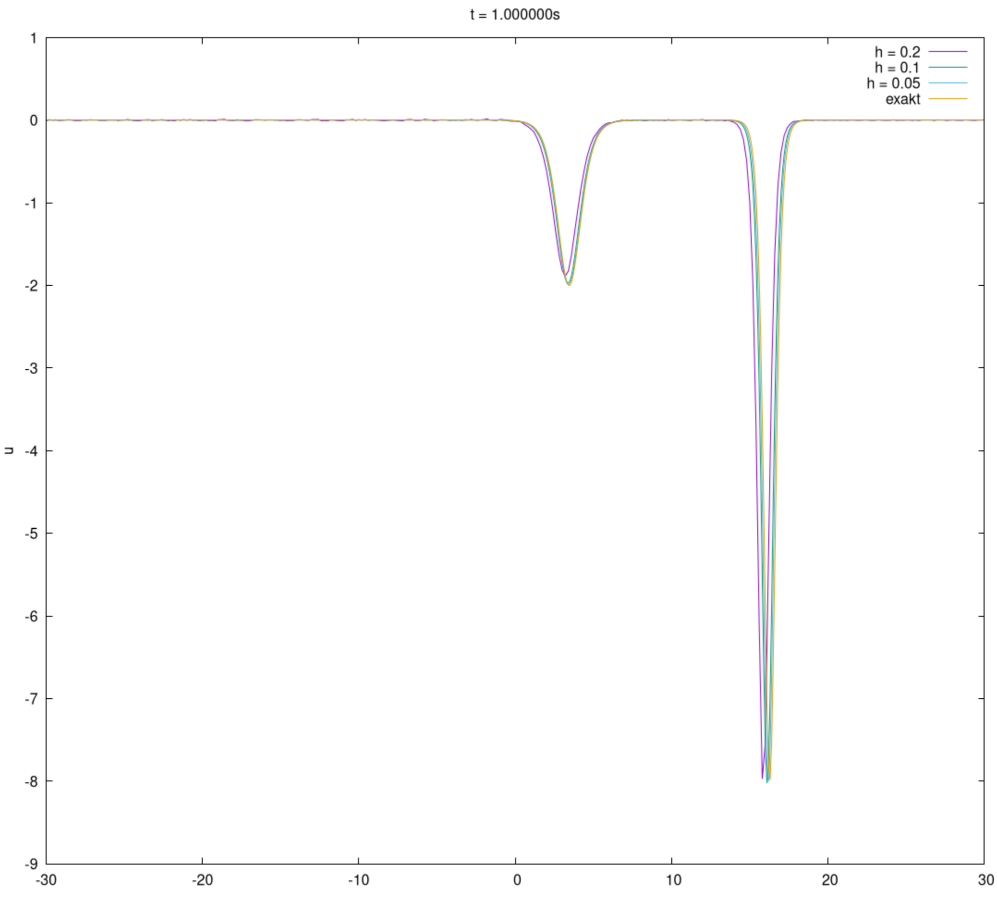


Abbildung 2: Vergleich der numerischen und analytischen Lösung $u^{[1]}(1,x)$ (oben) und $u^{[2]}(1,x)$ (unten)

dass diese Kurven recht gut konvergieren. Nur $h = 0.4$ konvergiert für $N = 2$ nicht. Um diese Konvergenz genauer zu untersuchen haben wir für alle $d \in [3 \cdot 10^{-5}, 2.5 \cdot 10^{-4}]$ und alle $h \in [0.05, 0.4]$ die Gesamtabweichung des numerischen Verfahren für $u^{[1]}$ und $u^{[2]}$ berechnet und in eine Heatmap geplottet. Zusätzlich haben wir $d = \frac{1}{2.6}h^3$ geplottet, um zu zeigen, dass das Verfahren für größere d nicht konvergiert. In Abbildung 3 sieht man außerdem, dass $u^{[2]}$ eine viel stärkere h-Abhängigkeit hat als $u^{[1]}$, was man auch in der Abbildung 2 gesehen hat.

H10.3

Nun haben wir $u^{[3]}(t, x)$ numerisch in den Intervallen $t \in [0, 1]$ und $x \in [-5, 45]$ berechnet und im Video 4 dargestellt. Man sieht drei Solitonen, die unterschiedliche Geschwindigkeiten und Amplituden haben. Diese befinden sich alle bei $t = 0$ am Ort $x = 0$.

H10.4

Zuletzt betrachten wir Lösungen für $N \notin \mathbb{N}$. Wir haben die Lösungen für $N \in [1.0, 1.9]$ betrachtet und in Video 5 dargestellt. Man sieht, dass diese Anfangsbedingungen keine perfekten Solitonen ergeben; Die resultierenden Kurven zerfließen leicht und erzeugen hinter sich Wellen, die auch positive Anteile haben. Trotzdem erkennt man wie sich zwei immer besser getrennte Wellen bilden.

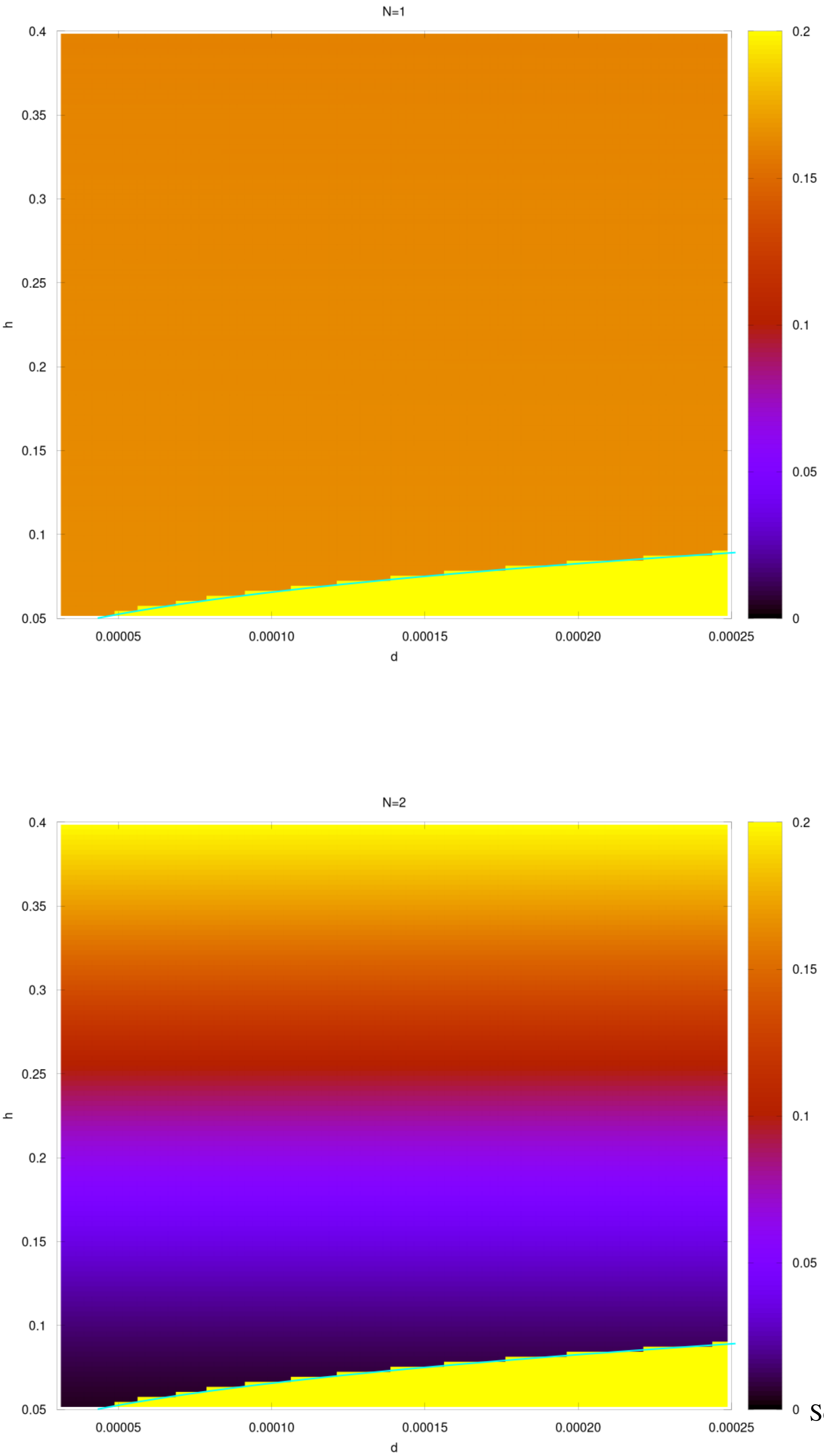


Abbildung 3: Vergleich der Differenzen der numerischen und analytischen Lösung der DGL für $N = 1$ (oben) und $N = 2$ (unten)

Abbildung 4: Hier ist $u^{[3]}(t, x)$ im Bereich von $t \in [0, 1]$ und $t \in [-5, 45]$ dargestellt.

Abbildung 5: Hier ist $u^{[N]}(t, x)$ für $N \in [1.0, 1.9]$ dargestellt.