Asymptotic approximation of Bode plot

2023. 08. 10.
Byeongheon Kim
PLECKO

Introduction

보드선도(이하 Bode plot)는 시스템의 주파수 응답을 나타내는 유용한 방법이다. 주파수 응답을 통해 안정도에 대한 정보도 알 수 있어 주파수 분석 방법으로 가장 쉽게 접할 수 있다. 시스템 반응성을 보기 위해서 3 dB 포인트를 얘기할 수도 있고, 시스템 공진 주파수 정보, 제어 시스템 위상 여유 등 다양한 정보를 취득하거나 설명하기 위하여 사용된다. 본 문서에서는 회로나 시스템의 특성을 알아보는 측면에서 Bode plot을 Asymptotic하게 그리는 방법을 서술한다.

Asymptotic approximation: Bode plot

시스템의 응답을 알아보기 위해서 Bode plot을 정확하게 그리는 것보다는 중요한 정보만을 추출하기 위하여 Asymptotic 하게 그릴 수 있다. 실제 시스템의 반응은 극점이나 영점의 위치를 기반으로 공진점인지, 위상 여유가 있는지 확인하는 것이 중요하기 때문에 Asymptotic approximation을 알아 두는 것이 유용하다.

특정한 시스템의 응답을 하나의 전달 함수를 생각해볼 때, 모든 전달 함수는 복소수를 이용해 극점(Pole)과 영점(Zero)으로 나타낼 수 있다고 얘기할 수 있다.

$$G(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_k)}{s^m(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

Bode plot을 그리기 위해서는 주파수별 크기와 위상 정보가 필요하며, 크기는 아래와 같다. ($s \to j\omega$)

$$|G(j\omega)| = \left.\frac{K|(s+z_1)||(s+z_2)|\cdots|(s+z_k)|}{|s^m||(s+p_1)||(s+p_2)|\cdots|(s+p_n)|}\right|_{s\to j\omega}$$

보통 주파수 범위가 크기 때문에 선형 Scale로 나타내지 않고 Log scale을 사용한다.

$$[\quad]_{\mathrm{dB}} = 20\log[\quad]$$

Log scale을 사용하면 크기 성분은 아래와 같이 나타낼 수 있고, Algebraic sum 형태로 나타낼 수 있다. 즉, 각 극점과 영점의 반응을 알고 있다면 전체 전달함수는 이 반응의 합으로 나타낼 수 있다는 것이다.

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log K + 20\log|(s+z_1)| + 20\log|(s+z_2)| + \cdots - 20\log|s^m| - 20\log|(s+p_1)| - \cdots|_{s\to j\omega}$$

위상의 경우, 최초의 수식에서 그 정보를 알 수 있다. 오일러 공식 등을 생각해보면 복소수는 크기와 exponential term으로 나타낼 수 있다. 그러면 각 항의 위상 정보를 알고 있다면 이를 더하고 빼서 전체 위상 정보를 알 수 있는 것이다.

$$\angle G(j\omega) = \Sigma\angle(z_i) - \Sigma\angle(p_i)$$

1st order – Single pole or zero response

그림 1과 같이 간단한 LC 필터에서 입력 전압과 출력 전압에 대한 전달함수를 구한다면 아래와 같다.

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}} = \frac{1}{1+sRC}$$

$$\left.\frac{v_2}{v_1}\right|_{s=j\omega} = \frac{1}{1+j\omega RC} = \frac{1-j\omega RC}{1+\omega^2R^2C^2}$$

$$\left|\frac{v_2}{v_1}\right|_{s=j\omega} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}$$

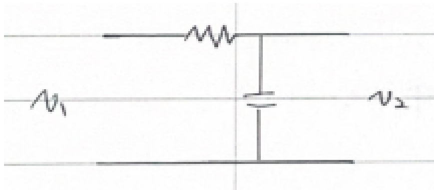

그림 1. LC 필터

Bode plot을 그리기 위해서 크기 성분을 Log scale로 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\left|\frac{v_2}{v_1}\right|_{\mathrm{dB}} = -20\log\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}$$

여기서, $\omega_1 = 1/RC$ 라면,

i. $\omega \ll \omega_1$ then, $\left|\frac{v_2}{v_1}\right|_{\mathrm{dB}} = 0$

ii. $\omega \gg \omega_1$ then, $\left|\frac{v_2}{v_1}\right|_{\mathrm{dB}} = -20\log\frac{\omega}{\omega_1}$

iii. $\omega = \omega_1$ then, $\left|\frac{v_2}{v_1}\right|_{\mathrm{dB}} = -3\ \mathrm{dB}$

위상에 대한 정보를 보기 위해서 수식을 계산할 수 있다.

$$\measuredangle = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-\omega RC}{1+\omega^2R^2C^2}\times\frac{1+\omega^2R^2C^2}{1}\right)$$

$$= -\tan^{-1}(\omega RC) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$$

i. $\omega \ll \omega_1$ then, $\measuredangle = 0°$

ii. $\omega \gg \omega_1$ then, $\measuredangle = -90°$

iii. $\omega = \omega_1$ then, $\measuredangle = -45°$

위에서 음의 부호는 phase delay가 생긴다는 물리적인 의미를 나타낸다. 이를 이용해 Bode plot을 그리면 그림 2와 같다.

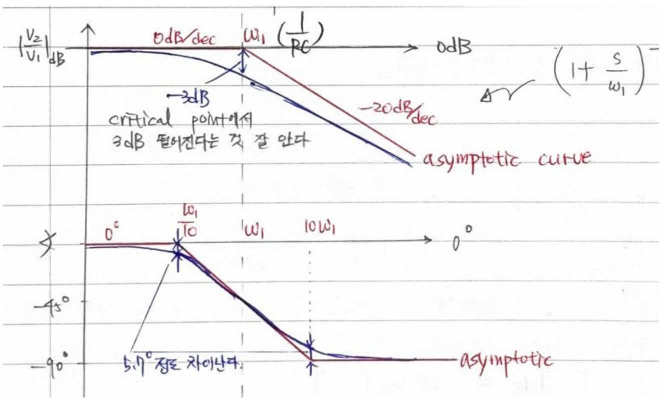

그림 2. LC 필터 전달함수 Bode plot
(Single pole response)

극점으로 볼 수 있는 ω_1 지점을 기준으로, 크기는 -20 dB/dec로 꺾여 내려가고 위상은 그 전후 $[\frac{\omega_1}{10} \quad 10\omega_1]$ 구간에서 $0° \rightarrow -90°$으로 변화가 일어난다. ω_1 지점은 실제 Bode plot에서 -3dB 인 Critical point를 나타낸다.

위의 사례는 하나의 극점(single pole)에 대한 예시를 나타내며, 영점에 대해서도 똑같이 풀어볼 수 있다. 하나의 영점(single zero) ω_0 에 대해서는 그림 3과 같이, 크기는 +20dB/dec로 꺾여 올라가고 위상은 전후 $[\frac{\omega_0}{10} \quad 10\omega_0]$ 에서 $0° \rightarrow +90°$으로 변화가 일어난다.

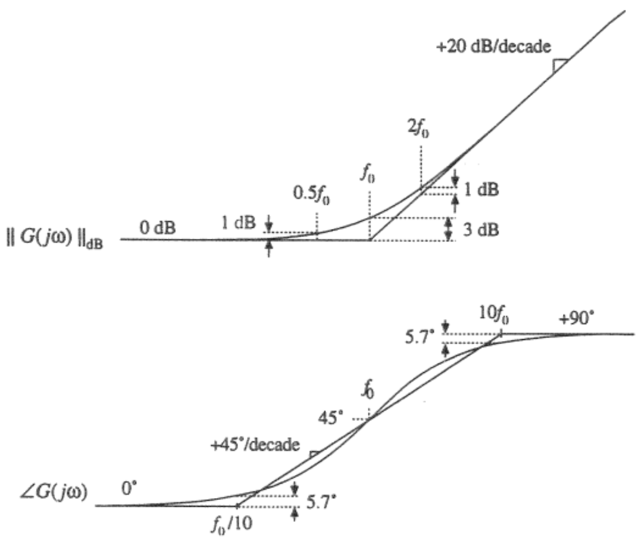

그림 3. Single zero response

2nd order – Quadratic pole response
: Resonance

LC 공진회로 등에서 찾아볼 수 있는 중근을 갖는 2차 방정식 형태의 극점에 대해서도 Asymptotic plot을 할 수 있으며 2차 방정식의 Analytic expression은 다음과 같다.

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{Q\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}$$

위의 수식은 Complex-conjugate인 두 개의 Complex number를 극점으로 가지게 된다. 그림 4와 같이 Quality factor, Q에 따라 근이 변동하는 것을 볼 수 있다.

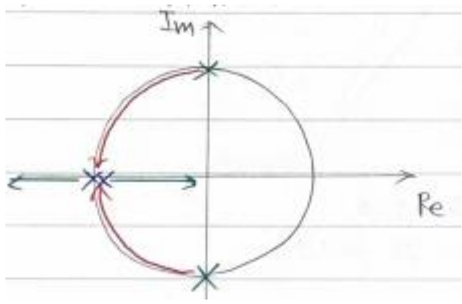

그림 4. 2차 극점의 이동 $(Q: \infty \rightarrow 0)$

Quality factor가 무한대면, $\pm j\omega_0$의 두 극점을 갖게 되며, 이는 Time domain에서 Pure oscillating하게 된다. Quality factor가 작아 짐에 따른 양상을 보면, Imaginary axis 상에 있다가 ω_0인 원을 따라 이동하게 된다. 크기가 작아지다가 0.5가 되면 중근이 되며, 0.5보다 작은 값을 가지면 실근 두 개로 Split된다는 것을 알 수 있다. 즉, Quality factor는 loss factor 즉, 시스템에 friction 혹은 damping 요소를 나타낸다. 이를 $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$의 형태로 바꾸어 비교해 볼 수도 있다.

1차 극점 분석과 같이 수식을 전개하면 아래와 같다.

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$

$$|G(j\omega)|_{\mathrm{dB}} = -20\log\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}$$

i. $\omega \ll \omega_0$ then, $|G(j\omega)|_{\mathrm{dB}} = 0$

ii. $\omega \gg \omega_0$ then, $|G(j\omega)|_{\mathrm{dB}} = -40\log\frac{\omega}{\omega_0}$

iii. $\omega = \omega_0$ then, $|G(j\omega)|_{\mathrm{dB}} = 20\log Q$

$$\measuredangle = -\tan^{-1}\left(\frac{\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)$$

i. $\omega \ll \omega_0$ then, $\measuredangle = -\tan^{-1}(+0) \to 0°$

ii. $\omega \gg \omega_0$ then, $\measuredangle = -\tan^{-1}(-0) \to -180°$

iii. $\omega = \omega_0$ then, $\measuredangle = -\tan^{-1}(\infty) \to -90°$

그림 5와 같이 변화를 그릴 수 있다.

크기의 경우, Asymptotic plot을 그리게 되면 0 dB를 유지하다가 극점을 지나면서 기울기가 -40 dB/dec로 변하게 된다. 이를 기준으로 Quality factor에 따라 $(20\log Q)$ 극점 근처에서의 형태를 판단할 수 있다. Quality factor가 1인 경우 극점 직전에 살짝 상승했다 내려가면서 극점에서 0 dB를 교차한다. 0.5인 경우 극점에서 -6 dB의 크기를 갖게 된다. 1보다 큰 경우 $20\log Q$으로 피크 크기가 결정된다.

위상의 경우, 극점에서 $-90°$이고 그 전 후에서 $0° \to -180°$로 변화한다. 변화의 기울기는 $[\omega_0 N^{-1/2Q} \quad \omega_0 N^{1/2Q}]$ 의 구간으로 디자인할 수 있고, N은 $e^{\pi/2}$, 5, 10 등으로 결정할 수 있다. Quality factor가 커짐에 따라 기울기가 급해진다.

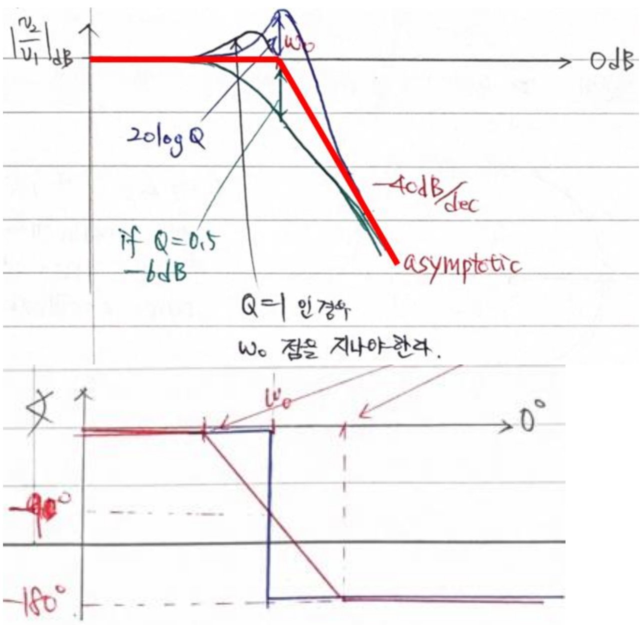

그림 5. Second order bode plot

참고문헌 [2]에서 Low-Q Approximation에 대해서 다루는데, 그림 6과 같이 크기 변화를 $[Q\omega_0 \quad \omega_0/Q]$ 구간으로 잡고, $Q\omega_0$ 에서 -20 dB/dec로 한 번 변하고, ω_0/Q 에서 -40 dB/dec로 한 번 더 변화하는 것으로 나타내기도 한다.

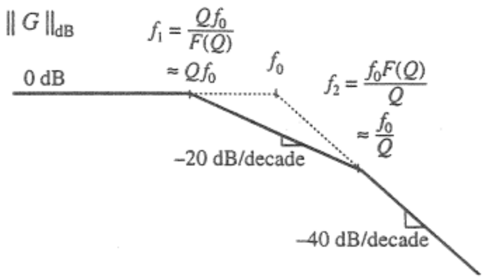

그림 6. Low-Q approximation

High order: How to approximate

높은 차수의 함수의 경우, 1차와 2차 특성 함수의 조합으로 표현할 수 있다. 특히 실제 시스템의 경우 Polynomial의 Coefficient가 모두 실수이므로, 1차 Polynomial의 곱으로 표현할 수 있다. 3차 함수는 3개의 1차 Polynomial 혹은 하나의 1차 식과 하나의 2차식으로 표현할 수 있다. N차 Polynomial도 N개의 complex number 조합으로 표현할 수 있다.

아래와 같은 조합의 전달함수가 있다고 생각해보자. 예시로 $\omega_{p1} < \omega_{z1} < \omega_{z2} < \omega_0$ 인 경우에 대하여 그림 7과 같이 Asymptote bode plot을 그릴 수 있다.

$$G(s) = A_n \frac{\left(1+\frac{s}{\omega_{z1}}\right)\left(1+\frac{s}{\omega_{z2}}\right)}{\left(1+\frac{s}{\omega_{p1}}\right)\left(1+\frac{s}{Q\omega_0}+\frac{s^2}{\omega_0^2}\right)}$$

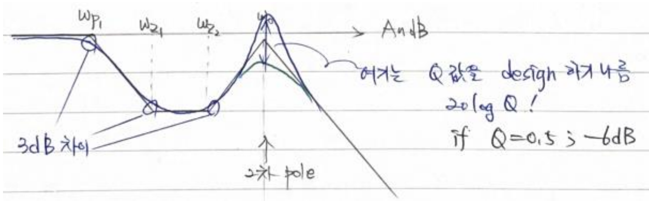

그림 7. Combination

본 자료는 대략적인 정보 전달을 위한 매거진으로, 기술상의 오류가 있을 수 있으며, 최신 동향이 누락될 수 있습니다. 상세한 지식과 정보를 얻기 위해서는 교재 및 논문 등을 참고하시기 바랍니다.

Reporting: benkim@plecko.biz

참고 문헌

[1] Nise, Control System Engineering

[2] Erickson, Fundamental of Power Electronics

[3] B. Cho, 전력전자공학 수업자료