

## Introduction

보드선도(이하 **Bode plot**)는 시스템의 주파수 응답을 나타내는 유용한 방법이다. 주파수 응답을 통해 안정도에 대한 정보도 알 수 있어 주파수 분석 방법으로 가장 쉽게 접할 수 있다. 시스템 반응성을 보기 위해서 3 dB 포인트를 얘기할 수도 있고, 시스템 공진 주파수 정보, 제어 시스템 위상 여유 등 다양한 정보를 취득하거나 설명하기 위하여 사용된다. 본 문서에서는 회로나 시스템의 특성을 알아보는 측면에서 **Bode plot**을 **Asymptotic**하게 그리는 방법을 서술한다.

## Asymptotic approximation: Bode plot

시스템의 응답을 알아보기 위해서 **Bode plot**을 정확하게 그리는 것보다는 중요한 정보만을 추출하기 위하여 **Asymptotic**하게 그릴 수 있다. 실제 시스템의 반응에서 극점이나 영점의 위치를 기반으로 공진점인지, 위상 여유가 있는지 확인하는 것이 중요하기 때문에 **Asymptotic approximation**을 알아 두는 것이 유용하다.

특정한 시스템의 응답을 하나의 전달 함수를 생각해볼 때, 모든 전달 함수는 복소수를 이용해 극점(Pole)과 영점(Zero)으로 나타낼 수 있다고 얘기할 수 있다.

$$G(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_k)}{s^m(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$

**Bode plot**을 그리기 위해서는 주파수별 크기와 위상 정보가 필요하며, 크기는 아래와 같다. ( $s \rightarrow j\omega$ )

$$|G(j\omega)| = \frac{K|(s + z_1)||s + z_2| \cdots |s + z_k|}{|s^m||s + p_1||s + p_2| \cdots |s + p_n|} \Big|_{s \rightarrow j\omega}$$

보통 주파수 범위가 크기 때문에 선형 **Scale**로 나타내지 않고 **Log scale**을 사용한다.

$$[\quad]_{\text{dB}} = 20 \log[\quad]$$

**Log scale**을 사용하면 크기 성분은 아래와 같이 **Algebraic sum** 형태로 나타낼 수 있다. 즉, 각 극점과 영점의 반응을 알고 있다면 전체 전달함수는 이 반응의 합으로 나타낼 수 있다는 것이다.

$$\begin{aligned} 20 \log |G(j\omega)| &= 20 \log K \\ &+ 20 \log |(j\omega + z_1)| + \cdots + 20 \log |(j\omega + z_k)| \\ &- 20 \log |j\omega^m| - 20 \log |(j\omega + p_1)| - \cdots - 20 \log |(j\omega + p_n)| \end{aligned}$$

위상의 경우, 최초의 수식에서 그 정보를 알 수 있다. 오일러 공식 등을 생각해보면 복소수는 크기와 **exponential term**으로 나타낼 수 있다. 그러면 각 항의 위상 정보를 알고 있다면 이를 더하고 빼서 전체 위상 정보를 알 수 있는 것이다.

$$\angle G(j\omega) = \sum \angle(z_i) - \sum \angle(p_i)$$

## 1st order – Single pole or zero response

그림 1과 같이 간단한 LC 필터에서 입력 전압과 출력 전압에 대한 전달함수를 구한다면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \frac{v_2}{v_1} &= \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + sRC} \\ \frac{v_2}{v_1} \Big|_{s=j\omega} &= \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \\ \left| \frac{v_2}{v_1} \right|_{s=j\omega} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \end{aligned}$$

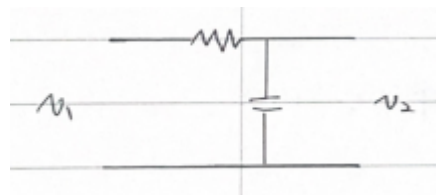


그림 1. LC 필터

**Bode plot**을 그리기 위해서 크기 성분을 **Log scale**로 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\left| \frac{v_2}{v_1} \right|_{\text{dB}} = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

여기서,  $\omega_1 = 1/RC$  라면,

- $\omega \ll \omega_1$  then,  $\left| \frac{v_2}{v_1} \right|_{\text{dB}} = 0$
- $\omega \gg \omega_1$  then,  $\left| \frac{v_2}{v_1} \right|_{\text{dB}} = -20 \log \frac{\omega}{\omega_1}$
- $\omega = \omega_1$  then,  $\left| \frac{v_2}{v_1} \right|_{\text{dB}} = -3 \text{ dB}$

위상에 대한 정보를 보기 위해서 수식을 계산할 수 있다.

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{\text{Im}}{\text{Re}} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{-\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \times \frac{1 + \omega^2 R^2 C^2}{1} \right)$$

$$= -\tan^{-1}(\omega RC) = -\tan^{-1} \left( \frac{\omega}{\omega_1} \right)$$

- i.  $\omega \ll \omega_1$  then,  $\phi = 0^\circ$
- ii.  $\omega \gg \omega_1$  then,  $\phi = -90^\circ$
- iii.  $\omega = \omega_1$  then,  $\phi = -45^\circ$

위에서 음의 부호는 **phase delay**가 생긴다는 물리적인 의미를 나타낸다. 이를 이용해 **Bode plot**을 그리면 그림 2와 같다.

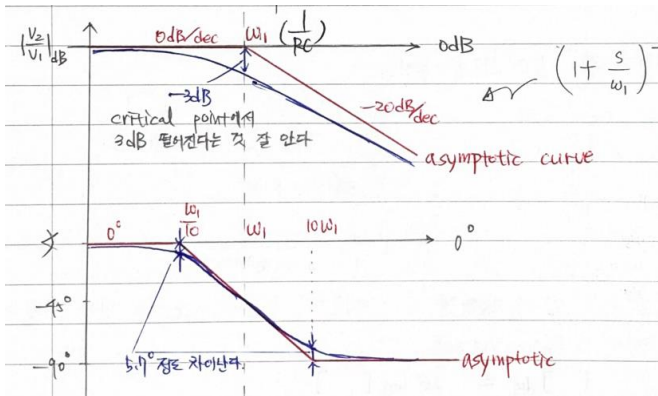


그림 2. LC 필터 전달함수 Bode plot (Single pole response)

극점으로 볼 수 있는  $\omega_1$  지점을 기준으로, 크기는  $-20 \text{ dB/dec}$ 로 꺾여 내려가고 위상은 그 전후  $[\frac{\omega_1}{10} \ 10\omega_1]$  구간에서  $0^\circ \rightarrow -90^\circ$ 로 변화가 일어난다.  $\omega_1$  지점은 실제 Bode plot에서  $-3 \text{ dB}$  인 **Critical point**를 나타낸다.

위의 사례는 하나의 극점(single pole)에 대한 예시를 나타내며, 영점에 대해서도 똑같이 풀어볼 수 있다. 하나의 영점(single zero)  $\omega_0$ 에 대해서는 그림 3과 같이, 크기는  $+20 \text{ dB/dec}$ 로 꺾여 올라가고 위상은 전후  $[\frac{\omega_0}{10} \ 10\omega_0]$ 에서  $0^\circ \rightarrow +90^\circ$ 로 변화가 일어난다.

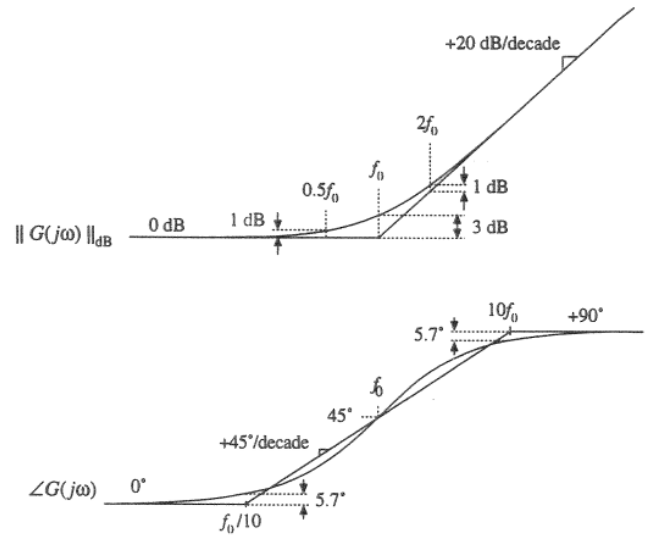


그림 3. Single zero response

## 2nd order – Quadratic pole response

### : Resonance

LC 공진회로 등에서 찾아볼 수 있는 중근을 갖는 2차 방정식 형태의 극점에 대해서도 **Asymptotic plot**을 할 수 있으며 2차 방정식의 **Analytic expression**은 다음과 같다.

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{Q\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}$$

위의 수식은 **Complex-conjugate**인 두 개의 **Complex number**를 극점으로 가지게 된다. 그림 4와 같이 **Quality factor**,  $Q$ 에 따라 근이 변동하는 것을 볼 수 있다.

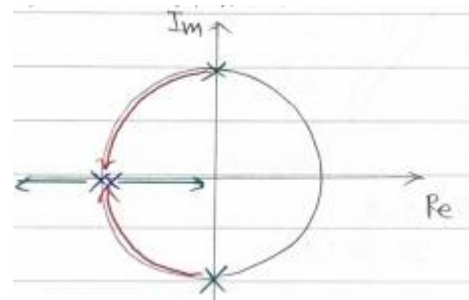


그림 4. 2차 극점의 이동 ( $Q: \infty \rightarrow 0$ )

**Quality factor**가 무한대면,  $\pm j\omega_0$ 의 두 극점을 갖게 되며, 이는 **Time domain**에서 **Pure oscillating**하게 된다. **Quality factor**가 작아 짐에 따른 양상을 보면, **Imaginary axis** 상에 있다가  $\omega_0$ 인 원을 따라 이동하게 된다. 크기가 작아지다가 0.5가 되면 중근이 되며, 0.5보다 작은 값을 가지면 실근 두 개로 **Split**된다는 것을 알 수 있다. 즉, **Quality factor**는 **loss factor** 즉, 시스템에 **friction** 혹은 **damping** 요소를 나타낸다. 이를  $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$ 의 형태로 바꾸어 비교해 볼 수도 있다.

1차 극점 분석과 같이 수식을 전개하면 아래와 같다.

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}$$

- i.  $\omega \ll \omega_0$  then,  $|G(j\omega)|_{dB} = 0$
- ii.  $\omega \gg \omega_0$  then,  $|G(j\omega)|_{dB} = -40 \log \frac{\omega}{\omega_0}$
- iii.  $\omega = \omega_0$  then,  $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log Q$

$$\angle = -\tan^{-1} \left( \frac{\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right)$$

- i.  $\omega \ll \omega_0$  then,  $\angle = -\tan^{-1}(+0) \rightarrow 0^\circ$
- ii.  $\omega \gg \omega_0$  then,  $\angle = -\tan^{-1}(-0) \rightarrow -180^\circ$
- iii.  $\omega = \omega_0$  then,  $\angle = -\tan^{-1}(\infty) \rightarrow -90^\circ$

그림 5와 같이 변화를 그릴 수 있다.

크기의 경우, Asymptotic plot을 그리게 되면 0 dB를 유지하다가 극점을 지나면서 기울기가 -40 dB/dec로 변하게 된다. 이를 기준으로 Quality factor에 따라 ( $20 \log Q$ ) 극점 근처에서의 형태를 판단할 수 있다. Quality factor가 1인 경우 극점 직전에 살짝 상승했다 내려가면서 극점에서 0 dB를 교차한다. 0.5인 경우 극점에서 -6 dB의 크기를 갖게 된다. 1보다 큰 경우  $20 \log Q$ 으로 피크 크기가 결정된다.

위상의 경우, 극점에서  $-90^\circ$ 이고 그 전 후에서  $0^\circ \rightarrow -180^\circ$ 로 변화한다. 변화의 기울기는  $\omega_0[N^{-1/2Q} \ N^{1/2Q}]$ 의 구간으로 디자인할 수 있고, N은  $e^{\pi/2}$ , 5, 10 등으로 결정할 수 있다. Quality factor가 커짐에 따라 기울기가 급해진다.

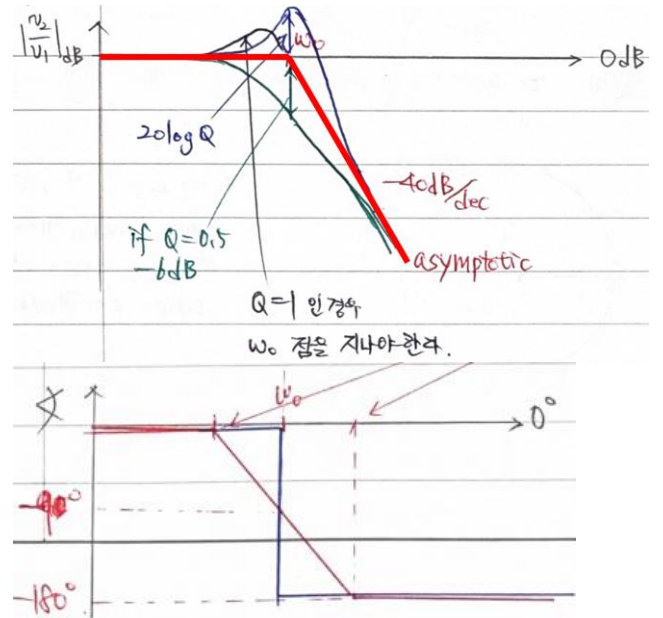


그림 5. Second order bode plot

참고문헌 [2]에서 Low-Q Approximation에 대해서 다루는데, 그림 6과 같이 크기 변화를  $[Q\omega_0 \ \omega_0/Q]$  구간으로 잡고,  $Q\omega_0$ 에서 -20 dB/dec로 한 번 변하고,  $\omega_0/Q$ 에서 -40 dB/dec로 한 번 더 변화하는 것으로 나타내기도 한다.

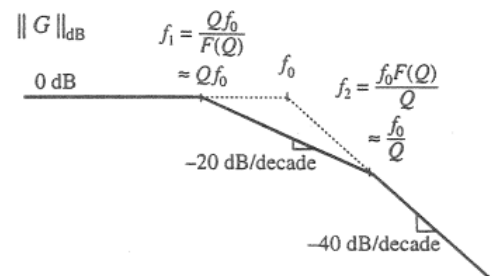


그림 6. Low-Q approximation

## High order: How to approximate

높은 차수의 함수의 경우, 1차와 2차 특성 함수의 조합으로 표현할 수 있다. 특히 실제 시스템의 경우 Polynomial의 Coefficient가 모두 실수이므로, 1차 Polynomial의 곱으로 표현할 수 있다. 3차 함수는 3개의 1차 Polynomial 혹은 하나의 1차 식과 하나의 2차식으로 표현할 수 있다. N차 Polynomial도 N개의 complex number 조합으로 표현할 수 있다.

아래와 같은 조합의 전달함수가 있다고 생각해보자. 예시로  $\omega_{p1} < \omega_{z1} < \omega_{z2} < \omega_0$ 인 경우에 대하여 그림 7과 같이 Asymptote bode plot을 그릴 수 있다.

$$G(s) = A_n \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_{z1}}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_{z2}}\right)}{\left(1 + \frac{s}{\omega_{p1}}\right) \left(1 + \frac{s}{Q\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}\right)}$$

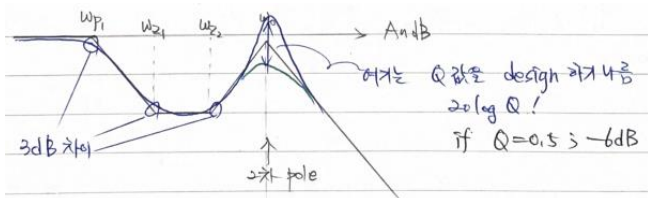


그림 7. Combination

본 자료는 대략적인 정보 전달을 위한 매거진으로, 기술상의 오류가 있을 수 있으며, 최신 동향이 누락될 수 있습니다. 상세한 지식과 정보를 얻기 위해서는 교재 및 논문 등을 참고하시기 바랍니다.

Reporting: benkim@plecko.biz

참고 문헌

[1] Nise, Control System Engineering

[2] Erickson, Fundamental of Power Electronics

[3] B. Cho, 전력전자공학 수업자료