NOMBRES COMPLEXES
INTRODUCTION AUX NOMBRES COMPLEXES

1 Nombres complexes

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes qui possède les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$.
3. $\mathbb{C}$ contient un nombre noté i tel que $i^2 = -1$.
4. Tout nombre complexe z admet une unique écriture sous la forme

$$z = x + iy$$

avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- Cette écriture est appelée forme algébrique du nombre z.
- le réel x est la partie réelle du nombre z notée $Re(z)$,
- le réel y est la partie imaginaire du nombre z notée $Im(z)$,
- si $y = 0$, le nombre z est dit réel et si $x = 0$ le nombre z est dit imaginaire pur.
- L'ensemble des imaginaires purs est noté :

$$i\mathbb{R} = \{z = x + iy \ : \ x = 0 \text{ et } y \in \mathbb{R}\}.$$

2 Règles de calcul

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes (a, b, a' et b' sont des réels).

- **l'opposé** de z est $-z = -a - ib$.
- La **multiplication par un scalaire** $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda z = \lambda a + i(\lambda b)$.
- **L'inverse** de $z = a + ib$, $(z \neq 0)$ est le nombre complexe $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$.
- La **multiplication** de z par z' est le nombre complexe

$$z \times z' = aa' - bb' + i(ab' + a'b).$$

- La **division** $\dfrac{z}{z'}$, $(z' \neq 0)$ est le nombre complexe $z \times \dfrac{1}{z'}$.

Proposition 1 *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ différent de 1, on a*

$$1 + z + z^2 + ... + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

3 Nombre conjugué

3.1 Définition

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, on appelle nombre complexe conjugué de z le nombre complexe $z = x - iy$.

3.2 Propriétés de la conjugaison

Soient z_1, z_2 deux nombres complexes. Alors,

$$\begin{aligned}
&\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}, \\
&\overline{z_1 - z_2} = \bar{z_1} - \bar{z_2}, \\
&\overline{z_1 z_2} = \bar{z_1}\bar{z_2}, \\
&\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}, \quad \text{pour tout } z_2 \neq 0, \\
&\forall n \in \mathbb{N}, \overline{z^n} = (\overline{z})^n.
\end{aligned}$$

3.3 Remarques

1. $z + \bar{z} = 2\ Re(z)$ et $z - \bar{z} = 2\ i\ Im(z)$.
2. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \ z = \bar{z}$.
3. $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \ z = -\bar{z}$.

4 Module d'un nombre complexe

4.1 Définition

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, on appelle module de z le nombre réel

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

4.2 Propriétés

Soient z, z_1 et z_2 trois nombres complexes. Alors

1. $z\overline{z} = |z|^2$.
2. $|\bar{z}| = |z|$.
3. $|z| = 0 \ \Leftrightarrow \ z = 0$.
4. $|z_1\ z_2| = |z_1||z_2|$ et $\forall n \in \mathbb{N}, |z_1^n| = |z_1|^n$.
5. Pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.
6. Pour tout $z_2 \neq 0$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.
7. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (**inégalité triangulaire**).
8. $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$.