

Skriptum zur Vorlesung Regelungstechnik

Bachelorstudiengänge ET, BT, FT, MT, ME

Prof. Dr.-Ing. habil. Klaus-Peter Döge

7. Mai 2024

Inhalt der Vorlesung

I Die Regelstrecke	5
Thema 1: Aufbau und Wirkungsweise einer Regelung	7
Thema 2: Lösung von Differentialgleichungen mittels Laplace-Transformation	8
Thema 3: Mathematische Grundlagen, Übung 1	14
Thema 4: Modellbildung mittels DGL und Laplace-Transformation	15
Thema 5: Rechnen mit Übertragungsfunktionen	17
Thema 6: Frequenzgang, Ortskurve des Frequenzgangs und Bode-Diagramm	20
Thema 7: Übertragungsglieder	23
Thema 8: Testsignale	32
II Der Regler	35
Thema 9: Der PID-Regler	37
III Der Regelkreis	41
Thema 10: Regelkreisstruktur	43
Thema 11: Führungs- und Störverhalten	45
Thema 12: Regelabweichung	49
Thema 13: Das Hurwitz-Verfahren	54
Thema 14: Das Nyquist-Verfahren	57
Thema 15: Einstellregeln	61
Thema 16: Modellbildung	64
IV Anhänge	65
Anhang 1: Realisierung von Übertragungsgliedern mittels Operationsverstärkern	67
Anhang 2: Bode-Diagramme	74
Anhang 3: Übergangs- und Gewichtsfunktionen	76
Anhang 4: Empfohlene Studienliteratur	78
Anhang 5: Übungsaufgaben	79

Teil I

Die Regelstrecke

Thema 1: Aufbau und Wirkungsweise einer Regelung

Lernziele:

- Kenntnis der Übertragungsglieder und Signale im Regelkreis,
- Fähigkeit das Zusammenwirken der Signale und Übertragungsglieder zu erläutern.

Material zur Vorbereitung und zum Selbststudium:

- youtube-Video von hawa0643, Regelungstechnik-Tutorial 01,
- Unterabschnitt 4.1 im Lehrbuch bis zur Abbildung 4.2 „Blockschalbild des Standard-Regelkreises“.

Material zur Vorlesung:

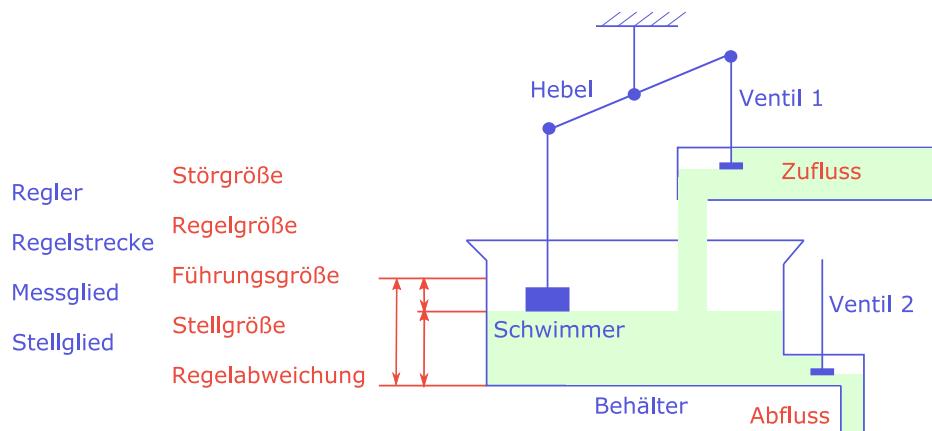


Abbildung 1: Regelung des Füllstandes eines Flüssigkeitsbehälters mit Abfluss

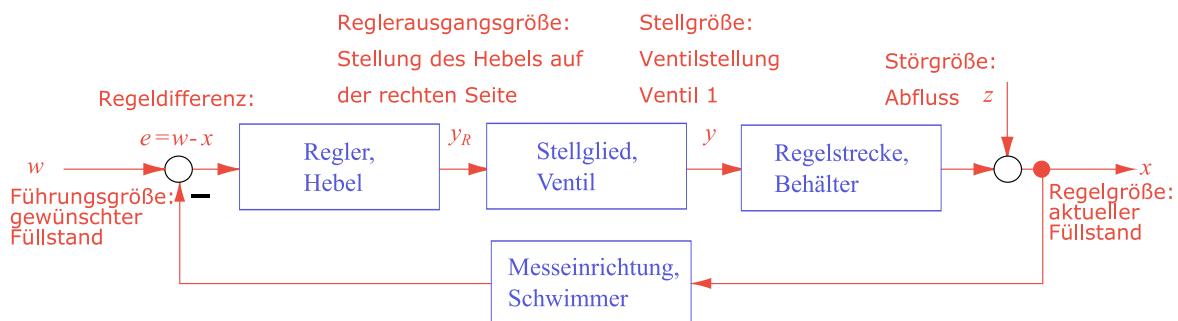


Abbildung 2: Blockschaltbild der Füllstandsregelung

Thema 2: Lösung von Differentialgleichungen mittels Laplace-Transformation

Lernziele:

- Sie sind in der Lage eine lineare Differentialgleichung in den Bildbereich der Laplace-Transformation zu überführen,
- diese Gleichung in den Bildbereich zu transformieren,
- dort zu lösen, sowie
- diese Lösung mittels Partialbruchzerlegung (PBZ) in den Zeitbereich zurück zu transformieren.

Material zur Vorbereitung und zum Selbststudium

- Beispiel Seite 15 im Lehrbuch, und
- Beispiel Seite 17 im Lehrbuch, im jeweils ab dem Ansatz zur PBZ. Was es mit den Übertragungsfunktionen auf sich hat, lernen wir später kennen. Hier geht es zunächst nur um das Rechenschema der PBZ.

Material zur Vorlesung:

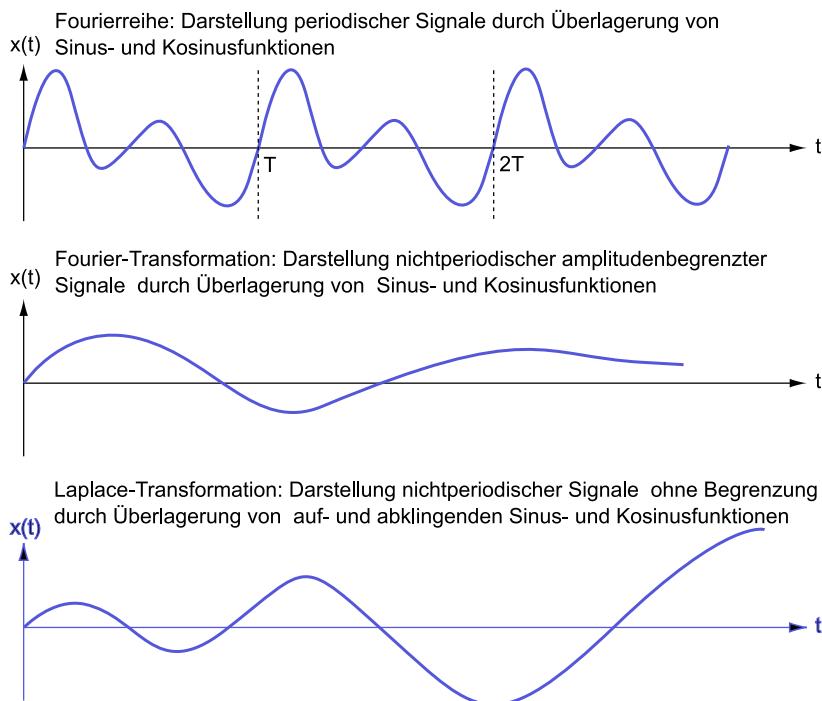


Abbildung 3: Zusammenhang zwischen den Transformationen

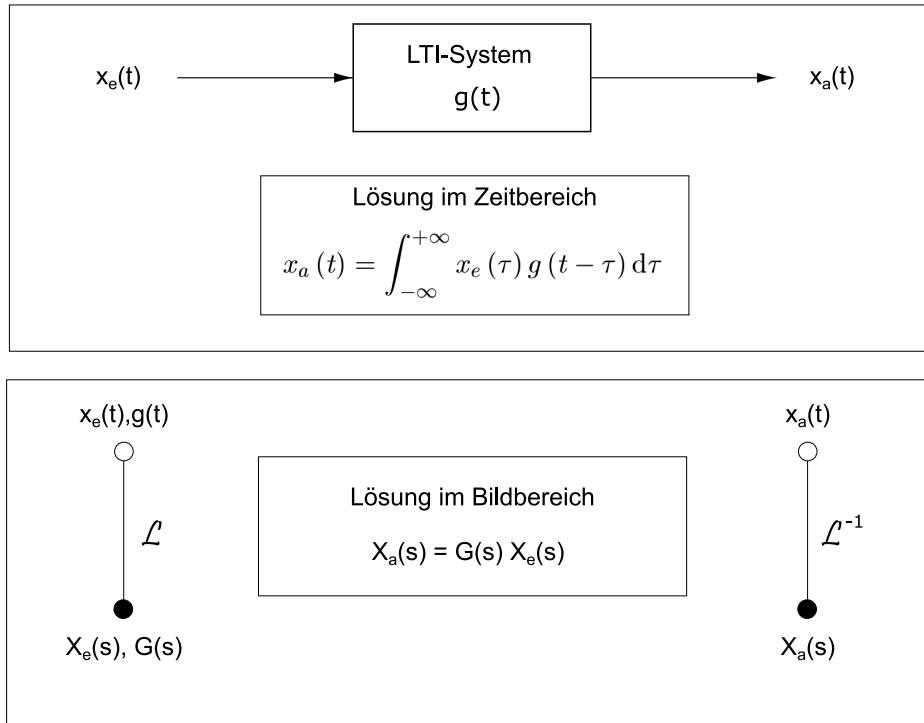


Abbildung 4: Anwendungsschema der Laplace-Transformation am Beispiel der Berechnung des Ausgangssignals eines LTI-Systems für ein beliebiges Eingangssignal.

Die Laplace-Transformation eines Signals $f(t)$ erfolgt durch Lösung des Laplace-Integrals

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Die Laplace-Rücktransformation des Signals $F(s)$ erfolgt durch Lösung des Laplace-Umkehrintegrals

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) e^{st} ds.$$

Ein einfaches Beispiel zur Lösung des Laplace-Integrals

Um die Berechnung komplizierterer Integrale zu vermeiden, werden eine Transformationstabelle und Rechenregeln benutzt.

Transformationstabelle

$x(t)$	$X(s)$
$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	1
$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$

Rechenregeln

$$\text{Linearitätssatz} \quad \mathcal{L}\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = aX_1(s) + bX_2(s)$$

$$\text{Differentiationssatz} \quad \mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = sX(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} = s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\text{Integrationssatz} \quad \mathcal{L}\left\{\int_0^\infty x(t) dt\right\} = \frac{1}{s}X(s)$$

$$\text{Verschiebungssatz} \quad \mathcal{L}\{x(t-\tau)\} = X(s)e^{-s\tau}$$

$$\text{Faltungssatz} \quad \mathcal{L}\{x_1(t)\} \cdot \mathcal{L}\{x_2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t-\tau)x_2(\tau) d\tau$$

$$\text{Endwertsatz} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

Lösung einer Differentialgleichung 1. Ordnung

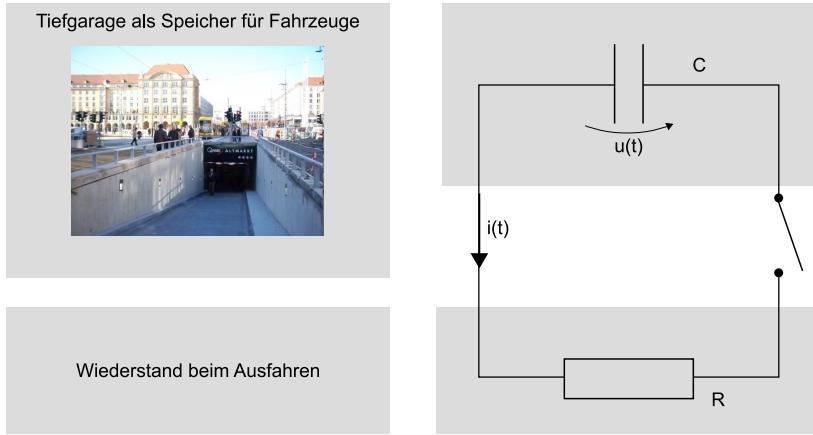


Abbildung 5: Leerung einer Tiefgarage als Anwendungsbeispiel zur Laplace Transformation.

Den inhaltlichen Zusammenhang zwischen der Abbildung auf der Folie und dem elektrischen Netzwerk werden wir in der Vorlesung besprechen. Unabhängig davon lässt sich die Differentialgleichung für die gezeigte Entladung eines Kondensators über einen ohmschen Widerstand wie folgt herleiten:

$$u_C + u_R = 0$$

$$\frac{1}{C} \int idt + R \cdot i = 0$$

Mit

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad dq = i \cdot dt, \quad q = \int idt$$

folgt

$$\frac{1}{C}q + R\dot{q} = 0, \quad \text{bzw. } RC\dot{q} + q = 0.$$

Die Differentialgleichung

$$q + RC\dot{q} = 0, \quad q(0) \neq 0$$

soll gelöst werden. Da es sich um eine homogene DGL 1. Ordnung handelt, ist die Lösung

$$y(t) = y(0) e^{-at}$$

aus den Grundlagen der Mathematik bekannt, soll hier aber nicht benutzt, sondern hergeleitet werden, um das Prinzip der Lösung mittels Laplace-Transformation an einem einfachen Beispiel zu erläutern. Die gesamte Differentialgleichung wird Laplace-transformiert:

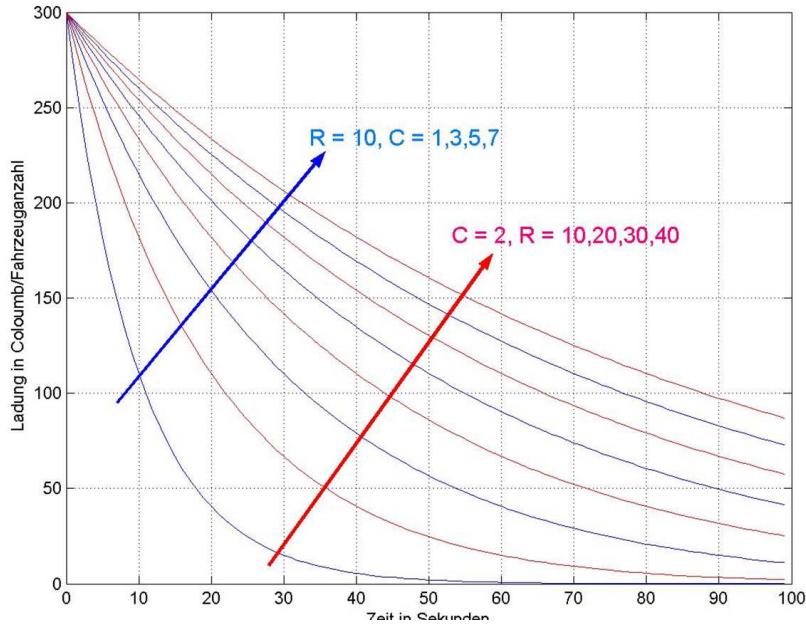


Abbildung 6: Simulation des Ergebnisses.

Lösung einer Differentialgleichung 2. Ordnung

Wenn, wie im vorigen Beispiel, die Korrespondenztabelle nicht direkt anwendbar ist, dann müssen mittels Partialbruchzerlegung einfachere Terme erzeugt werden. Damit beschäftigt sich das zweite Beispiel.

Die Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + y = 9e^{2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

soll gelöst werden und wird deshalb in den Bildbereich der Laplace-Transformation transformiert:

$$(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 2(sY(s) - y(0)) + Y(s) = \frac{9}{s-2}$$

Da die Lösung eine Gleichung für $y(t)$ ist, wird nach $Y(s)$ umgestellt.

$$Y(s) = \frac{s+7}{(s^2 + 2s + 1)(s-2)}$$

An dieser Stelle erkennt man, dass die entstandene Struktur in unserer Transformations-tabelle nicht vorkommt. Deshalb wird die Partialbruchzerlegung angewandt, um einfache Terme zu erhalten. Die Bildfunktion besitzt eine doppelte reelle Polstelle bei -1 und eine einfache reelle Polstelle bei $+2$. Daraus folgt der Ansatz

$$\frac{s+7}{(s^2 + 2s + 1)(s-2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s-2},$$

wobei A und B zur doppelten Polstelle gehören, und C zur einfachen Polstelle. Die Unbekannten A , B und C werden durch Einsetzen oder Koeffizientenvergleich berechnet, und man erhält $A = -1$, $B = -2$ und $C = +1$. Eingesetzt erhält man

$$\frac{-1}{s+1} + \frac{-2}{(s+1)^2} + \frac{1}{s-2}.$$

Diese Terme lassen sich mit Hilfe der Korrespondenztabelle rücktransformieren, und man erhält

$$y(t) = -(2t + 1)e^{-t} + e^{2t}.$$

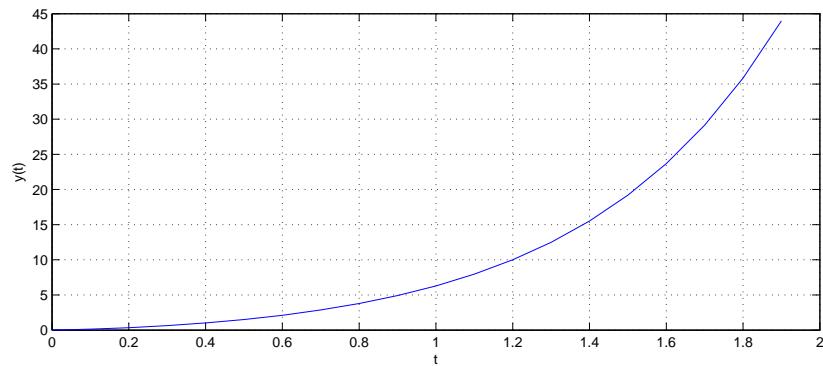


Abbildung 7: Darstellung des Ergebnisses.

Thema 3: Mathematische Grundlagen, Übung 1

Lernziele:

- Grundkenntnisse zur Rechnung mit komplexen Zahlen,
- Fähigkeit die Partialbruchzerlegung für einfache und mehrfache reelle Polstellen anzuwenden,
- Wiederholung bzw. Einstieg in das Thema „Laplace-Transformation“.

Material zur Vorbereitung und zum Selbststudium:

- Kapitel 1 im Lehrbuch,
- Mathematische Grundlagenliteratur (Papula) nach Bedarf,
- Laplace-Transformation allgemein: youtube-Videos der Hochschule Ruhr-West, LaplaceTransformation #1 Grundlagen, LaplaceTransformation #2 Eigenschaften, LaplaceTransformation #3 Ableitungen, LaplaceTransformation #4 Lösung von Differentialgleichungen.

Material zur Vorlesung:

Zur Vorbereitung der Vorlesung, rechnen sie bitte die Übung 1 vollständig durch. Diese Übung enthält die wesentlichen mathematischen Zusammenhänge, die wir im Modul benötigen werden. Sollten sie an einer Stelle nicht weiterkommen, dann bereiten sie konkrete Fragen vor.

Thema 4: Modellbildung mittels DGL und Laplace-Transformation

Lernziele:

- Erlangen der Fähigkeit den Bezug realer Systeme zu einer allgemeine linearen Differentialgleichung zu erklären,
- Verstehen, wie die Übertragungsfunktion aus der allgemeinen Differentialgleichung hergeleitet wird,
- Erlangen eines ersten Verständnisses für das Ablesen der Systemeigenschaften „Stabilität“, „Schwingungsfähigkeit“ und „Sprungfähigkeit“ aus der Übertragungsfunktion.

Material zur Vorbereitung und zum Selbststudium:

- Einleitungstext im Lehrbuch Kapitel 2,
- Differentialgleichung, Unterkapitel 2.1 im Lehrbuch sowie
- Übertragungsfunktion, Unterkapitel 2.2 im Lehrbuch.

Material zur Vorlesung:

Die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{X_a(s)}{X_e(s)}$$

eines Systems ist definiert als Quotient von Ausgangs- und Eingangssignal im Bildbereich
Aus der allgemeingültigen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n}{dt^n} x_a(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x_a(t) + \dots + a_1 \frac{d}{dt} x_a(t) + a_0 x_a(t) = \\ b_m \frac{d^m}{dt^m} x_e(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} x_e(t) + \dots + b_1 \frac{d}{dt} x_e(t) + b_0 x_e(t) \end{aligned}$$

erhält man eine allgemeingültige Form der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}.$$

Der Rechenweg ist in diesem Video „Übertragungsfunktion aus der Differentialgleichung im Zeitbereich in den Bildbereich“ gezeigt: <https://www.youtube.com/watch?v=YIE9k-tBxIE>.

In Analogie zur Differentialgleichung erhält man durch die Wahl der Koeffizienten a_i und b_j spezielle Übertragungsfunktionen. Die Übertragungsfunktion ist eine gebrochen rationale Funktion, für deren Verhältnis von Zähler- und Nennergrad gilt:

- $m < n$, System ist nicht sprungfähig, $x_a(t)$ reagiert verzögert auf $x_e(t)$,
- $m = n$, System ist sprungfähig, $x_a(t)$ reagiert gleichzeitig mit $x_e(t)$,
- $m > n$, System ist nicht realisierbar, $x_a(t)$ reagiert vor $x_e(t)$.

Auch für die technische Realisierung gibt es eine Parallele zur Differentialgleichung: Der Grad des Nennerpolynoms entspricht der Anzahl, der im System vorhandenen Energiespeicher. Systeme mit P-, oder das D-Verhalten besitzen somit keinen Energiespeicher, Systeme mit PT₁- oder I-Verhalten jeweils einen Energiespeicher, und ein System mit PT₂-Verhalten, zwei Energiespeicher.

Außerdem lassen sich aus der Übertragungsfunktion Aussagen zur Stabilität und Schwingungsfähigkeit ableiten: Haben alle Nullstellen des Nennerpolynoms

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

einen negativen Realteil, dann beschreibt $G(s)$ eine stabiles Übertragungssystem. Besitzt das Nennerpolynom von $G(s)$ konjugiert-komplexe Polstellen, dann beschreibt $G(s)$ ein schwingungsfähiges Übertragungssystem.

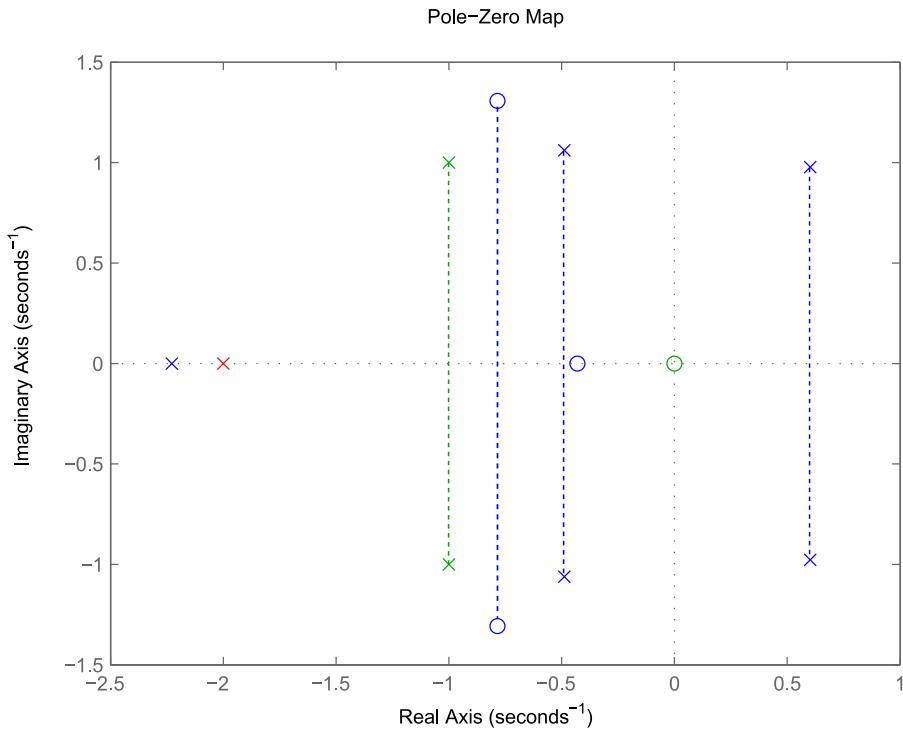


Abbildung 8: Beispiele für den Pol- Nullstellenplan.

Variante blau:

$$G(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 3s + 1}{s^5 + 2s^4 + s^3 + 3s^2 + s + 4}$$

Variante grün:

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 4}$$

Variante rot:

$$G(s) = \frac{5}{s + 2}$$

Thema 5: Rechnen mit Übertragungsfunktionen

Lernziele:

- Fähigkeit die Übertragungsfunktionen der drei Grundstrukturen Reihenschaltung, Parallelschaltung und Rückführschaltung von Übertragungsgliedern herzuleiten,
- Gleichungen dieser Übertragungsfunktionen als Faktenwissen einprägen.

Material zur Vorlesung: In Abbildung 2 haben wir das Blockschaltbild einer Regelung kennen gelernt. Der Zugang zu dieser Art der Darstellung war intuitiv, und dadurch gegeben, dass die Teilsysteme Regler, Strecke usw. so verbunden sind, wie es auch in der Praxis der Fall ist. Neben dem intuitiven Zugang, gibt es auch Fakten und Vereinbarungen, die jetzt zusammengefasst werden.

Das Blockschaltbild

- beschreibt die Struktur eines LTI-Systems weitgehend unabhängig von den Systemparametern,
- zeigt, welche Signale verkoppelt sind,
- wo Rückkopplungen auftreten und
- ist ein Strukturmodell, vermittelt Verständnis für die generelle Funktionsweise, da Teilsysteme erkennbar sind.

Die Pfeile

- repräsentieren zeitveränderliche Größen,
- der Pfeilanfang zeigt des Entstehungsort des Signals und
- das Pfeilende zeigt den Wirkungsort des Signals.

Die Blöcke

- sind rückwirkungsfreie Verarbeitungseinheiten und
- können Differentialgleichungen oder Übertragungsfunktionen repräsentieren. In unseren Anwendungen sind es i.d.R. Übertragungsfunktionen.

Im Folgenden werden wir das Rechnen mit Übertragungsfunktion in den drei grundlegenden Strukturen des Blockschaltbildes

- Reihenschaltung, auch Kettenschaltung genannt,
- Parallelschaltung und
- Rückführschaltung

kennen lernen.

Reihenschaltung

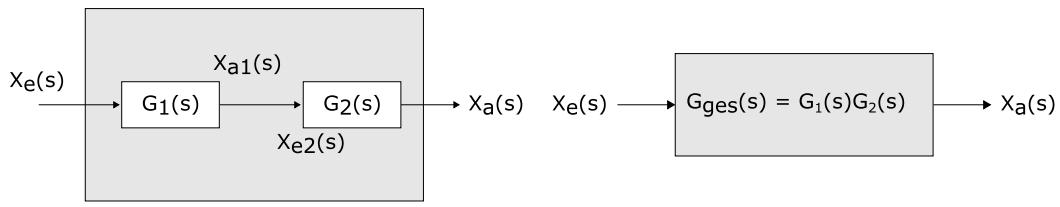


Abbildung 9: Reihenschaltung von Übertragungsgliedern.

Parallelschaltung

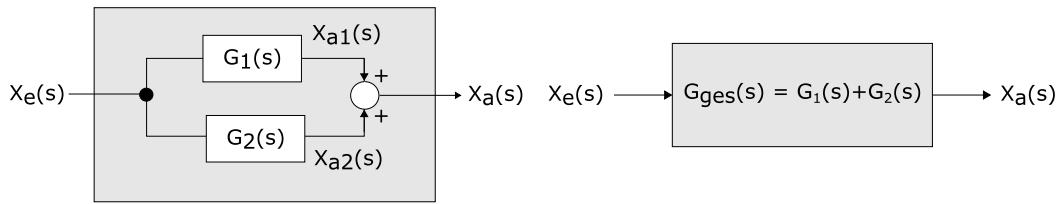


Abbildung 10: Parallelschaltung von Übertragungsgliedern.

Rückführschaltung

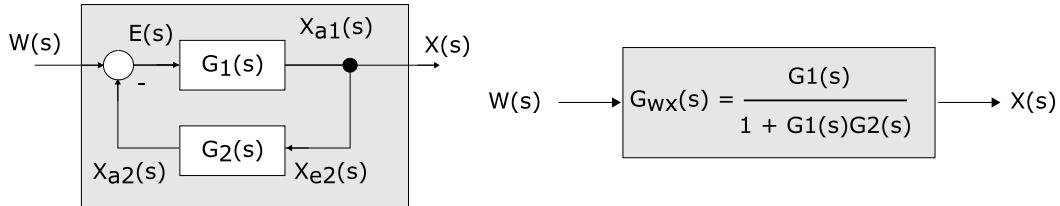


Abbildung 11: Rückführschaltung von Übertragungsgliedern.

Übertragungsfunktion des offenen und geschlossenen Regelkreises

Das Thema „Übertragungsfunktion des offenen und geschlossenen Regelkreises“ ist im Lehrbuch in Kapitel 4.1 dargestellt. Hier die Zusammenfassung des Inhaltes: Die soeben behandelte Übertragungsfunktion der Rückführschaltung ist gleichzeitig die Übertragungsfunktion des Regelkreises. Sie wird als

$$G_{WX}(s) = \frac{X(s)}{W(s)}$$

bezeichnet, da die Führungsgröße auf die Regelgröße abgebildet wird. Ein offener Regelkreis ohne Rückführung hat in unserem Beispiel die Übertragungsfunktion $G_1(s)$. Unter der Annahme, dass die Rückführung – also das Messglied – keine eigene Dynamik oder Verstärkung besitzt, gilt

$$G_2(s) = 1,$$

und man erhält

$$G_{WX}(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)}$$

In der Regelungstechnik gilt die Konvention die Übertragungsfunktion des offenen Kreises mit $G_0(s)$ zu bezeichnen. Damit gilt

$$G_{WX}(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}.$$

Diese Gleichung beschreibt den Zusammenhang zwischen offenem und geschlossenem Regelkreis, und ist für das weitere Verständnis von grundlegender Bedeutung.

Thema 6: Frequenzgang, Ortskurve des Frequenzgangs und Bode-Diagramm

Lernziele:

- Fähigkeit aus einer Übertragungsfunktion den Frequenzgang zu berechnen
- Verständnis, wie aus dem Frequenzgang die grafische Darstellung der Ortskurve abgleitet wird
- Verständnis dafür, wie die Ortskurve und das Bode-Diagramm ineinander überführt werden können

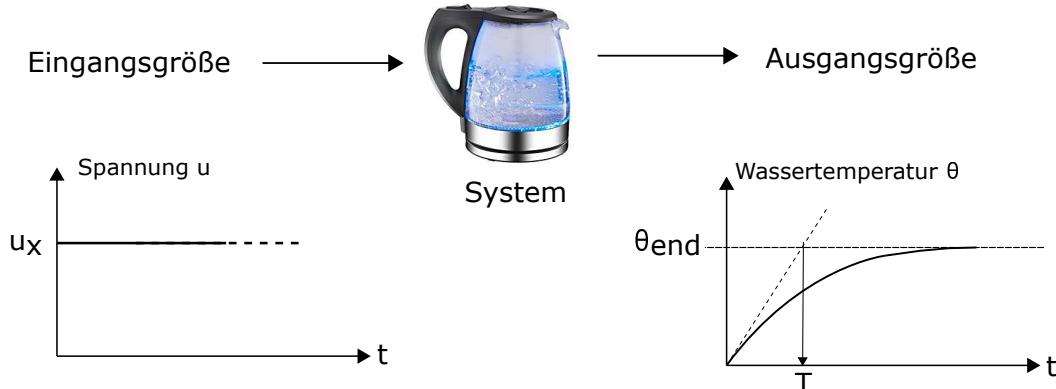
Material zur Vorbereitung und zum Selbststudium:

- Video <https://www.youtube.com/watch?v=lXJcOcc3IJU>, Jörg J. Buchholz, 2.5 Frequenzgang
- Kapitel 2.4 „Frequenzgang“ im Lehrbuch
- Kapitel 2.5 „Bode-Diagramm“ im Lehrbuch

Material zur Vorlesung:

Der Frequenzgang ist neben der bisher behandelten Differentialgleichung und der Übertragungsfunktion eine weitere Variante der mathematischen Modellbildung für technische Systeme. In unserem Fall also für Regler, Regelstrecken und Regelkreise. Der Frequenzgang ist wie folgt definiert:

Der Frequenzgang eines Übertragungssystems gibt das Verhältnis zwischen sinusförmigen Ausgangs- und sinusförmigen Eingangssignalen in komplexer Form für alle Kreisfrequenzen $\omega = 2\pi f$ an.



Gezeigt ist ein Wasserkocher als Beispiel für ein einfaches technisches System, dessen Ortskurve des Frequenzgangs ermittelt werden soll. Als Eingangsgröße wurde die Spannung gewählt, Ausgangsgröße ist das Zeitverhalten der Wassertemperatur nach Einschalten der Spannung. Welche Eingangs- und Ausgangsgrößen sind prinzipiell noch möglich?

Dem gezeigten Verlauf der Ausgangsgröße werden wir später das sogenannte PT_1 -Verhalten zuordnen, siehe auch Unterkapitel 3.4 im Buch. Somit handelt es sich im betrachteten Beispiel um ein Verzögerungsglied 1. Ordnung.

Zeichnen sie Ortskurve des Frequenzgangs. Für unsere Zwecke nicht unbedingt notwendig, aber mathematisch interessant ist es, durch probieren die ω zu ermitteln, mit denen sich

der Verlauf der Ortskurve schon prinzipiell erkennen lässt. Hierfür empfiehlt sich ein Funktionsplotter oder Excel. Wenn sie das nicht selbst herausfinden wollen, dann benutzen sie die folgenden Werte für die grafische Darstellung $\omega = 0,001; 0,002; 0,005; 0,01; 0,05; 1$.

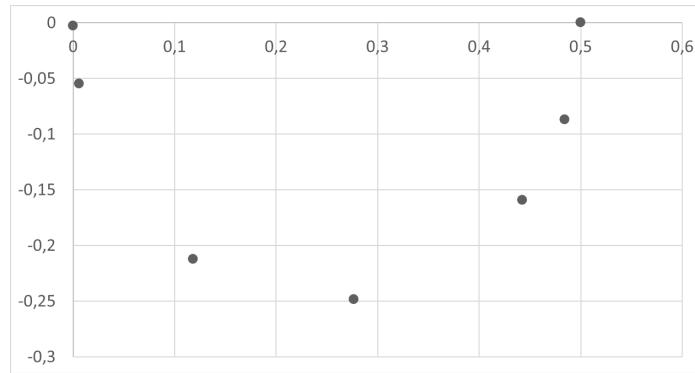


Abbildung 12: Grafische Darstellung der Ortskurve des Frequenzgangs.

Das Bode-Diagramm ist eine andere Art der grafischen Darstellung des Frequenzgangs. Hierbei werden der Betrag

$$|G(j\omega)|$$

und der Phasenwinkel

$$\arg\{G(j\omega)\}$$

des Frequenzgangs in getrennten Diagrammen über der Kreisfrequenz dargestellt. Für diese Darstellung gelten folgende Konventionen:

Darstellung von: Abszisse Ordinate

$$|G(j\omega)| \quad \log_{10} \omega \quad |G(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \lg |G(j\omega)|$$

$$\arg\{G(j\omega)\} \quad \log_{10} \omega \quad \arg\{G(j\omega)\}$$

Anwendung auf unser Beispiel:

Die Darstellung des Betrages bezeichnet man als Amplitudenfrequenzgang. Die zugehörige Gleichung berechnet sich aus

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{0,5}{1 + 180^2\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{-90\omega}{1 + 180^2\omega^2}\right)^2}$$

Die Darstellung der Phase bezeichnet man als Phasenfrequenzgang. Die zugehörige Gleichung lautet

$$\arg\{G(j\omega)\} = \arctan \frac{-90\omega}{0,5}.$$

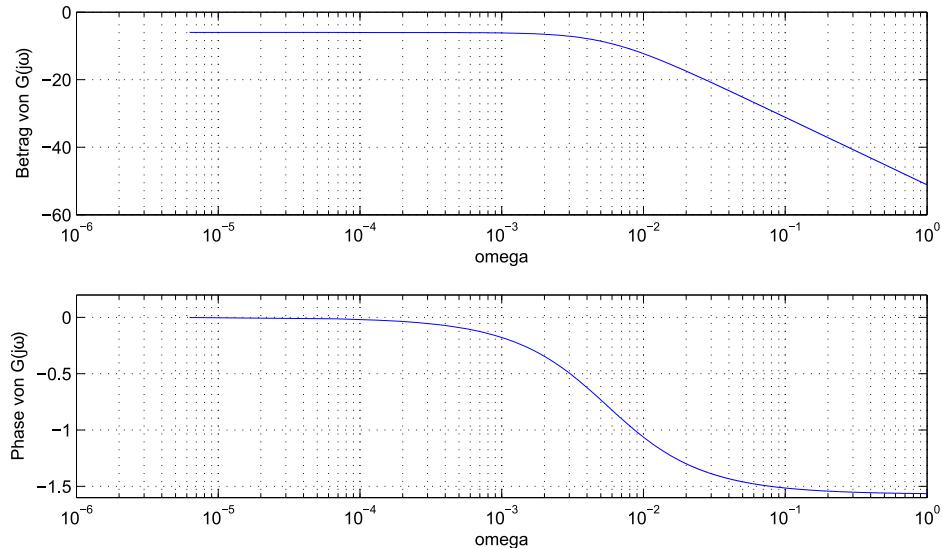


Abbildung 13: Grafische Darstellung von Amplitudenfrequenzgang und Phasenfrequenzgang im Bode-Diagramm

Thema 7: Übertragungsglieder

Lernziele:

- Anschauliche Vorstellung, wo sich das Übertragungsverhalten in der Praxis wiederfinden lässt,
- Kenntnis der Übertragungsfunktionen der behandelten Übertragungsglieder.

Material zur Vorbereitung und zum Selbststudium:

- P-Glied: Unterkapitel 3.1 im Lehrbuch
- PT1-Glied: Unterkapitel 3.4 im Lehrbuch
- PT2-Glied: Unterkapitel 3.5 im Lehrbuch
- I-Glied: Unterkapitel 3.2 im Lehrbuch
- IT1-Glied: Unterkapitel 3.7 im Lehrbuch
- D-Glied: Unterkapitel 3.3 im Lehrbuch
- DT1-Glied: Unterkapitel 3.7 im Lehrbuch
- Tt-Glied: Unterkapitel 3.6 im Lehrbuch

Material zur Vorlesung:

Das proportional wirkende Übertragungsglied (P-Glied)

Material für Vorbereitung und Selbststudium: Unterkapitel 3.1 im Lehrbuch
Proportionalglieder liefern ohne Zeitverzögerung eine zur Eingangsgröße proportionale Ausgangsgröße. Ein solches Verhalten findet man beispielsweise bei Hebeln, Zahnradgetrieben und Spannungsteilern. Die Beschreibung im Zeitbereich erfolgt durch die Gleichung

$$x_a(t) = k \cdot x_e(t).$$

Die zugehörige Übertragungsfunktion lautet

$$G(s) = k.$$

Das Verzögerungsglied 1. Ordnung (PT1-Glied)

Material für Vorbereitung und Selbststudium: Unterkapitel 3.4 im Lehrbuch
Besitzt das Proportionalglied ein ausgeprägtes Übergangsverhalten, d.h. die Zeitverzögerung ist nicht zu vernachlässigen, dann spricht man von einem Verzögerungsglied. Die Anzahl der Energiespeicher bestimmt hierbei die Ordnung des Systems. Das PT1-Glied besitzt also einen Energiespeicher. Beispiele sind die Erwärmung von Flüssigkeiten, und das Laden eines Kondensators. Die Beschreibung im Zeitbereich erfolgt durch die Gleichung

$$T\dot{x}_a(t) + x_a(t) = k \cdot x_e(t).$$

Die zugehörige Übertragungsfunktion lautet

$$G(s) = \frac{k}{1 + sT}.$$

Beispiel RL-Netzwerk, Reihenschaltung von Spule und ohmschen Widerstand.

Das Verzögerungsglied zweiter Ordnung (PT2)

Material für Vorbereitung und Selbststudium: Unterkapitel 3.5 im Lehrbuch

Ein System mit zwei Energiespeichern, dessen Übertragungsfunktion sich durch ein vollständiges Nennerpolynom darstellen lässt, bezeichnet man als PT2-Glied. Beispiele findet man bei schwingungsfähigen Systemen mit zwei Energiespeichern. Die Beschreibung im Zeitbereich erfolgt durch die Gleichung

$$T^2 \ddot{x}_a(t) + 2DT \dot{x}_a(t) + x_a(t) = k \cdot x_e(t).$$

Die zugehörige Übertragungsfunktion lautet

$$G(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2DTs + 1} \text{ bzw. } G(s) = \frac{k}{\frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{2D}{\omega_0} s + 1}.$$

Beispiel: (siehe auch Seite S. 55 im Lehrbuch)

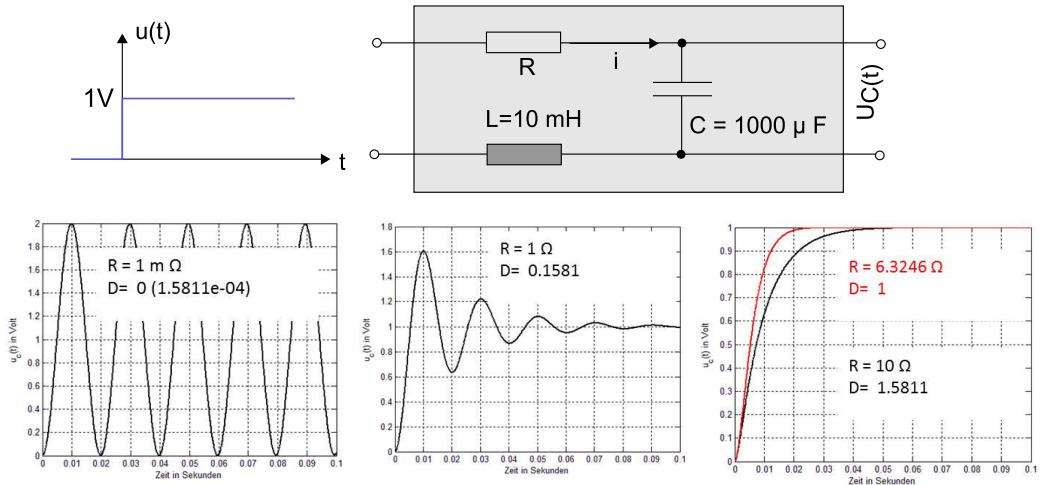


Abbildung 14: Realisierung eines PT2 als elektrisches System

Es soll der Zusammenhang zwischen $u(t)$ und $u_C(t)$ betrachtet werden.

$$\underbrace{LC}_{T^2} \ddot{u}_c(t) + \underbrace{RC}_{2DT} \dot{u}_c(t) + u_c(t) = \underbrace{1}_k u(t)$$

Berechnung der Dämpfung:

$$2DT = RC, T^2 = LC, D = \frac{1}{2} \frac{RC}{T} = \frac{1}{2} \frac{RC}{\sqrt{LC}}$$

$$D = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{10\Omega}{2} \sqrt{\frac{0.001F}{0.01H}} \approx 1,58 \underbrace{\frac{V}{A}}_{\text{Ohm}} \underbrace{\sqrt{\frac{As}{V}}}_{\text{Farad}} \underbrace{\sqrt{\frac{A}{Vs}}}_{1/\text{Henry}} \approx 1,58$$

Was bedeutet $D > 1$, und wie lässt sich die Dämpfung ändern?

Beispiel:

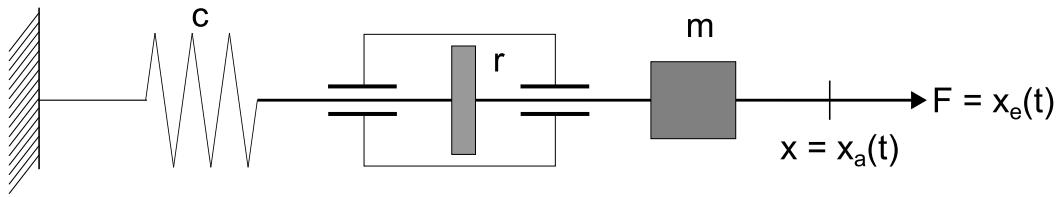


Abbildung 15: Realisierung eines PT2 als mechanisches System

$$m\ddot{x}_a(t) + r\dot{x}_a(t) + cx_a(t) = x_e(t)$$

Umwandeln in die Standardform:

$$\underbrace{\frac{m}{c}\ddot{x}_a(t)}_{T^2} + \underbrace{\frac{r}{2DT}\dot{x}_a(t)}_{2DT} + \underbrace{x_a(t)}_k = \underbrace{\frac{1}{c}x_e(t)}_k$$

Berechnung der Dämpfung:

$$2DT = \frac{r}{c} = 2D\sqrt{\frac{m}{c}}, D = \frac{1}{2}\frac{r}{c}\sqrt{\frac{c}{m}} = \frac{r}{2\sqrt{mc}}$$

Vergleich der beiden Beispiele:

Allgemeingültige Darstellung des PT2
$T^2\ddot{x}_a(t) + 2DT\dot{x}_a(t) + x_a(t) = k \cdot x_e(t)$
$G(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2Ds + 1}$
Darstellung des PT2 als elektrisches System
$\underbrace{LC}_{T^2}\ddot{u}_c(t) + \underbrace{RC}_{2DT}\dot{u}_c(t) + u_c(t) = \underbrace{1}_k u(t), \underbrace{D}_R = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}, \underbrace{T}_C = \sqrt{LC}, \underbrace{k}_k = 1$
Darstellung des PT2 als mechanisches System
$\underbrace{\frac{m}{c}\ddot{x}_a(t)}_{T^2} + \underbrace{\frac{r}{2DT}\dot{x}_a(t)}_{2DT} + \underbrace{x_a(t)}_k = \underbrace{\frac{1}{c}x_e(t)}_k, \underbrace{D}_R = \frac{r}{2\sqrt{mc}}, \underbrace{T}_C = \sqrt{\frac{m}{c}}, \underbrace{k}_k = \frac{1}{c}$

Abbildung 16: Vergleich des elektrischen und des mechanischen Systems

Mögliche Polstellen eines Verzögerungsgliedes zweiter Ordnung

Die Polstellen der Übertragungsfunktion bestimmen die Eigenschaften eines Systems. Das lässt sich besonders gut beim PT_2 verdeutlichen, weshalb wir jetzt ausgehend von der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{k}{\frac{1}{\omega_0^2}s^2 + \frac{2D}{\omega_0}s + 1}$$

die möglichen Polstellenlagen

$$s_{1,2} = -\omega_0 D \pm \omega_0 \sqrt{D^2 - 1}$$

des PT_2 -Gliedes betrachten. Tragen sie ausgehend, von der berechneten Gleichung, die möglichen Polstellenlagen in die Abbildung „Mögliche Polstellen eines Verzögerungsgliedes zweiter Ordnung“ ein.

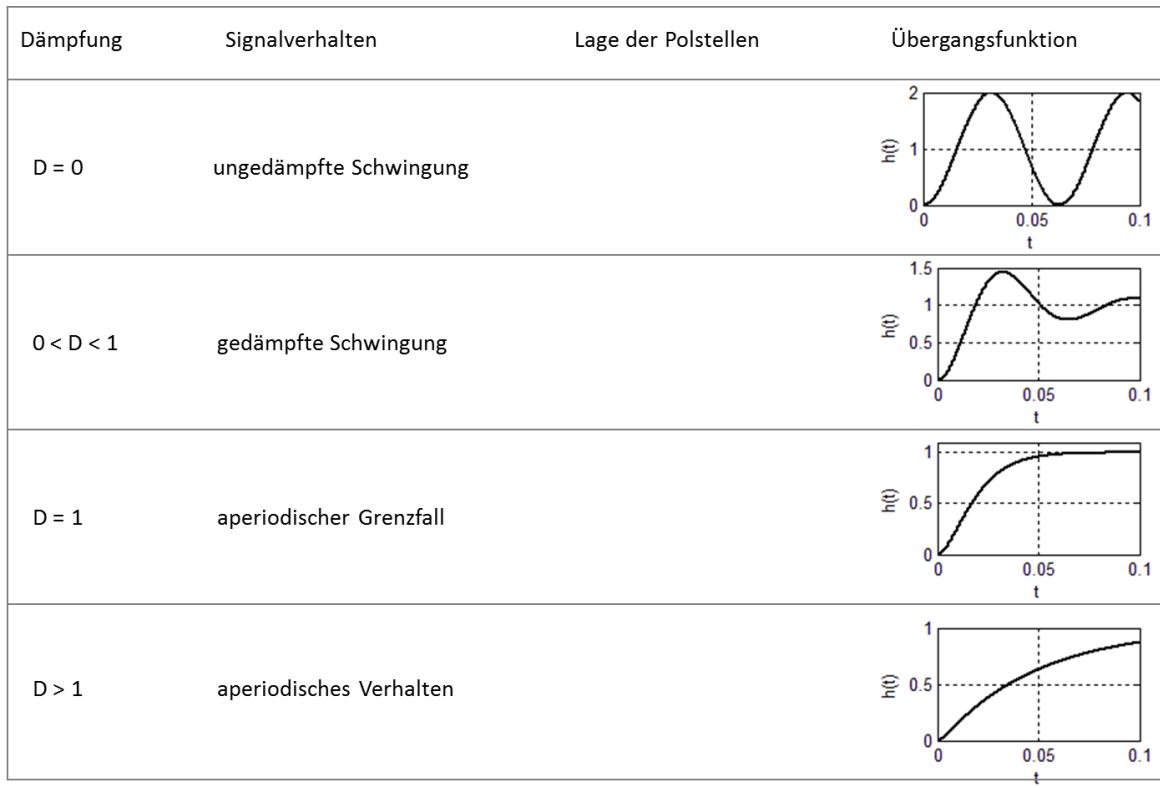


Abbildung 17: Mögliche Polstellen eines Verzögerungsgliedes zweiter Ordnung

Die Reihenschaltung von zwei PT1 Gliedern

Die Reihenschaltung von zwei PT_1 Gliedern ergibt immer ein nichtschwingungsfähiges PT_2 -Glied. Warum?

Da die Dämpfung immer einen Wert > 1 annimmt, handelt es sich um ein nichtschwingungsfähiges System.

Beweis:

$$\frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 T_2}} > 1$$

$$T_1 + T_2 > 2\sqrt{T_1 T_2}$$

$$(T_1 + T_2)^2 > 4T_1 T_2$$

$$T_1^2 + 2T_1 T_2 + T_2^2 > 4T_1 T_2$$

$$T_1^2 - 2T_1 T_2 + T_2^2 > 0$$

$$(T_1 - T_2)^2 > 0$$

q.e.d.

Das integrierende Übertragungsglied

Material für Vorbereitung und Selbststudium: Unterkapitel 3.2 im Lehrbuch

Bei einem integrierenden Übertragungssystem wächst die Ausgangsgröße beim Anliegen einer konstanten Eingangsgröße linear an. Beispiele sind die Bewegung einer Linearachse und das Füllen eines Behälters ohne Abfluss. Die Beschreibung im Zeitbereich erfolgt durch die Gleichung

$$x_a(t) = \frac{1}{T_I} \int x_e(t) dt.$$

Die zugehörige Übertragungsfunktion lautet

$$G(s) = \frac{1}{T_I s}.$$

Das integrierende Übertragungsglied mit Verzögerung (IT1-Glied)

Material für Vorbereitung und Selbststudium: Unterkapitel 3.7, Seite 60 im Lehrbuch
Durch Reihenschaltung von I- und PT1-Glied entsteht ein IT1-Glied. Hierbei erfolgt die Integration zeitverzögert. Die Beschreibung im Zeitbereich erfolgt durch die Gleichung

$$T_I T \ddot{x}_a(t) + T_I \dot{x}_a(t) = k x_e(t)$$

Die zugehörige Übertragungsfunktion lautet

$$G(s) = \frac{k}{T T_I s^2 + T_I s}.$$

Das differenzierende Übertragungsglied (D-Glied)

Material für Vorbereitung und Selbststudium: Unterkapitel 3.3 im Lehrbuch

Ein differenzierendes Übertragungsglied erstellt die Ausgangsgröße bei Änderung der Eingangsgröße. Somit nimmt die Ausgangsgröße bei konstanter Eingangsgröße den Wert Null an. Die Beschreibung im Zeitbereich erfolgt durch die Gleichung

$$x_a(t) = T_D \dot{x}_e(t).$$

Die zugehörige Übertragungsfunktion lautet

$$G(s) = T_D s.$$

Beispiel: Strom-Spannungs-Beziehung am Kondensator:

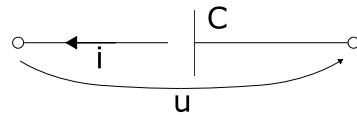


Abbildung 18: Kondensator als ideales D-Glied

Ändert sich die Spannung, dann fließt ein Strom

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

durch den Kondensator der Änderungsgeschwindigkeit der Spannung proportional ist. Diesen Proportionalitätsfaktor bezeichnet man als Kapazität C . Aus der Laplace-Transformierten der Differentialgleichung

$$I(s) = CU(s)s$$

erhält man die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = Cs,$$

die der Übertragungsfunktion

$$G(s) = T_D s$$

des D-Gliedes entspricht.

Das differenzierende Übertragungsglied mit Verzögerung (DT1-Glied)

Material für Vorbereitung und Selbststudium: Unterkapitel 3.7, Seite 59 im Lehrbuch. Werden ein D- und ein PT1-Glied in Reihe geschaltet, erhält man im Unterschied zum reinen D-Glied, eine technisch realisierbare Differentiation. Beispiele sind der Tachogenerator und die Strom-Spannungsbeziehung am realen Kondensator. Die Beschreibung im Zeitbereich erfolgt durch die Gleichung

$$T\dot{x}_a(t) + x_a(t) = kT_D \dot{x}_e(t).$$

Die zugehörige Übertragungsfunktion lautet

$$G(s) = kT_D \frac{s}{1 + Ts}.$$

Das Totzeitglied (Tt-Glied)

Material für Vorbereitung und Selbststudium: Unterkapitel 3.6 im Lehrbuch
Beim Totzeitglied wird das Ausgangssignal aus dem zeitverschobenen Eingangssignal gebildet. Beispiele sind Transportvorgänge. Die Beschreibung im Zeitbereich erfolgt durch die Gleichung

$$x_a(t) = kx_e(t - T_t).$$

Die zugehörige Übertragungsfunktion lautet

$$G(s) = ke^{-sT_t}$$

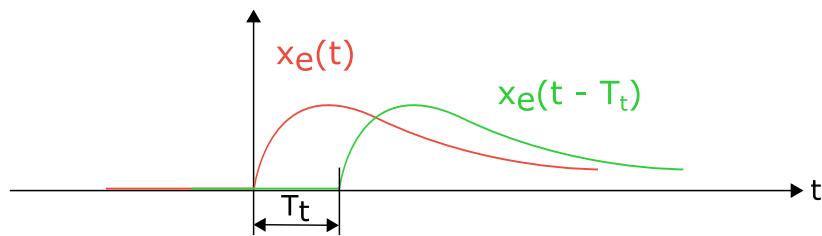


Abbildung 19: Signalverschiebung

Zum Schluss betrachten wir folgende Abbildung. Die dort gezeigte Struktur sollte jetzt verständlich sein.

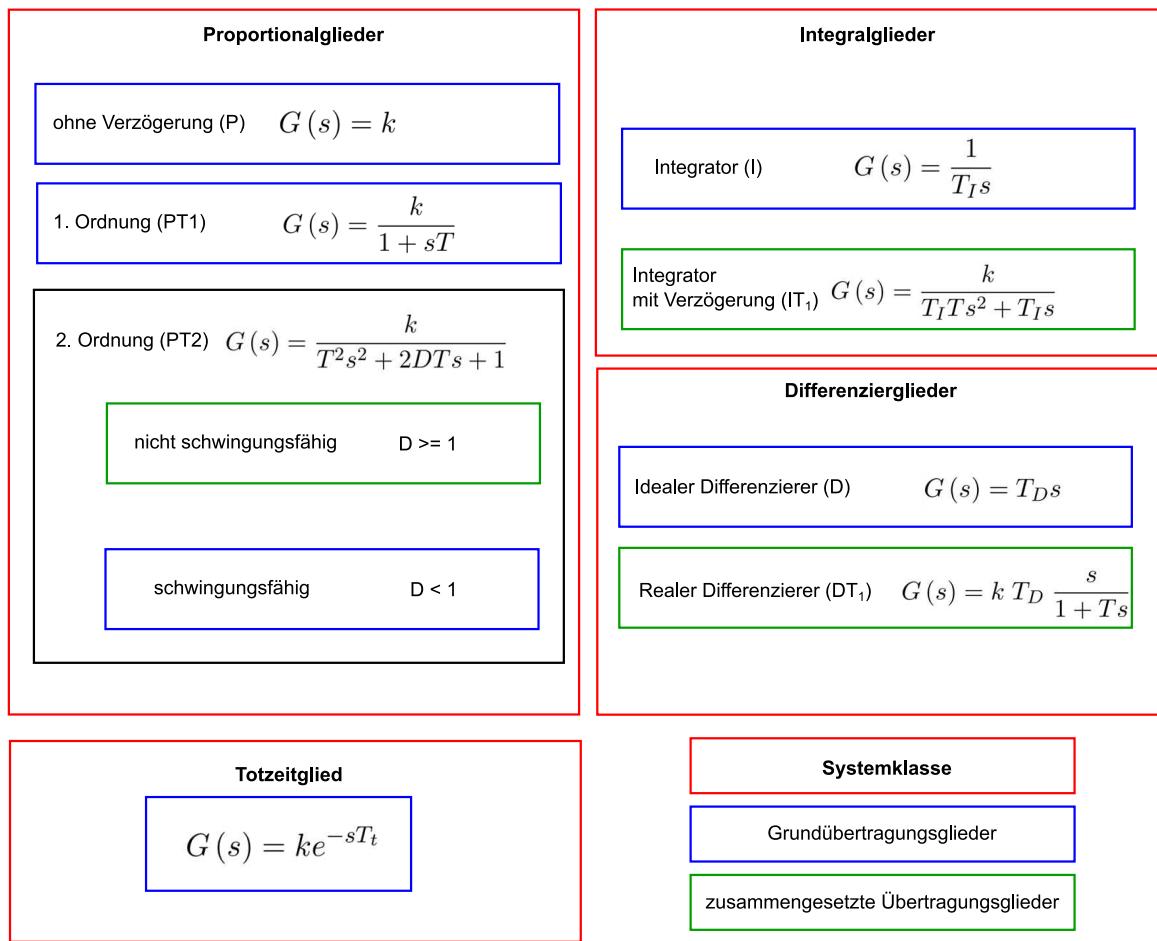


Abbildung 20: Zusammenfassung lineare Systemmodelle

Thema 8: Testsignale

Lernziele:

- Prinzipielles Verständnis, was Testsignale von anderen Signalen unterscheidet,
- Fähigkeit der mathematischen Modellierung von Sprungfunktionen und Impulsfunktionen im Zeit- und Bildbereich, sowie Berechnung von Sprung- und Impulsantworten im Zeit- und Bildbereich.

Material für Selbststudium und Vorbereitung: Kapitel 2.3 im Lehrbuch
Material zur Vorlesung:

Sprungfunktion

Mathematische Gleichung der Sprungfunktion:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Berechnung der Übergangsfunktion aus der Übertragungsfunktion erfolgt durch

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right).$$

Herleitung dieser Gleichung:

Aufgabe für das Selbststudium (siehe auch Beispiel S.15 im Lehrbuch): Berechnen sie für ein PT_1 -Glied

$$G(s) = \frac{k}{1+sT}$$

die Übergangsfunktion.

Impulsfunktion

Die Impulsfunktion beschreibt die kurzzeitige Änderung einer Eingangsgröße, die Systemantwort darauf nennt man Impulsantwort oder Gewichtsfunktion. Die mathematische Gleichung der idealen Impulsfunktion (Dirac-Impuls) lautet:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Die mathematische Gleichung einer realen Impulsfunktion lautet:

$$r_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{für } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Berechnung der Gewichtsfunktion aus der Übertragungsfunktion erfolgt durch

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)).$$

Herleitung dieser Gleichung:

Aufgabe für das Selbststudium (siehe auch Beispiel S.17 im Lehrbuch)
Berechnen sie für ein PT_2 -Glied

$$G(s) = \frac{k}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

die Gewichtsfunktion.

Zusammenfassung zu den Testsignalen

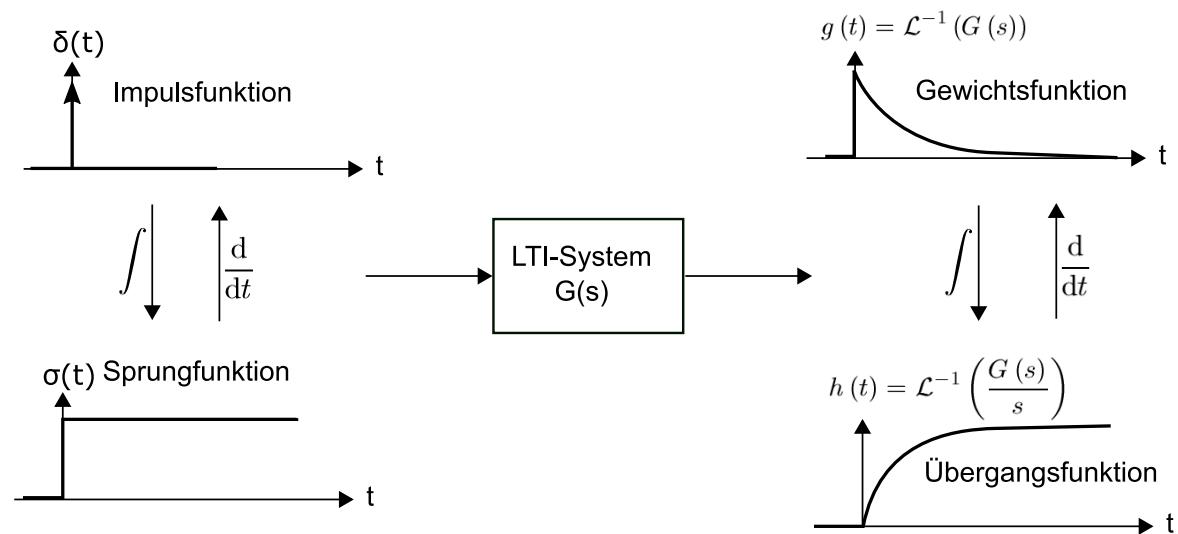


Abbildung 21: Einige Zusammenhänge zwischen den Testsignalen, und deren Systemantworten.

Teil II

Der Regler

Thema 9: Der PID-Regler

Lernziele:

- Struktur des idealen und realen PID-Reglers kennen,
- Unterschied zwischen diesen beiden Varianten verstehen,
- Reglervarianten den unterschiedlichen Anwendungsgebieten zuordnen können.

Material zur Vorbereitung und zum Selbststudium:

- <https://www.youtube.com/watch?v=MSoLigzhbeM> (Einführung PID-Regler von info8uniwue)
- Unterkapitel 4.2 im Lehrbuch

Material zur Vorlesung:

Nachdem wir die wichtigsten Möglichkeiten zur mathematischen Modellierung von Regelstrecken kennengelernt haben, kommen wir nun zur mathematischen Modellierung des Reglers. Das könnte man sehr kurz fassen, denn der Regler wird aus dem P-, dem I- und dem D-Glied zusammengesetzt. Die Kenntnis dieser Übertragungsglieder ist somit essentiell für das weitere Verständnis. Ein wichtiger Unterschied zwischen theoretischer Vorüberlegung und praktischer Umsetzbarkeit ist die Unterscheidung zwischen idealem und realem PID-Regler.

Idealer PID-Regler

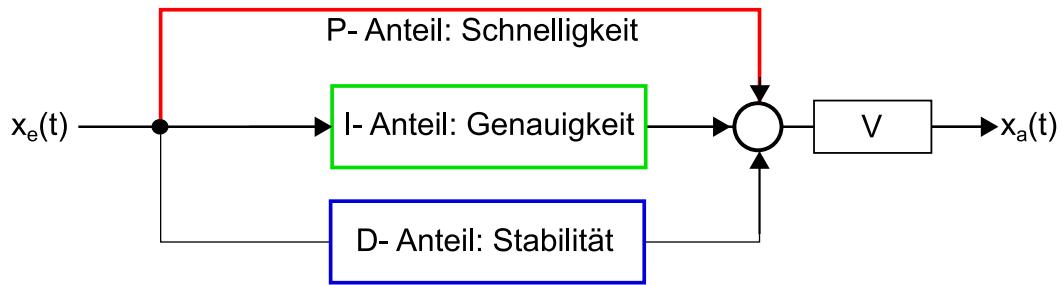


Abbildung 22: Blockschaltbild des idealen PID-Reglers

Übertragungsfunktion des idealen PID-Reglers:

$$G(s) = V \left(1 + \frac{1}{sT_N} + sT_V \right)$$

Differentialgleichung des idealen PID-Reglers:

$$x_a(t) = V \left(x_e(t) + \frac{1}{T_N} \int x_e(t) dt + T_V \frac{d}{dt} x_e(t) \right)$$

Der ideale PID-Regler besitzt drei Parameter: die Nachstellzeit T_N , die Vorhaltzeit T_V und die Verstärkung k .

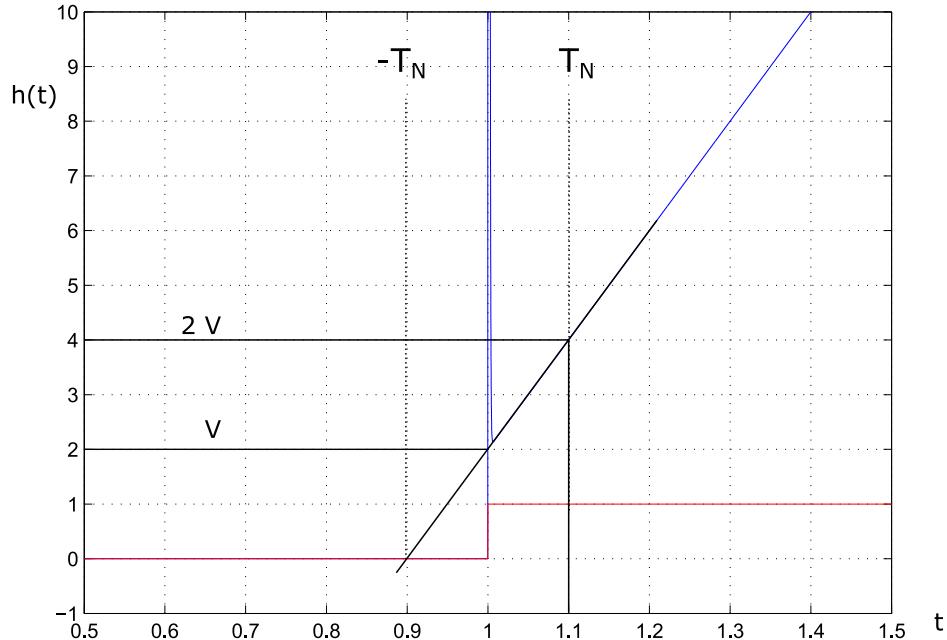


Abbildung 23: Sprungantwort des idealen PID-Reglers

Realer PID-Regler

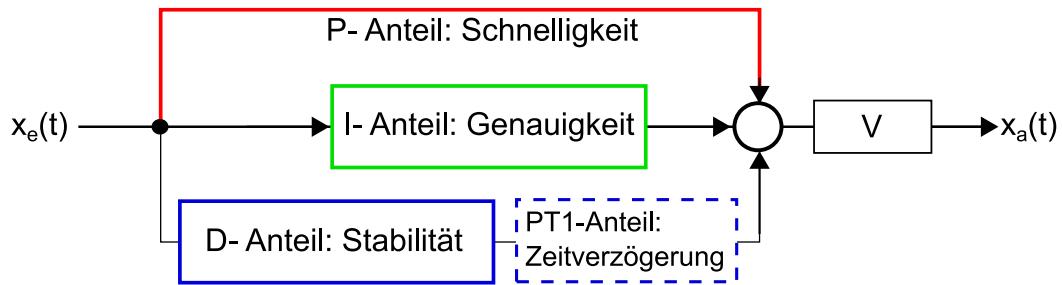


Abbildung 24: Blockschaltbild des realen PID-Reglers

Übertragungsfunktion des idealen PID-Reglers:

$$G(s) = V \left(1 + \frac{1}{sT_N} + \frac{sT_V}{1+sT} \right)$$

Differentialgleichung des idealen PID-Reglers:

$$T \frac{dx_a(t)}{dt} + x_a(t) = V \left(\frac{T + T_N}{T} x_e(t) + \frac{1}{T_N} \int x_e(t) dt + (T_V + T) \frac{d}{dt} x_e(t) \right)$$

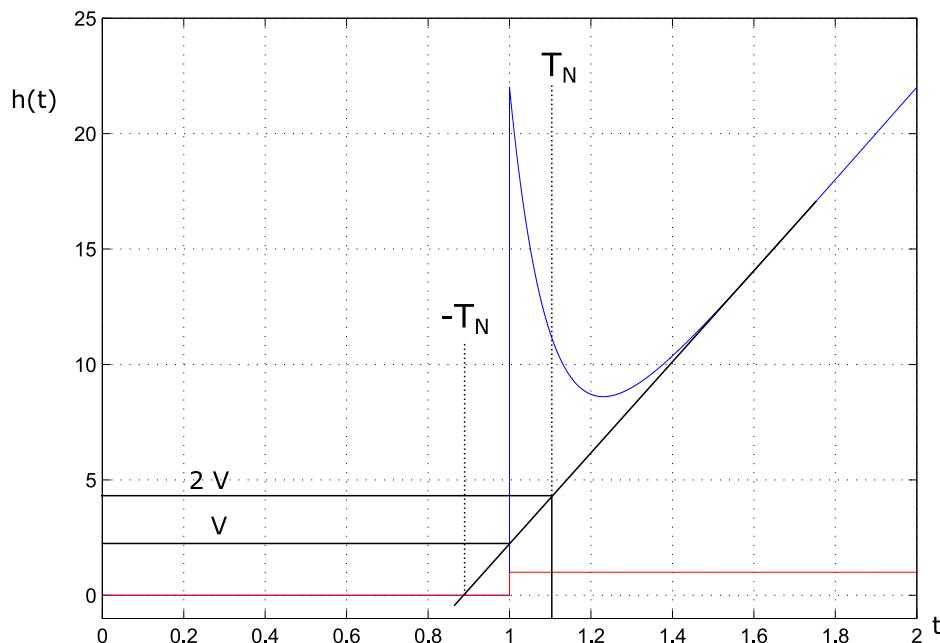


Abbildung 25: Sprungantwort des realen PID-Reglers

Der reale PID-Regler besitzt also die Parameter Nachstellzeit T_N , Vorhaltzeit T_V , Verstärkung k und eine Zeitkonstante T .

- Zur Erklärung der Nachstellzeit wird verglichen, wie der I-Anteil und der P-Anteil auf einen Einheitssprung reagieren. Der P-Anteil nimmt sofort den Wert k an. Der I-Anteil integriert den Einheitssprung auf. Nach einer Zeit T_N hat der I-Anteil den Wert des P-Anteils erreicht. Da der I-Anteil später den Wert des P-Anteils erreicht, wird die Zeit T_N als Nachstellzeit bezeichnet. Sie findet sich im Nenner des Faktors vor dem Integral wieder.
- Zur Erklärung der Vorhaltzeit wird verglichen, wie der D-Anteil und der P-Anteil auf eine Rampe mit dem Anstieg 1 reagieren. Der P-Anteil erzeugt eine Rampe mit dem Anstieg k . Der D-Anteil nimmt sofort den Wert 1 des Anstiegs an, welcher gemäß Reglergleichung mit kT_V multipliziert wird. Nach einer Zeit T_V hat der P-Anteil den Wert des D-Anteils erreicht. Da der D-Anteil sofort einen Wert annimmt, den der P-Anteil erst nach einer Zeit T_V erreicht, wird diese Zeit als Vorhaltzeit bezeichnet. Sie findet sich in der Reglergleichung als Faktor vor der Ableitung wieder.
- Die Verstärkung liefert einen Parameter für die Reaktionsschnelligkeit des Reglers, und die
- Zeitkonstante bestimmt wie nah das Verhalten des D-Anteils am idealen D-Verhalten anzusiedeln ist.

Vergleich der Reglervarianten

Zum Abschluss dieses Themas vergleichen wir die unterschiedlichen Reglervarianten.

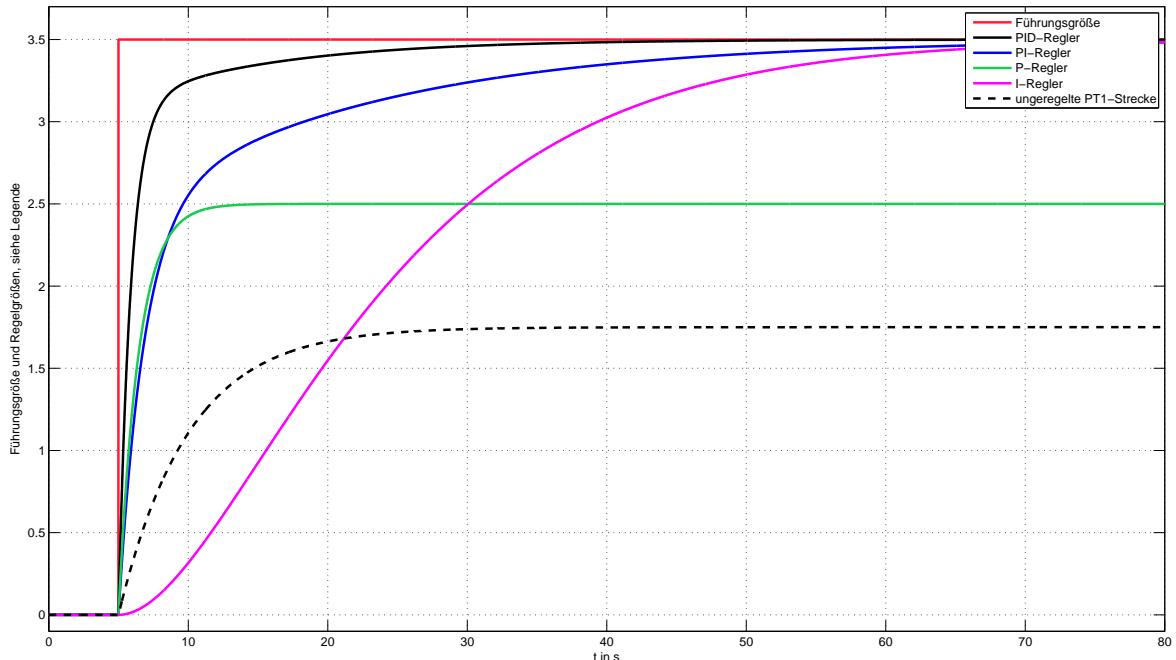


Abbildung 26: Vergleich der Reglervarianten am Beispiel der Regelung einer PT_1 -Strecke.

Teil III

Der Regelkreis

Thema 10: Regelkreisstruktur

Lernziele:

- Struktur des DIN-Regelkreises verstehen,
- Struktur des Standardregelkreises kennen,
- Zusammen zwischen den Übertragungsfunktionen der offenen Kette und des Standardregelkreises kennen.

Material zur Vorbereitung und zum Selbststudium:

- Unterkapitel 4.1 im Lehrbuch

Material zur Vorlesung:

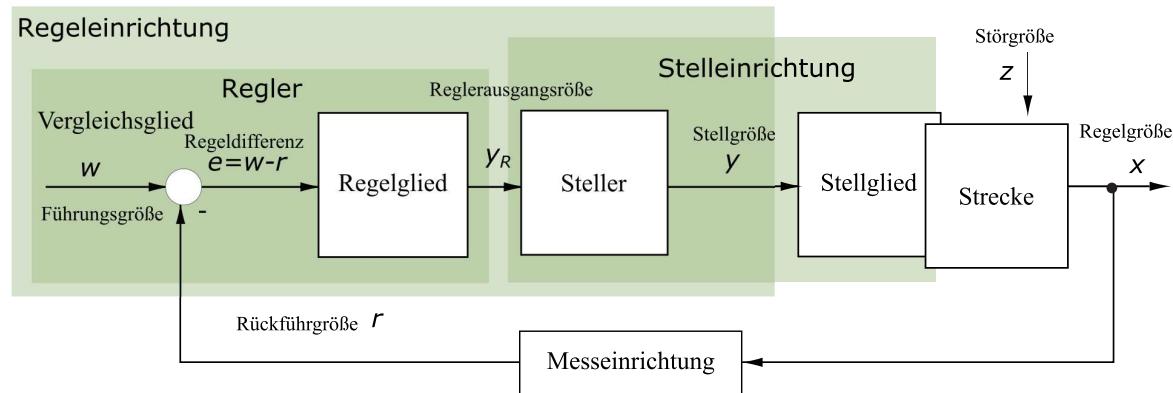


Abbildung 27: Regelkreis nach DIN 19226 Teil 5

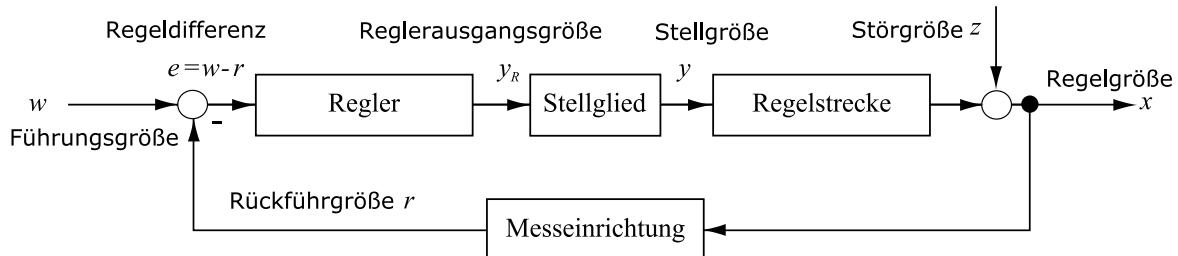


Abbildung 28: Vereinfachter Regelkreis

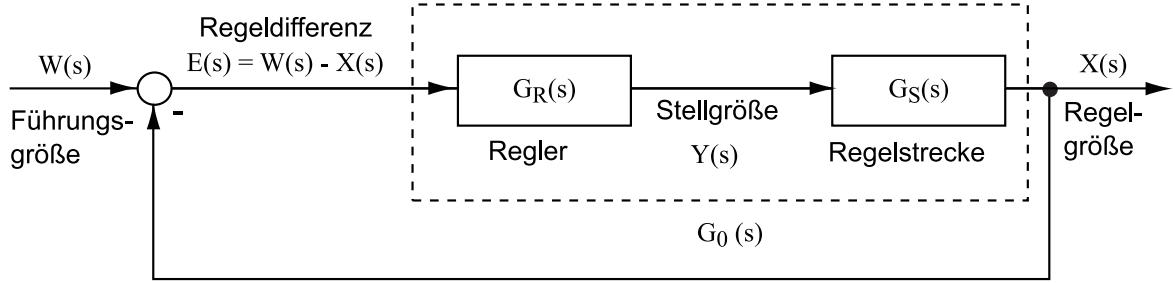


Abbildung 29: Standardregelkreis

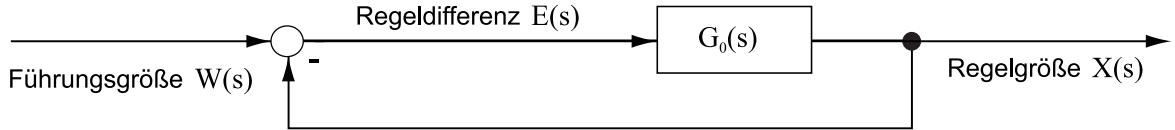


Abbildung 30: Standardregelkreis mit $G_0(s)$

Wie bereits hergeleitet wurde, besteht zwischen der Übertragungsfunktionen der offenen Kette

$$G_0(s) = G_R(s) \cdot G_S(s)$$

und der Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises folgender Zusammenhang:

$$G_{WX}(s) = \frac{X(s)}{W(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}.$$

Im folgenden werden $G_0(s)$ und $G_{WX}(s)$ zur Berechnung der Genauigkeit und der Stabilität von Regelkreisen verwendet.

Thema 11: Führungs- und Störverhalten

Lernziele:

- Unterschied zwischen Führungs- und Störverhalten verstehen, sowie
- die vier Grundgleichungen herleiten können.

Material zur Vorlesung:

Problembeschreibung

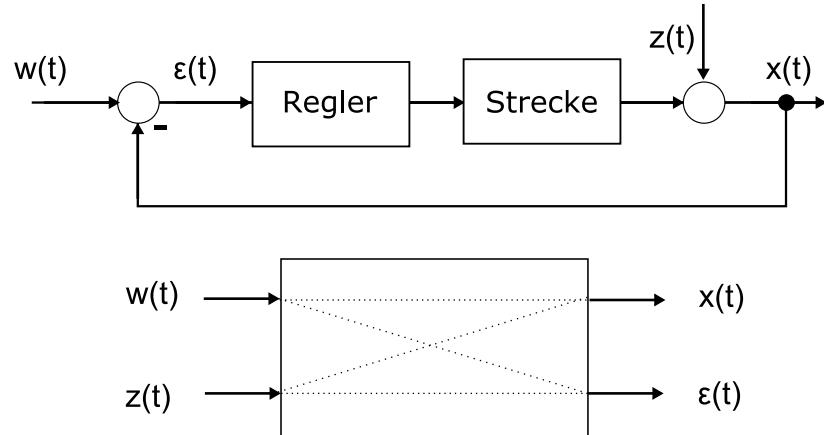


Abbildung 31: Beziehungen zwischen den Signalen im Regelkreis.

Führungsverhalten

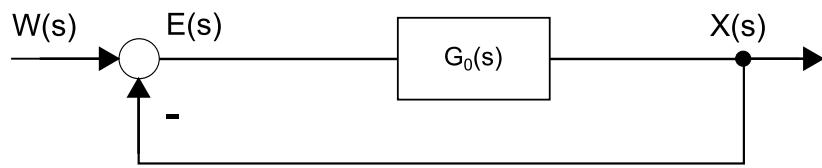


Abbildung 32: Anpassung des Blockschaltbildes zur Berechnung des Führungsverhaltens.

Berechnung der Regelgröße in Abhängigkeit von der Führungsgröße

Berechnung der Regelabweichung in Abhängigkeit von der Führungsgröße

Störverhalten

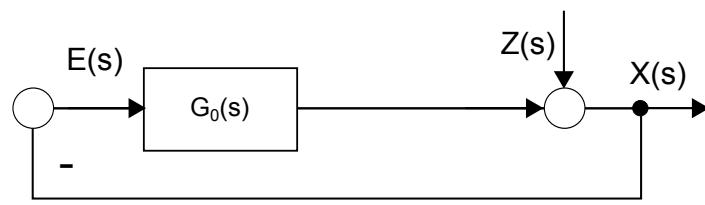


Abbildung 33: Anpassung des Blockschaltbildes zur Berechnung des Störverhaltens.

Berechnung der Regelgröße in Abhängigkeit von der Störgröße

Berechnung der Regelabweichung in Abhängigkeit von der Störgröße

Kombination von Störungs- und Führungsverhalten

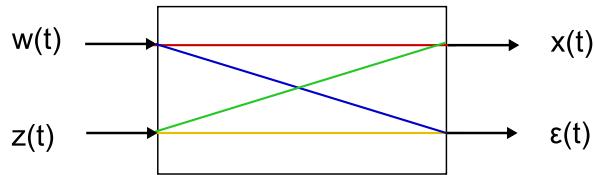
Wie verhält sich die Regelgröße $X(s)$ in Abhängigkeit von $W(s)$ und/oder $Z(s)$?

$$X(s) = X_W(s) + X_Z(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} W(s) + \frac{1}{1 + G_0(s)} Z(s)$$

Wie verhält sich die Regelabweichung $E(s)$ in Abhängigkeit von $W(s)$ und/oder $Z(s)$?

$$E(s) = E_W(s) + E_Z(s) = \frac{W(s) - Z(s)}{1 + G_0(s)}$$

Zusammenfassung:



$$G_{WX}(s) = \frac{X(s)}{W(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}$$

$$G_{WE} = \frac{E(s)}{W(s)} = \frac{1}{1 + G_0(s)}$$

$$G_{ZX} = \frac{X(s)}{Z(s)} = \frac{1}{1 + G_0(s)}$$

$$G_{ZE} = \frac{E(s)}{Z(s)} = -\frac{1}{1 + G_0(s)}$$

Abbildung 34: Zusammenfassung mit Bezug zu Abbildung 31: Für jede Signalübertragung im Regelkreis lässt sich eine Übertragungsfunktion bestimmen.

Thema 12: Regelabweichung

Lernziele:

- Verstehen des Endwertsatzes der Laplace-Transformation, sowie
- Anwendung des Endwertsatzes auf konkrete Beispiele.

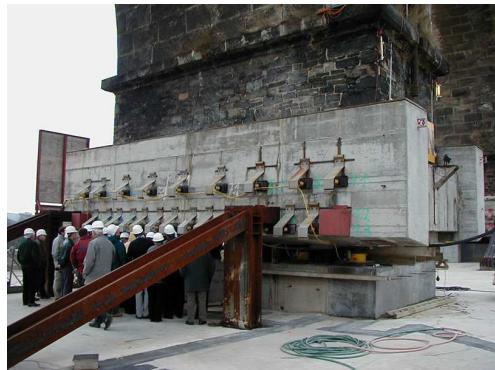
Material zur Vorbereitung und zum Selbststudium:

- Lehrbuch Unterkapitel 4.4 und
- zwei Rechenbeispiele eben dort.

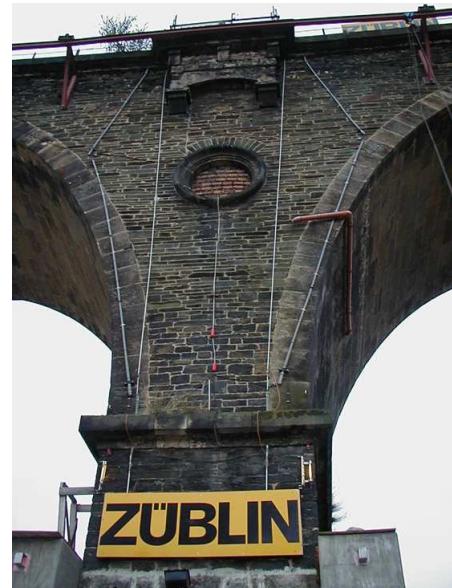
Material zur Vorlesung: (nächste Seite)



Regelaufgabe: Automatische Höhenregulierung von drei Pfeilern des Bahrebachmühlenviadukts beim Umbau 2002.



Abstützung der Pfeiler mit Hydraulikpressen während der Bauphase.



Geforderte Genauigkeit der
Höhenregulierung:
Begrenzung der Setzung auf 3 mm

Messung der Viaduktverformung
mit 1/10 mm Genauigkeit mit einem
Sensornetz.

Abbildung 35: Beispiel zur Berechnung der bleibenden Regelabweichung eines Regelkreises mit Einheitsrückführung, Quellenangaben am Bild, sonst eigene Fotos.



Abbildung 36: Modellierung der Regelstrecke als P-Glied. Der Hub ist dem Öldruck proportional mit einem Faktor a.

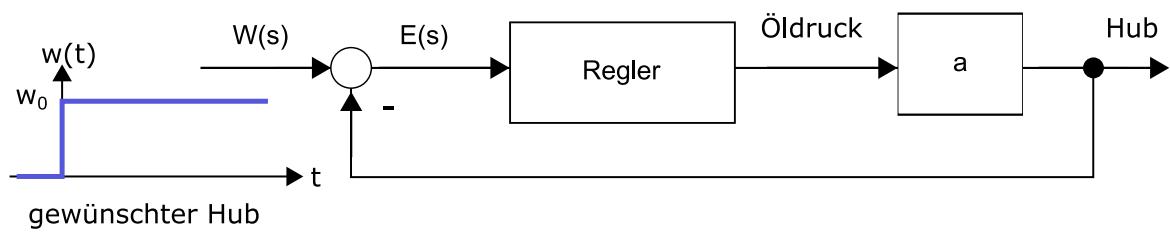


Abbildung 37: Modellierung des Hubvorgangs. Die Messung wird ohne Zeitverzögerung angenommen.

Rechnung zum Beispiel

Ein weiteres Beispiel für das Selbststudium

Berechnen sie die Zahlenwerte der bleibenden Regelabweichung in den Varianten a) $G_R(s) = 9$ und b) $G_R(s) = \frac{0.1}{s}$ für den gezeigten Regelkreis.

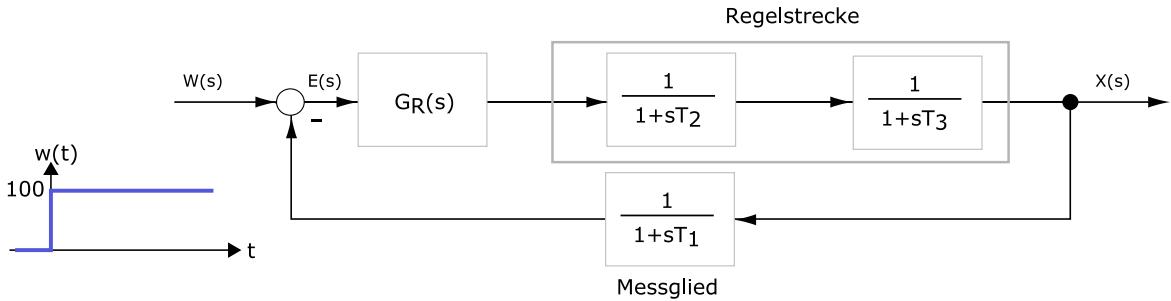


Abbildung 38: Regelkreis zum Beispiel für das Selbststudium.

Hier ein paar Lösungshinweise:

1. Zunächst erfolgt eine Umformung gemäß Abbildung 40

2. Aus der Umformung liest man ab

$$E(s) = W(s) - \underbrace{E(s) \cdot G_M(s) \cdot G_R(s) \cdot G_S(s)}_{G_0(s)}$$

3. Damit ergibt sich die Gleichung für

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_M(s) \cdot G_R(s) \cdot G_S(s)} \cdot W(s)$$

4. Lösungen:

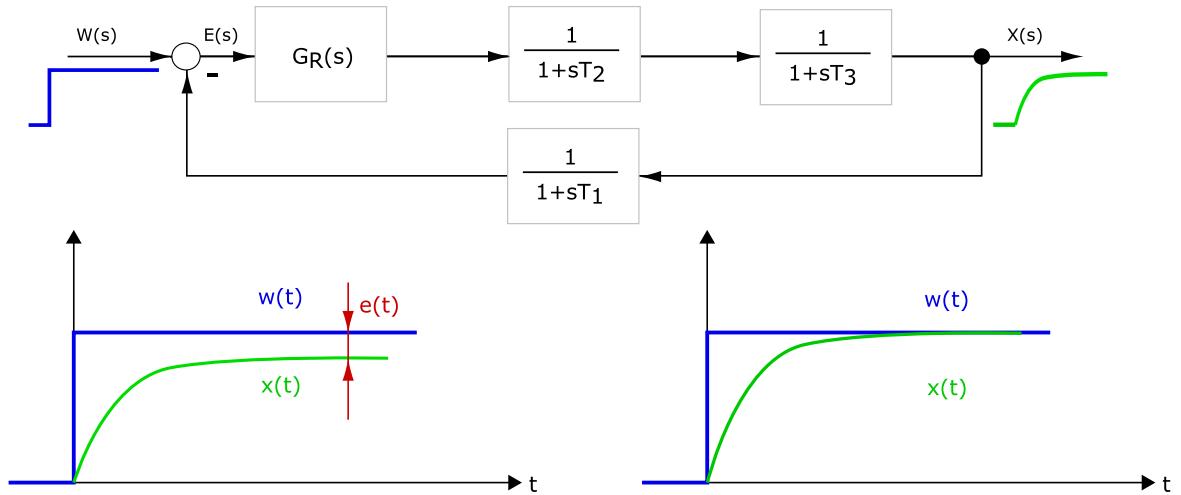


Abbildung 39: Ergebnis zum Beispiel.

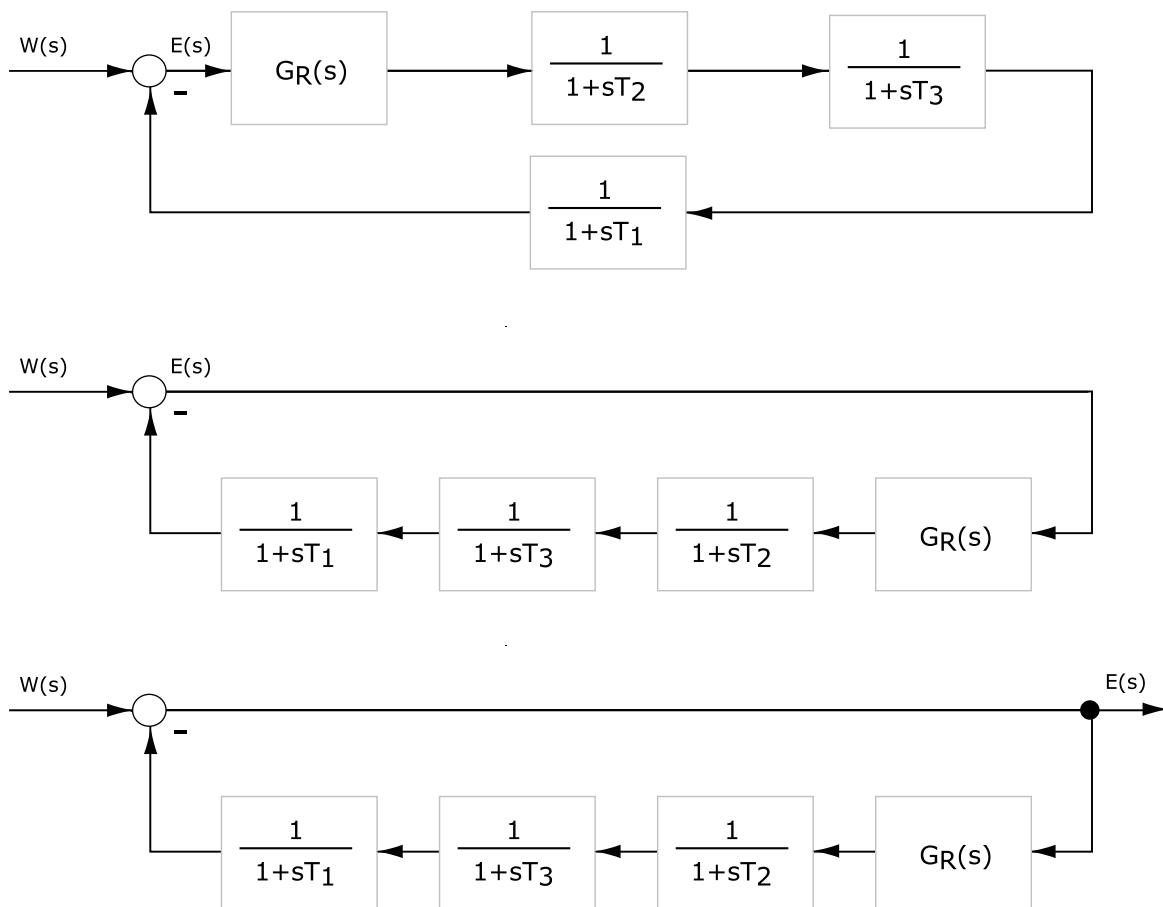


Abbildung 40: Umformung zum Beispiel für das Selbststudium.

Thema 13: Das Hurwitz-Verfahren

Lernziele:

- das Phänomen der „Stabilität“ verstehen,
- Anwendung des Hurwitz-Verfahrens auf konkrete Beispiele.

Material zur Vorbereitung und zum Selbststudium:

- Wiederholen sie den Begriff „BIBO-Stabilität“
- Arbeiten sie die Kapitel 4.5 und 4.5.1 im Lehrbuch durch.
- Rechnen sie dabei die zugehörigen Beispiele auf Seite 87 und 88 nach.
- Im Video <https://www.youtube.com/watch?v=VKJKRRRPBL0> (Hurwitz Kriterium [zeitkontinuierlich] — Regelungstechnik, BrainGain) wird das Hurwitz-Kriterium an einem Beispiel ebenfalls noch einmal erklärt.

Material zur Vorlesung:

Arbeitsschritte für das Hurwitz-Verfahren

Ausgangspunkt ist der Standardregelkreis.

1. Berechnung der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises.

$$G_0(s) = \frac{Z_0(s)}{N_0(s)} = G_R(s) G_S(s)$$

2. Berechnung der Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises

$$G_{WX}(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{Z_0(s)}{Z_0(s) + N_0(s)}$$

3. Damit erhält man das charakteristische Polynom

$$N(s) = Z_0(s) + N_0(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_0$$

bzw. die charakteristische Gleichung

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_0 = 0.$$

Aus den Koeffizienten des charakteristischen Polynoms n -ten Grades

$$N(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_0, \quad a_i > 0, \quad i = 1 \dots n$$

bildet man eine (n, n) Matrix

$$H = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Wenn alle n Hauptabschnittsdeterminanten

$$\Delta_1 = a_{n-1}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = a_0 \Delta_{n-1}$$

positiv sind, dann besitzen alle Wurzeln von $N(s)$ einen negativen Realteil. Diese Bedingung ist notwendig und hinreichend dafür, dass ein Übertragungssystem, beschrieben durch eine Übertragungsfunktion deren Nennerpolynom $N(s)$ der entspricht, die Eigenschaft der BIBO-Stabilität aufweist.

Anmerkungen:

1. Da für $N(s) a_i > 0, i = 1 \dots n$ vorausgesetzt wird, müssen alle Koeffizienten der charakteristischen Gleichung das gleiche Vorzeichen haben.
2. Für Polynome bis zum Grad zwei genügt es o.g. Bedingung zu prüfen.
3. In der Literatur findet man auch andere Varianten zur Bildung von H .
4. Die Hauptdiagonalen werden aus $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-\nu}$ gebildet.
5. Matrixelemente mit negativem Index bekommen den Wert 0.

Beispiel 1

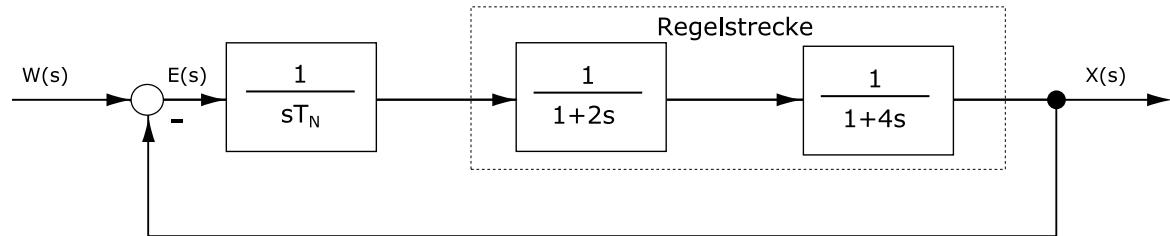


Abbildung 41: Regelkreis zum Beispiel 1 für die Anwendung des Hurwitz-Verfahrens.

Beispiel 2:

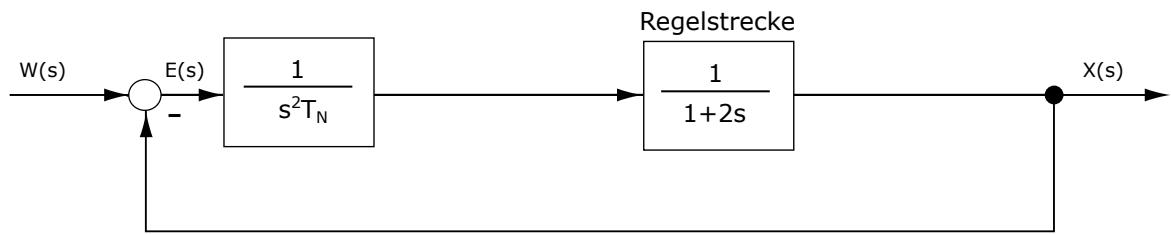


Abbildung 42: Regelkreis zum Beispiel 2 für die Anwendung des Hurwitz-Verfahrens.

Beispiel 3

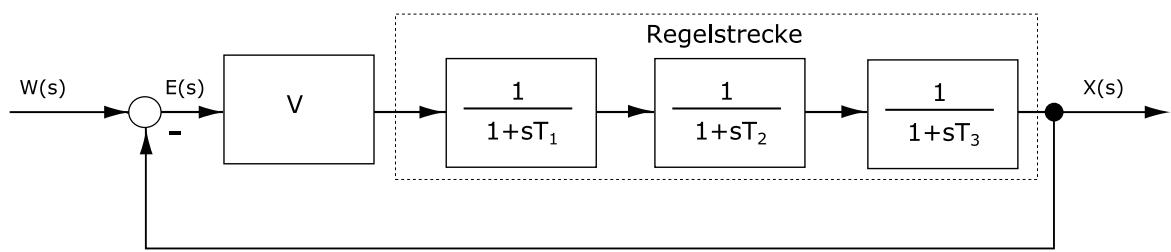


Abbildung 43: Regelkreis zum Beispiel 3 für die Anwendung des Hurwitz-Verfahrens. Als Parameter sind gegeben: $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_3 = 3$ sowie $V = 5$.

Thema 14: Das Nyquist-Verfahren

Lernziele:

- das Phänomen der „Stabilität“ verstehen
- Anwendung des Nyquist-Verfahrens auf konkrete Beispiele.

Material zur Vorbereitung und zum Selbststudium:

- Wiederholen sie den Begriff „BIBO-Stabilität“
- Arbeiten sie die Kapitel 4.5 und 4.5.2 im Lehrbuch durch.
- Rechnen sie dabei die zugehörigen Beispiele auf auf Seite 91 und 93 nach.

Material zur Vorlesung:

Erklärung zum Nyquist-Verfahren

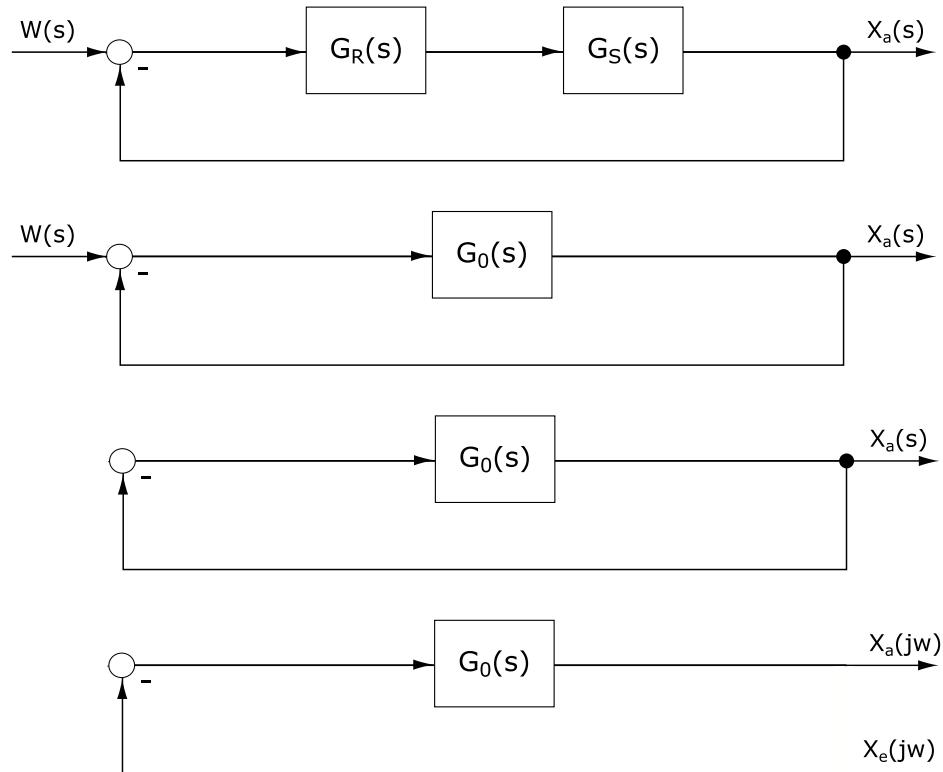


Abbildung 44: Eine einfache Erklärung des Nyquist-Verfahrens.

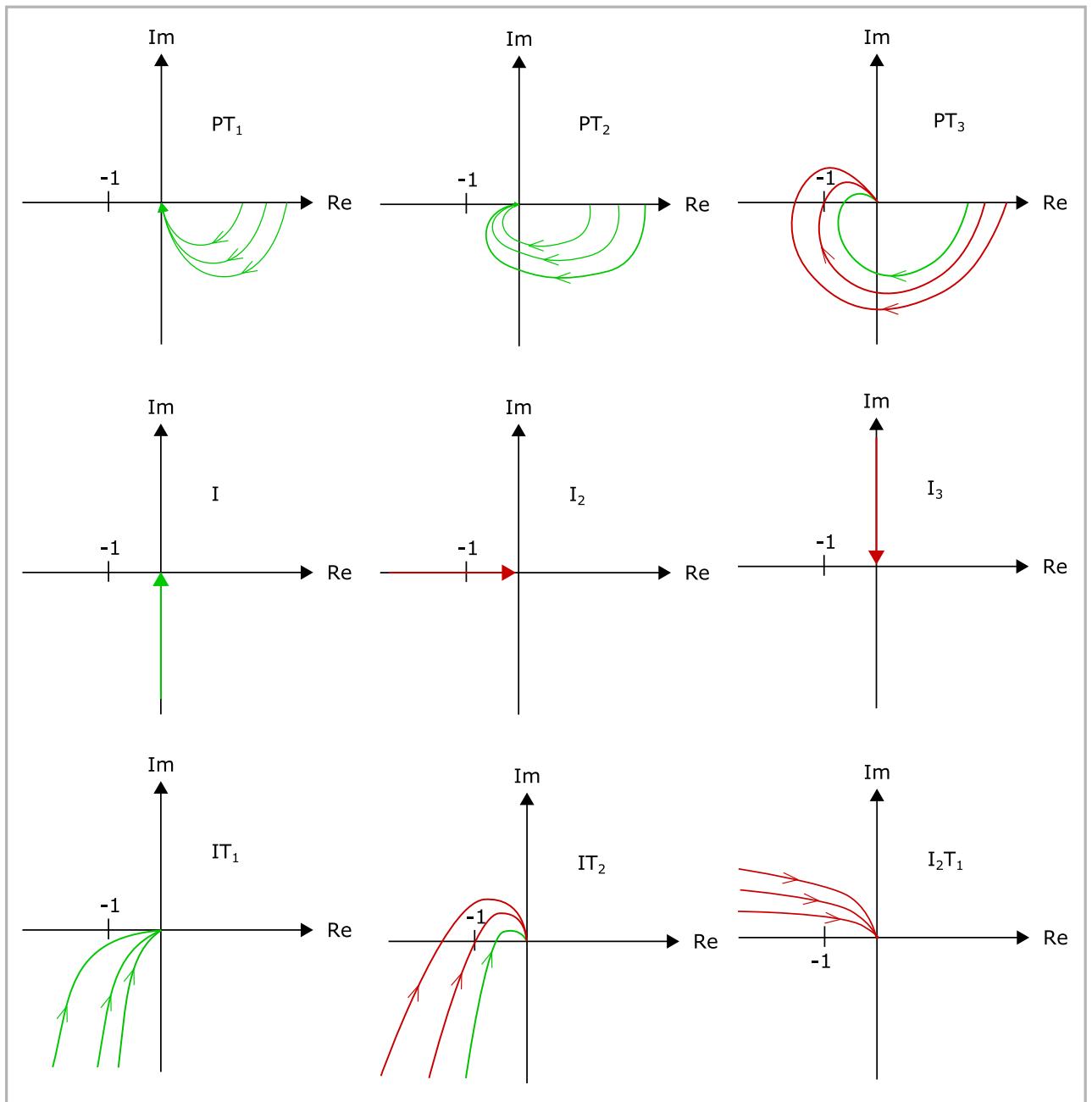


Abbildung 45: Grafische Anwendung des Nyquist-Verfahrens.

Arbeitsschritte für das analytische Nyquist-Verfahren

1. Berechnung der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises

$$G_0(s) = G_R(s) \cdot G_S(s)$$

2. Frequenzgang des offenen Regelkreises notieren

$$G_0(j\omega) = G_R(j\omega) \cdot G_S(j\omega)$$

3. $G_0(j\omega)$ in Real- und Imaginärteil zerlegen

4. Berechnung der kritischen Frequenz ω_{kr} aus

$$\operatorname{Im}\{G_0(j\omega)\} = 0$$

5. Berechnung der kritischen Verstärkung V_{kr} aus

$$\operatorname{Re}\{G_0(j\omega_{kr})\} = -1$$

Arbeitsschritte für das grafische Nyquist-Verfahren

1. Berechnung der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises

$$G_0(s) = G_R(s) \cdot G_S(s)$$

2. Frequenzgang des offenen Regelkreises notieren

$$G_0(j\omega) = G_R(j\omega) \cdot G_S(j\omega)$$

3. $G_0(j\omega)$ in Real- und Imaginärteil zerlegen

4. Punktweise grafische Darstellung der Ortskurve des Frequenzgang aus $\operatorname{Re}\{G_0(j\omega)\}$ für die Abszissenwerte und $\operatorname{Im}\{G_0(j\omega)\}$ für die Ordinatenwerte

Beispiel 1

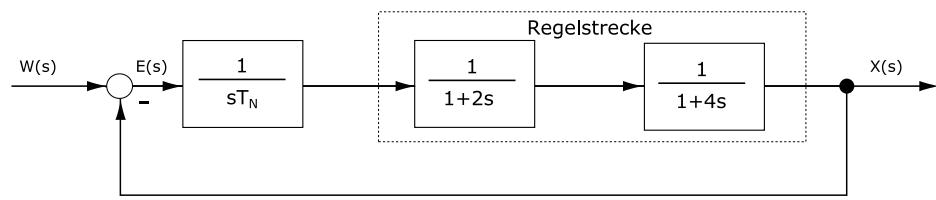


Abbildung 46: Regelkreis zum Beispiel 1 des Nyquist-Verfahrens.

Beispiel 2

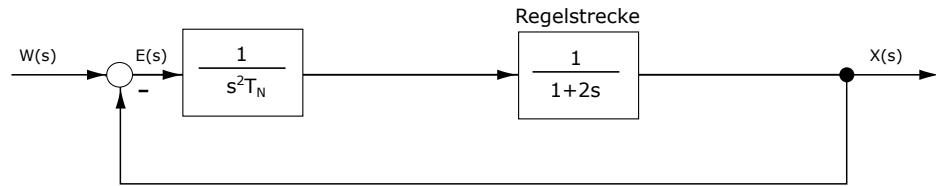


Abbildung 47: Regelkreis zum Beispiel 2 des Nyquist-Verfahrens.

Thema 15: Einstellregeln

Lernziele:

- das Prinzip der Ersatzparameter verstehen,
- die Ermittlung der Reglerparameter aus den Ersatzparametern erklären können.

Material zur Vorbereitung und zum Selbststudium:

- Wiederholung der Begriffe „Regelstrecken mit- und ohne Ausgleich“
- Kapitel 4.3 „Einstellung von PID-Reglern“ im Lehrbuch
- Video zur Stabilitätsrandmethode: <https://www.youtube.com/watch?v=YjzT649TQV0> (3.7.1 Nach Ziegler und Nichols (Stabilitätsrand) von Jörg J. Buchholz)
- Video zu Chien, Hrones und Reswick: <https://www.youtube.com/watch?v=hDk-uai-sgs> (3.7.2 Nach Chien, Hrones und Reswick (Sprungantwort) von Jörg J. Buchholz)

Material zur Vorlesung:

Bisher unbeantwortet blieb die Frage, wie man einen PID-Regler einstellt, d.h. welche konkreten Werte für die Verstärkung, für die Vorhaltzeit und für die Nachstellzeit gewählt werden können, damit der Regelkreis stabil arbeitet. Es ist sicher naheliegend, dafür Methoden zu verwenden, bei denen die Reglerparameter aus den Eigenschaften der Regelstrecke bzw. des Regelkreises ermittelt werden. In der Vorlesung werden wir das Verfahren nach Chien, Hrones und Reswick und die Wendetangentenmethode behandeln.

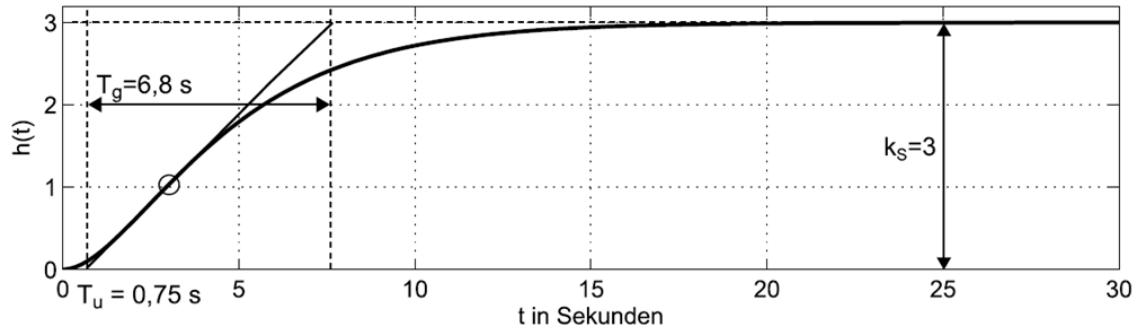


Abbildung 48: Definition von Ersatzparametern an der Übergangsfunktion bei Regelstrecke mit Ausgleich.

$$\alpha = T_g / (K_S \cdot T_u).$$

	Überschwingen		Aperiodische Regelung	
	Führung	Störung	Führung	Störung
P	$V = 0,7\alpha$		$V = 0,3\alpha$	
PI	$V = 0,6\alpha$ $T_N = T_g$	$V = 0,7\alpha$ $T_N = 2,3T_u$	$V = 0,35\alpha$ $T_N = 1,2T_g$	$V = 0,6\alpha$ $T_N = 4T_u$
PID	$V = 0,95\alpha$ $T_N = 1,35T_g$ $T_V = 0,47T_u$	$V = 1,2\alpha$ $T_N = 2T_u$ $T_V = 0,42T_u$	$V = 0,6\alpha$ $T_N = T_g$ $T_V = 0,5T_u$	$V = 0,95\alpha$ $T_N = 2,4T_u$ $T_V = 0,42T_u$

Abbildung 49: Einstellregeln nach Chien, Hrones und Reswick für Regelstecken mit Ausgleich.

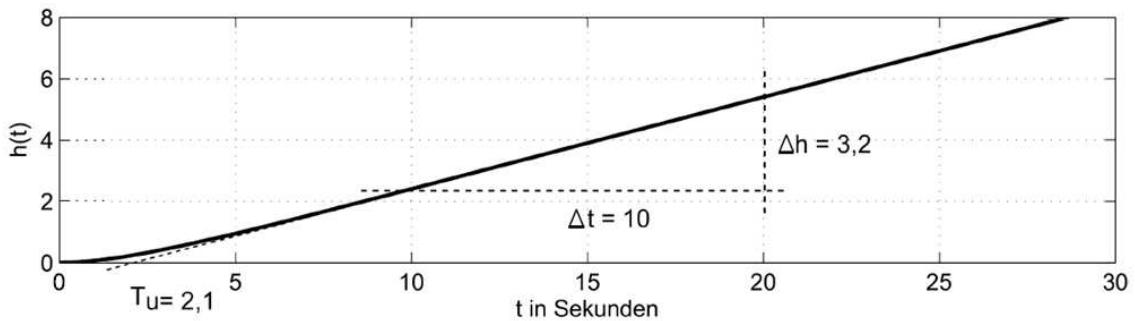


Abbildung 50: Definition von Ersatzparametern an der Übergangsfunktion bei Regelstrecke ohne Ausgleich.

$$K_I = \Delta h / \Delta t, \beta = 1 / (K_I \cdot T_u).$$

	Überschwingen		Aperiodische Regelung	
	Führung	Störung	Führung	Störung
P		$V = 0,7\beta$		$V = 0,3\beta$
PI	*	$V = 0,7\beta$ $T_N = 2,3T_u$	*	$V = 0,6\beta$ $T_N = 4T_u$
PID	*	$V = 1,2\beta$ $T_N = 2T_u$ $T_V = 0,42T_u$	*	$V = 0,95\beta$ $T_N = 2,4T_u$ $T_V = 0,42T_u$
PD	$V = 0,95\beta$ $T_V = 0,47T_u$	$V = 1,2\beta$ $T_V = 0,42T_u$	$V = 0,59\beta$ $T_V = 0,5T_u$	$V = 1,2\beta$ $T_V = 0,42T_u$

Abbildung 51: Einstellregeln nach Chien, Hrones und Reswick für Regelstecken ohne Ausgleich.

Thema 16: Modellbildung

Zum Abschluss wollen wir ein einfaches Beispiel zur Modellbildung kennen lernen. Dabei geht es darum, ausgehend von einem konkreten technischen System, ein mathematisches Modell für das Verhalten dieses Systems zu ermitteln. Wie wir kennengelernt haben, wird das Systemverhalten durch den Verlauf der Ausgangsgröße in Abhängigkeit von einer vorgegebenen Eingangsgröße beschrieben. Betrachten sie dazu zunächst die folgende Abbildung: In unserem Fall also:



Abbildung 52: Zusammenfassendes Beispiel: Lok als Regelstrecke

Welche anderen Kombinationen aus Eingangs- Ausgangssignal wären denkbar?

Teil IV

Anhänge

Anhang 1: Realisierung von Übertragungsgliedern mittels Operationsverstärkern

Der Operationsverstärker wird als integrierter Schaltkreis realisiert, und ist eines der wichtigsten Elemente der analogen Schaltungstechnik. Die folgende Abbildung zeigt das übliche Symbol. Im weiteren wird von einem VFB-OPV (voltage feedback OPV) ausgegangen. Das

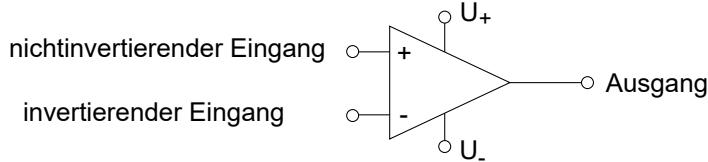


Abbildung 53: Symbol des Operationsverstärkers

bedeutet, dass der nicht-invertierende Eingang und der invertierende Eingang als hochohmige Spannungseingänge, und der Ausgang als niederohmige Spannungsquelle betrachtet werden. Die hier besprochenen Anwendungsmöglichkeiten ergeben sich aus der Rückkopplung vom Ausgang auf den invertierenden Eingang, die damit als Gegenkopplung wirkt. Die Eingänge U_+ und U_- verdeutlichen eine symmetrische Spannungsversorgung. Die Wirkungsweise eines solchen gegengekoppelten VFB-OPV lässt sich idealisiert wie folgt zusammenfassen:

1. Die Spannungsdifferenz zwischen dem invertierenden und dem nicht-invertierenden Eingang wird durch die Gegenkopplung auf Null gebracht.
2. Es fließt kein Strom in die Eingänge.

Mit diesen beiden Sätzen, lassen sich die folgenden Schaltungen prinzipiell verstehen. Für genauere Erklärungen der Wirkungsweise von OPV, sei auf die Fachliteratur zur analogen Schaltungstechnik verwiesen.

P-Glied

Die folgende Abbildung zeigt die Beschaltung eines OPV als P-Glied.

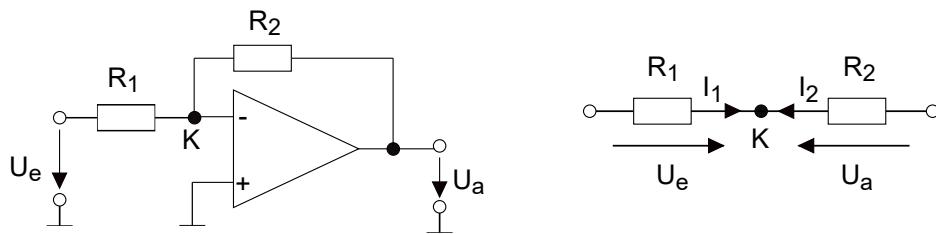


Abbildung 54: Operationsverstärker als invertierender Verstärker mit Ersatzschaltung

Der OPV sorgt dafür, dass die Differenzspannung zwischen den Eingängen Null wird. Das ist nur dann möglich, wenn der invertierende Eingang am Knoten K genau wie der nichtinvertierende Eingang Massepotential aufweist. Da er nicht mit der eigentlichen Masse verbunden ist, bezeichnet man dieses Potential als virtuelle Masse. Die daraus resultierenden Ersatzschaltungen zeigen, dass über R_1 , U_e und über R_2 , U_a abfällt. Für die Ströme I_1 und I_2 gilt

somit

$$I_1 = \frac{U_e}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U_a}{R_2}.$$

Beide Ströme fließen auf den Knoten K zu. Da ideales Verhalten angenommen wird, fließt kein Strom in den OPV und der Knotensatz liefert

$$I_1 = -I_2,$$

bzw.

$$I_1 = I = \frac{U_e}{R_1}, \quad I_2 = -I = \frac{U_a}{R_2}$$

Damit erhält man

$$\frac{U_e}{R_1} = -\frac{U_a}{R_2} \text{ bzw. } U_a = -\frac{R_1}{R_2} \cdot U_e$$

wobei

$$V = \frac{R_1}{R_2}$$

als Verstärkung interpretiert werden kann. Also gilt

$$U_a = -V \cdot U_e$$

Man erkennt das Übertragungsverhalten der P-Gliedes, mit der Besonderheit der negativen Verstärkung. Diese hätte hätte bei Wechselspannung eine Phasenumkehr, und bei Gleichspannung ein Umpolen zur Folge. Um ein wirkliches P-Glied zu erhalten, wird also ein Invertierer mit der Verstärkung eins nachgeschaltet.

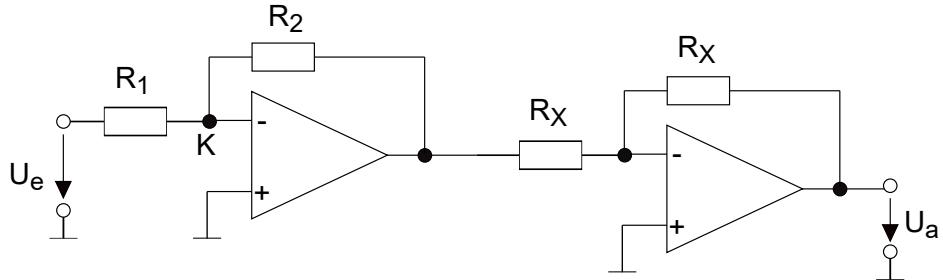


Abbildung 55: P-Glied mit zwei Operationsverstärkern

Überlegen sie, warum die Schaltung des OPV als nichtinvertierender Verstärker zur Realisierung eines P-Gliedes nur bedingt geeignet ist

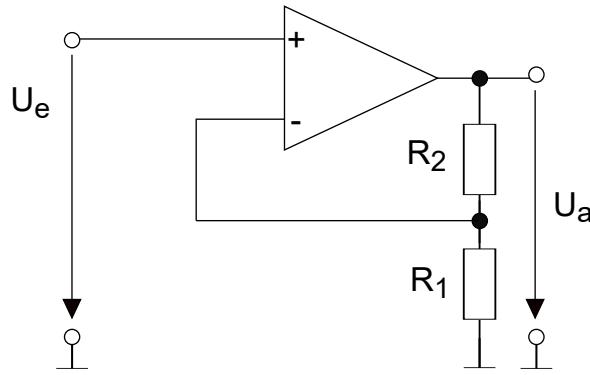


Abbildung 56: Operationsverstärker als nichtinvertierender Verstärker

I-Glied

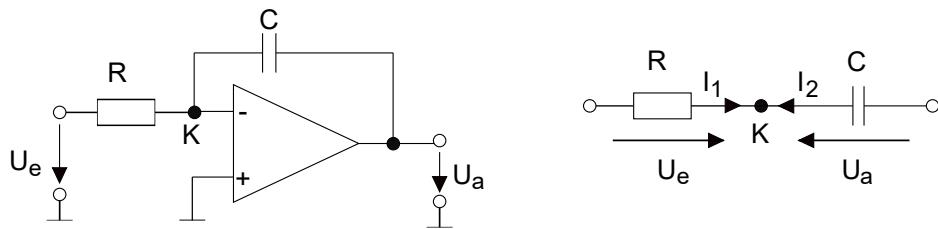


Abbildung 57: Operationsverstärker als invertierender Integrator mit Ersatzschaltung

Der OPV sorgt dafür, dass die Differenzspannung zwischen den Eingängen Null wird. Das ist nur dann möglich, wenn der invertierende Eingang am Knoten K genau wie der nichtinvertierende Eingang Massepotential aufweist. Da er nicht mit der eigentlichen Masse verbunden ist, bezeichnet man dieses Potential als virtuelle Masse. Die daraus resultierenden Ersatzschaltung zeigt, dass über R , U_e und über C , U_a abfällt. Für die Ströme I_1 und I_2 gilt somit

$$I_1 = \frac{U_e}{R_1}, \quad I_2 = C \frac{dU_a}{dt}.$$

Beide Ströme fließen auf den Knoten K zu. Da ideales Verhalten angenommen wird, fließt kein Strom in den OPV und der Knotensatz liefert

$$I_1 = -I_2,$$

bzw.

$$I_1 = I = \frac{U_e}{R_1}, \quad I_2 = -I = C \frac{dU_a}{dt}$$

Damit erhält man

$$\frac{U_e}{R_1} = -C \frac{dU_a}{dt} \text{ bzw. } U_a = -\frac{1}{RC} \int U_e dt$$

wobei $\frac{1}{RC}$ als Nachstellzeit T_N interpretiert werden kann. Also gilt

$$U_a = -T_N \int U_e dt$$

Man erkennt, dass die Ausgangsspannung durch Integration der Eingangsspannung entsteht, die aber zusätzlich invertiert wird. Um das zu vermeiden, kann wiederum ein invertierender Verstärker mit der Verstärkung eins nachgeschaltet werden.

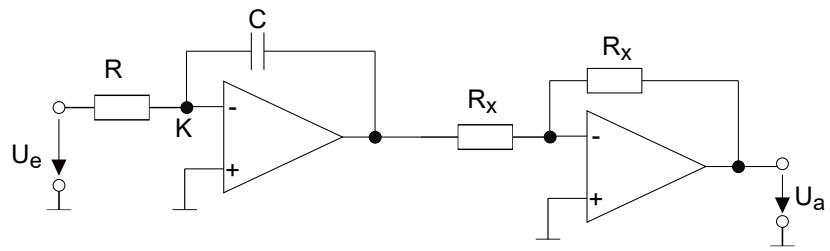


Abbildung 58: Operationsverstärker als Integrator

D-Glied

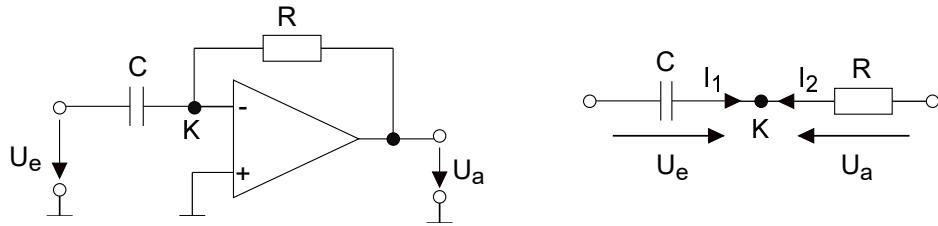


Abbildung 59: Operationsverstärker als invertierender Differenzierer mit Ersatzschaltung

Der OPV sorgt dafür, dass die Differenzspannung zwischen den Eingängen Null wird. Das ist nur dann möglich, wenn der invertierende Eingang am Knoten K genau wie der nichtinvertierende Eingang Massepotential aufweist. Da er nicht mit der eigentlichen Masse verbunden ist, bezeichnet man dieses Potential als virtuelle Masse. Die daraus resultierenden Ersatzschaltung zeigt, dass über C , U_e und über R , U_a abfällt. Für die Ströme I_1 und I_2 gilt somit

$$I_1 = C \frac{dU_e}{dt}, \quad I_2 = \frac{U_a}{R}.$$

Beide Ströme fließen auf den Knoten K zu. Da ideales Verhalten angenommen wird, fließt kein Strom in den OPV und der Knotensatz liefert

$$I_1 = -I_2,$$

bzw.

$$I_1 = I = C \frac{dU_e}{dt}, \quad I_2 = -I = \frac{U_a}{R}.$$

Damit erhält man

$$C \frac{dU_e}{dt} = -\frac{U_a}{R} \text{ bzw. } U_a = -RC \frac{dU_e}{dt}$$

wobei RC als Vorhaltzeit T_V interpretiert werden kann. Also gilt

$$U_a = -T_V \frac{dU_e}{dt}$$

Man erkennt, dass die Ausgangsspannung durch zeitliche Ableitung der Eingangsspannung entsteht, die aber zusätzlich invertiert wird. Um das zu vermeiden, kann wiederum ein invertierender Verstärker mit der Verstärkung eins nachgeschaltet werden.

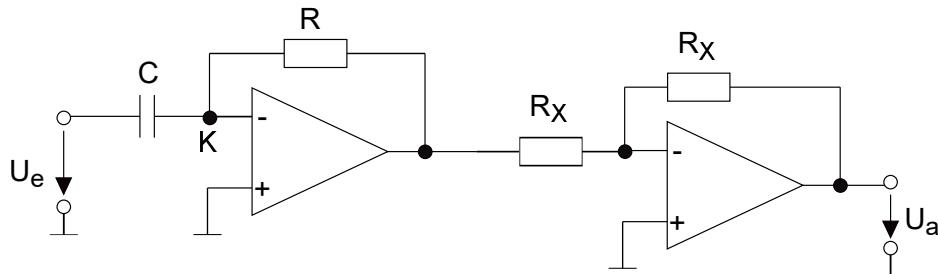


Abbildung 60: Operationsverstärker als Differenzierer

PT1-Glied

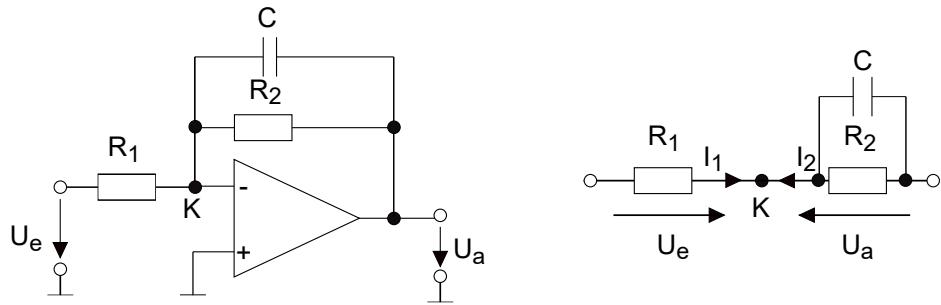


Abbildung 61: Operationsverstärker als invertierendes PT1 mit Ersatzschaltung

Der OPV sorgt dafür, dass die Differenzspannung zwischen den Eingängen Null wird. Das ist nur dann möglich, wenn der invertierende Eingang am Knoten K genau wie der nichtinvertierende Eingang Massepotential aufweist. Da er nicht mit der eigentlichen Masse verbunden ist, bezeichnet man dieses Potential als virtuelle Masse. Die daraus resultierenden Ersatzschaltung zeigt, dass über R_1 , U_e und über der Parallelschaltung aus R_2 und C , U_a abfällt. Für die Ströme I_1 und I_2 gilt somit

$$I_1 = \frac{U_e}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U_a}{R_2} + C \frac{dU_a}{dt}.$$

Beide Ströme fließen auf den Knoten K zu. Da ideales Verhalten angenommen wird, fließt kein Strom in den OPV und der Knotensatz liefert

$$I_1 = -I_2,$$

bzw.

$$I_1 = I = \frac{U_e}{R_1}, \quad I_2 = -I = \frac{U_a}{R_2} + C \frac{dU_a}{dt}.$$

Damit erhält man

$$-\frac{U_e}{R_1} = \frac{U_a}{R_2} + C \frac{dU_a}{dt}.$$

Der Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangsgröße lässt sich hier nicht direkt erkennen, aber durch Umstellen auf die Form

$$-\underbrace{\frac{R_2}{R_1}}_k U_e = U_a + \underbrace{R_2 C}_{T} \frac{dU_a}{dt}$$

erhält man mit

$$-k U_e = U_a + T \frac{dU_a}{dt}$$

die Differentialgleichung eines invertierenden PT_1 -Übertragungsgliedes.

Um die Invertierung aufzuheben, kann wiederum ein invertierender Verstärker mit der Verstärkung eins nachgeschaltet werden.

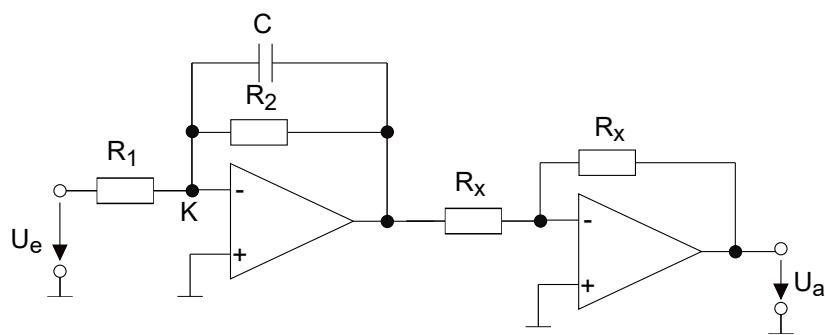


Abbildung 62: Operationsverstärker als PT1

Anhang 2: Bode-Diagramme

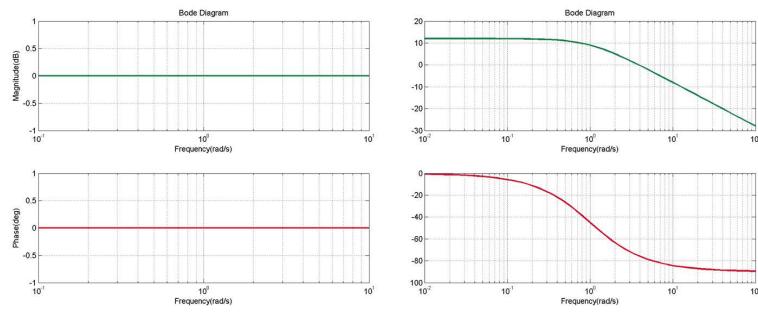


Abbildung 63: P und PT1

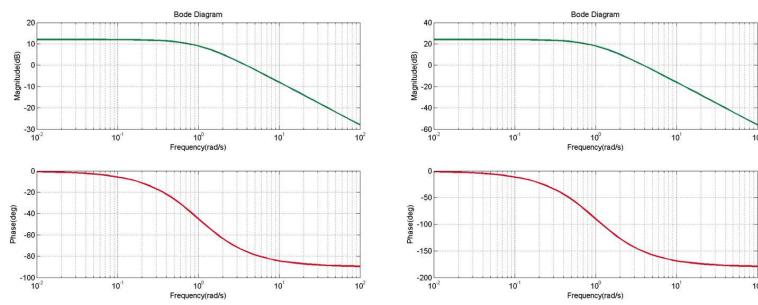


Abbildung 64: PT1 und nichtschwingungsfähiges PT2

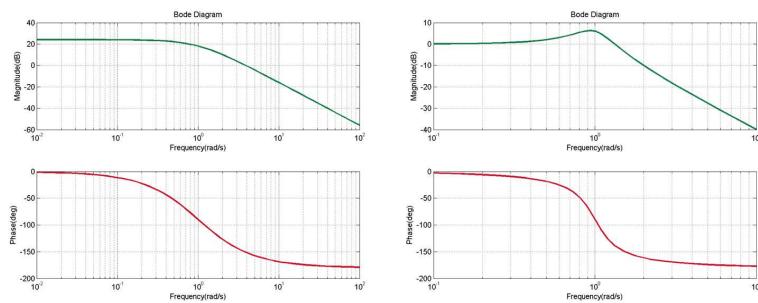


Abbildung 65: nichtschwingungsfähiges und schwingungsfähiges PT2

Anhang 2: Bode-Diagramme

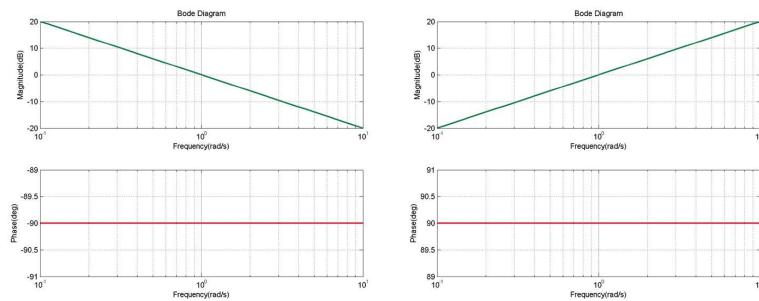


Abbildung 66: I und D

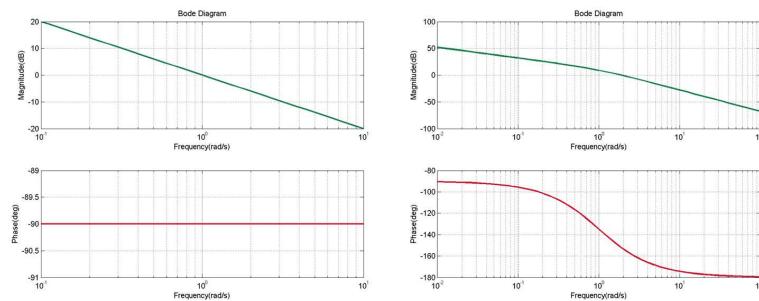


Abbildung 67: I und IT1

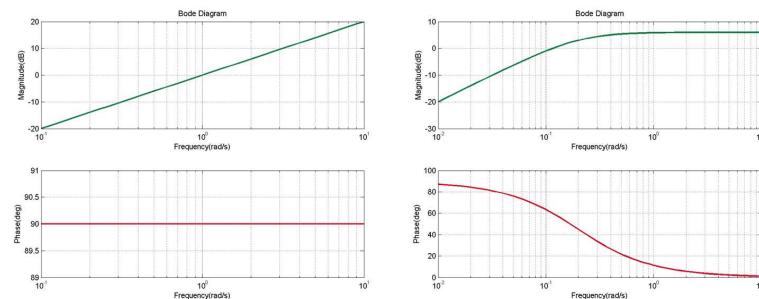


Abbildung 68: D und DT1

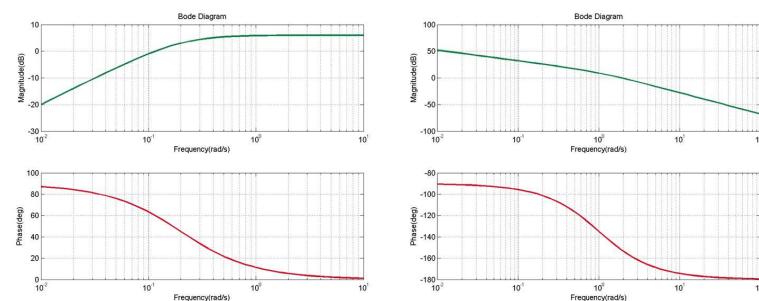


Abbildung 69: D und DT1

Anhang 3: Übergangs- und Gewichtsfunktionen

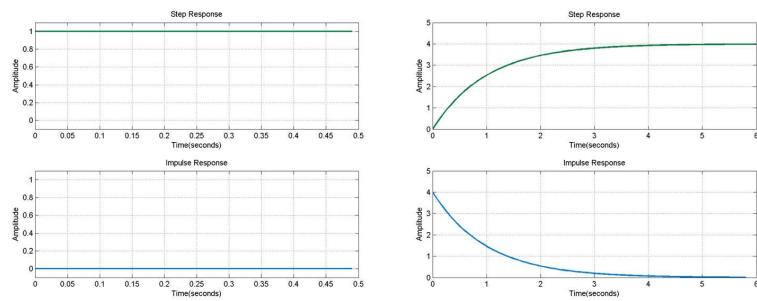


Abbildung 70: P und PT1

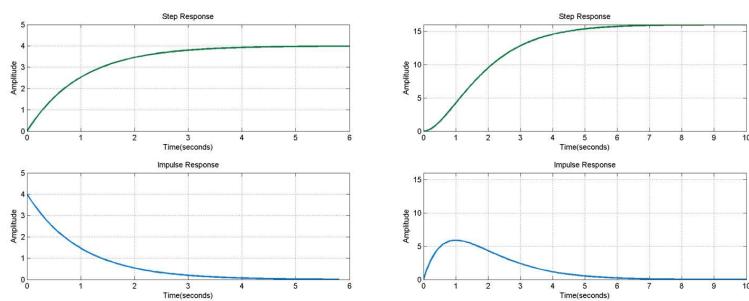


Abbildung 71: PT1 und nichtschwingungsfähiges PT2

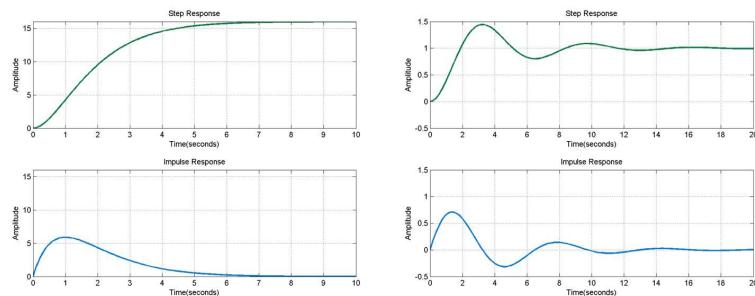


Abbildung 72: nichtschwingungsfähiges und schwingungsfähiges PT2

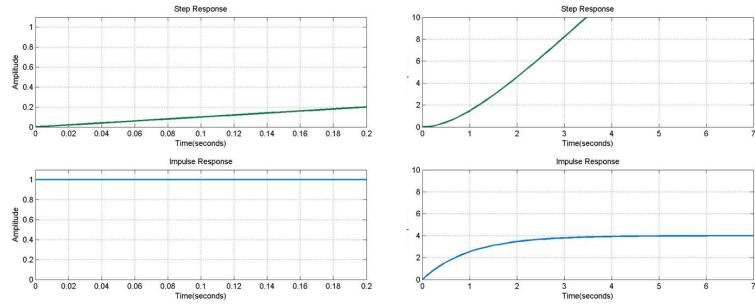


Abbildung 73: I und IT1

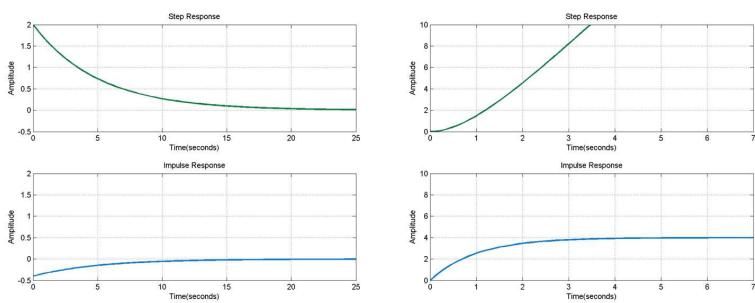


Abbildung 74: D und DT1

Anhang 4: Empfohlene Studienliteratur

1. J. Lunze (2001) Regelungstechnik 1, Systemtheoretische Grundlagen - Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen, 3. Auflage, Springer Verlag Berlin [u.a.]
2. M. Reuter, S.Zacher (2004) Regelungstechnik für Ingenieure, 11. Auflage, Vieweg Verlag Wiesbaden
3. H. Unbehauen (1997) Regelungstechnik 1, Klassische Verfahren zur Analyse und Synthese linearer kontinuierlicher Regelsysteme, 9. Auflage, Vieweg Verlag Wiesbaden [u.a.]

Die hier gegebenen Literaturhinweise dienen als Hilfestellung, um ihnen einen ersten Einblick in die umfangreiche Literatur zum Thema *Regelungstechnik* zu geben. Die getroffene Auswahl kann den wichtigen Aspekt des eigenen Literaturstudiums nicht ersetzen. Je nach Interesse und Fähigkeiten wird jeder selbst entscheiden, in welchem Umfang weiterführende und grundlegende Literatur im Selbststudium Berücksichtigung findet. In jedem Fall wünsche ich ihnen Freude bei der spannenden Reise durch unser Lehrgebiet: Per aspera ad astra!

Ihr Prof. Dr.-Ing-habil. Klaus-Peter Döge

Anhang 5: Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Wiederholung mathematischer Grundlagen für das Fach Regelungstechnik

1. Gegeben sei folgende Differentialgleichung mit den Anfangswerten Null.

$$2\ddot{x}_a + 12\dot{x}_a + 10x_a = 2\dot{x}_e + 20x_e$$

- a) Berechnen sie die Lösung der Differentialgleichung im Bildbereich in Abhängigkeit von einer beliebigen Eingangsgröße $X_e(s)$.

$$\text{Lösung: } X_a(s) = X_e(s) \frac{2s + 20}{2s^2 + 12s + 10}$$

- b) Zerlegen sie $X_a(s)$ in Partialbrüche für den Fall $X_e(s) = 1$.

$$\text{Lösung: } X_a(s) = -\frac{5}{4} \frac{1}{(s+5)} + \frac{9}{4} \frac{1}{(s+1)}$$

- c) Berechnen sie die Lösung der Differentialgleichung im Zeitbereich durch Rücktransformation von $X_a(s)$ mittels Transformationstabelle.

$$\text{Lösung: } x_a(t) = \frac{9}{4}e^{-t} - \frac{5}{4}e^{-5t}$$

2. Aufgabenstellung wie Aufgabe 1.

$$\ddot{x}_a + 6\dot{x}_a + 9x_a = 5\dot{x}_e$$

$$\text{Lösung: } x_a(t) = 5e^{-3t} - 15te^{-3t}$$

3. Aufgabenstellung wie Aufgabe 1.

$$\ddot{x}_a - 8\dot{x}_a + 7x_a = 2\dot{x}_e + 14x_e$$

$$\text{Lösung: } x_a(t) = \frac{2}{3}e^{7t} - \frac{8}{3}e^t + 2, \quad t \geq 0$$

4. Gegeben sei eine komplexe Zahl $z = a + jb$ mit dem Realteil $a = 0.5$ und dem Imaginärteil $b = 0.5\sqrt{3}$.

- a) Wie lauten Betrag und Argument der komplexen Zahl?
 b) Schreiben Sie die diese komplexe Zahl in algebraischer-, trigonometrischer- und Exponentialform auf und stellen sie jede Darstellungsform grafisch dar.

5. Gegeben seine eine komplexe Zahl $2 + j4$.

- a) Erweitern sie diese komplexe Zahl im Zähler und Nenner mit dem konjugiert-komplexen dieser Zahl.
 b) Erweitern Sie das Ergebnis obiger Aufgabe in Zähler und Nenner mit dem konjugiert-komplexen Nenner.

6. Trennen Sie die komplexe Funktion $G(j\omega) = \frac{2+j\omega}{j\omega(3+j\omega)}$ in Real- und Imaginärteil.

Aufgabe 2: Beschreibung des Übertragungsverhaltens linearer dynamischer Systeme

Das Übertragungsverhalten linearer dynamischer Systems kann durch lineare Differentialgleichungen, beispielsweise

$$\text{System 1: } x_a(t) = 4\dot{x}_e(t) + 8x_e(t) - 2\dot{x}_a(t) - \ddot{x}_a(t)$$

und

$$\text{System 2: } 7\ddot{x}_e(t) + 26\dot{x}_e(t) + 5x_e(t) = \ddot{x}_a(t) + 6\dot{x}_a(t) + 5x_a(t)$$

beschrieben werden. Zur vergleichenden Betrachtung der Systemeigenschaften sind folgende Aufgaben zu lösen:

1. Berechnen sie die Übertragungsfunktion.
2. Berechnen sie aus der Übertragungsfunktion die Gewichtsfunktion und stellen sie diese grafisch dar.
3. Berechnen sie aus der Übertragungsfunktion die Übergangsfunktion und stellen sie diese grafisch dar.
4. Treffen Sie eine Aussage zur Stabilität des Übertragungssystems.
5. Wie kann man das System mit Hilfe der Grundübertragungsglieder bezeichnen?

Lösungshilfe für System 1:

$$g(t) = 4e^{-t} + 4te^{-t} = 4e^{-t}(1+t), \quad h(t) = -8e^{-t} - 4te^{-t} + 8$$

Lösungshilfe für System 2:

$$g(t) = \frac{7}{2}e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-5t} + \sigma(t), \quad h(t) = -\frac{7}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-5t} + 4 + t$$

Aufgabe 3: Ermittlung von Bode-Diagramm und Ortskurve des Frequenzgangs

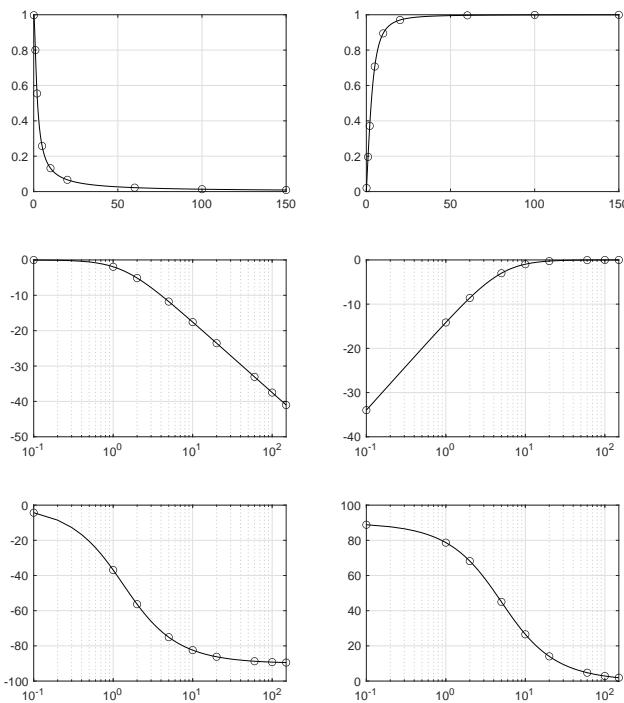
Gegeben sind die Übertragungsfunktionen

$$G_1(s) = \frac{4}{3s+4} \text{ und } G_2(s) = \frac{s}{s+5}.$$

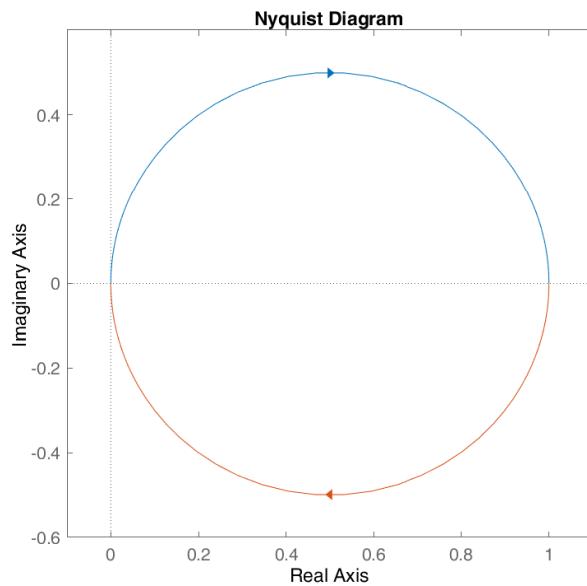
1. Benennen sie die Übertragungssysteme und bestimmen sie die Systemparameter.
2. Ermitteln sie die Gleichungen von Amplitudenfrequenzgang und Phasenfrequenzgang von System 1.
3. Ermitteln sie die Gleichungen von Amplitudenfrequenzgang und Phasenfrequenzgang von System 2.
4. Berechnen Sie mit Hilfe der folgenden Tabelle ausgewählte Werte zur grafischen Darstellung der Frequenzgänge und stellen sie diese grafisch dar.

ω	0,1	1	2	5	10	20	60	100	150
$ G_1(j\omega) $									
$20 \log_{10} G_1(j\omega) $									
$\arg \{G_1(j\omega)\}$									
$ G_2(j\omega) $									
$20 \log_{10} G_2(j\omega) $									
$\arg \{G_2(j\omega)\}$									

Lösung:



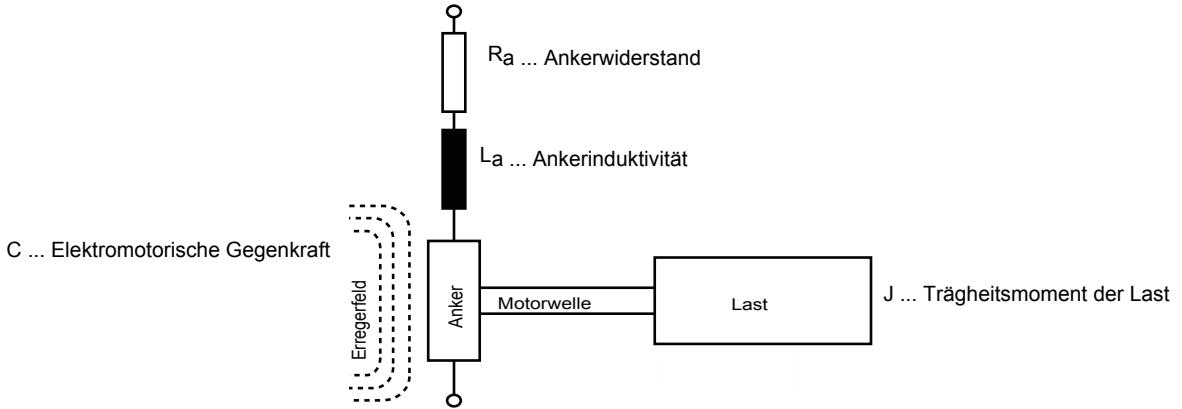
5. Konstruieren sie aus den gezeichneten Bode-Diagrammen die zugehörigen Ortskurven.
Lösung:



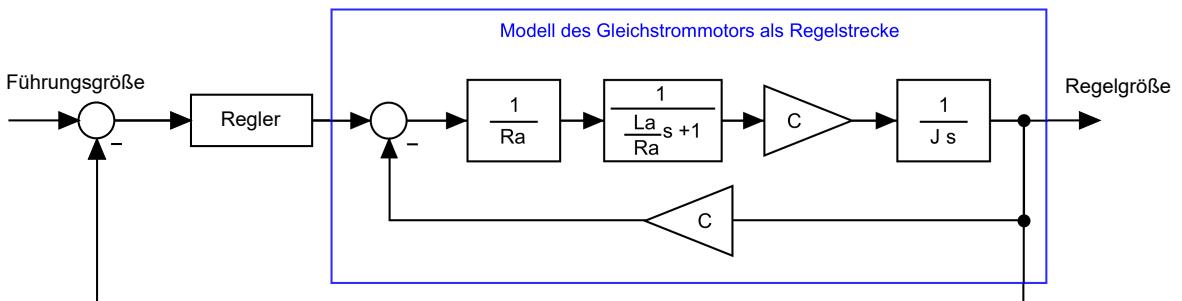
6. Zusatz: Betrachten sie die beiden Übertragungssysteme als RC-Schaltungen. Berechnen sie die Grenzfrequenzen und überprüfen sie diese Grenzfrequenzen anhand der Bode-Diagramme.

Aufgabe 4: Systematische Untersuchung der bleibenden Regelabweichung am Beispiel der Regelung eines Gleichstrommotors

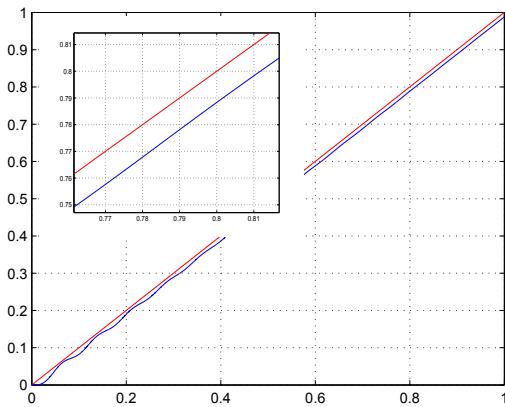
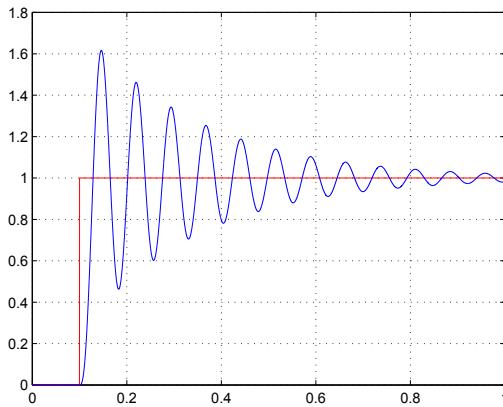
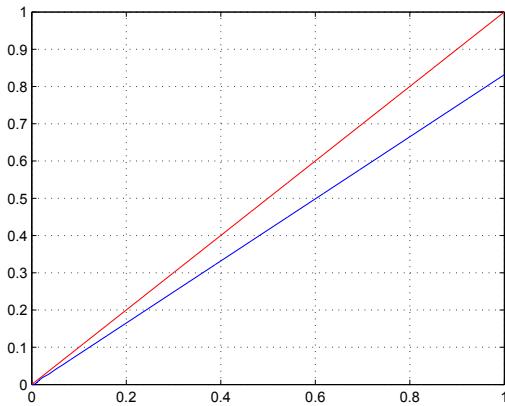
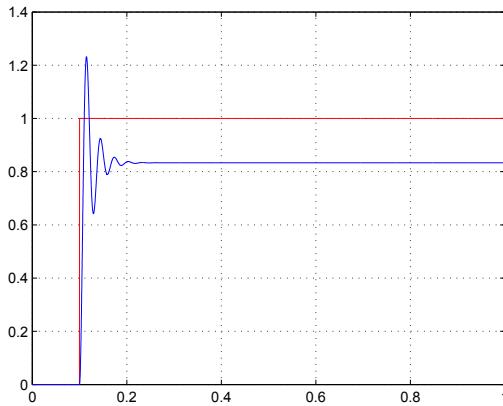
Untersucht werden soll die Regelung eines Gleichstrommotors mit Ankerstromregelung. Die folgende Abbildung zeigt die Prinzipdarstellung eines solchen Motors.



Der Anker ist mit der Motorwelle verbunden. Die Ankerwicklung wird durch den ohmschen Widerstand R_a und die Induktivität L_a beschrieben. Sie befindet sich in einem magnetischen Erregerfeld. Fließt ein Strom durch die Ankerwicklung, dann wirkt durch das Erregerfeld eine Kraft auf den Anker. Diese Kraft wird auf die Motorwelle übertragen. Dabei muss das Trägheitsmoment J der zu bewegenden Last überwunden werden. Im Modell wird die elektromotorische Gegenkraft in der Konstanten C berücksichtigt, die Reibung der Motorwelle jedoch zunächst vernachlässigt.

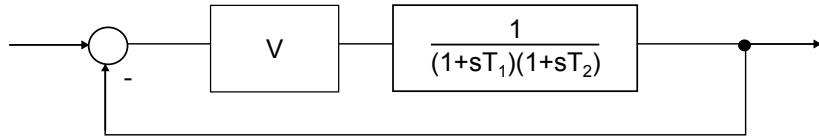


1. Machen Sie sich mit der Prinzipskizze des Gleichstrommotors und dem Blockschaltbild des Regelkreises vertraut.
2. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Gleichstrommotors.
3. Berechnen Sie die bleibende Regelabweichung bei Verwendung eines P-Regler mit der Verstärkung V .
 - a) Bei Verwendung einer sprungförmigen Führungsgröße der Sprunghöhe 1.
 - b) Bei Verwendung einer rampenförmigen Führungsgröße mit dem Anstieg 1.
4. Berechnen Sie die bleibende Regelabweichung bei Verwendung eines I-Reglers mit der Nachstellzeit T_N .
 - a) Bei Verwendung einer sprungförmigen Führungsgröße der Sprunghöhe 1.
 - b) Bei Verwendung einer rampenförmigen Führungsgröße mit dem Anstieg 1.
5. Ordnen Sie Ihre Rechenergebnisse den folgenden Simulationsergebnissen zu.
(rot: Führungsgröße, blau: Regelgröße)



Aufgabe 5: Das Hurwitz-Kriterium

1. Prüfen Sie, ob der gezeigte Regelkreis stabil arbeitet.



2. Eine nichtschwingungsfähige IT_2 -Regelstrecke

$$G_S(s) = \frac{k}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)T_3s}$$

soll mit einem Proportionalregler stabilisiert werden.

- a) Berechnen Sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums den allgemeinen Zusammenhang zwischen der kritischen Reglerverstärkung und den Streckenparametern.
- b) Berechnen sie nun die kritische Reglerverstärkung für die Streckenparameter $k = 0, 1$, $T_1 = 2s$, $T_2 = 10s$ und $T_3 = 1s$.
- c) Zeichnen Sie den Pol-Nullstellenplan des Regelkreises für die Fälle: $V < V_{kr}$, $V = V_{kr}$ und $V > V_{kr}$.
- d) Skizzieren sie den prinzipiellen Verlauf der Übergangsfunktionen des Regelkreises für die genannten Fälle.

3. Eine prinzipiell schwingungsfähige IT_2 -Regelstrecke

$$G_S(s) = \frac{k}{(T^2s^2 + 2DTs + 1)T_3s}$$

soll mit einem Proportionalregler stabilisiert werden.

Berechnen Sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums den allgemeinen Zusammenhang zwischen der kritischen Reglerverstärkung und den Streckenparametern.

4. Eine prinzipiell schwingungsfähige PT_2 -Regelstrecke

$$G_S(s) = \frac{k}{T^2s^2 + 2DTs + 1}$$

soll mit einem Proportionalregler stabilisiert werden.

Berechnen Sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums den allgemeinen Zusammenhang zwischen der kritischen Reglerverstärkung und den Streckenparametern.

Lösungen:

PT_2nsf	$IT2nsf$	$IT2sf$	PT_2sf
immer stabil	$V_{kr} = \frac{T_1T_3 + T_2T_3}{kT_1T_2} = 6$	$V_{kr} = \frac{2DT_3}{kT}$	immer stabil

Aufgabe 6: Das Nyquist-Kriterium

1. Eine PT_1 -Strecke soll mit einem P-Regler geregelt werden.
 - a) Berechnen Sie den Real- und den Imaginärteil des Frequenzgangs der offenen Kette.
 - b) Stellen Sie die Ortskurve des Frequenzgangs für die Parameter $k = 1$, $T = 1$ und $V = 5$ mit Hilfe der folgenden Wertetabelle grafisch dar.

ω	0	0,5	1	2	3	5	10
$Re\{G_0(j\omega)\}$							
$Im\{G_0(j\omega)\}$							
2. Eine PT_3 -Strecke soll mit einem P-Regler stabilisiert werden.
 - a) Berechnen Sie die Gleichung für die kritische Frequenz.
 - b) Berechnen Sie für eine konkrete Regelstrecke mit der Verstärkung 1 und Zeitkonstanten von $1s$, $20s$ und $3s$ den Zahlenwert der kritischen Frequenz und den Zahlenwert der kritischen Verstärkung.
 - c) Zeichen Sie den prinzipiellen Verlauf der Ortskurve des Frequenzgangs für die Fälle $V < V_{krit}$, $V = V_{krit}$ und $V > V_{krit}$
3. Weitere Aufgaben für das Selbststudium. Überprüfen Sie ihre Ergebnisse mit dem Hurwitz-Kriterium.
 - a) I-Regler und PT_1 -Strecke (Aufgabenstellung gemäß Aufgabe 1)

$$G_R(s) = \frac{1}{sT_N}$$

$$G_S(s) = \frac{k}{1 + sT_1}$$

Lösung: Der Regelkreis arbeitet immer stabil.

- b) I-Regler und PT_2 -Strecke (Aufgabenstellung gemäß Aufgabe 2)

$$G_R(s) = \frac{1}{sT_N}$$

$$G_S(s) = \frac{k}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$$

Lösung:

$$\omega_{kr} = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}, \quad T_{Nkr} = \frac{k T_1 T_2}{T_1 + T_2}$$

- c) P-Regler und PT_4 -Strecke (Aufgabenstellung gemäß Aufgabe 2)

$$G_R(s) = V$$

$$G_S(s) = \frac{k}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)(1 + sT_3)(1 + sT_4)}$$

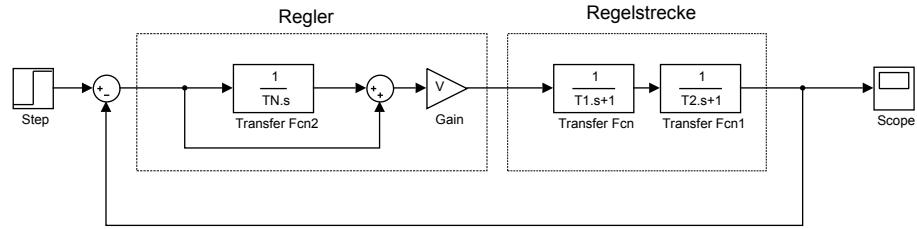
Lösung:

$$\omega_{kr} = \sqrt{\frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{T_1 T_3 T_4 + T_2 T_3 T_4 + T_1 T_2 T_3 + T_1 T_2 T_4}}$$

Mit $T_1 = 1, T_2 = 2, T_3 = 3, T_4 = 4$ folgt $V_{kr} = 5/k$.

Aufgabe 7: Untersuchung eines Regelkreises und seiner Komponenten

Gegeben sei der folgende Regelkreis:



1. Untersuchung des Reglers.
 - a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Reglers.
 - b) Ermitteln Sie anhand der Übertragungsfunktion, ob der Regler ein stabiles Übertragungsverhalten aufweist.
 - c) Um was für einen Regler handelt es sich?
2. Untersuchung des Regelstrecke
 - a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion der Regelstrecke.
 - b) Ermitteln Sie anhand der Übertragungsfunktion, ob die Strecke ein stabiles Übertragungsverhalten aufweisen kann.
 - c) Berechnen Sie die Gleichung der Übergangsfunktion der Regelstrecke und zeichnen sie deren prinzipiellen Verlauf. Benutzen Sie für die Rechnung die Abkürzungen $T'_1 = 1/T_1$ und $T'_2 = 1/T_2$.
3. Untersuchung des Regelkreises.
 - a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion der offenen Kette $G_0(s)$.
 - b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom des geschlossenen Regelkreises.
 - c) Prüfen Sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums für welche Reglerverstärkungen der Regelkreis mit den Parametern $T_1 = 2$, $T_2 = 3$ und $T_N = 1$ stabil arbeitet.

Simulationsergebnis:

