7 Eigenwerte linearer Differentialoperatoren

7.1

Für eine Lösung des inhomogenen Systems können beliebige Linearkombinationen von Lösungen des homogenen Systems hinzuaddiert werden, um neue Lösungen des imhomogenen Systems zu bekommen. Sei $h(x)$ eine Lösung des homogenen Systems und $u(x)$ eine Lösung des inhomogenen Systems gilt:

$$
\begin{aligned}
Dh(x) - \lambda h(x) &= 0 \\
Du(x) - \lambda u(x) &= f(x) \\
g(x) &:= u(x) + a * h(x) \\
\Rightarrow Dg(x) - \lambda g(x) &= f(x) + a * 0 \\
g(t_{0,1}) &= u(t_{0,1}) + a * f(t_{0,1}) = u(t_{0,1})
\end{aligned}
$$

Also ist $g(x)$ eine Lösung des inhomogenen Systems.

7.2

In dieser Teilaufgabe geht es darum die Eigenwerte der homogenen Differentialgleichung: $Du = u'' + gu$ zu bestimmen mit $g \equiv 0$. Deshalb gilt mit der Eigenwertgleichung: $Du_\lambda - \lambda u_\lambda = 0$:

$$u''_\lambda - \lambda u_\lambda = 0$$

Nun wird das Numerov-Verfahren genutzt um diese DGL mit den Randbedingungen $u(0) = 1$ und $u(60) = 1$ zu lösen.
Dafür wird λ variiert und jeweils die Lösung u bestimmt, indem man die Anfangssteigung der Funktion im Punkt P(60|0) solange verändert, bis die Funktion die andere Randbedingung erfüllt. Die Lösungsfunktionen u haben nun verscheidene Amplituden und man kann feststellen, dass für bestimmte λ die Amplituden gegen ∞ gehen.
Dies liegt darin begründet, dass für manche λ die Funktion durch den Punkt Q(0|0) läuft und damit beliebig skaliert werden kann, den Punkt (0|1), der durch das Randwertproblem vorgegeben ist aber nie erreicht. Wenn wir nun die Amplituden der Funktionen u gegen λ auftragen, können wir erkennen, dass die Amplitude an verschiedenen Stellen gegen ∞ läuft. Dies müssen dann die Lösungen der homogenen DGL mit homogenen Randbedingungen sein. Die Werte der ersten 10 Eigenwerte sind:

Anzahl	Eigenwert
1	-0.274000
2	-0.222000
3	-0.175400
4	-0.134200
5	-0.098600
6	-0.068400
7	-0.043800
8	-0.024600
9	-0.010900
10	-0.002600

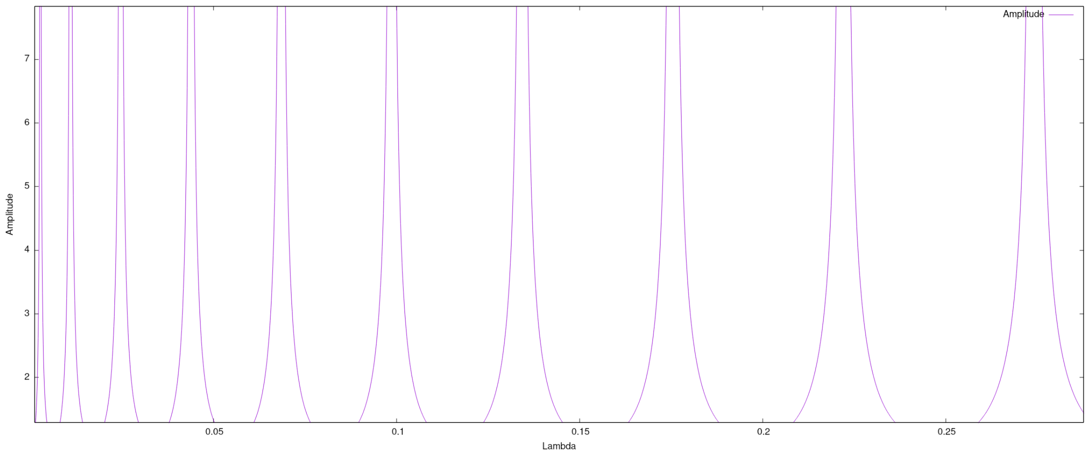

Abbildung 1: Bestimmung der Eigenwerte

was sich auch in Abbildung 1 erkennen lässt. Das Programm für diese Aufgabe ist als *H7.c* zu finden
Nun kann man die numerisch bestimmten Eigenwerte noch mit den analytisch berechneten vergleichen. Die analytische Lösung lautet:

$$u'' = \lambda u$$

mit $u(60) = 0 \equiv u_0$ und $u(0) = 0 \equiv u_1$
Damit sind die Werte im Vergleich

8 Kronig-Penney Model

Wir suchen das λ, welches genau beide Randbedingungen erfüllt, indem wir das Sekantenverfahren auf den Abstand der Nullstelle von der Randbedingung anwenden.

Nullstelle 1 bei 25.394003 Nullstelle 2 bei 25.419690 Nullstelle 3 bei 25.457850 Nullstelle 4 bei 25.502437 Nullstelle 5 bei 25.546573 Nullstelle 6 bei 25.583643 Nullstelle 7 bei 25.608240