Übungen zur Computerphysik
SS 2020

T. Luu, A. Nogga, M. Petschlies, A. Wirzba

Hausaufgabe 5 **Abgabe: 03.07.2020**

Beachten Sie, dass **zwei zusätzliche Punkte** für die Kommentierung und den Stil des Codes vergeben werden.

H.10: Solitonlösungen der Korteweg-de Vries-Gleichung

Bei der Beschreibung von Wasserwellen in (wenig tiefen, aber breiten) Kanälen werde die Abweichung $u(t,x)$ vom mittleren Wasserpegel beschrieben durch die (nichtlineare) Korteweg-de Vries-(KdV)-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = 6\,u(t,x)\,\frac{\partial}{\partial x}u(t,x) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}u(t,x)\,, \tag{1}$$

wobei x die Koordinate entlang der Kanalachse sein soll; die Koordinate senkrecht zur Kanalachse soll keine Rolle spielen.
Man kennt spezielle Lösungen der KdV-Gleichung, z.B.

$$u^{[1]}(t,x) = \frac{-2}{\cosh^2(x-4\,t)}\,, \tag{2}$$

was ein Wellental beschreibt, das sich mit konstanter Geschwindigkeit $v=4$ unverformt nach rechts fortpflanzt. Solche Lösungen nennt man "solitaire Wellenlösungen" oder auch Solitonen. Es gibt auch kompliziertere Lösungen: Der Anfangszustand:

$$u^{[N]}(0,x) = \frac{-N\,(N+1)}{\cosh^2(x)}\,, \tag{3}$$

resultiert in N Solitonen die sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen. Die Lösung der Gl. (1) mit der Anfangsbedingung (3) lautet z.B. für $N=2$:

$$u^{[2]}(t,x) = -12\,\frac{3+4\cosh(2\,x-8\,t)+\cosh(4\,x-64\,t)}{\{3\,\cosh(x-28\,t)+\cosh(3\,x-36\,t)\}^2} \tag{4}$$

1. (3 P) Stellen Sie die Lösung (4) z.B. für $t=-1.0,-0.9,\ldots,0.9,1.0$ graphisch dar. Versuchen Sie die Geschwindigkeiten der beiden Solitonen abzulesen.

Die Diskretisierung der PDG (1) ist durchaus ein wenig delikat: Die Zeitdiskretisierung sei gegeben durch: $t_n = n\cdot d$, wobei d die Zeitschrittweite ist. Die Ortsdiskretisierung sei gegeben durch $x_j = j\cdot h$ mit h die Ortsschrittweite. Weiterhin schreibe man:

$$u(t_n,x_j) =: u_j^n\,.$$

Die linke Seite der PDG (1) wird jetzt wie folgt diskretisiert:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x)\Big|_{t=t_n, x=x_j} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\,d} + \mathcal{O}(d^2)\,. \tag{5}$$

Für den nichtlinearen Term auf der rechten Seite schreibt man

$$u(t,x)\,\frac{\partial}{\partial x} u(t,x)\Big|_{t=t_n, x=x_j} = \frac{u_{j+1}^n + u_j^n + u_{j-1}^n}{3}\,\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\,h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{6}$$

und für die dritte Ortsableitung:

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} u(t,x)\Big|_{t=t_n, x=x_j} = \frac{u_{j+2}^n - 2\,u_{j+1}^n + 2\,u_{j-1}^n - u_{j-2}^n}{2\,h^3} + \mathcal{O}(h^2)\,. \tag{7}$$

Dies ermöglicht eine rekursive Bestimmung von u^{n+1} falls u^n und u^{n-1} bekannt sind (Zweischrittverfahren); u_j^0 sind die gegebenen Anfangswerte: $u(0,x_j)$; u^1 bestimmt man mit der Differenzengleichung

$$\frac{u_j^1 - u_j^0}{d} = 6\,u_j^0 \frac{u_{j+1}^0 - u_{j-1}^0}{2\,h} - \frac{u_{j+2}^0 - 2\,u_{j+1}^0 + 2\,u_{j-1}^0 - u_{j-2}^0}{2\,h^3}\,. \tag{8}$$

2. (10 P) Verwenden Sie die Diskretisierung (5-8) um die Gleichung (1) mit dem Anfangszustand (3) für $N = 1, 2$ numerisch zu lösen. An den Rändern kann $u = 0$ gesetzt werden, vorausgesetzt, das räumliche Intervall ist groß genug, z.B. $-30 < x < 30$. Vergleichen Sie das Resultat für $t = 1.0$ graphisch mit den analytischen Lösungen $u^{[1]}$ (Gl.(2)) bzw. $u^{[2]}$ (Gl.(4)). Die Stabilität des Verfahrens erfordert leider $d \lesssim \frac{1}{2.6}\,h^3$. Überprüfen Sie dies numerisch. Untersuchen Sie die Resultate für die Werte $h = 0.05, 0.1, 0.2, 0.4$.

3. (2 P) Stellen Sie auch $u^{[3]}(t,x)$ graphisch dar für $0 \le t \le 1$ und $-5 < x < 45$.

4. (3 P) Wie sieht die Lösung aus für $N = 1.1, 1.2, \ldots, 1.9$?