第24卷 第3期 仲恺农业工程学院学报 Vol. 24, No. 3
2011年9月 Journal of Zhongkai University of Agriculture and Engineering September, 2011

Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法的预处理

梁凯豪[1]，高凌云[2]
(1. 仲恺农业工程学院 计算科学学院，广东 广州 510225；2. 暨南大学 数学系，广东 广州 510225)

摘要：对部分 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法发散的线性方程组进行了相应的预处理，通过完全选主元的方法将线性方程组的系数矩阵对角最大化，从而达到 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代收敛的目的.

关键词：Jacobi 迭代法；Gauss-Seidel 迭代法；预处理
中图分类号：O241.6 **文献标识码**：A **文章编号**：1674-5663(2011)03-0044-03

Pre-processing to Jacobi & Gauss-Seidel iteration

LIANG Kai-hao[1], GAO Ling-yun[2]
(1. College of Computational Science, Zhongkai University of Agriculture and Engineering, Guangzhou 510225, China;
2. Mathematical Department, Ji'nan University, Guangzhou 510632, China)

Abstract: Some linear equations which were divergent by iteration methods of Jacobi and Gauss-Seidel were pre-processed. The main element was chosen to make the diagonal elements at the greatest value in the coefficient matrix. At last the iteration of Jacobi and Gauss-Seidel were made to be convergent.

Key words: Jacobi iteration method; Gauss-Seidel iteration method; pre-processing

1 引言

Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法是求解线性方程组基本迭代法中的常用方法，但对部分线性方程组 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法是发散的. 经过一定的等价变换处理，可以把原来发散的方程组变为等价的收敛方程组. 作者通过完全选主元的方法将线性方程组的系数矩阵对角最大化，实现等价变换，使得 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代收敛.

2 线性方程组的 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法

设有线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \tag{1}$$

其矩阵向量形式为

$$Ax = b. \tag{2}$$

这里

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \mathbf{O} & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n, b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T \in \mathbf{R}^n$.
假设 $a_{ii} \neq 0$，$i = 1, 2, \cdots, n$，将矩阵 A 拆分成 3 部分，记为

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \mathbf{O} & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$L = -\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & \\ & \cdots & & \mathbf{O} & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

收稿日期：2011-05-15
基金项目：广东省自然科学基金(04010474)资助项目.
作者简介：梁凯豪(1983-)，男，广东广州人，助教，硕士. E-mail: karman03@126.com

$$U=-\begin{pmatrix}0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ & & 0 & \cdots & \vdots\\ & & & \mathbf{O} & a_{n-1,n}\\ & & & & 0\end{pmatrix},$$

其中，D 为对角阵，L 为严格下三角阵，U 为严格上三角阵，则 $A=D-L-U$.

设 Jacobi 迭代法的矩阵形式为

$$x^{(k+1)}=B_Jx^{(k)}+f_J,\ k=0,1,2,\cdots$$

则 f_J 和 Jacobi 迭代矩阵 B_J 为[1]

$$\begin{cases}B_J=D^{-1}(L+U)=I-D^{-1}A\\ f_J=D^{-1}b\end{cases}. \tag{4}$$

设 Gauss-Seidel 迭代法的矩阵形式为

$$x^{(k+1)}=B_{G-S}x^{(k)}+f_{G-S},\ k=0,1,2,\cdots$$

则有 f_{G-S} 和 Gauss-Seidel 迭代矩阵 B_{G-S} 为[1]

$$\begin{cases}B_{G-S}=(D-L)^{-1}U\\ f_{G-S}=(D-L)^{-1}b\end{cases}. \tag{5}$$

3　Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法的收敛判定

为了后面讨论问题的需要，这里先给出线性方程组迭代算法的一些常用引理.

引理 1（迭代法基本定理）[2]　方程组 $x=Bx+f$，对于任意的初始向量 $x^{(0)}$ 和右端项 f，迭代法 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$ 收敛的充分必要条件是迭代矩阵 B 的谱半径 $\rho(B)<1$.

引理 2[3]　若 A 为严格对角占优阵或不可约弱对角占优阵，则 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法收敛.

引理 3[1]　若 A 为对称正定阵，则 Gauss-Seidel 迭代法收敛.

4　非奇异矩阵的预处理

对于系数矩阵 A 为非奇异方阵的线性方程组，若直接应用 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法发散时，可以对系数矩阵做一定变换，使变换后的等价方程组能应用 Gauss-Seidel 迭代法求解.

设系数矩阵 A 为 n 阶非奇异方阵，则线性方程组 $Ax=b$ 的解总能通过 Gauss-Seidel 迭代法求解[4]. 这是因为，A 非奇异的话，那么 A^TA 必定是对称正定的. 不妨设 $B=A^TA$.

B 对称，因为 $(A^TA)^T=A^TA$，即 $B^T=B$.

B 是正定的. 因为 $(Ax,Ax)=(Ax)^TAx=x^T(A^TA)x\geqslant 0$. 假设 $Ax=0$，则 $Ax=b=0$ 为齐次线性方程组，而 A 非奇异，故方程组只有零解. 因此只讨论 $Ax\neq 0$ 的情况. 故 $x^T(A^TA)x>0$，则 B 正定.

在方程组 $Ax=b$ 两边左乘 A^T 得，$A^TAx=A^Tb$. 根据引理 3 可知，对于方程组 $A^TAx=A^Tb$，Gauss-Seidel 迭代法收敛.

因此对于非齐次线性方程组，当直接运用 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法发散的时候，可以在方程组两边左乘 A^T，再对新的方程组 $A^TAx=A^Tb$ 运用 Gauss-Seidel 迭代法求解. 这是当线性方程组的系数矩阵 A 为非奇异矩阵时，运用 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法求解的一种预处理方法.

5　系数矩阵的对角最大化处理

5.1　系数矩阵对角最大化处理

可以通过对方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 进行初等变换，使部分线性方程组能够利用 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法求解.

对于（3）式的系数矩阵，设系数矩阵元素绝对值的最大值为 $|a_{kl}|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant n}\{|a_{ij}|\}$，进行如下处理:

（i）将矩阵 A 的第一行和第 k 行交换，同时将向量 b 的 b_1 分量和 b_k 分量的位置交换，则交换后的方程组为

$$\begin{pmatrix}a_{k1} & \cdots & a_{kl} & \\ \vdots & \mathbf{O} & \vdots & \\ a_{11} & \cdots & a_{1l} & \\ & & & \mathbf{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_k\\ \vdots\\ b_1\\ \\ \end{pmatrix}. \tag{6}$$

（ii）将（6）式方程组的系数矩阵的第一列和第 l 列交换，同时将变量 x 的 x_1 分量和 x_l 分量的位置进行交换，则交换后的方程组为

$$\begin{pmatrix}a_{kl} & \cdots & a_{k1} & \\ \vdots & \mathbf{O} & \vdots & \\ a_{1l} & \cdots & a_{11} & \\ & & & \mathbf{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_l\\ \vdots\\x_1\\ \vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_k\\ \vdots\\ b_1\\ \vdots\end{pmatrix}. \tag{7}$$

（iii）设经过（i）和（ii）步变换后得到的式的方程组为 $A^{(1)}x^{(1)}=b^{(1)}$. 固定 a_{kl} 的位置不变，即保持 $a_{11}^{(1)}$ 的位置不变. 在 $A^{(1)}$ 中划去第一行和第一列，在剩下的 $(n-1)\times(n-1)$ 的矩阵中找出一个绝对值最大的元素，设 $|a_{kl}^{(1)}|=\max\limits_{2\leqslant i\leqslant n且2\leqslant j\leqslant n}\{|a_{ij}^{(1)}|\}$. 在方程组 $A^{(1)}x^{(1)}=b^{(1)}$ 中，利用（i）和（ii）步类似的处理办法，使 $a_{kl}^{(1)}$ 变换到 $a_{22}^{(1)}$ 的位置上.

（iv）重复步骤（iii），最终 $n-1$ 次的变换得到方程组 $A^{(n-1)}x^{(n-1)}=b^{(n-1)}$. 在系数矩阵 $A^{(n-1)}$

中，有

$$|a_{kk}^{(n-1)}| = \max_{k\leq i\leq n, k\leq j\leq n}\{|a_{ij}^{(n-1)}|\}.$$

将(i)～(iv)的处理过程称为系数矩阵对角最大化.

5.2 对角最大化预处理的适用情形

当线性方程组的系数矩阵经过对角最大化后是严格对角占优阵或不可约弱对角占优阵时，方程组就可以利用 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法来求解.

需要注意的是，对角最大化后的系数矩阵不一定就是严格对角占优阵或不可约弱对角占优阵. 所以，经过系数矩阵对角最大化后的方程组不一定是 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代收敛的.

5.3 实例分析说明

以一个例子来说明系数矩阵对角最大化的过程. 对线性方程组

$$\begin{pmatrix}2&1&3\\1&4&0\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\8\\2\end{pmatrix} \qquad (8)$$

易检验 $\rho(B_J)=\frac{5\sqrt{2}}{4}>1$，$\rho(B_{G-S})=\frac{25}{8}>1$. 由迭代法基本定理可知，Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法都是发散的. 按照对角最大化过程进行如下变换:

首先将系数矩阵的第一和第二行进行交换，再将第一和第二列进行交换，x 和 b 也应该做相应的修改，得

$$\begin{pmatrix}4&1&0\\1&2&3\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\x_1\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\6\\2\end{pmatrix}. \qquad (9)$$

其次将方程组的系数矩阵的第二和第三列交换，同时修改 x，得到

$$\begin{pmatrix}4&0&1\\1&3&2\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\x_3\\x_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\6\\2\end{pmatrix}. \qquad (10)$$

方程组(10)是方程组(8)的一种变换形式，而方程组(10)的系数矩阵是一个不可约弱对角占优阵，由引理2可知，Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法是收敛的.

需要注意的是，Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代收敛的方程组的系数矩阵并非都是严格对角占优阵或不可约弱对角占优阵. 例如，矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&a&0\\a&1&a\\0&a&1\end{pmatrix}, \qquad (11)$$

当 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<a<-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2}<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，对于任意非零的右端量 b，方程组 $Ax=b$ 总是 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代收敛的. 因为

$$B_J=D^{-1}(L+D)=\begin{pmatrix}0&-a&0\\-a&0&-a\\0&-a&0\end{pmatrix},$$

$$B_{G-S}=(D-L)^{-1}U=\begin{pmatrix}0&-a&0\\0&a^2&-a\\0&-a^3&a^2\end{pmatrix},$$

则 $\rho(B_J)=\sqrt{2}|a|<1$，$\rho(B_{G-S})=2a^2<1$. 但是 $1<2|a|$，所以 A 为非对角占优阵.

6 结语

应用 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法求解线性方程组时，常常由于这两种迭代法对方程组的要求很严而无法求解. 当 $|A|\neq 0$ 时，可以利用定理1，将原方程组 $Ax=b$ 变换为 $A^TAx=A^Tb$，再用 Gauss-Seidel 迭代法求解. 另外，也可以对系数矩阵进行对角最大化处理，当预处理后的系数矩阵是严格对角占优阵或不可约弱对角占优阵时，方程组就可以利用 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法来求解.

参考文献:

[1] 施妙根，顾丽珍. 科学和工程计算基础[M]. 北京: 清华大学出版社，2006: 87－96.

[2] 高培旺，雷勇军. 计算方法典型例题与解法[M]. 长沙: 国防科技大学出版社，2003: 241－242.

[3] 刘玲，葛福生. 数值计算方法[M]. 北京: 科学出版社，2005: 82－83.

[4] 王育琳，贺迅宇，张尚先. Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法求解线性方程组收敛性比较与研究[J]. 株洲师范高等专科学校学报，2004，9(5): 30－32.

【责任编辑 夏成锋】