ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

EXEMPLES D'ÉQUATIONS NON LINÉAIRES

Il n'y a pas de méthode générale pour la résolution d'équations différentielles non linéaires. Cependant, il est quelque fois possible, par une transformation de la fonction recherchée, de se ramener à une équation linéaire.
Les équations de Bernoulli et de Riccati sont les cas les plus connus de ce type.

1 Équations de Bernoulli

Une équation de Bernoulli a la forme

$$(E): \qquad a(t)y'(t) + b(t)y(t) + c(t)y^{\alpha}(t) = 0$$

où $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, a, b et c sont trois fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et où a ne s'annule pas sur I.

On suppose que l'exposant α est différent de 0 et 1 car, dans ces deux cas, (E) est une équation linéaire du premier ordre que l'on sait déjà résoudre.
Néanmoins, en dehors de ces deux cas, on peut aussi se ramener à une équation linéaire. Pour cela, définissons la fonction

$$z(t) = y^{1-\alpha}(t)$$

Remarque. Selon la valeur de α, cette définition peut nous amener à supposer que $y(t)$ est non nul, voir strictement positif, et donc à restreindre l'intervalle I de définition de z.
La dérivée de z vaut alors, pour tout $t \in I$ tel que $y(t) \neq, 0$,

$$z'(t) = (1-\alpha)y^{-\alpha}(t)y'(t)$$

Ce qui implique que

$$y'(t) = \frac{z'(t)y^{\alpha}(t)}{1-\alpha}$$

Si y est solution de (E) on a alors, pour tout $t \in I$ tel que $y(t) \neq 0$,

$$\begin{aligned}
a(t)y'(t) + b(t)y(t) + c(t)y^{\alpha}(t) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad a(t)\frac{z'(t)y^{\alpha}(t)}{1-\alpha} + b(t)y(t) + c(t)y^{\alpha}(t) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad a(t)\frac{z'(t)y^{\alpha}(t)}{1-\alpha} + b(t)z(t)y^{\alpha}(t) + c(t)y^{\alpha}(t) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(a(t)\frac{z'(t)}{1-\alpha} + b(t)z(t) + c(t)\right)y^{\alpha}(t) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad a(t)\frac{z'(t)}{1-\alpha} + b(t)z(t) + c(t) = 0 \quad \left(\text{car } y^{\alpha}(t) \neq 0\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction z est solution de

$$(E'): \qquad \frac{a(t)}{1-\alpha}z'(t) + b(t)z(t) = -c(t)$$

Il s'agit d'une équation linéaire du premier ordre qu'on sait résoudre.
Finalement, la résolution de (E) se fait en trois étapes :

1. On pose $z(t) = y^{1-\alpha}(t)$ et on obtient l'équation (E')
2. On résout (E') sur I

3. On définit
$$y(t) = z^{\frac{1}{1-\alpha}}(t)$$
où z est une solution quelconque de (E').
Cette dernière définition peut amener, selon la valeur de α, à restreindre l'intervalle de définition pour que la fonction z soit non nulle, voire strictement positive.

2 Équations de Riccati

Une équation de Riccati a la forme générale
$$(E): \qquad a(t)y'(t) + b(t)y(t) + c(t)y^2(t) + d(t) = 0$$
où les fonctions a, b, c et d sont des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et où a ne s'annule pas.
Remarquons que, si la fonction d est identiquement nulle, l'équation est en fait une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$. Mais dans le cas contraire, si on connait une solution particulière y_0 de (E), on peut aussi se ramener à une équation de Bernoulli.

Pour cela, on définit la fonction $Y = y - y_0$. On a alors $y = Y + y_0$ et $y' = Y' + y_0'$. Ainsi
$$\begin{array}{rcl} y \text{ solution de } (E) & \iff & ay' + by + cy^2 + d = 0 \\ & \iff & a(Y' + y_0') + b(Y + y_0) + c(Y + y_0)^2 + d = 0 \\ & \iff & a(Y' + y_0') + b(Y + y_0) + c(Y^2 + 2Yy_0 + y_0^2) + d = 0 \\ & \iff & (aY' + bY + cY^2 + 2cYy_0) + (ay_0' + by_0 + cy_0^2 + d) = 0 \\ & \iff & \big(aY' + (b + 2cy_0)Y + cY^2\big) + \big(ay_0' + by_0 + cy_0^2 + d\big) = 0 \end{array}$$
Comme la fonction y_0 est une solution de (E), la somme $ay_0' + by_0 + cy_0^2 + d$ est identiquement nulle. On en déduit que y est solution de (E) si et seulement si Y satisfait à l'équation
$$(E'): \qquad aY' + (b + 2cy_0)Y + cY^2 = 0$$
Il s'agit d'une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$. On la résout comme on a vu plus haut, en posant
$$Z(t) = Y^{1-\alpha}(t) = \frac{1}{Y(t)}$$
On trouve alors que Z est solution de l'équation linéaire du premier ordre
$$(E''): \qquad -a(t)Z'(t) + \big[b(t) + 2c(t)y_0(t)\big]Z(t) = -c(t)$$
Finalement, la résolution de (E) se fait en trois étapes :

1. On pose $Y = y - y_0$ et on déduit l'équation (E') satisfaite par Y
2. On pose $Z = \dfrac{1}{Y}$ et on déduit l'équation (E'') satisfaite par Z
3. On résout (E''). Pour toute fonction Z solution de (E''), on cherche un intervalle $J \subset I$ sur lequel elle ne s'annule pas puis on définit sur J les fonctions
$$Y = \frac{1}{Z} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} y & = & Y + y_0 \\ & = & \dfrac{1}{Z} + y_0 \end{array}$$
La fonction y ainsi obtenue est une solution de (E) sur l'intervalle J.