EQUATIONS DIFFERENTIELLES

EQUATIONS LINEAIRES DU SECOND ORDRE A COEFFICIENTS CONSTANTS

Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants a la forme

$$(E) : \qquad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$$

où les nombres a, b et c sont trois réels (avec $a \neq 0$) et d une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Résoudre cette équation, c'est trouver l'ensemble S de toutes les fonctions réelles y deux fois dérivables sur I telles que, pour tout $t \in I$, l'égalité (E) soit vérifiée.

1 Etapes de la résolution

A l'équation différentielle (E), on associe l'équation homogène (E_0) obtenue en annulant $d(t)$ dans la partie droite de l'égalité :

$$(E_0) \qquad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

On note S_0 l'ensemble des solutions de (E_0) sur I. C'est un ensemble de fonctions $I \to \mathbb{R}$. Il n'est pas vide car il contient au moins la fonction nulle.

1.1 Lien les ensembles S et S_0

Le théorème suivant montre comment l'ensemble S des solutions de (E) se déduit de l'ensemble S_0 des solutions de l'équation homogène.

Théorème 1 *Supposons qu'il existe $y_p \in S$ une solution particulière de (E) sur I. Soit y une fonction deux fois dérivable sur I, alors*

$$y \in S \iff y - y_p \in S_0$$

Ainsi, toute solution de (E) est de la forme $y = y_p + y_0$ où y_0 est une solution de (E_0). Et réciproquement, pour toute fonction y_0 solution de (E_0), $y = y_p + y_0$ est une solution de (E). Ainsi

$$S = \{y_p + y_0, y_0 \in S_0\}$$

1.2 Conséquence : les étapes de la résolution

La résolution de (E) se fait en trois étapes :

— Résolution de (E_0) : on détermine S_0

— Recherche d'une solution particulière y_p

— Conclusion : $S = \{y_p + y_0, y_0 \in S_0\}$

2 Résolution de l'équation homogène

A l'équation homogène (E_0) : $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ on associe l'équation caractéristique

$$(C) : \qquad ar^2 + br + c = 0$$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

EQUATIONS LINEAIRES DU SECOND ORDRE A COEFFICIENTS CONSTANTS

Théorème 2 *Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique (C)*

— *Si $\Delta > 0$, (C) a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Alors*

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \to & k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t} \end{array}, (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

— *Si $\Delta = 0$, (C) a une racine réelle double r_1. Alors*

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \to & (k_1 + k_2 t) e^{r_1 t} \end{array}, (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

— *Si $\Delta < 0$, (C) a deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Alors*

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \to & e^{\alpha t}\left(k_1 \cos(\beta t) + k_2 \sin(\beta t)\right) \end{array}, (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

3 Recherche d'une solution particulière

Pas de méthode générale, mais quelques cas à connaitre.

3.1 Si d est polynomial

L'équation (E) a la forme $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = P(t)$. Alors on peut trouver une solution particulière polynomiale : $y_p(t) = Q(t)$.
On détermine le degré n de Q :

$$n = deg(Q) = \left| \begin{array}{ll} deg(P) & \text{si } c \neq 0 \\ deg(P) + 1 & \text{si } c = 0 \text{ et } b \neq 0 \\ deg(P) + 2 & \text{si } c = b = 0 \end{array} \right.$$

Quand on a déterminé n, on pose $Q(t) = \alpha_n t^n + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0$ et on reporte cette expression dans (E). On obtient les coefficients $(\alpha_k)_{k=0,\cdots,n}$ par identification.

3.2 Si d est polynomial exponentiel

L'équation (E) a la forme $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = P(t)e^{mt}$. On peut trouver une solution particulière de la forme : $y_p(t) = Q(t)e^{mt}$. Le report de cette expression dans (E) conduit à une équation

$$aQ''(t) + \beta Q'(t) + \gamma Q(t) = P(t)$$

et on est ramené au cas précédent. De plus, les constantes γ et β sont les valeurs de l'équation caractéristique (C) et de sa dérivée en m. Ainsi

$$\left| \begin{array}{llll} \text{Si } m \text{ non racine de } (C), & \gamma \neq 0 & \text{donc} & deg(Q) = deg(P) \\ \text{Si } m \text{ racine simple de } (C), & \gamma = 0 \text{ et } \beta \neq 0 & \text{donc} & deg(Q) = deg(P) + 1 \\ \text{Si } m \text{ racine double de } (C), & \gamma = \beta = 0 & \text{donc} & deg(Q) = deg(P) + 2 \end{array} \right.$$

3.3 Théorème de superposition

Ce théorème est utile si le terme de droite $d(t)$ peut se décomposer en la somme d'un polynôme et d'une exponentielle, ou de deux exponentielles différentes.

Théorème 3 *Si y_1 et y_2 sont des solutions particulières respectivement des équations*

$$\left|\begin{array}{lll} (E_1): & ay''(t)+by'(t)+cy(t) & = & d_1(t) \\ (E_2): & ay''(t)+by'(t)+cy(t) & = & d_2(t) \end{array}\right.$$

alors $y=y_1+y_2$ est une solution particulière de

$$(E): \qquad ay''(t)+by'(t)+cy(t)=d_1(t)+d_2(t)$$

4 Conclusion

On conclut la résolution de (E) sur I en écrivant

$$S=\left\{\begin{array}{lll} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \rightarrow & y_p(t)+y_0(t) \end{array}, y_0 \in S_0\right\}$$