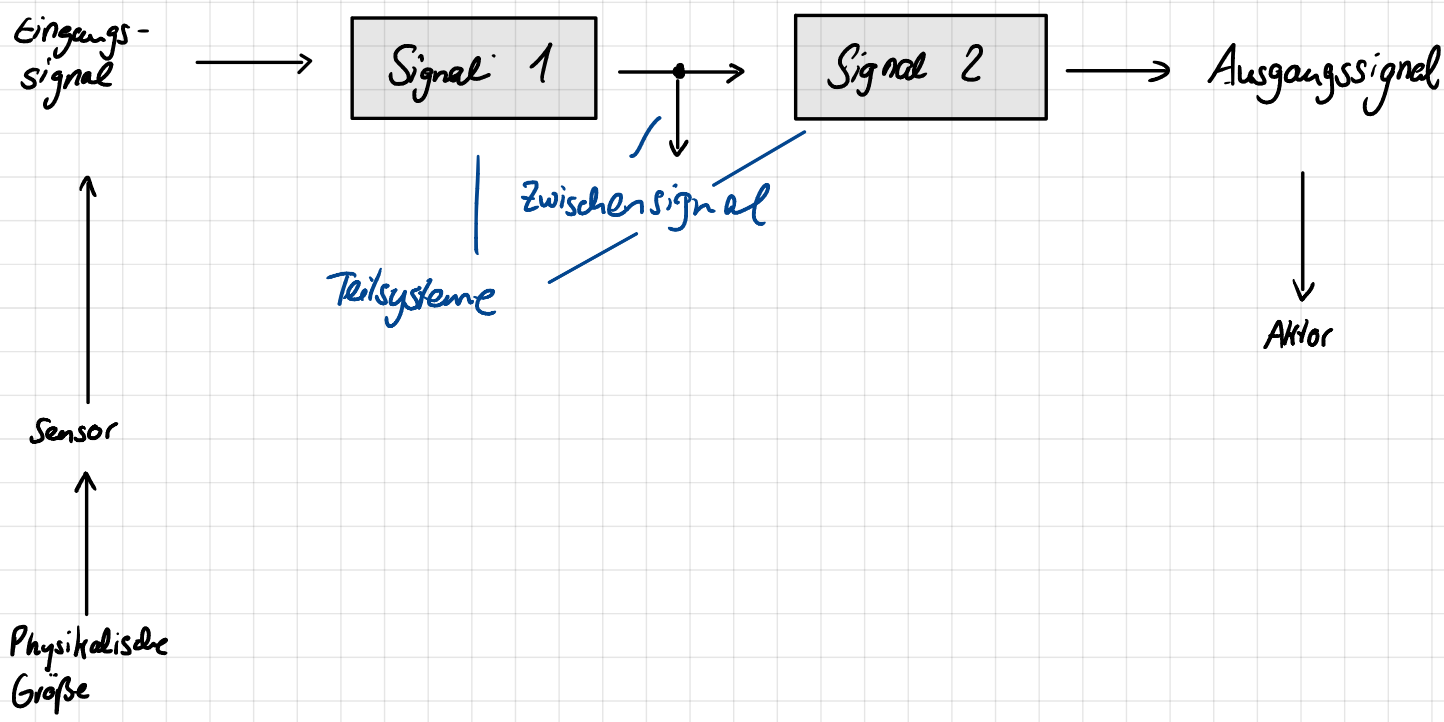
Modulnummer	**ET.1.302**
Modulname	**Signal- und Systemtheorie**
Fachbereich	Elektrotechnik und Informationstechnik
Studiengang	ET/IT (Ba)
Modulverantwortlicher	Prof. Dr.-Ing. Frank Giesecke
Pflicht- /Wahlpflicht	Pflichtmodul
Qualifikationsziele	Erlernen von Verfahren zur Analyse von Signalen und Systemen für Spezifikation und Test moderner Kommunikationssysteme und automatisierungstechnischer Lösungen.
Inhalt	Standardsignale – Signalklassifizierung – statistische Kenngrößen von Signalen – Systemeigenschaften – Charakterisierung von Systemen – Faltungsoperation – Fourier-Transformation – Laplace-Transformation – Abtasttheorem – Korrelationsfunktion
Lehrformen	4V – 2Ü – 0S – 0P
Lehrmaterialien	Vorlesungsscripte, Lehrbücher, Aufgaben und Lösungen
Literaturangaben	Frey, T.; Bossert, M.: Signal- und Systemtheorie Kreß, D.; Irmer, R.: Angewandte Systemtheorie Meyer, M.: Grundlagen der Informationstechnik
Lernform/ eingesetzte Medien	Vorlesungen, Übungen
Niveaustufe (Ba=1, Ma=2)	1
Semester (WS, SS)	WS
Semesterlage	3. Semester
Erforderliche Voraussetzungen	keine
Empfohlene Vorkenntnisse	Mathematik, Grundlagen Elektrotechnik, Grundlagen Informatik
Prüfungsform	Klausur 90 min
Prüfungsart (PL, APL)	PL - Prüfungsleistung während des Prüfungszeitraums(benotet)

Klausur Hilfsmittel

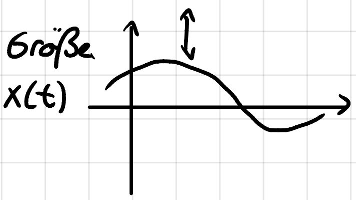
- Papula Formelsammlung
- Eigene Formelsammlung (unbegrenzt)
- Folie für Funktionen zeichnen

Literatur
-Frey, Bossert: Signal - und Systemtheorie
- Meyer: Grundlagen der Informationstechnik
- Kreß, Irmer: Angewandte Systemtheorie

- Übungsaufgaben: Voigt: Signal- und Systemtheorie in Beispielen

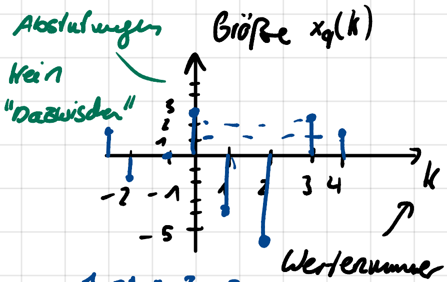


Analogsignal



- Größe hat zu jedem Zeitpunkt einen definierten Wert } = zeitkontinuierlich
- Größe kann jeden beliebigen Wert annehmen } = wertkontinuierlich

Digitalsignal



- Größe nimmt nur bestimmte Werte an = wertdiskret (q)
- Größe ist nur zu bestimmten Zeitpunkten definiert } = zeitdiskret

k	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x(k)	1	-1	0	3	-3	-4	2	1

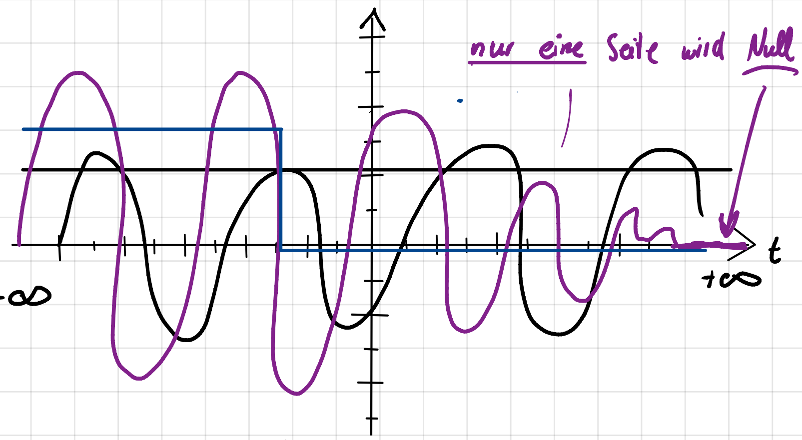
Bsp. $\overbrace{2{,}5}^{\text{Genauigkeit}} \cdot \underbrace{10^6}_{}$ Zahlenbereich

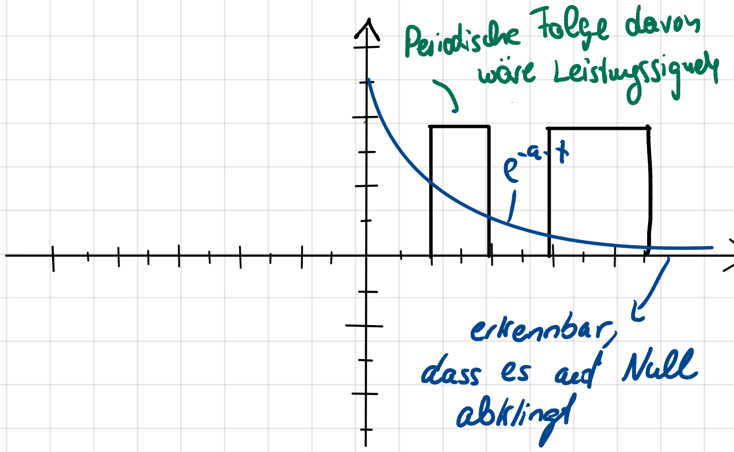
- Gleitkommarechnung ← Grobe Quantisierung fällt bei leisen Tönen mehr auf, als bei lauten Tönen

Signalbeschreibung

Signaltypen

Leistungssignale	Energiesignale
zeitlich unbegrenzter Verlauf, der nicht auf Null abklingt	Zeitlich begrenztes Signal mit in beiden Richtungen der Zeit abklingenden Werten auf 0





⇒ wird. Einseitige "Unendlichkeit"

Energiesignale

Impulsfläche A_x

= Impulsmoment 1. Ordnung m_{i1}

$$A = m_{i1} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt$$

Signalenergie E_x

= Impulsmoment 2. Ordnung m_{i2}

$$E_x = m_{i2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt$$

digitale Größen

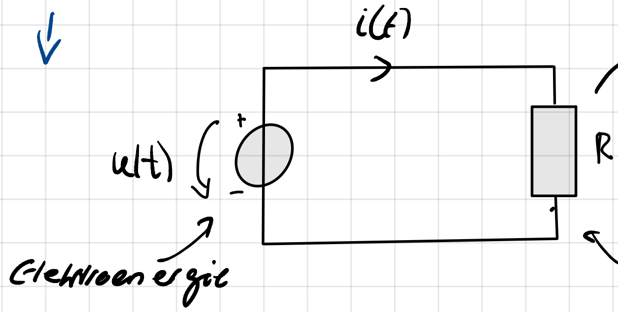
? $x(q)$?

$$A_x = m_{i1} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_q(k) \qquad E_x = m_{i2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_q^2(k)$$

- Energie u. Leistung beschreiben Umwandlung von Energieformen

↓

Erklärung der Formeln :



Wärmeenergie

$$R = \frac{U}{I} = \frac{u(t)}{i(t)} \Leftrightarrow i(t) = \frac{u(t)}{R} \qquad (1)$$

Energiewandler

gewandelte Energiemenge:

$$[E_R] = V \cdot A \cdot s$$

$$E_R = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot i(t) \cdot dt = Ws = J \text{ (Joule)}$$

$$E_R \overset{(1)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot \frac{u(t)}{R} \cdot dt = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t) \cdot dt$$

- Signalenergie: energiewandler-<u>unabhängige</u> Beschreibung (2)

wählen: $R = 1$ (ohne Einheit) $\Rightarrow$ $E_u = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t) \cdot dt$ $\quad [E_u] = V^2 \cdot s$

- Digitale Signale können nicht in eine andere Energieform umgewandelt werden, <u>ohne</u> einen Wandler, der Energie benötigt

Signal
- Energiesignal
  - Impulsfläche
  - Signalenergie
- Leistungssignal

Reihenfolge beachten: $\bar{x}^2 \neq \overline{x^2}$

Amplitudengrößen $[x]$:

- Gleichanteil $\bar{x}$ $\xrightarrow{\bar{x}^2}$ Signalgleichleistung $\bar{x}^2 = P_{x=}$
- (Effektivwert des Wechselanteils) Standardabweichung σ $\xrightarrow{\sigma^2}$ Signalwechselleistung (= Varianz) $\sigma^2 = P_{x\sim}$ ($= \mu^2$); $\sqrt{P_{x\sim}}$ zurück
- Effektivwert $x_{eff} = \sqrt{\overline{x^2}}$ (quad. Mittelwert) $\xleftarrow{\sqrt{\overline{x^2}}}$ Mittlere Signalleistung (= Gesamtsignalleistung) $P_x = \overline{x^2} = x_{eff}^2$

Leistungsgrößen $[x^2]$:

Signalgleichleistung + Signalwechselleistung = Mittlere Signalleistung

Amplitudengrößen

Leistungsgrößen

$P_R(t) = u(t)\cdot i(t)$

<u>mittlere Leistung</u> $\quad P_R = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} u(t)\cdot i(t)\,dt$

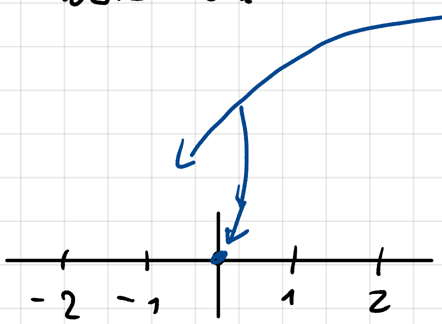
$\overset{(1)}{=} \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T\cdot R}\int_{-T}^{+T} u^2(t)\,dt \quad \overset{(2)}{\longrightarrow} R = 1$ setzen: $\quad P_u = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\cdot\int_{-T}^{+T} u^2(t)\cdot dt$

$[P_u] = V^2$

↓ mittlere Signalleistung für einen beliebigen Verlauf

für Digital: $P_x = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\cdot\sum_{k=-N}^{+N} x^2(k)$ $\qquad$ Digitale Daten sind einheitenlos

N: Werteanzahl



Leistungssignal

- Beliebiger Verlauf (= zufälliger oder stochastischer Verlauf) = periodischer Verlauf mit Periodendauer ∞
- periodischer Verlauf
- konstanter Verlauf

<u>Berechnung der mittleren Signalleistung</u>

mittlere Signalleistung = quadratischer Mittelwert = Moment 2. Ordnung

$P_x = \overline{x^2} = m_2 = \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)\,dt$ $\qquad$ $\boxed{\text{Digital}}$ $\quad P_x = \overline{x^2} = m_2 = \lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} x^2(k)$

Beliebiger Verlauf

Periodischer Verlauf

$$P_x = \overline{x^2} = m_2 = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+T} x^2(t)\,dt$$

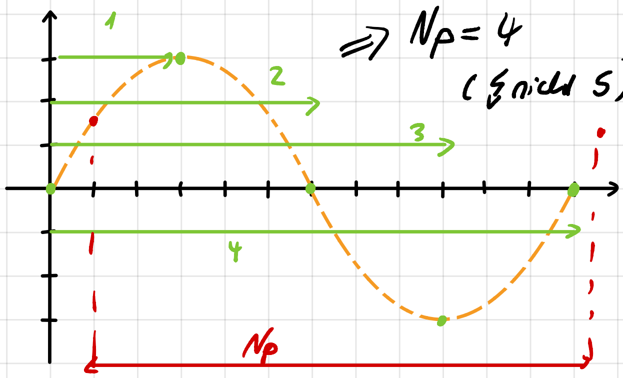
Periodendauer

t_1: beliebiger Startzeitpunkt der Periode

Digital

$$P_x = \overline{x^2} = m_2 = \frac{1}{N_p} \cdot \sum_{k=k_1}^{k_1+N_p-1} x^2(k)$$

N_p: Anzahl der Punktabstände innerhalb einer Periode)



$\Rightarrow N_p = 4$

(≠ nicht 5)

Konstanter Verlauf

$$P_x = \overline{x^2} = m_2 = x^2(t_1)$$

t_1: Beliebiger Zeitpunkt

Digital $P_x = \overline{x^2} = m_2 = x^2(k_1)$

k_1: Beliebige Position d.

Konstanten Wertes

Einheit $[x^2]$

Berechnung des Gleichanteils

Gleichanteil = Linearer Mittelwert = Moment 1. Ordnung

$\overline{x} = m_1$

... Wie bei mittl. Signall. nur ohne quadrieren

$$P_x = \overline{x} = m_2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\,dt$$

Digital

$$P_x = \overline{x} = m_2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} x(k)$$

Beliebiger Verlauf

$$\Rightarrow = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

...

bei $f(x)$ als Wahrscheinlichkeitdichtefunktion (Amplitudenhäufigkeit)

>> Wiederholung ...

‼ Nur relevant für Computerprogramme, nicht für Übung, Klausur, ...

Alternative Berechnung der Signalwechselleistung = Varianz = Zentralmoment 2. Ordnung

$$P_{x\sim} = \sigma^2 = \mu_2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \underbrace{(x(t) - \bar{x})^2}_{} \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 \cdot f(x)\, dx = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^{T} \left(x(t) - \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\,dt\right)^2 dt$$

→ Größe, ohne Gleichanteil

↳ Mittelwert = Gleichanteil = 0

>> Beweis ...

... Digital aus einem Datensatz

Annahme: endliches Messintervall mit N Werten (Praxis)

Fallbetrachtung

linearer Mittelwert = Gleichanteil ist exakt bekannt oder kann bestimmt werden

$\bar{x}$ ← genau bekannt

$$\sigma^2 = P_{x\sim} = \mu_2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} (x(k) - \bar{x})^2$$

k_1: Position des 1. Wertes des Blockes

linearer Mittelwert wird aus den N Werten des Messintervalls bestimmt

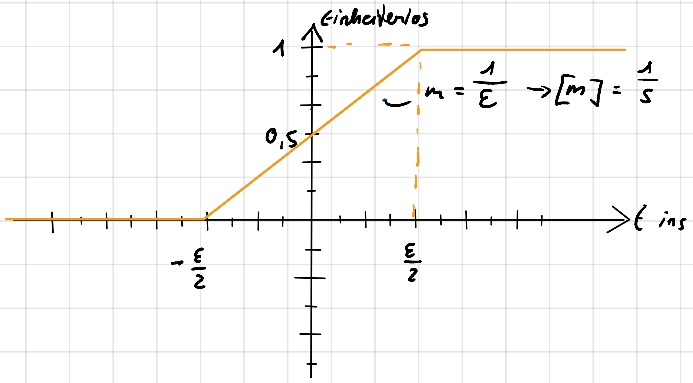
$\bar{x}_N$ ← ungenau $\bar{x}_N = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} x(k)$

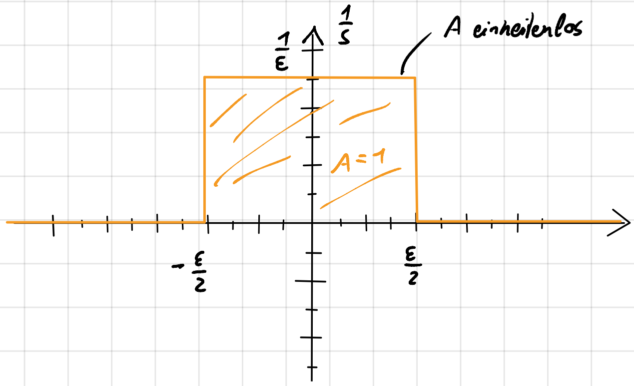
$$\sigma^2 = P_{x\sim} = \mu_2 = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} (x(k) - \bar{x}_N)^2$$

$$= \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} \left(x(k) - \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} x(k)\right)^2$$

Definierte Anregungsfunktionen, zur Nutzung der Beschreibung eines Systems

angenäherter Einheitssprung $\tilde{\sigma}(t,\varepsilon)$ $\xrightarrow{\frac{d}{dt}}$ Einheitsimpuls $\tilde{\delta}(t,\varepsilon)$





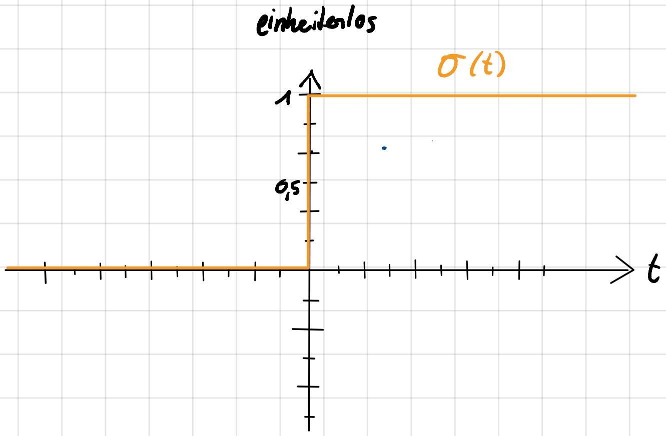
$\xleftarrow{\int}$

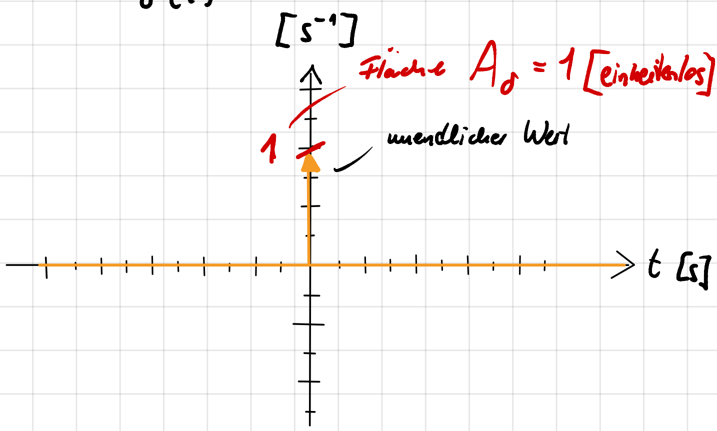
Integrationsgrenzen Anfang bei $-\infty$, Ende ist aktueller Zeitpunkt (Grenze läuft)

$$\tilde{\sigma}(t,\varepsilon) = \int_{-\infty}^{t} \tilde{\delta}(\tau,\varepsilon) \cdot d\tau$$ (Parameterintegral)

Einheitssprung $(\varepsilon \rightarrow 0)$ $\xrightarrow{\frac{d}{dt}}$ Deltaimpuls = Diracimpuls = Diracstoß

$\delta(t)$





$\xleftarrow{\int}$

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0{,}5 & \text{für } t = 0 \text{ (Sprungstelle)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau)\, d\tau$$

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty \ s^{-1} & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

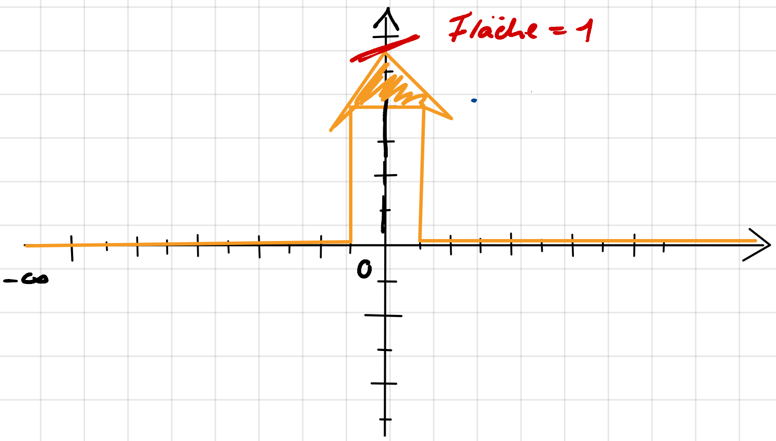
Anwendung

$u(t) = 3V \cdot \sigma(t)$

$$A_\delta = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon} \delta(t) \cdot dt = 1$$

Wenn nur ein δ-Impuls auf Zeitachse: $A_\delta = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$

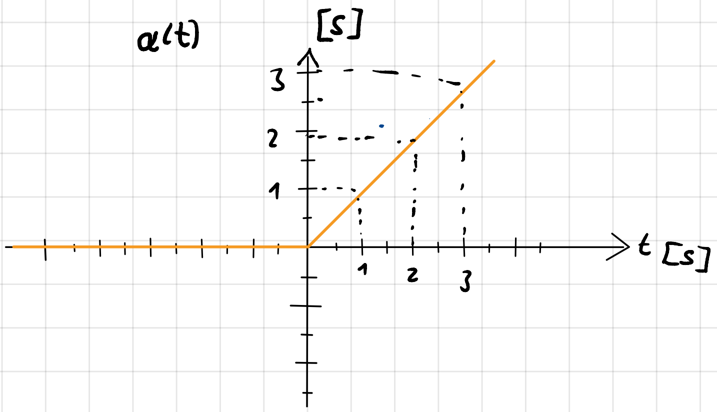
Aufspaltung des δ-Impulses in seiner Mitte



$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{0-\varepsilon}^{0} \delta(t)\,dt = \frac{1}{2}$$

nur ein δ-Impuls: $\int_{-\infty}^{0} \delta(t)\,dt = \frac{1}{2}$

Einheitsanstiegsfunktion $\alpha(t)$

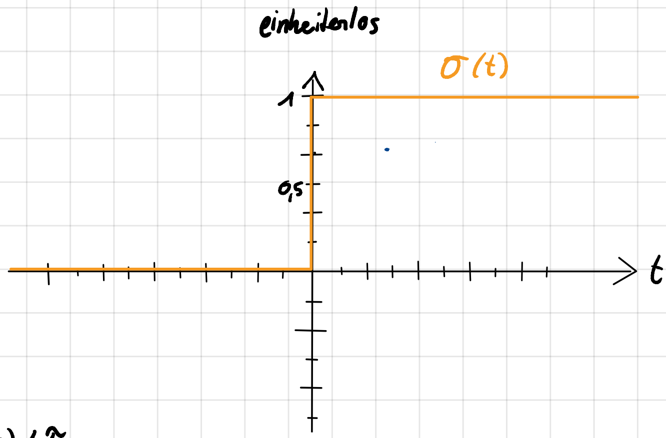


$$\alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ t & \text{sonst} \end{cases}$$

$\xrightarrow{\frac{d}{dt}}$

$\xleftarrow{\int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau)\,d\tau}$

Einheitssprung $(\varepsilon \to 0)$

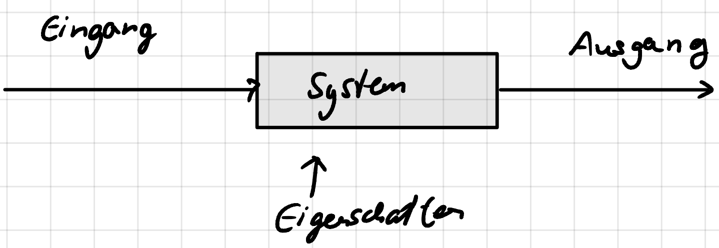


Umwandlung der Anregungen des Systems

$$\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} \qquad \sigma(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau$$

$$\alpha(t) = \int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} \left(\int_{-\infty}^{\tau} \delta(v)\,dv \right) d\tau$$

definierte Anregung, definierte Stimulation



definierte Systemantwort

Anwendungen von $\delta(t)$, $\sigma(t)$ und $\alpha(t)$ als Systemanregung

Deltaimpuls $\delta(t) = \ldots \longrightarrow$ $\boxed{\text{LTI-System}}$ $\longrightarrow$ Impulsantwort = Gewichtsfunktion = Stoßantwort $g(t)$

$\downarrow \uparrow$ $\qquad\qquad$ $\downarrow \int_{-\infty}^{t} \ldots$ $\qquad \uparrow \frac{dh}{dt}$

Einheitssprung $\sigma(t) \longrightarrow$ $\boxed{\text{LTI-System}}$ $\longrightarrow$ Sprungantwort = Übergangsfunktion $h(t)$

$\downarrow \uparrow$ $\qquad\qquad$ $\downarrow \int_{-\infty}^{t} \ldots$ $\qquad \uparrow \frac{da}{dt}$

Einheitsanstieg $\alpha(t) \longrightarrow$ $\boxed{\text{LTI-System}}$ $\longrightarrow$ Anstiegsantwort $a(t)$

Umwandlung der Antworten des Systems

$$g(t) = \frac{dh}{dt} = \frac{d^2 a}{dt^2} \qquad h(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau)\,d\tau = \frac{da}{dt} \qquad a(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t}\left(\int_{-\infty}^{\tau} g(\nu)\,d\nu\right)d\tau$$

Kennzeichen linearer Elemente: Operationsreihenfolge ist vertauschbar

Bsp: Einheitssprung als Anregung $\sigma(t)$, Impulsantwort $g(t)$ gewünscht

1. Weg $\quad \sigma(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI-System}} \xrightarrow{h(t)} \boxed{\frac{d}{dt}} \longrightarrow g(t)$

2. Weg $\quad \sigma(t) \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}} \xrightarrow{\delta(t)} \boxed{\text{LTI-System}} \longrightarrow g(t)$

Kennzeichen linearer Elemente: Operationsreihenfolge ist vertauschbar

Bsp: Einheitssprung als Anregung ($\sigma(t)$), Impulsantwort gewünscht ($g(t)$)

1\. Weg: $\sigma(t) \longrightarrow$ [LTI-System] $\xrightarrow{h(t)}$ [$\frac{d}{dt}$] (Differenzierer) $\longrightarrow g(t)$

2\. Weg: $\sigma(t) \longrightarrow$ [$\frac{d}{dt}$] (Differenzierer) $\xrightarrow{\delta(t)}$ [LTI-System] $\longrightarrow g(t)$

6. Vorlesung (4.11.24)

Charakterisierung eines LTI-Systems

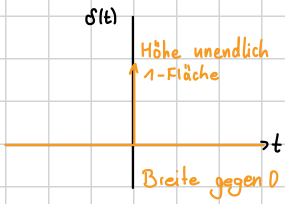
(LTI: lineares und zeitinvariantes System)

Charakterisierung mit der Impulsantwort $g(t)$ = Gewichtsfunktion = Stoßantwort

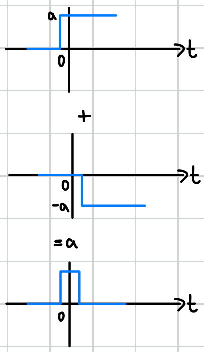
$\delta(t) \circ\!\!\longrightarrow$ [System] $\longrightarrow g(t)$ zeitdiskrete oder digitale Impulsantwort

Delta-Impuls
= Dirac-Impuls

Praxis: Problem der Erzeugung eines Delta-Impuls



In der Praxis → schmales und hohes (hohe Amplitude) Rechteck →



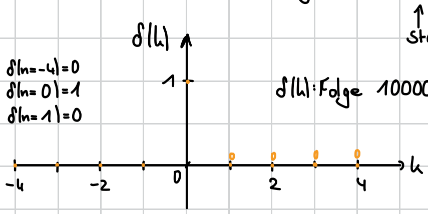
für die Praxis einfacher realisierbar

Test digitaler LTI-Systeme

- zeitdiskreter oder digitaler Delta-Impuls $\delta(k)$

Zahlenfolge 00…00100…00
↑ Startzeitpunkt

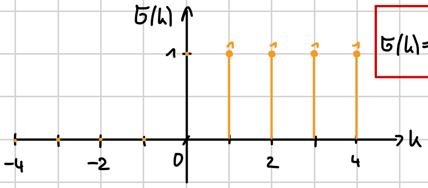
$\delta(n=-4)=0$
$\delta(n=0)=1$
$\delta(n=1)=0$



$\delta(k)$: Folge 10000…00 ⟵ ideal realisierbar

$\delta(t) \circ\!\!\longrightarrow \boxed{\text{System}} \longrightarrow g(t)$ zeitdiskrete oder digitale Impulsantwort

- zeitdiskreter oder digitaler Einheitssprung $\sigma(k)$



$$\boxed{\sigma(k) = \sum_{n=-\infty}^{k} \delta(n)}$$

Startzeitpunkt
↓
Zahlenfolge 00…0011111111…11

$\sigma(k)$: Folge $\underbrace{111…11}_{\text{ideal realisierbar}}$

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\cdot d\tau$$

$\sigma(k) \bullet\!\!\longrightarrow \boxed{\text{System}} \longrightarrow\!\circ\ h(k)$

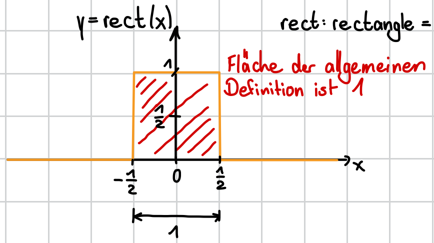
zeitdiskrete oder digitale Sprungantwort

$$\delta(t) = \frac{d\,\sigma(t)}{dt}$$

$$\delta(k) = \sigma(k) - \sigma(k-1)$$

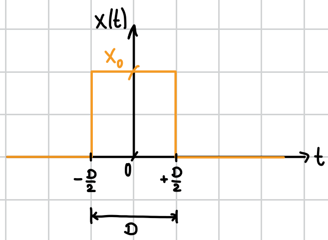
Rechteckimpuls oder Rechteckfunktion

rect: rectangle = Rechteck



$$y = \mathrm{rect}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{für } |x| = \frac{1}{2} \text{ (Sprungstelle)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

praktische Anwendung als Zeitfunktion mit Rechteckbreite D und Höhe von X_0 ($x(t)$ als physikalische Größe)



$x(t) = X_0 \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{D}\right)$ für $t = +\frac{D}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

$\frac{D}{2}\cdot a = \frac{1}{2} \mid \cdot 2; :D \qquad a = \frac{1}{D}$

für $t = +\frac{D}{2} \rightarrow$ Klammerausdruck

$$\left(\frac{\frac{D}{2}}{D}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)$$

für $t = -\frac{D}{2} \rightarrow$ Klammerausdruck

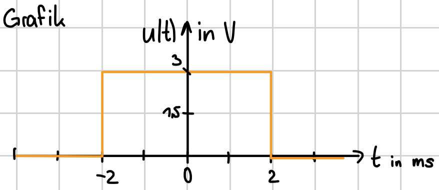
$$\left(-\frac{D}{2}\cdot\frac{1}{D}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x(t) = X_0 \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{D}\right) = \begin{cases} X_0 & \text{für } |t| < \frac{D}{2} \\ \frac{X_0}{2} & \text{für } |t| = \frac{D}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

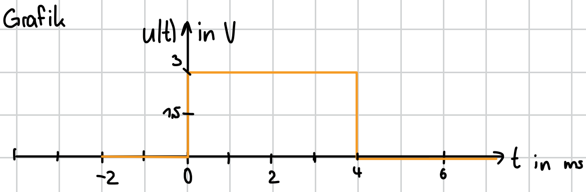
Anwendungsbeispiel:

$$u(t) = 3V \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{4ms}\right) \qquad\qquad u(t) = 3V \cdot \text{rect}\left(\frac{t-2ms}{4ms}\right)$$

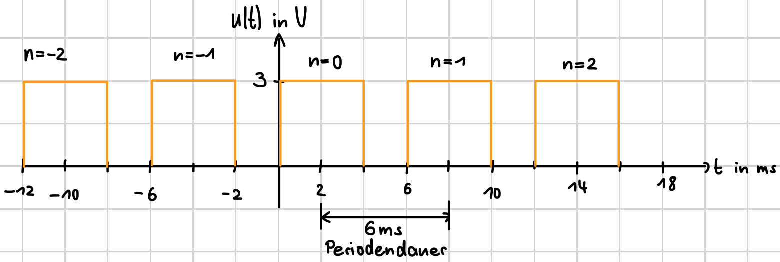
Grafik



Grafik



Bsp.: Grafik



n...ganzzahlig

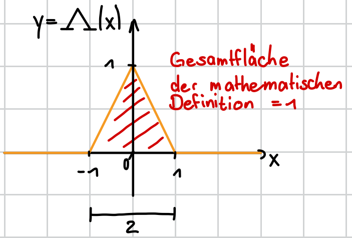
$$\underbrace{u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 3V \cdot \text{rect}\left(\frac{t-2ms-n \cdot 6ms}{4ms}\right)}_{\text{periodische Rechteckfolge}}$$

für $0 \leq n \leq 2$: $u(t) = \sum_{n=0}^{2} 3V \cdot \text{rect}\left(\frac{t-2ms-n \cdot 6ms}{4ms}\right)$

$$= 3V \cdot \left(\text{rect}\left(\frac{t-2ms}{4ms}\right) + \text{rect}\left(\frac{t-8ms}{4ms}\right) + \text{rect}\left(\frac{t-14ms}{4ms}\right)\right)$$

Dreieckimpuls oder Dreieckfunktion

$\Lambda \rightarrow$ großes griechisches Lambda

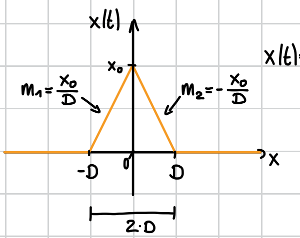


$$y = \Lambda(x) = \begin{cases} x+1 & \text{für } -1 < x < 0 \\ -x+1 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

oder

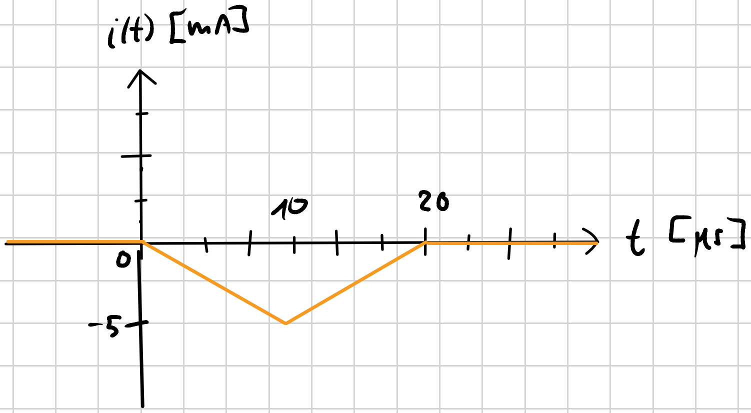
$$y = \Lambda(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Anwendung als Dreieckimpuls über der Zeit mit max. Wert x_0



$$x(t) = x_0 \cdot \Lambda\left(\frac{t}{D}\right)$$

$$x(t) = x_0 \cdot \Lambda\left(\frac{t}{D}\right) = \begin{cases} \frac{x_0}{D} \cdot t + x_0 & \text{für } -D < t < 0 \\ -\frac{x_0}{D} \cdot t + x_0 & \text{für } 0 \leq t < D \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



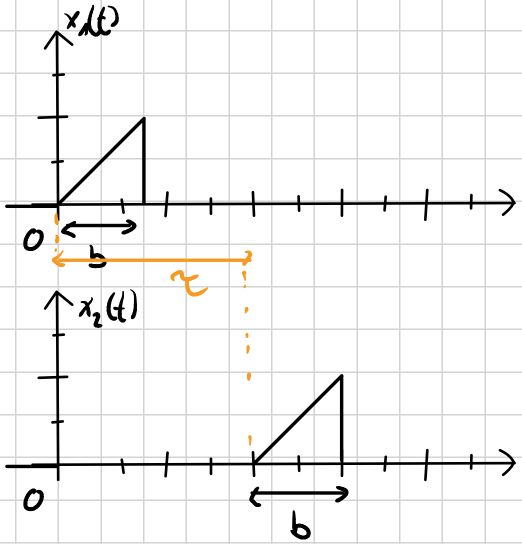
$$i(t) = -5\,mA \cdot \Lambda\left(\frac{t-10\mu s}{10\mu s}\right)$$

Korrelation

Ermittlung von Ähnlichkeiten von Verläufen über einer Achse

Bsp.: Signal $x_1(t)$

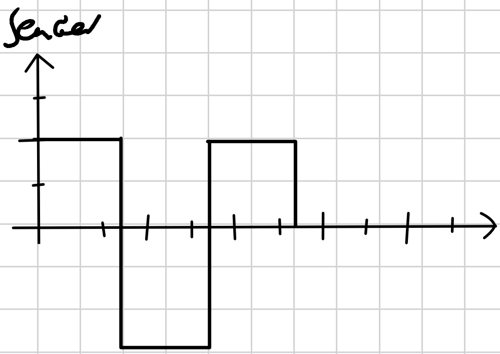
Signal $x_2(t)$



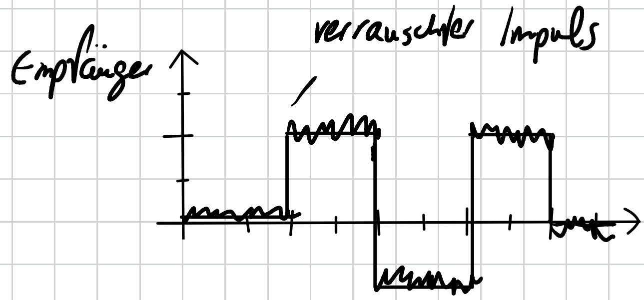
τ: Zeitliche Differenz

1. Aufgabe d. Korrelation bei vorhandener Ähnlichkeit: Ermittlung einer zeitlichen Differenz zwischen zwei Impulsen
2. Aufgabe d. Korrelation: Erkennung von Impulsen, die die gleiche Form haben

Sendung



→



Autokorrelation des Verlaufes mit sich selbst Anwendung: Charakterisierung von zufälligen Verläufen z.B. Rauschen

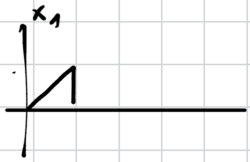
1. & 2. sind Kreuzkorrelationen: Korrelation von zwei verschiedenen Verläufen

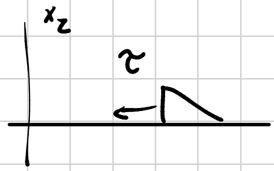
grundsätzliche mathem. Beziehung für das Ähnlichkeitsmaß (τ)

$$E_{x_1 x_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) \cdot x_2(t+\tau)\, dt$$

Grundformel der Kreuzkorrelation zweier Verläufe

$$\underbrace{E_{x_1 x_2}(\tau)}_{\text{Kreuzenergie}} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) \cdot x_2(t+\tau)\, dt$$





↳ Wert wird größer, je naher x_2 an x_1 $\Rightarrow$ $\tau \downarrow$

Autokorrelation

$x_1 = x_2 = x$

$$E_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x(t+\tau)\, dt$$

Signalenergie

bei $\tau = 0$: $E_{xx}(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\, dt$

für 2 Spannungen: $E_{u_1 u_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t) \cdot u_2(t+\tau)\, dt$ $\quad [E_{u_1 u_2}] = V^2 s$

Digital

l: ganzzahlig

$$E_{x_1 x_2}(l) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) \cdot x_2(k+l)$$

Transformationen

Fourier-Integral ; Ziel: Erkennung enthaltener Frequenzanteile

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \underbrace{e^{-j 2\pi f t}} \, dt$$

Frequenz

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$$

$$\Rightarrow X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi f t)\, dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \sin(2\pi f t) \cdot dt$$

Norminierung des Kreuzkorrelationsergebnisses

Ziel: $E_{x_1x_2}(\tau)$ im Bereich $-1 \leq E_{x_1x_2}(\tau) \leq +1$ ⇒ Ähnlichkeitsuntersuchung unabhängig von Amplitudenhöhe, Negierung und Energie

-1: 100%-ige Ähnlichkeit, aber negierte Impulsform $(\cdot(-1))$

1: 100%-ige Ähnlichkeit

geometrischer Mittelwert

$$\overset{o}{x} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

~ Warum geom. MW?

↳ Die Kombination der Signale ist ein multiplikativer Zusammenhang, daher ungeeignet für arithm. MW

$$\lg \overset{o}{x} = \frac{1}{n} \cdot (\lg x_1 + \lg x_2 + \ldots + \lg x_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \lg x_i$$

bezogen auf die Energie der 2 Signale E_{x1} und E_{x2}

$$\overset{o}{E}_{x_1x_2} = \sqrt{E_{x_1} \cdot E_{x_2}} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2(t)\,dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x_2^2(t)\,dt}$$

normierte Kreuzkorrelation

$$r_{x_1x_2}(\tau) = \frac{E_{x_1x_2}(\tau)}{\overset{o}{E}_{x_1x_2}} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) \cdot x_2(t+\tau)\,dt}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2(t)\,dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x_2^2(t)\,dt}}$$

hier gilt $-1 \leq r_{x_1x_2}(\tau) \leq +1$

$r_{x_1x_2}$ einheitenlos

$\boxed{\text{Digital}}$ /zeitdiskret

$$r_{x_1x_2}(\ell) = \frac{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) \cdot x_2(k+\ell)}{\sqrt{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1^2(k) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_2^2(k)}}$$