



Trường Đại học Công nghệ Thông tin  
Đại học Quốc Gia TP.HCM



Phân tích và thiết kế  
thuật toán

# PHƯƠNG PHÁP THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

## CHIA ĐỂ TRỊ

Lê Đoàn Phúc Minh  
Nguyễn Duy Đạt





## Nội dung

- Kỹ thuật chia để trị
- Các ứng dụng của phương pháp thiết kế thuật toán chia để trị
- Một số vấn đề khác





Phân tích và thiết kế thuật toán

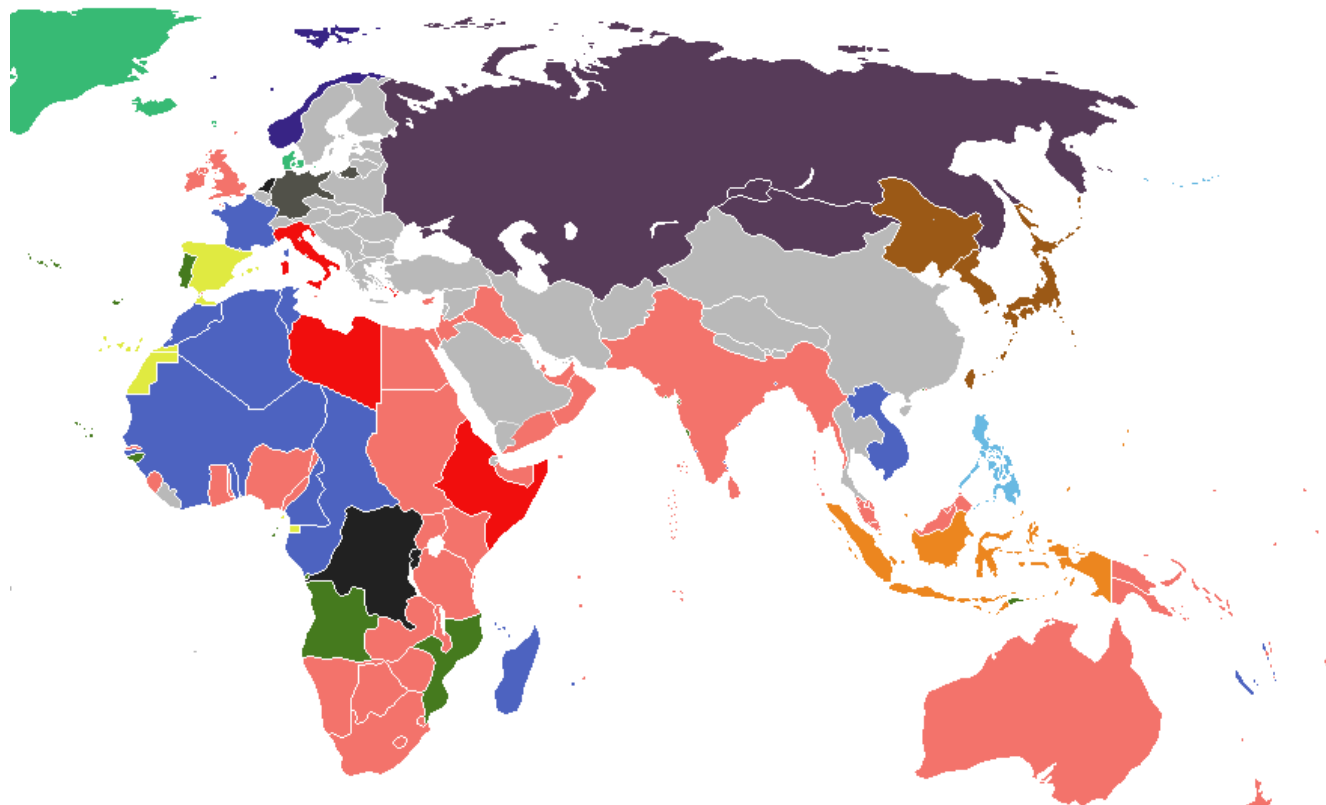
Phương pháp thiết kế thuật toán: Chia để trị

# Kỹ thuật chia để trị





## Các bạn hiểu Chia Để Trị là gì?





## Khái niệm

### CHIA ĐỂ TRỊ

**Chia (Divide):** Chia bài toán ra thành các bài toán nhỏ hơn (subproblems). Về cơ bản thì những bài toán nhỏ này giống với bài toán ban đầu.

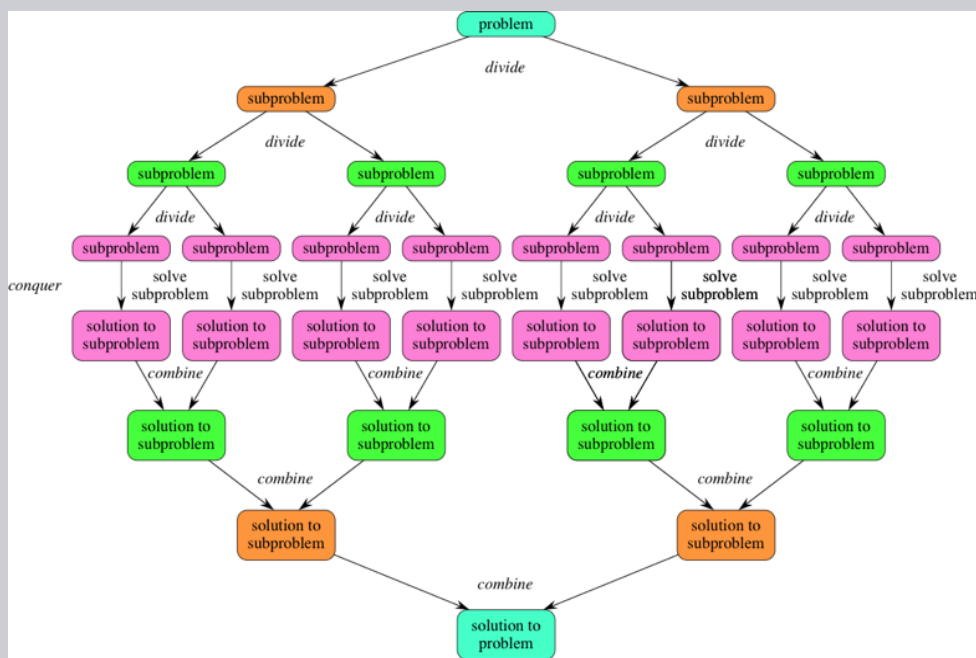
**Trị (Conquer):** Tiếp tục chia nhỏ đến khi giải trực tiếp được bằng hàm hoặc thư viện có sẵn, còn không thì tiếp tục chia nhỏ hơn nữa thành những bài toán con nhỏ hơn nữa.

**Kết hợp (Combine):** Kết hợp(sắp xếp, cộng lại, nhân lại,...) các kết quả từ bài toán con nhỏ nhất, để ra lời giải cho các bài toán con (subproblems), và cứ thế cuối cùng ra được lời giải cho bài toán ban đầu.



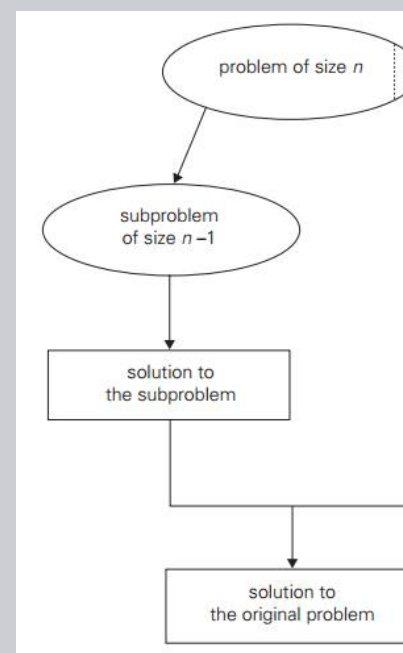
## Nhánh của chia để trị

### Chia để trị (Nhánh chính)



Chia bài toán ban đầu thành nhiều bài toán con nhỏ hơn  
Ví dụ: Merge Sort, Quick Sort

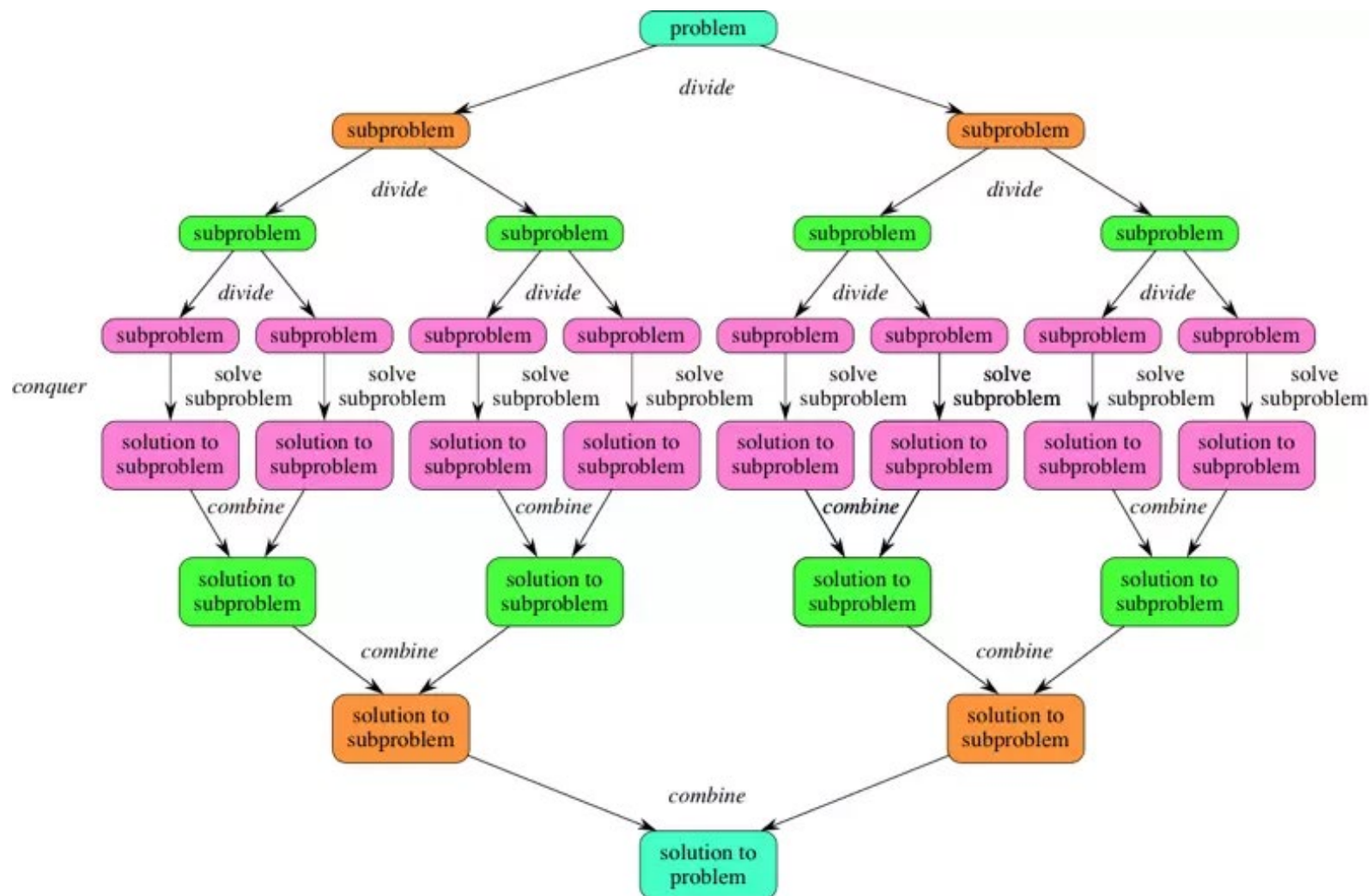
### Giảm để trị (Nhánh phụ)



Đưa bài toán ban đầu thành bài toán nhỏ hơn  
Ví dụ: Tìm kiếm nhị phân, tính lũy thừa lớn



## Hình ảnh miêu tả giải thuật chia để trị







## Khi nào có thể sử dụng được chia để trị

- Khi bài toán có thể chia được thành các bài toán con với kích thước dữ liệu nhỏ hơn
- Khi các bài toán con có thể được giải quyết đệ quy (đôi khi việc đệ quy có thể không cần thiết)
- Khi kết quả của các bài toán con có thể được gộp lại để xử lý bài toán mẹ có chứa chúng





## Template (có sử dụng đệ quy)

**DAC(a)**

**// Nếu bài toán con có thư viện hoặc có hàm sẵn thì giải thẳng luôn! Còn không thì phải chia nhỏ ra!**

**if (small(a))**

**return solution(a)**

**else**

**// Chia bài toán thành n bài toán con (n là bao nhiêu tùy vào thuật toán)**

**part = divide(a)**

**// Xử lí bài toán con**

**// Tùy vào số lượng bài toán con mà số lượng bài toán phải trị có thể nhiều hơn**

**part[0] = DAC(part[0])**

**part[1] = DAC(part[1])**

**//...**

**// Kết hợp kết quả từ bài toán con để suy ra kết quả bài toán trước đó**

**result = combine(part)**

**return result**

Lưu ý: Có thể code thuật toán sử dụng phương pháp thiết kế thuật toán này mà không cần đến đệ quy



## Master Theorem

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

- +  $T(n)$  là độ phức tạp của bài toán
- +  $a$  là số bài toán sau mỗi lần chia để trị
- +  $b$  là số lần giảm đi của độ phức tạp sau mỗi lần chia
- +  $a \geq 1, b > 1$
- +  $n$  là lũy thừa của  $b$
- +  $f(n)$  là hàm tính thời gian phân chia  $n$  thành  $n/b$  và gộp các kết quả lại

$$+ \text{ Nếu } f(n) \in O(n^d), d \geq 0 \rightarrow T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^d) & \text{if } a < b^d, \\ \Theta(n^d \log n) & \text{if } a = b^d, \\ \Theta(n^{\log_b a}) & \text{if } a > b^d. \end{cases}$$





Phân tích và thiết kế thuật toán

Phương pháp thiết kế thuật toán: Chia để trị

# Các ứng dụng của phương pháp thiết kế thuật toán chia để trị





**Thuật toán sắp xếp trộn (Merge Sort)**



**Thuật toán tính lũy thừa nhanh**



**Thuật toán nhân nhanh Karatsuba**



**Bài toán tìm cặp đỉnh gần nhau nhất**





Các bạn hãy cho biết thuật toán MergeSort hoạt động như thế nào?



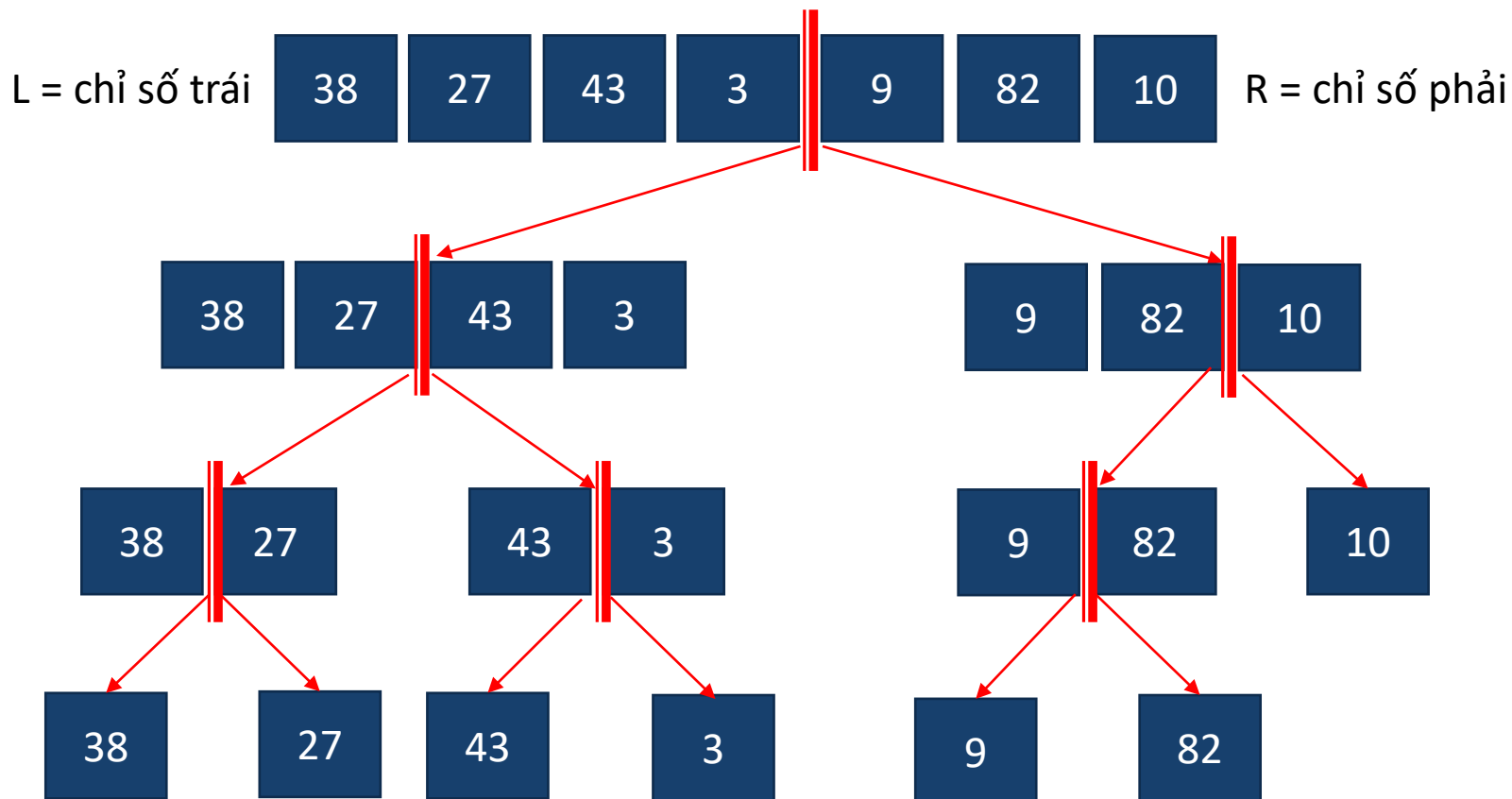


- + Chia : Chia đôi mảng
- + Trị: Sử dụng đệ quy sắp xếp 2 mảng con
- + Gộp: Gộp 2 mảng con với thời gian tuyến tính





Các bạn hãy cho biết dãy sau hoạt động theo cơ chế mergeSort như thế nào ?





## Các ứng dụng của phương pháp thiết kế thuật toán chia để trị

The diagram illustrates the merging of two sorted arrays into a final sorted array. The process is shown in four rows:

- Row 1:** Initial arrays: [38, 27, 43, 3] and [9, 82].
- Row 2:** First merge step: [27, 38] and [3, 43].
- Row 3:** Second merge step: [3, 27, 38, 43] and [9, 10, 82].
- Row 4:** Final sorted array: [3, 9, 10, 27, 38, 43, 82].





Dựa vào Master Theorem, hãy thử tính độ phức tạp của mergeSort!

### Master Theorem

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

- +  $T(n)$  là độ phức tạp của bài toán
- +  $a$  là số bài toán sau mỗi lần chia để trị
- +  $b$  là số lần giảm đi của độ phức tạp sau mỗi lần chia
- +  $a \geq 1, b > 1$
- +  $n$  là lũy thừa của  $b$
- +  $f(n)$  là hàm tính thời gian phân chia  
n thành  $n/b$  và gộp các kết quả lại

$$+ \text{ Nếu } f(n) \in O(n^d), d \geq 0 \rightarrow T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^d) & \text{if } a < b^d, \\ \Theta(n^d \log n) & \text{if } a = b^d, \\ \Theta(n^{\log_b a}) & \text{if } a > b^d. \end{cases}$$

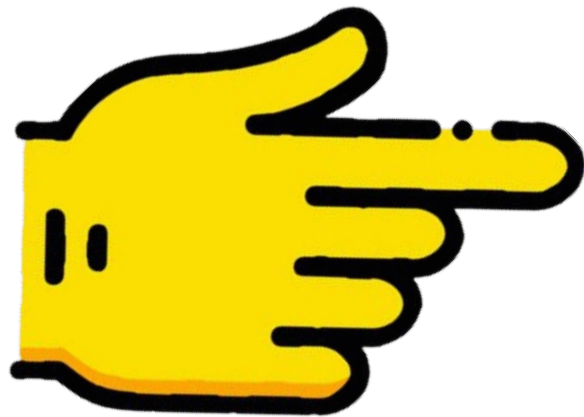




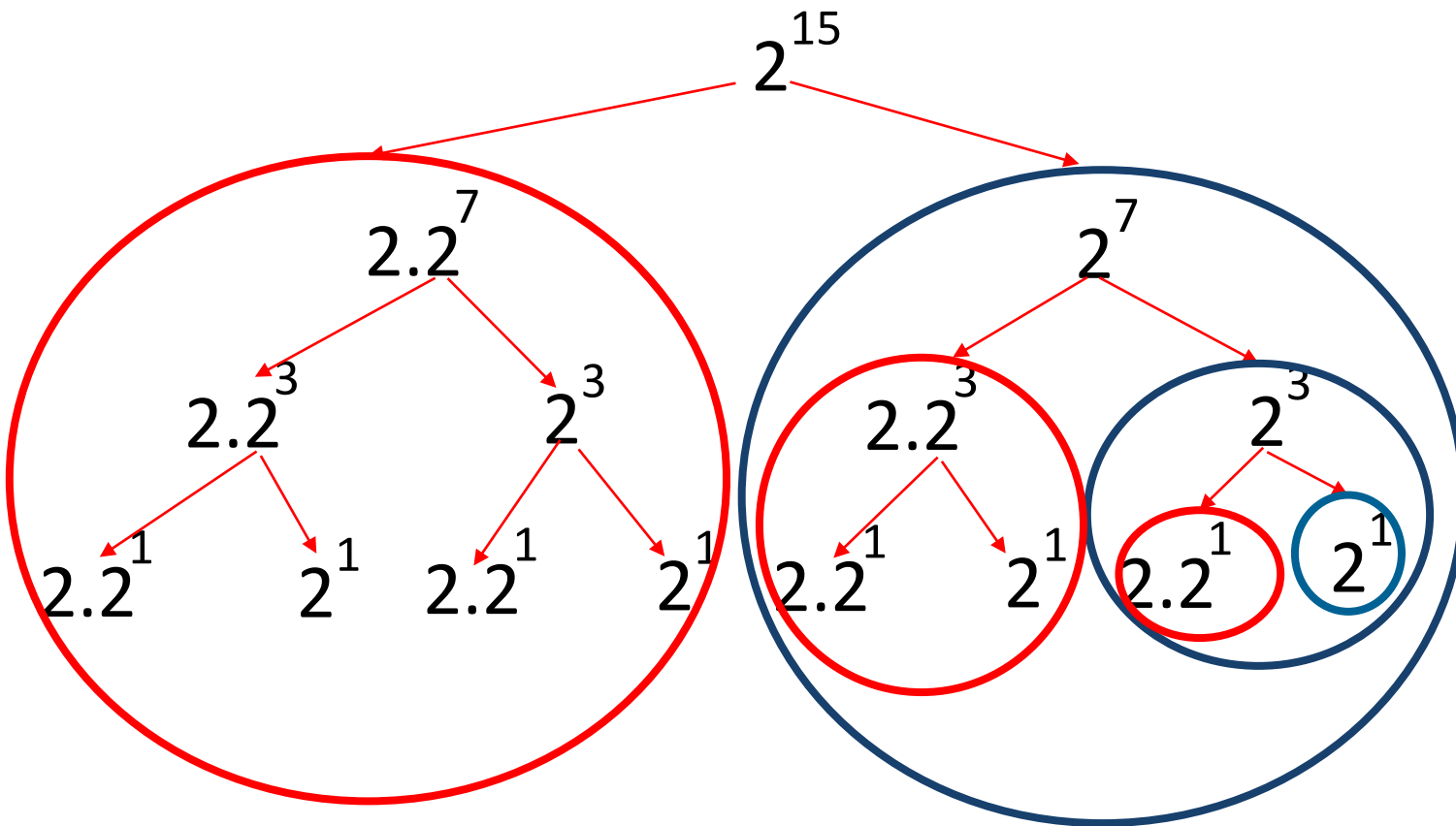
? Tính  $2^9$

- Các bạn hãy thử viết chương trình tính lũy thừa theo cách đơn giản nhất (sử dụng for hoặc while)





Tính  $2^{15}$



- + Lũy thừa cần tính sẽ được chia làm 2 nhánh
- + Việc đi tính sẽ chỉ thực hiện trên 1 nhánh con và nhánh còn lại sử dụng kết quả lại  
(Mô tả như trên hình: vòng tròn đỏ sẽ sử dụng lại kết quả từ vòng tròn xanh)



Dựa vào Master Theorem, hãy thử tính độ phức tạp của tính lũy thừa!

### Master Theorem

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

- +  $T(n)$  là độ phức tạp của bài toán
- +  $a$  là số bài toán sau mỗi lần chia để trị
- +  $b$  là số lần giảm đi của độ phức tạp sau mỗi lần chia
- +  $a \geq 1, b > 1$
- +  $n$  là lũy thừa của  $b$
- +  $f(n)$  là hàm tính thời gian phân chia  
 $n$  thành  $n/b$  và gộp các kết quả lại

$$+ \text{ Nếu } f(n) \in O(n^d), d \geq 0 \rightarrow T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^d) & \text{if } a < b^d \\ \Theta(n^d \log n) & \text{if } a = b^d \\ \Theta(n^{\log_b a}) & \text{if } a > b^d \end{cases}$$







Các bạn hãy thử viết chương trình tính lũy thừa  $a^x$   
(% MOD =  $1e9+7$ ) bằng chia để trị (a và x rất lớn)





**Bài toán:** Cho 2 số tự nhiên, hãy cho biết tích của 2 số đó

**Phương pháp ngây thơ:**

$$\begin{array}{r} 12345 \\ * \quad 6789 \\ \hline 111105 \\ + \quad 98760 \\ \quad 86415 \\ \quad 74070 \\ \hline = 83810205 \text{ (Kết quả)} \end{array}$$

Độ phức tạp thuật toán:  $O(n*m)$





## Kỹ thuật nhân nhanh Karatsuba:

Đầu tiên, ta có  $x, y$  là số có lần lượt  $n_1, n_2$  chữ số.  $\forall m \in \mathbb{N}$  và  $n_1, n_2 > 0$ , ta viết lại hai số đã cho thành:

$$x = x_1 10^m + x_0 \text{ và } y = y_1 10^m + y_0$$

$$(x_0, y_0 < 10^m)$$

Gọi  $z_2 = x_1 y_1$ ,  $z_1 = x_1 y_0 + x_0 y_1$  và  $z_0 = x_0 y_0$ .

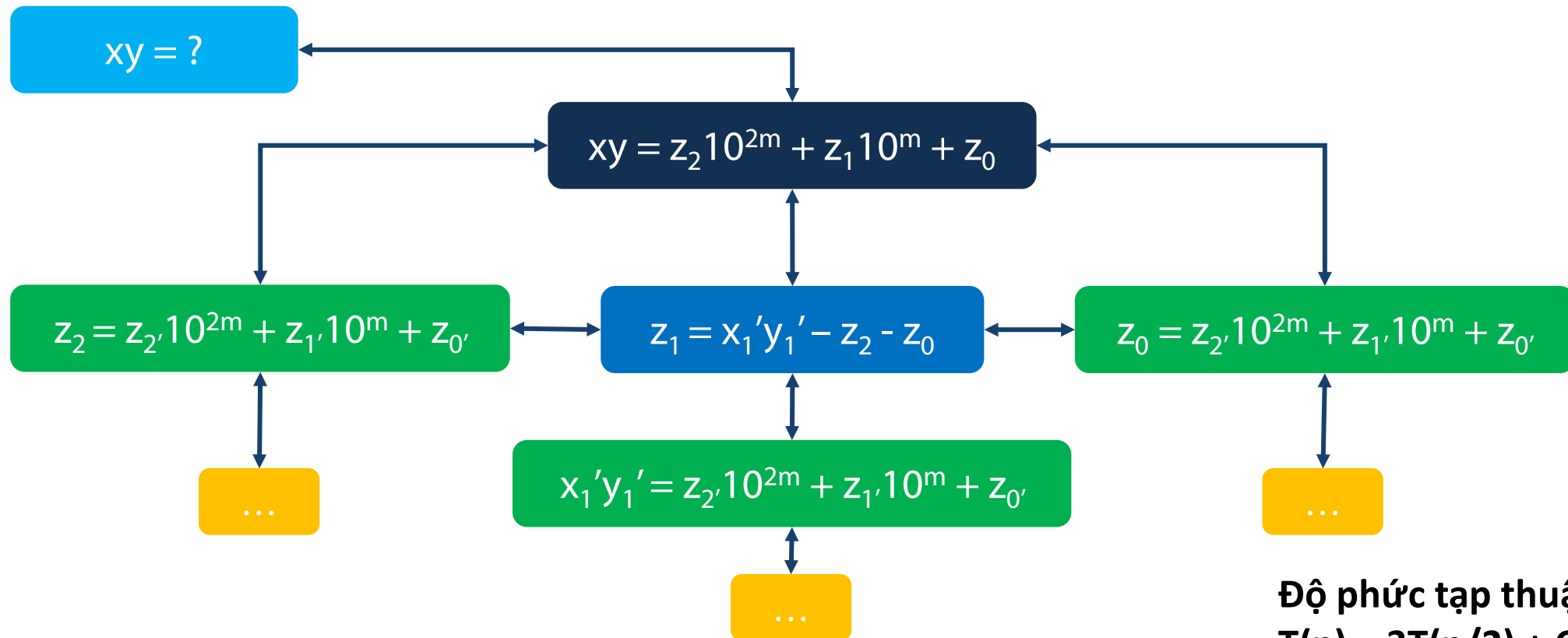
Lúc này, ta có:

$$x * y = (x_1 10^m + x_0)(y_1 10^m + y_0) = z_2 10^{2m} + z_1 10^m + z_0$$

Có thể viết lại  $z_1$  thành  $z_1 = (x_1 + x_0)(y_1 + y_0) - z_2 - z_0$ .



## Ứng dụng của kỹ thuật chia để trị và thuật toán đầy đủ:



Độ phức tạp thuật toán:  
 $T(n) = 3T(n/2) + O(n)$

Lưu ý:  $x_1' y_1' = (x_1 + x_0)(y_1 + y_0)$



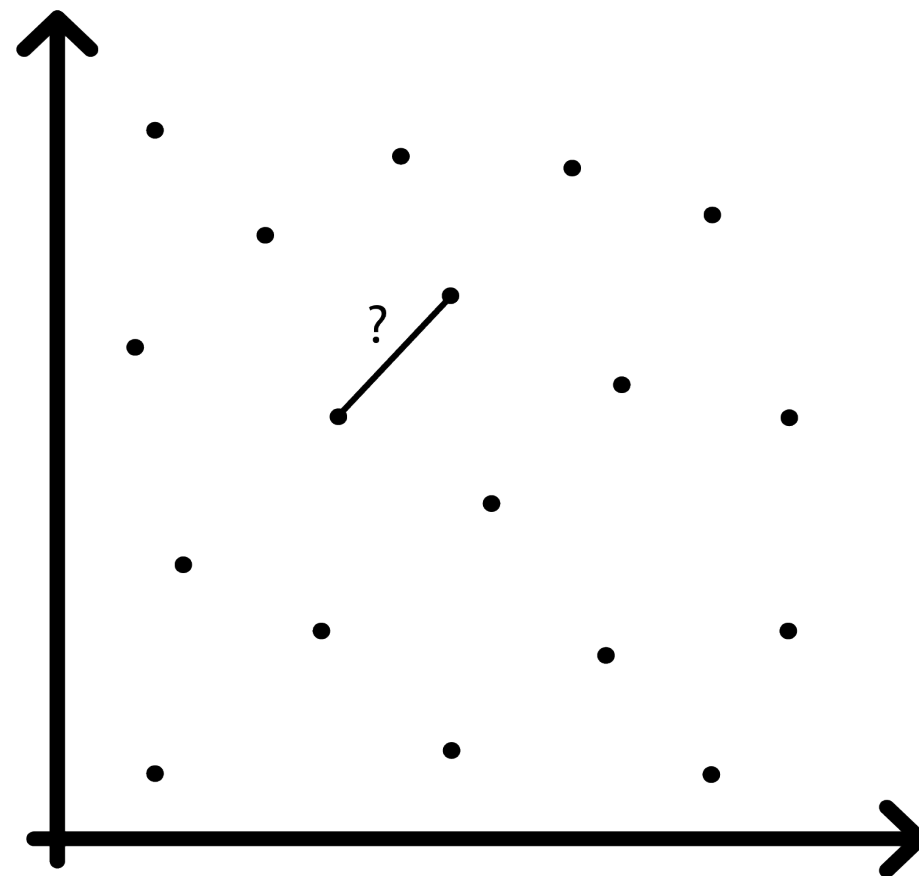


Theo các bạn, với phép tính  $1234567890 * 987654321$  và  $m = 3$ , thuật toán này sẽ phải thực hiện công đoạn chia và công đoạn trị bao nhiêu lần ?



## Bài toán:

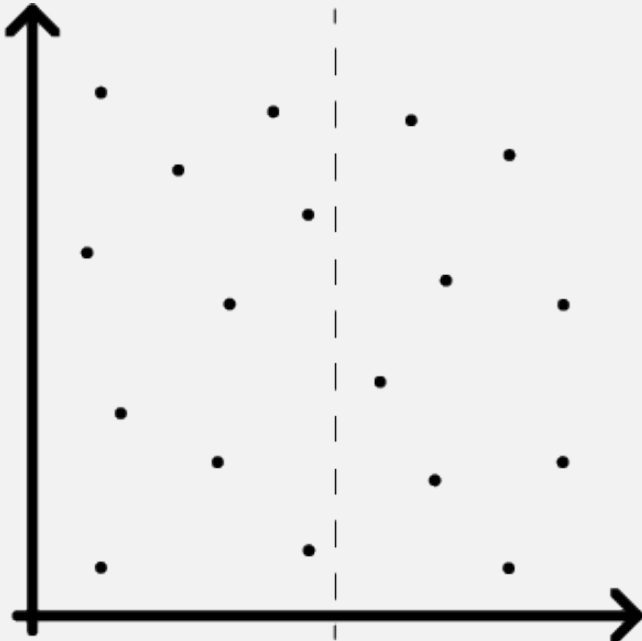
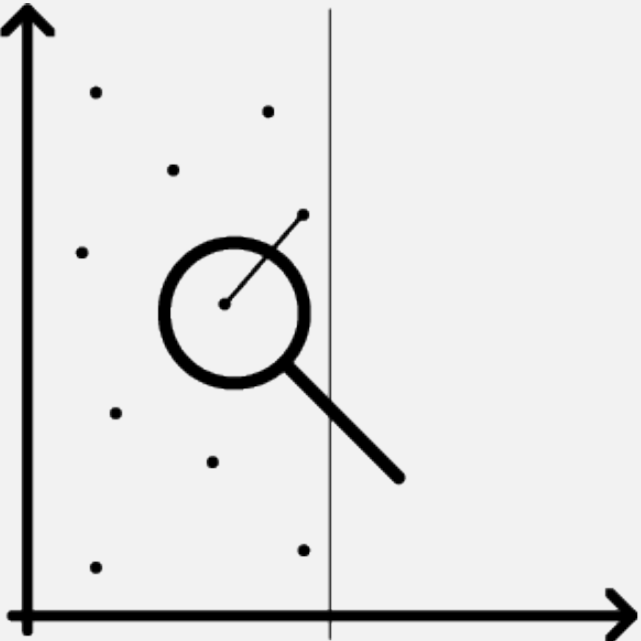
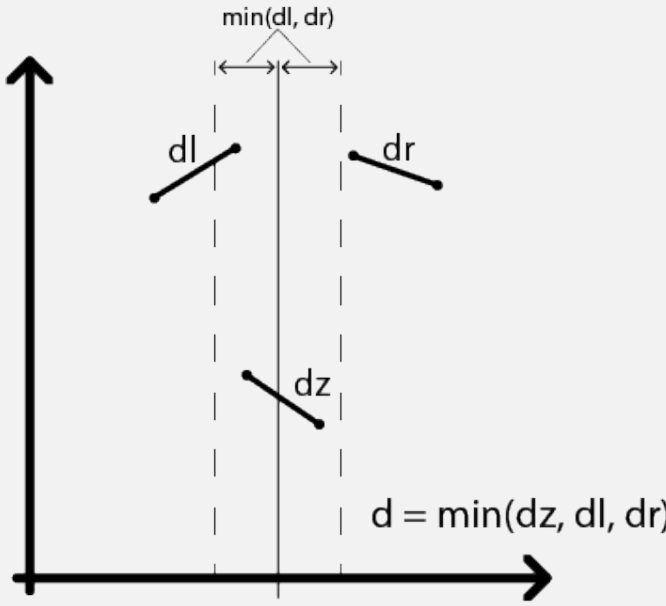
Cho một mặt phẳng gồm  $N$  điểm,  
hãy tìm cặp điểm gần nhau nhất và  
khoảng cách của chúng.







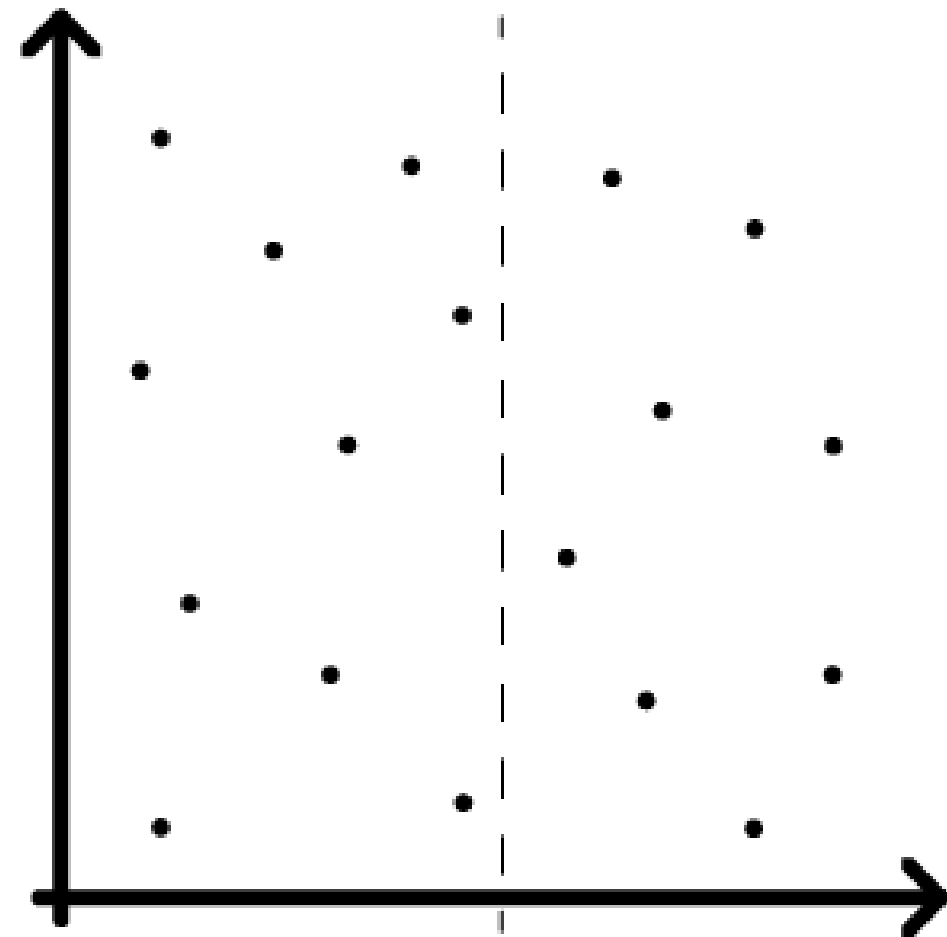
## Tổng quan thuật toán sử dụng phương pháp chia để trị

Chia	Trị	Gộp
		



## Chia:

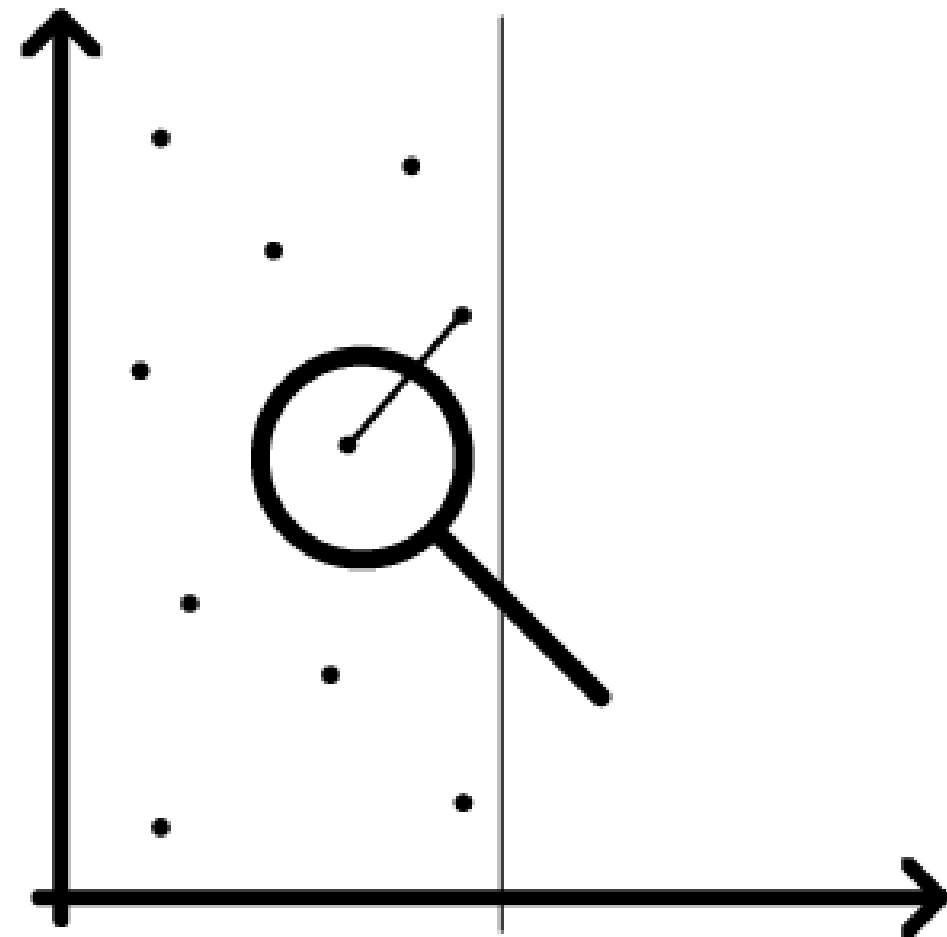
Chọn điểm giữa nhất trong tập hợp các điểm và chia tập này ra thành 2 tập con.





## Trị:

Khi chỉ còn dưới 3 điểm trong tập hợp các điểm, duyệt hết qua các cặp đỉnh để lấy khoảng cách giữa 2 đỉnh nhỏ nhất cho giai đoạn gộp.

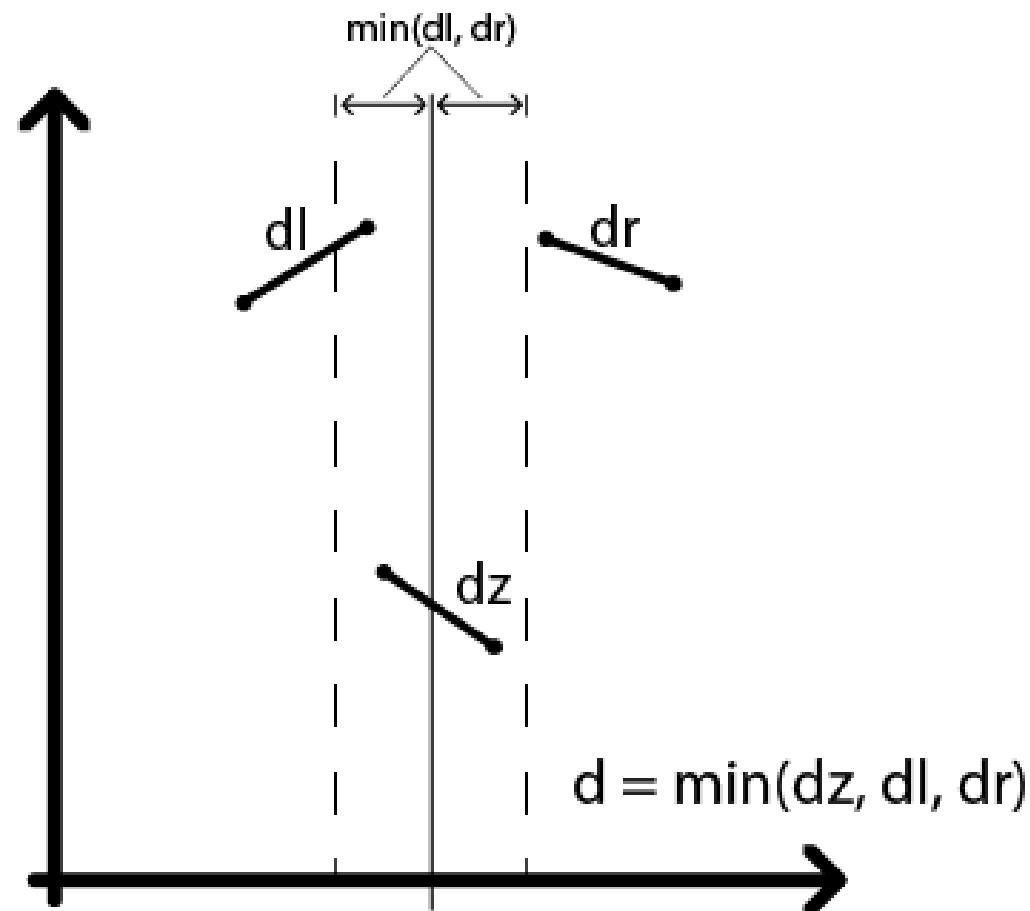






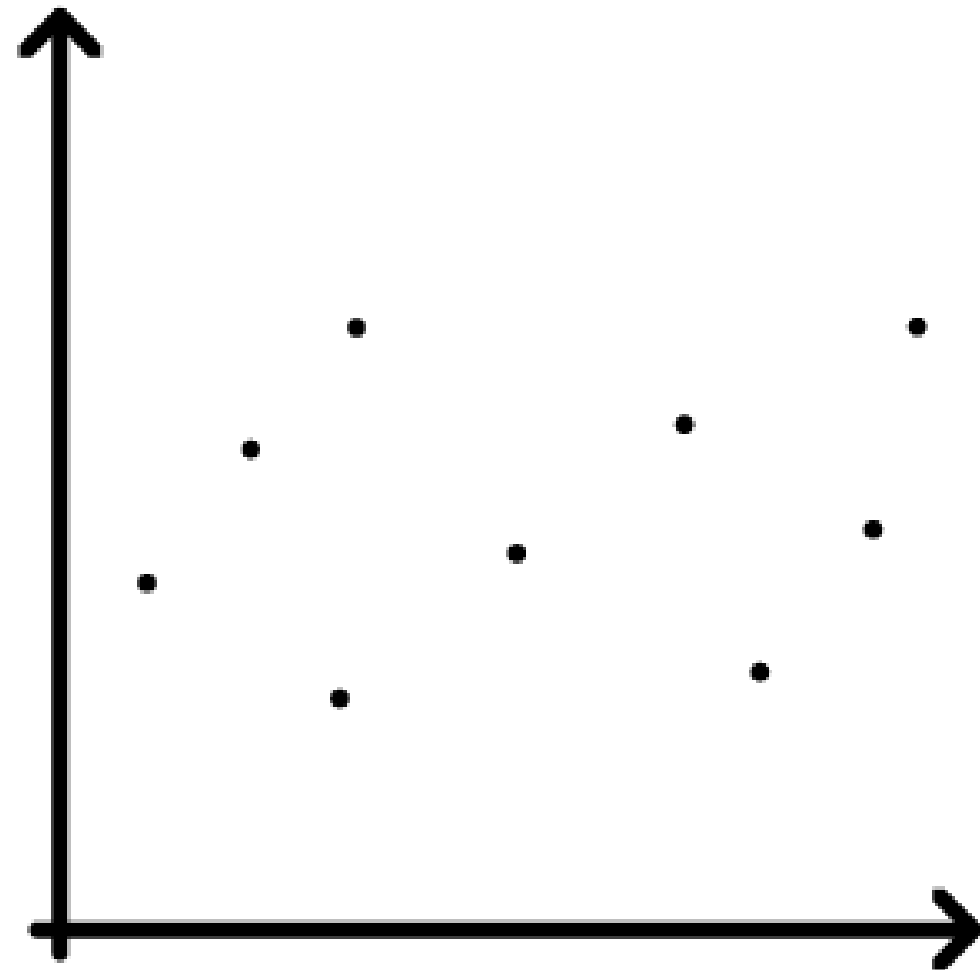
## Gộp:

Ngoài việc so sánh Min khoảng cách ngắn nhất giữa 2 đỉnh sau từ 2 tập con đã trị trước đó thì tìm và duyệt khoảng cách nhỏ nhất của các cặp điểm trong số các điểm có tọa độ x nằm trong khoảng  $[mid - \min(dl, dr); mid + \min(dl, dr)]$  và so sánh nó với kết quả đã so sánh ở trên.





Với các điểm đã cho dưới đây, thuật toán sẽ thực hiện thao tác chia và thao tác trị bao nhiêu lần ?







Phân tích và thiết kế thuật toán

Phương pháp thiết kế thuật toán: Chia để trị

# Một số vấn đề khác





## Ưu điểm và nhược điểm:

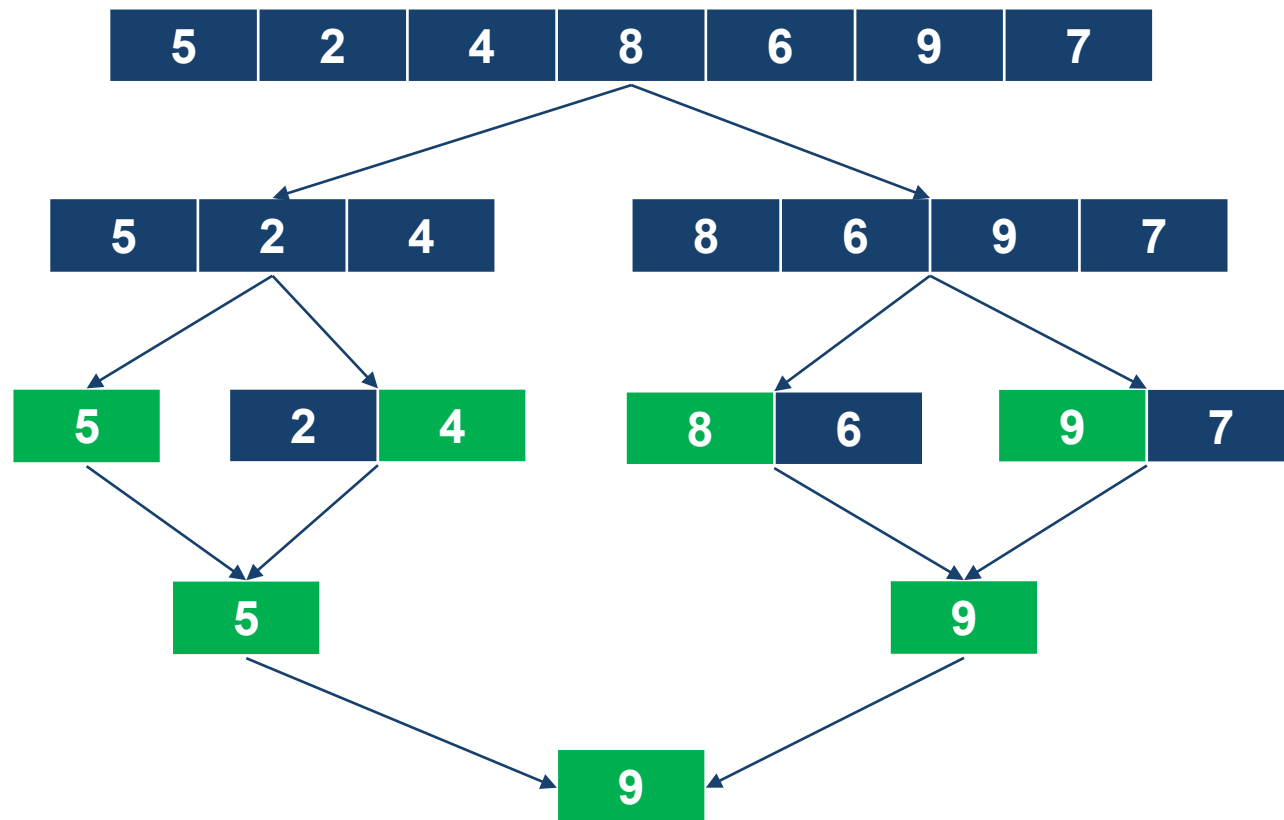
Ưu điểm	Nhược điểm
<ul style="list-style-type: none"><li>• Cho phép chúng ta dễ dàng giải quyết những bài toán khó xử lý và nhìn nhận.</li><li>• Giúp giảm thiểu thời gian và chi phí thực thi đi gấp nhiều lần.</li><li>• Sử dụng hiệu quả bộ nhớ đệm CPU.</li><li>• Dễ dàng áp dụng trong việc lập trình ứng dụng cho vi xử lý đa lõi (Coming soon)</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Độ quy có thể trở thành rào cản hiệu năng. (Nếu có cài đặt)</li><li>• Kết quả của những vấn đề đã giải quyết không thể được lưu lại cho những lần yêu cầu tiếp theo.</li></ul>



## Ví dụ về bài toán không ứng dụng được:

### Tìm Min/Max trong dãy số

Nguyên nhân: Phương pháp chia để trị cho ra thuật toán không tốt hơn phương pháp duyệt





## Ví dụ về bài toán không ứng dụng được:

### Bài toán xếp lịch

Nguyên nhân: Do bản chất các bài toán con phải tham chiếu nhau

Customer #	Start	End
1	7:30 AM	8:30 AM
2	8:00 AM	10:00 AM
3	9:00 AM	10:30 AM
4	11:00 AM	12:00 PM
5	11:30 AM	1:00 PM





- Anany Levitin, Introduction to the Design and Analysis of Algorithms, 3rd Edition, 2014
- [Divide and Conquer Algorithm | Introduction - Geeksforgeeks.org](#)
- [Divide and Conquer Introduction - javatpoint.com](#)
- Wikipedia:
  - [Divide and Conquer](#)
  - [Karatsuba Algorithm](#)

**Tài liệu  
tham khảo**