PHYSIQUE

TD

PHYSIQUE

Terminale D

CHAPITRE I : CINÉMATIQUE

A- Introduction

Les notions du repère, de trajectoire, de vecteur vitesse,…vous sont familières depuis la classe de seconde.
Après les avoir rappelées et décrites de façon analytique, ce chapitre introduit une grandeur nouvelle : le vecteur accélérateur.
Ce concept joue un rôle fondamental en mécanique, tant au niveau de la description des mouvements (la cinématique) que leur prévision théorique à partir des forces (la dynamique).

1- NOTION DE REFERENTIEL ET DE REPERE

a. **référentiel** : la trajectoire d'un mobile dépend du référentiel par rapport auquel on décrit le mouvement. En mécanique, on choisit le référentiel en fonction de l'étude que l'on veut faire et de façon que les lois de la physique s'y appliquent.
La terre est un bon référentiel pour les études des mouvements de courte durée faites au voisinage de la surface terrestre.

b. **Repère d'espace :** Pour décrire avec précision la trajectoire d'un mobile, on utilise un repère que l'on rattache au référentiel.
Un repère est l'association :
- D'un point o fixé au référentiel ;
- D'une base composée de trois vecteurs unitaires. Le repère s'écrit donc : $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

2- REPERAGE DE TEMPS

Qu'est-ce que le temps ?
Le temps est une grandeur difficile à définir ; il est depuis toujours sujet à beaucoup de réflexions poétiques et philosophiques. En fait, le temps est perceptible par son écoulement et on le mesure avec une très grande précision.
Il faut distinguer deux aspects de la mesure de temps :
- La notion d'instant t (ou la date) où un évènement se produit ;
- La notion de la durée d'un phénomène : c'est l'intervalle de temps qui s'écoule entre son début et sa fin

NB : l'unité S.I de temps est la seconde (s).

B- Position d'un mobile.

1- Trajectoire d'un mobile

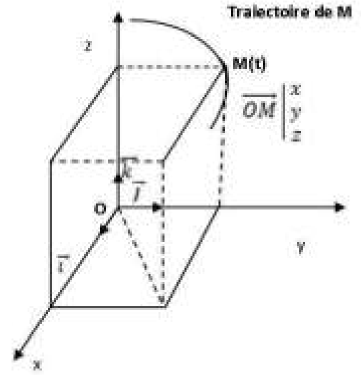
Un mobile m se déplaçant dans l'espace et par rapport à un repère déterminé, prend différentes positions. L'ensemble de ces différentes positions constitue **la trajectoire du mobile**.

3- REPERAGE EN COORDONNEES CARTESIENNES.

a- CHOIX D'UNE ORIGINE DES TEMPS ET DES « ESPACES »

Il faut choisir avant toute chose :
- Une origine des temps (t = 0) correspondant à un évènement donné, en général, c'est le début de l'expérience ou le début du mouvement ;
- Une origine des « espaces » : le point 0 attaché au référentiel

b-) Les coordonnées cartésiennes et les équations horaires
Pour décrire le mouvement d'un point mobile M, il faut donner, à chaque instant t, sa position par rapport au repère $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$



On définit alors le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ du mobile qui s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \;\; ou \;\; encore \;\; \overrightarrow{OM}(x; y; z)$$

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ détermine la position du mobile M à chaque instant.

Les coordonnées x, y, z dépendent du paramètre temps. L'ensemble des fonctions

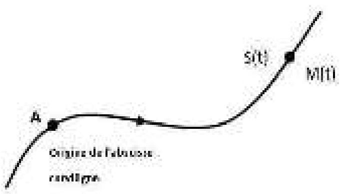
$$\begin{cases} x = \mathrm{f(t)} \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases} \qquad \text{avec t} \in \text{D}$$

Constitue **l'équation horaire** du mouvement du mobile M. Ce sont les fonctions paramétriques du temps qui sont définies sur un ensemble de définition D donné du temps

4- <u>Repérage en abscisse curviligne</u>
Soit un mobile se déplaçant le long d'une trajectoire donnée ; il est en M à la date t. Une origine des « espaces » a ayant été fixée sur la trajectoire et un sens de parcours ayant été choisi, on définit l'abscisse curviligne s du mobile par la valeur algébrique de l'arc $\widehat{AM}$

S= mes($\widehat{AM}$)
L'abscisse curviligne est une fonction paramétrique du temps et s'écrit :

$S(t) = f(t)$ avec t ϵ D

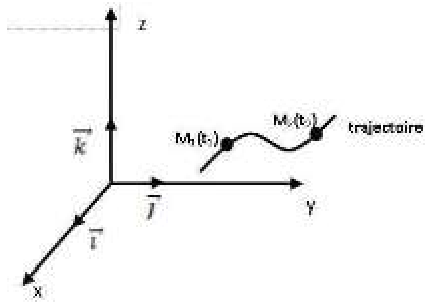


C- <u>Vecteur vitesse</u>

1- Vitesse moyenne

Soit M_1 et M_2, les positions respectives du mobile aux instants des dates t_1 et t_2. La vitesse moyenne du point M est donnée par la relation :

$$\vec{V}_{moy} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1}$$



D- VECTEUR VITESSE INSTANTANEE

- **Définition** : le vecteur vitesse instantanée est défini comme

$$\vec{V} = \lim_{t_2 \to t_1}\left(\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1}\right) = \lim_{t_2 \to t_1}\left(\frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1}\right) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Finalement $$\boxed{\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}$$

Le vecteur vitesse v d'un mobile ponctuel M est dérivée par rapport au temps de son vecteur position OM

NB : le vecteur vitesse d'un mobile est tangent à sa trajectoire.

- **Son expression en coordonnées cartésiennes**

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{\mathrm{d}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(x\vec{i}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(y\vec{j}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(z\vec{k})$$

Puisque $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs constants, on aura :

$\vec{V} = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}\vec{i} + \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}\vec{j} + \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}}\vec{k}$ Or $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = Vx$; $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = Vy$ et $\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}} = Vz$

D'où

$$\boxed{\vec{V} = Vx\vec{i} + Vy\vec{j} + Vz\vec{k}}$$

Exemple : la position d'un point est donné à chaque instant dans le repère $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ par les équations paramétriques $\begin{cases} x = 2t \\ y = 2t + 3 \\ z = 0 \end{cases}$

Calculer les composantes et l'intensité du vecteur vitesse aux $t_1 = 0s$ et $t_2 = 1s$.

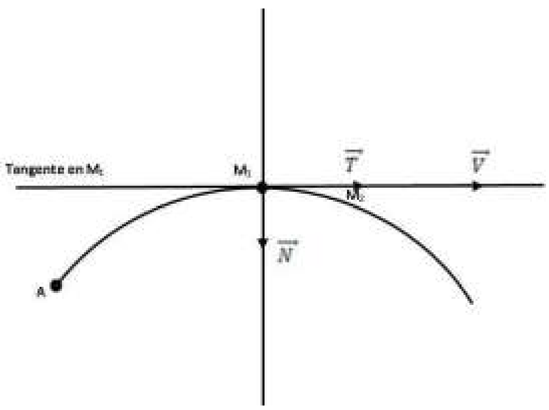
Solution

$\overrightarrow{OM} = 2\vec{\imath} + (t^2 + 3)\vec{\jmath}$

$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(2t\vec{\imath} + (t^2 + 3)\vec{\jmath}) = \left| \begin{array}{l} V_x = 2 \\ V_y = 2t \\ V_z = 0 \end{array} \right.$

à $t = 0$ $\quad V(0) = \begin{cases} 2 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$ $\qquad$ à $t = 1s$ $\quad V(1) = \begin{cases} 2 \\ 2 \\ 0 \end{cases}$ $\quad => \; V = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}\, m/s$

E- Son expression dans la base de Frenet



DEFINITION DE LA BASE DE FRENET

Soit $\vec{N}$ et $\vec{T}$ deux vecteurs unitaires liés au mobile.

- Le vecteur $\vec{T}$ est tangent à la trajectoire en M_1 et orienté dans le sens des abscisses curvilignes S croissantes ;
- Le vecteur $\vec{N}$ est normal à la trajectoire en M_1 et orienté vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire.

Ces deux vecteurs constituent une base locale appelée **base de Frenet**.

- **Expression du vecteur vitesse en M_1**

Sur le parcours M1M2, la vitesse moyenne vaut :

$$V_{moy} = \frac{mes\widehat{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \frac{dS}{dt}$$

On obtient la vitesse instantanée ou vitesse à l'instant t_1 par passage à la limite :

$$V_1 = \lim_{dt \to 0} \frac{dS}{dt}$$

Cette limite représente la dérivée par rapport au temps, de l'abscisse curviligne.

D'où

$$V_1 = \frac{dS}{dt} \qquad où \qquad \overrightarrow{V_1} = \frac{dS}{dt}\vec{\tau}$$

Dans la base de Frenet, les composantes de V sont :

$$\vec{V} \left| \begin{array}{l} V_T = \frac{dS}{dt} \\ V_N = 0 \end{array} \right.$$

F- LE VECTEUR ACCELERATION

L'accélération caractérise la variation du vecteur vitesse pendant une durée donnée.

a- Vecteur accélération moyenne $\boldsymbol{a_m}$

On définit le vecteur accélération moyenne $\boldsymbol{a_m}$ du mobile, par la relation :

$$\boxed{\vec{a}_m = \frac{\vec{V}_2 - \overrightarrow{V_1}}{t_2 - t_1}}$$

b- Vecteur accélération instantanée

Le vecteur accélération instantanée représente le vecteur dérivé par rapport au temps du vecteur vitesse. Il représente aussi le vecteur dérivé second par rapport au temps du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

c- SON EXPRESSION EN COORDONNEES CARTESIENNES

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(Vx\vec{\imath} + Vy\vec{\jmath} + Vz\vec{k})$$

$$= \frac{\mathrm{d}(Vx\vec{\imath})}{\mathrm{dt}} + \frac{\mathrm{d}(Vy\vec{\jmath})}{\mathrm{dt}} + \frac{\mathrm{d}(Vz\vec{k})}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}\right)\vec{\imath} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}\right)\vec{\jmath} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}}\right)\vec{k} = \frac{d^2x\vec{\imath}}{dt^2} + \frac{d^2y\vec{\jmath}}{dt^2} + \frac{d^2z\vec{k}}{dt^2}$$

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = \frac{\mathrm{d}(V_x)}{\mathrm{dt}} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \frac{\mathrm{d}(V_y)}{\mathrm{dt}} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z = \frac{\mathrm{d}(V_z)}{\mathrm{dt}} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

Exemple : dans le repère $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, la position d'un point M est définie à chaque instant par :

$$\overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} X = 2t \\ y = t^3 \\ Z = 0 \end{array} \right.$$

Calculer les composantes et l'intensité du vecteur accélération aux t = 0s et t = 1s

Solution :

Composantes et intensité de $\overrightarrow{a}$:

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = \frac{\mathrm{d(V_x)}}{\mathrm{dt}} = \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ a_y = \frac{\mathrm{d(V_y)}}{\mathrm{dt}} = \frac{d^2y}{dt^2} = 6t \\ a_z = \frac{\mathrm{d(V_z)}}{\mathrm{dt}} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

Son intensité : $a = \sqrt{6t}$

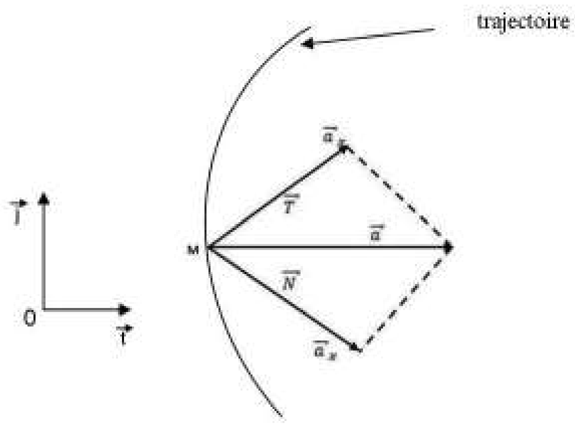
À t = 0, a(0) = 0m/s ; à t = 1s $a(1) = 6\ m/s$

d- <u>VECTEUR ACCELERATION DANS LA BASE DE FRENET</u>

Dans la base de Frenet (T, N) et par rapport au repère d'espace $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on a :

$$\vec{a} = a_{\vec{N}} + a_{\vec{\tau}}$$

et on démontre que :



$a_T = \frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dt}}$ accélération tangentielle

$a_N = V^2/R$ accélération normale

R est le rayon de courbure.

Puisque V^2/R est positif, l'accélération est toujours positive, donc : ***le vecteur accélérateur est toujours dirigé vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire***.

Remarque : en fonction de l'abscisse curviligne, les composantes du vecteur accélération sont :

$$a_\tau = \frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dt}} = \frac{d^2S}{dt}$$

$$a_N = \frac{V^2}{R} = \frac{1}{S}\left(\frac{dS}{dt}\right)^2$$

e- Mouvement uniformément varié

Par définition, un mouvement est uniformément varié quand la mesure algébrique de l'accélération tangentielle (a_T) reste constante.

- Si le mouvement est accéléré alors le produit scalaire $\vec{a}.\ \vec{v} > 0$
- Si le mouvement est retardé (décéléré), le produit scalaire $\vec{a}.\vec{v} < 0$
- Si le mouvement est uniforme, le produit scalaire $\vec{a}.\ \vec{v} = 0$

$a = 0 \Rightarrow$ constante $\Rightarrow$ mouvement uniforme
$a \neq 0$ et $\vec{v}$ est perpendiculaire à $\vec{a}$

E- APPLICATION DE LA CINEMATIQUE A QUELQUES MOUVEMENTS PARTICULIERS

1- MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME

a. Définition

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne uniforme :

- Si sa trajectoire est une droite ;
- Si la vitesse V reste constante

b. Équation cinématique du mouvement rectiligne uniforme

Soit le repère (o, $\vec{\imath}$), le vecteur vitesse

$$V = \text{constante} = V_x\vec{\imath} = V_{ox}\vec{\imath}$$

$V_{ox} = \frac{dx}{dt}$ La primitive de V_{ox} est $x = V_{ox}\vec{\imath} + k$

Conditions initiales : si à $t = 0$, $x = x_0 = 0 + k \Rightarrow k = x_0$

D'où

$\boxed{X = V_0 t + x_0}$ Loi horaire du mouvement rectiligne uniforme

Dans un mouvement rectiligne uniforme, l'abscisse est une fonction affine du temps

2- MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORMEMENT VARIE

<u>Définition :</u> Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié si son vecteur accélération est constant, donc $a = a_0$ = constante

a- <u>Loi horaire</u>

Soit le repère (o, i) choisi sur la trajectoire rectiligne du mobile

$a = \frac{dV}{dt}$ = constante, V est donc de la forme $V = at + k$

à $t = 0$, $V = V_0 = 0xt + k \Rightarrow k = V_0$

D'où

$\boxed{v = at + v_0}$

$V = \frac{dx}{dt} = at + V_0$, l'abscisse x est de la forme $x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + k$

k étant une constante qui dépend des conditions initiales

à $t = 0$, $x = x_0 = \frac{1}{2}ax0 + V_0x0 + k$; $x_0 = k$

d'où

$$\boxed{X = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0}$$

Loi horaire du mouvement rectiligne uniformément varié

Cas particulier : si V_0 et X_0 sont nuls, les équations se simplifient :

$V = \frac{1}{2}at^2$ et $x = \frac{1}{2}at^2$

Remarque : en dérivant x deux fois par rapport au temps, on obtient d'abord V puis a :

$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}at^2 + V_0t + x_0)$

$\frac{dx}{dt} = at + V_0 + 0 = V$

$d^2x/dt^2 = a + 0 = a$

C- Quelques relations importantes

$X = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + x_0$ (1)

$V = at + V_0$ => $t = \frac{V - V0}{a}$ (2)

(2) dans (1) => $x = \frac{1}{2}\left(\frac{V-V0}{a}\right)^2 + V_0\left(\frac{V-V0}{a}\right) + X_0$

$$X = \frac{1}{2}a\frac{(V-V_0)^2}{a^2} + \frac{V_0V - {V_0}^2}{a} + X_0$$

$$= \frac{V^2 + V_0^2 - 2VV_0}{2a} + \frac{2(VV_0 - V_0^2)}{2a} + X_0$$

$$X - X_0 = \frac{V^2 + V_0^2 - 2VV_0 + 2VV_0 - 2V_0^2}{2a}$$

$$2a(x - x_0) = V^2 - V_0^2$$

$\boxed{2a\Delta x = \Delta V^2}$ Et on a aussi ⇒ $\boxed{\Delta V = a\Delta t}$

Exercices d'application

Exercice 1: à un instant initial, une moto démarre, son mouvement est rectiligne uniformément varié ; elle atteint la vitesse de 72km/h en 10s. Calculer la valeur de l'accélération de cette moto

Solution : à l'instant initial, $V_i = 0$, $V_f = 72km/h = 20m/s$

$\Delta V = a\Delta t$ => $V_f - V_i = a(t_f - t_i)$ $a = (V_f - V_i)/(t_f - t_i)$

AN: $a = (20 - 0)/(10 - 0) = 2m/s^2$

Exercice 2: sur une route rectiligne, un véhicule est animé d'une vitesse de 72km/h s'arrête sur 50m. Donner les caractéristiques de l'accélération supposée constante au cours du mouvement.

Solution : caractéristiques de l'accélération :

Soit (x'x) repère choisi sur la trajectoire

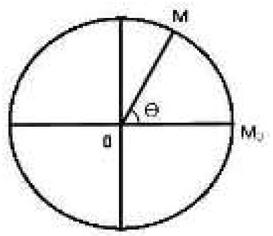
$\Delta V^2 = 2a_x\Delta x$ => $V_f^2 - V_i^2 = 2a(x_f - x_i)$ $ax = (V_f^2 - V_i^2)/2(x_f - x_i) = (0 - 400)/\ 2(50 - 0)$

$a_x = -4m/s^2$ ce qui signifie que l'accélération a la direction de x'x, son sens est contraire au mouvement. Sa norme est $a = 4m/s^2$

D- Mouvement circulaire uniforme

Définition : Un point mobile est animé d'un mouvement circulaire uniforme si sa trajectoire est un cercle et si sa vitesse a une valeur constante.

a) Etude de l'abscisse curviligne



Sur cette trajectoire, l'abscisse curviligne du mobile au point M :

S = $\widehat{M0M}$ et sa vitesse $V_s = \frac{dS}{dt} = V_0$ ⇒ la primitive de V_0 est

$\boxed{S = V_0T + S_0}$

b) Accélération

Dans la base de Frenet (tangentielle et normale), l'accélération s'écrit :

$\vec{a} = a_T\,\vec{T} + a_x\vec{x}$ avec $a_T = \frac{dVs}{dt} = 0$ et la valeur de l'accélération se réduit à :

$\vec{a} = a_x\vec{x}$ avec $a_x = \frac{v2}{R}$

Le vecteur accélération du mobile dans un mouvement circulaire uniforme est toujours dirigé vers le centre du cercle : ***il est dit centripète***.

c) **Etude des variations angulaires**

- abscisse angulaire :

C'est l'angle θ = $(\widehat{\overrightarrow{OM}_0\overrightarrow{OM}})$ (rad)

S = $\widehat{M_0M}$ et θ = $\widehat{M_0M}$/R = S/R

⇒ $\boxed{S = R.\theta}$

- **vitesse angulaire**

Comme S = R.θ avec R = constant, on a: $\frac{dS}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$, par définition, $\frac{d\theta}{dt}$ représente la vitesse angulaire de rotation du mobile notée ω

$\frac{d\theta}{dt}$ = ω, d'une part on sait que θ = S/R ; $\dot{\theta} = \frac{\dot{S}}{R}$ = Vs/R= ω

⇒ $\boxed{Vs = R.\omega}$

Pour un mouvement circulaire uniforme, la vitesse angulaire ω comme la vitesse curviligne Vs est constante.

La primitive de $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ est : $\boxed{\theta = \omega t + \theta_0}$ loi horaire du mouvement circulaire

Conditions initiales : si à t = 0 ; $\theta_0 = 0$ ⇒ θ = ωt

- **Accélération angulaire**

$\ddot{\theta} = \frac{d\omega}{dt}$ (rad/s^2)

Dans le cas du mouvement circulaire uniforme, ω est constante ⇒ $\theta = \frac{d\omega}{dt} = 0$

Toujours dans un mouvement circulaire uniforme, l'accélération angulaire comme l'accélération tangentielle est nulle mais le point possède une accélération normale

$a = \frac{V2}{R}$ et comme Vs = Rω ⇒ $a_n = \omega^2 R$

b- Période et fréquence

F- La période T est la durée nécessaire pour effectuer un tour, soit un angle θ = 2π

θ = 2π = ωT ⇒ $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$

- **La fréquence N est l'inverse de la période**

$$\boxed{N = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$$

d. <u>Mouvement rectiligne sinusoïdal</u>

Un mouvement est rectiligne sinusoïdal si son équation horaire est de la forme :

$$x(t) = \text{xm}\cos(\omega t + \varphi)$$

x(t) : élongation (mètre)

x_m : amplitude (ou élongation maximale) en mètre

ω : pulsation en rad/s

(ωt + φ) : phase du mouvement

Φ : phase à l'origine de temps

a. Position du mobile

Comme $\cos(\omega t + \varphi)$ ϵ [-1 ; 1] alors X ϵ [$-x_m$; x_m]. Le mobile se déplace entre les positions d'abscisses $-x_m$ et x_m, il a un mouvement de va et vient autour d'un point O.

- **Vecteur vitesse : V = $V_x\vec{i}$**

  $Vx = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\text{xm}\cos(\omega t + \varphi))$

  $Vx = -\omega \text{xm}\sin(\omega t + \varphi)$

Vx est extrémale si x = 0 (pour $(\omega t + \varphi) = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$)

Vx est nulle si $x = \pm \text{xm}$ (pour $(\omega t + \varphi) = k\pi$)

- **Accélération**

  $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{i} \Rightarrow ax = \frac{dVx}{dt} = -\omega^2 \text{xm}\cos(\omega t + \varphi)$ Or $\text{xm}\cos(\omega t + \varphi) = x$

⇨ $ax = -\omega^2 x \Rightarrow ax + \omega^2 x = 0$ or $ax = \ddot{x}$

⇨ $\underline{\boldsymbol{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}}$: c'est l'équation différentielle du mouvement sinusoïdal.

CHAP. 2 : MOUVEMENT DU CENTRE D'INERTIE D'UN SOLIDE

I- RELATION FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE

1- CENTRE D'INERTIE D'UN SOLIDE

a. Caractéristique d'un système

Un système est un ensemble des points matériels. Si la distance entre deux points quelconques, reste constante, ce système est indéformable et on lui donne le nom de ***solide***. La masse M d'un système est la somme de la masse m_i du système.

$$M = m_1 + m_2 + m_3 \dots + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

b. Centre d'inertie et barycentre d'un système

Un système a un centre d'inertie G. le centre d'inertie est appelé aussi barycentre ou centre de masse, ou encore centre de gravité.

$$\sum_{i=1}^{2} m_i \overrightarrow{GG_i} = \vec{0}$$

$m_1\overrightarrow{GG_1} + m_2\overrightarrow{GG_2} = \vec{0}$ (1)

Injectons le point O dans (1), il vient :

$$m_1(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OG_1}) + m_2(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OG_2}) = \vec{0}$$
$$m_1\overrightarrow{GO} + m_1\overrightarrow{OG_1} + m_2\overrightarrow{GO} + m_2\overrightarrow{OG_2} = \vec{0}$$
$$(m_1 + m_2)\overrightarrow{GO} + m_1\overrightarrow{OG_1} + m_2\overrightarrow{OG_2} = \vec{0}$$
$$-(m_1 + m_2)\overrightarrow{OG} + m_1\overrightarrow{OG_1} + m_2\overrightarrow{OG_2} = \vec{0}$$

⇨ $\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OG_1} + m_2\overrightarrow{OG_2}}{m_1 + m_2}$

2- QUANTITE DE MOUVEMENT D'UN SOLIDE

Le vecteur quantité de mouvement P d'un système solide est le produit de sa masse par le vecteur vitesse de son centre d'inertie.

$$\vec{P} = M\vec{V}_G$$

3- PRINCIPE DE L'INERTIE – REFERENTIEL GALILEEN

a- ÉNONCER DU PRINCIPE DE L'INERTIE

Un système isolé ou pseudo-isolé :

1) S'il est au repos, il conserve son état de repos ;
2) S'il est en mouvement, alors il est animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

b- REFERENTIEL GALILEEN

On appelle référentiel galiléen, un référentiel dans lequel le principe de l'inertie est vérifié.
On montre que tout référentiel en translation rectiligne par rapport à un référentiel galiléen est galiléen.

c- RELATION FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE (RFD)

Énoncé : dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle de toutes les forces extérieures appliquées à un solide est égale à la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement du solide à cet instant.

$$\sum \vec{f}ext = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

d- THEOREME DU CENTRE D'INERTIE

Énoncé : dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un solide est égale au produit de sa masse par le vecteur accélération de son centre d'inertie.

$$\sum \vec{f}ext = m\vec{a}_G$$

- **Cas particulier**

Si $\sum \vec{f}ext = \vec{0}$ => $m\vec{a}_G = \vec{0}$ => $\vec{a}_G = \vec{0}$ or $\vec{a}_G = \frac{d\vec{V}_G}{dt} = \vec{0}$

⇨ $\vec{V}_G =$ constante => G a un mouvement rectiligne uniforme
$\vec{V}_G = \vec{0}$ => G est au repos

e- THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE APPLIQUEE A UN SOLIDE EN TRANSLATION

Énoncé : dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un solide entre un état initial et un état final est égale à la somme des travaux des forces extérieures appliquées au solide à cet instant.

$$\Delta E_c = E_{cf} - E_{ci} = \sum W\vec{f}ext$$

f- UTILISATION PRATIQUE DE LA RFD

1) Vérifier que le référentiel considéré est galiléen ;
2) Préciser le système à étudier ;
3) Définir et analyser les forces extérieures, les représenter sur un schéma suffisamment clair
4) Préciser la relation liant les forces extérieures (théorème du Centre d'Inertie, RFD, théorème de l'Energie Cinétique) ;
5) Exploiter cette relation si elle est vectorielle, on l'utilise en projetant les vecteurs dans un système d'axes ;
6) En déduire éventuellement les conséquences cinématiques.

g- DYNAMIQUE DU MOUVEMENT UNIFORME

Soit le centre d'inertie G d'un solide qui se déplace d'un mouvement circulaire uniforme sur le cercle de centre O et de rayon R. En appliquant le théorème du centre d'inertie, le point G est soumis à n forces et on a :

$\sum_{i=1}^{n} \vec{f}ext = \vec{F} = m\vec{a}_G$ avec $\vec{a}_G = \vec{a}_n$

⇨ $\vec{F} = m\vec{a}_n$ puisque a_n est centripète, $\vec{F}$ l'est également

On lui donne le nom de **force centripète** Fc

$$\vec{F}c = m\vec{a}_n = \frac{mv^2}{R}\vec{n} = m\omega^2 R\vec{n}$$

Dans un référentiel galiléen, un mouvement circulaire uniforme est provoqué par des forces dont la somme vectorielle est la force centripète d'intensité

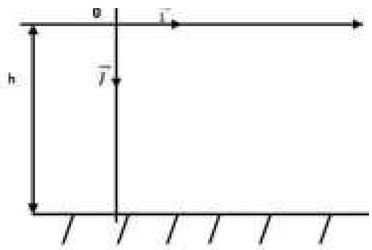
$$\boxed{Fc = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R}$$

h- APPLICATION DE LA RFD

Étude d'une chute libre : la chute libre est le mouvement d'un corps lâché sans vitesse initiale au voisinage de la terre et soumis à la seule action de son poids.

Position du problème : une bille d'acier tombe en chute libre à partir d'un point O situé à 5m du sol. Étudier le mouvement du centre d'inertie de la bille (l'équation horaire). Calculer le temps mis pour atteindre le sol. m = 50g ; h = 5m ; g = 10m/s^2

Solution



- **Repère descendant**

1) Référentiel : terre supposé galiléen
2) Repère (o, i, j)
3) Système : bille de masse m
4) Bilan des forces : le poids P

La RFD permet d'écrire :

$\sum \vec{f}ext = m\vec{a}_G \quad \Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a}_G <=> m\vec{g} = m\vec{a}_G$

$a_G = g <=> \; a_G = gj$

$\vec{a}_G = \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ \\ a_y = g \end{array} \right. \quad \vec{V}_G = \left| \begin{array}{l} V_x = 0 \\ \\ V_y = gt + V_0 t \;(avec\; V_0 = 0) \end{array} \right. \quad \overrightarrow{OG} = \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ \\ y = \frac{1}{2}gt^2 \end{array} \right.$

$y = \frac{1}{2}gt^2$ est l'équation horaire de la bille.

La date d'impact au sol :

$$y = h = 5m => \frac{1}{2}gt^2 = 5 => t = \sqrt{\frac{2h}{g}} => t = 1s$$

- Repère ascendant

RFD donne toujours : $P = ma_G \Rightarrow g = a_G$

$a_G = \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ \\ a_y = -g \end{array} \right. \quad V_G = \left| \begin{array}{l} V_x = 0 \\ \\ V_y = -gt + V_0 t \;(avec\; V_0 = 0) \end{array} \right. \quad OG = \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 \end{array} \right.$

i. Palet autoporteur

Un palet autoporteur de masse m est lâché sans vitesse initiale d'un point A, sur une table inclinée d'un angle α sur le plan horizontal.

1- On néglige les frottements

3) Déterminer les caractéristiques du vecteur accélération
4) Quelle est la nature du mouvement du centre d'inertie G du palet ?
5) Calculer la vitesse V du mobile en B après un parcours de longueur L.

2- En fait, sa vitesse en B est V'<V. en déduire la valeur de la force de frottements exercée par la table et supposée constante.

Données : m= 600g ; l=52cm ; V=0,94m/s ; α=6° ; g=9,8m/s

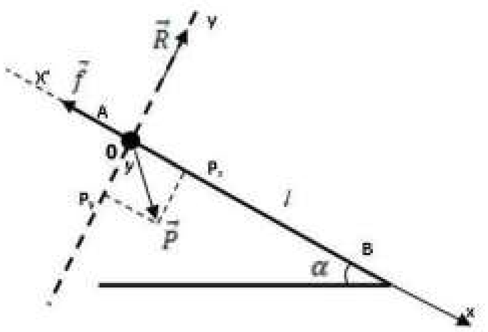
<u>Solution :</u>

Système : palet autoporteur

Référentiel terrestre supposé galiléen

Bilan des forces :

1) Le poids P
2) La réaction R de l'air pulsé



1) D'après la RFD

$$\sum \vec{f}ext = m\vec{a} => \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a} \ (1)$$

Soit l'axe x'x parallèle à la ligne de plus grande pente et y'y perpendiculaire à x'x

Projections de (1) sur les axes :

$$\left| \begin{array}{l} P_x + R_x = ma_x \\ P_y + R_y = ma_y \end{array} \right. => \left| \begin{array}{l} P\sin\alpha + 0 = ma_x \quad (2) \\ -P\cos\alpha + R = 0 \ \ (3) \end{array} \right.$$

Donc : $mg\sin\alpha = ma_x$, $\vec{a} = a_x\vec{\imath} = (g\sin\alpha)\vec{\imath}$ => l'accélération de x'x de sens x' vers x et de valeur $a = g\sin\alpha$

2) nature du mouvement de G

$a = g\sin\alpha \Rightarrow g = constante\ et\ \sin\alpha = constante \Rightarrow a = constante$: c'est un mouvement rectiligne uniformément varié.

3- Calcul de vitesse V en B

D'après le théorème de l'énergie cinétique entre A et B, on a :

$$\frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = W_P + W_R \ \ or\ V_A = 0\ et\ W_R = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mV_B^2 = W_P \Rightarrow \frac{1}{2}mV_B^2 = mgh \ \ avec\ \ h = l\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mV_B^2 = mgl\sin\alpha \Rightarrow V_B = \sqrt{2gl\sin\alpha}$$

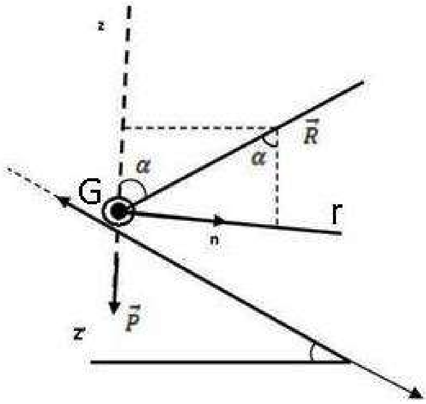
2) valeur de la force de frottements : le théorème l'énergie cinétique donne

$$\frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = W_P + W_f + W_R$$

$$\frac{1}{2}mV_B^2 = mgl\sin\alpha - fl \Rightarrow \frac{1}{2}mV_B^2 - mgl\sin\alpha = -fl$$

$$fl = mgl\sin\alpha - \frac{1}{2}mV_B^2$$

$$f = m(g\sin\alpha - \frac{1}{2l}V_B^2)$$



- **PENDULE OSCILLANT**

Un pendule est constitué par une sphère petites dimension, de masse m, suspendue à un point fixe par un fil inextensible de longueur l. le pendule est écarté d'un angle α_0 de sa position d'équilibre et abandonné sans vitesse initiale.

Déterminer la vitesse V du pendule lorsqu'il passe par sa position d'équilibre. Quelle est alors la tension $\vec{T}$ du fil ?

Solution

Système : la boule assimilée à un point materiel

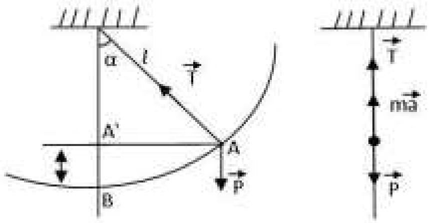
- référentiel terrestre qu'on suppose galiléen.
- Bilan des forces : $\vec{P}$ et $\vec{T}$. Le TEC donne :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}\underbrace{mv_0^2}_{0} = w(\vec{P}) + \underbrace{w(\vec{T})}_{0}$$

$\frac{1}{2}mv^2 = w(\vec{P})$ avec $w(\vec{P})$ = mgh $\quad h = l(1 - cos\alpha_0)$

$\frac{1}{2}mv^2 = mghl(1 - cos\alpha_0) \quad \Rightarrow V = \sqrt{2gl(1 - cos\alpha_0)}$

La tension du fil : le théorème du centre d'inertie donne :



$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

Lorsque le pendule passe par sa position d'équilibre, la direction des deux vecteurs $\vec{P}$ et $\vec{T}$, et donc celle de $\vec{a}$, est verticale, normale à la trajectoire. En projection sur la normale orientée, on a :

$$T - mg = ma = ma_n \Leftrightarrow T - mg = m\frac{v^2}{l}$$

$$T = mg + \frac{m}{l}\left(2gl(1 - cos\alpha_0)\right)$$

$$\boxed{T = mg(3 - 2cos\alpha_0)}$$

CHAPITRE 3 : INTERACTION GRAVITATIONNELLE ET MOUVEMENTS DES PLANÈTES ET SATELLITES.

I- VARIATION DE L'ACCELERATION DE LA PESANTEUR G AVEC L'ALTITUDE

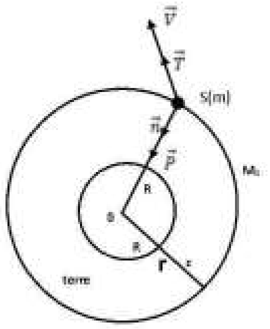
L'accélération de la pesanteur g diminue quand l'altitude augmente. Notons g_0 et g, ses valeurs au sol (altitude : z= 0) et à l'altitude z.
Les lois de l'interaction permettent d'établir la loi de variation de g avec z :

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+z)^2}$$

1- Mouvement de satellites en orbite circulaire

1.1- Vitesse du satellite

Le satellite S de masse m, parcourt la trajectoire circulaire dont le centre est O (centre de la terre) et le rayon r = R + z (z : altitude du satellite et R : rayon terrestre). Si l'altitude est suffisante, il évolue dans le vide et la seule force qui s'applique sur lui est son poids P.



La RFD donne :

$$\sum \vec{f}ext = m\vec{a} - \vec{P} = m\vec{a} \;\Rightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{g} = \vec{a}$$

Dans le repère mobile de frenet (T ; N), on a :

$$\vec{g} = \left| \begin{array}{l} g_t = 0 \\ \\ g_x = g \end{array} \right. \qquad \vec{a} = \left| \begin{array}{l} a_t = \frac{dV}{dt} \\ \\ a_N = \frac{V^2}{r} \end{array} \right. \qquad \text{Comme } \vec{a} = \vec{g} \leftrightarrow \; g_t = a_t(1) \;\; et \; g_N = a_N(2)$$

(1) $a_t = g_t \; (g_t = 0) \Rightarrow \; a_t = \frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow V = V_0 = constante$

Le mouvement du satellite en orbite est circulaire uniforme

(2) $g_N = a_N \;\; avec \; g_N = g = g_0 \frac{R^2}{(R+z)^2}$

$$\Rightarrow \; g_0 \frac{R^2}{(R+z)^2} = \frac{V^2}{r} \; avec \; r = R + h \Rightarrow \; g_0 \frac{R^2}{(R+z)^2} = \frac{V^2}{(R+h)}$$

$$g_0 \frac{R^2}{(R+z)^2} = V^2$$

$$\boxed{V = R\sqrt{\frac{g_0}{R+z}}}$$

1.2- Periode de rotation du satellite

La période de révolution ou période T d'un satellite est le temps qu'il met pour effectuer une révolution complète sur sa trajectoire.

On sait que $T = \frac{2\pi}{\omega}$ $avec\ \omega = \frac{V}{r}$ $avec\ r = R + z; V = R\sqrt{\frac{g_0}{R+z}}$

$$T = \frac{2\pi r}{V} = \frac{2\pi(R+z)}{R\sqrt{\frac{g_0}{R+z}}} = \frac{2\pi(R+z)}{\frac{R\sqrt{g_0}}{\sqrt{(R+z)}}} = \frac{2\pi(R+z).(R+z)^{1/2}}{R\sqrt{g_0}}$$

$$\Rightarrow\ T = \frac{2\pi}{R\sqrt{g_0}}(R+z)^{3/2}\ ou\ encore\ T = \frac{2\pi}{R\sqrt{g_0}}r^{3/2}$$

Remarque : La période T est indépendante de la masse du satellite. Des satellites de masses différentes évoluant à la même altitude ont la même période.

1.3- <u>LOI DE KEPLER</u>

Cette loi est une conséquence de la formule donnant la période T en fonction de r :

$$T = \frac{2\pi}{R\sqrt{g_0}}r^{3/2}$$

Élevons au carré $\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{R^2 g_0}r^3 \Rightarrow \frac{T^2}{r^3} =$ constante

Énoncé de la loi : le carré de la période de révolution de satellite est proportionnel au cube de rayon de son orbite.

1.4- <u>SATELLITE GEOSTATIONNAIRE</u>

a. La période géostationnaire

Elle vaut un jour sidéral : 86164s ≈ 23h56mn

On remarque un jour solaire : 24h = 86400s

b. Définition.

Un satellite géostationnaire est fixe par rapport à un point du globe.

$$T_S = T_T \Rightarrow \omega_S = \omega_T = 729.10^{-5} rad/s$$

Le satellite a la même vitesse angulaire que la terre.

c. Son altitude z

$$T = \frac{2\pi}{R\sqrt{g_0}}(R+z)^{3/2} \quad \Rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{R^2 g_0}(R+z)^3 \Rightarrow (R+z)^3 = \frac{T^2 R^2 g_0}{4\pi^2}$$

$$\boxed{z = \sqrt[3]{\frac{T^2 R^2 g_0}{4\pi^2}} - R}$$

Exercice d'application
Exercice n°1
L'accélération de la pesanteur g a pour valeur à l'altitude :

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+z)^2}$$

Où g_0 est l'accélération de la pesanteur au niveau du sol (z=0) et R le rayon terrestre.
Un satellite artificiel de la terre tourne autour du centre de celle-ci d'un mouvement circulaire à l'altitude z=36000km.
Calculer sa vitesse V et sa période de révolution T. on donne : g_0 = 9,8m/s2 ; R = 6400 km
Résolution
Calcul de la vitesse :
La RFD donne : $P = ma \;\; \Rightarrow mg = ma \;\; \leftrightarrow g = a$
Sur le repère de Frenet :

$$g = \left| \begin{array}{l} g_T = 0 \\ \\ g_N = g \end{array} \right. \qquad a = \left| \begin{array}{l} a_T = \frac{dV}{dt} \\ \\ a_N = \frac{V^2}{r} \end{array} \right.$$

$g = a \leftrightarrow \;\; g_T = a_T \; (1) \; et \;\; g_N = a_N \; (2)$

$(1) \Rightarrow g_T = a_T \leftrightarrow \;\; 0 = \frac{dV}{dt}$

$(2) \Rightarrow g_N = a_N \leftrightarrow \;\; g_0 \frac{R^2}{(R+z)^2} = \frac{V^2}{r}$ avec $r = (R+z)^2$

$$g_0 \frac{R^2}{(R+z)^2} = \frac{V^2}{R+z} \;\; \Rightarrow V = R\sqrt{\frac{g_0}{R+z}} \;\; \Rightarrow AN\!: \; V = 6{,}4.10^6\sqrt{\frac{9.8}{4.24.10^7}} = 3.08.10^3 m/s$$

La période de révolution T est le temps mis pour effectuer un tour :

$$T = \frac{2\pi}{R\sqrt{g_0}}(R+z)^{3/2} = \frac{d}{V} = \frac{2\pi(R+z)}{V}$$

$$T = \frac{2\pi.4{,}24.10^7}{3{,}08.10^3} = 8{,}66.10^4 s$$

Remarque : le temps mis par la terre pour effectuer un tour complet est un jour sidéral (86140s) alors que le jour solaire (le jour habituel de 24h= 86400s) est le temps qui sépare deux passages consécutifs du soleil à la verticale d'un lieu.
Les satellites géostationnaires jouent un rôle fondamental en télécommunication, en particulier comme relais de télévision.
En effet leur « immobilité » apparente permet de les viser avec facilité pour leur envoyer des ondes à relayer ou recueillir les ondes transmises. Un satellite ne peut être géostationnaire que dans le plan équatorial.

Exercice N°2

La terre est assimilée à une sphère de rayon R = 6370 km, animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de la ligne des pôles (qui est perpendiculaire au plan de l'équateur). On supposera que le repère géocentrique, dont les axes ont une direction fixe par rapport aux étoiles, est galiléen. À la surface de la terre, l'intensité du champ de pesanteur est $g_0 = 0{,}8\ N/kg$. À l'altitude h, elle est égale à

$$g_h = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

1- Un satellite assimilé à un point matériel, décrit un mouvement uniforme sur une orbite circulaire à l'altitude h = 400km.
   L'orbite est dans le plan de l'équateur
   a. Déterminer la vitesse V du satellite dans le repère géocentrique
   b. Déterminer, dans le même repère, la période T et la vitesse angulaire ω_0 du satellite
   c. Le satellite se déplace vers l'Est. Calculer l'intervalle du temps qui sépare deux passages successifs du satellite à la verticale d'un point donné de l'équateur (la vitesse angulaire de rotation de la terre dans le repère géocentrique est $\omega_T = 7{,}29.10^{-5} rad/s$, et on rappelle que, dans ce repère, la vitesse d'un point de l'équateur est dirigée vers l'Est).

2- Un satellite géocentrique reste en permanence à la verticale d'un même point du globe. Son orbite dans le plan de l'équateur.
   a. Quelle est la vitesse angulaire de ce satellite dans le repère géocentrique ?
   b. Calculer le rayon de son orbite.

Solution

a) calcul de la vitesse

La RFD donne : $P = ma \Rightarrow\ mg = ma \quad \Leftrightarrow\ g = a$

Sur le repère de Frenet

$$g = \left| \begin{array}{l} g_T = 0 \\ \\ g_N = g \end{array} \right. \qquad a = \left| \begin{array}{l} a_T = \frac{dV}{dt} = 0 \\ \\ a_N = \frac{V^2}{r} \end{array} \right.$$

$g = a\ \Leftrightarrow\ g_T = a_T\ (1) \qquad g_N = a_N\ (2)$

(1) $g_T = a_T \Rightarrow\ g_T = \frac{dV}{dt} = 0$

(2) $g_N = a_N \Leftrightarrow\ \ g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{V^2}{r} \quad avec\ r = R + h\ \ \Rightarrow V = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}$

AN : $V = 6370.10^3 m.\sqrt{\frac{9{,}8}{6370.10^3+400.10^3}} \qquad \Rightarrow\ \ V = 7664 m/s$

b) Calcul de T

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad avec\ \omega = \frac{V}{r} \quad et \quad r = R + h$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{V}(R + h)$$

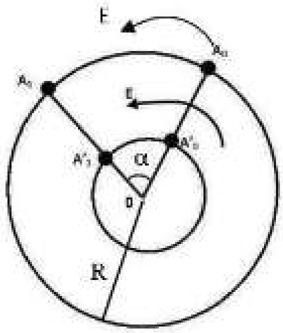
AN/ $T = \frac{2\pi}{7664}(6370 + 400)10^3 \quad \Rightarrow T = 5550{,}22s$

c) Calcul de vitesse angulaire ω

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

AN : $\omega = \frac{2\pi}{5550{,}22} = 1{,}13210^{-25} rad/s$

$$\omega_T = 7{,}2910^{-5} rad/s$$



Entre deux rencontres :

3) La terre a tourné d'un angle α
4) Le satellite a tourné d'un angle de $(2\pi + \alpha)$

$\alpha = \omega_T t$ (3)

$(2\pi + \alpha) = \omega_0 t$ (4)

(4)-(3) membre à membre

$$2\pi + \alpha - \alpha = \omega_0 t - \omega_T t$$

$$2\pi = t(\omega_0 - \omega_T) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2\pi}{\omega_0 - \omega_T}$$

AN : $t = \frac{2\pi}{1{,}132.10^{-3} - 7{,}29.10^{-5}} = 593257s$

Satellite géostationnaire $\Leftrightarrow$ $\omega_S = \omega_T$; $T_S = T_T$; $\Leftrightarrow$ $\omega_S = 7{,}29.10^{-5} rad/s$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{7{,}29.10^{-5}} = 86189{,}1s$$

$T^2 = \frac{4\pi^2}{R^2 g_0}(R + h)^3$

Posons $R + h = r$ = rayon de l'orbite

$T^2 = \frac{4\pi^2}{R^2 g_0} r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{T^2 R^2 g_0}{4\pi^2}$

AN : $\Rightarrow r = \left(\frac{(86139{,}1)^2.(6370.10^3)^2.9{,}8}{4\pi^2}\right)^{1/3}$

$$r = 4{,}213239.10^7 m = 4{,}21.10^4 km = 42{,}132km$$

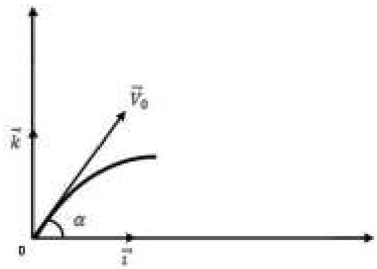
CHAPITRE 4 : MOUVEMENT D'UNE PARTICULE SOUMISE À UNE FORCE CONSTANTE

I- MOUVEMENT D'UN PROJECTILE DANS UN CHAMP DE PESANTEUR UNIFORME

1- Position du probleme

Dans un repère (o ; $\vec{\imath}$;$\vec{k}$), étudier le mouvement d'un projectile de masse m, lancé d'un point O avec une vitesse initiale V_0 faisant un angle α avec l'horizontal. Le référentiel d'étude est supposé galiléen, la résistance de l'air étant négligée.

a- Acceleration.



Le projectile n'est soumis qu'à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$, d'après le théorème du centre d'inertie, nous avons :

$$\sum \vec{f}ext = m\vec{a} \quad \Leftrightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

b- Vecteur position

La vitesse du centre d'inertie en un point M à la date t est : $\vec{V} = \vec{g}t + \vec{V}_0$

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, primitif de $\vec{V}$ est :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{V}_0 t + \overrightarrow{OM}_0$$

Les conditions initiales sont celles du lancement

Alors $\overrightarrow{OM}_0 = \vec{0} \Rightarrow \quad \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{V}_0 t$

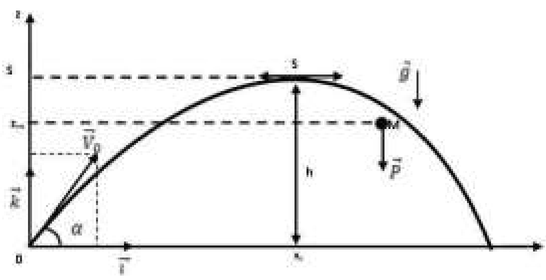
À tout instant le centre d'inertie du projectile est le plan vertical formé par $\vec{g}$ et $\overrightarrow{V_0}$

c- Équation cartesienne et trajectoire

Dans le repère (o ;$\vec{\imath}$;$\vec{k}$), choisi dans le plan $\vec{g}$; $\vec{V}_0$

Les projections du $\vec{a}$ et $\vec{V}_0$ sont :

$$\vec{a} = \vec{g} \quad \Rightarrow \vec{a} = \begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases} \qquad \vec{V}_0 = \begin{cases} V_{0x} = V_0 \cos\alpha \\ V_{0z} = V_0 \sin\alpha \end{cases}$$



Soit V la primitive de a

$$\vec{V} = \begin{cases} V_x = V_0 \cos\alpha \\ V_z = -gt + V_0 \sin\alpha \end{cases}$$

OM primitive de V est $\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x = (V_0 \cos\alpha)t \quad (1) \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin\alpha)t \quad (2) \end{cases}$

Le mouvement du projectile selon l'axe x'x est uniforme et selon l'axe z'z, le mouvement est uniformément varié. En éliminant les variables t entre les lois horaires, on a :

$$(1) \Rightarrow t = \frac{x}{V_0 \cos\alpha} \quad (3) \qquad pour \quad \alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$$

(3) Dans (2)

$$\Rightarrow z = -\frac{1}{2}g(\frac{x}{V_0 \cos\alpha})^2 + V_0 \sin\alpha \,.\frac{x}{V_0 \cos\alpha}$$

$$z = -g\frac{x^2}{2{V_0}^2 \cos^2\alpha} + x\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$\Rightarrow \quad z = -\frac{g}{2{V_0}^2 \cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$: C'est l'équation cartésienne de la trajectoire, c'est une parabole.

Dans le cas où l'angle de tir est de 90°, les lois deviennent $x = 0 \quad et\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0t$

La trajectoire est la verticale de lancement. Le mouvement du centre d'inertie est rectiligne uniformément varié. Le mobile monte en ralentissant atteint un point culminant puis redescend en accélérant.

d- CARACTERISTIQUES DE LA TRAJECTOIRE.

Portée : c'est la distance d(op) entre le point de chute de P sur l'horizontal passant par le point de lancement O ; sa valeur est x_P.

À la portée $z = 0 \Rightarrow \quad -\frac{g}{2{V_0}^2 \cos^2\alpha}{x_P}^2 + x_P \tan\alpha = 0$

$$-\frac{g}{2{V_0}^2 \cos^2\alpha}x_P = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \ x_P = \frac{{V_0}^2 2\cos\alpha \sin\alpha}{g} \qquad or \ \ 2\cos\alpha\sin\alpha = \sin 2\alpha$$

$$\Rightarrow \quad x_P = \frac{{V_0}^2 \sin 2\alpha}{g}$$

La portée est maximale pour $\sin 2\alpha = 1$, soit pour un angle $\alpha = \frac{\pi}{4}rad$ (45°)

$$X_{Pmax} = \frac{{V_0}^2}{g}$$

Le tir est dit tendu pour $\alpha < \frac{\pi}{4}$ et plongeant ou tir en cloche pour $\alpha > \frac{\pi}{4}$

La flèche : La flèche, c'est l'altitude maximale z atteinte par le projectile en S sommet de la parabole. L'abscisse du point S se détermine par la condition : $\left(\frac{dz}{dt}\right)_S = 0$

D'où l'instant t_S de passage à S :

$$-gt_S + V_0 \sin\alpha = 0 \;\Rightarrow\; t_S = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}$$

On note que $t_S = \frac{1}{2}t_P$: le temps mis pour aller de O à S est le même que pour aller de O à P.

$$z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{V_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + V_0 \sin\alpha \frac{V_0 \sin\alpha}{g} = -\frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g} + \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{g}$$

$$\Rightarrow z = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

Pour une vitesse initiale V_0 donnée, la plus grande valeur de la flèche z correspond à $\sin^2\alpha = 1$ soit $\alpha = \frac{\pi}{2} rad \;\Rightarrow\; z_{max} = \frac{V_0^2}{2g}$

- **Vitesse du projectile lorsqu'il frappe le sol**

Les coordonnées du vecteur $\vec{V}$ en P : l'impact au sol a lieu à l'instant

$$t_P = \frac{2V_0 \sin\alpha}{g} \qquad d'où\ \vec{V} = \begin{cases} V_x = V_0 \cos\alpha \\ V_z = -g\dfrac{2V_0 \sin\alpha}{g} + V_0 \sin\alpha \end{cases}$$

$$V = \begin{cases} V_x = V_0 \cos\alpha \\ V_z = -V_0 \sin\alpha \end{cases} \quad \Rightarrow \vec{V} = V_0 \cos\alpha\, \vec{\imath} + (-V_0 \sin\alpha)\vec{\jmath}$$

$$V^2 = V_0^2 \cos^2\alpha + V_0^2 \sin^2\alpha \;\Rightarrow\; V^2 = V_0^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$$

$$\Rightarrow\; V = V_0$$

La vitesse à l'impact au sol est la même qu'au départ.

e- ÉNERGIE CINETIQUE, ENERGIE POTENTIELLE DE PESANTEUR, ENERGIE MECANIQUE

1- ÉNERGIE CINETIQUE

L'énergie cinétique du projectile en translation dans un état donné est :

$$E_c = \frac{1}{2}mV^2$$

Soit dans l'état (1) ⇒ $E_{c(1)} = \frac{1}{2}mV_1^2$

Soit dans l'état (2) ⇒ $E_{c(2)} = \frac{1}{2}mV_2^2$

La variation de l'énergie cinétique du système entre ces états est d'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$E_{c(2)} - E_{c(1)} = W\vec{P}_{(1\to2)} \;\Rightarrow\; E_{c(2)} - E_{c(1)} = mg(z_1 - z_2)$$

2- ÉNERGIE POTENTIELLE DE PESANTEUR

L'énergie potentielle de pesanteur du système est :

$$E_P = mgz$$

La variation de l'énergie potentielle entre les états (1) et (2) est :

$$E_{P(2)} - E_{P(1)} = mgz_2 - mgz_1$$
$$E_{P(2)} - E_{P(1)} = mg(z_2 - z_1)$$

$E_{P(2)} - E_{P(1)} = -W_{1\to 2}(\vec{p})$

$$E_{P(2)} - E_{P(1)} = -\left(E_{P(2)} - E_{P(1)}\right) \ (1) \quad ou\ encore \quad \Delta E_P = -\Delta E_c$$

3- Énergie mecanique

Par définition, l'énergie mécanique d'un système dans un état donné est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle.

$$E_m = E_c + E_P$$

L'expression (1) conduit à

$$E_{c(1)} + E_{P(1)} = E_{c(2)} + E_{P(2)} \quad \Leftrightarrow \quad E_{m(1)} = E_{m(2)}$$

Ceci traduit la conservation de l'énergie mécanique du projectile dans le champ de pesanteur.

I- MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGEE DANS UN CHAMP ELECTROSTATIQUE

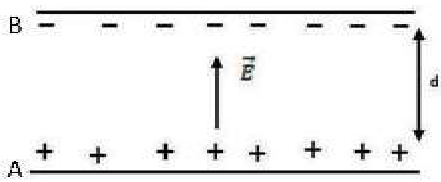
1- Champ electrostatique uniforme

Le vecteur champ électrostatique $\vec{E}$, obtenu entre les armatures A et B d'un condensateur plan soumis à une différence de potentiel U_{AB} est tel que :

$$U_{AB} = \vec{E}.\overrightarrow{AB}$$

Le vecteur champ électrostatique E est :

1) Perpendiculaire aux plaques ;
2) Dirigé de la plaque positive vers la plaque négative ou bien la plaque de plus haut potentiel vers la plaque de plus bas potentiel.



En posant $V_A - V_B = U_{AB} = U$

$$\boxed{E = \frac{U}{d}}$$

1.1- Force electrostatique

Dans un champ électrostatique $\vec{E}$, une particule de charge q est soumise à la force électrostatique $\vec{F} = q.\vec{E}$

Cette force est constante si le champ est uniforme. Le poids de la particule est négligeable devant cette force.

$si \quad q > 0 \ \Rightarrow \vec{F}\ et\ \vec{E}\ ont\ meme\ sens$

$si \quad q < 0 \ \Rightarrow \ \vec{F}\ et\ \vec{E}\ sont\ de\ sens\ contraire$

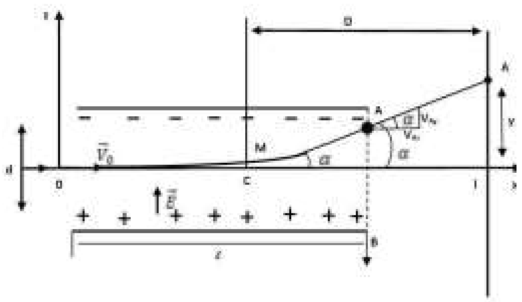
1.2- ACCELERATION DANS UN CHAMP $\vec{E}$ UNIFORME

Dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, la particule n'est soumise qu'à la seule force électrostatique et d'après le théorème du centre d'inertie :

$$\sum \vec{f}ext = m\vec{a} \Leftrightarrow q.\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

Le vecteur accélération à la même direction que $\vec{E}$ mais son sens dépend du signe de la charge q. sa valeur dépend de la particule.

a) Vecteur position



Une particule de charge q>0 pénètre en un point O avec la vitesse V_0 dans une région où règne un champ électrostatique uniforme.
À un instant t quelconque, elle est au point M.
Soit V_0, la primitive de $a = \frac{qE}{m}$

$$\Rightarrow \vec{V} = \frac{q\vec{E}}{m}t + \vec{V}_0$$

$\overrightarrow{OM}$ primitive $\vec{V}$ est : $\frac{1}{2}\frac{q\vec{E}}{m}t^2 + \vec{V}_0 t + \overrightarrow{OM}_0$
À t = 0, la particule est au point O $\Rightarrow \overrightarrow{OM}_0 = 0$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\frac{q\vec{E}}{m}t^2 + \vec{V}_0 t$$

La trajectoire de la particule est donc plane dans le plan formé par $\vec{E}$ et $\vec{V}_0$

1.3- ÉQUATION CARTESIENNE ET TRAJECTOIRE

Les coordonnées des vectrices accélérations et vitesse dans un système d'axe (xy) sont :

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \frac{qE}{m} \end{cases}$$

$\vec{V}$ primitive de a est : $\vec{V} = \begin{cases} V_x = V_0 \\ V_y = \frac{qE}{t}t \end{cases}$

$\overrightarrow{OM}$ primitive de $\vec{V}$ est : $\quad \overrightarrow{OM} = \begin{cases} x = V_0 t \\ y = \frac{1}{2}\frac{qEt^2}{m} \end{cases}$

En éliminant la variable t entre les lois horaires, l'équation cartésienne s'écrit :

$$y = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}x^2$$

La trajectoire est un arc de parabole.

1.4- <u>TRAJECTOIRE ET SES CARACTERISTIQUES</u>

- **Vitesse de la particule en A**

A est le point où la particule sort du champ. Pour le point A : $x = l$

Et l'instant de passage en A vaut :

$$x = V_0 t \quad \Leftrightarrow \quad l = V_0 t_A \quad \Rightarrow \quad t_A = \frac{l}{V_0}$$

On en déduit les coordonnées de la vitesse en A :

$$V\left(V_0;\ \frac{qE}{m}.\frac{l}{V_0}\right)$$

D'où sa norme : $V_A = \sqrt{{V_0}^2 + \left(\frac{qEl}{mV_0}\right)^2}$

Remarque : la particule sort du champ en A tel que : $\quad A\left(x_A = l;\ y_A = \frac{qEt^2}{mV_0}\right)$

- **Déviation électrostatique α**

À la sortie du champ en A, la particule n'est plus soumise à aucune force et sa trajectoire est une droite de même direction que le vecteur $\vec{V}_A$

L'angle α peut se calculer de deux manières :

Première méthode : $\vec{V}_A$ a pour coordonnées $\left(V_0\ ;\ \frac{qEl}{V_0 m}\right)$

$$\tan\alpha = \frac{V_{Ay}}{V_{Ax}} = \frac{qEl}{m{V_0}^2}$$

Deuxième méthode : le coefficient directeur de la trajectoire en A est égal au nombre de dérivé en A de la fonction y(x)

$$y(x) = \frac{qE}{2m{V_0}^2}x^2 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{qE}{2m{V_0}^2}.2x = \frac{qE}{m{V_0}^2}x$$

$$\tan\alpha = \left(\frac{dy}{dx}\right)_A = \frac{qEl}{m{V_0}^2}$$

- **DEFLEXION ELECTROSTATIQUE**

C'est la distance $y = IA'$ qui sépare le point I où vient la particule en l'absence de champ (E = 0) et le point A' où elle frappe l'écran fluorescent.

Pour calculer y, admettons le théorème suivant : le prolongement du V_A, c'est-à-dire la tangente en A à la parabole, passe par le milieu C du segment OH.

Notons $D = CI$

$$\tan\alpha = \frac{y}{D} \;\Rightarrow\; y = D\tan\alpha \quad or \quad \tan\alpha = \frac{qEl}{m{V_0}^2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{DqEl}{m{V_0}^2}$$

Soit U, la tension entre les plaques de déviation, le champ électrostatique vaut :
$E = \frac{U}{d}$ et la déflexion devient $y = \frac{DqEl}{md{V_0}^2}U$

1.5- <u>ÉNERGIE CINETIQUE ET ENERGIE POTENTIELLE ELECTROSTATIQUE OU ELECTRIQUE</u>

Lorsqu'une particule se déplace d'un point A vers un point B dans un champ électrostatique uniforme $\vec{E}$, le travail (W) de la force d'origine électrostatique est égal à :

$$W_{AB}^{(\vec{F})} = q.E \quad or \quad \vec{E}.\overrightarrow{AB} = V_A - V_B = U$$

$$\Rightarrow W_{AB}^{(\vec{F})} = qU = q(V_A - V_B)$$

Si F est la seule force appliquée, le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = q(V_A - V_B) = qV_A - qV_B$$

$$\frac{1}{2}mV_A^2 + qV_A = \frac{1}{2}mV_B^2 + qV_B$$

$$\Leftrightarrow \; E_{c(A)} + E_{P(A)} = E_{c(B)} + E_{P(B)}$$

Cette équation traduit la conservation de l'énergie totale.

1.6- <u>THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE</u>

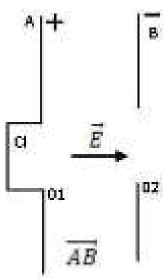
Des particules de charge q>0 sortant de la chambre d'ionisation par l'orifice O_1, sont accélérés entre deux plaques A et B. sachant que ces particules sortent par O_2 avec une vitesse initiale nulle, calculer leur vitesse à la sortie de l'orifice O_2.
Le théorème de l'énergie cinétique permet d'écrire :

$$\Delta E_c = \sum Wfext$$

$$\frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = qE.\overrightarrow{AB}$$

$$\frac{1}{2}mV_B^2 = qU$$

$$\frac{1}{2}mV_2^2 = qU \qquad => \qquad V_2 = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$$



CHAPITRE 5 : LES OSCILLATIONS MÉCANIQUES

Introduction : un oscillateur mécanique est un objet qui se déplace en repassant périodiquement par une position d'équilibre.
Exemple : amortisseurs des camions ; balançoires…

I- FORCE DE RAPPEL ET INERTIE.

Les vibrations des systèmes mécaniques résultent de la compétition entre 2 types de phénomène :

3) L'existence d'une force de rappel ; équivalente à l'action d'un ressort qui tend à faire revenir l'objet mobile vers sa position d'équilibre ;
4) L'inertie de l'objet dont la tendance naturelle est de poursuivre un mouvement rectiligne et uniforme en l'absence d'action et qui continue ainsi à se mouvoir lorsqu'il passe par sa position d'équilibre ou la force de rappel est nulle.

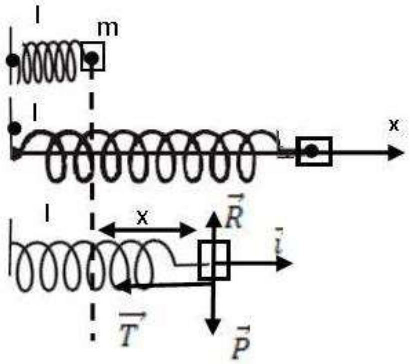
1- ÉTUDE THEORIQUE D'UN OSCILLATEUR MECANIQUE

a) PENDULE ELASTIQUE HORIZONTAL

Soit un ressort dont l'une des extrémités est fixée en un point O et l'autre extrémité est accroché à une masse m qui repose sur une table à coussin d'air. L'effet du poids P est annulé par la réaction du coussin d'air :

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$

La seule force active est l'action $\vec{F}$ du ressort. F est proportionnelle à l'allongement du ressort à partir de sa position d'équilibre I.



Soit $\vec{F}$ = K$\overrightarrow{IM}$. Lorsqu'il fonctionne dans ces conditions, le ressort est dit à réponse linéaire. Que le ressort travaille en extension ou en compression, la force qui existe pointe toujours vers la position d'équilibre I. pour cette raison, elle est nommée ***force de rappel***. Elle s'exprime vectoriellement par $\vec{F} = -k\overrightarrow{IM}$, la valeur algébrique IM prend souvent le nom d'élongation.

MISE EN EQUATION

1) Le référentiel d'étude est supposé galiléen
2) Repère (o ; i)
3) Système : masse-ressort
4) Bilan des forces : P ; R ; T

Le théorème du centre d'inertie donne :

$$\sum \vec{f}ext = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a} \quad or\ \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \ \vec{T} = m\vec{a} \ \Rightarrow -k\overrightarrow{IM} = m\vec{a}$$

Sur (o ;$\vec{\imath}$), il vient :

$$\overrightarrow{IM} = x\vec{\imath} \ \Leftrightarrow \ -kx = ma_x \quad or\ \ a_x = \frac{d^2x}{dt} = \ddot{x}$$

$\Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \ \Rightarrow \ \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \ \ (1)$: Équation différentielle régissant le pendule élastique.

L'écart x d'un oscillateur de sa position d'équilibre évolue sinusoïdalement en fonction du temps. Alors la solution de l'équation :

$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \ \ (1)$ semble être du type : $x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ où $x_m;\ \omega_0\ et\ \varphi$ sont des constantes.

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = -\omega x_m \sin(\,\omega_0 t + \varphi)$$

$$\frac{d^2x}{dt} = \ddot{x} = -\omega^2 x_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad or\ x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \ \ddot{x} = -\omega^2 x \ \ (2)$$

(1)=(2) $\Rightarrow \ \ -\omega^2 x = -\frac{k}{m}x \quad \Rightarrow \ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$: pulsation propre de l'oscillateur

On en déduit la période propre :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

La fréquence est donc :

$$N_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

b) **Énergie mecanique de l'oscillateur**

$$E_m = E_c + E_{Pe} \qquad\qquad E_c = \frac{1}{2}mV^2 \quad avec\ \dot{x} = V$$

$$\Rightarrow \ E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \qquad et \qquad E_{Pe} = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\Rightarrow \ E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = constante$$

- **Conservation de l'energie mecanique**

$$\frac{dE_m}{dt} = \dot{E}_m = \frac{2}{2}m\dot{x}\ddot{x} + \frac{2}{2}kx\dot{x} = 0$$

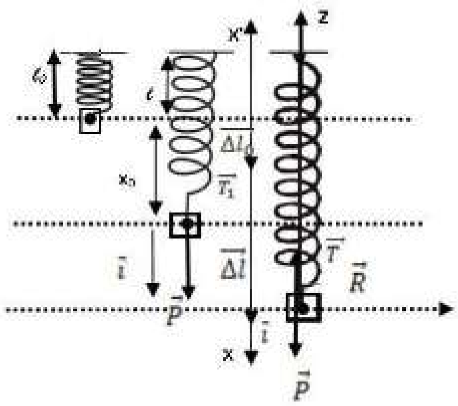
$$m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0 \ \Rightarrow \ \dot{x}m\left(\ddot{x} + \frac{kx}{m}\right) = 0 \quad avec\ \ddot{x} + \frac{kx}{m} = 0$$

$\Rightarrow \ \dot{E}_m = 0 \Leftrightarrow \ \ E_m = constante.$ L'énergie mécanique de l'oscillateur se conserve.

- **Pendule elastique verticale**

Position du problème : soit le système masse-ressort d'axe vertical(x'x) à partir de la position d'équilibre.

Un opérateur tire vers le bas le système de a (cm) puis l'abandonne sans vitesse initiale. Étudier le mouvement de l'oscillateur.



Conditions d'équilibre

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \qquad avec\ \vec{P} = m\vec{g} \quad et\ T = k\Delta l$$

$$mg - k\Delta l = 0 \qquad\qquad \Delta l = l - l_0$$

$$\Rightarrow mg - k(l - l_0) = 0\ (1)$$

(1) permet d'écrire $\sum \vec{f}ext = m\vec{a}$

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

Sur la verticale descendante, on obtient :

$$P - T = ma_x \qquad avec\ \ T = k(\Delta l + x) \qquad a_x = \ddot{x}$$

$$\Rightarrow mg - k(\Delta l + x) = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow mg - k\Delta l - kx = m\ddot{x} \qquad or\ \ mg - k\Delta l = 0$$

$$\Rightarrow -kx = m\ddot{x} \ \ \Rightarrow\ \ m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\Rightarrow\ \ddot{x} + \frac{kx}{m} = 0$$

- **<u>ÉNERGIE MECANIQUE, SA CONSERVATION</u>**

$$E_m = E_c + E_{Pe} + E_{Pp}$$

Avec $\qquad E_c = \frac{1}{2}mV^2\ ; \qquad E_{Pe} = \frac{1}{2}k(\Delta l + x)^2\ \ ; \qquad E_{Pp} = mgz = -mgx$

Convention : la position d'équilibre est choisie comme origine des E_{Pp}.

$$=> E_m = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}k(\Delta l + x)^2 - mgx = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(\Delta l + x)^2 - mgx$$

Sa conservation

$$\frac{dE_m}{dt} = E_m = m\dot{x}\ddot{x} + k(l - l_0 + x)\dot{x} - mg\dot{x}$$

$$= m\dot{x}\ddot{x} + k(l - l_0)\dot{x} + kx\dot{x} - mg\dot{x}$$

$$= m\dot{x}\left(\ddot{x} + \frac{kx}{m}\right) - \dot{x}\big(mg - k(l - l_0)\big)$$

$$or \qquad \ddot{x} + \frac{kx}{m} = 0 \qquad et\ \ mg - k(l - l_0) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{E_m = 0\ \Leftrightarrow\ E_m = constante}$$

c) OSCILLATEUR SINUSOÏDAL EN ROTATION

- PENDULE DE TORSION

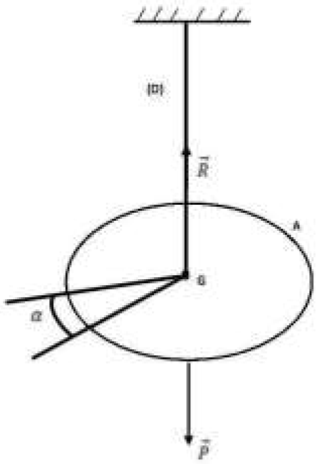
Un pendule de torsion peut être constitué par un solide A fixé à un fil d'acier passant par le centre d'inertie G du solide et tendu entre deux support. Le fil de tension constitue un axe (Δ) autour duquel le solide A écarté de sa position d'équilibre d'un angle α peut effectuer un mouvement oscillatoire de rotation. Il effectue alors les oscillations libres non amorties.

Tout oscillateur sinusoïdal de translation, l'E_m du pendule de torsion se conserve :

$$E_m = \frac{1}{2}c\alpha^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = cste \quad (1)$$

c: Constante de torsion du fil

J: Moment d'inertie du solide par rapport à l'axe de rotation Δ



Dérivons l'expression (1) par rapport au temps :

$$\frac{dE_m}{dt} = c\alpha\dot{\alpha} + J\omega\dot{\omega}$$

Pour un mouvement circulaire $\omega = \dot{\alpha} \quad et \quad \dot{\omega} = \ddot{\alpha}$

$$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = c\alpha\dot{\alpha} + J\dot{\alpha}\ddot{\alpha}$$
$$= \dot{\alpha}(\ddot{\alpha}J + c\alpha)$$

$\dot{\alpha} = 0 \Rightarrow$ Le solide est au repos ;

En mouvement :

$$\boxed{\ddot{\alpha}J + c\alpha = 0 \quad ou \quad \ddot{\alpha} + \frac{c}{J}\alpha = 0}$$

Équation différentiel du pendule de torsion

Cette équation est identique à celle de l'oscillation sinusoïdale en translation et admet donc une solution sinusoïdale de la forme :

$$\alpha(t) = \alpha_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$
$$\dot{\alpha} = -\omega_0\alpha_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$
$$\ddot{\alpha} = -\omega_0{}^2\alpha_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad avec \ \ \alpha_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = \alpha$$
$$\Rightarrow \ \ddot{\alpha} = -\omega_0{}^2\alpha \ \Rightarrow -\omega_0{}^2\alpha = -\frac{c}{J}\alpha$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{J}} \quad : \ pulsation\ propre\ du\ pendule\ de\ torsion$$

La période propre : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{c}}$

En prenant le solide oscillant A comme système, les moments de son poids et la réaction R du fil par rapport à (Δ) sont nuls. La seule action mécanique du moment non nul a pour origine la torsion du fil de moment $-c\alpha$ donc :

$$\sum M_\Delta = -c\alpha \ (1) \ \ et\ on\ a \quad \sum M_\Delta = J\ddot{\alpha} \ (2)$$

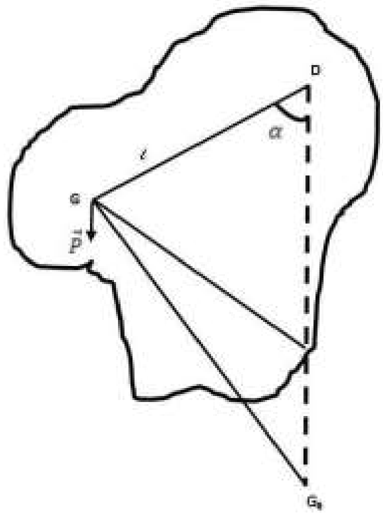
$$\Rightarrow (1) = (2) \ \Rightarrow \quad -c\alpha = J\ddot{\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\alpha} + \frac{c}{J}\alpha = 0}$$

- **PENDULE PESANT**

Un solide oscillant autour d'un axe horizontal fixe sous la seule action de son poids constitue un pendule pesant.

Écartons un tel système de sa position d'équilibre d'un angle α, d'une longueur ℓ et cachons-le.



$$M_\Delta(P) = -\|P\| l \sin\alpha$$
$$= -mgl\sin\alpha$$

D'autre part : $\sum M_{(\Delta)} = J\ddot{\alpha}$ $\quad \Leftrightarrow -mg\sin\alpha = J\ddot{\alpha}$

$$=> \ \ddot{\alpha}J + mg\sin\alpha = 0$$

Pour des petites oscillations $\sin\alpha = \alpha$

$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{J}\alpha$ qui a pour solution $\alpha = \alpha_m\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad avec\ \omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}} \quad et\ T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$

Si le pendule était simple :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}} = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} \ \Rightarrow \ \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad et\ T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

a) ÉTUDE ENERGETIQUE

L'énergie potentielle de pesanteur est prise égale à zéro à l'équilibre, l'énergie potentielle élastique n'intervient pas.

L'énergie mécanique d'un pendule simple non amorti dans le cas des oscillations de faibles amplitudes est :

$$E_m = \frac{mgl\alpha_m^2}{2}$$

CHAPITRE 6 : ÉLECTROMAGNÉTISME

<u>Définition :</u> l'électromagnétisme est la partie de la physique qui étudie les champs magnétiques produits par les courants électriques mais aussi toutes les interactions qui existent entre une particule chargée en mouvement et un champ magnétique.

I- CHAMP MAGNETIQUE

1- <u>PHENOMENES MAGNETIQUES</u>

- **Propriétés des aimants** : les aimants et les objets aimantés ont la propriété de s'orienter de façon privilégiée au voisinage de la terre. Ils sont dits magnétites. Certaines substances qui sont attirées par ces aimants sont dits magnétiques.
- **Champ magnétique** : il règne un champ magnétique dans une région de l'espace lorsqu'une aiguille aimantée y subit des actions
- **Source de champ magnétique** : la terre est la source de champ appelé champ géo-magnétique. Les courants et les aimants sont aussi les sources de champs magnétiques.
- **Vecteur champ magnétique** : l'orientation prise par l'aiguille aimantée montre qu'elle est sensible à une grandeur orientée appelé vecteur champ magnétique, désigné par B. par convention, le sens de $\vec{B}$ est choisi selon le sens $\overrightarrow{SN}$ de l'aiguille aimantée qui le détecte. Sa valeur se mesure à l'aide d'un tesla mètre.

a) INTERACTION D'ORIGINE MAGNETIQUE

Ces interactions sont dues soit :

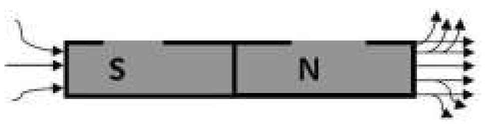
1) À l'interaction aimant-aimant (deux extrémités de même nature NN ou SS se repoussent) ; deux extrémités de nature différente s'attirent ;
2) À l'interaction aimant-courant ;
3) À l'interaction courant-courant.

2- <u>TOPOGRAPHIE D'UN CHAMP MAGNETIQUE</u>

C'est la description de la structure spatiale du champ. Le vecteur champ magnétique est tangent aux lignes de champ (on appelle ligne de champ magnétique, une ligne qui, en chacun de ses points est tangente au vecteur B en ce point).

a- <u>Spectre obtenu à partir d'aimants</u>

Les lignes de champ d'un aimant droit, sortent par l'extrémité nord et entrent par l'extrémité sud de l'aimant.



b- <u>Spectre obtenu à partir du courant</u>

Les lignes de champ d'un courant rectiligne sont circulaires, centrés sur le fil. Leur sens dépend du celui du courant.

Règle de l'observation d'ampère : le sens des lignes de champ est tel que quand un observateur, placé le long du fil de façon que le courant lui entre par les pieds et lui sorte par la tête, voit les lignes orientées vers sa gauche.
Règle de la main droite : la main droite entourant le fil de façon que le pouce indique le sens du courant, le sens des lignes de champ est donné par l'orientation des autres doigts.

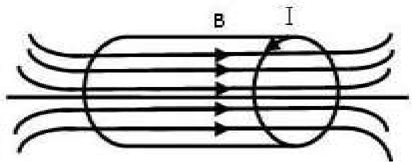
c- Spectre d'un solénoïde

Un solénoïde est constitué d'un fil conducteur enroulé en spirale, la longueur d'un solénoïde dépasse 5fois le diamètre d'une spire. À l'intérieur du solénoïde, le champ est parallèle à l'axe du solénoïde et est uniforme. La règle de la main droite permet de déterminer le sens de B à partir du sens du courant. Dans le cas du solénoïde, les doigts sont le sens du courant, le pouce écarté indique le sens de B.

d- Spectre d'une bobine plate : même règle que celle du solénoïde.

- **Spectre des bobines de Helmholtz**

Deux bobines plates, parallèle, distantes de rayon r, parcouru dans le même sens par le même courant, constitue un dispositif appelé bobines de Helmholtz. Les lignes de champ sont quasi parallèles entre les deux bobines.



e- Valeur du champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde

Cette valeur est donnée par la relation :

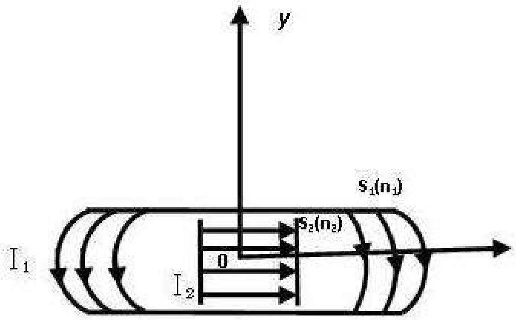
$$B = \mathcal{M}_0 . nI$$

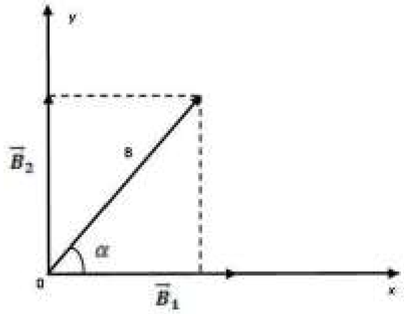
$\mathcal{M}_0$: constante appelée perméabilité du vide $= 4\pi . 10^{-7}$
I : intensité du courant en ampère (A)
n : nombre de spire par mètre
B : en tesla (T)
Si le solénoïde a une longueur l et comporte N spires

$$n = \frac{N}{l} \quad \Rightarrow \quad B = \mathcal{M}_0 \frac{N}{l} I$$

f- Addition des vecteurs champs magnétiques

Le champ $\vec{B}$ résultant de la superposition de deux champs magnétiques B_1 et B_2s'obtient en faisant la somme géométrique de ces deux vecteurs.
Exemple : à l'intérieur d'un long solénoïde S_1 comportant $n_1 = 1000$ spires par mètre et parcouru par un courant d'intensité $I_1 = 2A$. On a placé un solénoïde S_2 dont l'axe est perpendiculaire à celui de S_1.
Le solénoïde S2 est formé de 200 spires régulièrement enroulées sur une distance de 5cm et l'intensité du courant qui y circule vaut $I_2 = 1A$. Les sens des courants étant ceux indiqués au schéma, déterminer le vecteur champ magnétique B au point O. Que devient ce champ magnétique si on inverse le sens de chacun des deux courants ?





Solution

Le champ B est donné par : $B = B_1 + B_2$

On calcule :

$$B_1 = M_0 n_1 I_1 = 4\pi.10^{-7}.10^3.2 \cong 2{,}5.10^{-3}T$$

$$B_2 = M_0 \frac{N_2}{l} I_2 = 4\pi.10^{-7}.\frac{200}{5.10^{-2}}.1 \cong 5{,}0.10^{-3}T$$

$$B_2 = 2B_1$$

Le parallélogramme est ici un rectangle : le vecteur $\vec{B}$ forme avec l'axe $\overrightarrow{ox}$ (axe de S1) l'angle α tel que :

$$\tan\alpha = \frac{B_2}{B_1} = 2 \;=>\; \alpha = 63{,}4°$$

Le théorème de Pythagore donne :

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{(2{,}5.10^{-3})^2 + (5.10^{-3})^2} = 5{,}6.10^{-3}T$$

Si on inverse le sens des deux courants, $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ changent de sens en conservant même direction et même norme. En conséquence, il en est de même pour le vecteur $\vec{B}$.

g- Action d'un champ magnétique uniforme sur une particule chargée

1- FORCE MAGNETIQUE – FORCE DE LORENTZ

a. Expression

Les particules chargées lancées dans un champ magnétique peuvent prendre des trajectoires circulaires ou hélicoïdales. La force responsable de ces incurvations est appelée force magnétique ou force de Lorentz, elle dépend de la charge des particules, de leur vitesse et de la valeur du champ. Elle a pour expression :

$$\vec{F} = q\vec{V} \wedge \vec{B}$$

b. Caractéristiques de B

1- Sa direction est orthogonale au plan défini par $\vec{V}$ et $\vec{F}$;
2- Son sens est tel que :
   si la charge $q > 0$, $\vec{V}, \vec{B}$ *et* $\vec{F}$ forment un trièdre direct
   si la charge $q < 0$, ils forment un trièdre indirect

convention :

(x) vecteur rentrant

(●) vecteur sortant

3- Sa valeur est : $F = qVB\sin\alpha \quad ou \quad \alpha = (\vec{V}, \vec{B})$

Règle de la main droite : la main droite placée de sorte que le courant entre par les poignets et sorte par les doigts, la paume dirigée dans le sens direct champ B alors le pouce tendu oriente la force de Lorentz.

Pour retrouver le sens de la force $\vec{F}$ du champ $\vec{B}$ ou de $\vec{V}$, on utiliser la règle des trois doigts ($\vec{V}$ = pouce, $\vec{B}$ = index, $\vec{F}$ = majeur) ou la règle de la paume de main droite ouverte (main droite ouverte = $\vec{B}$; les doigts = $\vec{V}$; le pouce écarté = $\vec{F}$).

2- ÉTUDE DE LA TRAJECTOIRE CIRCULAIRE

La vitesse de la particule de masse m est orthogonale au champ $\vec{B}$, on suppose q>0.

a. Analyse des actions

Le poids de la particule est négligeable vis-à-vis des forces magnétiques.
D'après le théorème du centre d'inertie, on a :

$$\sum \vec{f}ext = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow q\vec{V} \wedge \vec{B} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{q\vec{V} \wedge \vec{B}}{m}; \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{V}\ et\ \text{à}\ \vec{B}$$

b. Choix du repère

Le mouvement de la particule est étudié dans un repère terrestre supposé galiléen. L'origine O du repère est le point d'entrée de la particule du champ magnétique, l'axe ox est choisi colinéaire à V et de meme sens, oy est perpendiculaire à $\vec{B}$ et à ox. Le repère est complété par un axe oz tel que $ox; oy\ et\ oz$ sont direct.

c. Caractéristique du mouvement

Puisque $\vec{a} \perp \vec{B}\ \ donc\ \ \vec{a} \perp oz \Rightarrow a_z = \frac{d^2z}{dt} = 0 \Rightarrow V_z = cste = 0 \Rightarrow z = cste = 0$

Ainsi la trajectoire est contenue dans le plan $xoy \perp \vec{B}$. Dans le repère mobile de Frenet ($\vec{N}$;$\vec{T}$), l'accélération tangentielle en un point M est :

$$\vec{a}_T = \frac{d\vec{V}}{dt} \quad puis\ \ \vec{a} \perp \vec{V} \Rightarrow a_T = 0$$

$\Rightarrow V = V_0 \Rightarrow$ la vitesse garde une valeur constante et le mouvement est uniforme

L'accélération normale est :

$$a_N = \frac{V^2}{R} \qquad puisque\ \ V \perp B \Rightarrow \quad a = \frac{|q|}{m}V_0B = \frac{V_0^2}{R} \Rightarrow \boxed{R = \frac{mV_0}{|q|B}}$$

Le rayon de courbure est constant donc la trajectoire est circulaire.

d. Puissance d'une force magnétique

La puissance d'une force magnétique F est donnée par le produit scalaire

$$P = \vec{F}.\vec{V} \quad comme\ \ \vec{F} \perp \vec{V} \Rightarrow P = 0$$

L'énergie cinétique d'une particule dans un champ magnétique ne varie pas. La force magnétique peut incurver les trajectoires mais ne peut modifier la valeur de la vitesse des particules.

e. Quantité de mouvement

La quantité de mouvement est donnée par :

$$P = mV_0 \quad or \;\; V_0 = \frac{|q|BR}{m} \qquad \Rightarrow \quad P = |q|BR$$

f. Vitesse angulaire

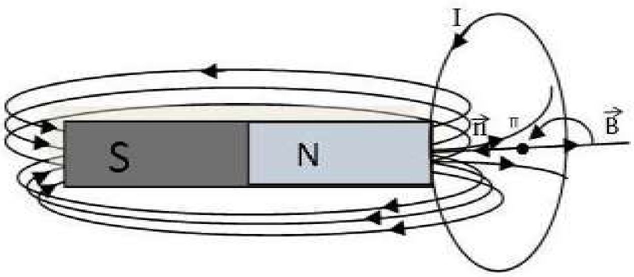
On sait que $\omega = \frac{V_0}{R}$ $\quad or \quad V_0 = \frac{|q|BR}{m} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{|q|B}{m}$

3- <u>NOTION DE FLUX MAGNETIQUE</u>

a- Choisir une orientation (arbitraire) sur la spire ;

b- Mettre en place la normale à la surface S de la spire (utiliser l'une des règles d'orientation de l'espace).

On calcule le flux par la formule :



$\Phi = \vec{B}.\vec{n}.S \;\; \Rightarrow$ $\boxed{\Phi = BS\cos(B,S)}$

n = vecteur unitaire normal $(\vec{B},\vec{n}) = \pi$

$$\boxed{\Phi = -BS}$$

NB : pour une bobine à N spire,

$\Phi = NBS\cos(B,n)$; L'unité du flux est le weber (wb)

4- <u>LOI DE LAPLACE</u>

a. Expression de la force de Laplace

Un conducteur de longueur l parcouru par une intensité I, est plongé dans un champ magnétique B est soumis à l'action d'une force F appelée force de Laplace tel que :

$$\vec{F} = I\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Ses caractéristiques sont :

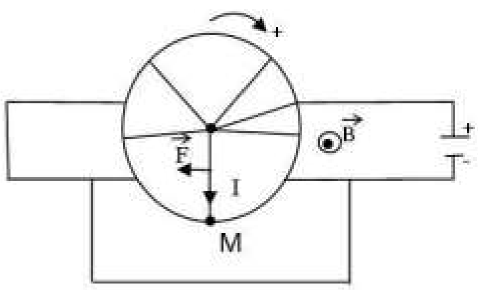
- Sa direction est orthogonale au plan défini par le fil et le champ $\vec{B}$;
- Son sens est tel que le trièdre défini par les vecteurs $I\vec{l}, \vec{B}$ et $\vec{F}$ forment un trièdre direct (l'orientation dans le sens du courant)
- Sa valeur est :

$$F = IlB\sin\alpha$$

b. Application

- **Roue de Barlow**

Chaque rayon du disque traversé par un courant est soumis au champ magnétique, subit la force électromagnétique, la roue tournera progressivement dans le sens indiqué sur la figure.



$F = I\vec{l} \wedge \vec{B} \quad \Leftrightarrow F = IlB\sin(\vec{l}, \vec{B}), \quad (\vec{l}, \vec{B}) = \frac{\pi}{2} \quad et \;\; l = R \qquad \Rightarrow$ $\boxed{F = IRB}$

La roue de Barlow est le moteur électrique le plus simple.

Puissance du moteur

$$P(\vec{F}) = \mathcal{M}(\vec{F}).\omega$$

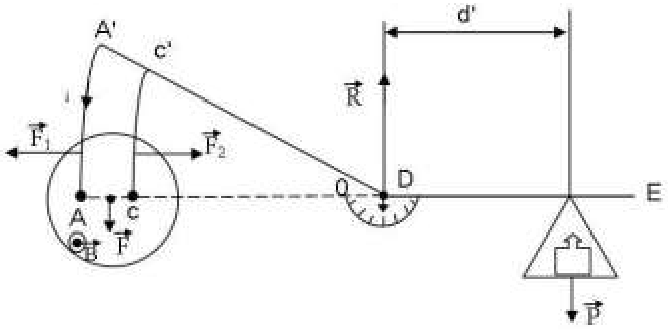
$$M_0(\vec{F}) = F.OA = BIR.\frac{R}{2} \;\; \Rightarrow \mathcal{M}_0(\vec{F}) = \frac{BIR^2}{2} \quad avec \;\; \omega = 2\pi N$$

$$\boxed{P(\vec{F}) = \frac{BIR^2}{2}.\omega}$$

<u>AN</u> : $B = 0{,}5T$, $\quad I = 4A; \qquad R = 5cm; \;\; \omega = 100\, {}^{trs}/_{min} = \frac{10\pi}{3}$

$$AN: P(\vec{F}) = \frac{0{,}5X4X(5^{-2})^2X\frac{\pi}{2}}{2}$$

5- <u>BALANCE DE COTTON</u>



Étude de la balance

Bilan des forces :

- Sur A'A : force $\vec{F_1}$
- Sur AC : force $\vec{F}$
- Sur CC' : force $\vec{F_2}$
- Au point O : la réaction $\vec{R}$ du couteau
- Au point E : le poids P

Conditions d'équilibre :

$$\sum \mathcal{M}_0(fext) = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_0(\vec{F_1}) + \mathcal{M}_0(\vec{F_2}) + \mathcal{M}_0(\vec{F}) + \mathcal{M}_0(\vec{R}) + \mathcal{M}_0(\vec{P}) = 0$$

$M_0(\vec{F_1}) = 0$ car la droite d'action de F_1 passe par le point O, de même que $M_0(\vec{F_2}) = 0$

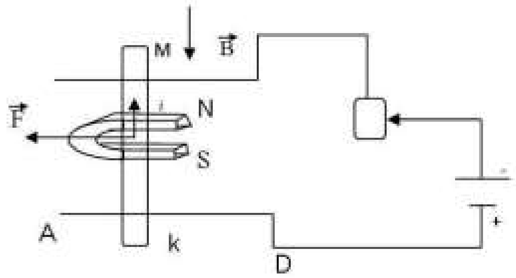
$$\mathcal{M}_0(\vec{F}) = -OK.F \; ; \quad \mathcal{M}_0(\vec{R}) = 0 \quad ; \quad \mathcal{M}_0(\vec{P}) = OE.P$$

$$\sum M_0(fext) = 0 \Leftrightarrow -OK.F + OE.P = 0 \;\; avec \;\; F = BIAC\,; OK = d \;\; OE = d'$$
$$-dBIAC + d'mg = 0$$
$$B = \frac{mgd'}{IACd}$$
Intérêt de la balance : mesure des intensités du champ magnétique.

Exercice n°1

On considère le montage ci-après, la tige de cuivre KM, de masse m est homogène et de section constante, elle est placée dans un champ magnétique uniforme B sur une longueur l et elle est parcourue par un courant I. on admettra que la tige ne peut se glisser sans frottement sur ses rails.

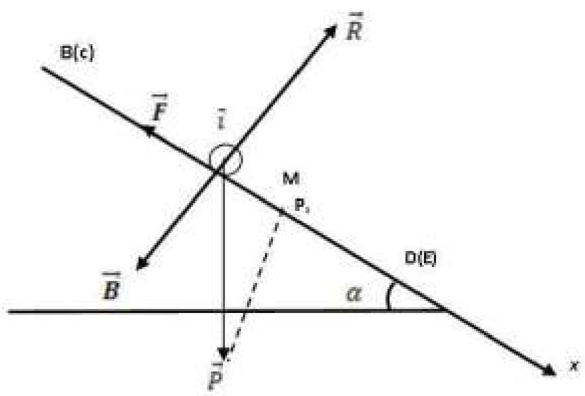
a. De quel angle α peut-on calculer les rails ACDE et dans quel sens pour que la tige soit en équilibre dans les deux cas suivants :
b. 1er cas : B reste ⊥ aux rails
c. 2ème cas : B reste vertical
d. On incline le plan des rails suivant le sens défini à la question 1 (voir 1er cas) en donnant à α la valeur de 30° (B ⊥ au plan des rails)
e. Quelle est la nature du mouvement de la tige KM ?
f. Calculer son accélération et sa vitesse 0,5s après la fermeture du circuit.



NB : On admettra dans cette partie que la résistance du circuit est suffisamment élevée pour qu'on puisse négliger les phénomènes d'induction

Résolution

a. **1er cas :** Pour que la tige soit en équilibre, il faut soulever les extrémités A et C
B ⊥ au plan des rails.



Conditions d'équilibre

$\sum \vec{f}ext = 0$

$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$ En projetant sur $(x'xi)$ il vient

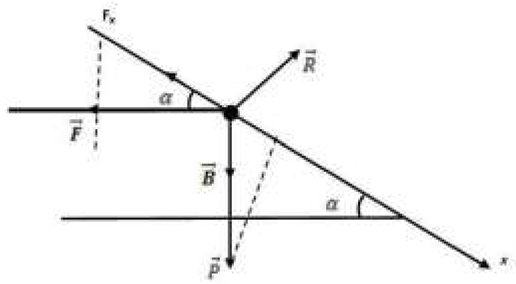
$$P_x + 0 - F = 0 \Rightarrow P\sin\alpha - BIl = 0$$

$$\sin\alpha = \frac{BIl}{P} = \frac{BIl}{mg}$$

$$AN\colon \sin\alpha = \frac{0{,}5X4X6X10^{-2}}{20X10^{-3}X10} = 0{,}6 \;\; \Rightarrow \;\; \alpha \approx 37°$$

2ème cas : B vertical au plan des rails

Principe d'inertie



$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad P_x + F_x = 0$$

$$mg\sin\alpha - F\cos\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \tan\alpha = \frac{F}{mg} = \frac{BIl}{mg}$$

b. B ⊥ au plan des rails ($\alpha_E = 37°$)

Or $\alpha = 30°$ $\;\Leftrightarrow\;$ $\alpha < \alpha_E$ ⇒ la tige se déplacera dans le sens de D→A

La condition d'équilibre n'est plus vérifiée, on a :

$$\sum \vec{f}ext = ma \;\;\Leftrightarrow\;\; \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}$$

Soit en projection sur $(x'x, \vec{\imath})$, il vient

$$p\sin\alpha - BIl = ma_x \;\Rightarrow a_x = g\sin\alpha - \frac{BIl}{m} = constante$$

Le mouvement est uniformément varié.

g. $AN\colon\; a_x = 10X0{,}5 - \frac{0{,}5X4X6.10^{-2}}{2010^{-2}} \;\;\Rightarrow\;\; a_x = 1\,m/s^2$

h. $calcul\ de\ vitesse$:

$$V = at + V_0 \quad avec\ V_0 = 0$$

$$\Rightarrow V = at = -1X0{,}5 = -0{,}5\,m/s$$

6- <u>AUTO-INDUCTION</u>

a. Obtention d'un courant induit

Un courant induit apparait dans un circuit si on déplace un aimant dans son voisinage ou si on déplace le circuit devant un aimant.

Le courant induit s'annule lorsque le déplacement relatif cesse.

b. Sens du courant induit

Le sens du courant induit dans la bobine est celui qui tente de s'opposer au mouvement de l'aimant.

c. Loi de Lenz

Le sens du courant induit est tel que le flux magnétique qu'il crée à travers l'induit s'oppose à la variation du flux qui lui donne naissance.

7- <u>FORCE ELECTROMOTRICE D'INDUCTION (F.E.M)</u>

La f.e.m d'induction est égale à celle d'un générateur sans résistance interne, qui créerait dans le circuit un courant de même intensité que le circuit induit.

a. Loi de Faraday

La f.e.m d'induction e est l'opposée de la dérivée par rapport au temps du flux inducteur dans le circuit.

$$e = \frac{-d\Phi}{dt}$$

- Un sens positif est choisi sur le contour limitant le circuit :
  Si $\Delta\Phi < 0 \Rightarrow e > 0$, le courant circule dans le sens positif choisi
  Si $\Delta\Phi > 0 \Rightarrow e < 0$, le courant circule dans le sens opposé au sens choisi.
- Si R est la résistance du circuit induit, en l'absence de tout autre f.e.m dans le circuit, l'intensité du courant induit est donnée par la relation :

$$i = \frac{e}{R}$$

Remarque : le plus souvent, on peut se borner à calculer $|e| = \left|\frac{-d\Phi}{dt}\right| \quad et\ i = \frac{|e|}{R}$

Le sens du courant induit est directement donné par la loi de Lenz.

8- <u>PHENOMENES D'AUTO-INDUCTION</u>

a. Auto inductance

Soit un circuit parcouru par un courant d'intensité variable et comportant une bobine, on montre que :

- Le champ magnétique créé par le courant qui parcourt la bobine est proportionnel à celui-ci ;
- Le flux du champ magnétique au travers de la bobine est proportionnel à B et il est donc proportionnel à i, alors :

$$\Phi = Li$$

L est le coefficient de proportionnalité qui ne dépend que de la géométrie de la bobine. L est appelé auto inductance. Son unité est le Henry (H).

Pour un solénoïde, l'inductance est :

$$L = \frac{\mathcal{M}_0 N^2 S}{l}$$

b. Force f.e.m d'auto-induction

La f.e.m d'auto-induction qui apparait dans une portion de circuit d'auto inductance L est:

$$e = \frac{-Ldi}{dt}$$

c. Différence de potentiel aux bornes d'une bobine

La DDP aux bornes d'une bobine d'un inducteur AB dont l'auto inductance L a une résistance r, parcouru par un courant d'intensité variable i est :

$$U_{AB} = ri + \frac{Ldi}{dt}$$

d. Étude énergétique

Puissance échangée

La puissance électrique échangée par le dipôle que constitue la bobine avec le reste du circuit est :

$$P = U_{AB}i = ri^2 + Li\frac{di}{dt}$$
$$\Rightarrow P = ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

P est la somme des deux bornes

$$P = P_J + P_L$$

$P_J = ri^2$ est toujours positive. Ce terme correspond à l'effet joule.

Si $P_L = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) > 0$, la bobine se comporte comme un récepteur, elle reçoit du travail électrique du reste du circuit.

Si $P_L < 0$, la bobine se comporte comme un générateur ; elle cède du travail électrique au reste du circuit.

Énergie d'une bobine

L'énergie emmagasinée par un conducteur dont l'auto inductance est L et qui est parcourue par un courant d'intensité i est :

$$\boxed{W = \frac{1}{2}Li^2}$$

Application n°1

Un solénoïde assez long, comprenant 100 spires par mètre, chacune de rayon r = 5cm est parcouru par un courant d'intensité $i = 0{,}1\cos(1000t)$. Une bobine circulaire plate comportant 100 spires de rayon moyen R = 8cm, entoure la région centrale du solénoïde.

1. Déterminer l'expression en f(t) du flux inducteur à travers la bobine plate.
2. La bobine plate constituant un circuit fermé de résistance r = 0,252. Quelle est l'expression de l'intensité qui l'a parcourue ?
   R = 0,2Ω

Solution :

n = 100 spires/m ; r = 5cm = 5.10^{-2}m ; $i = 0{,}1\cos(100t)$

1) Détermination du flux inducteur à travers la bobine plate

$$\Phi = NBS$$

$N = 1000$ spires

$B =$ Champ à l'intérieur du solénoïde

$B = M_0 ni = M_0 n.0{,}1\cos\ (1000t)$

$S =$ Surface de la bobine = surface du solénoïde $= \pi r^2$

Orientons la spire de la bobine dans le sens de B

$$\Rightarrow (B,S) = 0 \Rightarrow \ \Phi = NBS$$
$$\Rightarrow \ \Phi = N.M_0X0{,}1\pi r^2\cos(1000t)$$
$$= 100X4\pi X10^{-7}X(5.10^{-2})^2.\pi\cos(1000t)$$
$$= 100X4\pi^2.10^{-7}X2{,}5.10^{-4}\cos(1000t)$$
$$\Phi = 9{,}87.10^{-8}\cos(1000t)$$

2) Intensité que parcourt la bobine

$$i = \frac{e}{R} \qquad or \quad e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Rightarrow \; e = -\frac{d}{dt}(9{,}87.10^{-8}\cos(1000t)$$
$$= 9{,}87.10^{-8}\int \cos(1000t)\,dt$$
$$= 9{,}87.10^{-8}X1000\sin(1000t)$$
$$e = 9{,}87.10^{-5}\sin(1000t)$$
$$i = \frac{9{,}87.10^{-5}}{8.10^{-2}}\sin(1000t)$$
$$i = 1{,}23.10^{-3}\sin(1000t)$$

Application n°2

Calculer l'inductance d'un solénoïde dont la longueur L=0,5m, est très grande devant son rayon r=2,5cm. Le nombre de spires par unité de longueur est n= 2.10^4 spires/m.

Solution

$$\Phi = Li \quad (1) \qquad , \qquad \Phi = NBS = NBScos(B,S)$$

Orientons la spire : $\vec{L}$, $\vec{S}$ et B ont même sens.

(B, S) =0

$S = \pi r^2$

$B = M_0.n.i$

$N = nl$

$$\Phi = NBS \;\; \Rightarrow \;\; \Phi = n.l.M_0.n.i.\pi.r^2 = M_0.n^2 l\pi.r^2 i \;\; (2)$$
$$(1) = (2) \;\; \Leftrightarrow \;\; Li = M_0.n^2 l\pi.r^2 i$$
$$L = M_0 n^2 l\pi r^2$$
$$AN:\; L = 4\pi.10^{-7}X(4.10^4)^2X0{,}5X\pi X(2{,}510^{-2})^2$$
$$L = 0{,}5H$$

$L = \frac{N_0 N^2 S}{l}$ $\; avec\; N = nl,\; S = \pi r^2$

$$L = \frac{N_0 n^2 l^2 \pi r^2}{l} = N_0 n^2 l\pi r^2$$

CHAPITRE 7 : LES CIRCUITS OSCILLANTS

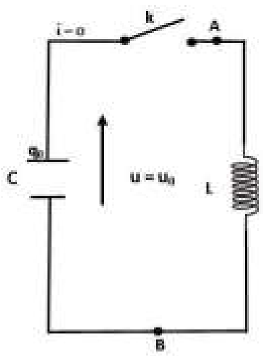
I- FREQUENCE DES OSCILLATIONS D'UN CIRCUIT (L, C)

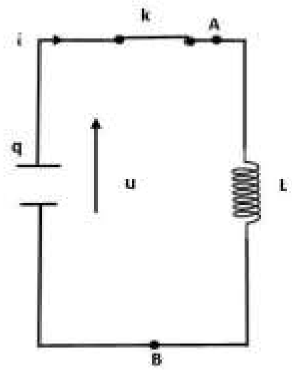
A- <u>ÉQUATION DIFFERENTIELLE D'UN CIRCUIT (L, C)</u>

Considérons le circuit schématisé ci-après : il comprend :

- Un condensateur de capacité C chargé sous la tension continue $U = U_0$, l'armature de haut porte la charge q_0 ;
- Une bobine d'inductance L et de résistance négligeable.

À l'instant t = 0, on ferme l'interrupteur k : le condensateur se décharge à travers la bobine ; on note i l'intensité algébrique du courant à l'instant t et q la charge du condensateur (fig. b).





i est positive lorsque le courant circule dans le sens de la flèche rouge, négative dans le cas contraire.

- Calculons la tension U_{AB}

- Aux bornes du condensateur : $U = \frac{q}{C}$
- Aux bornes de la bobine : $U = L\frac{di}{dt}$

D'où $U = \frac{q}{C} = L\frac{di}{dt}$ (1)

La charge du condensateur passe par la valeur q à l'instant t à la valeur $q + dq$ à l'instant $t + dt$; la quantité d'électricité qui quitte l'armature supérieure vaut :

$$idt = q - (q + dq) = -dq \Rightarrow i = -\frac{dq}{dt} = -C\frac{dU}{dt} \quad (2)$$

Dérivons les deux membres de (2) par rapport à t et reportons dans (1) :

$$\frac{di}{dt} = -C\frac{dU^2}{dt^2} \quad ; \quad \frac{di}{dt} = \frac{U}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{U}{L} = -C\frac{dU^2}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{dU^2}{dt^2} + \frac{U}{LC} = 0} \quad ou \quad \frac{dU^2}{dt^2} + \omega_0^2 U = 0 \quad avec\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

B- CALCUL DE LA TENSION U(t)

- La solution de l'équation différentielle précédente est de la forme :

$$U = U_{max}\cos(\omega_0 t - \varphi)$$

Cela signifie que, la tension U entre les armatures, subit des oscillations sinusoïdales caractérisées :

- Par la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$
- Ou par la fréquence $N_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$
  - La détermination des valeurs de U_{max} *et de* φ, s'obtient en exprimant les conditions initiales, c'est-à-dire les valeurs :

$$U(t=0) = U_0 \;\; et \; i(t=0) = -\frac{dq}{dt}(t=0) = 0$$

$$U(t=0) = U_{max}\cos\varphi = U_0 \quad (3)$$

À $t = 0$, $U = U_0 = U_{max}\cos\varphi$ $(*)$; $\frac{dq}{dt} = C\frac{dU}{dt}$ or $\frac{dU}{dt} = -\omega_0 U_{max}\sin(-\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \begin{cases}\pi \\ 0\end{cases}$

La condition $(*)$ satisfait à $\varphi = 0$

D'où

$$U = U_0\cos(\omega_0 t)$$

Remarque : un circuit (L, C) est nommé, pour cette raison, circuit oscillant.

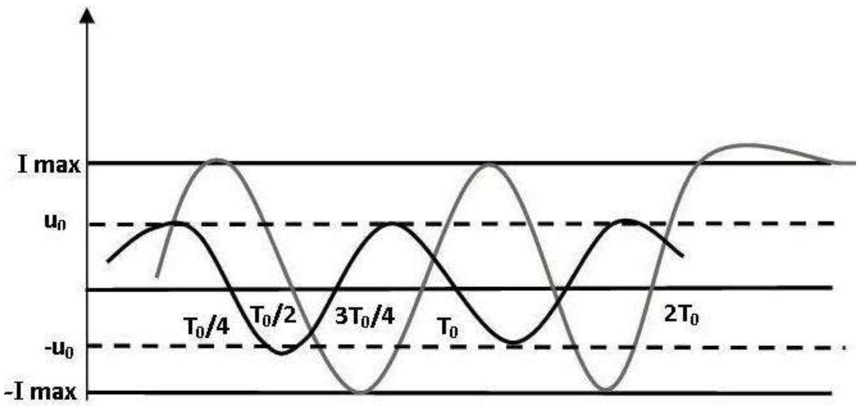
C- CALCUL DE L'INTENSITE $i(t)$

$$i = -C\frac{dU}{dt} = CU_0\omega_0\sin(\omega_0 t) = I_{max}\sin(\omega_0 t) \quad en\, posant \;\; I_{max} = CU_0\omega_0$$

- **<u>Représentation graphique</u>**

  U = U_0 cosw_0t i = Imaxsinw_0t

  De période $T_0 = \frac{2\pi}{w_0}$



Notons que l'intensité i passe par un extremum aux instants : $t = \frac{T_0}{4}; \frac{3\pi}{4}$; ... lorsque la tension U s'annule et vice versa. Ces fonctions sinusoïdales U *et* i sont dites en quadrature.

II- <u>ASPECT ENERGETIQUE</u>

Dans le cas où la résistance R est négligeable, cela signifie qu'il n'y a pas dissipation d'énergie par effet joule. L'énergie présente dans le circuit demeure donc constante ; à l'instant t, elle existe :

- Sous forme d'énergie électrostatique E_E emmagasinée dans le
- condensateur : $E_E = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}CU_0^2\cos^2(\omega_0 t)$.

- Et sous forme d'énergie magnétique E_M dans la bobine : $E_M = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}I_{max}^2 \sin^2(\omega_0 t)$ or
  $I_{max} = CU_0\omega_0 \;\Rightarrow E_M = \frac{1}{2}LC^2\omega_0^2U_0^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}CU_0^2 \sin^2(\omega_0 t) \;\; car \;\; LC\omega_0^2 = 1$

D'où

$$E_E + E_M = \frac{1}{2}CU_0^2[\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)] = \frac{1}{2}CU_0^2$$

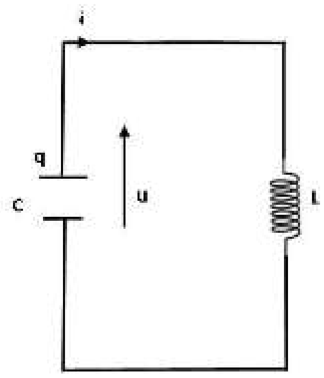
Puisque $\quad U_0 = \frac{I_{max}}{C\omega_0} \Rightarrow \;\; E_E + E_M = \frac{1}{2}C\frac{I_{max}^2}{C^2\omega_0^2} = \frac{1}{2}\frac{I_{max}^2}{C\omega_0^2} = \frac{1}{2}LI_{max}^2$

$$E = E_E + E_M = \frac{1}{2}CU_0^2 = \frac{1}{2}LI_{max}^2 = constante$$

Si l'énergie électrostatique diminue, l'énergie magnétique augmente, à somme constante, et inversement.

- Au cours des oscillations d'un circuit (L, C) non résistant, l'énergie totale se conserve.
- Il y a transfert d'énergie du condensateur vers la bobine et inversement.
- Le cas où le circuit possède une résistance, l'énergie emmagasinée dans un circuit diminue progressivement à cause de l'effet joule.

Exercice d'application :
On réalise un circuit oscillant en associant comme l'indique la figure, un condensateur de capacité C et une bobine d'inductance L = 40mH et de résistance négligeable. Le circuit est le siège d'oscillation électrique de fréquence $N_0 = 800Hz$



a. Calculer la pulsation propre ω_0 du circuit et la valeur de la capacité C.
b. À l'instant t = 0, l'intensité i est maximale et a pour valeur $i = I_{max} = 2A$. Donner l'expression de $i \;\; en \;\; fonction \; de \; t$.
c. Exprimer la tension U aux bornes du condensateur en $fonction \; de \; t$.
   À quelles dates la charge q est-elle, pour la première fois
- Positive et maximale ?
- Négative et minimale ?
   Calculer l'énergie présente dans le circuit à ces dates. Sous quelle forme(s) existe-t-elle ?
d. Calculer l'énergie électrostatique et l'énergie magnétique aux instants t'=6,25.10^{-4}s et t''=2.10^{-4}s.

Solution :
a. Pulsation propre :

$$\omega_0 = 2\pi N_0 \;\; \Rightarrow AN: \;\; \omega_0 = 2X3{,}14X800 = 5{,}027.10^3 rad/s$$

La relation : $LC\omega_0^2 = 1$ permet de calculer C.

$$C = \frac{1}{4.10^{-2}.(5,027.10^3)^2} = 9,9.10^{-7}F \cong 1NF$$

b. Dans un circuit (L, C), l'intensité i est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation ω_0, donc :

$$i = I_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

On détermine la valeur de φ en écrivant la condition initiale :
$i = I_{max}$ pour t = 0, soit $I_{max} = I_{max}\cos\varphi$; $\cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0\ et\ i = I_{max}\cos(\omega_0 t)$

$$\Rightarrow i = 2\cos(5027t) \qquad (i\ en\ A\ \ et\ t\ en\ s)$$

c. La tension U aux bornes du condensateur est aussi la tension aux bornes de la bobine :
$U = L\frac{di}{dt}$; $\frac{di}{dt} = -\omega_0 I_{max}\sin(\omega_0 t)$ d'où $U = -L\omega_0 I_{max}\sin(\omega_0 t)$

$$AN:\ U = -4.10^{-2} \times 5027 \times 2\sin(5027) = -402\sin(5027t)$$

- $q = CU = -L\omega_0 I_{max}\sin(\omega_0 t) = -q_{max}\sin(\omega_0 t)$

  $q = q_{max}$ lorsque $\sin(\omega_0 t) = 1,\ \Rightarrow \omega_0 t = \frac{3\pi}{2} = 2\pi$

  q atteint pour la première fois la valeur $-q_{max}$ à l'instant :

$$t_1 = \frac{3\pi}{2\omega_0}\ ;\ \ \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}\ \ \Rightarrow\ t_1 = \frac{3T_0}{4}$$

$$AN:\ t_1 = \frac{3}{4 \times 800} = 9,375.10^{-4}s$$

  $q = -q_{max}$ lorsque $\sin(\omega_0 t) = 1;\ \Rightarrow\ \omega_0 t = \frac{\pi}{2}$

  q atteint pour la première fois la valeur $-q_{max}$ à l'instant :

$$t_2 = \frac{\pi}{2\omega_0} = \frac{T_0}{4};\ \Rightarrow\ AN:\ \ t_2 = \frac{1}{4 \times 800} = 3,125.10^{-4}s$$

- Avec les conventions choisies : $i = -\frac{dq}{dt}$; lorsque la charge q est maximale ou minimale, le nombre dérivé $\frac{dq}{dt}$ est nul et l'intensité i est nulle également.

  L'énergie magnétique : $E_M = \frac{1}{2}Li^2$ est nulle, toute l'énergie du circuit est sous forme d'énergie électrostatique E_E emmagasinée dans le condensateur.

$$E_E = \frac{1}{2}\frac{q_{max}^2}{C} = \frac{1}{2}CU_{max}^2 \Rightarrow AN:\ \ E_E = \frac{1}{2} \times 10^{-6} \times (402)^2 \cong 8.10^{-2}J$$

  À t = 0 ; $i = I_{max}$. Or vous savez que dans un circuit (L, C), l'intensité est extremale lorsque la tension U s'annule et réciproquement :

  $i = I_{max}$; $E_M = \frac{1}{2}LI_{max}^2$; $U = 0$; $\frac{1}{2}CU^2 = 0$

- Posons $t = t_1\ ou\ t_2$: q est extremale, donc $i = 0$; $E'_M = 0$. Toute l'énergie est sous forme d'énergie électrostatique :

$$E_M + E_E = E'_M + E'_E\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{2}LI_{max}^2 + 0 = 0 + E'_E \Rightarrow E'_E = \frac{1}{2}LI_{max}^2$$

  $AN:\ E'_E = \frac{1}{2} \times 4.10^{-2} \times 4 = 8.10^{-2}J$t

d. Calculons les tensions U' et U'' :

$$U' = -402\sin(5027 \times 6,25.10^{-4}) = 0;\ E'_E = \frac{1}{2}CU'^2 = 0$$

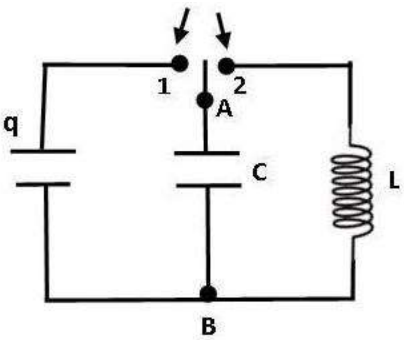
$$U'' = -402\sin(5027 \times 2.10^{-4}) \cong -339V$$

$$E''_E = \frac{1}{2}CU''^2 = \frac{10^{-6}}{2}X(339)^2 \cong 5{,}8.10^{-2}J$$
$$E'_M + E'_E = E''_M + E''_E = 8.10^{-2}J = constante$$
$$E'_M = 8.10^{-2} - E'_E = 8.10^{-2}J$$
$$E''_M = 8.10^{-2} - E''_E = 8.10^{-2} - 5{,}8.10^{-2} = 2{,}2.10^{-2}J$$

Exercice : Bac D 97

Un condensateur de capacité C = 12,5NF est chargé grâce à une batterie de f.é.m. E = 12V et résistance négligeable (l'interrupteur K_2 étant ouvert et l'interrupteur K_1 fermé).

1. Calculer la charge maximale prise par le condensateur et préciser l'armature qui s'est chargée positivement.
2. Le condensateur peut ensuite se décharger dans une bobine d'inductance L=0,8H, supposée d'abord de résistance nulle, pour cela, on ouvre K_1 et à la date t = 0, on ferme K_2.
   a. Quelle est à la date t = 0, la valeur U_0 de la tension U_{AB} et l'intensité i_0 du courant dans le circuit LC ?
   b. À l'instant t, la tension aux bornes du condensateur vaut $U_C = U_{AB}$. Comment varie U_C en $f(t)$? Calculer la pulsation propre ω_0 et la fréquence propre du circuit LC, et donner l'expression de U_C en $f(t, \omega_0 U_0,)$.
3. On visualise U_C sur l'écran d'un oscillographe dont le balayage horizontal du spot correspond à 5.10-3s/cm et dont la sensibilité est 6v/cm. Représenter la courbe $U_C = f(t)$ que l'on observera sur l'écran de largeur 8cm.
4. La bobine a, en réalité, une résistance R. dessiner une des allures de courbes possibles que l'on pourra observer sur l'écran. Quel est le rôle de R ?



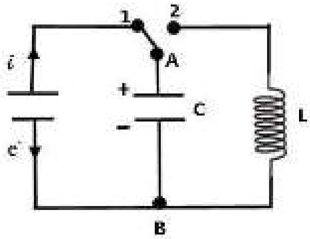
Corrigé

C = 12,5 NF ; L = 0,8H ; U = E = 12V

- Charge maximale

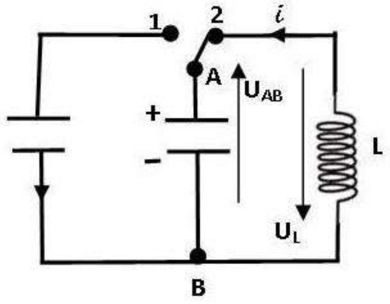
$q_{max} = CU$ AN : $q_{max} = 12{,}5.10^{-6}X12$ $\Rightarrow$ $q_{max} = 1{,}5.10^{-4}$

L'armature A se charge positivement.



- K_2 fermé
  a. La valeur $U_0 = U_{AB}$ $\Rightarrow$ $U_{AB} = \frac{q}{C} = U_0$

AN: $U_0 = \frac{1{,}5.10^{-4}}{12{,}5.10^{-6}} = 12V$ à $t = 0$; $i_0 = 0$



Le condensateur à l'instant t se décharge dans la bobine. Si la charge varie, c'est que la tension U aussi varie au cours du temps.

$$U_C + U_L = 0\ ; \quad U_C = \frac{q}{C}\ \ et\ U_L = L\frac{di}{dt}\ \ or\ \ i = \frac{dq}{dt} = \dot{q} \Rightarrow\ U_L = L\frac{d\dot{q}}{dt} = L\ddot{q}$$

$$\Rightarrow \frac{q}{C} + L\ddot{q} = 0 \Rightarrow\ \ \ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0\ \ (1)$$

$$q = \begin{cases}\dot{q} = C\dot{U} \\ \ddot{q} = C\ddot{U}\end{cases} \ \Rightarrow\ \ \ddot{U} + \frac{1}{LC}U = 0\ \ \ (2)$$

(1) Est de la forme : $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$ (3)

$$(3) = (2)\ \Leftrightarrow\ \ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\ \Rightarrow\ AN\!:\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0{,}8X12{,}5.10^{-6}}} = 316{,}29\,rad/s$$

$$N_0 = \frac{1}{T}\ \ or\ T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{316{,}29} = 2.10^{-2}s$$

$$\Rightarrow N_0 = \frac{1}{2.10^{-2}} = 50Hz$$

$U_C\ en\ f(t, \omega_0\ et\ U_0)$:

$$q(t) = q_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\dot{q}(t) = -\omega_0 q_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

à $t = 0$; $q_0 = q_{max}\cos\varphi > 0$; $q_0 > 0$; $q_{max} > 0\ \Rightarrow\ \cos\varphi > 0$

à $t = 0$; $\dot{q_0} = -\omega_0 q_{max}\sin\varphi = 0\ \Rightarrow\ \ \varphi = \begin{cases}0 \\ \pi\end{cases}$

$\varphi = 0$ est compatible avec la condition

$$or\ \ q_0 = q_m = 1{,}5.10^{-4}c$$

$$q(t) = 1{,}5.10^{-4}\cos(316{,}29t)$$

$$U(t) = \frac{q}{C} = \frac{1{,}5.10^{-4}}{12{,}5.10^{-6}}\cos(316{,}29t)$$

$$U(t) = 12\cos(316{,}29t)$$

Autre méthode

$\ddot{U} + \omega_0^2 = 0$

$\begin{cases}U = U_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi) \\ \dot{U} = -\omega_0 U_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)\end{cases}$

à $t = 0$; $U = U_0 = U_{max}\cos\varphi > 0$; $U_m > 0\ \ \Rightarrow\ \cos\varphi > 0$

$$\dot{U} = -\omega_0 U_{max}\sin\varphi = 0$$

$$\omega_0 \neq 0 \;;\; U_{max} \neq 0 \;\Rightarrow\; \sin\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \varphi = \begin{cases} \pi \\ 0 \end{cases} \qquad U_0 = U_{max} = 12V$$

D'où

$$U(t) = 12\cos(316{,}29t)$$

- Sensibilité verticale
  S = 6V/cm
  1cm $\rightarrow$ 6V
  Xcm $\rightarrow$ 12V

$$\Rightarrow x = \frac{12}{6} = 2cm$$

- Balayage 5.10^{-3} s/cm
  1cm $\rightarrow$ 5.10^{-3} s
  Y $\rightarrow$ $2.10^{-2}s$

$$y = \frac{2.10^{-2}}{5.10^{-3}} = 4cm$$

  1 période s'étale 4cm d'écran, avec 8cm d'écran, on aura 2périodes.

5. Si R n'est pas nulle, il y a amortissement des amplitudes

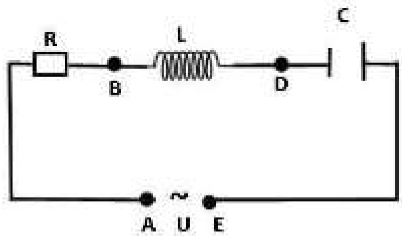
CHAPITRE 8 : CIRCUITS (R, L, C) EN RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ

I- ÉTUDE THEORIQUE DU CIRCUIT (R, L, C) SERIE

1- EQUATION DIFFERENTIELLE DU CIRCUIT

Soit le circuit (R, L, C) ci-après, on a choisi un sens positif et la tension aux bornes du circuit est :

$$U_{AB} = U_{AD} + U_{BD} + U_{BE}$$



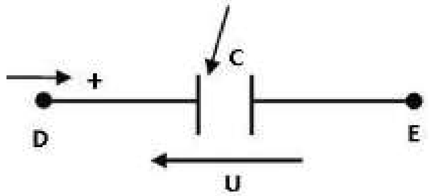
$U_{AB} = Ri$;(loi d'ohm aux bornes de R)

$U_{BD} = L\frac{di}{dt}$ $or\ i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow U_{BD} = L\ddot{q}$;

$U_{BE} = \frac{q}{C}$;

D'où l'équation différentielle

$U = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = Ri + L\ddot{q} + \frac{q}{C} \Leftrightarrow U = Ri + L\ddot{q} + \dot{q}R$



- $q_D = CU_{DE}$ $ou\ q = CU_{DE}$
- $i = \frac{dq}{dt}$ lorsque le sens positif est dirigé vers l'armature qui porte la charge q.

2- LES GRANDEURS EFFICACES

a. L'intensité efficace d'un courant alternatif sinusoïdal

Un condensateur ohmique de résistance R est parcouru par le courant alternatif sinusoïdal :

$$i = I_{max}\cos(\omega t)$$

L'intensité efficace se calcule par :

$$I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t)dt = \frac{I_m^2}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)dt$$

$$\int \cos^2(\omega t)dt = \int \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos(2\omega t)\, dt$$

$$\int \cos(2\omega t)\, dt = \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t) + cste$$

$$\int \cos^2(\omega t)dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4\omega}\sin(2\omega t) + cste$$

$$\int_0^T \cos^2(\omega t)dt = \frac{1}{2}[t]_0^T + \frac{1}{4\omega}[\sin(2\omega t)]_0^T$$

$$= \frac{1}{2}(T-0) + \frac{1}{4\omega}[\sin(2\omega T) - \sin 0] = \frac{1}{2}T + 0$$

Car $\sin(2\omega T) = \sin 4\pi = 0$

D'où finalement :

$$\int_0^T \cos^2(\omega t)dt = \frac{1}{2}T$$

$$I^2 = \frac{I_m^2}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)dt = \frac{I_m^2}{T} X \frac{T}{2} = \frac{I_m^2}{2}$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

b. <u>Tension efficace</u>

La loi d'ohm aux bornes du circuit (RLC) est de forme :

$$U = RI$$

U étant la tension variable aux bornes du condensateur ohmique.

Pour le courant alternatif sinusoïdal :

$$i = I_m \cos(\omega t)$$

Donc

$$U = RI_m \cos(\omega t) = RI\sqrt{2}\cos(\omega t)$$

On note que U et i sont en phase.

Si l'on exprime U sous la forme habituelle

$$U = U_m \cos(\omega t)$$

U_m étant la valeur maximale de la tension alternative sinusoïdale U(t), on peut écrire :

$$U_m = RI_m = RI\sqrt{2}$$

Lorsque le conducteur ohmique est parcouru par le courant continu d'intensité I, la tension à ses bornes vaut U tel que :

$$U = RI$$

Et les grandeurs U_m et U sont liés par :

$$\begin{cases} U_m = RI\sqrt{2} \\ U = RI \end{cases} => \ U_m = U\sqrt{2} \ \ ou\ U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

3- <u>NOTION DE PHASE</u>

Considérons les deux grandeurs alternatives sinusoïdales :

$i = I_m \cos(\omega t)$ et $U = U_m \cos(\omega t + \varphi)$.

<u>Définition :</u> φ est la phase de la fonction U(t) par rapport à la fonction i(t). φ est en radian.

On dit également que :

- φ mesure l'avance de phase de U(t) par rapport à i(t) ou le retard de phase de i(t) par rapport à U(t). l'angle φ est algébrique.
- Si $\varphi > 0$; la fonction U(t) est en avance de φ radians sur la fonction i(t) ; bien entendu i(t) est en retard de φ radians par rapport à U(t).
- Lorsque $\varphi = 0$; les deux grandeurs sont en phase.
  Exemple : $i = I_m \cos(\omega t)$ $\ et\ U = U_m \cos(\omega t)$
- Pour $\varphi = \pm\pi rad$; elles sont dites en opposition de phase

Exemple : $i = I_m \cos(\omega t) \quad et\ U = U_m \cos(\omega t + \pi) = -U_m \cos(\omega t)$

- Quand $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}\ rad$; elles sont en quadrature.

  Exemple1 : $i = I_m \cos(\omega t) \quad et\ U = U_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -U_m \sin(\omega t)$

  U est en quadrature avance par rapport à i

  Exemple 2 : $i = I_m \cos(\omega t) \quad et\ U = U_m \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = U_m \sin(\omega t)$

  U est en quadrature retard sur i.

4- RESOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE PAR LA METHODE DE FRESNEL

Rappel :

$$U = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt \ (1)$$

$i = I_m \cos(\omega t)$

$U = U_m \cos(\omega t + \varphi)$

$\frac{di}{dt} = -I_m\omega \sin(\omega t) = \omega I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

$\int idt = ? \quad i = \frac{dq}{dt}\ \ avec\ q = CU \Rightarrow U = \frac{q}{C}\ or\ U = U_m \cos(\omega t)$

$\frac{1}{C}\int U_m \cos(\omega t)\, dt = \frac{1}{C\omega}\sin(\omega t) = \frac{1}{C\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

(1) Devient

$U_m \cos(\omega t + \varphi) = RI_m \cos(\omega t) + L\omega I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I_m}{C\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

Or $I_m = I\sqrt{2} \quad et \quad U_m = U\sqrt{2}$

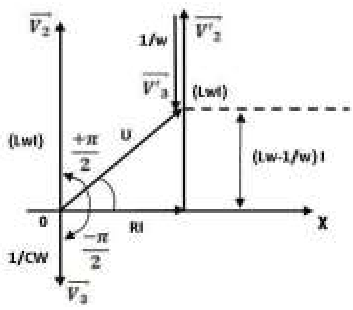
$$U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi) = RI\sqrt{2}\cos(\omega t) + L\omega I\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I\sqrt{2}}{C\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Par simplification par $\sqrt{2}$, on a :

$$U\cos(\omega t + \varphi) = RI\cos(\omega t) + L\omega I\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I}{C\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Chacun des membres de cette égalité représente une grandeur sinusoïdale ; les vecteurs de Fresnel correspondants sont donc égaux. Cherchons le vecteur de Fresnel associé au second membre.

- $RI\cos\omega t \quad \Rightarrow V_1 = \begin{cases} norme: RI \\ (OX, V_1) = 0 \end{cases}$
- $L\omega I\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \ V_2 = \begin{cases} norme: L\omega I \\ (OX, V_2 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$
- $\frac{I}{C\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \ \Rightarrow \ V_3 = \begin{cases} norme: \frac{I}{C\omega} \\ (OX, V_3) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$



Il apparait donc dans la figure un triangle rectangle d'hypoténuse U et de coté $RI\ et\ \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)I$; d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$U^2 = R^2I^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 I^2$$

$$\Rightarrow U^2 = I^2\left(R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{U^2}{I^2} = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$$

Posons $z = \frac{U}{I}$ = impédance,

$$\Rightarrow \quad z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

Z s'exprime en ohm (Ω) et l'avance de phase φ de U par rapport à i est tel que, dans le même triangle :

$$\tan\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

- Si $\varphi > 0$; U est effectivement en avance sur i, c'est le cas quand $L\omega > \frac{1}{C\omega}$ car $\tan\varphi > 0$
- Si $\varphi < 0$; U se trouve en retard de $|\varphi|$ sur i ; cela se produit lorsque $L\omega < \frac{1}{C\omega}$ car $\tan\varphi < 0$.

5- METHODE A UTILISER DANS UN PROBLEME PORTANT SUR UN CIRCUIT (RLC) SERIE

Assimiler les éléments suivants :

a) On applique la formule $U = zI$

Soit pour le circuit entier soit pour un dipôle appartenant à ce circuit. Aux bornes du condensateur, par exemple, la valeur efficace de la tension est U_C tel que :

$$U_C = z_C I$$

Avec z_C : impédance du condensateur

$$z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad et \quad \tan\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

Si le dipôle considéré ne comporte pas de résistance, on fait disparaitre le terme en R (R=0) ; s'il est non inductif, on élimine le terme L (L=0) et s'il ne contient pas de condensateur, c'est le terme C que l'on enlève (ce qui correspond à $\frac{1}{C\omega} = 0$).

Exemple :

- Circuit (RL) :

$$z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \quad ; \quad \tan\varphi = \frac{L\omega}{R}$$

- Circuit (RC)

$$z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} \quad ; \tan\varphi = \frac{1}{RC\omega}$$

- Inductance pur L

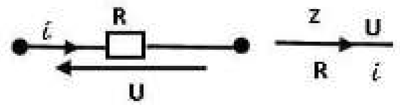
$$z = L\omega \quad ; \quad \tan\varphi = +\infty \quad \left(car\ R = 0\ et\ \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$$

- Capacité pur C :

$$z = \frac{1}{C\omega}; \quad \tan\varphi = -\infty\ (car\ R = 0);\ \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

b) Étude de quelques circuits

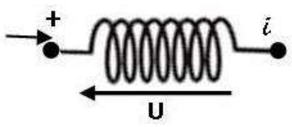
- **Résistance pure : R**

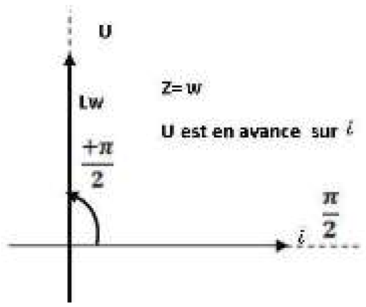


Z = R ; U et i sont en phase.

La tension aux bornes d’une résistance est en phase avec l’intensité.

- **Inductance pur : L**

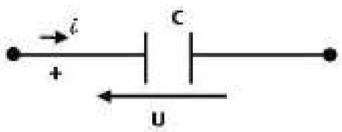


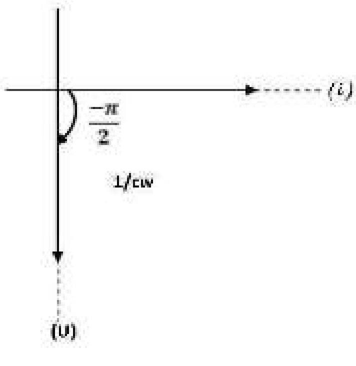


$z = L\omega$; U est en avance de $\frac{\pi}{2}\ sur\ i$

La tension aux bornes d’une inductance pure est en quadrature sur l’intensité.

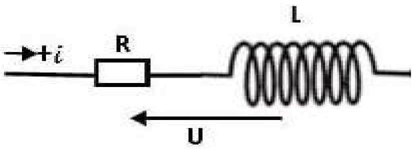
- **Capacité pure : C**

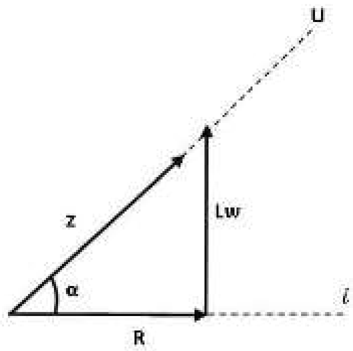




$z = \frac{1}{C\omega}$; U est en retard de $-\frac{\pi}{2}$ sur i

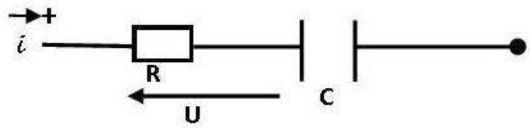
- **<u>Circuit (RL)</u>**

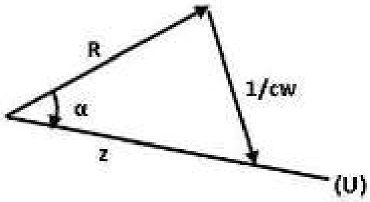




$z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$; U en avance sur i ; $\tan\varphi = \frac{L\omega}{R}$

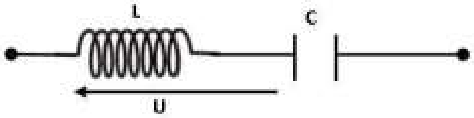
a- Circuit (RC)

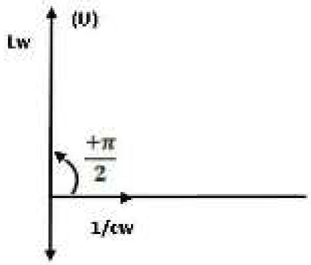




$z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}$; U est en retard sur i ; $\tan\varphi = \frac{1}{RC\omega}$

- **Circuit (LC)**





$L\omega > \frac{1}{C\omega}$; $z = L\omega - \frac{1}{C\omega}$; U est en avance de $\frac{\pi}{2}$ sur i.

Exercice d'application

Un circuit est constitué d'une résistance de R = 200 Ω, d'une bobine inductive (inductance L=0,1H ; résistance négligeable et d'un condensateur de capacité C= 1 NF placés en série. Il est alimenté par un générateur B.F. qui délivre à ses bornes une tension alternative sinusoïdale U de fréquence 250Hz et de valeur efficace U=5V.

a) Calculer l'intensité dans le circuit.

b) Si l'on se donne la tension instantanée U sous la forme : $U = U_m\cos(\omega t)$; quelle est la loi de la variation de l'intensité instantanée i en fonction de t ?

c) Calculer les tensions :

- U_R : aux bornes de la résistance ;
- U_B : aux bornes de la bobine ;

- U_C : aux bornes du condensateur

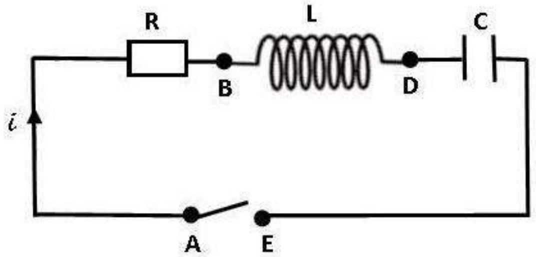
  Comparer la somme $U_R + U_B + U_C$ à la tension efficace appliquée U et conclure.

d) Quelles sont les valeurs des impédances :

- Z : du circuit (RLC) série ;
- z_R : de la résistance ;
- z_B : de la bobine ;
- z_C : du condensateur

Comparer la somme $z_R + z_B + z_C$ à z et conclure.

Solution



a) Pour calculer l'intensité efficace I, on applique la formule $U = z.I$ à l'ensemble du circuit.

$$z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

- $R = 200\Omega\ ; N = 250Hz\ ;\ \omega = 2\pi N = 500\pi rad/s$
- $L\omega = 0{,}1X500\pi = 157{,}1\Omega$
- $\frac{1}{C\omega} = \frac{1}{10^{-6}X500\pi} = 636{,}6\Omega$
- $L\omega - \frac{1}{C\omega} \cong 157{,}1 - 636{,}6 \cong -479{,}5\Omega$

D'où

$$z = \sqrt{200^2 + (-479{,}5)^2} \cong 5{,}196.10^2\Omega$$

On a alors immédiatement l'intensité

$$I = \frac{U}{z} \quad => AN:\ \ I = \frac{5}{5{,}196.10^2} 9{,}623.10^{-3}A\ \ => I = 9{,}6mA$$

b) La règle à retenir est : U est en avance par rapport à i de φ. Calculons φ.

$$\tan\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \frac{-479{,}2}{200} = -2{,}40$$

$$\varphi = -67{,}36°\ ou\ -1{,}176rad$$

$U = U_m\cos(\omega t)$ et U est en avance de φ par rapport à i ; il faut donc poser :

$$i = I_m\cos(\omega t - \varphi)$$

Et ici φ est négatif.

$$I_m = I\sqrt{2} = 9{,}623.10^{-3}X\sqrt{2} \cong 1{,}36.10^{-2}A\ \ ;\ \ \varphi = -1{,}176rad \cong -1{,}18rad$$

D'où

$$i = 1{,}36.10^{-2}\cos(500\pi t + 1{,}18)$$

c) On applique la formule $U = z.I$ successivement aux bornes des trois dipoles du circuit :

- Aux bornes de R : $U_R = z_R.I\ \ avec\ z = 200\Omega\ \ => AN : U_R = 200X9{,}623.10^{-3}$

$$U_R = 1,92V$$

- Aux bornes de la bobine : $U_B = z_B.I \quad avec\ z_B = L\omega = 157,1\Omega$

$$=> AN:\ U_R = 157,1X9,623.10^{-3} \cong 1,51V$$

- Aux bornes du condensateur : $z_C = \frac{1}{C\omega} = 636,6\Omega$

$$=>\ AN:\ U_C = 636,6X9,623.10^{-3} = 6,13V$$

- $U_R + U_B + U_C = 9,6V$ alors que U=5V

On en déduit le résultat à connaitre : les tensions efficaces ne s'additionnent pas.

d) Les impédances en série ne s'additionnent pas.
Finalement les seules grandeurs qui s'additionnent en alternatif, sont les tensions instantanées U.

II- CIRCUIT (RLC) SERIE A LA RESONANCE, PUISSANCE EN ALTERNATIF

Étude théorique de la résonance :

1- FREQUENCE DE RESONANCE

Reprenons la valeur de l'impédance d'un circuit (RLC) série :

$$z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

On obtient z à partir d'une somme de deux termes, le premier est constant et le second dépend de ω.
Z est donc minimal et, puisque $I = \frac{U}{z}$, l'intensité efficace I est maximale lorsque $\omega = \omega_0$ tel que :

$$L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0 \quad ou\ L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} => LC\omega_0^2 = 1$$

- $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ est la pulsation propre du circuit
- $N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ est la fréquence propre du circuit
- $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ est la période propre du circuit

2- IMPEDANCE DU CIRCUIT A LA RESONANCE

À la résonance, $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \quad donc \quad z = R$

À la résonance, l'impédance du circuit est minimale et égale à sa résistance. On en déduit la valeur maximale I_0 de l'intensité efficace I :

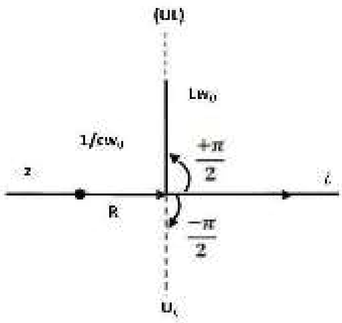
$$I = \frac{U}{z} \quad avec\ z = R \Rightarrow \quad I_0 = \frac{U}{R}$$

Remarque : à la résonance, U et i sont en phase. $\Rightarrow \tan\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$.

3- CONDITION DE FRESNEL

Considérons ici que la bobine est assimilable à une inductance pure L (r=0), la résistance totale étant encore notée R.

Les vecteurs de Fresnel associés à l'inductance et à la capacité, ont la même longueur, puisque : $L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$



Elle montre que :

- Z = R (résultat connu)
- U et i sont en phase (résultat connu)
- La tension instantanée U_L aux bornes de l'inductance est en avance de $\frac{\pi}{2}$ sur i ;
- La tension instantanée U_C aux bornes du condensateur en retard de $\frac{\pi}{2}$ sur i.

On en déduit donc que U_L et U_C sont en opposition de phase et puisque :

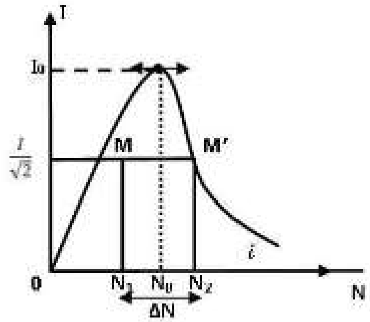
$$\begin{cases} U_L = z_L I = L\omega_0 I \\ U_C = z_C I = \dfrac{1}{C\omega_0} I = L\omega_0 I \end{cases} \Rightarrow U_L = U_C$$

Et les deux tensions instantanées U_L et U_C se compensent à chaque instant : $U_L + U_C = 0$
Tout se passe comme si le circuit s'identifiait à la résistance R.

4- <u>DEFINITION DE LA BANDE PASSANTE D'UN CIRCUIT (RLC)</u>

La bande passante d'un circuit (RLC) désigne l'ensemble des fréquences pour lesquelles la réponse en intensité est à 71% de la réponse à la résonance.

Courbe à la résonance :
La courbe de la résonance traduit les variations de l'intensité efficace I dans le circuit en fonction de la fréquence N lorsque la valeur efficace U de la tension d'alimentation reste constante.



Cherchons les valeurs de N pour lesquelles :

$I = \frac{U}{z} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{U}{R}.\frac{1}{\sqrt{2}}$ soit $z = R\sqrt{2}$ ou $z^2 = 2R^2$

$$z^2 = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = 2R^2$$

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = R^2$$

Et en prenant la racine : $\Rightarrow$ $L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm R$

Les valeurs ω_1 *et* ω_2 sont les solutions positives des équations qui sont du second degré :

$$L\omega_1 - \frac{1}{C\omega_2} = -R\ ;\ \ L\omega_2 - \frac{1}{C\omega_2} = +R$$

$$\Rightarrow \begin{cases} LC\omega_1^2 + RC\omega_1 - 1 = 0 & (1) \\ LC\omega_2^2 + RC\omega_2 - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Retranchons la première de la 2ème :

$$LC(\omega_2^2 - \omega_1^2) = RC(\omega_2 + \omega_1)$$

$$\Rightarrow L(\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 + \omega_1) = R(\omega_2 + \omega_1)$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$$

$$et\ puisque\ \Delta\omega = 2\pi\Delta N \quad \Rightarrow\ \Delta N = \frac{R}{2\pi L}$$

5- <u>FACTEUR DE QUALITE D'UN CIRCUIT</u>

Le facteur de qualité est donné par

$$Q = \frac{N_0}{\Delta N} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

$$\Delta\omega = \frac{R}{L}\ \ ;\quad Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{L\omega_0}{R}$$

D'où la valeur à mémoriser est :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R}$$

Q dépend que des caractéristiques du circuit, on peut aussi lui donner les autres formes :

$L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} \Rightarrow Q = \frac{1}{RC\omega_0}$ ou encore puisque $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\Rightarrow Q = \frac{L}{R} X \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L^2}{LC}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

6- <u>PUISSANCE EN REGIME ALTERNATIF SINUSOÏDAL</u>

a. Puissance instantanée

Soit pour un circuit (RLC) série, la puissance P est donnée par :

$$P = Ui$$

b. <u>Puissance moyenne</u>

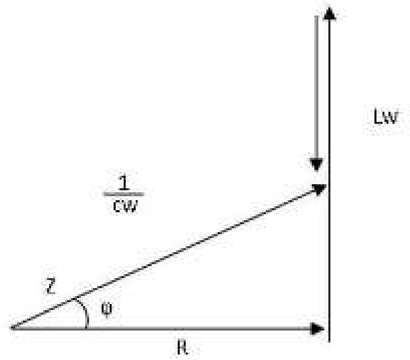
$$P = UI\cos\varphi$$

P : en watt (W)

U : en volt (V)

I : en ampère (A)

c. Valeur du facteur de puissance et application



La construction de Fresnel permet de calculer $\cos\varphi$ pour le circuit (RLC) série

$$\cos\varphi = \frac{R}{z}$$

On en déduit une autre formule donnant la puissance moyenne :

$$P = Ui\cos\varphi \;\; ; \;\; U = zI \; ; \; \cos\varphi = \frac{R}{z}$$

$$\Rightarrow z.I.I.\frac{R}{z} = RI^2 \quad \Rightarrow \quad P = RI^2$$

Exercice.

Un circuit (RLC) série a les caractéristiques suivantes : R = 10Ω ; L = 0,1H ; C = 0,4NF

On branche à ses bornes un générateur basse fréquence qui établit une tension alternative sinusoïdale : $U = 10\sqrt{2}\cos(\omega t)$.

a) Quelle doit être la valeur ω_0 de la pulsation ω pour que le circuit soit à la résonance ?
b) Quelle est la puissance moyenne P qu'il consomme à la résonance ?
c) Quelle est la puissance moyenne P' qu'il consomme lorsque ω prend l'une des valeurs ω_1 ou ω_2 qui limitent la bande passante. Conclure.

Solution :

a) À la résonance :

$$LC\omega_0^2 = 1 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}1X0{,}4.10^{-6}}} \Rightarrow \omega_0 = 5.10^3 rad/s$$

$$N_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{5.10^3}{2\pi} = 796 \;\Rightarrow\; N_0 = 796Hz$$

b) À la résonance, l'impédance du circuit est égale à sa résistance d'où l'intensité I_0 (qui est la valeur maximale) :

$$I_0 = \frac{U}{R} \;\; avec \;\; U = 10V \;\Rightarrow\; AN : I_0 = \frac{10}{10} = 1A$$

D'où la puissance moyenne est :

$$P = RI^2 = 10X1^2 = 10W$$

c) Pour les pulsations ω_1 et ω_2 qui limitent la bande passante :

$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ où on en déduit la valeur de la puissance moyenne P'

$$P' = RI^2 = R\frac{I_0^2}{2} = \frac{P}{2} = 5W$$

La puissance est la moitié de celle dissipée

CHAPITRE : OSCILLATIONS ELECTRIQUES FORCEES

I- Étude théorique

Position du problème

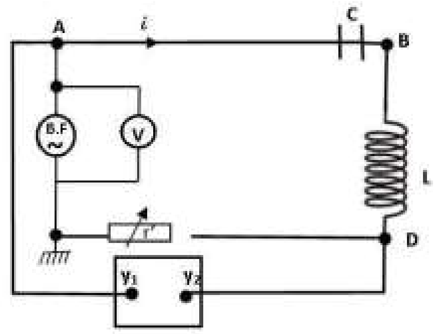
Connaissant les caractéristiques du circuit (RLC) et celle de la tension U(t) imposée (pulsation ω et amplitude U_m), nous allons calculer les paramètres qui caractérisent l'intensité i(t) du courant sinusoïdal.

La tension et l'intensité sont des fonctions sinusoïdales (étude expérimentale) qui ont la même pulsation ω et présentent généralement une différence de phase.

Soit φ la phase de la tension par rapport à l'intensité.

Ainsi $i = I_m \cos(\omega t) \quad et \quad U = U_m \cos(\omega t + \varphi)$

La tension instantanée $U(t) = U_{AE}$(voir fig.) se répartit à chaque instant aux bornes des différents dipôles du circuit (RLC)



$$U_{AE} = U_{AB} + U_{BD} + U_{DE}$$

Explicitons les termes de cette somme :

- Aux bornes du conducteur ohmique (DE)

$$U_{DE} = U_R = r'i = r'I_m \cos(\omega t)\ ;$$

- Aux bornes de la bobine (BD)

$$U_{BD} = U_L = ri + L\frac{di}{dt} = rI_m \cos(\omega t) + L\omega I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

- Aux bornes du condensateur (AB) :

$$U_{AB} = U_C = \frac{q_A}{C} = \frac{q}{C}$$

Or $i = \frac{dq}{dt}$, q est la primitive de i qui s'annule pour t = 0 (en supposant le condensateur déchargé à l'origine des dates), soit :

$$q = \int_0^t idt = \int I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) dt$$

$q = \int_0^t idt = \frac{I_m}{\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ et $U_{AB} = \frac{I_m}{\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

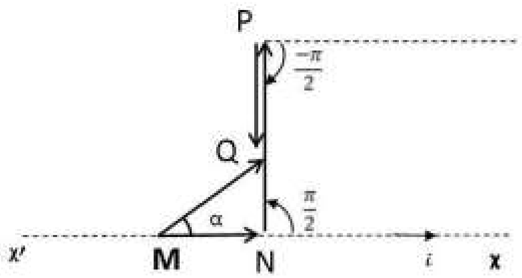
La tension aux bornes de l'association ou série vaut donc :

$$U = (r + r')i + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t idt\ \ ;\ \ avec\ R = r + r'$$

$$U = RI_m \cos(\omega t) + L\omega I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I_m}{C\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Nous devons ainsi faire la somme des trois fonctions sinusoïdales de même pulsation.

Construction de Fresnel
Plaçons-nous à la date t = 0 et faisons correspondre un vecteur à chaque terme de la somme, on obtient la figure ci-contre :



- MN représente la tension U_R : $U_R = RI_m \cos(\omega t)$
- NP représente la tension U_L : $U_L = L\omega I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$
- PQ représente la tension U_C : $U_C = \frac{I_m}{C\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$
- MQ représente la tension U : $U = U_m \cos(\omega t + \varphi)$

Ces quatre vecteurs sont tels que : $MQ = MN + NP + PQ$

$$MQ = \sqrt{MN^2 + (NP - PQ)^2}$$

Soit $U_m = I_m\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$ on obtient $\tan\varphi = \frac{NQ}{MN}$ et $\cos\varphi = \frac{MN}{MQ}$

Soit $\begin{cases} \tan\varphi = \dfrac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \\ \cos\varphi = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \end{cases}$

Remarque : l'angle φ représente la phase de U par rapport à i. on dit que U est en avance de φ sur i. il revient au même de dire que i est en retard de φ sur U, et l'on pourra écrire, en déplaçant l'origine des dates : $i = I_m \cos(\omega t - \varphi)$ et $U = U_m \cos \omega t$.

BIBLIOGRAPHIE

- Physique Terminale D, C et E, Nathan, 1989
- Physique Chimie Terminale D, C et E, Collection Eurin-Gie, Edition Hachette, 1988
- Physique Terminale C et E, Editions Hatier (TC, E programme de 1988)

Partenariat
Lycée Saint François Xavier
Label 109

Livret à ne pas vendre

Contact
info@label109.org

Télécharger gratuitement les applications et livres numériques sur le site:
http://www.tchadeducationplus.org

Mobile et WhatsApp: 0023566307383

Rejoignez le groupe: https://www.facebook.com/groups/tchadeducationplus