Équations différentielles linéaires du second ordre

Exercices types

1 Énoncés

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E): \quad y'' - y' + y = t^2$$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E): \quad y'' - 8y' + 16y = t^3 e^{3t}$$

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E): \quad y'' - y = te^t + e^{2t}$$

2 Corrigés

On résout chaque équation en trois étapes :
1. Résolution de l'équation homogène
2. Recherche d'une solution particulière
3. Conclusion

Exercice 1

Étape 1 : équation homogène

L'équation homogène associée à l'équation (E) est

$$(E_0): \quad y'' - y' + y = 0$$

Son équation caractéristique est

$$(C): \quad r^2 - r + 1 = 0$$

dont le discriminant vaut

$$\begin{array}{rcl} \Delta & = & (-1)^2 - 4 \\ & = & -3 \\ & = & \left(i\sqrt{3}\right)^2 \end{array}$$

Ainsi, l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées

$$\begin{array}{rl} r_1 & = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ & = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rl} r_2 & = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2} \\ & = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

On en déduit l'ensemble des solutions de (E_0) :

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \to & e^{\frac{1}{2}t}\left[k_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + k_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right] \end{array} ; (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Étape 2 : solution particulière

Le terme de droite de (E) étant une fonction polynomiale, on cherche une solution particulière sous une forme elle même polynomiale :

$$y_p(t) = Q(t)$$

On a alors

$$\left.\begin{array}{r} deg(Q'' - Q' + Q) = deg(Q) \\ Q'' - Q' + Q = t^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow deg(Q) = 2$$

Donc

$$Q(t) = \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0$$

où les α_k sont trois constantes réelles.
Pour les déterminer, on calcule

$$Q'(t) = 2\alpha_2 t + \alpha_1 \qquad \text{et} \qquad Q''(t) = 2\alpha_2$$

qu'on reporte dans (E) :

$$\begin{aligned} Q'' - Q' + Q = t^2 &\iff 2\alpha_2 - (2\alpha_2 t + \alpha_1) + (\alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0) = t^2 \\ &\iff \alpha_2 t^2 + (-2\alpha_2 + \alpha_1)t + (2\alpha_2 - \alpha_1 + \alpha_0) = t^2 \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients des monômes de degrés 0, 1 et 2 dans cette dernière égalité, on voit que les α_k sont solution du système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \alpha_2 & & & & & = & 1 \\ -2\alpha_2 & + & \alpha_1 & & & = & 0 \\ 2\alpha_2 & - & \alpha_1 & + & \alpha_0 & = & 0 \end{array} \right.$$

Ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_2 & = & 1 \\ \alpha_1 & = & 2 \\ \alpha_0 & = & 0 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad y_p(t) = t^2 + 2t$$

Étape 3 : conclusion

L'ensemble des solutions de (E) s'obtient en ajoutant cette solution particulière aux solutions de l'équation homogène (E_0) :

$$S = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \to & t^2 + 2t + e^{\frac{1}{2}t}\left[k_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + k_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right] \end{array} ; (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercice 2

Étape 1 : équation homogène

L'équation homogène associée à l'équation (E) est

$$(E_0) : \quad y'' - 8y' + 16y = 0$$

Son équation caractéristique est

$$(C) : \quad r^2 - 8r + 16 = 0$$

Le calcul du discriminant donne

$$\begin{aligned} \Delta &= 8^2 - 4.16 \\ &= 64 - 64 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation caractéristique a une racine double

$$r_1 = \frac{8}{2} = 4$$

On en déduit l'ensemble des solutions de (E_0) :

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \to & e^{4t}(k_1 + k_2 t) \end{array} ; (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Étape 2 : solution particulière

Le terme de droite de (E) étant le produit d'un polynôme par e^{3t}, on cherche une solution particulière sous la même forme :

$$y_p(t) = Q(t)e^{3t}$$

où Q est un polynôme qu'il nous faut déterminer. Pour cela, on calcule les dérivées de y_p :

$$y_p'(t) = [Q'(t) + 3Q(t)]e^{3t} \qquad \text{et} \qquad y_p''(t) = [Q''(t) + 6Q'(t) + 9Q(t)]e^{3t}$$

et on les reporte dans (E) :

$$\begin{array}{rcl} y_p \text{ solution de } (E) & \iff & (Q'' + 6Q' + 9Q)e^{3t} - 8(Q' + 3Q)e^{3t} + 16Qe^{3t} = t^3e^{3t} \\ & \iff & (Q'' - 2Q' + Q)e^{3t} = t^3e^{3t} \\ & \iff & Q'' - 2Q' + Q = t^3 \end{array}$$

On commence par déterminer le degré de Q :

$$\left.\begin{array}{r} deg(Q'' - 2Q' + Q) = deg(Q) \\ Q'' - 2Q' + Q = t^3 \end{array}\right\} \Longrightarrow deg(Q) = 3$$

Ainsi,

$$Q(t) = \alpha_3t^3 + \alpha_2t^2 + \alpha_1t + \alpha_0$$

où les α_k sont quatre constantes réelles.
Pour déterminer Q, il reste à trouver les valeurs des α_k. Pour cela, on calcule

$$Q'(t) = 3\alpha_3t^2 + 2\alpha_2t + \alpha_1 \qquad \text{et} \qquad Q''(t) = 6\alpha_3t + 2\alpha_2$$

et on reporte ces expressions :

$$\begin{array}{l} Q'' - 2Q' + Q = t^3 \\ \iff \quad (6\alpha_3t + 2\alpha_2) - 2(3\alpha_3t^2 + 2\alpha_2t + \alpha_1) + (\alpha_3t^3 + \alpha_2t^2 + \alpha_1t + \alpha_0) = t^3 \\ \iff \quad \alpha_3t^3 + (-6\alpha_3 + \alpha_2)t^2 + (6\alpha_3 - 4\alpha_2 + \alpha_1)t + (2\alpha_2 - 2\alpha_1 + \alpha_0) = t^3 \end{array}$$

En identifiant les coefficients des monômes de degrés $0, 1, 2$ et 3 dans cette dernière égalité, on voit que les α_k sont solution du système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \alpha_3 & & & & & & & = & 1 \\ -6\alpha_3 & + & \alpha_2 & & & & & = & 0 \\ 6\alpha_3 & - & 4\alpha_2 & + & \alpha_1 & & & = & 0 \\ & & 2\alpha_2 & - & 2\alpha_1 & + & \alpha_0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha_3 & = & 1 \\ \alpha_2 & = & 6 \\ \alpha_1 & = & 18 \\ \alpha_0 & = & 24 \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad y_p(t) = (t^3 + 6t^2 + 18t + 24)e^{3t}$$

Étape 3 : conclusion

Des deux premières étapes, on déduit l'ensemble des solutions de (E) :

$$S = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \to & (t^3 + 6t^2 + 18t + 24)e^{3t} + e^{4t}(k_1 + k_2t) \end{array} ; (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercice 3

Étape 1 : équation homogène

L'équation homogène associée à l'équation (E) est

$$(E_0): \quad y'' - y = 0$$

Son équation caractéristique est

$$(C): \quad r^2 - 1 = 0$$

dont les deux racines sont -1 et 1. Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_0) est

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \to & k_1 e^{-t} + k_2 e^t \end{array} ; (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Étape 2 : solution particulière

Le terme de droite de (E) étant la somme de deux produits polynômes-exponentielles, on décompose l'équation en deux :

$$\begin{array}{lrcl} (E_1): & y'' - y & = & te^t \\ (E_2): & y'' - y & = & e^{2t} \end{array}$$

et on applique le théorème de superposition : on cherche une solution particulière à chaque équation (E_1) et (E_2), soit y_{p1} et y_{p2}. Une solution particulière de (E) sera alors la somme des deux :

$$y_p = y_{p1} + y_{p2}$$

Solution particulière de (E_1) : on cherche y_{p1} sous la forme

$$y_{p1}(t) = Q(t)e^t$$

où Q est un polynôme. Les dérivées valent alors

$$y'_{p1} = (Q' + Q)e^t \qquad \text{et} \qquad y''_{p1} = (Q'' + 2Q' + Q)e^t$$

En reportant ces expressions dans (E_1), on trouve

$$\begin{array}{rcl} y''_{p1} - y_{p1} = te^t & \Longleftrightarrow & (Q'' + 2Q' + Q)e^t - Qe^t = te^t \\ & \Longleftrightarrow & (Q'' + 2Q')e^t = te^t \\ & \Longleftrightarrow & Q'' + 2Q' = t \end{array}$$

On a alors

$$\left. \begin{array}{r} deg(Q'' + 2Q') = deg(Q) - 1 \\ Q'' + 2Q' = t \end{array} \right\} \Longrightarrow deg(Q) - 1 = 1 \Longrightarrow deg(Q) = 2$$

Ainsi,

$$Q(t) = \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0$$

où les α_k sont trois constantes réelles.
Pour les déterminer, on calcule

$$Q'(t) = 2\alpha_2 t + \alpha_1 \qquad \text{et} \qquad Q''(t) = 2\alpha_2$$

et on reporte ces expressions :

$$\begin{aligned} Q'' + 2Q' = t &\iff 2\alpha_2 + 2(2\alpha_2 t + \alpha_1) = t \\ &\iff 4\alpha_2 t + (2\alpha_2 + 2\alpha_1) = t \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients des monômes de degrés 0 et 1 dans cette dernière égalité, on voit que les α_k sont solution du système

$$\left\{ \begin{array}{lcccc} 4\alpha_2 & & & = & 1 \\ 2\alpha_2 & + & 2\alpha_1 & = & 0 \end{array} \right.$$

Ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_2 & = & \frac{1}{4} \\ \alpha_1 & = & -\frac{1}{4} \end{array} \right.$$

Le coefficient α_0 n'est pas contraint et on lui donne la valeur que l'on veut, par exemple 0. Finalement, on trouve

$$y_{p1}(t) = \left(\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t \right) e^t$$

Solution particulière de (E_2) **:** on cherche y_{p2} sous la forme

$$y_{p2}(t) = Q(t)e^{2t}$$

où Q est un polynôme. Les dérivées valent alors

$$y'_{p2} = (Q' + 2Q)e^{2t} \qquad \text{et} \qquad y''_{p1} = (Q'' + 4Q' + 4Q)e^{2t}$$

En reportant ces expressions dans (E_2), on trouve

$$\begin{aligned} y''_{p2} - y_{p2} = e^{2t} &\iff (Q'' + 4Q' + 4Q)e^{2t} - Qe^{2t} = e^{2t} \\ &\iff (Q'' + 4Q' + 3Q)e^{2t} = e^{2t} \\ &\iff Q'' + 4Q' + 3Q = 1 \end{aligned}$$

On a alors

$$\left. \begin{array}{r} deg(Q'' + 4Q' + 3Q) = deg(Q) \\ Q'' + 4Q' + 3Q = 1 \end{array} \right\} \Longrightarrow deg(Q) = 0$$

Ainsi,

$$Q(t) = \alpha_0$$

où α_0 est une constante et les dérivées de Q sont nulles. Ceci nous conduit à,

$$\begin{aligned} Q'' + 4Q' + 3Q = 1 &\iff 3\alpha_0 = 1 \\ &\iff \alpha_0 = \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Finalement, Q est la fonction constante $\frac{1}{3}$ et la solution particulière recherchée est

$$y_{p2}(t) = \frac{1}{3}e^{2t}$$

Solution particulière de (E) **:** c'est la somme des solutions particulières de (E_1) et de (E_2), à savoir

$$y_p(t) = \left(\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t \right) e^t + \frac{1}{3}e^{2t}$$

Étape 3 : conclusion

Des deux premières étapes, on déduit l'ensemble des solutions de (E) :

$$S = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \to & \left(\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t\right)e^t + \frac{1}{3}e^{2t} + k_1 e^{-t} + k_2 e^t \end{array} ; (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$