

Frequenzganganalyse

Das Arbeitsziel ist die experimentelle Ermittlung des Übertragungsverhaltens eines unbekannten Übertragungsgliedes im Frequenzbereich.

1. Versuchsaufbau

Erregt man den Eingang eines linearen Systems mit einer sinusförmigen Schwingung

$$x_e = \hat{x}_e \cdot e^{j\omega t},$$

so ist das Ausgangssignal dieses Systems ebenfalls eine sinusförmige Schwingung

$$x_a = \hat{x}_a \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = \hat{x}_a \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi},$$

die sich jedoch in Betrag und Phase von der Eingangsschwingung unterscheiden kann:

Dieses Phänomen wird durch den sogenannten Frequenzgang beschrieben. Dieser ist eine komplexe Funktion der Kreisfrequenz ω und beschreibt das Verhältnis

$$\frac{x_a(j\omega)}{x_e(j\omega)} = G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\varphi}$$

zwischen sinusförmigem Ausgangs- und sinusförmigem Eingangssignal eines linearen Übertragungsgliedes, nach einem Übergangsverhalten, also im eingeschwungenen Zustand.

Der Frequenzgang besteht aus

dem Amplitudengang

$$|G(j\omega)| = \frac{\hat{x}_a(j\omega)}{\hat{x}_e(j\omega)}$$

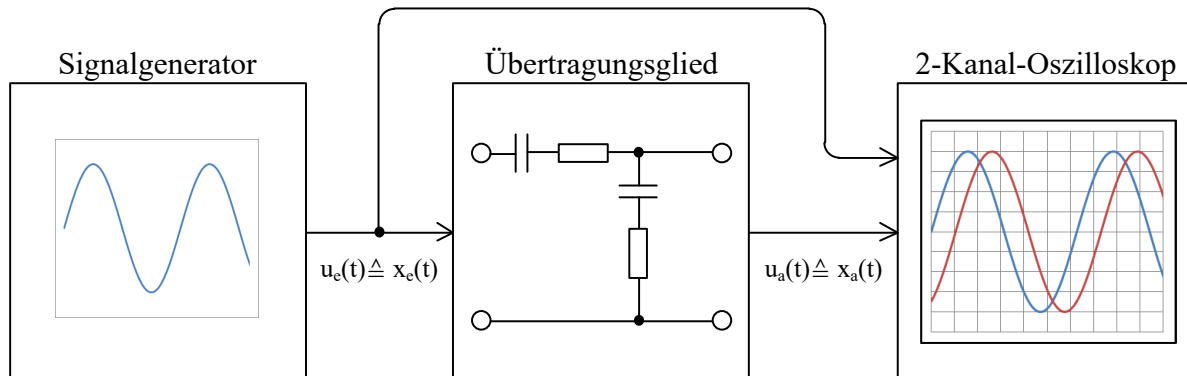
und dem Phasengang

$$\varphi(j\omega) = \arctan \frac{\text{Im}[G(j\omega)]}{\text{Re}[G(j\omega)]}.$$

Der Amplitudengang ist der Quotient der Amplituden von Ausgangs- und Eingangssignal bei einer bestimmten Kreisfrequenz ω , der Phasengang die zugehörige Phasenverschiebung.

Die logarithmische Darstellung von Amplituden- und Phasengang bezeichnet man als Bode-Diagramm. Betrachtet man Amplituden- und Phasengang als Länge und Winkel eines Zeigers, bei einer bestimmten Kreisfrequenz ω , so erhält man als grafische Darstellung die Ortskurve des Frequenzgangs in der komplexen Zahlenebene.

Die Abbildung zeigt den Aufbau des Praktikumsversuches.



Hierbei wird der Signalverlauf von x_e auf der x-Achse und von x_a auf der y-Achse des Oszilloskopbildschirmes dargestellt. Dadurch erhält man eine sogenannte Lissajous-Figur. Da x_e und x_a dieselbe Frequenz besitzen, hat diese die Form einer Ellipse, die bei $\varphi = 90^\circ$ zu einem Kreis oder bei $\varphi = 0^\circ$ zu einer Geraden wird.

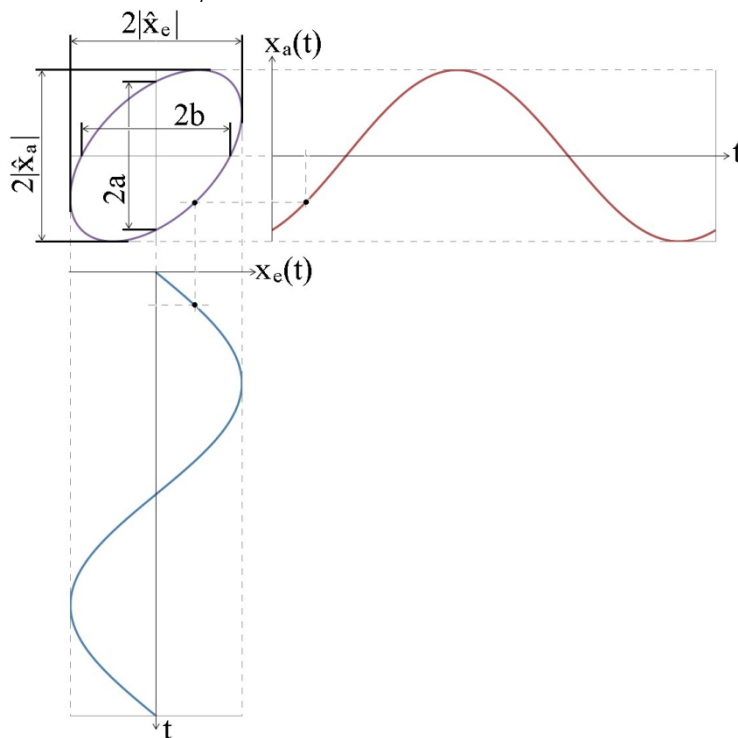


Abbildung 2-1: Entstehung der Lissajous-Figur, durch die Elimination der Zeitinformation aus den Signalverläufen von Eingangs- und Ausgangssignal.

Der Lichtpunkt befindet sich genau auf der x_a -Achse, wenn gilt

$$x_e(t) = \hat{x}_e \cdot \sin \omega t = 0. \quad (1)$$

Dies geschieht immer dann, wenn $\omega t = k \cdot \pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) ist. In diesem Fall gilt ebenso

$$\sin \omega t = 0 \quad \text{und} \quad |\cos \omega t| = 1. \quad (2)$$

Unter Berücksichtigung der Phasenverschiebung φ ergibt sich das Ausgangssignal $x_a(t)$ aus

$$x_a(t) = \hat{x}_a \cdot \sin(\omega t + \varphi). \quad (3)$$

Formt man diesen Term um, erhält man:

$$x_a(t) = \hat{x}_a \cdot (\sin \omega t \cdot \cos \varphi + \cos \omega t \cdot \sin \varphi). \quad (4)$$

Betrachtet man wiederum den Fall, dass der Lichtpunkt genau auf der x_a -Achse liegt, so gilt auch hier Gleichung (2), womit sich Gleichung (4) wie folgt vereinfacht:

$$|x_a(t)| = |\hat{x}_a| \cdot (0 + |\sin \varphi|) = |\hat{x}_a| \cdot |\sin \varphi| = a \quad (5)$$

Daraus folgt:

$$|\sin \varphi| = \frac{|x_a(t)|}{|\hat{x}_a|} = \frac{a}{|\hat{x}_a|} = \frac{2 \cdot a}{2 \cdot |\hat{x}_a|} \quad (6)$$

Wie in Abbildung 2-2 dargestellt, entnimmt man also dem Oszilloskopbild für jede eingestellte Frequenz aus der Lissajous-Figur die Größen $2 \cdot |\hat{x}_e|$, $2 \cdot |\hat{x}_a|$ sowie $2 \cdot a$ und erhält für den aktuellen Wert des Amplitudengangs

$$|G(j\omega)| = \frac{2 \cdot |\hat{x}_a|}{2 \cdot |\hat{x}_e|}$$

sowie für den Phasengang

$$|\sin \varphi| = \frac{2 \cdot a}{2 \cdot |\hat{x}_a|} = \frac{2 \cdot b}{2 \cdot |\hat{x}_e|}.$$

☞ Diese Rechnung sollten sie zu Übungszwecken nachvollziehen.

2. Versuchsvorbereitung

☞ Das Kolloquium zur Versuchsvorbereitung erfolgt mündlich in der Gruppe, ohne Unterlagen.

1. Was ist ein Frequenzgang?
2. Was ist ein Bode-Diagramm? Weshalb werden die Abszissen darin logarithmisch dargestellt?
3. Wozu dient die Frequenzganganalyse? Welche Eigenschaften eines dynamischen Systems lassen sich aus seinem Frequenzgang ableiten?
4. Worin unterscheidet sich eine *Asymptote* von einer *Tangente*?
5. Wie ermittelt man die Verstärkung und die Knickfrequenzen im Amplitudengang? Welche konkreten Anstiege (db/Dekade) dürfen Asymptoten im Amplitudengang haben?
6. Wie lassen sich Kennwerte und die Stabilität eines Systems aus seiner Ortskurve bestimmen?

Wichtig: Für den Versuch sind mitzubringen: Taschenrechner, Polarkoordinatenpapier und halblogarithmisch geteiltes Papier.

3. Versuchsdurchführung

Für den Frequenzbereich¹ $10^1 \text{ s}^{-1} < \omega < 10^5 \text{ s}^{-1}$ sind die Amplituden- und Phasenkennlinie des komplexen Frequenzganges und die Ortskurve zu ermitteln. Unter Verwendung der am Arbeitsplatz ausgelegten Arbeitsblätter ist das Übertragungsverhalten des untersuchten Übertragungsgliedes quantitativ zu bestimmen.

Verwenden sie zur Erfassung der Messwerte die angehangene Tabelle.

Verschaffen Sie sich vor der eigentlichen Messung ein erstes Bild über das Verhalten des Übertragungsgliedes. Beobachten Sie dazu die Lissajous-Figur, während Sie den gesamten vorgegebenen Frequenzbereich zügig in groben Schritten „durchfahren“; achten Sie dabei besonders auf Frequenzbereiche, in denen sich die Lissajous-Figur stark ändert!

Am Ende des Versuchs sind vorzulegen:

- Bode-Diagramm und Ortskurve
- Kennwerte des Übertragungsgliedes
- Frequenzganggleichung $G(\omega)$ mit konkreten Werten für Streckenverstärkung und Zeitkonstanten

¹ Falls das Übertragungsglied Nr. 7 untersucht werden soll, ist die Messung im Frequenzbereich $10^2 \text{ s}^{-1} < \omega < 10^6 \text{ s}^{-1}$ durchzuführen!

[illegible]

[EAH-ET/RTP03; Verfasser Prof. Dr. Morgeneier
V. 22W; 11.11.2022