13.3 Démonstration et exemples

On démontre maintenant le théorème 13.2.

Soit $\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^\mathsf{T}$ une diagonalisation en base orthonormée de $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ telle que tous les éléments positifs de $\mathbf{D}$ sont placés dans les r premiers éléments de la diagonale. Supposons aussi que les valeurs propres sont énumérées par $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, où $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r$.

Pour $i = 1, \ldots r$, on dénote $\sqrt{\lambda_i}$ par σ_i, la i-ième colonne de $\mathbf{V}$ par $\mathbf{v}^{(i)}$, et $\frac{1}{\sigma_i}\mathbf{A}\mathbf{v}^{(i)}$ par $\mathbf{u}^{(i)}$.

Notons que $\mathbf{u}^{(i)}$ est unitaire pour chaque $i = 1, \ldots, r$ puisque

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}^{(i)}\|^2 &= {\mathbf{u}^{(i)}}^\mathsf{T}\mathbf{u}^{(i)} \\
&= \frac{1}{\sigma_i^2}{\mathbf{v}^{(i)}}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v}^{(i)} \\
&= \frac{1}{\lambda_i}{\mathbf{v}^{(i)}}^\mathsf{T}(\lambda_i\mathbf{v})^{(i)} \\
&= {\mathbf{v}^{(i)}}^\mathsf{T}\mathbf{v}^{(i)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^{(i)} \cdot \mathbf{u}^{(j)} &= {\mathbf{u}^{(i)}}^\mathsf{T}\mathbf{u}^{(j)} \\
&= \frac{1}{\sigma_i\sigma_j}{\mathbf{v}^{(i)}}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v}^{(j)} \\
&= \frac{\lambda_j}{\sigma_i\sigma_j}{\mathbf{v}^{(i)}}^\mathsf{T}\mathbf{v}^{(j)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

lorsque $i \neq j$. Ainsi, on peut construire une base orthonormée $\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(m)}\}$ de $\mathbb{R}^m$, à partir de $\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(r)}\}$.

Soit $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ la matrice diagonale telle que le i-ième élément de la diagonale est σ_i pour $i = 1, \ldots, r$ et tous les autres éléments sont nuls. Alors, Puisque $\mathbf{V}$ est orthogonale, on multiplie à droite de chaque côté par $\mathbf{V}^\mathsf{T}$ afin d'obtenir

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\mathsf{T},$$

ce qui complète la démonstration du théorème 13.2.

Exemple 13.1 Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Nous obtenons une décomposition en valeurs singulières de la matrice $\mathbf{A}$.

Premièrement, les valeurs propres de $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ sont obtenues en trouvant les racines du polynôme charactéristique

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-3)(\lambda-1)$$

Ainsi, les valeurs propres sont 3, 1 et 0. Posons $\sigma_1 = \sqrt{3}$ et $\sigma_2 = 1$.

La forme échelonnée réduite de $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} - 3\mathbf{I}$ est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ainsi, une base orthonormée de $\operatorname{Ker}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} - 3\mathbf{I})$ est donnée par le vecteur $\mathbf{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$. Posons

$\mathbf{u}^{(1)} = \frac{1}{\sigma_1}\mathbf{A}\mathbf{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

La forme échelonnée réduite de $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} - \mathbf{I}$ est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ainsi, une base orthonormée de $\operatorname{Ker}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} - \mathbf{I})$ est donnée par le vecteur $\mathbf{v}^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. Posons

$$\mathbf{u}^{(2)} = \frac{1}{\sigma_2}\mathbf{A}\mathbf{v}^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

La forme échelonnée réduite de $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} - 0\mathbf{I}$ est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ainsi, une base orthonormée de $\operatorname{Ker}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} - 0\mathbf{I})$ est donnée par le vecteur $\mathbf{v}^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$.

En posant $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(1)} & \mathbf{u}^{(2)} \end{bmatrix}$, $\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{bmatrix}$, et $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{(1)} & \mathbf{v}^{(2)} & \mathbf{v}^{(3)} \end{bmatrix}$, on obtient $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\mathsf{T}$, où $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ sont des matrices orthogonales.

Les calculs permettant d'obtenir une décomposition en valeurs singulières sont très long à faire à la main. Par conséquence, on utilise souvent des progiciels tels que Matlab[2] ou GNU Octave[3] dans lesquels la commande `svd` (pour l'équivalent anglais « *singular-value decomposition* ») calcule une décomposition en valeurs singulières d'une matrice.

Exercices

1. Obtenez une décomposition en valeurs singulière de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$.
2. Obtenez une décomposition en valeurs singulière de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ 5 & 10 \\ 14 & -2 \end{bmatrix}$.

Solutions

1. Notons que $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$. On prend $\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Alors,

$\mathbf{u}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{u}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$.

La forme échelonnée réduite de $\begin{bmatrix} {\mathbf{u}^{(1)}}^\mathsf{T} \\ {\mathbf{u}^{(2)}}^\mathsf{T} \end{bmatrix}$ est $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Un vecteur non nul appartenant au noyau de $\mathbf{R}$ est $\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. Donc,

$$\mathbf{u}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 3^2}} \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

En prenant

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{3} \end{bmatrix},$$

nous obtenons $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\mathsf{T}$.

Si on insiste pour écrire que les valeurs singulières soient ordonnées de manière décroissantes, on peut choisir

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{3} \end{bmatrix}, \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Notons que $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 225 & 0 \\ 0 & 225 \end{bmatrix}$. On prend $\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 15 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Alors, $\mathbf{u}^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{15} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{14}{15} \end{bmatrix}$ et $\mathbf{u}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{11}{15} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{15} \end{bmatrix}$. La forme échelonnée réduite de $\begin{bmatrix} {\mathbf{u}^{(1)}}^\mathsf{T} \\ {\mathbf{u}^{(2)}}^\mathsf{T} \end{bmatrix}$ est $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Un vecteur non nul appartenant au noyau de $\mathbf{R}$ est $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Donc,

$$\mathbf{u}^{(3)} = \frac{}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} \begin{bmatrix} \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

En prenant

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{15} & \frac{11}{15} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{14}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

on obtient $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathsf{T}}$.

2. Voir https://www.mathworks.com/products/matlab.html↩

3. Voir https://www.gnu.org/software/octave↩