Signal und System Theorie

Fachsemester 3

Prof. Dr.-Ing. Frank Giesecke

16.10.2024 (Vorlesung noch nicht nachgetragen)

21.10.2024 (Vorlesung noch nicht nachgetragen)

23.10.2024 (Vorlesung noch nicht nachgetragen)

28.10.2024

Wiederholung

1. Leistungssignale
   Gleichanteil/ linearer Mittelwert/ Moment 1. Ordnung
   $\bar{x} = (coming_soon)$
   $$f(x) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} x^2 \, dt$$
2. Signalgleichleistung
   (Leistung, die den Gleichanteil verursacht)
   $P_{x=} = \bar{x}^2 = m_1^2$
3. mittlere Signalleistung/ quadratische Mittelwert/ Gesamt-Signalleistung / Moment 2. Ordnung
   $P = \bar{x^2} = m_2 = (coming_soon)$
4. Effektivwert (Wurzel aus der mittleren Signalleistung)
   $x_{eff} = \sqrt{P} = \sqrt{x^2}$
5. Signalwechselleistung/ Varianz/ Zentral-Moment 2. Ordnung
   $P_x \ = \sigma^2 = \mu_2 = P_x - P_{x=} = \bar{x^2} - \bar{x}^2$
6. Standartabweichung
   $\sigma = \sqrt{P_x \ } = \sqrt{\mu_2}$

Alternative Berechnung der Signalwechselleistung/ Varianz/ Zentral-Moment 2. Ordnung

$P_x \ = (coming_soon)$
$P_x \ = P_x - P_x$

Direkte Berechnung der Varianz/ Signalwechselspannung aus einem Datensatz (digital)

Fallunterscheidung linerer Mittelwert/ Gleichanteil ist bekannt oder kann exakt bestimmt werden.
$\bar{x} istbekannt$
$\sigma^2 = P_x \ = \mu_2 = (coming_soon)$

linearer Mittelwert wird aus den N Werten bestimmt.
$\bar{x} istun-bekannt$
$\bar{x_N} = (coming_soon)$
$\sigma^2 = P_x = (coming_soon)$

N = Anzahl der Werte

Es folgt:

Angenäherter Einheitssprung, Einheitssprung-Funktion, Einheitsimpuls-Funktion, Deltaimpuls/ Dirac-Impuls, Einheitsanstiegs-Funktion

Angenäherter Einheitssprung (δ delta)

(grafic is coming soon)

$\overrightarrow{Differentation}$
$(\frac{d}{dt})$

$\overleftarrow{Integration}$
$\hookrightarrow$ Intigrationsgrenzen
$-\infty bisaktuellerZeitpunkt(t)$
$\sigma = (coming_soon)$

(grafic is coming soon)

30.10.2024 (Vorlesung noch nicht nachgetragen)

06.11.2024 (Vorlesung noch nicht nachgetragen)

04.11.2024 (Vorlesung noch nicht nachgetragen)

11.11.2024

Ergänzung: Kreuzrelation

$$E_{x1x2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) * x_2(t+\tau) * dt$$

mindestens eines der Verläufe muss ein Energiesignal sein.
Wenn beide Verläufe x_1 und x_2 Leistungssignale sind, dann:

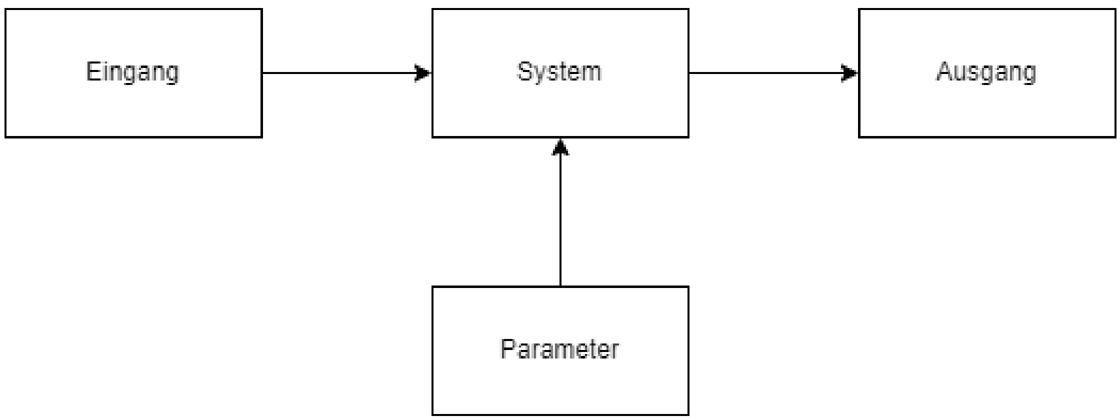
$$Allg.Variante : P_{x1x2}(\tau) = \lim_{T \to \infty} x_1(t)x_2 * x_2(t+\tau) * dt$$

bei Vorliegen einer Periodizität von x_1 und x_2

$$P_{x1x2}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) * x_2(t+\tau) * dt$$

entweder T als gleiche Periode bei den Verläufen oder T als gemeinsames Vielfaches der beiden Periodenduaer von x_1 und x_2

Das System



Im Zeitbereich:

z.B. Spannung $u_e(t) \to u_a(t)$
oder digital/zeitdiskret

System im Laplace Bereich

$s = \sigma + j\omega$
(system im laplace-bereich bild fehlt wurde aber schon erstellt)

System in Frequenzbereich

System-Eigenschaften

4 Grundeigenschaften:

- Linearität
  - linear
  - licht linear
- Zeitinvarianz
  - Zeit-konstant
  - Zeit-veränderlich

- Kausalität
  - kausal
    - statisch (speicherlos)
    - dynamisch (mit Speicherelementen)
  - a-kausal (nicht kausal)
- Stabilität
  - Stabil
  - Grenz-Stabil
  - In-Stabil

13.11.2024 (fehlt)

war krank und muss noch nachtragen

18.11.2024 (Bilder fehlen)

die Aufzeichnung dieser Stunde habe ich auf dem Papier gemacht und muss noch nachgetragen werden.

Stabilität von Systemen

Stabil	Grenzstabil	Instabil
• BIBO-Stabilität (Bounded Input - Bounded Output) $\rightarrow$ Amplitudenstabilität • Nachweis via Beträgsfläche $\int_{-\infty}^{\infty} \vert g(t) \vert < \infty \rightarrow stabil$ (äquivalent mit der Summe für zeitdiskrete Systeme)	• Anwendung: Analoger Funktionsgenerator	Amplitude gegen ∞

Klassifizierung über das praktische Stromverhalten

(Ilustration Eingangssignal $\rightarrow$ Ausgangssignal (gegen 0))	(Ilustration Eingangssignal $\rightarrow$ Ausgangssignal (konstante))	(Ilustration Eingangssignal $\rightarrow$ Ausgangssignal (gegen unendlich))

Mathematisch über Laplace & z-Transformation

$$\text{zeit-kontinuirlich / Laplace-Transformation: } g(t) \rightarrow G(s) = \frac{Zaehler(s)}{Nenner(s)}$$
$$\text{zeit-diskret / t-Transformation: } g(k) \rightarrow G(Z) = \frac{Zaehler(z)}{Nenner(z)}$$

Nullsetzten des Zaehlers $\rightarrow$ Nullstellen der Übertragungsfunktion
Nullsetzten des Nenners $\rightarrow$ Polstellen der Übertragungsfunktion

(folgt in der nächsten Vorlesung)

20.11.2024

Stabilitätsbestimmung über die Übertragungsfunktion

- analoge/zeitkontinuierliche Systeme $G(s)$ Übertragungsfunktion
  s: Laplace Variable
  $s = \delta + j\omega$
- digitale/zeitdiskrete Systeme $G(z)$ Übertragungsfunktion
  z: z-Variable
  $z = Re(z) + j * Im(z) = |z| * e^{j*\phi_z}$

Nullsetzen des ZählerTerms $(G(s)bzw.G(z))$ liefert die Nullstellen
Nullsetzen des Nenner-Terms $(G(s)bzw.G(z))$ liefert die Polstelle
Wenn eine Nullstelle nicht genau auf eine Polstelle fällt haben die Nullstellen keinen Einfluss auf die Stabilität.
Wenn eine Nullstelle genau auf eine Polstelle fällt, wird die entsprechende Polstelle ausgelöscht.

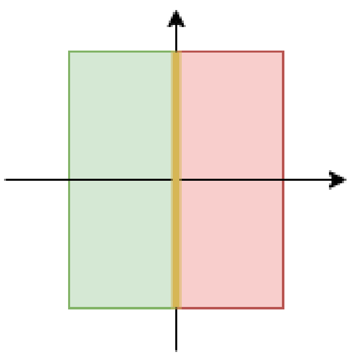
Bsp.:

$$G(s) = \frac{(s - s_{01}) * (s - s_{0n})}{(s - s_{p1}) * (s - s_{pn})} * K$$

Betrachtung der verbleibenden (nicht durch Nullstellen ausgelöschten) Polstellen zur Stabilitätsbestimmung

Betrachtung der Lage der Polstellen in den Ebenen

$G(s) \rightarrow$ s-Ebene



- Polstellen link von der $j\omega$-Achse
  $\rightarrow$ System ist Stabil
- mindestens eine Polstelle rechts der $j\omega$-Achse oder mindestens eine mehrfache Polstelle auf der $j\omega$-Achse
  $\rightarrow$ System ist stabil
- keine Posstelle rechts der $j\omega$-Achse und nur einfache Polstellen (beliebiger Anzahl an unterschiedlichen Stellen)
  $\rightarrow$ System ist grenzstabil

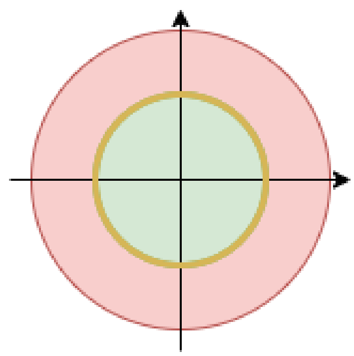
Bsp. Integrator

$$E \rightarrow G_I(s) = \frac{1}{s} = s^{-1} \rightarrow A$$

2 Intigratoren in Kette:

$$E \rightarrow s^{-1} \rightarrow s^{-1} \rightarrow A$$

$G(z) \rightarrow$ z-Ebene



- alle Polstellen innerhalb des Einheitskreises (nicht auf dem Einheitskreis)
  $\rightarrow$ System ist stabil
- mindestens eine Polstelle außerhalb des Einheitskreises oder mindestens eine mehrfache Polstelle auf dem Einheitskreis
  $\rightarrow$ System ist stabil
- keine Polstelle außerhalb des Einheitskreises und nur einfache Polstellen (beliebiger Anzahl an unterschiedlichen Stellen) auf dem Einheitskreis
  $\rightarrow$ System ist grenzstabil

Bsp. Integrator

$$E \rightarrow s^{-1} \rightarrow s^{-1} \rightarrow A$$

→ 2 grenzstabile Systeme werden zusammen 1 instabiles System

$$G_{ges} = G_1(s) * G_2(s) = s^{-2}$$

doppelte Polstelle bei 0
→ 2 stabile Systeme werden zusammen 1 instabiles System

25.11.2024

Anforderung an die Systemeigenschaften zur Anwendbarkeit von Werkzeugen der Systemtheorie

Beschreibung eines Systems durch:

- Impulsantwort: $g(t), g(k)$; Sprungantwort: $h(t), h(k)$; Anstiegsanwort: $a(t), a(k)$
  System muss linear und zeitinvariant sein.
  (Kausalität und Stabilität sind beliebig)

$$h(t) = \int_0^t g(t) * d\tau$$
$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}$$

- Übertragungsfunktion: $G < (s)$ (Laplace), $G(z)$ (z-Transformation)
  System muss linear, zeitinvariant und kausal sein.
  (Stabilität spielt keine Rolle)

- Komplexer Frequenzgang $G(j\omega)$, $G(\omega)$, G(jf), G(f) bzw. G(m)
  System muss linear, zeitinvariant und stabil oder grenzstabil sein.
  (Kausalietät spielt keine Rolle)

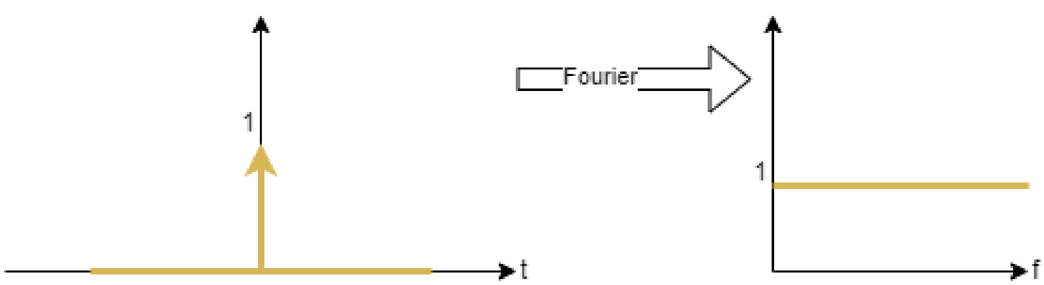
Fourier-Transformation: $g(t) \rightarrow G(j\omega)$
Diskrete-Fourier-Transformation: $g(t) \rightarrow G(m)$

Querverbindung: $G(s) \rightarrow G(j\omega)$, $G(\omega)$, G(jf) oder G(f)
$s = \delta + j\omega \rightarrow \delta = 0$
Nur bei einem stabilen oder Grenzstabilen System erlaubt.

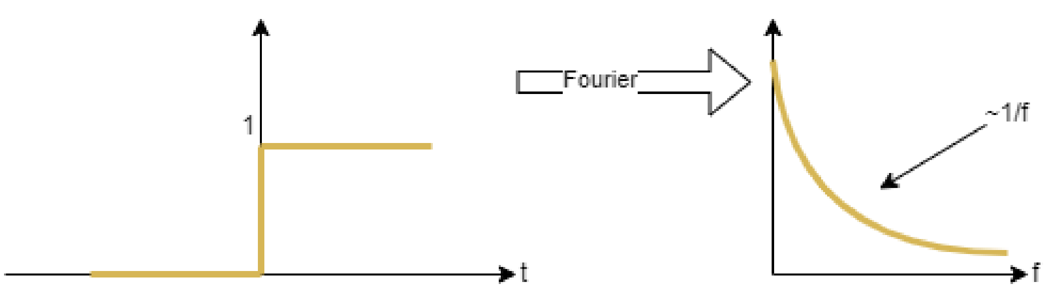
Ausgang eines linearen und zeitinvarianten Systems zur System-Charakterisierung

Deltaimpuls ist am besten geeignet weil:

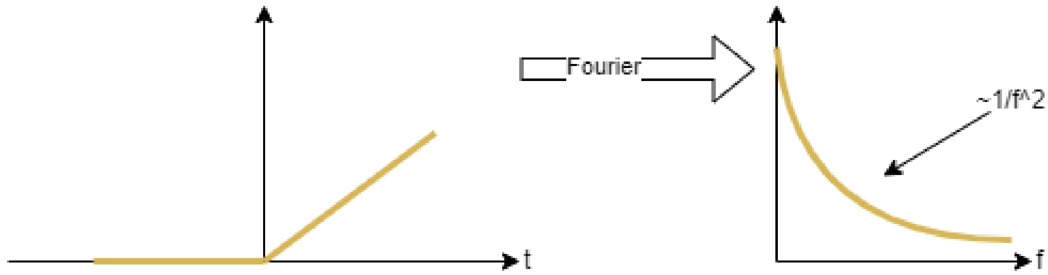
- besitzt alle Frequenzanteile
- alle Frequenzanteile haben die selbe Intensität



Einheitssprung:



Einheitsanstieg:



Ermittlung des Ausgangssignals aus einem Eingangssignal bei bekannter Impulsantwort g(t) bzw. g(k)

Eingangssignal x(t) → System g(t) → Ausgangssignal y(t)

Faltungsoperation (*):

$$y(t) = x(t) * g(t)$$

(Faltung wird durch Transformation zur komplexen Multiplikation)

$$y(t) = x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot g(-\tau + t) d\tau$$

(äquivalent mit Summe für zeitdiskrete Systeme)

Kreuzkorrelation (schon mal gemacht)

$$E_{x_1 x_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) * x_2(t + \tau) * dt$$

(Im prinzip das selbe wie die Faltungsoperation nur mit einer anderen Intention)

27.11.2024

x(t) $\rightarrow$ System mit Impulsantwort g(t) $\rightarrow$ y(t)

$$y(t) = x(t) * g(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot g(-\tau + t) \cdot d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau + t) \cdot g(\tau) \cdot d\tau$$

Beispiel Faltung

$u_e(t) \rightarrow g(t) \rightarrow u_a(t)$

$u_e(t)$
$u_e(t) = 2V \cdot rect(\frac{t-3s}{4s})$
(Grafic fehlt)

$g(t)$
$g(t) = 0.5s^{-1} \cdot rect(\frac{t-1s}{2s})$
(Grafic fehlt)

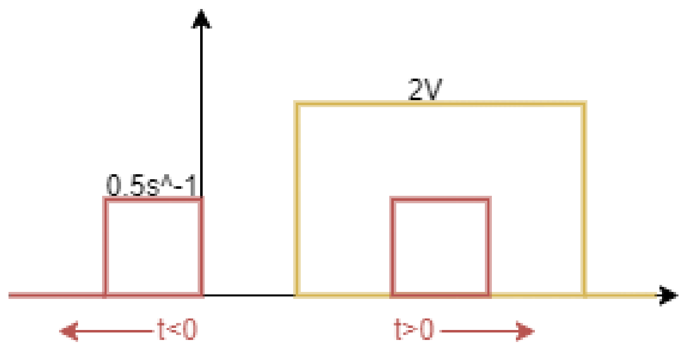
neue Variable für die Zeitachse weil t Verschiebeparameter wird
$t \rightarrow \tau$

Spiegelung einer Funktion

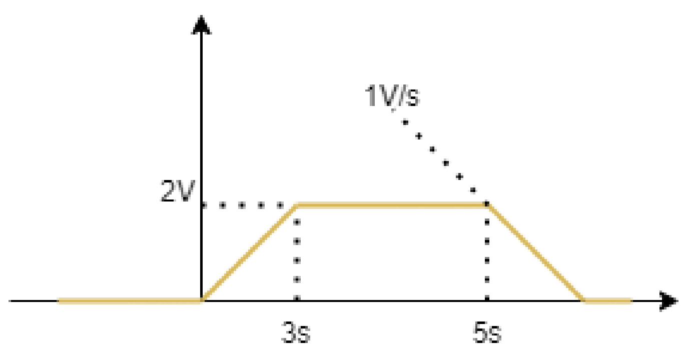
Gespiegelte Funktion über τ wird um t verschoben: Verschiebe-Richtung wird ebenfalls gespiegelt

Zeitliches Übereinanderlegen der Funktion

z.B. auf eine τ-Achse



Funktion muss sich zeitlich überlagern damit $u_a(t) > 0V$



$u_a(1s < t < 3t) = \int_{1s}^{t+1s} 2V \cdot 0.5s^{-1} \cdot d\tau$

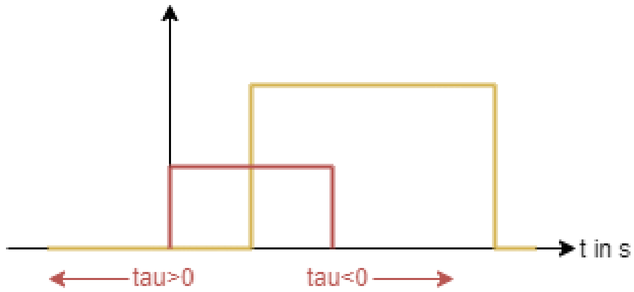
Kreuzkorrelation

$E_{x1,x2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdot x_2(t + \tau) \cdot t$

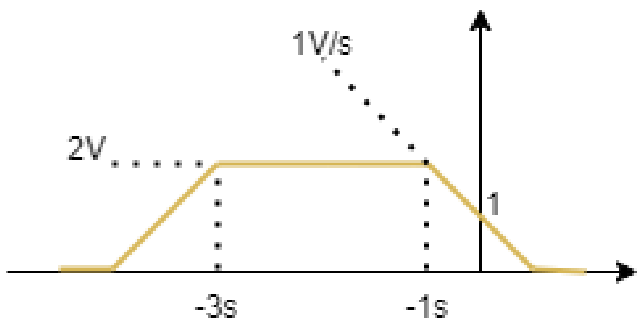
Unterschiede zur Faltung

- keine Umbenennung der Achsen nötig,
- keine Spiegelung erforderlich
  (aber: Änderung der Verschieberichtung durch das τ)

Darstellung über einer Zeitachse



$E_{u1,u2}(\tau = 0) = 2V \cdot 0.5V \cdot 1s = 1V^2s$
$E_{u1,u2}(\tau >= 1s) = 0V$
$E_{u1,u2}(\tau <= 5s) = 0V$



02.12.2024

Transformationen auf Basis von Cos- und Sin

(Was genau hat das Folgende mit Cos und Sin zu tun?)

Laplace	Fourier

(Umkehrbar eindeutige Transformation)

Transformations-Kerne

e^{-st}	Hintransformation	$e^{-j\omega t}$
e^{+st}	Rücktransformation	$e^{+j\omega t}$

Laplace Transformation
transformiert werden

- Signale (allg. Terstsignale wie Einheitstsprung oder Delta-Inpuls)
- Beschreibung von Systemen (allg. die Impulsantwort)

$$X(s) = \int_0^{+\infty} x(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

Fourier Transformation
transformiert werden

- Signale (jeder mögliche Verlauf mit dem Ziel des Erhalts der Frequenzanteile des Signals)
- Beschreibung von Systemen (im Allgemeinen die Impulsantwort zum Erhalt des komplexen Frequenzgangs)

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

Laplace
Paramerter s:

- komplexe
- $s = \delta + j\omega$

Anwendung:
Erkennung der Stabilität
Problem: bei instabielen Systemen Impulsantwort steigt bis ins Unendliche an Ansteigen wird kompensiert durch den Faktor e^{-st} mit $\delta > 0$

Fourier
Paramerter $j\omega$:

- rein imaginär

Anwendung:
Faltung zu multiplikationen Auslösen
(Reihen- /Kettenschaltung von Systemen)

$$g_{ges}(t) = g_1(t) * g_2(t)$$

Anwendung in Rückgekoppelten Systemen
(Grafik & Herleitung fehlt)

$$G_{ges}(s) = \frac{X_a(s)}{X_e(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s)}$$

Anwendung der Labplace Transformation
Auslösung von Integration und Differentation mit der Laplace-Transformation

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) \cdot d\tau \rightarrow y(s) = X(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \rightarrow y(s) = X(s) \cdot s$$

**.12.2024