Université AUBE NOUVELLE
Niveau : L_1 ST
Durée : 2h, par M. PARE

Année Académique : 2021-2022
Date : 20/01/2022

Devoir d'algèbre

(Documents et calculatrice non autorisés)

Exercice 1 (12 pts)

1) Donner la définition d'une assertion.
2) En quoi consiste le raisonnement par contraposé.
3) Soit le tableau suivant :

P	Q	$non(P)$	$Q \Rightarrow P$	$non(P) et Q$
F	V	V	F	V
F	F	V	V	F
V	F	F	V	F
V	V	F	V	F

Compléter le tableau ci-dessus par la table de vérité de : non(P) ; (Q⇒P) ; (non(P)et Q).

4) Dans $\mathbb{R}$, on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par :
$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$
   a) Définir une relation d'équivalence.
   b) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
   c) Déterminer la classe d'équivalence de 1 notée $\mathcal{C}_1$.

5) Après avoir écrit à l'aide des quantificateurs donner la négation des assertions suivantes puis dire si ces assertions quantifiées sont vraies ou fausses.
   a) Pour tout nombre réel x, il existe un nombre réel y dont leur somme dépasse zéro.
   b) Il existe un nombre réel x dont pour tout nombre réel y, leur somme donne 0.

Exercice 2(08 pts)

1) Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 3y - z = 0\}$.
   a) Donner quatre éléments de F.
   b) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   c) Déterminer une base de F.

2) Soit A= $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; B= $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   a) Déterminer la transposée de la matrice A notée ${}^tA$. La matrice A est-elle symétrique ?
   b) Calculer B^2, AB et A-2B

Corrigé du devoir d'algèbre ST ①

Exercice 1

1) Une assertion est une affirmation qui est soit vraie ou fausse, mais pas les deux à la fois. ①

2) Le raisonnement par contraposé est basé sur l'équivalence " L'assertion $(P \Rightarrow Q)$ est équivalente à $(non(Q) \Rightarrow non(P))$. Donc pour montrer que $P \Rightarrow Q$, on montre que $(non(Q) \Rightarrow non(P))$ et par contraposé on deduit que $(P \Rightarrow Q)$. ①

3) completons

P	Q	non(P)	Q ⇒ P	non(P) et Q
F	V	V	F	V
F	F	V	V	F
V	F	F	V	F
V	V	F	V	F

③

4) Dans $\mathbb{R}$ on définit la relation R par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x R y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

a) Une relation d'équivalence est une relation à la fois reflexive, symétrique et transitive

①

Scanned with CamScanner

b) Montrons que R est une relation d'équivalence

* Réflexivité

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $x^2 - x^2 = x - x \Rightarrow x R x$ donc R est reflexive 0,5

* Symetrie

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x R y$

$$x R y \Rightarrow x^2 - y^2 = x - y$$
$$\Rightarrow -(x^2 - y^2) = -(x - y)$$
$$\Rightarrow -x^2 + y^2 = -x + y$$
$$\Rightarrow y^2 - x^2 = y - x$$

$x R y \Rightarrow y R x$ donc R est symetrique 0,5

* Transitivité

Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$ tel que $x R y$ et $y R z$

$$\begin{cases} x R y \\ y R z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = x - y & (1) \\ y^2 - z^2 = y - z & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow x^2 - y^2 + y^2 - z^2 = x - y + y - z$$
$$\Rightarrow x^2 - z^2 = x - z \Rightarrow x R z$$ 0,5

donc $\begin{cases} x R y \\ y R z \end{cases} \Rightarrow x R z$ donc R est transitive

Conclusion : R est une relation reflexive, symetrique et transitive donc R est une relation d'équivalence 0,5

Scanned with CamScanner

c) La classe d'équivalence de 1

$C_1 = \{y \in \mathbb{R} / 1 R y\}$

$1Ry \Rightarrow 1^2 - y^2 = 1 - y$

$\Rightarrow -y^2 = -y$

$\Rightarrow y^2 - y = 0$

$\Rightarrow y(y-1) = 0$

$\Rightarrow y = 0$ ou $y = 1$

Donc $\boxed{C_1 = \{0 ; 1\}}$ 1

5)

Assertion	Négation
a). $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y > 0$	$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y \leq 0$
b) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y = 0$	$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y \neq 0$

2

a) Vraie 0,5 b) Fausse 0,5

Exercice 2

1) Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+3y-z=0\}$

a) 4 éléments de F : $(0,0,0)$; $(1;2;7)$

1

$(3;0;3)$; $(-2;0;-2)$

b) Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

* L'élément nulle de $\mathbb{R}^3$ est $(0,0,0)$ et $0+3\times0-0=0$

donc $(0,0,0) \in F$.

* Soit $X=(x,y,z)$ et $X'=(x',y',z') \in F$; $\lambda \in \mathbb{R}$

on veut montrer que $X+\lambda X' \in F$

On a : $X+\lambda X' = (x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z')$

Calculons : $A = (x+\lambda x') + 3(y+\lambda y') - (z+\lambda z')$

$A = x+3y-z+\lambda(x'+3y'-z')$

Or $X \in F \Rightarrow x+3y-z=0$

$X' \in F \Rightarrow x'+3y'-z'=0$.

Donc $A = 0+\lambda\times 0$

$A=0$

$\Rightarrow (x+\lambda x')+3(y+\lambda y')-(z+\lambda z') = 0$

$\Rightarrow X+\lambda X' \in F$.

Par conséquent F est un sous espace vectorielle de $\mathbb{R}^3$.

1

c) Déterminons une base de F

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 3y - z = 0\}$

On a : $x + 3y - z = 0$

$\Rightarrow z = x + 3y$

Donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+3y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont libres et une famille génératrice de F donc une base de F est : $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ 1

2) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) La transposée de A est :

${}^tA = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 0,5

On a : ${}^tA \neq A$ donc A n'est pas symétrique 0,5

b) $B^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -16 & -2 \\ -6 & 28 & 7 \\ 9 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ 1,5

$AB = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 7 & -9 & -1 \end{pmatrix}$ 1

$A - 2B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$A - 2B = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 2 \\ 3 & -9 & -3 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ 1,5