Aufgabe 1: Wiederholung mathematischer Grundlagen für das Fach Regelungstechnik

1. Gegeben sei folgende Differentialgleichung mit den Anfangswerten Null.

$$2\ddot{x}_a + 12\dot{x}_a + 10x_a = 2\dot{x}_e + 20x_e$$

   a) Berechnen sie die Lösung der Differentialgleichung im Bildbereich in Abhängigkeit von einer beliebigen Eingangsgröße $X_e(s)$.

$$\text{Lösung: } X_a(s) = X_e(s)\,\frac{2s + 20}{2s^2 + 12s + 10}$$

   b) Zerlegen sie $X_a(s)$ in Partialbrüche für den Fall $X_e(s) = 1$.

$$\text{Lösung: } X_a(s) = -\frac{5}{4}\frac{1}{(s+5)} + \frac{9}{4}\frac{1}{(s+1)}$$

   c) Berechnen sie die Lösung der Differentialgleichung im Zeitbereich durch Rücktransformation von $X_a(s)$ mittels Transformationstabelle.

$$\text{Lösung: } x_a(t) = \frac{9}{4}e^{-t} - \frac{5}{4}e^{-5t}$$

2. Aufgabenstellung wie Aufgabe 1.

$$\ddot{x}_a + 6\dot{x}_a + 9x_a = 5\dot{x}_e$$

$$\text{Lösung: } x_a(t) = 5e^{-3t} - 15te^{-3t}$$

3. Aufgabenstellung wie Aufgabe 1.

$$\dddot{x}_a - 8\ddot{x}_a + 7\dot{x}_a = 2\dot{x}_e + 14x_e$$

$$\text{Lösung: } x_a(t) = \frac{2}{3}e^{7t} - \frac{8}{3}e^{t} + 2,\ t \geqslant 0$$

4. Gegeben sei eine komplexe Zahl $z = a + jb$ mit dem Realteil $a = 0.5$ und dem Imaginärteil $b = 0.5\sqrt{3}$.
   a) Wie lauten Betrag und Argument der komplexen Zahl?
   b) Schreiben Sie die diese komplexe Zahl in algebraischer-, trigonometrischer- und Exponentialform auf und stellen sie jede Darstellungsform grafisch dar.

5. Gegeben seine eine komplexe Zahl $2 + j4$.
   a) Erweitern sie diese komplexe Zahl im Zähler und Nenner mit dem konjugiert-komplexen dieser Zahl.
   b) Erweitern Sie das Ergebnis obiger Aufgabe in Zähler und Nenner mit dem konjugiert-komplexen Nenner.

6. Trennen Sie die komplexe Funktion $G(j\omega) = \frac{2+j\omega}{j\omega(3+j\omega)}$ in Real- und Imaginärteil.

Aufgabe 2: Beschreibung des Übertragungsverhaltens linearer dynamischer Systeme

Das Übertragungsverhalten linearer dynamischer Systems kann durch lineare Differentialgleichungen, beispielsweise

$$\text{System 1: } x_a(t) = 4\dot{x}_e(t) + 8x_e(t) - 2\dot{x}_a(t) - \ddot{x}_a(t)$$

und

$$\text{System 2: } 7\ddot{x}_e(t) + 26\dot{x}_e(t) + 5x_e(t) = \dddot{x}_a(t) + 6\ddot{x}_a(t) + 5\dot{x}_a(t)$$

beschrieben werden. Zur vergleichenden Betrachtung der Systemeigenschaften sind folgende Aufgaben zu lösen:

1. Berechnen sie die Übertragungsfunktion.
2. Berechnen sie aus der Übertragungsfunktion die Gewichtsfunktion und stellen sie diese grafisch dar.
3. Berechnen sie aus der Übertragungsfunktion die Übergangsfunktion und stellen sie diese grafisch dar.
4. Treffen Sie eine Aussage zur Stabilität des Übertragungssystems.
5. Wie kann man das System mit Hilfe der Grundübertragungsglieder bezeichnen?

Lösungshilfe für System 1:

$$g(t) = 4e^{-t} + 4te^{-t} = 4e^{-t}(1+t)\,,\ h(t) = -8e^{-t} - 4te^{-t} + 8$$

Lösungshilfe für System 2:

$$g(t) = \frac{7}{2}e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-5t} + \sigma(t)\,,\ h(t) = -\frac{7}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-5t} + 4 + t$$

Aufgabe 3: Ermittlung von Bode-Diagramm und Ortskurve des Frequenzgangs

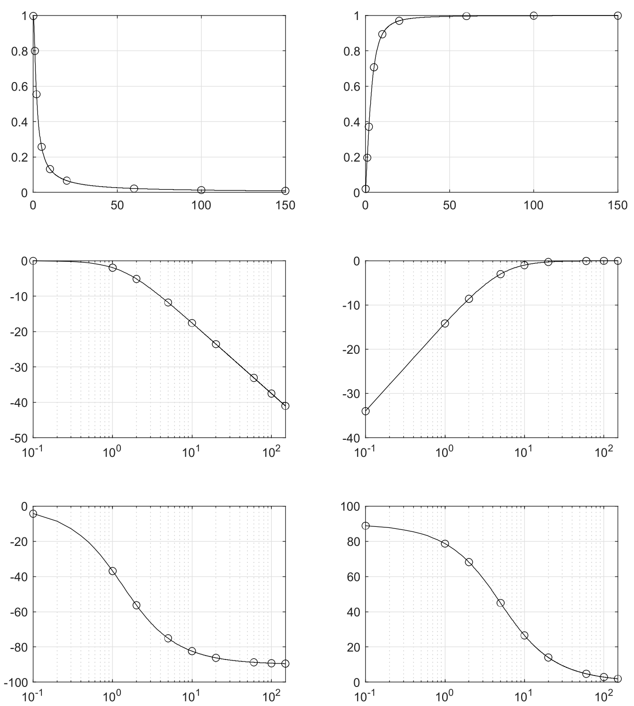
Gegeben sind die Übertragungsfunktionen

$$G_1(s) = \frac{4}{3s+4} \text{ und } G_2(s) = \frac{s}{s+5}.$$

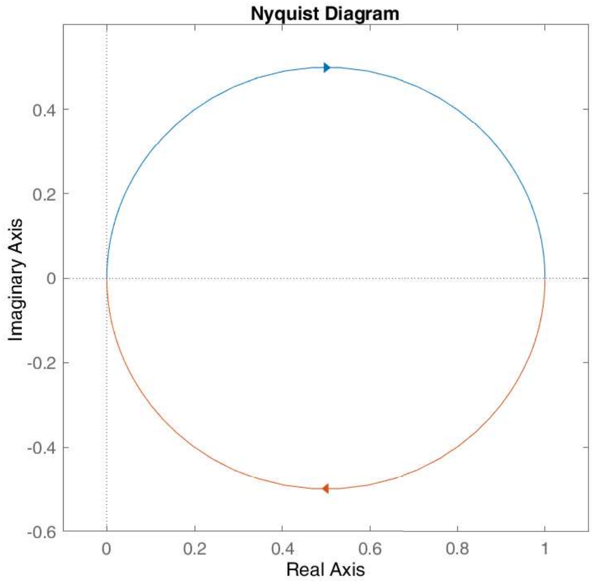
1. Benennen sie die Übertragungssysteme und bestimmen sie die Systemparameter.
2. Ermitteln sie die Gleichungen von Amplitudenfrequenzgang und Phasenfrequenzgang von System 1.
3. Ermitteln sie die Gleichungen von Amplitudenfrequenzgang und Phasenfrequenzgang von System 2.
4. Berechnen Sie mit Hilfe der folgenden Tabelle ausgewählte Werte zur grafischen Darstellung der Frequenzgänge und stellen sie diese grafisch dar.

ω	0,1	1	2	5	10	20	60	100	150
$\lvert G_1(j\omega)\rvert$									
$20\log_{10}\lvert G_1(j\omega)\rvert$									
$\arg\{G_1(j\omega)\}$									
$\lvert G_2(j\omega)\rvert$									
$20\log_{10}\lvert G_2(j\omega)\rvert$									
$\arg\{G_2(j\omega)\}$									

Lösung:



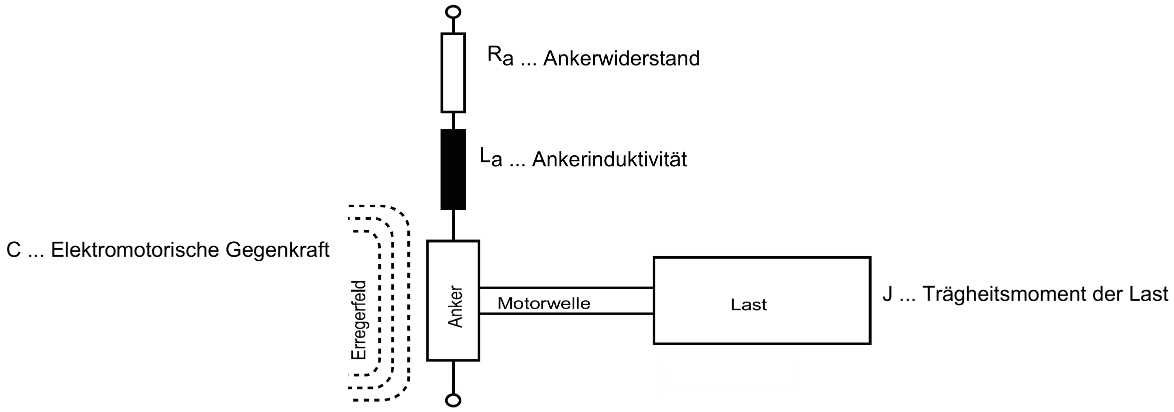
5. Konstruieren sie aus den gezeichneten Bode-Diagrammen die zugehörigen Ortskurven.
   Lösung:



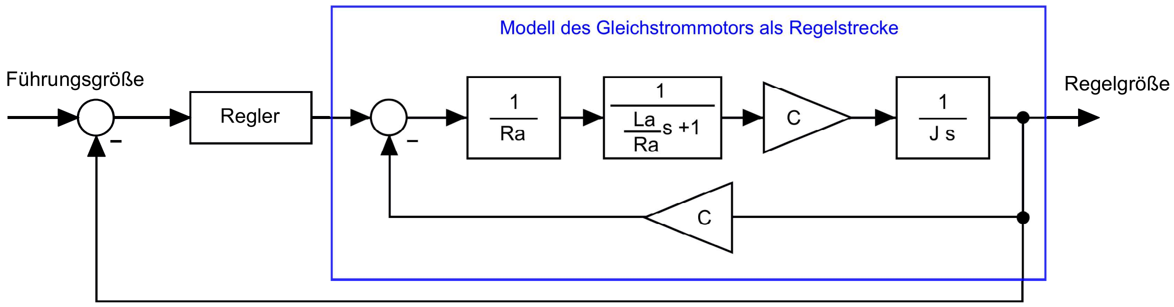
6. Zusatz: Betrachten sie die beiden Übertragungssysteme als RC-Schaltungen. Berechnen sie die Grenzfrequenzen und überprüfen sie diese Grenzfrequenzen anhand der Bode-Diagramme.

Aufgabe 4: Systematische Untersuchung der bleibenden Regelabweichung am Beispiel der Regelung eines Gleichstrommotors

Untersucht werden soll die Regelung eines Gleichstrommotors mit Ankerstromregelung. Die folgende Abbildung zeigt die Prinzipdarstellung eines solchen Motors.



Der Anker ist mit der Motorwelle verbunden. Die Ankerwicklung wird durch den ohmschen Widerstand R_a und die Induktivität L_a beschrieben. Sie befindet sich in einem magnetischen Erregerfeld. Fließt ein Strom durch die Ankerwicklung, dann wirkt durch das Erregerfeld eine Kraft auf den Anker. Diese Kraft wird auf die Motorwelle übertragen. Dabei muss das Trägheitsmoment J der zu bewegenden Last überwunden werden. Im Modell wird die elektromotorische Gegenkraft in der Konstanten C berücksichtigt, die Reibung der Motorwelle jedoch zunächst vernachlässigt.



1. Machen Sie sich mit der Prinzipskizze des Gleichstrommotors und dem Blockschaltbild des Regelkreises vertraut.

2. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Gleichstrommotors.

3. Berechnen Sie die bleibende Regelabweichung bei Verwendung eines P-Regler mit der Verstärkung V.

   a) Bei Verwendung einer sprungförmigen Führungsgröße der Sprunghöhe 1.

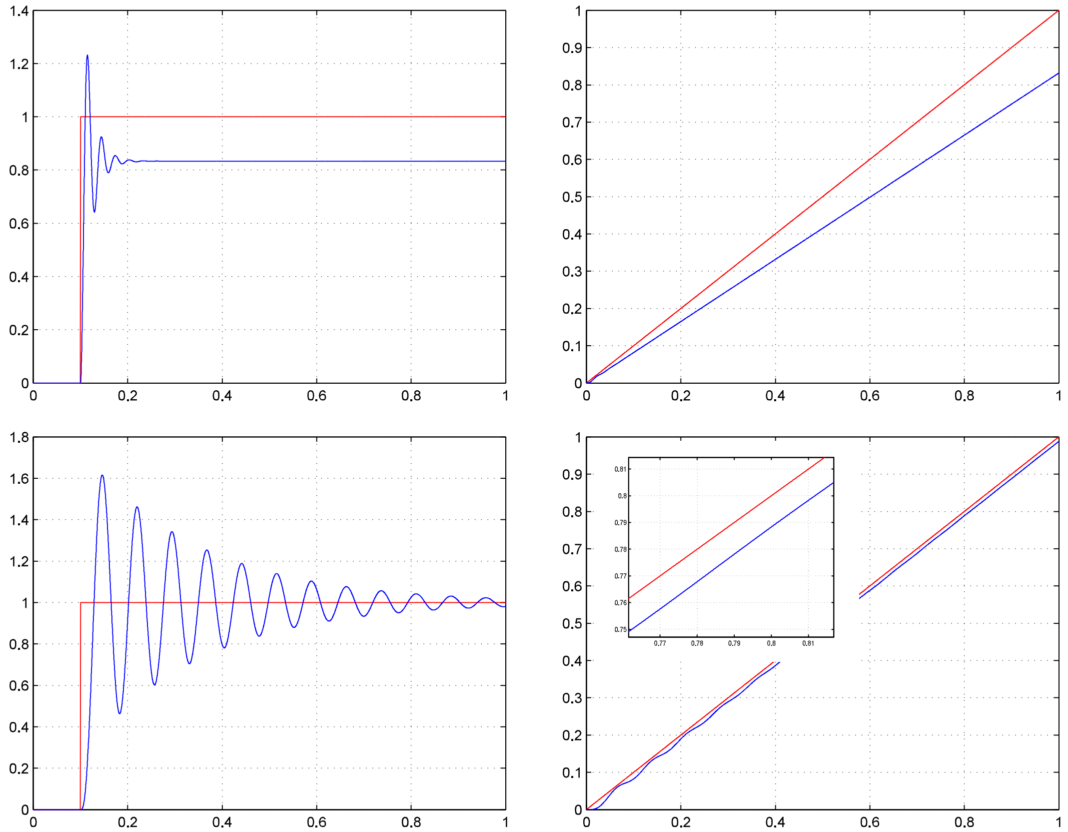
   b) Bei Verwendung einer rampenförmigen Führungsgröße mit dem Anstieg 1.

4. Berechnen Sie die bleibende Regelabweichung bei Verwendung eines I-Reglers mit der Nachstellzeit T_N.

   a) Bei Verwendung einer sprungförmigen Führungsgröße der Sprunghöhe 1.

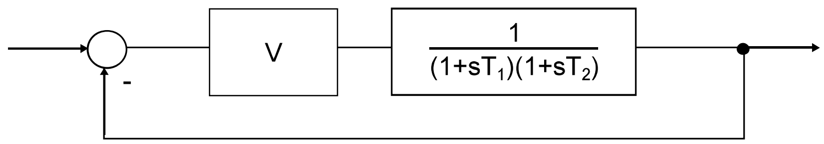
   b) Bei Verwendung einer rampenförmigen Führungsgröße mit dem Anstieg 1.

5. Ordnen Sie Ihre Rechenergebnisse den folgende Simulationsergebnissen zu.
   (rot: Führungsgröße, blau: Regelgröße)



Aufgabe 5: Das Hurwitz-Kriterium

1. Prüfen Sie, ob der gezeigte Regelkreis stabil arbeitet.



2. Eine nichtschwingungsfähige IT_2 -Regelstrecke

$$G_S(s) = \frac{k}{(1+sT_1)(1+sT_2)\,T_3 s}$$

soll mit einem Proportionalregler stabilisiert werden.

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums den allgemeinen Zusammenhang zwischen der kritischen Reglerverstärkung und den Streckenparametern.

b) Berechnen sie nun die kritische Reglerverstärkung für die Streckenparameter $k = 0,1$, $T_1 = 2s$, $T_2 = 10s$ und $T_3 = 1s$.

c) Zeichnen Sie den Pol-Nullstellenplan des Regelkreises für die Fälle: $V < V_{kr}$, $V = V_{kr}$ und $V > V_{kr}$.

d) Skizzieren sie den prinzipiellen Verlauf der Übergangsfunktionen des Regelkreises für die genannten Fälle.

3. Eine prinzipiell schwingungsfähige IT_2 -Regelstrecke

$$G_S(s) = \frac{k}{(T^2s^2 + 2DTs + 1)\,T_3 s}$$

soll mit einem Proportionalregler stabilisiert werden.

Berechnen Sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums den allgemeinen Zusammenhang zwischen der kritischen Reglerverstärkung und den Streckenparametern.

4. Eine prinzipiell schwingungsfähige PT_2 -Regelstrecke

$$G_S(s) = \frac{k}{T^2s^2 + 2DTs + 1}$$

soll mit einem Proportionalregler stabilisiert werden.

Berechnen Sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums den allgemeinen Zusammenhang zwischen der kritischen Reglerverstärkung und den Streckenparametern.

Lösungen:

PT_2nsf	$IT2$nsf	$IT2$sf	PT_2sf
immer stabil	$V_{kr} = \frac{T_1T_3+T_2T_3}{kT_1T_2} = 6$	$V_{kr} = \frac{2DT_3}{kT}$	immer stabil

Aufgabe 6: Das Nyquist-Kriterium

1. Eine PT_1-Strecke soll mit einem P-Regler geregelt werden.
   a) Berechnen Sie den Real- und den Imaginärteil des Frequenzgangs der offenen Kette.
   b) Stellen Sie die Ortskurve des Frequenzgangs für die Parameter $k = 1$, $T = 1$ und $V = 5$ mit Hilfe der folgenden Wertetabelle grafisch dar.

ω	0	0,5	1	2	3	5	10
$Re\{G_0(j\omega)\}$							
$Im\{G_0(j\omega)\}$							

2. Eine PT_3-Strecke soll mit einem P-Regler stabilisiert werden.
   a) Berechnen Sie die Gleichung für die kritische Frequenz.
   b) Berechnen Sie für eine konkrete Regelstrecke mit der Verstärkung 1 und Zeitkonstanten von $1s$, $20s$ und $3s$ den Zahlenwert der kritischen Frequenz und den Zahlenwert der kritischen Verstärkung.
   c) Zeichen Sie den prinzipiellen Verlauf der Ortskurve des Frequenzgangs für die Fälle $V < V_{krit}$, $V = V_{krit}$ und $V > V_{krit}$

3. Weitere Aufgaben für das Selbststudium. Überprüfen Sie ihre Ergebnisse mit dem Hurwitz-Kriterium.
   a) I-Regler und PT_1-Strecke (Aufgabenstellung gemäß Aufgabe 1)

$$G_R(s) = \frac{1}{sT_N}$$

$$G_S(s) = \frac{k}{1 + sT_1}$$

   Lösung: Der Regelkreis arbeitet immer stabil.

   b) I-Regler und PT_2-Strecke (Aufgabenstellung gemäß Aufgabe 2)

$$G_R(s) = \frac{1}{sT_N}$$

$$G_S(s) = \frac{k}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$$

   Lösung:

$$\omega_{kr} = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}},\ T_{Nkr} = \frac{kT_1T_2}{T_1 + T_2}$$

   c) P-Regler und PT_4-Strecke (Aufgabenstellung gemäß Aufgabe 2)

$$G_R(s) = V$$

$$G_S(s) = \frac{k}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)(1 + sT_3)(1 + sT_4)}$$

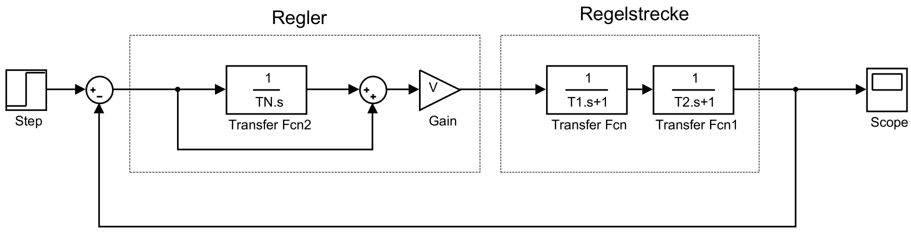
   Lösung:

$$\omega_{kr} = \sqrt{\frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{T_1T_3T_4 + T_2T_3T_4 + T_1T_2T_3 + T_1T_2T_4}}$$

   Mit $T_1 = 1, T_2 = 2, T_3 = 3, T_4 = 4$ folgt $V_{kr} = 5/k$.

Aufgabe 7: Untersuchung eines Regelkreises und seiner Komponenten

Gegeben sei der folgende Regelkreis:



1. Untersuchung des Reglers.
   a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Reglers.
   b) Ermitteln Sie anhand der Übertragungsfunktion, ob der Regler ein stabiles Übertragungsverhalten aufweist.
   c) Um was für einen Regler handelt es sich?
2. Untersuchung des Regelstrecke
   a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion der Regelstrecke.
   b) Ermitteln Sie anhand der Übertragungsfunktion, ob die Strecke ein stabiles Übertragungsverhalten aufweisen kann.
   c) Berechnen Sie die Gleichung der Übergangsfunktion der Regelstrecke und zeichnen sie deren prinzipiellen Verlauf. Benutzen Sie für die Rechnung die Abkürzungen $T_1' = 1/T_1$ und $T_2' = 1/T_2$.
3. Untersuchung des Regelkreises.
   a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion der offenen Kette $G_0(s)$.
   b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom des geschlossenen Regelkreises.
   c) Prüfen Sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums für welche Reglerverstärkungen der Regelkreis mit den Parametern $T_1 = 2$, $T_2 = 3$ und $T_N = 1$ stabil arbeitet.

Simulationsergebnis: