LIMITES ET FONCTIONS CONTINUES
LIMITES

1 Limite finie en un point

On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$), et soit a un élément de I ou une extrémité de I.

Définition 1 *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. La fonction f a pour limite ℓ en a si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in I, (|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)\,.$$

On note alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \ ou\ \lim_a f = \ell \ ou\ f(x) \to_{x\to a} \ell.$$

2 Limite finie en $\pm\infty$

On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$).

Définition 2 *Soit $\ell \in \mathbb{R}$.*

1. *La fonction f a pour limite ℓ en $+\infty$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in I,\ (x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)\,.$$

On note alors

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \ ou\ \lim_{+\infty} f = \ell \ ou\ f(x) \to_{x\to+\infty} \ell.$$

2. *La fonction f a pour limite ℓ en $-\infty$ si et seulement*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in I,\ (x < A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)\,.$$

On note alors

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \ ou\ \lim_{-\infty} f = \ell \ ou\ f(x) \to_{x\to-\infty} \ell.$$

3 Limite infinie en un point

On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction ($I \subseteq \mathbb{R}$), et soit a un élément de I ou une extrémité de I.

Définition 3 1. *La fonction f a pour limite $+\infty$ en a ssi*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in I,\ (|x-a| < \eta \Rightarrow f(x) > A)\,.$$

On note alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \ ou\ \lim_a f = +\infty \ ou\ f(x) \to_{x\to a} +\infty.$$

2. *La fonction f a pour limite $-\infty$ en a ssi*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in I,\ (|x-a| < \eta \Rightarrow f(x) < A)\,.$$

On note alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \ \ ou\ \ \lim_{a} f = -\infty \ \ ou\ \ f(x) \to_{x\to a} -\infty.$$

4 Limite infinie en $\pm\infty$

On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$).

Définition 4 *Soit $\ell \in \mathbb{R}$.*

1. *La fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ ssi*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in I,\ (x > B \Rightarrow f(x) > A)\,.$$

On note alors

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ \ ou\ \ \lim_{+\infty} f = +\infty \ \ ou\ \ f(x) \to_{x\to+\infty} +\infty.$$

2. *La fonction f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ ssi*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in I,\ (x > B \Rightarrow f(x) < A)\,.$$

On note alors

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \ \ ou\ \ \lim_{+\infty} f = -\infty \ \ ou\ \ f(x) \to_{x\to+\infty} -\infty.$$

3. *La fonction f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ ssi*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in I,\ (x < B \Rightarrow f(x) > A)\,.$$

On note alors

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \ \ ou\ \ \lim_{-\infty} f = +\infty \ \ ou\ \ f(x) \to_{x\to-\infty} +\infty.$$

4. *La fonction f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ ssi*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in I,\ (x < B \Rightarrow f(x) < A)\,.$$

On note alors

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \ \ ou\ \ \lim_{-\infty} f = -\infty \ \ ou\ \ f(x) \to_{x\to-\infty} -\infty.$$

5 Limites à gauche et à droite

On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (I est supposé de la forme $I =]\alpha, a[\cup]a, \beta[$).

Définition 5 *Soit $\ell \in \mathbb{R}$.*

1. *On dit que la fonction f a pour **limite à gauche** ℓ en a si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in I, (a - \eta < x < a \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)\,.$$

On note alors

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell \ ou\ \lim_{a^-} f = \ell \ ou\ f(x) \to_{x \to a^-} \ell \ \ ou\ \lim_{x \to a,\ x<a} f = \ell.$$

2. *On dit que la fonction f a pour **limite à droite** ℓ en a si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in I, (a < x < a + \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)\,.$$

On note alors

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell \ ou\ \lim_{a^+} f = \ell \ ou\ f(x) \to_{x \to a^+} \ell \ \ ou\ \lim_{x \to a,\ x>a} f = \ell.$$

Proposition 1 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell.$

6 Propriétés des limites

Proposition 2 *(**unicité de la limite**) Si une fonction f admet limite, alors cette limite est unique.*

Proposition 3 *(**opérations sur les limites**) Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f et g deux fonctions définies au voisinage de a. On suppose que $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\ell' = \lim\limits_{x \to a} g(x)$, alors*

1. *$\ell + \ell' = \lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x))$.*
2. *$\lambda \ell = \lim\limits_{x \to a} \lambda f(x)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.*
3. *$\ell \ell' = \lim\limits_{x \to a} (f(x) g(x))$.*
4. *Si $\ell \neq 0$ $\dfrac{1}{\ell} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)}$ (si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$).*

Proposition 4 *Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to \ell} g(x) = \ell'$, alors $\lim\limits_{x \to a} gof(x) = \ell'$.*

Proposition 5

1. *Si $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$, alors*

$$\ell \leq \ell'.$$

2. *Si $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty \in \mathbb{R}$.*

Théorème 1 *(**théorème des gendarmes**) Soient f, g et h des fonctions définies de $I \subseteq \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et soit a un élement de I ou une extrémité de I. On suppose que*

1. *$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$.*
2. *Au voisinage de a, $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$.*

Alors $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$