H.10: Schnelle FOURIER Transformation (FFT) und Korrelationen

H10.1 diskrete FOURIER-Transformationen

Es gelte:

$$[\mathcal{F}f]_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j \exp(2\pi i k j/N), \qquad [\mathcal{F}^{-1}f]_j = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k \exp(-2\pi i k j/N) \tag{1}$$

Zudem ist die diskrete Korrelation für ein Zeitgitter der Länge N definiert durch:

$$(f \odot g)_k := \sum_{j=0}^{N-1} f_{j+k} g_j \tag{2}$$

Im Folgenden werden wir zeigen, dass die Relationen gelten:

$$[\mathcal{F}(f \odot g)]_k = [\mathcal{F}f]_k[\mathcal{F}g]_{-k} = [\mathcal{F}f]_k\overline{[\mathcal{F}g]_k} \tag{3}$$

H.11: Graphische Auswertung für große Amplituden

Sei jetzt ein Signal gegeben durch:

$$s(t) = \begin{Bmatrix} sin(2\pi\alpha t) & f\ddot{u}r\ 0 \leq t \leq t_{max} \\ 0 & sonst \end{Bmatrix} \tag{4}$$

mit einer Konstanten α und einer maximalen Zeit t_{max}, die kleiner als die Länge des Gesamtimpulses $t_{max} << \frac{l_{Gesamtimpuls}}{c}$ ist. Nun entsteht ein gestörtes, zeitversetztes Echo mit:

$$e(t) = s(t - t_L) + r(t) + b\sin(2\pi\beta t) \tag{5}$$

mit dem Störterm $r(t)$, der ein Rauschen mit einer Amplitude a beschreibt und einem sinusförmigen Nebensignal mit einer Amplitude b und einer Frequenz β. Wir simulieren ein Rauschsignal mithilfe des Mersenne-Twisters, einem Pseudo-Zufallszahlen-Generator. Eine Funktion genrand_res53() generiert Zufallszahlen zwischen 0 und 1, sodass die Verschiebung und Reskalierung geschreiben werden kann als:

$$2 \cdot a \cdot (genrand\_res53() - 0.5) \qquad \in [-a, a] \tag{6}$$

Im Folgenden stellen wir $|e(t)|^2$ graphisch für verschieden große Amplituden dar. Dabei wählen wir $a = b = 0.5, 1.0, 2.0, 4.0$ und die Frequenzen $\alpha = 10$ und $\beta = 1$ und für die Zeitverzögerung $t_L = 50$. Dabei stellen wir fest, dass wir ab ... die Zeitverzögerung nicht mehr mit dem Auge ablesen können.

H.12: analytische Korrelation von $e \odot s$

Des Weiteren bestimmen wir mithilfe der FFT-Routine analytisch die Korrelation $e \odot s$:

$$(e \odot s)_k = \left[\mathcal{F}^{-1}\Big([\mathcal{F}e]\overline{[\overline{\mathcal{F}s}]}\Big)\right]_k = \left[\mathcal{F}^{-1}\Big([\mathcal{F}e]\overline{[\overline{\mathcal{F}s}]}\Big)\right]_k \tag{7}$$

Daraufhin stellen wir $|(e \odot s)(t)|^2$ für verschieden große Störungen graphisch dar. Dabei setzen wir $N = 2^m$ mit $m = 13$ und prüfen den Fall, ob man t_L sicher bestimmen kann.

H.13: Vergleich der analytischen und numerischen Korrelation von $e \odot s$

Jetzt betrachten wir die Amplituden $a = b = 0$. Wir zeigen, dass die Korrelation

$$(e \odot s)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e(t+\tau)s(\tau) \tag{8}$$

gegeben ist durch:

$$
\begin{aligned}
(e \odot s)(t) &= 0, \qquad t < t_l - t_{max} && (9)\\
(e \odot s)(t) &= \frac{1}{2}\cos(2\pi\alpha(t - t_l))(t_{max} - t_l + t) && (10)\\
&\quad -\frac{1}{4\pi\alpha}\cos(2\pi\alpha t_{max})\sin(2\pi\alpha(t_{max} - t_l + t)), \qquad t_L - t_{max} < t < t_L && (11)\\
(e \odot s)(t) &= \frac{1}{2}\cos(2\pi\alpha(t - t_L))(t_L - t + t_{max}) && (12)\\
&\quad -\frac{1}{4\pi\alpha}\cos(2\pi\alpha t_{max})\sin(2\pi\alpha(t_{max} + t_l - t)), \qquad t_L < t < t_l + t_{max} && (13)\\
(e \odot s)(t) &= 0, \qquad t > t_L + t_{max} && (14)\\
& && (15)
\end{aligned}
$$

Anschließend vergleichen wir unser analytisches Ergebnis mit der zuvor oben numerisch bestimmten Lösung.

H.14: SZwitscherImpuls

Zu guter Letzt verbessern wir unser Verfahren mit einem Signal, einem sogenannten SZwitscherImpuls

$$s(t) = \begin{Bmatrix} sin(2\pi\alpha(t)t) & für\ 0 \le t \le t_{max} \\ 0 & sonst \end{Bmatrix} \tag{16}$$

mit einer linear variablen Frequenz $\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t$. Zuletzt untersuchen wir noch unseren Störterm aus Teilaufgabe 3 mit dieser variablen Störfrequenz unter der Wahl von $\alpha_0 = 5.0$ und $\alpha_1 = 1.0$.