DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS
DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS AU VOISINAGE D'UN POINT

1 Définition

Définition 1 *Soient $x_0 \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un* ***développement limité (DL)*** *au point x_0 à l'ordre n, s'il existe des réels $a_0, a_1, ..., a_n$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ de sorte que pour tout $x \in I$:*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x).$$

1. *L'égalité précédente s'appelle DL de f au voisinage de x_0 à l'ordre n.*
2. *Le terme $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n$ est appelé partie polynomiale du DL.*
3. *Le terme $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$ est appelé reste du DL.*

2 Existence et unicité

Proposition 1 *Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage d'un point x_0, alors f admet un DL au point x_0 à l'ordre n, qui provient de la formule de Taylor-Young :*

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x),$$

où $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$

Proposition 2 *Si f admet un DL en x_0 alors ce DL est unique.*

Remarque 1
1. *Si f est paire, alors la partie polynomiale de son DL en 0 ne contient que des monômes de degrés pairs.*
2. *Si f impaire, alors la partie polynomiale de son DL en 0 ne contient que des monômes de degrés impairs.*

3 DL des fonctions usuelles à l'origine à connaître

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+1} \varepsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p} \varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \ldots + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

4 DL en un point quelconque

Définition 2 *La fonction f admet un DL au voisinage d'un point x_0 si et seulement si la fonction $x \to f(x+x_0)$ admet un DL au voisinage de 0.*