

# Signal und System Theorie

Fachsemester 3

Prof. Dr.-Ing. Frank Giesecke

**16.10.2024 (Vorlesung noch nicht nachgetragen)**

**21.10.2024 (Vorlesung noch nicht nachgetragen)**

**23.10.2024 (Vorlesung noch nicht nachgetragen)**

28.10.2024

## Wiederholung

1. Leistungssignale

Gleichanteil/ linearer Mittelwert/ Moment 1. Ordnung

$$\bar{x} = (\text{coming\_soon})$$

$$f(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T x^2 dt$$

2. Signalgleichleistung

(Leistung, die den Gleichanteil verursacht)

$$P_{x=} = \bar{x}^2 = m_1^2$$

3. mittlere Signalleistung/ quadratische Mittelwert/ Gesamt-Signalleistung / Moment 2. Ordnung

$$P = \bar{x}^2 = m_2 = (\text{coming\_soon})$$

4. Effektivwert (Wurzel aus der mittleren Signalleistung)

$$x_{eff} = \sqrt{P} = \sqrt{x^2}$$

5. Signalwechselleistung/ Varianz/ Zentral-Moment 2. Ordnung

$$P_x = \sigma^2 = \mu_2 = P_x - P_{x=} = \bar{x}^2 - \bar{x}^2$$

6. Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{P_x} = \sqrt{\mu_2}$$

## Alternative Berechnung der Signalwechselleistung/ Varianz/ Zentral-Moment 2. Ordnung

$$P_x = (\text{coming\_soon})$$

$$P_x = P_x - P_x$$

## Direkte Berechnung der Varianz/ Signalwechselspannung aus einem Datensatz (digital)

**Fallunterscheidung** linearer Mittelwert/ Gleichanteil ist bekannt oder kann exakt bestimmt werden.  $\bar{x}$  ist bekannt

$$\sigma^2 = P_x = \mu_2 = (\text{coming\_soon})$$

linearer Mittelwert wird aus den N Werten bestimmt.  $\bar{x}$  ist unbekannt

$$\bar{x}_N = (\text{coming\_soon})$$

$$\sigma^2 = P_x = (\text{coming\_soon})$$

N = Anzahl der Werte

## Es folgt:

Angenäherter Einheitssprung, Einheitssprung-Funktion, Einheitsimpuls-Funktion, Deltaimpuls/ Dirac-Impuls, Einheitsanstiegs-Funktion

## Angenäherter Einheitssprung ( $\delta$ delta)

(graphic is coming soon)

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{\text{Differentiation}} \\ \left( \frac{d}{dt} \right) \\ \overleftarrow{\text{Integration}} \\ \hookrightarrow \text{Integrationsgrenzen} \\ -\infty \text{ bis aktueller Zeitpunkt } (t) \\ \sigma = (\text{coming\_soon}) \end{array}$$

(graphic is coming soon)

**30.10.2024 (Vorlesung noch nicht nachgetragen)**

**06.11.2024 (Vorlesung noch nicht nachgetragen)**

**04.11.2024 (Vorlesung noch nicht nachgetragen)**

11.11.2024

## Ergänzung: Kreuzrelation

$$E_{x_1x_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) * x_2(t + \tau) * dt$$

mindestens eines der Verläufe muss ein Energiesignal sein.

Wenn beide Verläufe  $x_1$  und  $x_2$  Leistungssignale sind, dann:

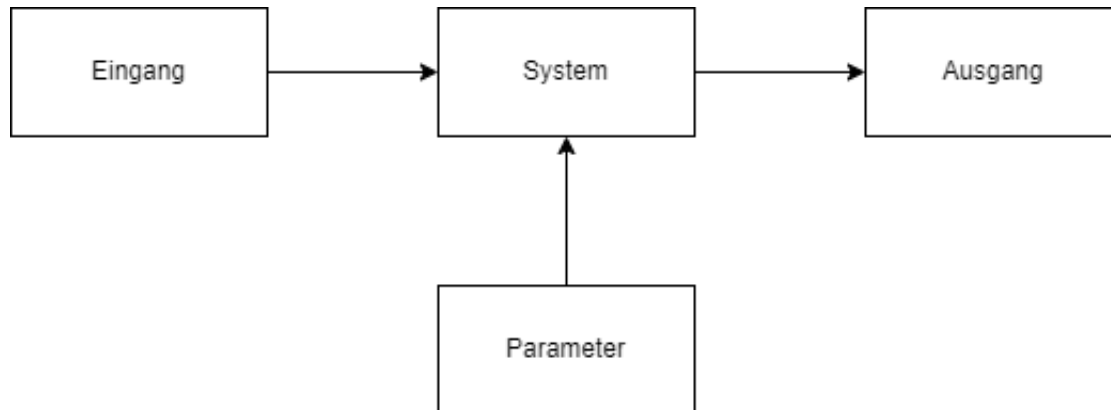
$$Allg.Variante : P_{x_1x_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_1(t)x_2 * x_2(t + \tau) * dt$$

bei Vorliegen einer Periodizität von  $x_1$  und  $x_2$

$$P_{x_1x_2}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) * x_2(t + \tau) * dt$$

entweder T als gleiche Periode bei den Verläufen oder T als gemeinsames Vielfaches der beiden Periodendauer von  $x_1$  und  $x_2$

## Das System



### Im Zeitbereich:

z.B. Spannung  $u_e(t) \rightarrow u_a(t)$   
oder digital/zeitdiskret

### System im Laplace Bereich

$$s = \sigma + j\omega$$

(system im laplace-bereich bild fehlt wurde aber schon erstellt)

### System in Frequenzbereich

#### System-Eigenschaften

4 Grundeigenschaften:

- Linearität
  - linear
  - licht linear
- Zeitinvarianz
  - Zeit-konstant
  - Zeit-veränderlich

- Kausalität
  - kausal
    - \* statisch (speicherlos)
    - \* dynamisch (mit Speicherelementen)
  - a-kausal (nicht kausal)
- Stabilität
  - Stabil
  - Grenz-Stabil
  - In-Stabil

**13.11.2024 (fehlt)**

war krank und muss noch nachtragen

## 18.11.2024 (Bilder fehlen)

die Aufzeichnung dieser Stunde habe ich auf dem Papier gemacht und muss noch nachgetragen werden.

### Stabilität von Systemen

#### Stabil

- **BIBO-Stabilität** (Bounded Input - Bounded Output)  
→ **Amplitudenstabilität**
- Nachweis via Betragsfläche

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| < \infty \rightarrow \text{stabil}$$

(äquivalent mit der Summe für zeitdiskrete Systeme)

#### Grenzstabil

- Anwendung:  
Analoger Funktionsgenerator

#### Instabil

Amplitude gegen  $\infty$

### Klassifizierung über das praktische Stromverhalten

(Illustration Eingangssignal  
→ Ausgangssignal (gegen 0))

(Illustration Eingangssignal →  
Ausgangssignal (konstante))

(Illustration Eingangssignal →  
Ausgangssignal (gegen unendlich))

### Mathematisch über Laplace & z-Transformation

$$\begin{aligned} \text{zeit-kontinuierlich / Laplace-Transformation: } g(t) &\rightarrow G(s) = \frac{Zaehler(s)}{Nenner(s)} \\ \text{zeit-diskret / t-Transformation: } g(k) &\rightarrow G(Z) = \frac{Zaehler(z)}{Nenner(z)} \end{aligned}$$

Nullsetzten des Zaehlers → Nullstellen der Übertragungsfunktion

Nullsetzten des Nenners → Polstellen der Übertragungsfunktion

(folgt in der nächsten Vorlesung)



20.11.2024

## Stabilitätsbestimmung über die Übertragungsfunktion

- analoge/zeitkontinuierliche Systeme  $G(s)$  Übertragungsfunktion  
s: Laplace Variable  
 $s = \delta + j\omega$
- digitale/zeitdiskrete Systeme  $G(z)$  Übertragungsfunktion  
z: z-Variable  
 $z = \text{Re}(z) + j * \text{Im}(z) = |z| * e^{j*\phi z}$

Nullsetzen des ZählerTerms ( $G(s)$  bzw.  $G(z)$ ) liefert die Nullstellen

Nullsetzen des Nenner-Terms ( $G(s)$  bzw.  $G(z)$ ) liefert die Polstelle

Wenn eine Nullstelle nicht genau auf eine Polstelle fällt haben die Nullstellen keinen Einfluss auf die Stabilität.

Wenn eine Nullstelle genau auf eine Polstelle fällt, wird die entsprechende Polstelle ausgelöscht.

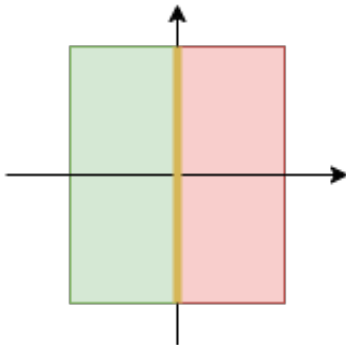
Bsp.:

$$G(s) = \frac{(s - s_{01}) * (s - s_{0n})}{(s - s_{p1}) * (s - s_{pn})} * K$$

## Betrachtung der verbleibenden (nicht durch Nullstellen ausgelöschten) Polstellen zur Stabilitätsbestimmung

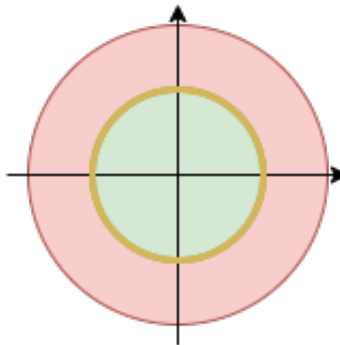
Betrachtung der Lage der Polstellen in den Ebenen

$G(s) \rightarrow s$ -Ebene



- Polstellen links von der  $j\omega$ -Achse  
→ System ist stabil
- mindestens eine Polstelle rechts der  $j\omega$ -Achse oder mindestens eine mehrfache Polstelle auf der  $j\omega$ -Achse  
→ System ist instabil
- keine Polstelle rechts der  $j\omega$ -Achse und nur einfache Polstellen (beliebiger Anzahl an unterschiedlichen Stellen)  
→ System ist grenzstabil

$G(z) \rightarrow z$ -Ebene



- alle Polstellen innerhalb des Einheitskreises (nicht auf dem Einheitskreis)  
→ System ist stabil
- mindestens eine Polstelle außerhalb des Einheitskreises oder mindestens eine mehrfache Polstelle auf dem Einheitskreis  
→ System ist instabil
- keine Polstelle außerhalb des Einheitskreises und nur einfache Polstellen (beliebiger Anzahl an unterschiedlichen Stellen) auf dem Einheitskreis  
→ System ist grenzstabil

### Bsp. Integrator

$$E \rightarrow s^{-1} \rightarrow s^{-1} \rightarrow A$$

$$G_{ges} = G_1(s) * G_2(s) = s^{-2}$$

doppelte Polstelle bei 0

→ 2 stabile Systeme werden zusammen 1 instabiles System

**Bsp. Integrator**

$$E \rightarrow G_I(s) = \frac{1}{s} = s^{-1} \rightarrow A$$

2 Integratoren in Kette:

$$E \rightarrow s^{-1} \rightarrow s^{-1} \rightarrow A$$

→ 2 grenzstabile Systeme werden zusammen 1 instabiles System

25.11.2024

## Anforderung an die Systemeigenschaften zur Anwendbarkeit von Werkzeugen der Systemtheorie

Beschreibung eines Systems durch:

- Impulsantwort:  $g(t), g(k)$ ; Sprungantwort:  $h(t), h(k)$ ; Anstiegsantwort:  $a(t), a(k)$   
System muss linear und zeitinvariant sein.  
(Kausalität und Stabilität sind beliebig)

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) * d\tau$$
$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}$$

- Übertragungsfunktion:  $G(s)$  (Laplace),  $G(z)$  (z-Transformation)  
System muss linear, zeitinvariant und kausal sein.  
(Stabilität spielt keine Rolle)
- Komplexer Frequenzgang  $G(j\omega)$ ,  $G(\omega)$ ,  $G(jf)$ ,  $G(f)$  bzw.  $G(m)$   
System muss linear, zeitinvariant und stabil oder grenzstabil sein.  
(Kausalität spielt keine Rolle)

$$\text{Fourier-Transformation: } g(t) \rightarrow G(j\omega)$$
$$\text{Diskrete-Fourier-Transformation: } g(t) \rightarrow G(m)$$

**Querverbindung:**  $G(s) \rightarrow G(j\omega)$ ,  $G(\omega)$ ,  $G(jf)$  oder  $G(f)$

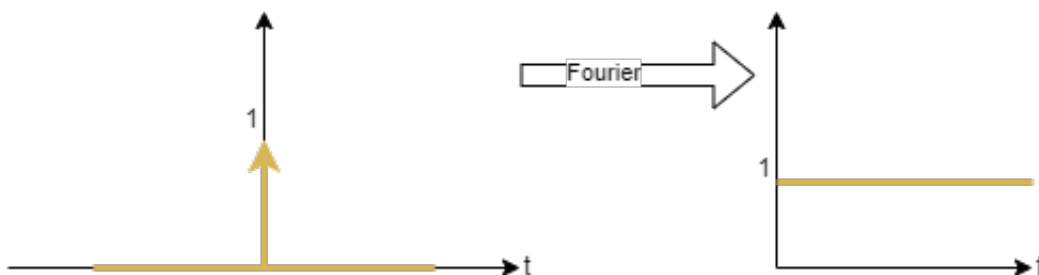
$$s = \delta + j\omega \rightarrow \delta = 0$$

Nur bei einem stabilen oder Grenzstabilen System erlaubt.

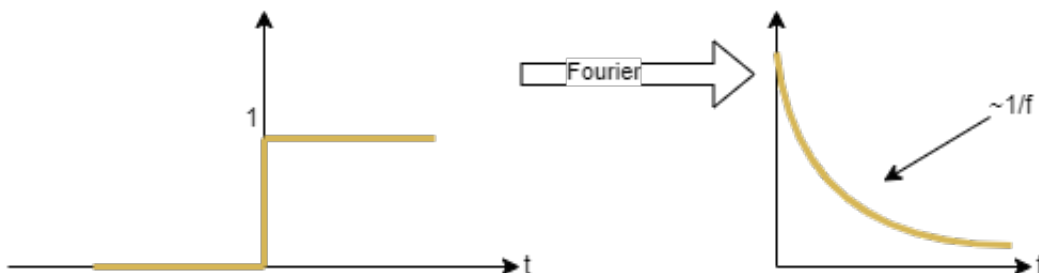
## Ausgang eines linearen und zeitinvarianten Systems zur System-Charakterisierung

**Deltaimpuls** ist am besten geeignet weil:

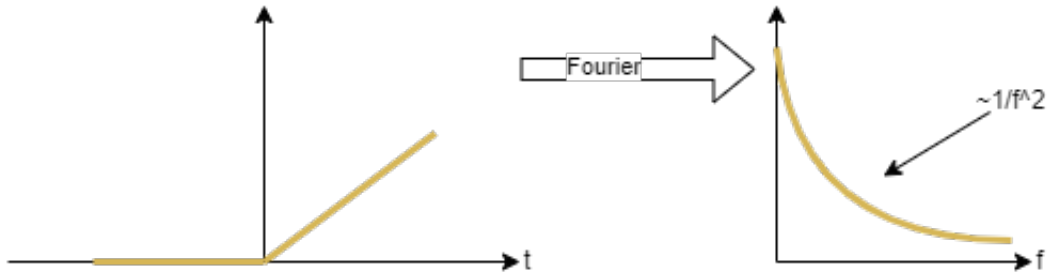
- besitzt alle Frequenzanteile
- alle Frequenzanteile haben die selbe Intensität



**Einheitssprung:**



**Einheitsanstieg:**



**Ermittlung des Ausgangssignals aus einem Eingangssignal bei bekannter Impulsantwort  $g(t)$  bzw.  $g(k)$**

Eingangssignal  $x(t) \rightarrow$  System  $g(t) \rightarrow$  Ausgangssignal  $y(t)$

**Faltungsoperation (\*):**

$$y(t) = x(t) * g(t)$$

(Faltung wird durch Transformation zur komplexen Multiplikation)

$$y(t) = x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot g(-\tau + t) d\tau$$

(äquivalent mit Summe für zeitdiskrete Systeme)

**Kreuzkorrelation (schon mal gemacht)**

$$E_{x_1 x_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) * x_2(t + \tau) * dt$$

(Im prinzip das selbe wie die Faltungsoperation nur mit einer anderen Intention)

27.11.2024

$x(t) \rightarrow$  System mit Impulsantwort  $g(t) \rightarrow y(t)$

$$y(t) = x(t) * g(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot g(-\tau + t) \cdot d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau + t) \cdot g(\tau) \cdot d\tau$$

### Beispiel Faltung

$u_e(t) \rightarrow g(t) \rightarrow u_a(t)$

$u_e(t) = 2V \cdot \text{rect}\left(\frac{t-3s}{4s}\right)$ <p>(Grafic fehlt)</p>	$\left  \right.$	$g(t) = 0.5s^{-1} \cdot \text{rect}\left(\frac{t-1s}{2s}\right)$ <p>(Grafic fehlt)</p>
---	------------------	--

neue Variable für die Zeitachse weil t Verschiebeparameter wird

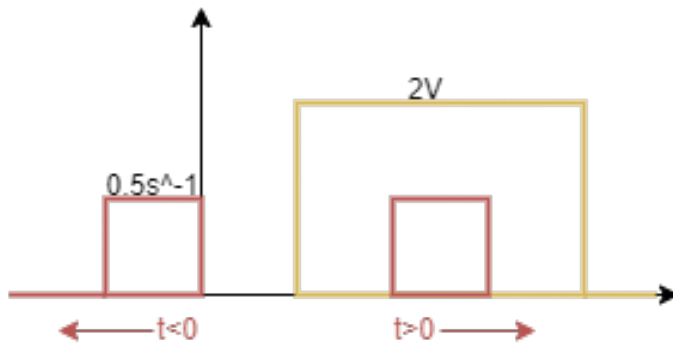
$t \rightarrow \tau$

### Spiegelung einer Funktion

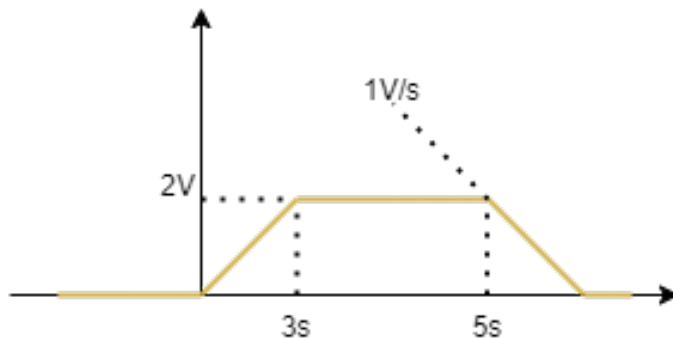
Gespiegelte Funktion über  $\tau$  wird um t verschoben: Verschiebe-Richtung wird ebenfalls gespiegelt

### Zeitliches Übereinanderlegen der Funktion

z.B. auf eine  $\tau$ -Achse



Funktion muss sich zeitlich überlagern damit  $u_a(t) > 0V$



$$u_a(1s < t < 3t) = \int_{1s}^{t+1s} 2V \cdot 0.5s^{-1} \cdot d\tau$$

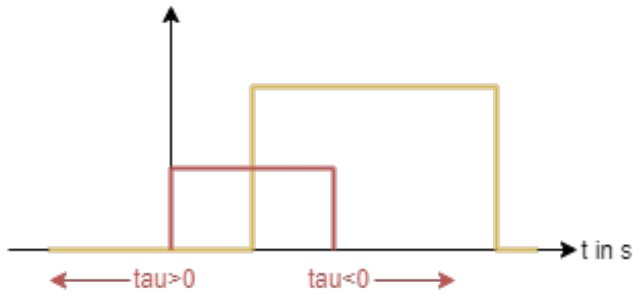
### Kreuzkorrelation

$$E_{x1,x2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t + \tau) \cdot t$$

### Unterschiede zur Faltung

- keine Umbenennung der Achsen nötig,
- keine Spiegelung erforderlich  
(aber: Änderung der Verschieberichtung durch das  $\tau$ )

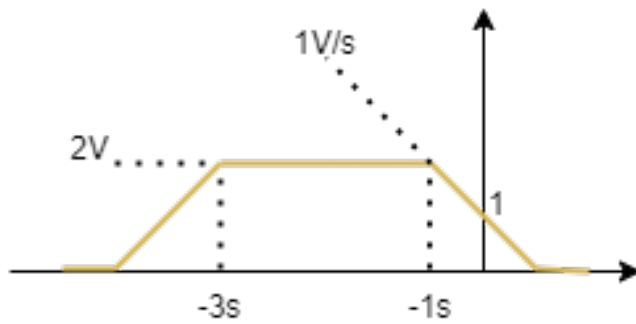
### Darstellung über einer Zeitachse



$$E_{u1,u2}(\tau = 0) = 2V \cdot 0.5V \cdot 1s = 1V^2s$$

$$E_{u1,u2}(\tau \geq 1s) = 0V$$

$$E_{u1,u2}(\tau \leq -5s) = 0V$$



02.12.2024

## Transformationen auf Basis von Cos- und Sin

(Was genau hat das Folgende mit Cos und Sin zu tun?)

Laplace		Fourier
(Umkehrbar eindeutige Transformation)		
<b>Transformations-Kerne</b>		
$e^{-st}$		$e^{-j\omega t}$
$e^{+st}$		$e^{+j\omega t}$
	Hintransformation	
	Rücktransformation	

### Laplace Transformation

transformiert werden

- Signale (allg. Terstsignale wie Einheitssprung oder Delta-Input)
- Beschreibung von Systemen (allg. die Impulsantwort)

$$X(s) = \int_0^{+\infty} x(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

### Fourier Transformation

transformiert werden

- Signale (jeder mögliche Verlauf mit dem Ziel des Erhalts der Frequenzanteile des Signals)
- Beschreibung von Systemen (im Allgemeinen die Impulsantwort zum Erhalt des komplexen Frequenzgangs)

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

#### Laplace

Parameter  $s$ :

- komplexe
- $s = \delta + j\omega$

Anwendung:

Erkennung der Stabilität

Problem: bei instabilen Systemen Impulsantwort steigt bis ins Unendliche an Ansteigen wird kompensiert durch den Faktor  $e^{-st}$  mit  $\delta > 0$

#### Fourier

Parameter  $j\omega$ :

- rein imaginär

Anwendung:

Faltung zu Multiplikationen Auslösen

(Reihen- / Kettenschaltung von Systemen)

$$g_{ges}(t) = g_1(t) * g_2(t)$$

### Anwendung in Rückgekoppelten Systemen

(Grafik & Herleitung fehlt)

$$G_{ges}(s) = \frac{X_a(s)}{X_e(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s)}$$

### Anwendung der Laplace Transformation

Auslösung von Integration und Differentiation mit der Laplace-Transformation

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) \cdot d\tau \rightarrow y(s) = X(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \rightarrow y(s) = X(s) \cdot s$$