NOMBRES COMPLEXES
ARGUMENT, RACINES $n^{\text{ième}}$ ET TRIGONOMÉTRIE

1 Argument et trigonométrie

1.1 Ecriture trigonométrique

Tout nombre complexe $z = x + iy$ **non nul** peut s'écrire de manière unique sous la forme trigonométrique

$$z = r\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$$

avec r un réel strictement positif et θ un réel défini à 2π près. De plus on a :

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Le réel θ est appelé argument du nombre complexe z et noté $arg(z)$.

1.2 Propriétés

Soient z, z_1 et z_2 trois nombres complexes non nuls, alors :

1. $arg(\bar{z}) = -arg(z)\ [2\pi]$.
2. $arg(-z) = arg(z) + \pi\ [2\pi]$.
3. $arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)\ [2\pi]$.
4. $arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg(z)\ [2\pi]$.
5. $arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2)\ [2\pi]$.
6. $arg(z^n) = n\ arg(z)\ [2\pi], n \in \mathbb{Z}$.

2 Exponentielle complexe

Pour tout réel θ, on pose

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

2.1 Définition

On appelle exponentielle complexe d'un nombre complexe $z = x + iy$ avec x et y réels, le nombre complexe $e^z = e^x e^{iy}$.

2.2 Propriétés

Soient z, z_1 et z_2 des nombres complexes et n un entier relatif, alors :

1. $e^z \neq 0$.
2. $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$.
3. $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.
4. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\ e^{z_2}$.
5. $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$.
6. $(e^z)^n = e^{nz}$.

3 Formule d'Euler et de Moivre

3.1 Définition

Par analogie avec l'exponentielle réelle, on note désormais

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta),\ \text{ pour }\ \theta \in \mathbb{R}.$$

3.2 Propriétés

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors

1. $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ (**formules d'Euler**).
2. $(cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ (**formule de Moivre**).

4 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

4.1 Propriétés

1. L'équation $z^n = 1$ avec $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ admet n solutions appelées racines n-ièmes de l'unité et s'exprimant sous la forme

$$z_k = e^{i\dfrac{2k\pi}{n}},$$

pour $k = 0,\ 1,\ ...,\ n-1$. L'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1 est noté $\mathbb{U}_n$.

2. Soit $a \in \mathbb{C}$ donné. L'équation $z^n = a$ avec $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ admet n solutions appelées racines $n^{\text{ièmes}}$ de a et s'exprimant sous la forme

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}},$$

pour $k = 0,\ 1,\ ...,\ n-1$, $r = |a|$ et $\theta = arg(a)$.