# Signal und System Theorie

Prof. Dr.-Ing. Frank Giesecke

## 28.10.2024

### Wiederholung

1. Leistungssignale
   Gleichanteil/ linearer Mittelwert/ Moment 1. Ordnung
   $\bar{x} = (coming_soon)$
   $$f(x) = \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} x^2 \, dt$$

2. Signalgleichleistung
   (Leistung, die den Gleichanteil verursacht)
   $P_{x=} = \bar{x}^2 = m_1^2$

3. mittlere Signalleistung/ quadratische Mittelwert/ Gesamt-Signalleistung / Moment 2. Ordnung
   $P = \bar{x^2} = m_2 = (coming_soon)$

4. Effektivwert (Wurzel aus der mittleren Signalleistung)
   $x_{eff} = \sqrt{P} = \sqrt{x^2}$

5. Signalwechselleistung/ Varianz/ Zentral-Moment 2. Ordnung
   $P_x \ = \sigma^2 = \mu_2 = P_x - P_{x=} = \bar{x^2} - \bar{x}^2$

6. Standartabweichung
   $\sigma = \sqrt{P_x \ } = \sqrt{\mu_2}$

### Alternative Berechnung der Signalwechselleistung/ Varianz/ Zentral-Moment 2. Ordnung

$P_x \ = (coming_soon)$
$P_x \ = P_x - P_x$

### Direkte Berechnung der Varianz/ Signalwechselspannung aus einem Datensatz (digital)

Fallunterscheidung

| linerer Mittelwert/ Gleichanteil ist bekannt oder kann exakt bestimmt werden. | linearer Mittelwert wird aus den N Werten bestimmt. |
| --- | --- |
| $\bar{x} ist bekannt$ | $\bar{x} ist un-bekannt$ |
| $\sigma^2 = P_x \ = \mu_2 = (coming_soon)$ | $\bar{x_N} = (coming_soon)$ |
| | $\sigma^2 = P_x = (coming_soon)$ |

N = Anzahl der Werte

### Es folgt:

Angenäherter Einheitssprung, Einheitssprung-Funktion, Einheitsimpuls-Funktion, Deltaimpuls/ Dirac-Impuls, Einheitsanstiegs-Funktion

### Angenäherter Einheitssprung ($\delta$ delta)

| | | |
|---|---|---|
| (grafic is coming soon) | $\overrightarrow{Differentation}$<br>$(\frac{d}{dt})$<br><br>$\overleftarrow{Integration}$<br>$\hookrightarrow$ Intigrationsgrenzen<br>$-\infty bis aktueller Zeitpunkt (t)$<br>$\sigma = (coming_soon)$ | (grafic is coming soon) |

## **.**.2024 Vorlesung noch nicht nachgetragen

# 11.11.2024

## Ergänzung: Kreuzrelation

$$E_{x1x2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) * x_2(t+\tau) * dt$$

mindestens eines der Verläufe muss ein Energiesignal sein.
Wenn beide Verläufe $x_1$ und $x_2$ Leistungssignale sind, dann:

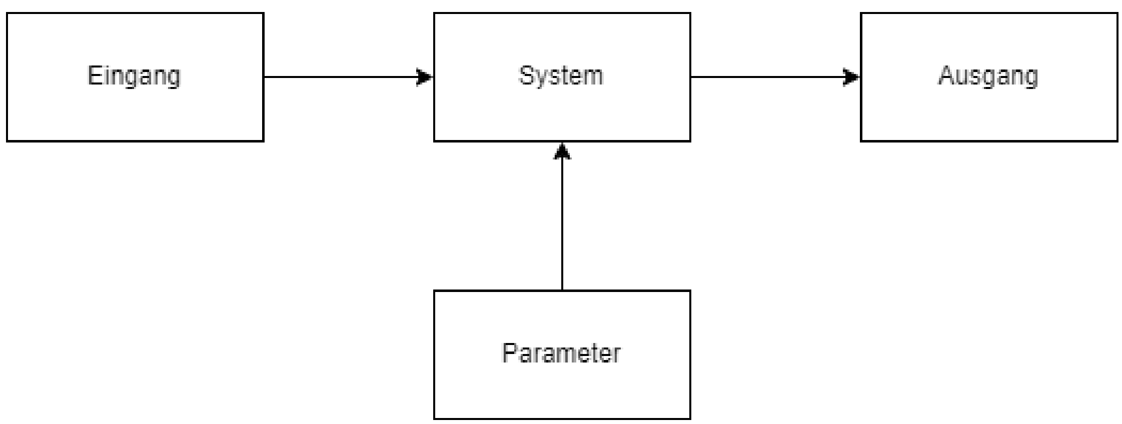
$$Allg.Variante : P_{x1x2}(\tau) = \lim_{T\to\infty} x_1(t)x_2 * x_2(t+\tau) * dt$$

bei Vorliegen einer Periodizität von $x_1$ und $x_2$

$$P_{x1x2}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(t) * x_2(t+\tau) * dt$$

entweder T als gleiche Periode bei den Verläufen oder T als gemeinsames Vielfaches der beiden Periodenduaer von $x_1$ und $x_2$

## Das System




**Im Zeitbereich:**

z.B. Spannung $u_e(t) \to u_a(t)$
oder digital/zeitdiskret

**System im Laplace Bereich**

$s = \sigma + j\omega$
(system im laplace-bereich bild fehlt wurde aber schon erstellt)

**System in Frequenzbereich**

**System-Eigenschaften**

4 Grundeigenschaften:

- Linearität
  - linear
  - licht linear
- Zeitinvarianz
  - Zeit-konstant
  - Zeit-veränderlich

- Kausalität
  - kausal
    - statisch (speicherlos)
    - dynamisch (mit Speicherelementen)
  - a-kausal (nicht kausal)
- Stabilität
  - Stabil
  - Grenz-Stabil
  - In-Stabil

## 13.11.2024 (fehlt)

war krank und muss noch nachtragen

# 18.11.2024 (fehlt)

die Aufzeichnung dieser Stunde habe ich auf dem Papier gemacht und muss noch nachgetragen werden.

# 20.11.2024

## Stabilitätsbestimmung über die Übertragungsfunktion

- analoge/zeitkontinuierliche Systeme $G(s)$ Übertragungsfunktion
  s: Laplace Variable
  $s = \delta + j\omega$
- digitale/zeitdiskrete Systeme $G(z)$ Übertragungsfunktion
  z: z-Variable
  $z = Re(z) + j * Im(z) = |z| * e^{j*\phi_z}$

Nullsetzen des ZählerTerms $(G(s) bzw. G(z))$ liefert die Nullstellen
Nullsetzen des Nenner-Terms $(G(s) bzw. G(z))$ liefert die Polstelle
Wenn eine Nullstelle nicht genau auf eine Polstelle fällt haben die Nullstellen keinen Einfluss auf die Stabilität.
Wenn eine Nullstelle genau auf eine Polstelle fällt, wird die entsprechende Polstelle ausgelöscht.

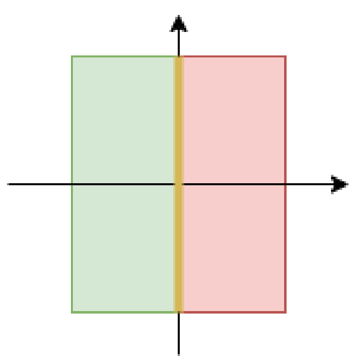
Bsp.:

$$G(s) = \frac{(s - s_{01}) * (s - s_{0n})}{(s - s_{p1}) * (s - s_{pn})} * K$$

### Betrachtung der verbleibenden (nicht durch Nullstellen ausgelöschten) Polstellen zur Stabilitätsbestimmung

Betrachtung der Lage der Polstellen in den Ebenen

$G(s) \to$ s-Ebene



- Polstellen link von der $j\omega$-Achse
  $\to$ System ist Stabil
- mindestens eine Polstelle rechts der $j\omega$-Achse oder mindestens eine mehrfache Polstelle auf der $j\omega$-Achse
  $\to$ System ist stabil
- keine Posstelle rechts der $j\omega$-Achse und nur einfache Polstellen (beliebiger Anzahl an unterschiedlichen Stellen)
  $\to$ System ist grenzstabil

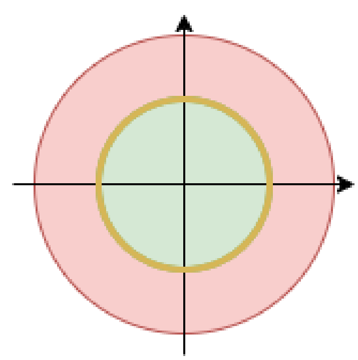
**Bsp. Integrator**

$$E \to G_I(s) = \frac{1}{s} = s^{-1} \to A$$

2 Intigratoren in Kette:

$$E \to s^{-1} \to s^{-1} \to A$$

$G(z) \to$ z-Ebene



- alle Polstellen innerhalb des Einheitskreises (nicht auf dem Einheitskreis)
  $\to$ System ist stabil
- mindestens eine Polstelle außerhalb des Einheitskreises oder mindestens eine mehrfache Polstelle auf dem Einheitskreis
  $\to$ System ist stabil
- keine Polstelle außerhalb des Einheitskreises und nur einfache Polstellen (beliebiger Anzahl an unterschiedlichen Stellen) auf dem Einheitskreis
  $\to$ System ist grenzstabil

**Bsp. Integrator**

$$E \to s^{-1} \to s^{-1} \to A$$

→ 2 grenzstabile Systeme werden zusammen 1 instabiles System

$$G_{ges} = G_1(s) * G_2(s) = s^{-2}$$

doppelte Polstelle bei 0
→ 2 stabile Systeme werden zusammen 1 instabiles System

# 25.11.2024

## Anforderung an die Systemeigenschaften zur Anwendbarkeit von Werkzeugen der Systemtheorie

Beschreibung eines Systems durch:

- Impulsantwort: $g(t), g(k)$; Sprungantwort: $h(t), h(k)$; Anstiegsanwort: $a(t), a(k)$
  System muss linear und zeitinvariant sein.
  (Kausalität und Stabilität sind beliebig)

$$h(t) = \int_0^t g(t) * d\tau$$
$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}$$

- Übertragungsfunktion: $G < (s)$ (Laplace), $G(z)$ (z-Transformation)
  System muss linear, zeitinvariant und kausal sein.
  (Stabilität spielt keine Rolle)

- Komplexer Frequenzgang $G(j\omega)$, $G(\omega)$, G(jf), G(f) bzw. G(m)
  System muss linear, zeitinvariant und stabil oder grenzstabil sein.
  (Kausalietät spielt keine Rolle)

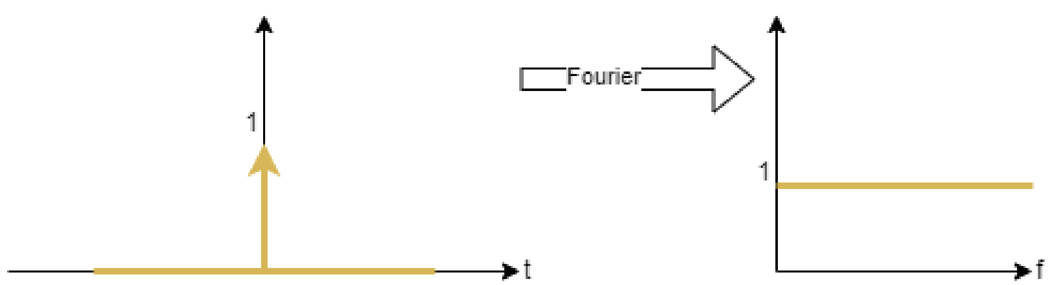
Fourier-Transformation: $g(t) \rightarrow G(j\omega)$
Diskrete-Fourier-Transformation: $g(t) \rightarrow G(m)$

**Querverbindung:** $G(s) \rightarrow G(j\omega)$, $G(\omega)$, G(jf) oder G(f)
$s = \delta + j\omega \rightarrow \delta = 0$
Nur bei einem stabilen oder Grenzstabilen System erlaubt.

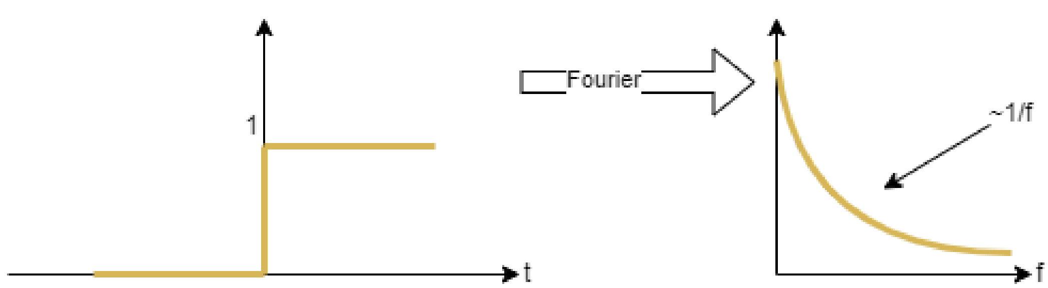
## Ausgang eines linearen und zeitinvarianten Systems zur System-Charakterisierung

**Deltaimpuls** ist am besten geeignet weil:

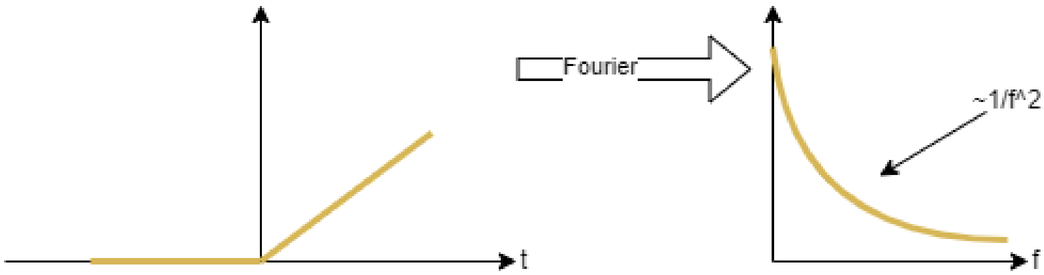
- besitzt alle Frequenzanteile
- alle Frequenzanteile haben die selbe Intensität




**Einheitssprung:**



**Einheitsanstieg:**




## Ermittlung des Ausgangssignals aus einem Eingangssignal bei bekannter Impulsantwort g(t) bzw. g(k)

Eingangssignal x(t) → System g(t) → Ausgangssignal y(t)

**Faltungsoperation (*):**

$$y(t) = x(t) * g(t)$$
(Faltung wird durch Transformation zur komplexen Multiplikation)

$$y(t) = x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) * g(-\tau + t) d\tau$$
(äquivalent mit Summe für zeitdiskrete Systeme)

**Kreuzkorrelation (schon mal gemacht)**

$$E_{x_1 x_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) * x_2(t + \tau) * dt$$
(Im prinzip das selbe wie die Faltungsoperation nur mit einer anderen Intention)