Comparaison de fonctions

1 Notion de voisinage

Définition 1.1 Voisinage

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On appelle **voisinage** de a une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme :

- $]a-\varepsilon; a+\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$ si $a \in \mathbb{R}$,
- $]A; +\infty[$ si $a = +\infty$,
- $]-\infty; A[$ si $a = -\infty$,

Exemple 1.1

- $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est définie au voisinage de 0 puisqu'elle est définie sur $]-1, 1[$.
- $x \mapsto x^2 + x^3$ est positive au voisinage de 0 puisqu'elle l'est sur $]-1, 1[$.
- $x \mapsto \ln x$ est positive au voisinage de $+\infty$ puisqu'elle l'est sur $]1, +\infty[$.

2 Négligeabilité

2.1 Définition

Définition 2.1

Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage $\mathcal{V}$ de a (éventuellement privé de a si f ou g n'est pas définie en a). On dit que f est **négligeable devant** g s'il existe une fonction $\varepsilon : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ telle que

- $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ pour tout $x \in \mathcal{V}$,
- $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

On note alors $f \underset{a}{=} o(g)$ ou encore $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$

Méthode Négligeabilité en pratique

En pratique, la définition précédente est difficile à manipuler. Quand g ne s'annule pas au voisinage de a, $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ équivaut à $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Exemple 2.1

- $x^4 \underset{x \to 0}{=} o(x^2)$.
- $x^2 \underset{x \to +\infty}{=} o(x^4)$.

ATTENTION ! $f \underset{a}{=} o(0)$ signifie que f est nulle au voisinage de a, ce qui est très rarement le cas dans les exercices et les problèmes. Dans 99% des cas, si vous aboutissez à une telle expression lors d'un calcul, c'est que vous vous êtes trompés.

Notation 2.1

La relation de négligeabilité $f - g \underset{a}{=} o(h)$ s'écrit également $f \underset{a}{=} g + o(h)$.

2.2 Exemples fondamentaux

Proposition 2.1 Au voisinage de $+\infty$

- Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\alpha < \beta \iff x^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} o(x^\beta)$.
- Soit $(a, b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Alors $a < b \iff a^x \underset{x \to +\infty}{=} o(b^x)$.
- Soit $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)$. Alors $(\ln x)^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} o(x^\beta)$.
- Soit $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)$. Alors $x^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} o(e^{\beta x})$.

Proposition 2.2 Au voisinage de 0

- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha > \beta \iff x^\alpha \underset{x \to 0}{=} o(x^\beta)$.
- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\beta > 0$. Alors $|\ln x|^\alpha \underset{x \to 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$.

Proposition 2.3 Au voisinage de $-\infty$

- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $e^{\alpha x} \underset{x \to -\infty}{=} o\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)$.
- Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $a > b \iff a^x \underset{x \to -\infty}{=} o(b^x)$.

2.3 Opérations sur les petits o

Proposition 2.4 Opérations sur les petits o

Transitivité

Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$, alors $f \underset{a}{=} o(h)$.

Multiplication par un réel non nul

Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $\lambda \neq 0$, alors $f \underset{a}{=} o(\lambda g)$.

Combinaison linéaire de fonctions négligeables devant une <u>même</u> fonction

Si $f_1 \underset{a}{=} o(g)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g)$, alors pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \underset{a}{=} o(g)$.

Produit

Si $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$, alors $f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$.

Si $f \underset{a}{=} o(g)$, alors $fh \underset{a}{=} o(gh)$.

Composition à <u>droite</u>

Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $\lim\limits_{b} \varphi = a$ alors $f \circ \varphi \underset{b}{=} o(g \circ \varphi)$.

Remarque. On en déduit aisément les résultats suivants :

- Si $f \underset{a}{=} g + o(h)$ et $\lambda \neq 0$, alors $f \underset{a}{=} g + o(\lambda h)$.
- Si $f_1 \underset{a}{=} g_1 + o(h)$ et $f_2 \underset{a}{=} g_1 + o(h)$, alors pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \underset{a}{=} \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + o(h)$.
- Si $f \underset{a}{=} g + o(h)$, alors $fk \underset{a}{=} gk + o(hk)$.

Attention ! Opérations interdites

- On n'additionne pas des relations de négligeabilité membre à membre :

$$f_1 \underset{a}{=} o(g_1) \text{ et } f_2 \underset{a}{=} o(g_2) \not\Longrightarrow f_1 + f_2 \underset{a}{=} o(g_1 + g_2)$$

Par exemple, $x - 1 \underset{x \to +\infty}{=} o(x^2)$ et $1 \underset{x \to +\infty}{=} o(1 - x^2)$ mais $x \underset{x \to +\infty}{\neq} o(1)$.

- On ne compose pas à gauche :

$$f \underset{a}{=} o(g) \not\Longrightarrow \varphi \circ f \underset{a}{=} o(\varphi \circ g)$$

Par exemple, $x \underset{x \to +\infty}{=} o(x^2)$ mais, si on compose à gauche par $x \mapsto \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\neq} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Méthode **Changement de variable**

En pratique, la composition à droite s'interprète comme un changement de variables. Si $f(u) \underset{u \to a}{=} o(g(u))$ et $u = \varphi(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} a$, alors $f(\varphi(x)) \underset{x \to b}{=} o(g(\varphi(x)))$.

Exemple 2.2

Pour comparer $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ et $\frac{1}{x}$ en 0^+, on pose $u = \frac{1}{x}$. On a $u \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $u \underset{u \to +\infty}{=} o\left(e^u\right)$ donc $\frac{1}{x} \underset{x \to 0^+}{=} o\left(e^{\frac{1}{x}}\right)$.

3 Équivalence

3.1 Définition

Définition 3.1

Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage $\mathcal{V}$ de a (éventuellement privé de a si f ou g n'est pas définie en a). On dit que f est **équivalente à** g s'il existe une fonction $\eta : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ telle que

- $f(x) = g(x)\eta(x)$ pour tout $x \in \mathcal{V}$,
- $\lim\limits_{x \to a} \eta(x) = 1$.

On note alors $f \underset{a}{\sim} g$ ou encore $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$

Méthode **Équivalence en pratique**

En pratique, la définition précédente est difficile à manipuler. Quand g ne s'annule pas au voisinage de a, $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ équivaut à $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Exemple 3.1

- $x^2+5x+4 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$.
- $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$.

Attention ! $f \underset{a}{\sim} 0$ signifie que f est nulle au voisinage de a, ce qui est très rarement le cas dans les exercices et les problèmes. Dans 99% des cas, si vous aboutissez à une telle expression lors d'un calcul, c'est que vous vous êtes trompés.

Proposition 3.1 Équivalence et négligeabilité

$$f \underset{a}{\sim} g \iff f \underset{a}{=} g+o(g)$$
$$f \underset{a}{=} o(g) \iff g+f \underset{a}{\sim} g$$

Exemple 3.2

$e^x+x^2+\ln x \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$ car $x^2 \underset{x\to+\infty}{=} o(e^x)$ et $\ln x \underset{x\to+\infty}{=} o(e^x)$.

Attention ! Les propositions $\lim\limits_a \dfrac{f}{g}=1$ et $\lim\limits_a f-g=0$ ne sont pas du tout équivalentes. On ne peut même pas dire que l'une implique l'autre. En termes de petits o, la première proposition se traduit par $f-g=o(g)$ et la seconde par $f-g=o(1)$.

Proposition 3.2 Signe et équivalence

Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors f et g sont de même signe au voisinage de a.

3.2 Exemples fondamentaux

Proposition 3.3 Logarithme, exponentielle, puissance

Un polynôme est équivalent en 0 à son monôme non nul de plus bas degré.
Un polynôme est équivalent en $\pm\infty$ à son monôme non nul de plus haut degré.

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \quad \text{i.e.} \quad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x+o(x)$$
$$e^x-1 \underset{x\to 0}{\sim} x \quad \text{i.e.} \quad e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+o(x)$$
$$(1+x)^\alpha-1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x \quad \text{i.e.} \quad (1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1+\alpha x+o(x)$$

Proposition 3.4 Fonctions circulaires

$$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x \quad \text{i.e.} \quad \sin x \underset{x\to 0}{=} x+o(x)$$
$$1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \quad \text{i.e.} \quad \cos x \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$
$$\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x \quad \text{i.e.} \quad \tan x \underset{x\to 0}{=} x+o(x)$$

Proposition 3.5 Fonctions circulaires réciproques

$$\arcsin x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \text{i.e.} \qquad \arcsin x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$$
$$\frac{\pi}{2} - \arccos x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \text{i.e.} \qquad \arccos x \underset{x\to 0}{=} \frac{\pi}{2} - x + o(x)$$
$$\arctan x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \text{i.e.} \qquad \arctan x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$$

Proposition 3.6 Fonctions hyperboliques

$$\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \text{i.e.} \qquad \operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$$
$$\operatorname{ch} x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \qquad \text{i.e.} \qquad \operatorname{ch} x \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$$\operatorname{th} x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \text{i.e.} \qquad \operatorname{th} x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$$

Attention ! Ne jamais mélanger petits o et équivalents. Par exemple, on n'écrira pas $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{\sim} 1+\alpha x+o(x)$. On peut par contre écrire $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{\sim} 1+\alpha x$ mais cela revient en fait à écrire $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{\sim} 1$ puisque $1+\alpha x \underset{x\to 0}{\sim} 1$.

Remarque. Pour $\alpha = -1$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x) \qquad\qquad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$$

3.3 Opérations sur les équivalents

Proposition 3.7 Opérations sur les équivalents

Réflexivité
$f \underset{a}{\sim} f$.

Symétrie
Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $g \underset{a}{\sim} f$.

Transitivité
Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors $f \underset{a}{\sim} h$.

Équivalence et petits o
Si $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et si $f_1 \underset{a}{\sim} f_2$ et $g_1 \underset{a}{\sim} g_2$, alors $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$.

Produit
Si $f_1 \underset{a}{\sim} f_2$ et $g_1 \underset{a}{\sim} g_2$, alors $f_1 g_1 \underset{a}{\sim} f_2 g_2$.

Inverse
Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si f ne s'annule pas au voisinage de a, alors $\frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$.

Puissance
Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $f > 0$ au voisinage de 0, alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Composition à <u>droite</u>
Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim_b \varphi = a$ alors $f \circ \varphi \underset{b}{\sim} g \circ \varphi$.

Attention ! Opérations interdites

- On n'additionne pas les équivalents :

$$f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \text{ et } f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \not\Rightarrow f_1 + f_2 \underset{a}{\sim} g_1 + g_2$$

Par exemple, $x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ et $-x+3 \underset{x\to+\infty}{\sim} -x+1$ mais $4 \underset{x\to+\infty}{\not\sim} 1$.

- On ne compose pas à gauche :

$$f \underset{a}{\sim} g \not\Rightarrow \varphi \circ f \underset{a}{\sim} \varphi \circ g$$

Par exemple, $x \underset{x\to+\infty}{\sim} x + \ln x$ mais, si on compose à gauche par $x \mapsto e^x$, $e^x \underset{x\to+\infty}{\not\sim} xe^x$.

Méthode **Déterminer un équivalent d'une somme**

Même si l'on n'a pas le droit d'additionner des équivalents, on peut tout de même déterminer un équivalent d'une somme. L'idée est de passer par des relations de négligeabilité pour revenir ensuite à un équivalent.

Exemple 3.3

On souhaite déterminer un équivalent de $x \mapsto \sin x + \tan x$ en 0. On sait que $\sin x \underset{x\to0}{\sim} x$ et $\tan x \underset{x\to0}{\sim} x$. Ces deux relations peuvent également s'écrire $\sin x \underset{x\to0}{=} x + o(x)$ et $\tan x \underset{x\to0}{=} x + o(x)$. On peut alors additionner ces deux relations de négligeabilité. On obtient $\sin x + \tan x = 2x + o(x)$ ce qui équivaut à $\sin x + \tan x \underset{x\to0}{\sim} 2x$.

Méthode **Changement de variable**

En pratique, la composition à droite s'interprète comme un changement de variables. Si $f(u) \underset{u\to a}{\sim} g(u)$ et $u = \varphi(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} a$, alors $f(\varphi(x)) \underset{x\to b}{\sim} g(\varphi(x))$.

Exemple 3.4

Pour déterminer un équivalent de $x \mapsto \sin x^2$ en 0, on pose $u = x^2$. Alors $u \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$ et $\sin u \underset{u\to0}{\sim} u$ donc $\sin x^2 \underset{x\to0}{\sim} x^2$.

Remarque. La plupart des équivalents usuels sont donnés en 0. On essaiera donc presque toujours de se ramener en 0 par changement de variable.

Exemple 3.5

Pour déterminer un équivalent de $x \mapsto \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ en $\frac{\pi}{4}$, on pose $u = x - \frac{\pi}{4}$. Alors $u \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\longrightarrow} 0$ et $\tan u \underset{u\to0}{\sim} u$ donc $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\sim} x - \frac{\pi}{4}$.

Exemple 3.6

Pour déterminer un équivalent de $x \mapsto e^{\frac{1}{x}} - 1$ en $+\infty$, on pose $u = \frac{1}{x}$. Alors $u \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$ donc $e^{\frac{1}{x}} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

4 Lien avec les limites

4.1 Limites et petits o

Proposition 4.1 Lien avec les limites

Soit f une fonction définie au voisinage de a (éventuellement non définie en a). Alors

$$\lim_a f = l \iff f \underset{a}{=} l + o(1)$$

Remarque. En particulier, $\lim_a f = 0 \iff f \underset{a}{=} o(1)$.

Exemple 4.1

On souhaite déterminer la limite éventuelle de $x \mapsto \frac{e^{2x} - e^x}{x}$ en 0. On sait que $e^{2x} \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + o(x)$ et que $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$. Ainsi $e^{2x} - e^x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$ donc $\frac{e^{2x} - e^x}{x} \underset{x\to 0}{=} 1 + o(1)$. On en déduit que $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x} = 1$.

4.2 Limites et équivalents

Proposition 4.2 Limites et équivalents

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a (éventuellement non définies en a).

- ◇ Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors soit f et g ont toutes deux une limite en a et $\lim_a f = \lim_a g$, soit f et g n'ont pas de limite en a.
- ◇ Soit l un réel **non nul**. Alors $\lim_a f = l$ **si et seulement si** $f \underset{a}{\sim} l$.

Exemple 4.2

On souhaite déterminer la limite éventuelle de $x \mapsto \frac{\ln(1+x^3)(e^{x^2} - 1)}{\sin^3 x(1 - \cos x)}$ en 0. On sait que

- ▶ $\ln(1+x^3) \underset{x\to 0}{\sim} x^3$ (via le changement de variable $u = x^3$) ;
- ▶ $e^{x^2} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x^2$ (via le changement de variable $u = x^2$) ;
- ▶ $\sin^3 x \underset{x\to 0}{\sim} x^3$;
- ▶ $1 - \cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

On en déduit que $\frac{\ln(1+x^3)(e^{x^2} - 1)}{\sin^3 x(1 - \cos x)} \underset{x\to 0}{\sim} 2$ et donc $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^3)(e^{x^2} - 1)}{\sin^3 x(1 - \cos x)} = 2$.

ATTENTION ! On peut avoir $\lim_a f = \lim_a g$ sans avoir $f \underset{a}{\sim} g$. Par exemple,

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \quad \text{mais} \quad e^x \underset{x\to+\infty}{\not\sim} x,$$
$$\lim_{x\to 0} x^2 = \lim_{x\to 0} x = 0 \quad \text{mais} \quad x^2 \underset{x\to 0}{\not\sim} x.$$

REMARQUE. L'utilisation des équivalents permet de déterminer élégamment des limites de fractions rationnelles en l'infini ou en 0.

Exemple 4.3

$$\frac{2x^3-5x^2+1}{3x^2-2x-4} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2x^3}{3x^2} = \frac{2}{3}x$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3}x = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-5x^2+1}{3x^2-2x-4} = +\infty$. De même

$$\frac{2x^3-5x^2+1}{3x^2-2x-4} \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{2}{3}x$$

et $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{3}x = -\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3-5x^2+1}{3x^2-2x-4} = -\infty$.

Exemple 4.4

$$\frac{2x^5+x^4-x^3}{2x^6-x^5+x^4-3x^3} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^3}{-3x^3} = \frac{1}{3}$$

donc $\lim_{x\to 0} \frac{2x^5+x^4-x^3}{2x^6-x^5+x^4-3x^3} = \frac{1}{3}$.

5 Domination

5.1 Définition

Définition 5.1

Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage $\mathcal{V}$ de a (éventuellement privé de a si f ou g n'est pas définie en a). On dit que f est **dominée par** g s'il existe une constante K telle que $|f(x)| \leqslant K|g(x)|$ pour tout $x \in \mathcal{V}$. On note alors $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ ou encore $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g(x))$

Méthode **Domination en pratique**

En pratique, la définition précédente est difficile à manipuler. Quand g ne s'annule pas au voisinage de a, $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ équivaut à $\frac{f}{g}$ bornée au voisinage de a.

Attention ! $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(0)$ signifie que f est nulle au voisinage de a, ce qui est très rarement le cas dans les exercices et les problèmes. Dans 99% des cas, si vous aboutissez à une telle expression lors d'un calcul, c'est que vous vous êtes trompés.

Remarque. En particulier dire que $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(1)$ signifie que f est bornée au voisinage de a.

5.2 Opérations sur les grands $\mathcal{O}$

Proposition 5.1 Opérations sur les grands $\mathcal{O}$

Multiplication par un réel non nul
Si $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ et $\lambda \neq 0$, alors $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\lambda g)$.

Combinaison linéaire de fonctions négligeables devant une même fonction
Si $f_1 \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ et $f_2 \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$, alors pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$.

Transitivité
Si $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ et $g \underset{a}{=} \mathcal{O}(h)$, alors $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(h)$.

Produit
Si $f_1 \underset{a}{=} \mathcal{O}(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} \mathcal{O}(g_2)$, alors $f_1 f_2 \underset{a}{=} \mathcal{O}(g_1 g_2)$.
Si $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$, alors $fh \underset{a}{=} \mathcal{O}(gh)$.

Composition à droite
Si $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ et $\lim_b \varphi = a$ alors $f \circ \varphi \underset{b}{=} \mathcal{O}(g \circ \varphi)$.

Équivalence et grands $\mathcal{O}$
Si $f_1 \underset{a}{=} \mathcal{O}(g_1)$ et si $f_1 \underset{a}{\sim} f_2$ et $g_1 \underset{a}{\sim} g_2$, alors $f_2 \underset{a}{=} \mathcal{O}(g_2)$.

Petits o et grands $\mathcal{O}$
Si $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$, alors $f \underset{a}{=} o(h)$.
Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} \mathcal{O}(h)$, alors $f \underset{a}{=} o(h)$.

Attention ! Opérations interdites

- On n'additionne pas des relations de domination membre à membre :

$$f_1 \underset{a}{=} \mathcal{O}(g_1) \text{ et } f_2 \underset{a}{=} \mathcal{O}(g_2) \not\Rightarrow f_1 + f_2 \underset{a}{=} \mathcal{O}(g_1 + g_2)$$

- On ne compose pas à gauche :

$$f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g) \not\Rightarrow \varphi \circ f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi \circ g)$$

5.3 Relation entre domination, négligeabilité et équivalence

Proposition 5.2

La négligeabilité et l'équivalence impliquent la domination. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$, alors $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$

Attention ! La réciproque est fausse.