

H.10: Solitonlösungen der KORTEWEG-DE VRIES-Gleichung

In diesem pdf-Dokument sind Videos eingebunden, diese werden von okular angezeigt. Sollte ihnen diese nicht angezeigt werden, haben wir die .mp4-Dateien auch nochmal separat angefügt.

In dieser Aufgabe untersuchen wir Lösungen der Korteweg-de Vries-Gleichung. Diese Gleichung beschreibt die Ausbreitung von Wellen in Kanälen.

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) = 6u(t, x)\frac{\partial}{\partial x}u(t, x) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}u(t, x)$$

Eine besondere Lösung sind die Solitonen. Diese beschreiben einzelne Wellen die sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegen ohne zu zerfließen. Die Anfangsbedingung:

$$u^{[N]}(0, x) = \frac{-N(N+1)}{\cosh^2(x)} \quad (1)$$

erzeugt N Solitonen die sich mit verschiedenen Geschwindigkeit ausbreiten.

H10.1

Zunächst betrachten wir die Analytische Lösung zu $u^{[2]}$:

$$u^{[2]}(t, x) = -12 \frac{3 + 4 \cosh(2x - 8t) + \cosh(4x - 64t)}{\{3 \cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t)\}^2}$$

im Bereich $t \in [-1, 1]$. In Video 1 sieht man das 2 Solitonen erzeugt werden. Um die Geschwindigkeit der Solitonen zu bestimmen kann man die Position bei $t = 1$ ablesen da beide Solitonen bei $t = 0$ bei $x = 0$ anfangen. Dabei ergibt sich:

$$\begin{aligned} v_1 &= 3.45 \\ v_2 &= 16.27 \end{aligned}$$

H10.2

Nun lösen wir $u^{[N]}$ numerisch. Dazu nutzen wir die Zeitdiskretisierung $t_n = n \cdot d$ mit der Zeitschrittweite d und die Ortsdiskretisierung $h_j = j \cdot h$ mit der Schrittweite h . Mit der

Abbildung 1: Hier ist $u^{[2]}(x)$ im Bereich von $t \in [-1, 1]$ dargestellt.

notation: $u_j^n = u(t_n, x_j)$ lassen sich die einzelnen Teile der partiellen Differentialgleichung schreiben als:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \right|_{t=t_n, x=x_j} &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2d} + O(d^2) \\
 u(t, x) \left. \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) \right|_{t=t_n, x=x_j} &= \frac{u_{j+1}^n + u_j^n + u_{j-1}^n}{3} \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} + O(h^2) \\
 \left. \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(t, x) \right|_{t=t_n, x=x_j} &= \frac{u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n}{2h^3} + O(h^2) \\
 \Rightarrow \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2d} &= 6u_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} - \frac{u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n}{2h^3} \\
 \Rightarrow u_j^{n+1} &= 2d \left(6u_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} - \frac{u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n}{2h^3} \right) + u_j^{n-1}
 \end{aligned}$$

Mit anfangs schritt:

$$\begin{aligned}
 \frac{u_j^1 - u_j^0}{d} &= 6u_j^0 \frac{u_{j+1}^0 - u_{j-1}^0}{2h} - \frac{u_{j+2}^0 - 2u_{j+1}^0 + 2u_{j-1}^0 - u_{j-2}^0}{2h^3} \\
 \Rightarrow u_j^1 &= d \left(6u_j^0 \frac{u_{j+1}^0 - u_{j-1}^0}{2h} - \frac{u_{j+2}^0 - 2u_{j+1}^0 + 2u_{j-1}^0 - u_{j-2}^0}{2h^3} \right) + u_j^0
 \end{aligned}$$

können wir $u^{[N]}(t, x)$ Numerisch berechnen. In Abbildung 2 haben wir für $N = 1, 2$ und $h = 0.05, 0.1, 0.2, 0.4$ die analytische mit der numerischen Lösung verglichen. Man sieht

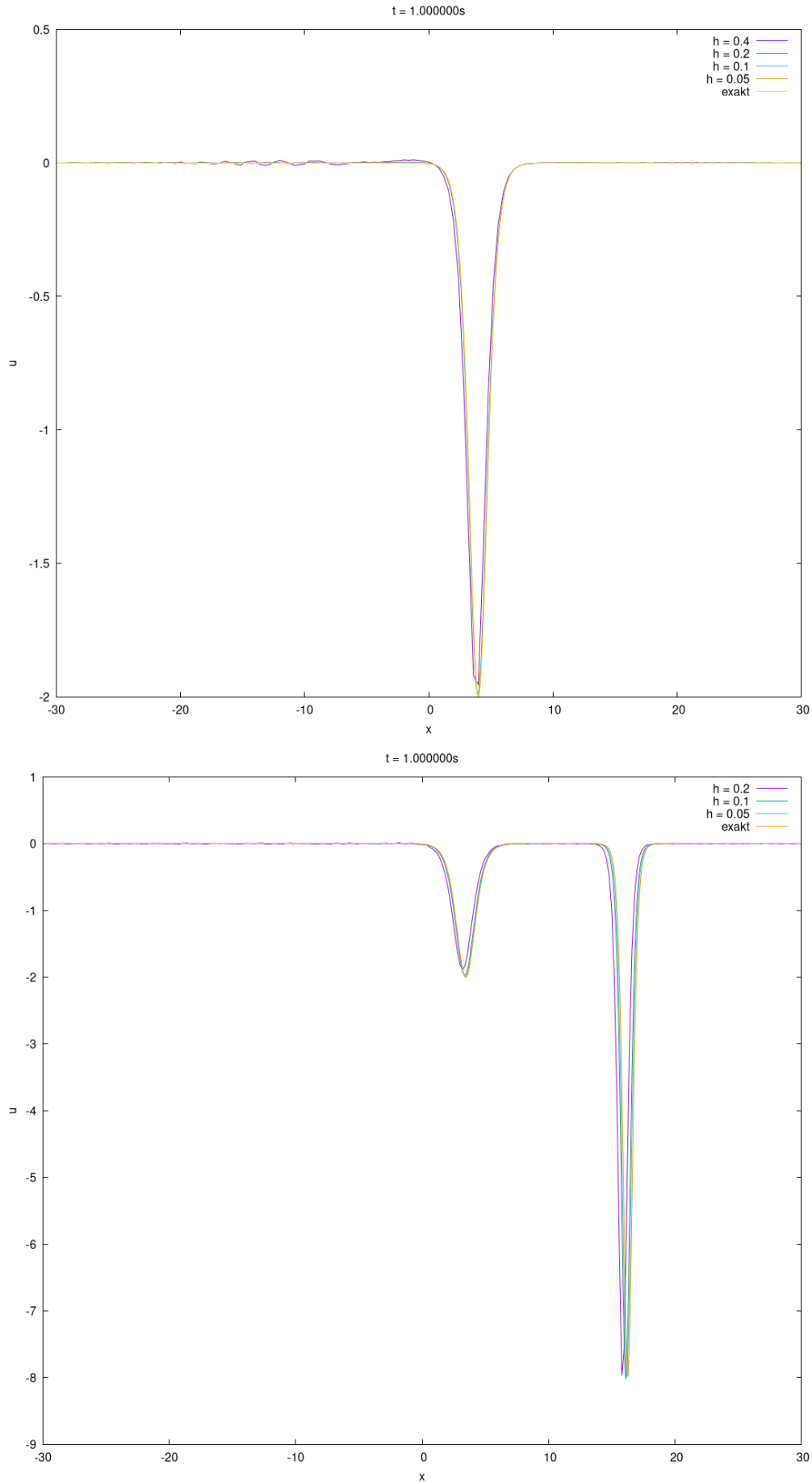


Abbildung 2: Hier sind numerische und analytische Lösung $u^{[1]}(1, x)$ (oben) und $u^{[2]}(1, x)$ (unten) verglichen.

das diese kurven recht gut konvergieren. Nur $h = 0.4$ konvergiert für $N = 2$ nicht. Um diese Konvergenz genauer zu untersuchen haben wir für alle $d \in [3 \cdot 10^{-5}, 2.5 \cdot 10^{-4}]$ und alle $h \in [0.05, 0.4]$ die Gesamtabweichung des numerischen Verfahren für $u^{[1]}$ und $u^{[2]}$ berechnet und in einer Heatmap geplotted. Zusätzlich haben wir $d = \frac{1}{2.6}h^3$ geplotted um zu zeigen dass das Verfahren für größere d nicht konvergiert. In abildung 3 sieht mann ausserdem das $u^{[2]}$ eine viel stärkere h Abhängigkeit hatt als $u^{[1]}$ wass man auch in Abildung 2 gesehen hatt.

H10.3

Nun haben wir $u^{[3]}(t, x)$ numerisch in den Intervallen $t \in [0, 1]$ und $x \in [-5, 45]$ berechnet und in Video 4 dargestellt. Man sieht 3 Solitonen die unterschiedliche Geschwindigkeiten und Amplituden haben. Diese befinden sich alle bei $t = 0$ am ort $x = 0$.

H10.4

Zuletzt betrachten wir Lösungen für $N \notin \mathbb{N}$. Wir haben die Lösungen für $N \in [1.0, 1.9]$ betrachtet und in Video 5 dargestellt. Mann sieht dass diese Anfangbedingungen keine perfekten Solitonen geben; Die resultierenden Kurven zerfließen leicht und erzeugen hinter sich Wellen die auch positve Anteile haben. Trotzdem erkennt mann wie sich 2 immer besser Getrennte Wellen bilden.

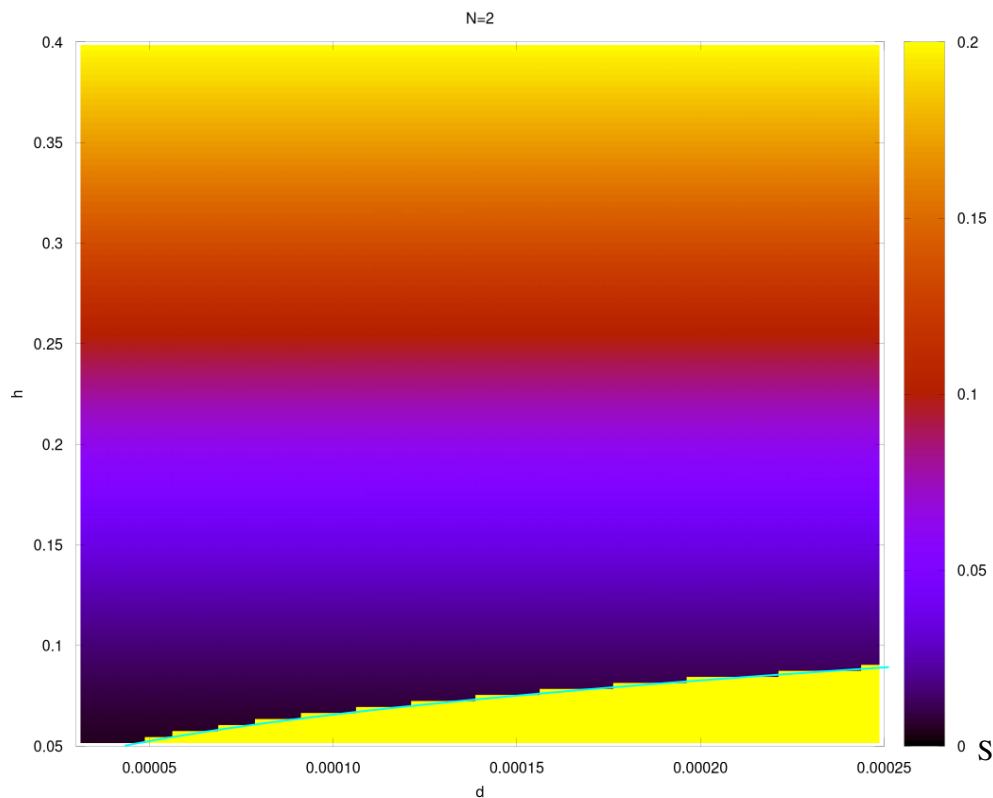
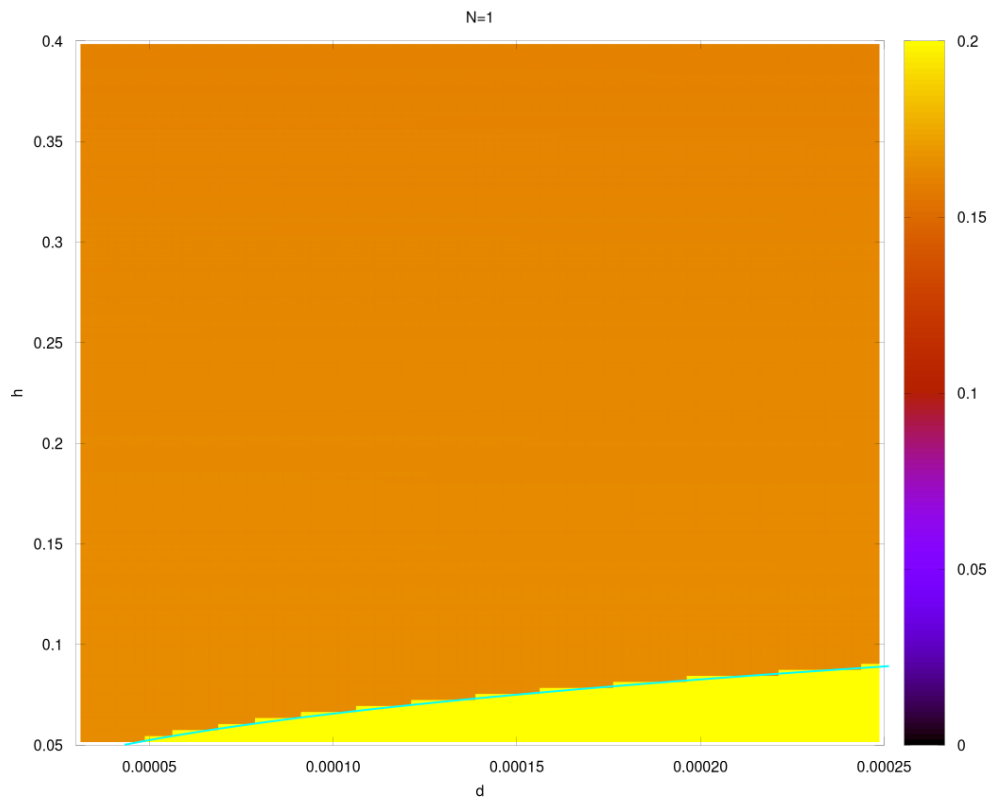


Abbildung 3: Hier sind die Differenzen der numerischen und analytischen Lösung der DGL für $N = 1$ (oben) und $N = 2$ (unten) verglichen.

Abbildung 4: Hier ist $u^{[3]}(t, x)$ im Bereich von $t \in [0, 1]$ und $t \in [-5, 45]$ dargestellt.

Abbildung 5: Hier ist $u^{[N]}(t, x)$ für $N \in [1.0, 1.9]$ dargestellt.