

## H.10: Schnelle FOURIER Transformation (FFT) und Korrelationen

In diesem Blatt betrachten wir die Anwendung des FFT Algorithmus um die Korrelation zweier Funktionen zu bestimmen. FFT ist ein Algorithmus, mit dem die diskrete FOURIER Transformation schnell ausgeführt werden kann. Die diskrete FOURIER Transformation ist definiert durch:

$$[\mathcal{F}f]_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j \exp\left(2\pi i \frac{kj}{N}\right) \quad (1)$$

Die Korrelation

$$(f \odot g)_k := \sum_{j=0}^{N-1} f_{j+k} g_j \quad (2)$$

zwei Funktionen misst, wie sehr die Funktionen nach einer Verschiebung um  $k$  übereinstimmen. Mittels der Korrelation können auch aus verrauschten Echos die Laufzeiten ermittelt werden, was sie für Radar- oder Sonarsignale sehr nützlich macht.

### H10.1

In diesem Aufgabenteil sollen die Gleichheiten:

$$[\mathcal{F}(f \odot g)]_k \stackrel{(1)}{=} [\mathcal{F}f]_k [\mathcal{F}g]_{-k} \stackrel{(2)}{=} [\mathcal{F}f]_k \overline{[\mathcal{F}\bar{g}]_k} \quad (3)$$

gezeigt werden. Zuerst setzen wir Gleichung 2 in Gleichung 1 ein und formen um:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{F}(f \odot g)]_k &= \sum_{j=0}^{N-1} \left( \sum_{l=0}^{N-1} f_{l+j} g_l \right) \exp\left(2\pi i \frac{kj}{N}\right) \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} g_l \sum_{j=0}^{N-1} f_{l+j} \exp\left(2\pi i \frac{k(l+j-l)}{N}\right) \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} g_l \underbrace{\sum_{j=0}^{N-1} f_{l+j} \exp\left(2\pi i \frac{k(l+j)}{N}\right)}_{[\mathcal{F}f]_k} \cdot \exp\left(2\pi i \frac{-kl}{N}\right) \\
&= [\mathcal{F}f]_k \underbrace{\sum_{l=0}^{N-1} g_l \cdot \exp\left(2\pi i \frac{-kl}{N}\right)}_{[\mathcal{F}g]_{-k}} \\
&= [\mathcal{F}f]_k [\mathcal{F}g]_{-k}
\end{aligned}$$

Es bleibt also zu zeigen:  $\overline{[\mathcal{F}\bar{g}]}_k = [\mathcal{F}g]_{-k}$

$$\begin{aligned}
\overline{[\mathcal{F}\bar{g}]}_k &= \sum_{l=0}^{N-1} \overline{\bar{g}_l \cdot \exp\left(2\pi i \frac{-kl}{N}\right)} \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} \overline{\bar{g}_l} \cdot \overline{\exp\left(2\pi i \frac{-kl}{N}\right)} \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} g_l \cdot \exp\left(2\pi i \frac{kl}{N}\right) \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} g_l \cdot \exp\left(2\pi i \frac{-k(-l)}{N}\right) \\
&= [\mathcal{F}g]_{-k}
\end{aligned}$$

Damit ist die Gleichung 3 bewiesen.

## H10.2

Zunächst betrachten wir als Signal einen Puls von Frequenz  $\alpha$  und Länge  $t_{max}$  der Form:

$$s(t) = \begin{cases} \sin(2\pi\alpha t) & \text{für } 0 \leq t \leq t_{max} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4)$$

Wir nehmen an, dass das empfangene Signal ein um  $t_L$  verschobenes Echo des Signals mit zwei Störungen:

$$e(t) = s(t - t_L) + r(t) + b \sin(2\pi\beta t) \quad (5)$$

ist, wobei  $r(t)$  zufällig zwischen  $-a$  und  $a$  oszilliert. Um die Zufallszahlen zu generieren haben wir die C++-eigene random-Funktion genutzt. Anschließend haben wir  $|e(t)|^2$  für die Amplituden  $a = b = 0.5, 1.0, 2.0, 4.0, 8.0$  geplottet (Abbildung 1).

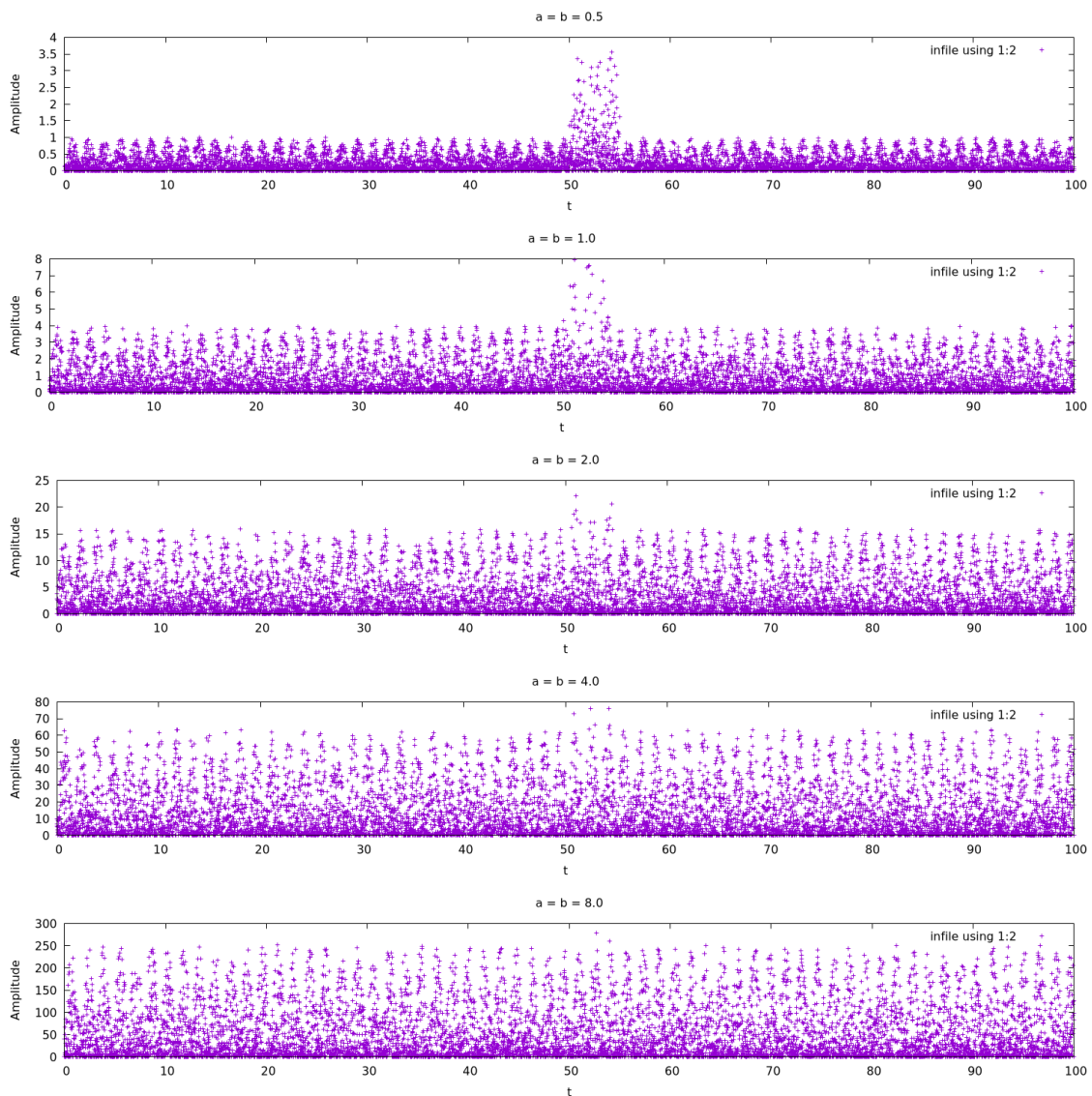


Abbildung 1: Hier ist  $|e(t)|^2$  für verschiedene Amplituden  $a = b$  dargestellt.

Es lässt sich erkennen, dass für die Amplituden  $a = b = 0.5, 1.0$  die Zeit  $t_L$  noch sehr gut mit dem Auge abzulesen ist. Für  $a = b = 2$  ist es schon schwer die erste Amplitude

des Echo-Signals und damit  $t_L$  genau zu identifizieren. Für  $a = b = 4$  ist das Signal zwar noch erkennbar aber nur noch auf  $\pm 3$  einzuschränken. Für  $a = b = 8$  ist es quasi nicht mehr möglich das Signal zu erkennen und damit auch nicht möglich  $t_L$  abzulesen.

### H10.3

In dieser Teilaufgabe soll mit hilfe der Korrelation  $(e \odot s)_k$  die Genauigkeit der Bestimmung von  $t_L$  verbessert werden. Dazu stellen wir Gleichung 3 nach  $(f \odot s)_k$  um:

$$(e \odot s)_k = \left[ \mathcal{F}^{-1} \left( [\mathcal{F} e] \overline{[\mathcal{F} s]} \right) \right]_k$$

Diese berechnung sieht im Programm folgendermassen aus:

```
1 (s.fft() *= e.fft().conj()).rfft()
```

Wobei `.fft()` und `.rfft()` die FFT und rücktransformationen sind. Nun haben wir die normierte Korrelation  $|(e \odot s)(t)|^2$  für die gleichen Störungsamplituden wie in Aufgabe H10.2 berechnet ( $a = b = 0.5, 1.0, 2.0, 4.0, 8.0$ ) und dargestellt (Abbildung 2). Mit diesem Verfahren ist es wesentlich einfacher ist  $t_L$  zu bestimmen, da man nur das Maximum der Funktion bestimmen muss. Dies funktioniert für die Störungsamplituden  $a = b = 0.5, 1, 2, 4$  sehr gut. Ausserdem ist das verfahren genauer da der peak zu einer spitze läuft die genauer geortet werden kann. Selbst bei  $a = b = 8$  ist ein peak noch klar erkennbar.

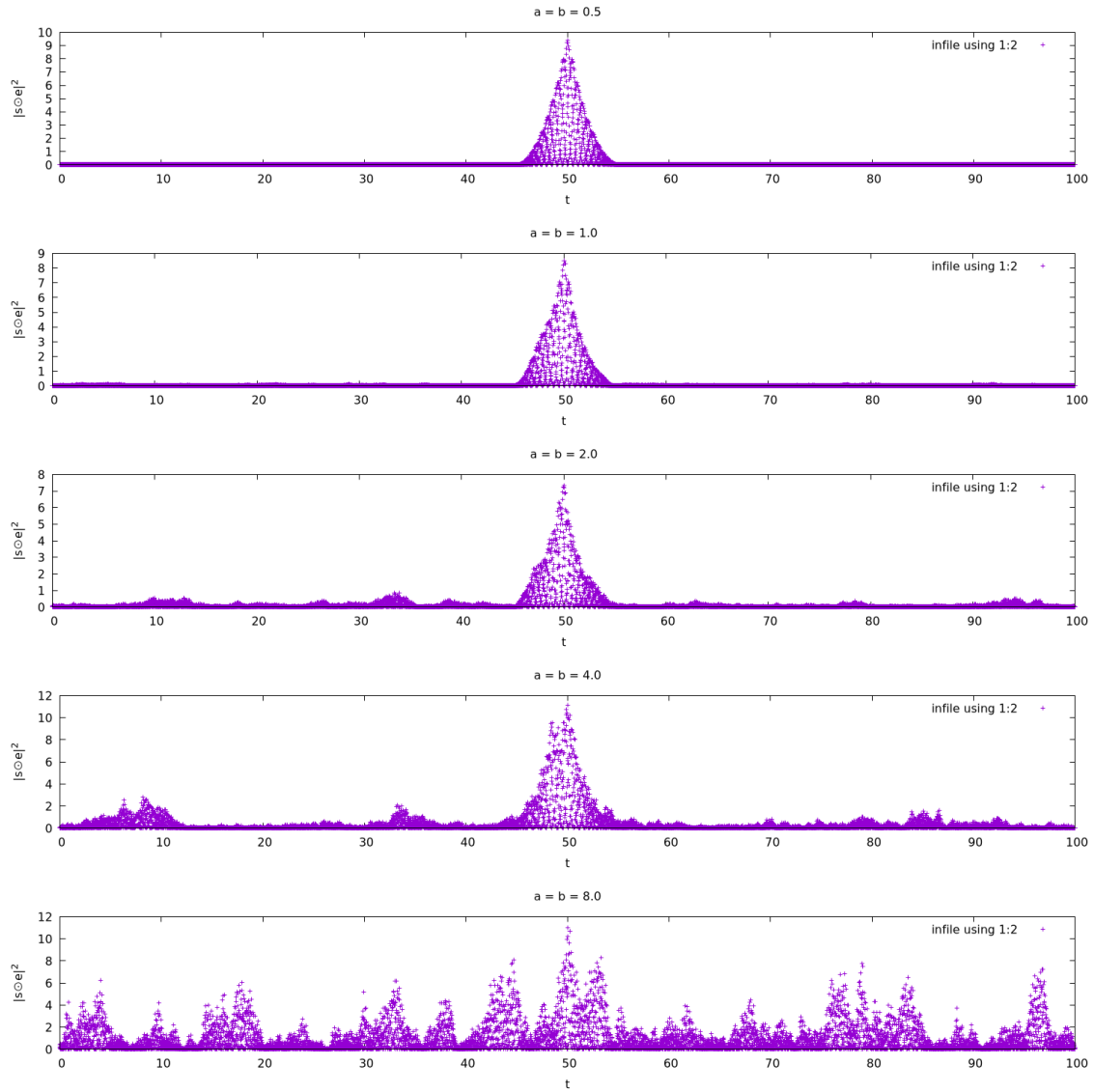


Abbildung 2: Hier ist die Korrelation  $|(e \odot s)(t)|^2$  für die Amplituden  $a = b = 0.5, 1.0, 2.0, 4.0, 8.0$  dargestellt.

**H10.4**

Nun betrachten wir die analytische Lösung der Korrelation:

$$(e \odot s)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e(t + \tau) s(\tau)$$

Hierbei betrachten wir den störungsfreien Fall  $a = b = 0$

$$s(\tau) = \begin{cases} \sin(2\pi\alpha\tau) & \text{für } 0 \leq \tau \leq t_{\max} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$e(\tau) = \begin{cases} \sin(2\pi\alpha(\tau - t_L)) & \text{für } t_L \leq \tau \leq t_L + t_{\max} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da  $s(\tau) = 0 \forall \tau \notin [0, t_{\max}]$  lässt sich das Integral umschreiben zu:

$$\begin{aligned} (e \odot s)(t) &:= \int_0^{t_{\max}} d\tau e(t + \tau) \sin(2\pi\alpha\tau) \\ &= \int_t^{t+t_{\max}} d\tau e(\tau) \sin(2\pi\alpha(\tau - t)) \end{aligned}$$

Nun betrachten wir 4 Fälle:

(1)  $t < t_L - t_{\max}$

In diesem Fall gilt  $t + t_{\max} < t_L$  also gilt  $e(\tau) = 0 \forall \tau \in [t, t + t_{\max}]$

$$\Rightarrow (e \odot s)(t) = 0$$

(2)  $t_L - t_{\max} < t < t_L$

In diesem Fall gilt  $t < t_L$  und  $t + t_{\max} < t_L + t_{\max}$  also kann das Integral umgeschrieben werden zu:

$$(e \odot s)(t) = \int_{t_L}^{t+t_{\max}} d\tau \sin(2\pi\alpha(\tau - t_L)) \sin(2\pi\alpha(\tau - t))$$

Mit dem Additionstheorem:  $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$  kann integral umgeschrieben werden zu:

$$\begin{aligned} (e \odot s)(t) &= \frac{1}{2} \int_{t_L}^{t+t_{\max}} d\tau \cos(2\pi\alpha(t - t_L)) - \cos(2\pi\alpha(2\tau - t_L - t)) \\ &= \left[ \frac{\tau \cos(2\pi\alpha(t - t_L))}{2} - \frac{\sin(2\pi\alpha(2\tau - t_L - t))}{8\pi\alpha} \right]_{\tau=t_L}^{t+t_{\max}} \\ &= \frac{(t + t_{\max} - t_L) \cos(2\pi\alpha(t - t_L))}{2} + \frac{\sin(2\pi\alpha(t_L - t)) - \sin(2\pi\alpha(2t_{\max} + t - t_L))}{8\pi\alpha} \end{aligned}$$

Nun nutzen wir das Additionstheorem  $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$  und kommen auf:

$$(e \odot s)(t) = \frac{1}{2} \cos(2\pi\alpha(t - t_L))(t_{\max} - t_L + t) - \frac{1}{4\pi\alpha} \cos(2\pi\alpha t_{\max}) \sin(2\pi\alpha(t_{\max} - t_L + t))$$

(3)  $t_L < t < t_L + t_{\max}$

In diesem Fall gilt  $t_L < t$  und  $t_L + t_{\max} < t + t_{\max}$  also kann das Integral umgeschrieben werden zu:

$$(e \odot s)(t) = \int_t^{t_L+t_{\max}} d\tau \sin(2\pi\alpha(\tau - t_L)) \sin(2\pi\alpha(\tau - t))$$

Mit dem Additionstheorem:  $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$  kann integral umgeschrieben werden zu:

$$\begin{aligned} (e \odot s)(t) &= \frac{1}{2} \int_t^{t_L+t_{\max}} d\tau \cos(2\pi\alpha(t - t_L)) - \cos(2\pi\alpha(2\tau - t_L - t)) \\ &= \left[ \frac{\tau \cos(2\pi\alpha(t - t_L))}{2} - \frac{\sin(2\pi\alpha(2\tau - t_L - t))}{8\pi\alpha} \right]_{\tau=t}^{t_L+t_{\max}} \\ &= \frac{(t_L + t_{\max} - t) \cos(2\pi\alpha(t - t_L))}{2} + \frac{\sin(2\pi\alpha(t - t_L)) - \sin(2\pi\alpha(2t_{\max} + t_L - t))}{8\pi\alpha} \end{aligned}$$

Nun nutzen wir das Additionstheorem  $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$  und kommen auf:

$$(e \odot s)(t) = \frac{1}{2} \cos(2\pi\alpha(t - t_L))(t_L - t + t_{\max}) - \frac{1}{4\pi\alpha} \cos(2\pi\alpha t_{\max}) \sin(2\pi\alpha(t_{\max} + t_L - t))$$

(4)  $t_L + t_{\max} < t$

Aus  $t > t_L + t_{\max}$  folgt  $e(\tau) = 0 \forall \tau \in [t, t + t_{\max}]$

$$\Rightarrow (e \odot s)(t) = 0$$

Somit haben wir die analytische Lösung bestimmt:

$$(e \odot s)(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < t_L - t_{\max} \\ \frac{1}{2} \cos(2\pi\alpha(t - t_L))(t_{\max} - t_L + t) - \frac{1}{4\pi\alpha} \cos(2\pi\alpha t_{\max}) \sin(2\pi\alpha(t_{\max} - t_L + t)) & \text{für } t_L - t_{\max} < t < t_L \\ \frac{1}{2} \cos(2\pi\alpha(t - t_L))(t_L - t + t_{\max}) - \frac{1}{4\pi\alpha} \cos(2\pi\alpha t_{\max}) \sin(2\pi\alpha(t_{\max} + t_L - t)) & \text{für } t_L < t < t_L + t_{\max} \\ 0 & \text{für } t > t_L + t_{\max} \end{cases}$$

Diese vergleichen wir in Abildung 3 mit der numerischen Lösung. Man sieht das bis auf einen konstanten Vorfaktor diese Funktionen sehr ähnlich sind. Die numerische Funktion dient also zur bestimmung von  $t_L$ .

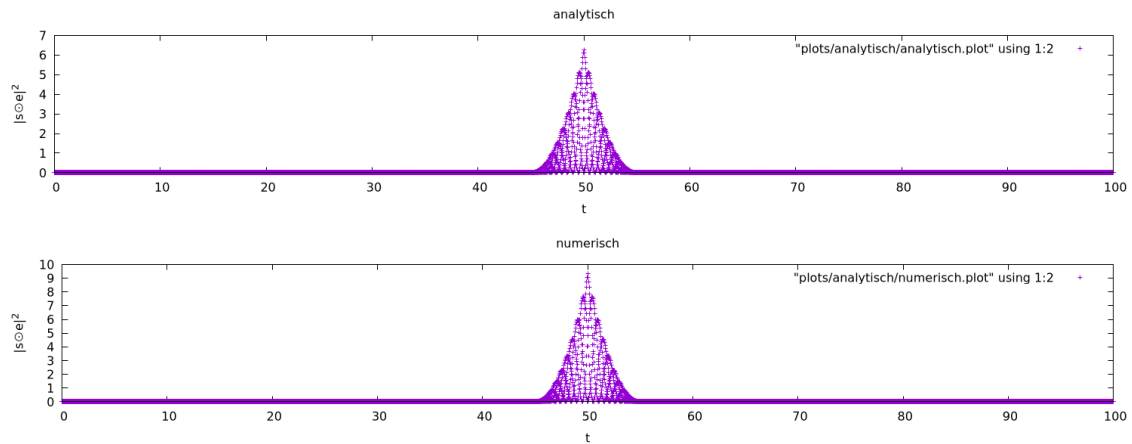


Abbildung 3: Hier haben wir die analytische mit der numerischen Lösung der Korrelation ohne Störung ( $a = b = 0$ ) verglichen.

## H10.5

Nun versuchen wir die Genauigkeit des Verfahrens zu verbessern. Dazu nutzen wir einen *Zwitscher*-Puls, welcher eine bessere Autokorrelation aufweist. Dieser Puls nutzt eine variierende Frequenz um die genaue Verschiebung schärfer zu bestimmen. Das Signal wird dann beschrieben durch:

$$s(t) = \begin{cases} \sin(2\pi\alpha(t)t) & , \text{ für } 0 \leq t \leq t_{\max} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

In diesem Fall verwenden wir eine lineare Frequenz  $\alpha(t) = \alpha_0 + t\alpha_1$ . Die resultierenden Korrelationen für  $\alpha_0 = 5$ ,  $\alpha_1 = 1$  sind in Abbildung 4 aufgetragen.

Das *Zwitscher*-Signal hat die Korrelation schärfer gemacht, ist aber empfindlicher gegenüber grossen Störungen.



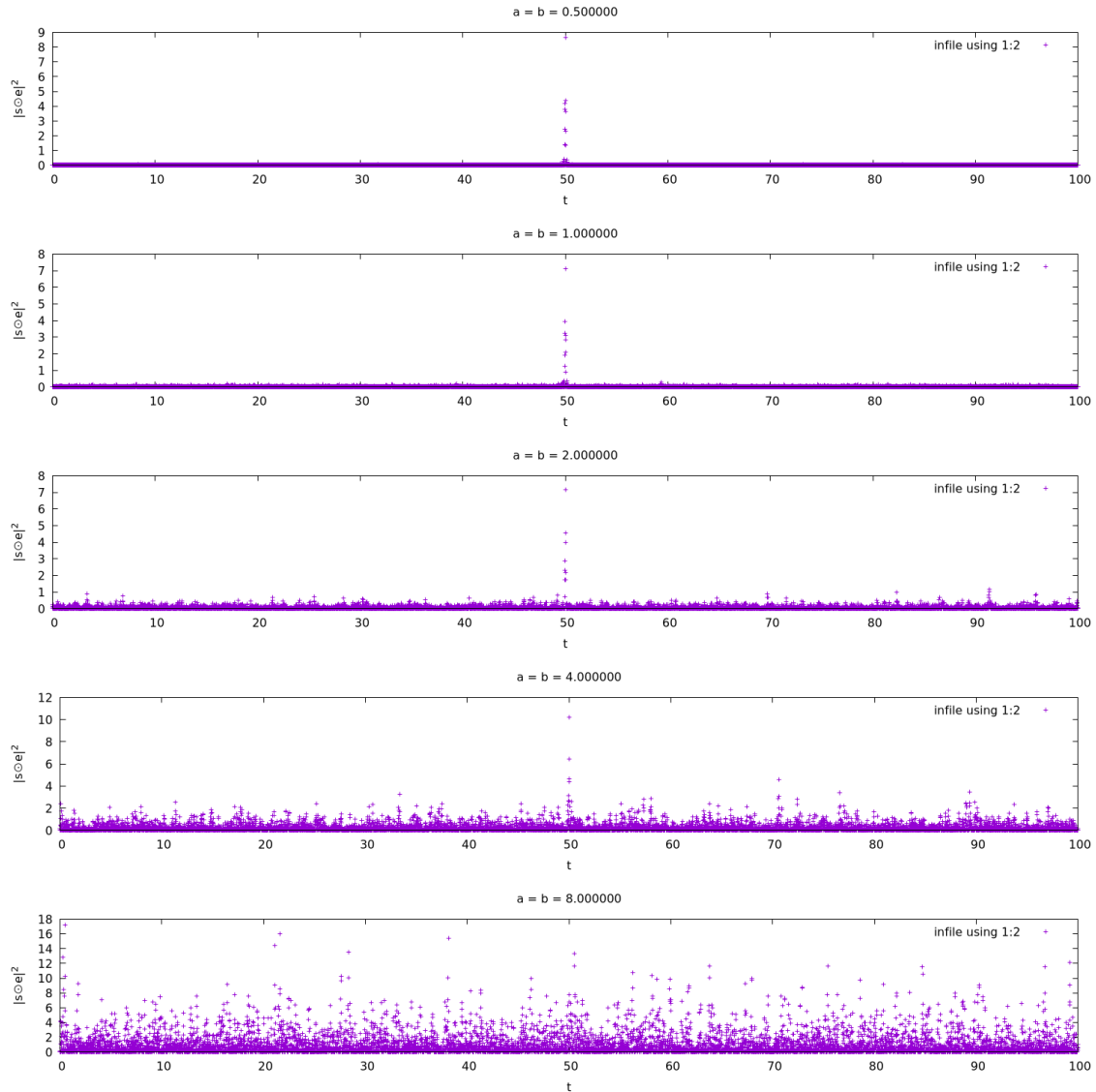


Abbildung 4: Hier ist die Korrelation  $|(e \odot s)(t)|^2$  für ein Zwitscher-Signal für die Störampplituden  $a = b = 0.5, 1.0, 2.0, 4.0, 8.0$  dargestellt.