Université Aube Nouvelle
Niveau : ST L_1
Enseignant : Dr. PARE

Anne Académique 2022-2023
Date : 01/12/2022
Durée : 2 heures

Dévoir d'algèbre

(Calculatrice non autorisée)

Exercice 1 (10 points)

I) 1) Donner la base canonique de $\mathbb{R}^4$. 1 pt

2) Si une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E est libre alors cette famille forme une base de E. Vrai ou faux. (0,5 ~~+~~) pt

II) Considère l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 3z\}$.

1) Citer 4 éléments de F. 1 pt

2) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. 1,5 pt

3) Déterminer la dimension de F. 1 pt

III) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x, y, z) = (x - y, x + 2z, y - 3z)$

1) Calcule $f(u_1)$ et $f(u_2)$ avec $u_1 = (5, -7, 2)$ et $u_2 = (-3, -9, -7)$. 1 + 1 pts

2) Déterminer le noyau de f. L'application linéaire f est-elle injective ? justifier votre réponse. 1+1 pt

3) Déterminer la dimension de l'image de f. 1 pt

Exercice 2 (10 points)

I) Répondre par vrai ou faux

1) Soit A une matrice. A n'est pas inversible si le determinant A est nul. 0,5 pt

2) Soient A et B deux matrices. Le produit AB est possible si le nombre de lignes de A est égal au nombre de colonnes de B. 0,5 pt

II) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Calculer le déterminant de A. 1 pt

2) Déterminer la comatrice de A. 2 pt

3) En déduire A^{-1} l'inverse de A. 1 pt

III) Soit le système linéaire suivant : (S) : $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 3 \\ -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$

1) Écrire l'écriture matricielle du système (S). 1 pt

2) On donne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -6 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer AB et BA. Que peut-on conclure ? (1+1+1) pts

3) En déduire la solution du système (S). 1 pt

Corrigé du devoir d'algèbre ST_1 (1)

Exercice 1

I) 1) La base canonique de $\mathbb{R}^4$ est :

$$B = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ 1

2) Faux 0,5

II) On considère $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y = 3z\}$

1) Citons quatre éléments de F

$(0,0,0)$; $(1,2,1)$; $(-3;0;-1)$; $(2,1,1)$ 1

2) Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

* On a : $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in F$ car $0+0 = 3\times 0$ 0,5

* Soit $X = (x,y,z) \in F$, $Y = (x',y',z') \in F$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Calculons $\alpha X + \beta Y$ et montrons que $\alpha X + \beta Y \in F$

$$\alpha X + \beta Y = \alpha(x,y,z) + \beta(x',y',z')$$

$$\alpha X + \beta Y = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z')$$

Or : $X = (x,y,z) \in F \Rightarrow x+y = 3z$ ①
$\Rightarrow \alpha(x+y) = 3\alpha z$

$Y = (x',y',z') \in F \Rightarrow x'+y' = 3z'$ ②
$\Rightarrow \beta(x'+y') = 3\beta z'$

① + ② $\Rightarrow \alpha(x+y) + \beta(x'+y') = 3\alpha z + 3\beta z'$

$\Rightarrow (\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y') = 3(\alpha z + \beta z')$

Les coordonnées de $\alpha X+\beta Y$ vérifie la condition qui définit F donc

$\alpha X+\beta Y \in F$. 1

Par conséquent F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

3) Déterminons la dimension de F

$$x+y=3z \Rightarrow x=3z-y$$

Donc $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in F \Rightarrow X=\begin{pmatrix}3z-y\\y\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$

avec y et z des réels.

Il vient que F est engendré par les vecteurs $v_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $v_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ qui sont libres.

Comme F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension finie ($\dim(\mathbb{R}^3)=3$) donc $v_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $v_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ sont aussi génératrice. Par conséquent $B=\{v_1, v_2\}$ est une base de F. Comme B contient 2 éléments donc F est de dimension 2. $\mathrm{Dim}(F)=2$ 1

II) $f(x,y,z)=(x-y, x+2z, y-3z)$

1) $f(u_1)=(12;9;-13)$ et $f(u_2)=(6;-17;12)$

1 1

Scanned with CamScanner

2) Déterminons Ker(f).

$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = (0,0,0)\}$

$f(x,y,z) = (0,0,0) \iff (x-y,\ x+2z,\ y-3z) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x+2z=0 \\ y-3z=0 \end{cases}$

On trouve que $x=0$; $y=0$ et $z=0$

Donc $\ker f = \{(0,0,0)\}$ 1

3) On a : $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f)$

$\Rightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker f)$

$\Rightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = 3 - 0$

$\dim(\operatorname{Im} f) = 3$ 1

Exercice 2

I) 1) Vrai ; 2) Faux
0,5 0,5

II) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Déterminons le déterminant de A

$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Developpons suivant la 1re ligne

$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$; $\det(A) = -2$

1

2) Déterminons la comatrice de A

$$com(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$; $A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$; $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$; $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Donc $com(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 2

3) Déduisons A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} {}^t com(A) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2} {}^t\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ 1

III) (S) : $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 3 \\ -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$

1) Ecriture matricielle du système.

(3)

$$(S) \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -6 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$ 1

En posant : ~~Ax = b~~ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -6 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$; $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

et $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, le système devient :

$Ax = b$ qui l'écriture matricielle du système (S).

2) $$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -6 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$ 1

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -6 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$ 1

2) On $AB = BA = I_3$ donc on peut conclure que la matrice est inversible et son inverse $A^{-1} = B$. 1

3) Déduisons la solution du système (S).

$Ax = b \iff x = A^{-1}b$

$$\iff x = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\iff x = \begin{pmatrix} -16 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$ 1

FIN