LA SUITE DE FIBONACCI

TP info sur tableur

Objectif :
Sur fond d'un problème historique, le T.P. aborde simplement quelques manipulations élémentaires du tableur.

Exposé du problème

Mathématicien italien né à Pise, *Léonardo Bonacci,* dit *Fibonacci* a vécu à l'époque de la construction de la célèbre tour penchée.
Dans son *Liber abaci*, datant de 1202, il décrit un problème exprimant la reproduction des lapins et menant à la suite dite de *Fibonacci* :

> *« Combien de couples de lapins obtiendrons-nous à la fin de l'année si, commençant avec un couple, chacun des couples produisait chaque mois un nouveau couple lequel deviendrait productif au second mois de son existence ? »*

En janvier : 1 couple
En février : 1 couple
En mars : 1 + 1 = 2 couples
En avril : 1 + 2 = 3 couples
En mai : 2 + 3 = 5 couples
En juin : 3 + 5 = 8 couples
En juillet : 5 + 8 = 13 couples
…etc…

Les réponses constituent les nombres de la suite de *Fibonacci* :

1 - 1 - 2 - 3 - 5 - 8 - 13 ...,

Combien de couples de lapins peut-on compter en août ?
Comment peut-on calculer un nombre quelconque de la suite connaissant les deux précédents ?

Ouvrir le fichier du tableur « Fibonacci » et réenregistrer-le en suivant les consignes du professeur.

1ère partie : Calculs des nombres de la suite de Fibonacci

Compléter le tableau rose par les 75 premiers nombres de la suite de Fibonacci. T1 T2

Donner la solution au problème de Fibonacci.
Combien obtiendrons-nous de couples de lapins après 5 ans ?
Commenter l'affichage dans les cellules C76 et C77. Combien de chiffres possèdent les deux nombres affichés ?

2ème partie : Rapports de deux nombres consécutifs de la suite de Fibonacci

Le tableau bleu doit présenter les rapports d'un terme de la suite de Fibonacci par son précédent.
La *cellule E4*, par exemple, comprend le rapport du 2ème terme par le 1er terme.

1) Compléter le tableau bleu.
Sur un ordinateur, le symbole de division est « / ».

2) Par défaut, l'affichage des nombres ne comprend que deux décimales. Imposer à la *colonne E* un affichage avec 13 décimales. T3

Pour des nombres de plus en plus grands de la suite de Fibonacci, les rapports calculés semblent se rapprocher d'un nombre. Quel est ce nombre (arrondi au millième) ?

3ème partie : Prolongement

Ouvrir le navigateur *Internet*.

À l'aide d'un moteur de recherche, retrouver :
- le nom du nombre découvert dans la partie précédente,
- la valeur exacte de ce nombre (écriture à l'aide d'une expression contenant une racine carrée),
- quelques anecdotes autour de ce nombre.

Il faudra choisir astucieusement les mots clés.

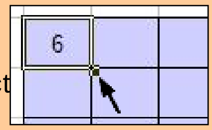
AIDES TABLEUR

T1
- Dans les *cellules C3* et *C4*, entrer les 2 premiers nombres de la suite.
- Chaque terme est la somme des deux précédents.

Ainsi la *cellule C5* est la somme du nombre inscrit dans la *cellule C3* et de celui inscrit dans *cellule C4*. Cliquer sur la *cellule C5* et entrer la formule ***=C3+C4***

T2
Pour copier rapidement la formule dans les autres cellules de la *colonne C* :
- Sélectionner la *cellule C5*.
- Cliquer sans lâcher sur le petit carré noir en bas à droite de la cellule sélect

et faire glisser le curseur de façon à recouvrir les cellules en dessous.



T3
- Sélectionner les *cellules E4* à *E77.*
- Cliquer *« Format »* puis *« Cellule… »*.
- Cliquer sur l'onglet *« Nombres »* et faire la modification à *« Décimales »*.

APPROCHONS LE NOMBRE Pi

Objectifs :
Calculer les termes (ou facteurs) successifs de séries convergeant vers le nombre Pi.
Comparer la vitesse de convergence pour les différentes séries.

1ère partie : La formule d'Euler

Il existe de nombreuses formules permettant d'approcher le nombre π.
Le mathématicien suisse *Leonhard EULER* (1707-1783) est à l'origine de la formule suivante :

$$\pi = 2 \times \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{9} + \cdots\right)$$

Les points de suspension signifient que la somme ne s'arrête jamais et qu'il faudrait la continuer indéfiniment pour calculer la « valeur exacte » *(qui n'existe pas !)* de π.

On calcule alors des valeurs approchées successives en ajoutant de plus en plus de termes dans la somme entre parenthèses, soient par exemple :

$$p_1 = 2 \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) \qquad p_2 = 2 \times \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5}\right) \qquad p_3 = 2 \times \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{7}\right)$$

- Calculer p_1, p_2 et p_3. On donnera la valeur exacte et une valeur approchée au millième.
- Sans la calculer, écrire l'expression de p_5.

Ouvrir le fichier du tableur « PI » et réenregistrer-le en suivant les consignes du professeur.
Le tableur va maintenant effectuer pour nous ces calculs fastidieux en donnant des valeurs approchées très précises.

1) Dans la *colonne D*, afficher les résultats arrondis à 10^{-14} près des calculs des rapports se trouvant dans la formule d'Euler : $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots$ T1 T2 T3

2) Dans la *colonne E*, afficher les résultats arrondis à 10^{-14} près des calculs des termes successifs de la suite :
$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \times \frac{2}{5}, \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{7}, \ldots$ T4

3) Dans la *colonne F*, afficher les sommes successives des termes de la *colonne E*. Par exemple :
La *cellule F4* contient la somme des nombres se trouvant dans les *cellules E3 à E4*.
La *cellule F5* contient la somme des nombres se trouvant dans les *cellules E3 et E5*… T5 T6
Modifier le format pour afficher 14 décimales.

4) Dans la *cellule G3*, entrer une formule affichant le double du nombre compris dans la cellule F3 puis modifier le format de la cellule pour afficher 14 décimales et copier la formule sur le reste de la *colonne G*.

Dans quelles cellules retrouve-t-on les valeurs de p_1, p_2 et p_3 calculées au début de l'activité ?
Où trouve-t-on dans le tableau les meilleures approximations de π ?

5) Les sommes successives de la formule d'Euler donnent des valeurs approchées de plus en plus précises du nombre π.
Pour évaluer la précision de la méthode à la dernière étape du calcul (*cellule G42*), rechercher sur Internet les 14 premières décimales du nombre π.

Déduire le nombre de décimales exactes de π fourni par cette méthode à la dernière étape.
Les écrire.

$2^{\text{ème}}$ partie : La formule de Viète

Voici une seconde formule permettant d'approcher le nombre π. Celle-ci a été découverte par le mathématicien français François Viète (1540-1603) :

$$\pi = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} \times \dots}$$

Cliquer sur l'onglet « Viète » (en bas). Dans cette partie, l'objectif est d'établir une nouvelle approximation de π en appliquant la formule de Viète.
Dans tout le tableau, on modifiera le format des cellules pour obtenir un affichage des nombres avec 14 décimales.

1) Dans la *colonne B*, afficher les résultats des expressions successives :

$\sqrt{2}, \ \sqrt{2+\sqrt{2}}, \ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots$ T7

2) Dans la *cellule C3*, entrer une formule affichant la moitié du résultat de la *cellule B3*. Puis copier cette formule sur le reste de la *colonne C*.

3) Dans la *colonne D*, afficher les produits successifs des nombres de la *colonne C*. Par exemple :
La *cellule D4* contient le produit des nombres se trouvant dans les *cellules C3 à C4*.
La *cellule D5* contient le produit des nombres se trouvant dans les *cellules C3 à C5*… T8

4) Dans la *cellule E3*, entrer une formule affichant l'inverse du résultat de la *cellule D3*. Puis copier cette formule sur le reste de la *colonne E*.

5) Dans la *cellule F3*, entrer une formule affichant le double du résultat de la *cellule E3*. Puis copier cette formule sur le reste de la *colonne F*.

Donner le nombre de décimales exactes de π fourni par cette méthode à la dernière étape.
Les écrire.

$3^{\text{ème}}$ partie : Quelle est la formule la plus performante ?

Cliquer sur l'onglet « Perf » (en bas). L'objectif de cette partie est de déterminer laquelle des deux méthodes offre la meilleure approximation de π avec un minimum de calcul.

1) Copier dans la *colonne B* les valeurs approchées successives de π données par la formule d'Euler. T9

2) Dans la *colonne C*, copier de la même manière les résultats obtenus par la méthode de Viète.

3) Avec le tableur, représenter graphiquement par trois courbes les données de chaque colonne du tableau. T10

Comment peut-on à partir des graphiques déterminer la méthode la plus performante ?
Quelle est cette méthode ?

Prolongement pour les experts !

Créer une feuille de calcul permettant d'approcher le nombre π à l'aide de la formule du mathématicien anglais John Wallis (1616–1703) :

$$\pi = 2 \times \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7} \times \frac{8}{9} \times \dots$$

Que dire de la performance de cette méthode comparée aux deux autres ?

AIDES TABLEUR

T1

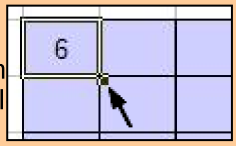
Dans la *cellule D4*, entrer la formule **=*B4/C4***

T2

Pour obtenir un arrondi à 10^{-14} près, il faut modifier le format de la cellule : sélectionner la cellule, cliquer *« Format »* puis *« Cellules »*. Cliquer sur l'onglet *« Nombres »* et choisir le nombre de décimales correspondant dans *« Options »*.

T3

Pour copier rapidement une formule :
- Sélectionner la cellule à copier.
- Cliquer sans lâcher le petit carré noir en bas à droite de la cellule sélectionn faire glisser le curseur de façon à recouvrir les autres cellules dans lesquell formule doit être copiée.



T4

Dans la *cellule E5*, entrer la formule **=*D5*E4*** puis modifier le format de la cellule afin d'obtenir l'arrondi souhaité. Copier cette formule sur le reste de la colonne E.

T5

Cliquer sur la *cellule F4* puis sur l'icône Σ, sélectionner à la souris les *cellules E3 à E4* et « Entrée ».

T6

Copier rapidement la formule sur toute la colonne (voir **T3**).

→ Cliquer par exemple sur la *cellule F6*… la formule n'est pas juste : en effet la somme s'effectue à partir de la *cellule E5* au lieu de *E3*. Il faut donc indiquer au tableur que le premier terme de la somme doit rester la *cellule E3.*

Pour cela, modifier la formule de *cellule F4* par **=*SOMME($E$3:E4)*** ce qui signifie que *E3* ne sera pas modifié lors du copiage. Puis reprendre la manipulation qui permet de copier la *cellule F4* sur le reste de la *colonne F*.

T7

- Dans la *cellule B3*, entrer la formule **=*RACINE(2)*** qui donne une valeur approchée de $\sqrt{2}$.
- Dans la *cellule B4*, entrer la formule **=*RACINE(2+B3)***
- Copier cette formule sur le reste de la *colonne B*.

T8

- Dans la cellule D4, entrer la formule **=*PRODUIT($C$3:C4)***
- Copier cette formule sur le reste de la *colonne D*.

T9

- Retourner sur la page « Euler », sélectionner les cellules de la *colonne G* (*G3 à G42*).
- Cliquer droit, *« Copier »*.
- Puis retourner à la page *« Perf »*.
- Sélectionner les cellules de la *colonne B* (*B3 à B42*).
- Cliquer droit, *« Collage spécial »* et dans *« Sélection »*, ne cocher que *« Nombre »*.

En effectuant un collage simple, le tableur aurait également copié les formules comprises dans les cellules. Mais celles-ci ne correspondent pas à la page « Perf ». Le collage spécial a permis de copier les nombres seuls sans les formules qui les ont calculés.

T10

- Sélectionner les 12 premières lignes du tableau.
- Cliquer *« Insertion »* puis *« Diagramme… »*.
- Sélectionner le type de diagramme souhaité (ici Ligne/Lignes seules ) puis cliquer *« Suivant »*.
- Puis cliquer *« Terminer »* et agrandir le graphique.