2 수열의 합

「 실시간으로 위치를 추적한다.

잃어버린 물건을 찾거나 주문한 물건이 어디쯤 운송되고 있는지를 알고 싶을 때 실시간 위치 추적 시스템을 활용한다. 물속의 위치를 추적하기 위해서는 음파를 이용하고, 하늘에 있는 물건의 위치를 추적할 때는 이동통신망을 이용하기도 한다. 최근에는 하늘에 떠 있는 사물의 높이를 알아내려고 할 때, 오차를 줄이는 방법으로 수열의 각 항을 더한 식을 활용하기도 한다.

출처 강희원 외 2인, 「실시간 위치추적 시스템에서 높이 오차를 고려한 TDOA 측정치 기반 테일러 급수 설계 방법」 」

준비 학습

●분모의 유리화

자신 있음	☐
복습 필요	☐

1 다음 수의 분모를 유리화하시오.

(1) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$

●유리식

자신 있음	☐
복습 필요	☐

2 다음 식을 계산하시오.

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

01 $\sum$의 뜻과 성질

학습 목표 · $\sum$의 뜻을 안다.
· $\sum$의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

개념 1 $\sum$는 무엇을 나타내는 기호일까?

생각 열기

다음과 같이 규칙이 있는 수열의 합을 기호로 간단히 나타내는 방법을 생각해 보자.

$1^2,\ 3^2,\ 5^2,\ 7^2,\ 9^2,\ \cdots,\ 101^2$

$1^2+3^2+5^2+\cdots+101^2$

● 합의 기호 $\sum$는 영어 단어 Sum의 첫 글자 S에 해당하는 그리스 문자이다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 기호 $\sum$를 사용하여

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

와 같이 나타낸다.

여기서 $\sum_{k=1}^{n} a_k$는 수열의 일반항 a_k의 k에 1, 2, 3, $\cdots$, n을 차례로 대입하여 얻은 항 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n의 합을 뜻한다.

$\sum_{k=1}^{n} a_k$에서 k 대신 다른 문자를 사용하여 $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\sum_{j=1}^{n} a_j$ 등과 같이 나타낼 수도 있다.

$$\sum_{k=m}^{n} a_k$$

제n항까지
수열 $\{a_k\}$의
제m항부터
차례로 더한다.
(단, $m \le n$)

보기 (1) $3+6+9+12+\cdots+30=\sum_{k=1}^{10} 3k$

(2) $\sum_{k=3}^{20} k=3+4+5+\cdots+20$

문제 1 다음을 합의 기호 $\sum$를 사용하지 않은 합의 꼴로 나타내시오.

(1) $\sum_{k=1}^{10} k^2$ (2) $\sum_{j=1}^{6} 2^{-j}$

문제 2 다음을 합의 기호 $\sum$를 사용하여 나타내시오.

● 수열의 합을 표현할 때, $\sum$를 사용하면 더하려고 하는 모든 항을 명확하게 표현할 수 있다.

(1) $1+4+7+\cdots+46$ (2) $32+16+8+\cdots+\frac{1}{32}$

개념 2 $\sum$에는 어떤 성질이 있을까?

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)&=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+\cdots+(a_n+b_n)\\&=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)\\&=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k\end{aligned}$$

가 성립한다.

같은 방법으로

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$$

도 성립한다.

또, c가 상수일 때

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}ca_k&=ca_1+ca_2+ca_3+\cdots+ca_n\\&=c(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)\\&=c\sum_{k=1}^{n}a_k\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n}c=\underbrace{c+c+c+\cdots+c}_{n\text{개}}=cn$$

이 성립한다.

앞의 내용을 정리하면 다음과 같다.

$\sum$의 성질

1. $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

2. $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

3. $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

4. $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

● $\sum_{k=1}^{n}(pa_k+qb_k)$
$=p\sum_{k=1}^{n}a_k+q\sum_{k=1}^{n}b_k$
(단, p, q는 상수)

보기 (1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+2b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}2b_k=\sum_{k=1}^{n}a_k+2\sum_{k=1}^{n}b_k$

(2) $\sum_{k=1}^{10}2=2\times10=20$

문제 3 $\sum_{i=1}^{10}a_i=10$, $\sum_{j=1}^{10}b_j=-5$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\sum_{i=1}^{10}(2a_i-3b_i)$

(2) $\sum_{k=1}^{10}(3a_k+b_k-2)$

생각과 표현

문제 해결 | 추론 | 창의 · 융합 | 의사소통

$\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$, $\sum_{k=1}^{n}b_k=T_n$이라고 할 때, 다음 중 합의 기호 $\sum$의 뜻을 잘 이해하고 있는 학생은 누구인지 말하여 보자.

02 여러 가지 수열의 합

학습 목표 • 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

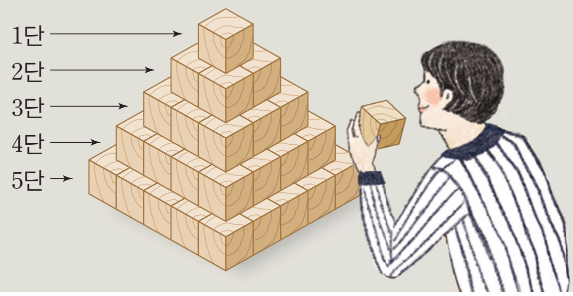
개념 1 자연수의 거듭제곱의 합은 어떻게 구할까?

생각 열기

다음 그림과 같이 1단에는 1개, 2단에는 4개, 3단에는 9개, 4단에는 16개, 5단에는 25개의 정육면체 모양의 나무 블록을 쌓아서 피라미드 모양을 만들었다. 물음에 답하여 보자.

1 k단의 나무 블록의 개수를 k에 대한 식으로 나타내 보자. (단, k는 5 이하의 자연수이다.)

2 1단부터 5단까지 피라미드 모양을 만드는 데 사용한 나무 블록의 총개수를 합의 기호 $\sum$를 사용하여 나타내 보자.



자연수를 차례로 나열하여 얻은 수열

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n,\ \cdots$$

은 첫째항이 1, 공차가 1인 등차수열이다.

따라서 첫째항인 1부터 제n항인 n까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

임을 알 수 있다.

• 첫째항이 1이고, 제n항이 n인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합은 $\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$

이제 자연수의 제곱을 차례로 나열하여 얻은 수열

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ \cdots,\ n^2,\ \cdots$$

의 첫째항부터 제n항까지의 합

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2$$

을 구해 보자.

배웠어요! 고1
곱셈 공식
$(a+b)^3$
$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

항등식 $(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1$의 x에 1, 2, 3, $\cdots$, n을 차례로 대입하면 다음과 같다.

$$x=1\text{일 때 } 2^3-1^3=3\times1^2+3\times1+1$$
$$x=2\text{일 때 } 3^3-2^3=3\times2^2+3\times2+1$$
$$x=3\text{일 때 } 4^3-3^3=3\times3^2+3\times3+1$$
$$\vdots$$
$$x=n\text{일 때 } (n+1)^3-n^3=3\times n^2+3\times n+1$$

이 n개의 등식을 같은 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}(n+1)^3-1^3&=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\\&=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\times\frac{n(n+1)}{2}+n\end{aligned}$$

이다. 즉,

$$\begin{aligned}3\sum_{k=1}^{n}k^2&=(n+1)^3-\frac{3n(n+1)}{2}-(n+1)\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}\end{aligned}$$

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$이다.

보기 $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=\displaystyle\sum_{k=1}^{5}k^2=\frac{5\times6\times11}{6}=55$

문제 1 항등식 $(x+1)^4-x^4=4x^3+6x^2+4x+1$을 이용하여 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

위의 내용을 정리하면 다음과 같다.

자연수의 거듭제곱의 합

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

보기 (1) $\sum_{k=1}^{20} k=1+2+3+\cdots+20=\frac{20\times(20+1)}{2}=210$

(2) $\sum_{k=1}^{10} k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=\frac{10\times(10+1)\times(2\times10+1)}{6}=385$

(3) $\sum_{k=1}^{5} k^3=1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=\left(\frac{5\times6}{2}\right)^2=225$

문제 2 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\sum_{k=1}^{10} k^3$ (2) $5^2+6^2+7^2+\cdots+15^2$

예제 1

다음 식의 값을 구하시오.

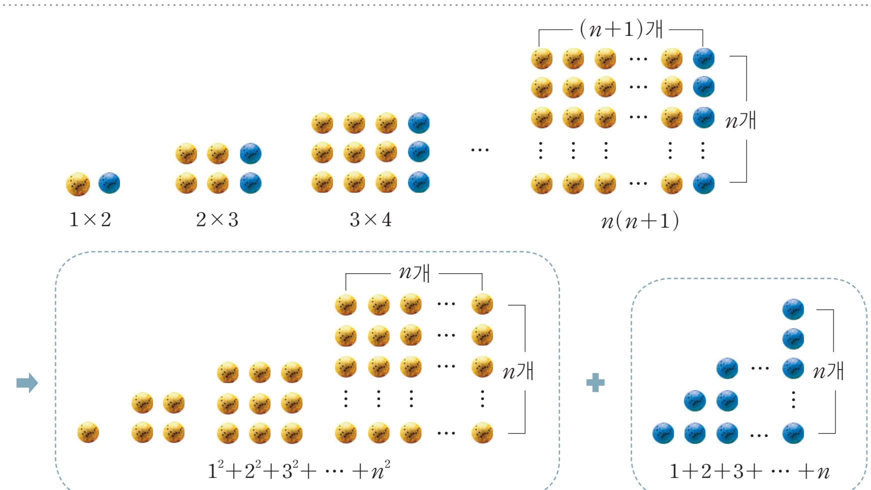
$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)$$

● 일반항을 구한 후 합의 기호 Σ를 사용하여 주어진 합을 나타낸다.

풀이 $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)=\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=\sum_{k=1}^{n} k^2+\sum_{k=1}^{n} k$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$



답 $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

문제 3 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $1\times3+4\times4+9\times5+\cdots+n^2(n+2)$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k(k^2-1)$

일반항이 분수 꼴로 주어진 수열의 합을 구해 보자.

예제 2

다음 식의 값을 구하시오.

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

• $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ $(A\neq B)$임을 이용한다.

풀이 일반항이 $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$이므로 구하는 합은

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

답 $\frac{n}{n+1}$

문제 4 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(2) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+2}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

생각과 표현

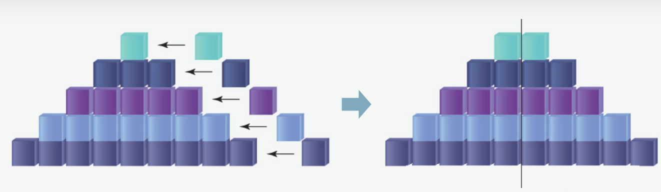
문제 해결 | 추론 | 창의 · 융합 | 의사소통

다음은 $1+3+5+7+9=5^2$임을 그림을 이용하여 설명한 것이다. 이를 이용하여 물음에 답하여 보자.

1 $1+3+5+\cdots+19$를 구해 보자.

2 $1+3+5+\cdots+(2n-1)$을 구해 보자.

3 $1+3+5+7+9=5^2$임을 오른쪽 그림과 다른 방법으로 설명할 수 있는지 생각해 보자.



$(1+3+5+7+9)+5=2+4+6+8+10$이므로

$1+3+5+7+9=2(1+2+3+4+5)-5$

$=2\times\frac{5\times6}{2}-5$

$=5\times(6-1)=5^2$

자신감을 키우는

확인 학습 문제

1 합의 기호 $\sum$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 합의 기호 $\sum$를 사용하여

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

와 같이 나타낸다.

2 $\sum$의 성질

(1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

(2) $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

(3) $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

(4) $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

3 자연수의 거듭제곱의 합

(1) $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n$
$=\dfrac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$
$=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$
$=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

바탕 다지기

01 다음을 합의 기호 $\sum$를 사용하여 나타내시오.

(1) $1+3+5+\cdots+19$

(2) $1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3$

(3) $\dfrac{1}{1\times3}+\dfrac{1}{2\times4}+\dfrac{1}{3\times5}+\cdots+\dfrac{1}{8\times10}$

02 $\sum_{k=1}^{10}a_k=5$, $\sum_{k=1}^{10}b_k=10$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\sum_{k=1}^{10}(3a_k+2b_k)$

(2) $\sum_{k=1}^{10}(-a_k+3b_k+5)$

03 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\sum_{k=1}^{20}(3k-10)$

(2) $\sum_{k=1}^{10}k(k-2)$

04 $\sum_{k=1}^{10}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$의 값을 구하시오.

기본 익히기

05 $\sum_{k=1}^{10} a_k=5$, $\sum_{k=1}^{10} a_k^2=10$일 때, $\sum_{k=1}^{10} (3a_k-2)^2$의 값을 구하시오.

06 $\sum_{k=1}^{10} (k-1)(k^2+k+1)$의 값을 구하시오.

07 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=n^2-n$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\sum_{k=1}^{2n} a_k$

(2) $\sum_{k=1}^{n} a_{2k}$

08 $\sum_{k=1}^{5} (k+1)^2-\sum_{k=3}^{5} (k^2+1)$의 값을 구하시오.

09 $\sum_{k=1}^{n} (a_{2k-1}+a_{2k})=5n^2+2n$일 때, $\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값을 구하시오.

10 다음 식의 값을 구하시오.

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{47}+\sqrt{49}}$$

11 다음 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하시오.

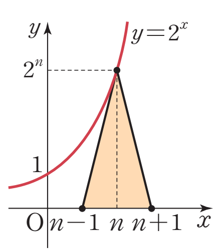
$$1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ 1+2+3+4,\ \cdots,\ 1+2+3+\cdots+n$$

12 다음은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$의 값을 구하는 과정이다. $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

> $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$일 때
> $a_n=S_n-S_{n-1}=\boxed{}$
> $n=1$일 때
> $a_1=S_1=\boxed{}$
> 즉, 일반항 $a_n=\boxed{}$
> 따라서
> $$\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{(\boxed{})(2k+1)}$$
> $$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{\boxed{}}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
> $$=\boxed{}$$

실력 키우기

13 오른쪽 그림과 같이 n이 자연수일 때, 함수 $y=2^x$의 그래프 위의 한 점 $(n,\ 2^n)$과 두 점 $(n-1,\ 0)$, $(n+1,\ 0)$을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 a_n이라고 하자. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값을 구하시오.



14 다음 등식이 성립할 때, 자연수 N의 값을 구하시오.

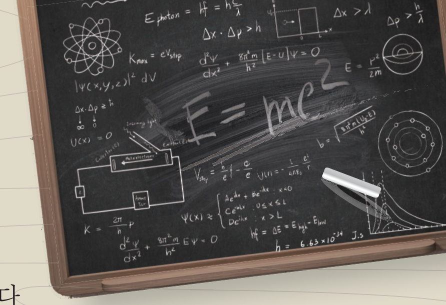
> $$\sum_{k=1}^{7}k^2+\sum_{k=2}^{7}k^2+\sum_{k=3}^{7}k^2+\sum_{k=4}^{7}k^2+\sum_{k=5}^{7}k^2+\sum_{k=6}^{7}k^2+\sum_{k=7}^{7}k^2=N^2$$

생각 톡!톡!

15 다음은 2021년 2월 달력이다. 날짜에 해당하는 식이 달력에 쓰여 있다. 예를 들어 $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}k^2=14$이므로 14일에 $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}k^2$의 식이 쓰여 있다. 달력의 빈 날짜에 합의 기호 Σ를 포함한 식을 써 보고, 짝과 함께 바꾸어 맞는 식인지 확인해 보자.

2021년 2월

일	월	화	수	목	금	토
	1	2	3	4	5 $\sum_{k=1}^{5}1$	6
7	8	9	10 $\sum_{k=1}^{4}k$	11	12	13
14 $\sum_{k=1}^{3}k^2$	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28				$\sum_{k=1}^{3}(4k+1)$		



생각을 넓히는 수학

창의성은 이미지로부터 나온다. 창의 융합

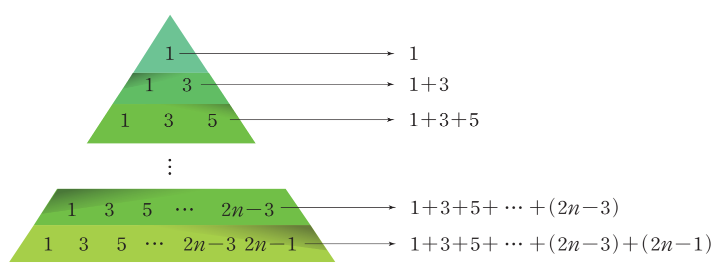
상대성 이론으로 유명한 물리학자 아인슈타인(Einstein, A., 1879~1955)은 자신의 창의성이 이미지로부터 출발한다고 하였다. 그림으로 수학을 표현하고 음미하며 해결하고 상상하는 것은 수학에서 창의성을 발휘하는 열쇠가 되기도 한다. 여러 가지 수열의 합도 그림으로 확인할 수 있다.

자연수의 제곱의 합을 나타내는 식 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 임을 그림을 통해 확인해 보자.

탐구 ❶ 133쪽 **생각과 표현**에서 홀수의 합은 자연수의 제곱으로 나타낼 수 있음을 확인하였다. □ 안에 알맞은 식을 써넣어 보자.

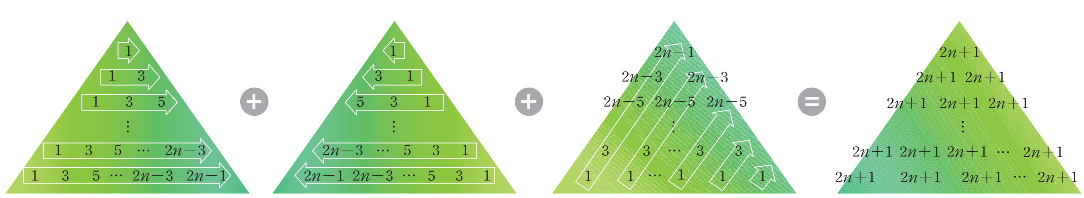
$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=\square$$

탐구 ❷ 다음 삼각형 안에 나열된 수들의 합을 기호 $\sum$를 사용하여 나타내려고 한다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.



$$1+(1+3)+(1+3+5)+\cdots+\{1+3+5+\cdots+(2n-1)\}$$
$$=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$
$$=\sum_{k=1}^{\square}\square$$

탐구 ❸ 다음은 자연수의 제곱의 합을 나타내는 식 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$이 성립함을 나타내는 그림이다. 친구와 함께 토의하여 식이 그림으로 어떻게 설명되는지 발표해 보자.



출처 • 로저 넬슨, 『말이 필요없는 증명 Ⅱ』 • Presmeg, N. D., 「Generalization using imagery in mathematics」