# MATHS

## $TA_4$

# MATHS

## Terminale A4

**Table des matières**

## CHAPITRE I : EQUATIONS-INEQUATIONS, SYSTEMES

### I. équation et inéquation du type : $ax + b$ (1er degré)

### A- équations

Une équation de la forme $ax + b = 0$, où a et b sont des nombres réels est appelée équation du 1er degré ou équation d'ordre 1.Cette équation admet :

- Une solution unique si $a \neq 0$ Cette solution est $\frac{-b}{2a} \Rightarrow \mathbf{S} = \left\{\frac{-\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}\right\}$
- Aucune solution si $a = 0$ $et$ $b \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{S} = \phi$

  Exemple : Résoudre dans IR les équations suivantes :

  $a) - 3x + 2 = 0$

  $b)\ x + 1 = x - 2$

  $c)\ 4x + 6 = 0$

  $d)\ 3x - 1 = 0$

  $e)\ 2(x - 1) + 3(x + 1) = x - 1$

**Solution**

a) $- 3x + 2 = 0 \Rightarrow -3x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$$\boxed{\mathbf{S} = \left\{\frac{2}{3}\right\}}$$

$b)\ x + 1 = x - 2 \Rightarrow x - x + 1 - 2 = 0 \Rightarrow 0x - 1 = 0;\ a = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\mathrm{S} = \phi}$$

c) $4x + 6 = 0 \Rightarrow 4x = -6 \Rightarrow x = \frac{-6}{4} \Rightarrow x = \frac{-3}{2} \Rightarrow$

$$\boxed{\mathrm{S} = \left\{\frac{-3}{2}\right\}}$$

d) $3x - 1 = 0 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow X = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$$\boxed{\mathrm{S} = \left\{\frac{1}{3}\right\}}$$

$$e)\left\{\begin{array}{c} 2(x-1) + 3(x-1) = x - 1 \\ \Rightarrow 2x - 2 + 3x - 1 = x - 1 \\ \Rightarrow 5x - x - 3 + 1 = 0 \\ \Rightarrow 4x - 2 = 0\ \ 4x = 2\ \ x = \frac{2}{4}\ \ x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\mathrm{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}}$$

## B- inéquations

Pour résoudre les inéquations du premier degré, il suffit d'étudier le signe du polynôme $P(x) = ax + b$. Pour ce fait, on détermine une racine de P. C'est-à-dire une solution de l'équation $P(x) = 0$

$P(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \quad x = \frac{-b}{a}$

| $X$ | $-\infty$ | $\frac{-b}{a}$ $+\infty$ |
|---|---|---|
| $ax + b\ (a \neq 0)$ | Signe contraire du signe de a | Signe de a |

**Exemple** : Résoudre les inéquations :

$a)\ x + 1 \geq 0$

$b)\ 1 - x \geq 0$

$c)\ 2x - 1 < 0$

$d)\ 2x + 4 > 0$

$e)\ 2(x - 1) > x + 1$

Solution

**1ere Méthode:** $x + 1 \geq 0$

$\Rightarrow x \geq -1$

$\boxed{\boldsymbol{S} = [-\mathbf{1};\ +\infty[}$

**2eme Méthode**: $x + 1 \geq 0$

$\Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

| $X$ | $-\infty$ | -1 $+\infty$ |
|---|---|---|
| $x + 1$ | - | + |

$\boxed{\boldsymbol{S} = [-\mathbf{1};\ +\infty[}$

b) $1 - x \geq 0$

**1ère Méthode**: $1 - x \geq 0$

$\Rightarrow -x \geq -1 \Rightarrow x \leq 1$

$\boxed{\boldsymbol{S} = ]-\infty; \mathbf{1}]}$

**2ème Méthode**: $1 - x \geq 0$

$\Rightarrow -x \geq -1 \quad \Rightarrow x \leq 1$

| x | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $1-x$ | + | - | |

$\boldsymbol{S} = ]-\infty;\ \mathbf{1}]$

$c)$ $2x-1 < 0$

**1ère Méthode**: $2x-1 < 0$

$\Rightarrow 2x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$

$\mathbf{S} = \left]-\infty; \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right[$

**2ème Méthode:** $2x-1 < 0$

$\Rightarrow 2x-1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

| x | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $2x-1$ | + | - | |

$\mathbf{S} = \left]-\infty; \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right[$

d) $2x-4 > 0$

**1ère Méthode:** $2x-4 > 0$

$\Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > \frac{4}{2} \Rightarrow x > 2$

$\mathbf{S} = ]\mathbf{2}; +\infty[$

**2ème Méthode:** $2x-4 > 0$

$\Rightarrow 2x-4 = 0$

$\Rightarrow 2x = 4$

$\Rightarrow x = \frac{4}{2}$

$\Rightarrow x = 2$

| X | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $2x-4$ | - | + | |

$\mathbf{S} = ]\mathbf{2}; +\infty[$

$e)\ 2(x-1)\ > (x+1)$

$\Rightarrow 2x-2\ > x+1$

$\Rightarrow 2x-x-2-1>0$

$\Rightarrow x\ -3\ >0$

$\Rightarrow x > 3$

$\boxed{\boldsymbol{S} = ]\,\mathbf{3};\ +\infty\,[}$

**C- équation et inéquation du second degré**

**1- équation**

On considère le polynôme P définie par

$P(x) = ax^2 + bx + c\ avec\ a \neq 0\ Où\ a, b, c\ sont\ des\ réels$

Résoudre l'équation P(x)=0 revient à déterminer au préalable les racines de P afin de déterminer la forme factorisée.

$P(x)\ = ax2 + bx + c$ P $= \left[(x+\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}})^2\ - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

On pose: $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta < 0$ alors P n'est pas factorisable, d'où $\boldsymbol{S} = \phi$
- Si $\Delta = 0$ alors P a une racine unique $\frac{-\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}$ et $\mathrm{P}(x) = \mathrm{a}(x+\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}})^2$ d'où **S** $= \left\{\frac{\mathbf{-b}}{\mathbf{2a}}\right\}$
- Si $\Delta > 0$ alors P a 2 racines distincts $x_1$ et $x_2$ telles que :
  $\mathbf{X_1} = \frac{-\boldsymbol{b}-\sqrt{\Delta}}{\boldsymbol{2a}}$ **et** $\mathbf{X_2} = \frac{-\boldsymbol{b}+\sqrt{\Delta}}{\boldsymbol{2a}}$
  D'où la forme factorisée de $P\ est\ \boldsymbol{P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)}$

  $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{x_1}\ ;\ \boldsymbol{x_2}\}$

**NB :** Le nombre réel Δ tel que $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé discriminant du polynôme P.

**Exemple :** Résoudre les équations suivantes :

1) $x^2 - x - 6 = 0$
2) $x^2 - 2x + 3 = 0$
3) $-x^2 + 3x - 5 = 0$
4) $3x^2 - 6x + 3 = 0$
5) $x^2 + x - 12 = 0$
6) $4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)(x-5)$

**Solution**

1) $x^2 - x - 6 = 0$

On pose: $\Delta = 1 + 24$

$\Delta = 25$

$\Delta = 5^2$

$\boldsymbol{X_1} = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2}$ ; $\boldsymbol{X_1} = -2$

$\boldsymbol{X_2} = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2}$ ; $\boldsymbol{X_2} = 3$

**S= {-2; 3}**

1) $x^2$-2x+3=0

On pose: Δ=4-12

Δ=-8

Δ <0 donc S=**ϕ**

3)-$x^2$+3x-5=0

On pose Δ=9-20

=-11

Δ <0 ⇒ **S=ϕ**

4)3$x^2$-6x+3=0

⇒$x^2$-2x+1=0

Δ=24-24

Δ=0 ⇒x=$\frac{6}{6}$= 1

**S= {1}**

5) $x^2$+x-12=0

On pose: Δ=1+48

Δ=49

Δ=$7^2$

$x_1 = \frac{-1-7}{2} = \frac{-8}{2}$ = -4

$x_2 = \frac{-1+7}{2} = \frac{6}{2}$ =3

**S= {-4; 3}**

6) 4$x^2$+4x+1= (2x+1)(x-5)

4$x^2$+4x+1=2$x^2$-10x+x-5

4$x^2$+4x+1-2$x^2$+9x+5=0

2$x^2$+13x+6=0

On pose: Δ=$13^2$-4×12

Δ=$13^2$-48

Δ=169-48

Δ=121

Δ=$11^2$

$x_1 = \frac{-13-11}{4}$=-6 $\qquad$ $x_2 = \frac{-13+11}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

**S= {-6 ; $\frac{-1}{2}$}**

**Remarque:** Le calcul de Δ n'est pas toujours indispensable pour résoudre une équation du 2nd degré. Par exemple l'équation : 2$x^2$+5x=0⇔x(2x+5)=0

⇔ **S= {0; $\frac{-5}{2}$}**

Quelque fois on peut simplifier les calculs en posant b'=$\frac{b}{2}$ et Δ'=$b'^2$-ac (discriminant réduit)

- Si $\Delta' < 0 \Rightarrow$ pas de racine
- Si $\Delta = 0 \Rightarrow$ racine double : $\mathbf{x_0}' = \frac{-b'}{a}$
- Si $\Delta' > 0 \Rightarrow$ deux racines $\mathbf{x_1} = \frac{-b'-\Delta'}{a}$ et $\mathbf{x_2} = \frac{-b'+\Delta'}{a}$

## 2- inéquations

Pour résoudre une inéquation du $2^{nd}$ degré, il suffit d'étudier le signe du polynôme P(x).

Pour étudier le signe de p(x), on calcule son discriminant et on utilise l'un des tableaux suivants :

- Si $\Delta' < 0$, P n'a pas de racine

| x | $-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| P(x) | Signe de a |

- Si $\Delta = 0$, P admet une racine double alors $P(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2$

| x | $-\infty$ | $\frac{-b}{2a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| P(x) | Signe de a | | Signe de a |

- Si $\Delta > 0$ alors P a 2 racines distincts et la forme factorisée de P est $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

| x | $-\infty$ | $x_1$ | $x_2$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x-x_1$ | - | + | + |
| $x-x_2$ | - | - | + |
| $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ | Signe de a | Signe contraire de a | Signe de a |

L'étude de signe du polynôme P permet de résoudre dans IR les inéquations

**Exemple** : Dans chacun des cas suivants, étudier le signe du polynôme P et en déduire les solutions de l'inéquation $P(x) \leq 0$.

a) $P(x) = -2x^2-4x+6$
b) $P(x) = 3x^2-6x+3$
c) $P(x) = -x^2+3x-5$
d) $P(x) = (2x-3)(x+5)$

**Solution**

$P(x) = -2x^2-4x+6$ on pose : $\Delta = b^2-4ac$

$\Delta = (-4)^2-4(-2)(6)$

$\Delta = 16+48$

$\Delta = 64$

$\Delta = 8^2$

$\Delta > 0$, donc P a deux racines distinctes qui sont : $X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_1 = \frac{4-8}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$

$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_2 = \frac{4+8}{-4} = \frac{12}{-4} = -3$

La forme factorisée de P est : **P(x)= -2(x-1) (x+3)**

Tableau de signe :

| x | $-\infty$ | -3 | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| X+3 | - | + | + | |
| x-1 | - | - | + | |
| (x-1)(x+3) | + | - | + | |
| -2(x-1) (x+3) | - | + | - | |

**S=]-∞;-3] U [1; + ∞ [**

b) $P(x) = 3x^2-6x+3$

On pose $\Delta=b^2-4ac$

$\Delta= (-6)^2-4(3) \times(3)$

$\Delta=36-36$

$\Delta=0$

Donc P admet une racine double: $x_o = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2x3} = \frac{6}{6} = 1$

La forme factorisée de P est : **P(x)=3(x-1)$^2$= 3(x-1) (x-1)**

Tableau de signe

| X | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| x-1 | - | + | |
| x-1 | - | + | |
| $(x-1)^2$ | + | + | |
| $3(x-1)^2$ | + | + | |

**S= {1}**

c) $P(x) = -x^2 +3x-5$

On pose $\Delta=b^2-4ac$

$\Delta= (3)^2-4(-1) \times(-5)$

$\Delta=9-20$

$\Delta=-11$

$\Delta< 0$, P n'a pas donc de racine. P(x) est toujours du même signe que a=-1

D'où le tableau

| x | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|
| P(x) | - |

**S= IR=]-∞ ; + ∞ [**

d) P(x) = (2x-3) (x+5)

On a déjà la forme factorisée de P et les 2 racines sont : -5 et $\frac{3}{2}$

Tableau de signe

| X | $-\infty$ | -5 | $\frac{3}{2}$ $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| X+5 | - | + | + |
| 2x-3 | - | - | + |
| P(x) | + | - | + |

**S = [-5 ; $\frac{3}{2}$ ]**

**D- équations et inéquations du degré 3 (ordre 3)**

On considère le polynôme P tel que $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$

Pour résoudre une inéquation de type P(x) = 0 ou une inéquation de type P(x) ≥ 0 ou P(x) ≤0 ; il faut :

- Rechercher une racine évidente de P si elle, existe puis déterminer un polynôme du 2nd degré Q tel P(x)= (x - α) Q(x). Le calcul des coefficients de Q peut être fait à partir de l'égalité des polynômes (identification) ou par division Euclidienne ou encore par la méthode de Horner.
- Dresser le tableau de signe de p(x) et en déduire les solutions de l'équation donnée impliquant P.

Exemple : On considère le polynôme P définie par :

$P(x)= -2x^3+3x^2+5x-6$

a)Vérifier que (2) est une racine de P.

b) Déterminer un polynôme Q tel que P(x)=(x-2) Q(x)

c)Résoudre P(x)=0

d) Résoudre P(x) ≥0 et P(x) <0

**Solution**

$P(x)=-2x^3+3x^2+5x-6$

a) Vérifions que 2 est racine :
   $P(2) = -2(2^3) + (3)\times 2^2+5\times 2-6$

$P(2)=-16+12+10-6$
$P(2)=-22+22$
$P(2)=0$ d'où 2 est racine de P.

b) Déterminons un polynôme Q

**Procédons par division euclidienne :**

$$
\begin{array}{r|l}
-2x^3+3x^2+5x-6 & x-2 \\
\cline{2-2}
+2x^3-4x^2 \quad & -2x^2-x+3 \\
\cline{1-1}
-x^2+5x-6 & \\
+x^2-2x-6 & \\
\cline{1-1}
3x-6 & \\
-3x+6 & \\
\cline{1-1}
0 & \\
\end{array}
$$

**Méthode de Horner**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | -2 | 3 | 5 | -6 |
| 2 | | -4 | -2 | 6 |
| | -2 | -1 | 3 | 0 |
| | a | B | C | |

D'où $P(x)=(x-2)(-2x^2-x+3)$

c) Résolvons $P(x)=0$

$(x-2)(-2x^2-x+3)=0 \Leftrightarrow x-2=0$ ou $-2x^2-x+3=0$ $a=-2, b=-1, c=3$

$\Leftrightarrow x=2$

$\Delta=b^2-4ac$
$\Delta=(-1)^2-4(-2)\times(3)$
$\Delta=1+24$
$\Delta=25$
$\Delta=5^2$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_1=\frac{1-5}{-4}=\frac{-4}{-4}=1$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_2=\frac{1+5}{-4}=\frac{6}{-4}=\frac{-3}{2}$

$\mathbf{S=\{\frac{-3}{2};1;2\}}$

d) Résoudre $P(x)\geq 0$ et $P(x)<0$

$P(x)=-2(x-2)(x-1)(x+\frac{3}{2})$

Tableau de signe :

| X | $-\infty$ $\quad$ $\frac{-3}{2}$ | 1 | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $(x+\frac{3}{2})$ | - | + | + | + |
| (x-1) | - | - | + | + |
| (x-2) | - | - | - | + |
| $(x-2)(x-1)(x+\frac{3}{2})$ | - | + | - | + |
| $-2(x-2)(x-1)(x+\frac{3}{2})$ | + | - | + | - |

**$P(X) \geq 0 \Rightarrow$ $\quad$ $S=]-\infty; \frac{3}{2}]$ U [1; 2]**

**$P(x) < 0 \Rightarrow$ $\quad$ $S=]\frac{3}{2}; 1[$U$]2; +\infty[$**

**Exercice d'Application**

On considère le polynôme P de définie par : $P(x)= x^3-3x^2-4x+12$

a)Vérifier que P (-2)=0

b) En déduire un polynôme Q de degré 2 tel que P(x)= (x+2) Q(x)

c) Factoriser Q(x)

d) Etudier le signe de P(x)

e) En déduire les solutions de l'inéquation $P(x) \leq 0$

**Résolution**

Soit $P(x)= x^3-3x^2-4x+12$

a) Vérifions que P (-2)=0

$P(-2) = (-2)^3+-3\times(-2)^2-4(-2) +2$

$P(-2)=-8-12+8+12$

$P(-2)=0$

b) Déduisons en Q(x)

Procédons par la division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x^2-4x+12 & x+2 \\ \hline -x^3+2x^2 & x^2-5x+6 \\ -5x^2-4x+12 & \\ +5x+10x & \\ 6x+1 & \\ -6x-12 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc : $P(x)= (x+2)(x^2-5x+6)$

c) Factorisons Q(x)

$Q(x)= x^2 - 5x + 6$ $\qquad$ a=1 ; b= -5 ; c=6

On pose: $\Delta=b^2-4ac$

$\Delta = (-5)^2-4(6)(1)$
$\Delta = 25-24$
$\Delta = 1$

$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \quad X_1 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \quad X_2 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Donc **Q(x)=(x-2) (x-3)**

d) Etudions le signe de P(x)
P(x) = (x+2) (x-2) (x-3)
D'où le tableau de signe

| x | $-\infty$ -2 | 2 | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| x+2 | - | + | + | + |
| x-2 | - | - | + | + |
| x-3 | - | - | - | + |
| P(x) | - | + | - | + |

e) Les solutions de $P(x) \leq 0$
$\Rightarrow$ **S=]-∞; −2] U [2; 3]**

**E- équations et inéquations bicarrées**
**E1. équations bicarrées**

On considère un polynôme P tel que $P(x)= ax^4+bx^2+c$.
Pour résoudre une équation de type P(x)=0, on procède par un changement de variable en posant $X=x^2$ pour ramener l'expression $ax^4+bx^2+c$ à une expression du $2^{nd}$ degré de variable X. L'équation $ax^4+bx^2+c$ est appelée une équation bicarrée.

**Exemple** : Résoudre dans IR, les équations :

a) $2x^4+5x^2-3=0$
b) $X^4-6x^2+9= 0$
c) $X^4+x^2+2= 0$
d) $X^4-4x^2+3=0$

**Résolution**

a) $2x^4+5x^2-3=0$ Posons : $X= x^2$ ;

L'équation devient: $2X^2+5X-3=0$ a=2 ; b=5 ; c=-3

$\Delta=b^2-4ac \quad \Delta= (5)^2-4(2) (-3)$
$\Delta= (5)^2-4(2) (-3)$
$\Delta=25+24 \quad \Delta= 49$
$\Delta= 7^2$

$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \quad X_1 = \frac{-5-7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$

$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_2 = \frac{-5+7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$X_1=-3$ ou $X_2=\frac{1}{2}$ or $X= x^2$

Donc: $x^2=-3$, impossible

$x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=+\sqrt{\frac{1}{2}}$ ou $x=-\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow x=+\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **S=** $\boldsymbol{\{-\frac{\sqrt{2}}{2} ; +\frac{\sqrt{2}}{2}\}}$

b) $x^4-6x^2+9=0$ posons : $X= x^2$, L'équation devient: $X^2-6X+9=0$ ; $a=1$ ; $b=-6$ ; $c=9$

On pose: $\Delta=b^2-4ac$ $\Delta= (-6)^2-4\times9$

$\Delta= 36-36$

$\Delta=0$ ; on a une racine double : $X = \frac{6}{2} = 3$

$x^2=3 \Rightarrow x= +\sqrt{3}$ ou $x=- \sqrt{3}$ **S=** $\boldsymbol{\{-\sqrt{3}; +\sqrt{3}\}}$

c) $x^4+x^2+2=0$ on pose $X=x^2$

$X^2+X+2=0$ $a=1$; $b= 1$; $c=2$

On pose: $\Delta=b^2-4ac$ $\Delta= (1)^2-4\times1\times2$

$\Delta=-7$ ; $\Delta <0$ donc **S=ϕ**

e) $X^4-4x+3=0$ on pose $X= x^2$

$X^2-4X+3=0$ $a=1$ ; $b=-4$ ; $c=3$

On pose: $\Delta=b^2-4ac$ $\Delta= (-4)^2-4\times1\times3$

$\Delta=16-12^2$

$\Delta=4=2^2$

$X_1= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_1= \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} =1$

$X_2= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_2= \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$x^2 = 1 \Rightarrow x=-1$ ou $x=1$

$x^2 = 3 \Rightarrow x=-\sqrt{3}$ ; $x=+\sqrt{3}$ **S=** $\boldsymbol{\{-\sqrt{3}; -1; 1; +\sqrt{2}\}}$

**e2. Inéquations**

Pour résoudre une inéquation bicarrée, on procède par le même chemin en posant $x^2= X$ ; puis on étudie le signe du polynôme.

Exemple :_Résoudre dans IR l'inéquation :

$x^4-5x^2+4\leq0$

Posons $X=x^2 \Rightarrow X^2-5X+4\leq0$ $a=1$; $b=-5$ ; $c=4$

$\Delta=b^2-4ac$ $\Delta= (-5)^2-4\times1\times4$

$\Delta= 25-16$

$\Delta=9 \Rightarrow \Delta= 3^2$ d'où le polynôme admet deux racines distinctes

$X_1= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_1= \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} =1$

$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow X_2 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4$

$x^2 = 1 \Rightarrow x=-1$ ou $x=1$

$x^2 = 4 \Rightarrow x=-2$ ; $x=+2$

$\Rightarrow P(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

Tableau de signe

| x | $-\infty$ -2 | -1 | 1 | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| X+2 | - | + | + | + | + |
| X+1 | - | - | + | + | + |
| x-1 | - | - | - | + | + |
| X+1 | - | - | - | - | + |
| P(x) | + | - | + | - | + |

$P(x) \leq 0 \Rightarrow$ **S= [-2; −1] U [1; 2]**

b) $2x^4-5x+7\leq 0$ on pose $X=x^2$

$2X^2-5X+7\leq 0$ $a=2$; $b=-5$ ; $c= 7$

$\Delta=b^2-4ac$ $\Delta= (-5)^2-4\times 2\times 7$

$\Delta=-39$

$\Delta <0$ donc le signe est celui de *a* ; *a* est positif.

| x | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|
| P(x) | + |

$P(x) \leq 0 \Rightarrow$ **S=ф**

c) $-3x^4+6x^2-3\leq 0$ on pose $X=x^2$

$-3X^2+6X-3\leq 0$ $a=-3$ ; $b=6$ ; $c=-3$

$\Delta=b^2-4ac$ $\Delta= (6)^2-4(-3) \times (-3)$

$\Delta=36-36 \Rightarrow \Delta=0$ donc P a une racine double $x_o = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2x(-3)} = \frac{-6}{-6} = 1$

$P(x)=-3(X-1)^2$

$P(x) \leq 0 \Rightarrow -3(X-1)^2\leq 0$ Or $X=x^2$

$\Rightarrow -3[(x-1)(x+1)]^2\leq 0$

$\Rightarrow -3(x-1)^2(x+1)^2\leq 0$

Tableau de signe :

| x | $-\infty$ -1 | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| -3 | - | - | - |
| $(x+1)^2$ | + | + | + |
| $(x-1)^2$ | + | + | + |
| $-3(x-1)^2(x+1)^2$ | - | - | - |

S=IR

**F- équations et inéquations liant deux fractions rationnelles**

**F1. Équations**

Soit P, Q, R et S quatre polynômes. Les équations liant deux fractions sont de la forme : $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{S(x)}$

Résoudre de telles équations revient à résoudre l'équation : $P(x)\times S(x)=R(x)\times Q(x)$, avec $Q(x) \neq 0$ et $S(x) \neq 0$

**Exemple** : Résoudre dans IR :

a) $\frac{1}{x-2} = \frac{x-7}{x-2}$

Condition d'existence :

L'équation existe si et seulement si $x-2\neq 0 \rightarrow x\neq 2$ ; Le domaine d'existence est **IR/ {2}**

$\frac{1}{x-2} = \frac{x-7}{x-2} \Leftrightarrow x-2 = (x-2)(x-7)$

$\Leftrightarrow (x-2)-(x-2)(x-7)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(-x+8)=0$

$\Leftrightarrow$X=2 ou x=8 or 2 n'appartient pas au domaine de définition donc **S= {8}**

**Exercice d'application**

b) Résoudre dans IR : $\frac{3-2x}{4x+5} = 0$ ; $\frac{x-1}{x+1} = \frac{-2x+3}{x-2}$ ; $\frac{3x+3}{4} + 2x = \frac{3x+5}{2}$

**Inéquation de type : $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq \frac{R(x)}{S(x)}$**

Pour résoudre une inéquation liant 2 fractions rationnelles :

- On détermine la condition d'existence ;
- On établit $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{R(x)}{S(x)}$ puis on étudie le signe de f(x) après avoir réduit au même dénominateur.

**Attention** : $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq \frac{R(x)}{S(x)}$ n'est pas équivalent à $P(x)\times S(x) \leq R(x)\times Q(x)$.

c) Exemple : Résoudre dans IR $\frac{2x-5}{x+1} \leq \frac{1-3x}{x-3}$

L'inéquation existe si et seulement si : $x+1\neq 0$ et $x-3\neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -1$ et $x \neq 3$ **x ϵ IR\ $\{-1; 3\}$**

$\frac{2x-5}{x+1} \leq \frac{1-3x}{x-3} \Leftrightarrow \frac{2x-5}{x+1} - \frac{1-3x}{x-3} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{(2x-5)(x-3)-(x+1)(1-x)}{(x+1)(x-3)} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{5x^2-9x+14}{(x+1)(x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow 5x^2 -9x+14 \leq 0$ on pose $\Delta=b^2 - 4ac \Leftrightarrow \Delta= (-9)^2-4\times 5 \times 14$

$\Delta=-199 <0$

Tableau de signe

| x | $-\infty$ -1 | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $5x^2 -9x+14$ | + | + | + |
| X+1 | - | + | + |
| x-3 | - | - | + |
| F(x) | + | - | + |

**S=]−1; 3[**

**Exercice d'application**

Résoudre dans IR :

a) $\frac{-x+3}{x+1} < \frac{x-2}{x-4}$

b) $\frac{-5x+4}{x+1} <1$

c) $\frac{x-1}{x+3} >0$

d) $\frac{x-2}{3x+1} \leq \frac{1-x}{x+2}$

**CHAPITRE 2 : ETUDE DE FONCTION**

## I. Rappels sur la Notion de limites et de continuité

### 1. Limites de référence :

| | | |
|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ | $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ | |
| $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ | |
| $\lim\limits_{x\to+\infty} X^n = \begin{cases} +\infty \text{ si n est paire} \\ -\infty \text{ si n est impaire} \end{cases}$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ | |
| $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$ | $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty} a =$ | $\lim\limits_{x\to-\infty} a =$ | $\lim\limits_{x\to b} a = a$ |

**Exemple:** Calculer les limites suivantes:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3$ ; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3$ ; c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4$ ; d) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3$ ; e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1}$ ;

f) $\lim\limits_{x\to 2} (x+1)$ ; g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+1}{x-2}$ ; h) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x)$ ; i) $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2$

**Résolution**

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$ ; d) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ ; e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} = 0$ ;

f) $\lim\limits_{x\to 2} (x+1) = 3$ ; g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+1}{x-2} = \frac{-1}{2}$ ; h) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$; i) $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2 = -\infty$

**Limite des fonctions polynômes et fonctions rationnelles**

**A retenir :**

- ✓ La limite en l'infini d'un polynôme est égale à la limite en l'infini de son monôme de plus haut degré.

**Exemple :** Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^6+3x^2+1$ ; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} -x^2+1$ ; c) $\lim\limits_{x \to -\infty} -x^3+x^2+1$

-

**Resolution**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^6+3x^2+1 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^6 = +\infty$ ; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} -x^2+1 = \lim\limits_{x \to -\infty} -x^2 = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} -x^3+x^2+1 = \lim\limits_{x \to -\infty} -x^3 = +\infty$

- ✓ La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite en l'infini du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

**Exemple :** Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2-3x+2}{3x^2-1} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2}{3x^2}\right) = \frac{2}{3}$$

**Attention :** $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \frac{2^2-2x2+1}{2-1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \frac{0^2-3x0+2}{3x0^2-1} = -2$$

**Limite à gauche, limite à droite**

Elle se calcul à gauche et à droite de la valeur interdite du domaine de définition.

**Exemple:** Calculer la limite à gauche et à droite dans chacun des cas suivants :

a) $F(x)=\frac{3x-1}{x+1}$ a= -1

b) $\frac{x^2-2x+1}{x-2}$ a= 2

Calculons la limite à gauche et à droite :

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{3x-1}{x+1} = \frac{3(-1)-1}{0-} = \frac{-4}{0-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{3x-1}{x+1} = \frac{3(-1)-1}{0+} = \frac{-4}{0+} = -\infty$$

Utilisation du tableau du signe

| x | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| -4 | - | \|\| | - |
| X+1 | - | \|\| | + |
| | + | \|\| | - |

D'où $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-2x+1}{x-2} = \frac{2^2-2x2+3}{0+} = \frac{3}{0+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2-2x+1}{x-2} = \frac{2^2-2x2+3}{0-} = \frac{3}{0-} = -\infty$$

Utilisation du tableau de signe

| x | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| 3 | + | \|\| | + |
| x-2 | - | \|\| | + |
| | - | \|\| | + |

D'où $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

**1.2. notion d'asymptotes**

**a- asymptotes parallèles aux axes du repère**

**A RETENIR :** Lorsqu'une fonction admet pour limite un nombre réel a en $+\infty$ ou en $-\infty$ ; alors la droite d'équation y = a est une asymptote horizontale à la courbe de la fonction.

**Exemple :** Calculer la limite en l'infini de f et en déduire d'éventuelles asymptotes.

a) $F(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2}$ b) $f(x) = \frac{3x-6}{x^2+1}$ c) $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$

**Solution**

a) $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = 1$$

Donc la droite d'équation y = 1 est asymptote Horizontale à la courbe ($C_f$).

b) $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-6}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-6}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{x}\right) = 0$$

Donc la droite d'équation y=0 est asymptote horizontale à la courbe ($C_f$).

c) $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}(x) = -\infty$$

Donc il n'existe pas d'asymptote horizontale.

- Lorsqu'une fonction admet pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ à gauche ou à droite en $x_o$ ; alors la droite d'équation $x = x_o$ est une asymptote verticale à la courbe.

**Exemple :** Calculer les limites à gauche et à droite et en déduire d'éventuelles asymptotes :

a) $f(x)= \frac{x-1}{x+1}$ a=-1; b) $f(x)= \frac{3x-2}{x-2}$ a=2

**Solution:**

a) $$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \lim_{x\to-1^-}\left(\frac{-2}{0-}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \lim_{x\to-1^+}\left(\frac{-2}{0-}\right) = -\infty$$

Donc la droite d'équation X= -1 est asymptote à ($C_f$).

b) $$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-}\left(\frac{3x-2}{x-2}\right) = \lim_{x\to2^-}\left(\frac{4}{0-}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+}\left(\frac{3x-2}{x-2}\right) = \lim_{x\to2^+}\left(\frac{4}{0+}\right) = +\infty$$

Donc la droite d'équation X=2 est asymptote à ($C_f$).

### b- Asymptote Oblique

**A RETENIR :** soit f une fonction et ($C_f$) sa courbe représentative. Lorsqu'il existe une quantité y= ax+b telle que : $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x)-(ax+b)]= 0$ alors la droite d'équation y= ax+b est dite asymptote

Oblique de (C).

**Exercice d'application**

1- Soit la fonction définie par : $f(x) = \frac{-x^2+3x-1}{x+2}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f

b) Calculer les limites aux bornes de $D_f$.

c) Déterminer 3 réels a, b, et c tels que $\forall\ x \in D_f$, f(x)= ax+b + $\frac{c}{x+2}$

d) Démontrer qu'il existe une asymptote oblique à ($C_f$).

2- Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de définition et calculer les limites aux bornes du domaine.

a) f(x)= x+1 ;

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2-2x+3$ ;

c) $f(x) = \frac{1}{x}$ ;

d) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ;

e) $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$;

f) $f(x) = \frac{-x3+x+1}{x+1}$

Solution

1- Soit $f(x) = \frac{-x^2+3x-1}{x+2}$

a) Déterminons le domaine de définition

f existe si et seulement si : $x+2\neq0 \rightarrow x \neq -2$

$\mathbf{D_f= IR/\{-2\}}$

b) Calculons les limites aux bornes de $D_f$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{-x^2+3x-1}{x+2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{-x^2}{x}\right) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-x^2+3x-1}{x+2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2}{x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(\frac{-4-6-1}{0^-}\right) = \frac{-11}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \left(\frac{-4-6-1}{0^+}\right) = \frac{-11}{0^-} = -\infty$$

Donc la droite d'équation X= -2 est asymptote verticale

c) Déterminons trois réels a, b, et c

→Par identification :

$$f(x)= ax+b + \frac{c}{x+2} \rightarrow f(x) = \frac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2}$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2}$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2}$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{ax^2+x(2a+b)+2b+c}{x+2}$$

Par identification : $\begin{cases} a = -1 \\ b = 3-2a = 5 \\ c = 1-2b = -9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{a = -1} \\ \mathbf{b = 5} \\ \mathbf{c = -9} \end{cases}$

$$f(x)= -x + 5 - \frac{9}{x+2}$$

→ Par division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} -x^2+3x+1 & x+2 \\ \hline +x^2+2x & -x+5 \\ \hline 5x+1 & \\ -5x-10 & \\ \hline -9 & \end{array}$$

D'où : $f(x)= -x + 5 + \frac{(-9)}{x+2} \rightarrow f(x)= -x + 5 - \frac{9}{x+2}$

d- Démontrons qu'il existe une asymptote horizontale :

Posons : y = -x+5

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x)- y] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[(-x+5) - \frac{9}{x+2} - (-x+5)\right]$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x)- y] = \lim -\frac{9}{x} = 0$$

D'où la droite d'équation : y= -x+5 est une asymptote oblique.

2) Déterminons le domaine de définition et calculons les limites aux bornes de $D_f$ :

a) $f(x) = x+1$

**$D_f$= IR= $]-\infty; +\infty[$**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim(x+1) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}(x+1) = +\infty$$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2-2x+3$

**$D_f$= IR= $]-\infty; +\infty[$**

$$\lim_{X \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty}(\frac{1}{3}x^2-2x+3)$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty}(\frac{1}{3}x^2) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}(\frac{1}{3}x^2) = +\infty$$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$

f existe si et seulement si:

$x \neq 0$ $D_f = IR/\{0\}$ ou **$D_f = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty}(\frac{1}{x}) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}(\frac{1}{x}) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Donc la droite (D) : y = 0 est asymptote horizontale

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-}(\frac{1}{x}) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+}(\frac{1}{x}) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Donc la droite (D) : X = 0 est asymptote verticale.

d) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

f existe si et seulement si : $x+1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$

**$D_f$ = IR\{-1} ou $D_f = ]-\infty ; -1[ \cup ]-1 ; +\infty[$**

$$\lim f(x) = \lim(\frac{1}{x}) = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$x \to -\infty \quad x \to -\infty$

$\lim f(x) = \lim(\frac{1}{x}) = \frac{1}{+\infty} = 0$
$x \to +\infty \quad x \to +\infty$

$\lim f(x) = \lim(\frac{1}{x}) = \frac{1}{1^-} = -\infty$
$x \to 1^- \quad x \to 1^-$

$\lim f(x) = \lim(\frac{1}{x}) = \frac{1}{1^+} = +\infty$
$x \to 1^+ \quad x \to 1^+$

Donc la droite (D) : X = 0 est asymptote verticale.

e) $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$

f existe si et seulement si : $x-3 \neq 0 \to x \neq 3$

**$D_f$ = IR\{ 3 } ou $D_f$ = $]-\infty\,;3[\ \mathbf{U}\ ]3\,;\ +\infty[$**

$\lim f(x) = \lim(\frac{x}{x}) = \frac{1}{1} = 1$
$x \to -\infty \quad x \to -\infty$

$\lim f(x) = \lim(\frac{x}{x}) = \frac{1}{1} = 1$
$x \to +\infty \quad x \to +\infty$

Donc la droite (D) : y = 1 est asymptote horizontale.

$\lim f(x) = \lim(\frac{3-2}{0^-}) = \frac{1}{0^-} = -\infty$
$x \to 3^- \quad x \to 3^-$

$\lim f(x) = \lim(\frac{3-2}{0^+}) = \frac{1}{0^+} = +\infty$
$x \to 3^+ \quad x \to 3^+$

Donc la droite (D) : X= 3 est asymptote vertical.

f) $f(x) = \frac{-x^3+x^2+1}{x+1}$

f existe si et seulement si : $x+1 \neq 0 \to x \neq -1$

**$D_f$ = IR\{ -1 } ou $D_f$ = $]-\infty\,;-1[\ \mathbf{U}\ ]-1\,;\ +\infty[$**

$\lim f(x) = \lim(\frac{-x^3}{x}) = \lim(-x^2) = -\infty$
$x \to -\infty \quad x \to -\infty \quad x \to -\infty$

$\lim f(x) = \lim(\frac{-x^3}{x}) = \lim(-x^2) = -\infty$
$x \to +\infty \quad x \to -\infty \quad x \to +\infty$

$\lim f(x) = (\frac{-(-1)^3+(-1)^2+1}{0^-}) = \frac{3}{0^-} = -\infty$
$x \to -1^-$

$\lim f(x) = (\frac{-(-1)^3+(-1)^2+1}{0^+}) = \frac{3}{0^+} = +\infty$

$x \to -1^+$

Donc la droite **(D) : X = -1** est asymptote verticale.

## II. notion de dérivée

**Définition :** Soit f une fonction

L'ensemble des nombres réels en les quels f est dérivable, est appelé *ensemble de dérivabilité*

La fonction $x \to f'(x)$ est appelé dérivée (ou fonction dérivée) de f

### 2.1. Dérivées des fonctions élémentaires

| $f(x) = k$ | $f'(x) = 0$ | Ensemble de dérivée |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $f'(x)$ | IR |
| $f(x) = x$ | $f'(x)= 1$ | IR |
| $f(x) = x^2$ | $f'(x) = 2x$ | IR |
| $f(x)= \frac{1}{x}$ | $f'(x)= \frac{-1}{x^2}$ | IR* |
| $F(x) = x^n$ | $f'(x) = nx^{n-1}$ | IR |
| $f(x) = \sqrt{x}$ | $f'(x)= \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0 ; +\infty[$ |

**Exemple :** $f(x) = 2 \to f'(x) = 0$

$f(x) = 2x \to f'(x) = 2$

$f(x) = x^4 \to f'(x) = 4x^{4-1} = 4x^3$

$f(x)= \frac{1}{2}x^2 \to f'(x) = \frac{1}{2} \times 2x = x \to$ $\mathbf{f'(x) = x}$

2.2. Dérivée et opération sur les fonctions

| Fonction mère | Dérivée |
|---|---|
| F(x) | F'(x) |
| k.U(x), k ∈ $IR^*$ | k.U'(x) k ∈ $IR^*$ |
| U(x) + V(x) | U'(x) + V'(x) |
| U(x)×V(x) | U'(x)V(x) + V'(x)U(x) |
| $\frac{1}{U(x)}$ | $\frac{-U'(x)}{U(x)}$ |
| $\frac{U(x)}{v(x)}$ | $\frac{U'V-V'U}{v^2}$ |
| $U(x)^n$ | $nU'.U^{n-1}$ |
| $\sqrt{U}(x)$ | $\frac{U'}{2\sqrt{U}}$ |

**Exercice d'application**

Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de dérivabilité puis calculer la fonction dérivée

a) f(x)= -x
b) $f(x)=2x^2$
c) $f(x)=\frac{-3}{x}$
d) $f(x) = 2\sqrt{x}$
e) $f(x) = 2x^2 -3x-5$
f) $f(x) = 2x^4 + \frac{4}{3} x^3-x^2+3$
g) $f(x) = \frac{1}{x+2}$
h) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$
i) $f(x) = \frac{3x}{x+2}$
j) $f(x) = \frac{3x^2-2x+1}{x-2}$
k) $f(x) = \frac{x+1}{2-x}$
l) $F(x) = (x+1)^6$
m) $F(x) = (x^2-2)^3$

**Solution**

a) f(x) = -x **$D_f$= IR**

**f'(x) = -1**

b) $f(x) = 2x^2$ $\quad$ **$D_f = IR$**

**$f'(x) = 4x$**

c) $f(x) = \frac{-3}{x}$ $\quad$ **$D_f = IR$**

$f'(x) = -3 \times (\frac{1}{x})'$ $\rightarrow$ **$f'(x) = \frac{3}{x^2}$**

d) $f(x) = 2\sqrt{x}$ $\quad$ **$D_f = [0; +\infty[$**

$f'(x) = 2\times (\sqrt{x})'$

$f'(x) = 2\times \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\rightarrow$ **$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$**

e) $f(x) = 2x^2-3x-5$ $\quad$ **$D_f = IR$**

$f'(x) = (2x^2)' - (3x)' - (5)'$

**$f'(x) = 4x - 3$**

f) $2x^4+\frac{4}{3}x^3-x^2+3$ $\quad$ **$D_f = IR$**

$f'(x) = (2x^4)' + (\frac{4}{3}x^3)'-(x^2)'+(3)'$

**$f'(x) = 8x^3+4x^2-2x$**

g) $f(x) = \frac{1}{x+2}$ $\quad$ **$D_f = IR\backslash\{-2\}$**

$U= x+2 \rightarrow U' = 1$

$f'(x) = \frac{-1}{U^2} \rightarrow \mathbf{f'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}}$

h) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ $\quad$ **$D_f = IR\backslash\{-1;1\}$**

$U = x^2-1 \rightarrow U' = 2x$

$f'(x) = \frac{-U'}{U^2} \rightarrow \mathbf{f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}}$

i) $f(x) = \frac{3x}{x+2}$ $\quad$ **$D_f = IR\backslash\{-2\}$**

$U = 3x \rightarrow U' = 3$

$V= x+2 \rightarrow V' = 1$

$f'(x) = \frac{U'V-V'U}{V^2}$

$f'(x) = \frac{3(x+2)-1(3x)}{(x+2)^2}$

**$f'(x) = \frac{6}{(x+2)^2}$**

j) $f(x) = \frac{3x^2-2x+1}{x-2}$ **$D_f$= IR\{2}**

U = $3x^2$-2x+1 → U'= 6x-2

V = x-2 → V'= 1

$f'(x) = \frac{U'V-V'U}{U^2}$

$f'(x) = \frac{(6x-2)(x-2)-1(3x^2-2x+1)}{(x-2)^2}$

$f'(x) = \frac{6x^2-12x-2x-2x+4-3x^2+2x-1}{(x-2)^2}$ → **$f'(x) = \frac{3x^2-12x+3}{(x-2)^2}$**

k) $f(x) = \frac{x+1}{2-x}$ **$D_f$= IR\{2}**

U = x+1 → U' = 1

V= 2-x → V' = -1

$f'(x) = \frac{U'V-V'U}{V^2}$

$f'(x) = \frac{1(2-x)-(-1)(x+1)}{(2-x)^2}$

$f'(x) = \frac{2-x+x+1}{(2-x)^2}$ → **$f'(x) = \frac{3}{(2-x)^2}$**

l) $f(x) = (x^2-2)^3$ **$D_f$= IR**

Posons: U = $x^2$-2 → U' = 2x

$f'(x) = (U^n)= nU'U^{n-1}$

$f'(x) = 3\times (2x) \times(x^2-2)^2$ → **$f'(x) = 6x(x^2-2)^2$**

2. **3. Dérivée et application**
   **a- Sens de variation d'une fonction**

Pour déterminer le sens de variation d'une fonction, nous déterminons le signe de la dérivée sur l'ensemble de définition :

- ✓ Si f'(x) est positive sur une partie(ou l'intégralité) de l'ensemble alors f est croissante (Strictement croissante).
- ✓ Si f'(x) est négative sur une partie de cet ensemble (ou l'intégralité), alors f est décroissante (strictement décroissante) sur cet ensemble.
- ✓ Si f' est nulle alors, on dit que f est constante.

**Remarque :** Etudier les variations d'une fonction revient à dresser le tableau de signe et le tableau de variation.

Exemple : Etudier les variations des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^3-3x-1$
b) $f(x) = 2x^2-x+4$

c) $f(x) = \frac{3x^2-2x+1}{x-2}$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$

**Solution**

a) $f(x) = x^3-3x-1$ **$D_f$= IR**

$f'(x) = 3x^2-3 \rightarrow f'(x) = 3(x^2-1) \rightarrow$ **$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$**

posons $f'(x)= 0 \rightarrow 3(x-1)(x+1)= 0 \rightarrow x= 1$ ou $x= -1$

Tableau de variation

| X | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| x+1 | - | + | + | |
| x-1 | - | - | + | |
| f'(x) | + | - | + | |
| f(x) | $-\infty$ ↗ | $f(-1)=1$ ↘ | $f(1)= -3$ ↗ | $+\infty$ |

**$\forall x \in ]-\infty ; -1[ \cup [1 ; +\infty[$ , $f'(x) > 0$ d'où f est croissante sur $]-\infty ; -1[ \cup [1 ; +\infty[$ ;**

**$\forall x \in ]-1 ; -1[$ ; $f'(x) <, 0$ d'où f est décroissante sur ]-1 ; 1[.**

b) $f(x) = 2x^2-x+4$ **$D_f$= IR**

$f'(x) = 4x-1$ ; $f'(x) = 0 \rightarrow 4x-1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{4}$

Tableau de variation

| x | $-\infty$ | $\frac{1}{4}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f'(x) = 4x-1 | - | + | |
| f(x) | $+\infty$ ↘ | $f(\frac{1}{4})$ ↗ | $+\infty$ |

**$\forall x \in ]-\infty ; \frac{1}{4}[$, $f'(x) <, 0$ d'où f est décroissante sur $]-\infty ; \frac{1}{4}[$ ;**

**$\forall x \in ]\frac{1}{4} ; +\infty[$, $f'(x) > 0$ d'où f est croissante sur $]\frac{1}{4} ; +\infty[$.**

c) $f(x) = \frac{3x^2-2x+1}{x-2}$ **$D_f$= IR\{2}**

Calcul de la dérivée :

$U = 3x^2-2x+1 \rightarrow U' = 6x-2$

$V= x-2 \rightarrow V' = 1$

$f'(x) = \frac{U'V-V'U}{V^2} \rightarrow f'(x) = \frac{(6x-2)(x-2)-(6x-2)}{(x-2)^2}$

$f'(x) = \frac{6x^2-20x+6}{(x-2)^2}$

$\forall x \in D_f, (x-2)^2 > 0$ donc f' est du signe du numérateur

$6x^2-20x+6=0 \rightarrow 3x^2-10x+3=0$

$$\Delta' = (5)^2 - 9 \rightarrow \Delta' = 16$$

$$\Delta' = 4^2$$

$X_1= \frac{5-4}{3} = \frac{1}{3}$ ; et $X_2= \frac{5+4}{3} = 3$

$f'(x) = 3(x - \frac{1}{3})(x-3)$

<u>Tableau de variation</u>

| x | $-\infty$ | $\frac{1}{3}$ | 2 | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $X - \frac{1}{3}$ | - | + | ‖ | + | + |
| x-3 | - | - | ‖ | - | + |
| f'(x) | + | - | ‖ | - | + |
| f(x) | $-\infty$ ↗ | $f(\frac{1}{3})$ | ↘ $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ f(3) | ↗ $+\infty$ |

**$\forall x \in ]-\infty ; \frac{1}{3}[ \cup ]3 ; +\infty[$ , $f'(x) > 0$ d'où f est croissante sur $]-\infty ; \frac{1}{3}[ \cup ]3 ; +\infty[$ ;**

**$\forall x \in ]\frac{1}{3} ; 2[\cup]2 ; 3[$ ; $f'(x) < 0$ d'où f est décroissante sur $]\frac{1}{3} ; 2[\cup]2 ; 3[$**

d) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad D_f= IR^*$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

$\forall x \in D_f, \frac{-1}{x^2} < 0$ d'où f est strictement décroissante.

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f'(x) | - | ‖ | - |
| f(x) | 0 ↘ $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ 0 |

### b- Détermination d'une équation de la tangente au point d'abscisse $x_o$

La courbe d'une fonction peut atteindre en un point $M_o$ d'abscisse $x_o$ une tangente dont l'équation est donnée par :

**(T) : $y = f'(x_o)(x-x_o)+f(x_o)$**

**Exemple :** Soit $f(x) = x^2+2x+3$

a) Calculer la dérivée de f(x)
b) Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 3

**Solution**

a) Calcul de la dérivée
$f'(x) = 2x+2$
b) Une équation de la tangente au point d'abscisse 3

(T) : $y = f'(x_o)(x-x_o)+f(x_o)$

$X_o = 3 \rightarrow f'(3) = 2\times3+2 \quad f'(3) = 8$ et $f(3) = 3^2 + 2 \times 3 + 3 = 18$

Donc : (T) : $y = 8(x-3) + 18$

$Y = 8x-24+18 \quad (T)$: **$y = 8x-6$**

### 2. 4. Dérivées successives

Une fonction peut être dérivée plusieurs fois. La première dérivée de f est f'. La $2^{ème}$ dérivée de f est f'' ; la $3^{ème}$ dérivée de f est f''' ou $f^3$. La n-ième dérivée de f est $f^n$.

**Exemple :** Calculer les trois premières dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3x^2-2x+1$
b) $g(x) = 3x^3-6x^2+x-3$

**Solution**

c) $f(x) = 3x^2-2x+1$
$f'(x) = 6x-2+0$
$f''(x) = 6$
$f'''(x) = 0$

d) $g(x) = 3x^3-6x^2+x-3$
$g'(x) = 9x^2-12x+1$
$g''(x) =18x-12$
$g^3(x) = 18$
$g^4(x) = 0$

## III. étude de fonction

### A- parité :

Une fonction est dite paire si et seulement si son ensemble de définition est symétrique par rapport à O.

$\forall x \in D_f : f(x) = f(-x)$

**Exemple**: $f(x) = x^2+1$

$f(-x) = (-x)^2+1 = x^2+1$

Donc la fonction f est paire.

Une fonction est dite impaire si son ensemble de définition est symétrique par rapport à O et $\forall x \in D_f : f(-x) = f(x)$

**2- Centre de symétrie**

Pour démontrer qu'un point $A\binom{a}{b}$ est centre de symétrie, il suffit de démontrer que : $\frac{f(a-h)+f(a+h)}{b} = 2 \Leftrightarrow f(a-h) + f(a+h) = 2b$

**3- Axe de symétrie**

Pour démontrer qu'une droite X= a est axe de symétrie alors il suffit juste de prouver que : $f(a-h) = f(a+h)$

**B. fonction logarithme népérien**

**Définition :** On appelle fonction logarithme népérien, la fonction notée *lnx* définie sur ]0 ; +∞[ , qui s'annule en 1.

**Propriété fondamentale de la fonction logarithme**

La fonction logarithme népérien est caractérisée par trois propriétés fondamentales qui sont:

- Son domaine de définition] 0 ; +∞[
- ln(1) = 0 (racine évidence)
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ (dérivée)

**a) Ensemble de définition de fonction composé avec ln : lnU**

La fonction lnU existe si et seulement si U existe et U>0

**Exemple :** Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de définition de la fonction f.

a) $F(x) = \ln(4x-8)$
b) c) $h(x) = \ln(\frac{x-2}{3x+9})$
c) $G(x) = \ln(-3x+4)$
d) d) $k(x) = \ln(x^2-3x+4)$

**Solution**

a) $F(x) = \ln(4x-8)$  f(x) existe si et seulement si $4x-8 > 0 \rightarrow x > 2$

**$D_f$ = ] 2 ; +∞[**

b) $g(x) = \ln(-3x+4)$  g(x)  existe si et seulement si $-3x+4>0 \rightarrow -3x > -4 \rightarrow 3x < 4 \rightarrow x < \frac{4}{3}$

**$D_g$=]-∞ ; $\frac{4}{3}$[**

c) h(x) = $\ln(\frac{x-2}{3x+9})$ f(x) existe si et seulement si $\frac{x-2}{3x+9} > 0$ et 3x+9≠0

x-2 $= 0 \rightarrow$ x $= 2$ ; 3x+9≠0 $\rightarrow$ x $\neq -3$

| X | $-\infty$ | -3 | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| 3x+9 | - | ‖ | + | + |
| x-2 | - | ‖ | - | + |
| $\frac{x-2}{3x+9}$ | + | ‖ | - | + |

**$D_h$= ]-∞; -3[ U ] 2 ; +∞[**

d) k(x) = ln(x²-3x+4) k(x) existe si et seulement si : $x^2-3x+4 > 0$

$x^2-3x+4 = 0$ $a = 1; b = -3; c = 4 \rightarrow \nabla = (-3)^2-4(1)\times(4)\ \ 0 \rightarrow \nabla = 9 - 16\ 0 \rightarrow \nabla = -7 < 0$

Alors le signe est celui de a ; a$>$ 0 on en déduit que ;$\forall x \in$ IR, $x^2-3x+4 > 0$ ; **$D_K$= IR**

**b) Variation de ln et ses conséquences**

**Variation :** La fonction ln étant définie sur]0;+ ∞ [ et ayant pour dérivée $(\frac{1}{x})$ une fonction strictement croissante.

Conséquences : ∀a, b ∈IR*, on a :

- Si a= b ↔lna = lnb
- Si a>b↔lna> lnb
- Si a<b ↔lna< lnb

Cas particulier :

- Si a<1 → lna< lnb or ln1 = 0 alors lna< 0
- Si a>1→ lna > ln1 or ln1 0 alors lna> 0

**c) Le nombre e**

lne = 1 ; e ≈ 2.718 ; lnx = 1 → x= $e^1$ = e ; $\ln e^x = x$

**d) Propriétés algébriques**

∀a ∈ $IR_+^*$ et ∀b ∈ $IR_+^*$, on a :

- Ln(a.b) = lna+lnb
- $\ln(\frac{1}{a})$= -lna
- $\ln(\frac{a}{b})$ = lna - lnb
- $\ln(a^n)$ = nlna

Ecrire plus simplement :

- $\ln(\frac{2}{3})$ = ln2-ln3
- $\ln(2\sqrt{2}) = \ln 2 + \ln\sqrt{2} \rightarrow \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{3}{2}\ln 2$
- $\ln 4 = \ln 2^2 = 2\ln 2$

e) **Equations et Inéquation comportant ln**

1. **Equations :**

Pour résoudre les équations comportant ln, il faut :

- ✓ Déterminer la condition d'existence de l'inéquation
- ✓ Utiliser les propriétés algébriques des fonctions ln pour en déduire une équation plus simple.

- **Equation du type lnU = k**

a) Ln(2x+6) = 0
b) Ln(3x+2) = 5
c) Lnx + 2 = 3
d) Ln(x+2) = 0
e) Ln(x²- 3x+4)
f) Lnx = -3

**Solution**

a) ln(2x+6) = 0 cette équation existe si $2x+6>0 \rightarrow 2x > -6 \rightarrow x > -3 \rightarrow x\in\,]-3\,;+\infty[$

$\ln(2x+6) = 0 \rightarrow \ln(2x+6) = \ln 1 \rightarrow 2x+6 = 1 \rightarrow 2x = -5 \rightarrow x = \frac{-5}{2} \in\,]-3\,;+\infty[$

**S** = $\{\frac{-5}{2}\}$

b) ln(3x+2) = 5 cette équation existe si $3x+2>0 \rightarrow 3x > -2 \rightarrow x > \frac{-2}{3} \rightarrow x\in\,]\frac{-2}{3}\,;+\infty[$

$\ln(3x+2) = 5 \rightarrow e^{\ln(3x+2)} = e^5 \rightarrow 3x+2 = e^5 \rightarrow 3x = e^5-2 \rightarrow x = \frac{e^5-2}{3} \rightarrow x\in\,]\frac{-2}{3}\,;+\infty[$

**S** = $\{\frac{e^5-2}{3}\}$

- **Equation du type lnU = lnV**

Résoudre dans chacun des cas suivants les équations :

a) Ln(x+1) = ln(2x-2)
b) Ln(x+3) = ln( -x-7)
c) Ln(x-1) + ln(x+1) = 0
d) Ln(2x-2) + ln(2x+2) = ln3

**Solution**

a) Ln(x+1) = ln(2x-2) cette équation existe si $x+1>0$ et $2x-2>0 \rightarrow x > -1$ et $x > 1$
$\rightarrow x\in\,]\frac{-2}{3}\,;+\infty[$

b) Ln(x+3) = ln( -x-7) cette équation existe si $x+3>0$ et $-x-7>0 \rightarrow x > -3$ et $x < -7$
L'équation n'a pas de solution

- **Utilisation d'inconnu Auxiliaire**

Pour résoudre les équations du types : a(lnx)²+ b(lnx)+c = 0 . On procède par changement de variable en posant : X = lnx

On se ramène ainsi à une du $2^{nd}$ degrés.

Exemple : Résoudre dans chacun des cas suivants les équations suivantes :

- $\ln^2 x+5\ln x-6 = 6$
- $\ln^4-\ln^2 x = 0$
- $\ln^2 x+\ln x+12 = 0$
- $\ln^3+\ln^2 x + 2\ln x = 0$

**Exercice d'application**

On considère le polynôme P défini par : $P(x) = x^3+2x^2-5x-6$

1- Calculer P(-1)

2- Ecrire P(x) sous forme d'un produit de deux polynômes

3- Résoudre dans IR les équations :

a- $P(x) = 0$

b- $(\ln x)^3+2(\ln)^2-5\ln x = 6$

### 2. Les Inéquations

Résoudre les inéquations comportant ln revient à utiliser le même procédé que la précédente partie :

- ✓ Déterminer le domaine d'existence
- ✓ Ramener sous forme $\ln a < \ln b$

**$b_1$- Les inéquations de type $\ln U > k$ ou $\ln U < k$**

Exemple : $\ln(2x+6) < 0$ ; $\ln(2x+6)>0$ ; $1-\ln(x)> 0$ ; $\ln(3x+2)\leq 5$

**$b_2$- Inéquations du type $\ln U < \ln V$ ou $\ln U > \ln V$**

Exemple : $\ln(3x+6) < \ln(2x-1)$ ; $\ln x + \ln(x+1) < \ln x$ ; $\ln(2x+6) < \ln(-x-1)$ ; $\ln(4x-3) < \ln(x+1)$

**$B_3$- Utilisation d'inconnu Auxiliaire**

Exemple : $-4\ln^2x+8\ln x-4$ ; $-\ln^3+ \ln^2 + 2\ln x\leq 0$

**f) Représentation graphique**

**1- Limites de référence de la fonction ln**

$*\lim\limits_{x\to 0^>}(\ln x) = -\infty$ ; $*\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x) = +\infty$ ; $*\lim\limits_{x\to 0^>}(x\ln x) = 0$ ;

$*\lim\limits_{x\to +\infty}(\frac{\ln x}{x}) = 0$ ; $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{\ln x}{x-1}) = 1$ ; $*\lim\limits_{x\to 0^>}(\frac{\ln(x+1)}{x}) = 1$

**Exemple :** Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(4x+5)$ ; $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(\frac{x+2}{x-1})$ ; $\lim\limits_{x\to +\infty} [2x+\ln x]$

### 3- Dérivée

La dérivée de la fonction ln(x) est $\frac{1}{x}$

- Détermination de la dérivée d'une fonction composée avec ln : la dérivée d'une fonction composé avec ln est $(\ln U)' = \frac{U'}{U}$

**Exemple :** Dans chacun des cas suivants déterminer la dérivée de f puis dresser son tableau sur son $D_f$ :

a) $f(x) = \ln(x+1)$

b) $g(x) = 2x+\ln(x+2)$

c)h(x) = ln(4x+3)

**Solution**

a) f(x) = ln(x+1)

$f'(x)= \frac{U'}{U}$

f'(x) = [ln(x+1)]'

$f'(x) = \frac{(x+1)'}{(x+1)}$ → $\mathbf{f'(x) = \frac{1}{(x+1)}}$

b) g(x) = 2x+ln(x+2)

g'(x) = [2x+ln(x+2)]'

$g'(x) = 2+\frac{(x+2)'}{(x+2)}$

$\mathbf{g'(x) = 2 + \frac{1}{x+2}}$

c) h(x) = ln(4x+3)

h'(x) = [ln(4x+3)]'

$h'(x) = \frac{(4x+3)'}{(4x+1)}$

$\mathbf{h'(x) = \frac{4}{4x+3}}$

**4- Représentation graphique de la fonction ln**

Récapitulatif :

$D_f$ = ]0 ; +∞[

$\lim\limits_{x \to 0^>} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

**Dérivée :** $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

**Variation :** $\frac{1}{x} > 0$ alors la fonction lnx est strictement croissante

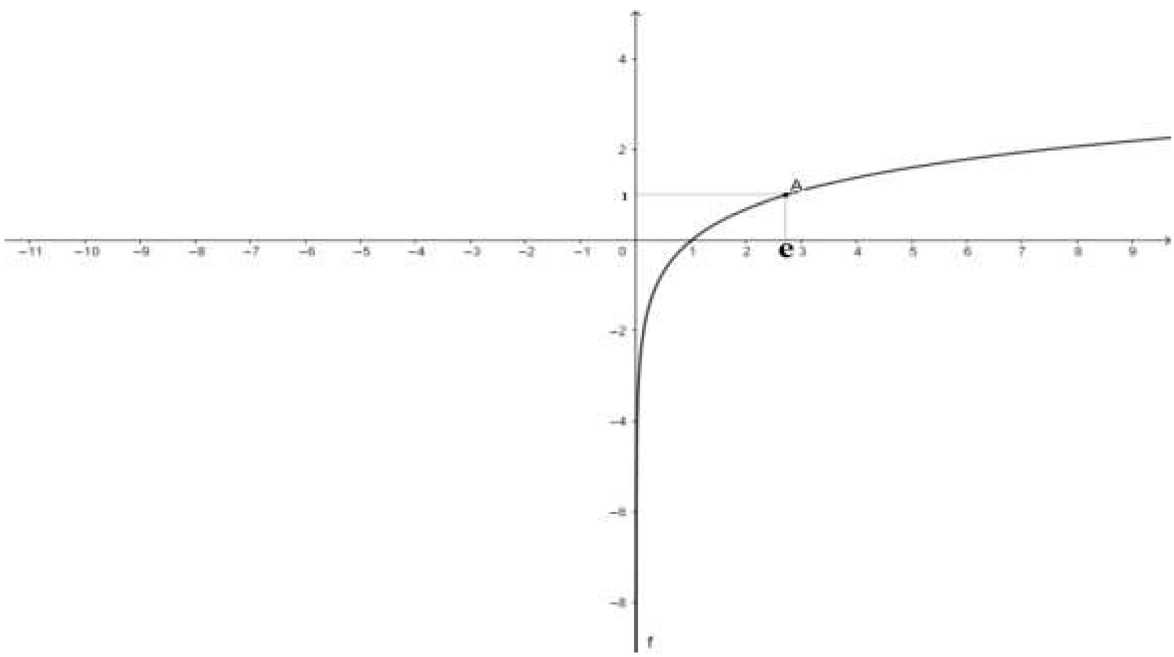
**Asymptote :** la droite (D) : X = 0 est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction lnx.

Les points clés : lnx = 0 → x = 1 ; lne = 1

Tableau de variation :

| X | 0 | 1 | e | +∞ |
|---|---|---|---|---|
| f'(x) | ‖ + | + | + | |
| f(x) | ‖ -∞ | 0 | 1 | +∞ |

**Courbe représentative :**




**C. fonction exponentielle**

**1- définition et propriété**

**Définition :** On appelle fonction exponentielle népérienne la bijection réciproque de la fonction logarithme népérienne. Elle est définie sur IR et est notée : Exp(x) ou $e^x$

Elle est dérivable sur IR et sa dérivée est $(e^x)' = e^x$

**Propriété :** $\forall x \in$IR, $e^x > 0$

$\forall y \in IR_+^*$, $e^x = y \rightarrow x = \ln y$

**Exemple :** $e^x = 2 \rightarrow x = \ln 2$ ; $e^x = 3 \rightarrow x = \ln 3$

$e^x = -1 \rightarrow$ impossible ; $e^x = 0 \rightarrow$ impossible

**a- Domaine de définition d'une fonction composée avec exponentielle**

La fonction $e^U$ existe si et seulement si la fonction U existe.

**Exemple :** Déterminer le domaine de définition de :

a) $f(x) = e^{x^2+1}$ ;  b) $g(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$ ;  c) $h(x) = e^{-x}$

**b- Variation et conséquences**

La fonction exponentielle est strictement croissante.

$\forall a,b \in IR$, $e^a = e^b \leftrightarrow a = b$

$e^a < e^b \leftrightarrow a < b$

$e^a > e^b \leftrightarrow a > b$

**c- Propriétés algébriques**

$\forall a,b \in IR$, et $r \in Q$, on a :

1) $e^a e^b = e^{a+b}$
2) $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
3) $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$
4) $(e^a)^r = e^{ra}$

**IV. Equation – Inéquations**

**a- Equations**

Résoudre les équations comportant exponentielles revient à utiliser les propriétés algébriques et la propriété $e^x = y \rightarrow x = \ln y$

**Exemple :** Résoudre dans IR, les équations et inéquations :

| | |
|---|---|
| 1- $e^{x+1} = 2$ | 5- $e^{x+3} = e^{2x-4}$ |
| 2- $e^{x+3} = 6$ | 6- $e^{x+3} = e^{2x-4}$ |
| 3- $e^{2x} = 4$ | 7- $e^{x^2} = e$ |
| 4- $e^{2x+1} = 2$ | 8- $e^{x^2} = e^{x+2}$ |

**b. inéquations**

Résoudre dans IR :

| | |
|---|---|
| 1) $e^x > 2$ | 4) $e^{x+1} < e$ |
| 2) $e^{x+1} < 1$ | 5) $2e^x < 1$ |
| 3) $e^{x+1} > e^{2x-2}$ | 6) $e^{x^2} \geq 6$ |

**c. Equations- Inéquations polynômiales**

Ce sont les équations et inéquations du type : $ae^{2x}+be^x+c = 0$; $ae^{2x}+be^x+c \geq 0$
Pour résoudre ces types d'équations, on procède à un changement de variable en posant

$X = e^x$. Ce changement de variable nous permet de les ramener sous la forme des équations et inéquations du 2nd degré.

**Exemple :** Résoudre dans IR :

a) $e^{2x} - e^x - 6 = 0$
b) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$
c) $e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$
d) $e^{2x+2} + e^{x+1} - 2 = 0$
e) $e^{2x} - e^x - 6 \geq 0$
f) $e^{2x} + e^x - 2 \leq 0$

**Exercice d'application**

Soit $P(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$

a) Calculer p(-1)
b) Déterminer les réels a, b et c tels que $p(x) = (x+1)(ax^2+bx+c)$
c) Résoudre $p(x) = 0$
d) En déduire les solutions de $2e^{2x} - e^x - 5 - 2e^{-x} = 0$

## V. étude graphique de la fonction exponentielle

### a- Dérivée de la fonction exponentielle

Soit $f(x) = e^x$. La dérivée de la fonction f est : $f'(x) = e^x$

### b- Dérivée de la fonction composée

Soit $g(x) = e^{U(x)}$

La dérivée de la fonction composée g est $g'(x) = U'e^{(x)}$

**Exemple :** Dériver les fonctions suivantes :

a) $F(x) = e^{-x}$

b) $F(x) = e^{4x}$

c) $f(x) = e^{x^2+1}$

d) $f(x) = e^{x^2+2x-1}$

### c- Etude des limites

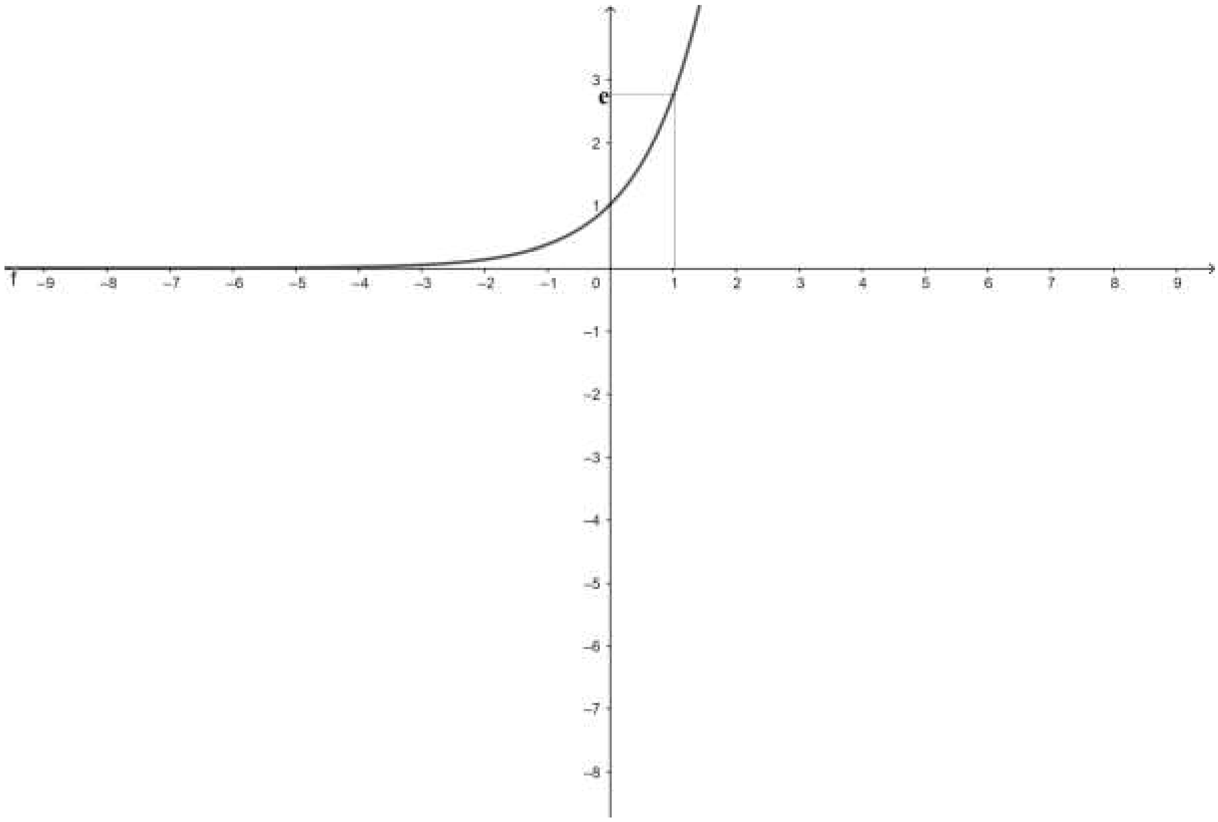
**→ Limites de référence**

*$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ ; *$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ ; *$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right) = +\infty$; *$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = 0$ ; *$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x} = 1$

**→ Graphe de la fonction exponentielle**

Tableau de variation

| X | -∞ | 0 | 1 | + ∞ |
|---|---|---|---|---|
| $(e^x)'$ | + | | | |
| $e^x$ | 0 | 1 | e | + ∞ |



f
e

## CHAPITRE 3 : PROBABILITE

### I. dénombrement

#### a- cardinal d'un ensemble

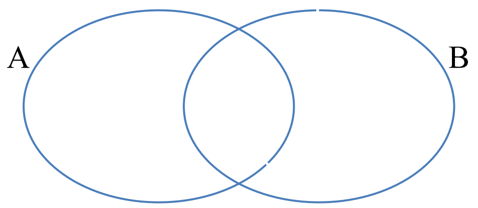
**Définition :** Le cardinal d'un ensemble est le nombre d'élément que contient cet ensemble.

**Exemple :** Soit E = {1, 2, a, b,$\alpha, \beta$ } → CardE = 6

CardT$A_4$ = 53 élèves

#### b- Reunion de deux Ensembles

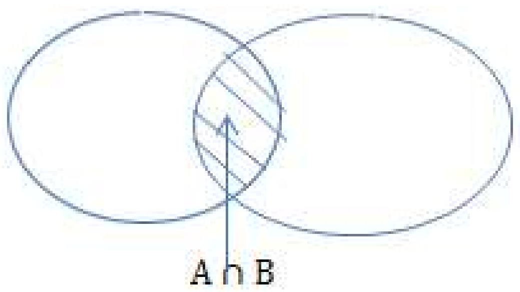
On appelle réunion de deux ensembles A et B note AUB. L'union des cardinaux des ensemble A et B. Card(AUB) = CardA + CardB.




**Exemple :** Soit A= {1, 2, 3, b}    b= { $\alpha, \beta, \gamma$}
AUB = {1, 2, 3, b,$\alpha, \beta, \gamma$ }

#### c- Intersection de deux ensembles

On appelle l'intersection de deux ensembles, l'ensemble des éléments qui appartiennent et à l'ensemble A et à l'ensemble B. On la note A∩ B.




**Exemple :** Soit A = {1 ; 2 ; a ; b ; a; $\beta$}

B = {4 ; a ; $\beta$ ; $\gamma$ }

A∩ B = {a;  }

On a plus généralement :

Card (AUB) = CardA + CardB – Card (A∩ B)

**Exercice d'application**

Dans un groupe d'individus, 45 aiment le cinéma, 30 le sport, et 10 à la fois le sport et le cinéma. Calculer le nombre d'individus dans ce groupe.

**Exercice d'application 2**

On interroge 50 enfants à propos du sport qu'ils pratiquent : 25 pratiquent le football ; 22 le tennis et 16 le basketball. 5 pratiquent les 3 sports, 12 pratiquent le foot et le basket. 8 pratiquent le tennis et le basket et 7 pratiquent le tennis et le football.

Peut- on affirmer que chacun de ces enfants pratiquent au moins un de ces sports ?

Déterminer le nombre :

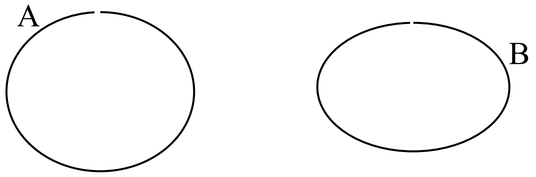
a) Qui pratiquent uniquement le football
b) Qui ne pratiquent pas le football.
c) Qui pratiquent le tennis et le basket, mais ne pratiquent pas le football.

**d- Complémentaire d'un Ensemble**

Deux ensembles A et $\overline{A}$ sont complémentaires lorsque l'union (réunion) des deux forment un seul ensemble E. CardE = CardA+ Card$\overline{A}$.

**e- Ensemble disjoints**

Deux ensembles A et B sont disjoints lorsque les éléments de A n'appartiennent pas à B. Card(A∩B) = 0




**II. Outils d'Analyse Combinatoire**

**a- Arbre de decision**

Exemple$_1$: un buffet est compose de 3 entrées; 5 résistances et 4 déserts.
Combien de plats différents comportant une entrée, une résistance et un désert peut- on former ? Utiliser l'arbre de décision.
Exemple$_2$: Une femme a dans sa garde-robe deux jupes, 3 chemises et de vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste. Déterminer à l'aide d'un arbre le nombre de manières différentes de s'habiller en utilisant un arbre de décision.

**b- Tableau à double Entrée**

Un tableau à double entrée est un tableau qui permet d'avoir un résultat composé de deux éléments appartenant à deux ensembles différents. A×B est l'ensemble des éléments (a, b) où a∈A et b∈ B.
Card (A×B) = CardA× CardB.
Exemple: 8 amis vont à une soirée et devaient être accompagnés chacun de son épouse. A la dernière minute, une des femmes est indisponible et ne peut accompagner son mari.
A l'ouverture de la soirée, ils forment des couples pour danser.

a) Combien de possibilités a-t-on de former des couples ?
b) Combien a-t-on de possibilité de former des couples tels qu'aucun homme ne danse avec sa femme ?

**c- P-uplet ou p-liste**

Soit E un ensemble non vide ayant n éléments, p un entier naturel non nul. Une p-liste ou

p-uplet d'élément de E est une suite de p élément de E.
Le nombre de p-liste de E est $n^p$.
Dans le cadre usuel, un p-liste se traduit par un tirage successif avec remise de p objets parmi n objets.
Exemple$_1$ : Combien y a-t-il de numéro de téléphone à 8 chiffres commençant par un 6 ?
Exemple$_2$ : Au loto sportif, on coche l'une des trois cases du bulletin pour chacun des 18 matchs sélectionnés.
Quel est le nombre total de choix possible pour un jeu.

**d- Arrangement**

Soit E un ensemble non vide à n élément et p un entier naturel inférieur à n. Un arrangement de p éléments de E est une suite ordonnée de p élément de E tous ordonnés.
Le nombre d'arrangement est : $\mathbf{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$
Dans le cadre usuel, un arrangement se traduit par un tirage successif sans remise de p élément parmi n éléments.
Par convention : $A_n^0 = 1$
Exemple : Une course de chevaux comporte 20 chevaux portant les numéros 1 à 20.

- Combien de tiercé dans l'ordre peut- on obtenir ?
- Combien de mot (ayant un sens ou non) de 5 lettres distincts peut-on former en utilisant les lettres de l'alphabet français ?
- Une urne contient 10 boules. On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne. Combien de résultats distincts peut- on obtenir ?

**e- Permutation**

Une permutation d'éléments E est une suite ordonnée de tous les éléments de E.
Une permutation de n éléments est : n!   $A_n^n = n!$
n! : factoriel de n.
Exemple : Combien y a-t-il de possibilité de faire asseoir 7 personnes sur 7 chaises ?
Combien d'anagrammes peut- on former avec les mots : TERMINALE ?

**f- Combinaison**

Soit E un ensemble de n élément et p un entier naturel tels que $p \leq n$.
Une combinaison de p éléments pris parmi n éléments est :
$\mathbf{C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{A_n^p}{p!}}$
Dans le cadre usuel, une combinaison introduit la notion du tirage simultanée de p éléments parmi n éléments.
Exemple$_1$ : Déterminer le nombre de comité de 3 personnes que l'on peut élire dans une assemblée de 20 personnes.
Exemple$_2$: On tire simultanément et au hasard 6 boules de 49 boules distinctes. Combien y a-t-il de résultat possible ?
→ **Principe de somme et produit** : Dans un jeu de 32 cartes, on choisit 5 cartes simultanément et au hasard (l'ensemble de ces 5 cartes est appelé mains).
Déterminer le nombre de main

a) Total
b) Qui contiennent exactement '3as'
c) Qui contienne au moins '1as'

Solution

Données : n= 32 cartes ; p = 5 cartes
Déterminons :
a- Le nombre total est : $C_{32}^5 = \frac{32!}{5!27!} = 201376$

b- Le nombre de mains qui contienne exactement 3as est :
$C_4^3.C_{28}^2$ = 1512

c- Le nombre de mains qui contienne au moins un as est :

$C_4^1.C_{28}^4 + C_4^2.C_{28}^3 + C_4^3.C_{28}^2 + C_4^4.C_{28}^1$
D'une manière littérale, le mot 'ou' se traduit par une somme et le mot 'et' se traduit par un produit.
**Exemple :** On tire au hasard une main de 6 mains d'un jeu de 32 cartes.

1- Donner le nombre de mains total qu'on peut obtenir.
2- Donner le nombre de mains ayant exactement deux piques.
3- Donner le nombre de mains ayant 4 as.
4- Donner le nombre total de mains ayant au moins deux trèfles.

## III. probabilité

### 3.1. Vocabulaire en Probabilité

**Expérience ou variable aléatoire :** C'est une expérience dont on ne peut prévoir l'issue avant qu'elle n'ait été complètement réalisée.
**Univers des possibilités :** L'ensemble de tous les résultats possibles à l'issue d'une expérience aléatoire.
**Evénement :** C'est une partie de l'univers. C'est-à-dire l'ensemble des éventualités de l'expérience aléatoire.
**Evénement certain** : C'est l'univers de l'expérience aléatoire c'est-à-dire l'évènement qui est réalisé à l'issue de l'expérience. On le note souvent Ω.
**Evénement Impossible :** C'est un évènement qui ne peut être réalisé à l'issue de l'expérience est noté ∅.
**Evénement élémentaire :** C'est un évènement n'ayant qu'une seule éventualité. Soient A et B deux évènements d'une expérience aléatoire.

- On dit que A est inclut dans B ($A \subset B$) si toute réalisation de A entraine la réalisation de B.
- On note $A \cap B$ l'évènement intersect des évènements A et B, et est l'évènement pour lequel A et B sont à la fois.
- On note AUB l'évènement réunion des évènements A et B pour lequel l'évènement A est réalisé ou B est réalisé.
- A et B sont deux évènement incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
- On dit que E et B sont deux évènements contraires si B est l'ensemble des éventualités pour les quels A n'est pas réalisé. $B = \overline{A}$
- A et B sont indépendants si la réalisation de l'un n'influence pas la réalisation de l'autre.

Exemple : On lance un dé et on s'intéresse au numéro porté sur la face supérieure du dé.

1- Quel est le cardinal de l'univers Ω ?
2- On note A l'évènement obtenir 'un nombre paire'. Quel est le cardinal de A ?
3- On note B l'évènement obtenir 'un nombre à deux chiffres'. Quel est le cardinal de B ?
4- 'C', est l'évènement obtenir un nombre inférieur à 10. Quel est le cardinal de C ?
5- Définissez l'évènement $\overline{A}$ et donnez le cardinal de A.
Solution
1- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow Card\ \Omega = 6$

2- $A = \{2, 4, 6\} \rightarrow cardA = 3$
3- B est un évènement impossible ; CardB = 0.
4- ‘C’, est un évènement certain donc $CardC = Card\Omega = 6$
5- $\overline{A}$ est l'évènement obtenir un nombre impaire ; son cardinal est $Card\overline{A} = 3$.

Exemple$_2$ : 1-On tire simultanément et au hasard 4 jetons d'un sac opaque contenant 32 jetons indiscernable au toucher, numérotés de 1 à 32.
Soit Ω, l'univers associé à cette épreuve. Calculer CardΩ.

2-Soit A l'évènement obtenir exactement 3 jetons dot les numéros sont inférieurs ou égaux à 9. Calculer CardA.

3-Définir $\overline{A}$ puis en déduire $Card(\overline{A})$

**3-2 Probabilité d'un évènement**

Soit une expérience aléatoire dont l'univers est définie et est noté Ω. En supposant que les évènements élémentaires sont équiprobables, la fréquence de réalisation de A est appelée la probabilité que l'évènement A soit réalisé est

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\mathbf{CardA}}{\mathbf{Card\Omega}} = \frac{\textbf{Nombre de cas favorable à la realisation de A}}{\textbf{Nombre de Cas possibles}}$$

- La probabilité d'un évènement incertain est P (∅)= 0
- La probabilité d'un évènement Certain est P (Ω) = 1

**Bibliographie**


- CIAM terminale Littéraire, Edicef 2006
- Excellence en Mathématique Terminale A, S, E, NMI Education 2014

**Partenariat**
Lycée Saint François Xavier
Label 109

Livret à ne pas vendre

**Contact**
info@label109.org

Télécharger gratuitement les applications et livres numériques sur le site:
http://www.tchadeducationplus.org

Mobile et WhatsApp: 0023566307383

Rejoignez le groupe: https://www.facebook.com/groups/tchadeducationplus