1 Elektrisches Potential

In dieser Aufgabe geht es zunächst eine Punktladung P in einem unendlich verfügbaren Feld. Die Punktladung wird nun im Potential eines unendlich langen, dünnen Drahtes betrachtet. Dieser Draht hat die Gesamtladung Q und die Ladungsdichte ρ. Er befindet sich auf der x-Achse. Die Punktladung Q ist in einem Abstand z parallel zur z-Achse positioniert. Wenn nun die Punktladung über dem Mittelpunkt des Drahtes liegt, dann betrachtet man entlang der x-Achse symmetrisch angeordnete, infinitesimale Teilbereiche dx'.

1.1 Potential der Ladungsverteilung

In dieser Teilaufgabe bestimmen wir die Normierung α und zeigen die Berechnung des elektrischen Potentials. Zunächst normieren wir die Ladungsverteilung $\rho(x, y, z)$. Wir wissen, dass die komplette Ladungsverteilung des Drahtes die Gesamtladung Q des Drahtes ist.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y, z) d^3x = Q \tag{1}$$

Nun setzen wir die Ladungsverteilung

$$\rho(x, y, z) = \alpha Q/a e^{\frac{-x^2}{a^2}} \delta(y)\delta(z) \tag{2}$$

ein und Integrieren wir über die Delta-Distribution, wobei α der Normierung entspricht:

$$\alpha Q/a \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{a^2}} dx = Q \tag{3}$$

Da die oben geschriebene Formel eine Gauß-Kurve beschreibt, können wir das Gauß-Integral vereinfachen zu: $\alpha * Q * \sqrt{\pi} = Q$ Damit die Gleichung erfüllt ist, muss der Normierungsfaktor $\alpha * sqrt(\pi) = 1$ sein. Somit folgt, dass $\alpha = 1/\sqrt{\pi}$. α ist ein Normierungsfaktor, also eine Konstante. Aus dem elektrischen Feld kann man das Elektrische Potential $V(\vec{x})$ berechnen durch

$$V(\vec{x}) = -\int_{\vec{x_0}}^{\vec{x}} \vec{E} \cdot d\vec{x} \tag{4}$$

Bei uns ist nun im Folgenden $\vec{x'}$ die Variable, über die integriert wird. Das elektrische Feld $\vec{E}$ ist gegeben durch

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} V(\vec{x}) \tag{5}$$

Somit lässt sich das elektrische Potential eines dünnen, unendlich langen Leiters schreiben als:

$$V(\vec{x}) = 1/(4\pi\epsilon_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\vec{x'})}{|\vec{x} - \vec{x'}|} dx' \tag{6}$$

Nun wird $\rho(\vec{x'})$ durch den obigen Ausdruck ersetzt und anschließend nimmt man an, dass der dünne Draht keine Komponente in x- und y-Richtung hat, weshalb dieser Anteil wegfallen wird.

$$V(x,y,z) = \frac{\alpha Q}{4a\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x'^2/a^2}}{|(x-x')^2+y^2+z^2|}d^3x' = \frac{\alpha Q}{4a\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x'^2/a^2}}{|x'^2+z^2|}dx' \tag{7}$$

Anhand der Formel erkennt man, dass das Potential entlang der z-Achse nur von z selber und einem Integral abhängt. Der Rest ist konstant. Dieses Integral werden wir nun weiter numerisch untersuchen und mittels des Romberg-Verfahrens lösen.

1.2 Berechnung des Potentials mit Hilfe des Romberg-Verfahrens

Um das obige Integral bestimmen zu können, stellt sich das Problem, dass das Integral ein uneigentliches Integral ist. Deshalb greifen wir auf das Romberg-Verfahren zurück, welches das Integral numerisch bestimmt. Das Integral ähnelt einer Gauß-Funktion. Somit wissen wir, dass die beiden Enden gegen unendlich, also bei sehr großem x, sehr schnell auf 0 abfallen. Deshalb berechnen wir das Integral nur auf einem Teilbereich, in dem der Funktionswert sich nennenswert von 0 unterscheidet. Die restlichen Integrationsteile haben quasi einen Flächeninhalt von null. Wenn man als Integralgrenzen x=10*a wählt, so ist der Beitrag zum Flächeninhalt schon so gering, dass sich der Beitrag nicht ändert mit der Genauigkeit des Datentyps double. Aus diesem Grund wählen wir x=10*a als symmetrische Grenzen des Integrals.

1.3 Die charakteristische Breite a

Nun soll das Potential für verschiedene Werte der charakteristischen Breite a graphisch dargestellt werden. Es stellt sich natürlich auch die Frage: Was passiert wenn a gegen 0 geht? Diese Frage werden wir auch beantworten. Um diese Potentiale darzustellen, mussten wir zunächst das Integral lösen, welche wir mit Hilfe des Romberg-Verfahrens gelöst haben. Somit erhalten wir durch die Implementation die Werte für das Potential V(z). Wir lassen uns die Graphik im Intervall von z=0-2 zeichnen. Bei negativen Entfernungen im Intervall von -2 bis 0 verhält sich die Funktion exakt gleich, da sie achsensymmetrisch ist. Wir wollen durch die Variation des Wertes a den Grenzfall $\lim_{x\to 0}$ versuchen darzustellen. Wir sehen, dass sich bei immer kleiner werdenden Breiten a das Potential an eine 1/z-Funktion anschmiegt. Dies erwartet man auch, denn das Potential fällt mit größer werdenden Entfernungen um den Faktor $1/z$. Jedoch fällt einem auf, dass wenn man a (zu) klein wählt, das Integral nur noch 0 ergibt. Dies liegt daran, dass der Exponent der Funktion e^{-x^2/a^2} so schnell fällt, dass der Computer nur noch eine Null übergibt, da er die Genauigkeit des Rechenvermögens unterschreitet. Also, je kleiner wir a wählen, desto genauer beschreibt die Funktion unsere Erwartung, dass das Potential V(z) mit 1/z abfällt. Unterschreitet a jedoch einen (noch kleineren) Wert, so entspricht das Potential nicht mehr unserer physikalischen Vorstellung, sondern ergibts $V(z) = 0$.

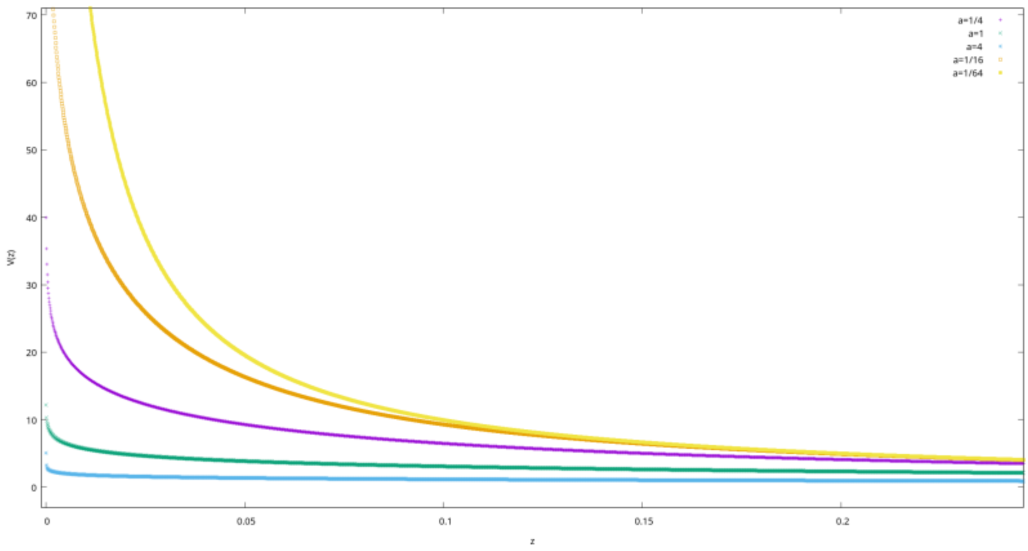

Abbildung 1: Die Werte für a sind v.l.n.r.: $a = 1$, $a = 2,5$, $a = 4$

2 Elektrisches Feld

2.1 Bestimmung des elektrischen Feldes in z-Richtung

In dieser Aufgabe bestimmen wir das elektrische Feld $\vec{E}(z)$ mit der Ladungsverteilung $\rho(x‘, y‘, z‘)$. Das elektrische Feld ist die Ableitung des Potentials nach dem Ort. Deshalb leiten wir das Potential (aus Aufgabe 1) numerisch ab. Wenn nun die Punktladung über dem Mittelpunkt des Drahtes liegt, dann betrachtet man entlang der x-Achse symmetrisch angeordnete, infinitesimale Teilbereiche dx‘. Hierbei fällt auf, dass sich die Beträge zu E_x weg heben und somit $E_x = 0$ ist. Da die Anordnung rotationssymmetrisch um die x-Achse ist, gilt dasselbe für das elektrische Feld in y-Richtung ($E_y = 0$). Das elektrische Feld zeigt vom Draht aus radial nach außen und hängt nur von der erzeugenden Gesamtladung Q des Drahtes ab. Somit bestimmen wir nur das elektrische Feld in z-Richtung:

$$\vec{E}(z) = -\vec{\nabla}_z V(x, y, z) = -\frac{dV}{dz}(x, y, z) \tag{8}$$

Wir können diese Ableitung numerisch lösen, indem wir den symmetrischen Differenzenquotienten bilden und den Grenzwert gegen den zu untersuchenden Punkt laufen lassen.
subsectionÜberprüfungen der Ergebnisse Anschließend prüfen wir nun, ob sich unser Ergebnis aus der Aufgabe 2.1, also die analytische Ableitung, mit der numerischen Integration deckt. Deshalb gehen wir von der Definition des elektrischen Feldes aus Aufgabenteil 2.1 aus und entwickeln, unter Verwendung des Potentials aus Aufgabe 1.1, daraus das elektri-

sche Feld.

$$\vec{E}(z) = -\frac{dV}{dz} = -\frac{d}{dz}\frac{\alpha Q}{4a\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x'^2/a^2}}{\sqrt{x'^2+z^2}}dx' = \frac{\alpha Q}{4a\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dz}\frac{e^{-x'^2/a^2}}{\sqrt{x'^2+z^2}}dx' = \frac{\alpha Q}{4a\pi\epsilon_0}z\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x'^2/a^2}}{(x'^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dx' \tag{9}$$

Nun haben wir eine neue Funktion gefunden, die das elektrische Feld beschreibt und ebenfalls die Romberg-Integration verwendet und somit eine konkrete Zahl für das Elektrische Feld ausgibt. Wir erhalten durch dieses Verfahren fast identiche werte die um unter 0.001% abweichen.

3 Gleichgewichtspunkt

In der letzten Aufgabe wandeln wir die Situation ein wenig um. Jetzt haben wir zwei parallele Drähte, die sich in einem Abstand d voneinander befinden. Die Drähte haben die Ladungen Q_1 bzw. Q_2 und die charakteristischen Breiten a_1 bzw. a_2.

3.1 Implementierung des abgeänderten Versuchsaufbaus

Durch die etwas abgeänderte Ausgangssituation, haben wir nun eine verschiedene Ladungsverteilung im Vergleich zur Anfangssituation aus Aufgabe 1. Somit haben wir nun zwei Ladungen auf den beiden Drähten, die zusammen überlagert ein elektrisches Feld erzeugen. Daraus folgt, dass sich auch das elektrische Potential an der Stelle z aus den Potentialen der beiden Ladungen überlagert, gemäß dem Superpositionsprinzip. Das elektrische Potential ergibt sich an der Stelle z aus:

$$V_g es(z) = V_1(z) + V_2(d-z) \tag{10}$$

Da man die beiden Potentiale bzw. elektrischen Felder separat betrachten kann, kann man den Term aufspalten und wie in Aufgabe 1 berechnen. Das gesamte elektrische Feld ist gegeben durch:

$$E(z) = V_1(z) + V_2(d-z) \tag{11}$$

3.2 Bestimmung des Gleichgewichtpunktes Zu guter Letzt bestimmen wir noch den Gleichgewichtspunkt in Abhängigkeit von a_1 und a_2 mit Hilfe des Sekanten-Verfahrens. Damit die Punktladung P im Gleichgewicht ist, darf kein äußeres elektrisches Feld mit einer Potentialdifferenz existieren. Dies bedingt, dass $\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}(z) = 0$ sein muss. Das elektrische Potential muss einen konstanten Wert (Extremstelle) an der gesuchten Stelle annehmen. Folglich ist die Nullstelle des elektrischen Feldes gesucht. Das Sekanten-Verfahren kann man nutzen um aus der Funktion $E(z)$ aus Aufgabe 3.1 die Nullstelle zu bestimmen. Dabei variieren wir die Werte für a_2, wobei stets gelten muss: $\frac{a_1}{10} \leq a_2 \leq a_1$.