# Université Aube Nouvelle
# Notes de cours d'algèbre I

Première Année ST

Universitaire 2023-2024

CHAPITRE 1

# Structures Algébriques

## 1. Lois De Composition Internes

**DÉFINITION 1.1.** *Soit $G$ un ensemble, on appelle loi interne sur $G$ toute application de $G \times G$ dans $G$, on note souvent une loi interne par $\star$ ou $\delta$.*

**EXEMPLE 1.2.** (1) *L'addition est une loi interne sur* $\mathbb{R}$

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$$

$$(a, b) \longmapsto a + b.$$

(2) *L'application*

$$\star : \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\} \longmapsto \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$$

$$(a, b) \longmapsto a + b - 2ab$$

*est une loi interne dans* $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$, *en effet :* $\forall a, b \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$, *montrons que* $a+b-2ab \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ *plus précisement il faut prouver que* $a+b-2ab \neq \frac{1}{2}$ *car il est évident que* $a + b - 2ab \in R$, *on va raisonner par l'absurde on suppose que* $a + b - 2ab = \frac{1}{2}$, *sachant que* $a \neq \frac{1}{2}$, *et* $b \neq \frac{1}{2}$ *:*

$$a + b - 2ab = \frac{1}{2} \Rightarrow a(1 - 2b) + (b - \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow (\frac{1}{2} - b)(2a - 1) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \vee b = \frac{1}{2}$$

*contradiction, alors ce qu'on a supposé est faux c'est à dire* $a + b - 2ab \neq \frac{1}{2}$, *d'où* $a \star b \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}, \star$ *est une loi interne.*

**DÉFINITION 1.3.** *Soit $G$ un ensemble et $\star$ une loi interne.*

(1) $\star$ *est dite* ***commutative*** *si et seulement si :*

$$\forall x, y \in G, x \star y = y \star x.$$

(2) $\star$ *est dite* ***associative*** *si et seulement si :*

$$\forall x, y, z \in G, x \star (y \star z) = (x \star y) \star z.$$

(3) $\star$ ***admet un élement neutre*** *si et seulement si :*

$$\exists e \in G, \forall x \in G, x \star e = e \star x = x.$$

(4) *Soit $x \in G$ on dit qu'un élément $x' \in G$ est* ***l'élement symétrique*** *ou* ***inverse*** *de $x$ si et seulement si $x \star x' = x' \star x = e$, où $e \in G$ est l'élément neutre.*

## 2. Groupes

**Définition 2.1.** *On appelle groupe un ensemble $G$ muni d'une loi ou opération ineterne $\star$ telle que :*

1. $\star$ *admet un élément neutre.*
2. *Tout élément de $G$ admet un élément symétrique dans $G$.*
3. $\star$ *est associative.*

*Si de plus $\star$ est commutatif, alors $(G, \star)$ est un groupe commutatif ou abélien.*

**Exemple 2.2.** (1) $(\mathbb{Z}, +)$ *est un groupe commutatif.*

(2) $(\mathbb{R}, \times)$ *n'est pas un groupe car* $0$ *n'admet pas d'élément symétrique.*

(3) $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ *est un groupe commutatif.*

## 3. Anneaux

**Définition 3.1.** *Soit $A$ un ensemble muni de deux lois de composition internes $\star, \delta$, on dit que $(A, \star, \delta)$ est un anneau si :*

1. $(A, \star)$ *est un groupe commutatif.*
2. $\forall x, y, z \in A$,
$$x\delta(y \star z) = (x\delta y) \star (x\delta z) \, et \, (x \star y)\delta z = (x\delta z) \star (y\delta z),$$
*distributivité à gauche et à droite.*
3. $\delta$ *est associative .*

*Si de plus $\delta$ est commutative, on dit que $(A, \star, \delta)$ est un anneau commutatif.*
*Si $\delta$ admet un élément neutre, on dit que $(A, \star, \delta)$ est un anneau unitaire.*

**Exemple 3.2.** $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *est un anneau commutatif et unitaire.*

## 4. Corps

**Définition 4.1.** *Soit $\mathbb{K}$ un ensemble munie de deux lois de composition internes $\star, \delta$, on dit que $(\mathbb{K}, \star, \delta)$ est un corps si :*

1. $(\mathbb{K}, \star, \delta)$ *est un anneau unitaire.*
2. $(\mathbb{K} - \{e\}, \delta)$ *est un groupe , où $e$ est l'élément neutre de $\star$.*

*Si de plus $\delta$ est commutative, On dit que $(\mathbb{K}, \star, \delta)$ est un corps commutatif.*

**Exemple 4.2.** $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *est un corps commutatif.*

## 5. Exercices Corrigés

**EXERCICE** 12. *Soit $*$ une loi définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$x * y = xy + (x^2-1)(y^2-1)$$

(1) *Vérifier que $*$ est commutative, non associative et admet un élément neutre.*

(2) *Résoudre les équations suivantes :* $2 * y = 5, x * x = 1$.

**SOLUTION**. (1) *$*$ est commutative si et seulement si :*
$\forall x, y \in \mathbb{R} / x * y = y * x$.

$$x * y = xy + (x^2-1)(y^2-1) = yx + (y^2-1)(x^2-1) = y * x.$$

*Car le produit et la somme sont commutatives.*

(2) *$*$ est non associative, on suppose que c'est associative c'est à dire :*

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x * y) * z = x * (y * z).$$

$$\begin{aligned}
(x * y) * z &= [xy + (x^2-1)(y^2-1)] * z \\
&= (xy + (x^2-1)(y^2-1))z + (z^2-1)([xy + (x^2-1)(y^2-1)]^2 - 1) \\
&= xyz + (x^2-1)(y^2-1)z + (z^2-1)x^2y^2 + 2(z^2-1)(x^2-1)(y^2-1)(xy) \\
+& \ (z^2-1)(x^2-1)^2(y^2-1)^2 - (z^2-1)...(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x * (y * z) &= x * [yz + (y^2-1)(z^2-1)] \\
&= x(yz + (y^2-1)(z^2-1)) + (x^2-1)([yz + (y^2-1)(z^2-1)]^2 - 1) \\
&= xyz + x(y^2-1)(z^2-1) + (x^2-1)y^2z^2 + 2(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)(yz) \\
+& \ (x^2-1)(y^2-1)^2(z^2-1)^2 - (x^2-1)...(2)
\end{aligned}$$

*contradiction* $(1) \neq (2)$ *d'où $*$ n'est pas associative*

(3) *$*$ admet un élément neutre si et seulement si*

$$\exists e \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} / x * e = e * x = x.$$

*On prend juste une seule équation car la loi est commutative.*

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ x * e &= x \\
\forall x \in \mathbb{R},\ xe + (x^2-1)(e^2-1) &= x \\
\forall x \in \mathbb{R},\ (e-1)(x + (x^2-1)(e+1)) &= 0
\end{aligned}$$

*Alors on a*

$$\begin{cases} e - 1 = 0 \\ \vee \\ \forall x \in \mathbb{R}, x + (e+1)x^2 - (e+1) = 0 \end{cases}$$

*On sait qu'un polynôme est nul $\forall x$ si tous ses coefficients sont tous nuls, et comme le coefficient de $x$ est $1 \neq 0$ on déduit que le polynôme ne peut s'annuler, d'où $e = 1$ est vraie. $e = 1$ est l'élément neutre.*

(4) $2 * y = 5 \Rightarrow 2y + 3(y^2-1) = 5 \Rightarrow y = 4/3 \vee y = -2$.

(5) $x * x = 1 \Rightarrow x^2 + (x^2-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 1.$

**Exercice** 13. *On définit sur $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ loi interne $*$ comme suit :*

$$\forall (x,y),(x',y') \in G, (x,y)*(x',y') = (xx', xy'+y)$$

*Montrons que $(G,*)$ est un groupe non commutatif.*

**Solution**. *$(G,*)$ est un groupe si et seulement si*

$$\begin{cases} *\textit{est associative} \\ *\textit{admet un élément neutre} \\ \textit{Tout élément de}\, E \,\textit{admet un inverse dans} E \end{cases}$$

(1) $*$ *est associative si et seulement si*

$$\forall (x,y),(x',y'),(x",y") \in G, /[(x,y)*(x',y')]*(x",y") = (x,y)*[(x',y')*(x",y")]?$$

$$\begin{aligned} [(x,y)*(x',y')]*(x",y") &= (xx', xy'+y)*(x",y") \\ &= (xx'x", xx'y" + xy' + y)......(1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x,y)*[(x',y')*(x",y")] &= (x,y)*(x'x", x'y"+y') \\ &= (xx'x", xx'y" + xy' + y)......(2). \end{aligned}$$

(1) = (2) *d'où le résultat.*

(2) $(e,e') \in G$ *est un élément neutre de $G$ si et seulement si*

$$\forall (x,y) \in G, (x,y)*(e,e') = (e,e')*(x,y) = (x,y)$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x,y)*(e,e') = (x,y) \\ (e,e')*(x,y) = (x,y) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (xe, xe'+y) = (x,y) \\ (ex, ey+e') = (x,y) \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} xe = x \\ xe' + y = y \\ ex = x \\ ey + e' = y \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} e = 1 \in \mathbb{R}^*, \quad x \neq 0 \\ e' = 0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \end{aligned}$$

*ainsi $(e,e') = (1,0) \in G$ est l'élément neutre.*

(3) $\forall(x,y)\in G, \exists(x',y')\in G/(x,y)*(x',y')=(x',y')*(x,y)=(e,e')=(1,0)$.

$$\begin{cases}(x,y)*(x',y')=(1,0)\\(x',y')*(x,y)=(1,0)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(xx',xy'+y)=(1,0)\\(x'x,x'y+y')=(1,0)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}xx'=1\\xy'+y=0\\x'x=1\\x'y+y'=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x'=1/x\in \mathbb{R}^*, & x\neq 0\\y'=-y/x\in\mathbb{R}, & x\neq 0\end{cases}$$

*ainsi le symétrique de $(x,y)\in G$ est $(x',y')=(1/x,-y/x)\in G$, alors $(G,*)$ est un groupe.*

(4) $*$ *est non commutatif si et seulement si*

$$\exists(x,y)=(2,0)\in G, \exists(x',y')=(1,1)\in G/(x,y)*(x',y')\neq(x',y')*(x,y).$$

$$\begin{cases}(2,0)*(1,1)=(2,2) & ...(1)\\(1,1)*(2,0)=(2,1) & ...(2)\end{cases}$$

*on remarque que $(1)\neq(2)$, alors $(G,*)$ est un groupe non commutatif.*

**EXERCICE** 14. *On définit sur $\mathbb{Z}^2$ les deux lois $\oplus,\odot$ comme suit :*

$$\forall(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2, (x,y)\oplus(x',y')=(x+x',y+y'),$$

$$\forall(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2, (x,y)\odot(x',y')=(xx',xy'+yx').$$

*Montrer que $(\mathbb{Z}^2,\oplus,\odot)$ est anneau commutatif.*

**SOLUTION**. $(\mathbb{Z}^2,\oplus,\odot)$ *est anneau commutatif si et seulement si :*

$$\begin{cases}(\mathbb{Z}^2,\oplus) & \text{est un groupe abélien}\\ \odot & \text{est associative et distributive par rapport à loi } \oplus.\\ \odot & \text{est une loi commutatif}\end{cases}$$

(1) $(\mathbb{Z}^2,\oplus)$ *est un groupe abélien :*

**a:** $\oplus$ *est commutative :*
$\forall(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2,$

$$(x,y)\oplus(x',y')=(x+x',y+y')=(x'+x,y'+y)=(x',y')\oplus(x,y).$$

**b:** $\oplus$ *est associative :*
$\forall(x,y),(x',y'),(x",y")\in\mathbb{R}^2,$

$$[(x,y)\oplus(x',y')]\oplus(x",y")=(x+x',y+y')\oplus(x",y")=(x+x'+x",y+y'+y")...(1)$$

$$(x,y)\oplus[(x',y')\oplus(x",y")]=(x,y)\oplus(x'+x",y'+y")=(x+x'+x",y+y'+y")...(2)$$

$(1)=(2)$ *d'où le résultat.*

**c:** *Il existe* $e = (e_1, e_2) \in \mathbb{Z}^2$ *tel que :*

$$(e_1, e_2) \oplus (x, y) = (x, y) \oplus (e_1, e_2) = (x, y)$$

*Puisque* $\oplus$*est commutative on traite une seul équation :*

$$(x, y) \oplus (e_1, e_2) = (x, y) \Longrightarrow (x + e_1, y + e_2) = (x, y)$$

*Alors* $\begin{cases} x + e_1 = & x \\ y + e_2 = & y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e_1 = & 0 \\ e_2 = & 0 \end{cases}$ $e = (0, 0) \in \mathbb{Z}^2$ *est l'élément neutre de* $\oplus$.

**d:** *Chaque élément de* $\mathbb{Z}^2$ *possède un élément symétrique dans* $\mathbb{Z}^2$, $\forall(x, y) \in \mathbb{Z}^2, \exists(x', y') \in \mathbb{Z}^2$ :

$$(x, y) \oplus (x', y') = (0, 0), (x', y') \oplus (x, y) = (0, 0),$$

*il suffit de prendre* $x' = -x, y' = -y$ *ainsi* $(-x, -y) \in \mathbb{Z}^2$ *est l'élément symétrique de* $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
*Sachant* ***a,b,c,d*** $(\mathbb{Z}^2, \oplus)$ *est un groupe commutatif.*

(2) – $\odot$ *est associative :* $\forall(x, y), (x', y'), (x", y") \in \mathbb{R}^2$,

$$[(x,y)\odot(x',y')]\odot(x",y") = (xx', xy'+yx')\odot(x",y") = (xx'x", xx'y"+xy'x"+yx'x")...(1)$$
$$(x,y)\odot[(x',y')\odot(x",y")] = (x,y)\odot(x'x", x'y"+y'x") = (xx'x", xx'y"+xx"y'+yx'x")...(2)$$

$(1) = (2)$ *d'où le résultat.*

– $\odot$ *distributive par rapport à* $\oplus$ : $\forall(x, y), (x', y'), (x", y") \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) \odot [(x', y') \oplus (x", y")] = [(x, y) \odot (x', y')] \oplus [(x, y) \odot (x", y"],$$
$$[(x, y) \oplus (x', y')] \odot (x", y") = [(x, y) \odot (x", y")] \oplus [(x', y') \odot (x", y")].$$

*Montrons que :*

$$(x, y) \odot [(x', y') \oplus (x", y")] = [(x, y) \odot (x', y')] \oplus [(x, y) \odot (x", y"],$$

*On a :*

$$(x, y) \odot [(x', y') \oplus (x", y")] = (x, y) \odot [x' + x", y' + y"]$$

*Ainsi*

$$(x, y) \odot [(x', y') \oplus (x", y")] = (xx' + xx", xy' + xy" + yx' + yx")...(3)$$

$$[(x, y) \odot (x', y')] \oplus [(x, y) \odot (x", y"] = (xx', xy' + yx') \oplus (xx", xy" + yx").$$

*De plus*

$$[(x, y) \odot (x', y')] \oplus [(x, y) \odot (x", y"] = (xx' + xx", xy' + yx' + xy" + yx")...(4)$$

*d'où* $(3) = (4)$.
*Montrons que :*

$$[(x, y) \oplus (x', y')] \odot (x", y") = [(x, y) \odot (x", y")] \oplus [(x', y') \odot (x", y")].$$

*On a :*

$$[(x,y)\oplus(x',y')]\odot(x",y") = (x+x',y+y')\odot(x",y") = (xx"+x'x, xy"+x'y"+yx"+y'x")...(5)$$

$$[(x,y)\odot(x",y")]\oplus[(x',y')\odot(x",y")] = (xx", xy"+yx")\oplus(x'x", x'y"+y'x"),$$

$$[(x,y)\odot(x",y")]\oplus[(x',y')\odot(x",y")] = (xx"+x'x", xy"+yx"+x'y"+y'x")...(6)$$

*d'où* $(5)=(6)$.

(3) $\odot$ *est commutatif :* $\forall (x,y),(x',y')\in \mathbb{R}^2$,

$$(x,y)\odot(x',y') = (xx', xy'+yx')...(7)$$

$$(x',y')\odot(x,y) = (x'x, x'y+y'x) = (xx', xy'+yx')..(8) = (7)$$

*d'où le résultat.*

CHAPITRE 2

# Notion de $\mathbb{K}-$ Espaces vectoriels($\mathbb{K}$ étant un Corps Commutatif)

## 1. Espace vectoriel et sous espace vectoriel

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif (généralement c'est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et soit $E$ un ensemble non vide muni d'une opération interne notée $(+)$ :

$$(+) : E \times E \to E$$

$$(x, y) \to x + y$$

et d'une opération externe notée $(\cdot)$ :

$$(\cdot) : \mathbb{K} \times E \to E$$

$$(\lambda, x) \to \lambda \cdot x$$

**Définition** 1.1. *Un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ou un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel est un triplet $(E, +, \cdot)$ tel que :*

(1) $(E, +)$ *est un groupe commutatif.*
(2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
(3) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
(4) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda(\mu.x)$
(5) $\forall x \in E, 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$

Les éléments de l'espace vectoriel sont appelés des vecteurs et ceux de $\mathbb{K}$ des scalaires.

**Proposition** 1.2. *Si $E$ est $\mathbb{K}-$ espace vectoriel, alors on a les propriétés suivantes :*

(1) $\forall x \in E, 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$
(2) $\forall x \in E, -1_{\mathbb{K}} \cdot x = -x$
(3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot 0_E = 0_E$
(4) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y$
(5) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, x \cdot \lambda = 0_E \Leftrightarrow x = 0_E \vee \lambda = 0_{\mathbb{K}}$

**Exemple** 1.3. (1) $(\mathbb{R}, +, .)$ *est un* $\mathbb{R}-$ *espace vectoriel,* $(\mathbb{C}, +, .)$ *est un* $\mathbb{C}-$*e.v.*

(2) *Si on considère* $\mathbb{R}^2$ *muni des deux opérations suivante*

$$(+) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ \ (.) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$((x, y), (x', y')) \to (x + x', y + y'), \ \ (\lambda, (x, y)) \to (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y)$$

*on peut facilement montrer que* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *est un* $\mathbb{R}-$*e.v.*

**Définition 1.4.** *Soit* $(E, +, \cdot)$ *un* $\mathbb{K}-$ *espace vectoriel et soit* $F$ *un sous ensemble non vide de* $E$*, on dit que* $F$ *est sous espace vectoriel si* $(F, +, \cdot)$ *est aussi un* $\mathbb{K}-$ *espace vectoriel.*

**Remarque 1.5.** *Lorsque* $(F, +, \cdot)$ *est* $\mathbb{K}-$ *sous espace vectoriel de* $(E, +, \cdot)$*, alors* $0_E \in F$.
*Si* $0_E \notin F$ *alors* $(F, +, \cdot)$ *ne peut pas être un* $\mathbb{K}-$ *sous espace vectoriel de* $(E, +, \cdot)$.

**Théorème 1.6.** *Soit* $(E, +, \cdot)$ *un* $\mathbb{K}-$ *espace vectoriel et* $F \subset E, F$ *non vide on a les équivalences suivantes :*

(1) $F$ *est un sous espace vectoriel de* $E$.

(2) $F$ *est stable par l'addition et par la multiplication c'est à dire :*

$$\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, x + y \in F, \lambda.x \in F.$$

(3) $\forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda.x + \mu.y \in F,$ *d'où :*

$$F \text{ est s.e.v} \Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \emptyset, \\ \forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda.x + \mu.y \in F \end{cases}$$

(4) $\forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda.x + \mu.y \in F,$ *d'où :*

$$F \text{ est s.e.v} \Leftrightarrow \begin{cases} 0_E \in F, \\ \forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda.x + \mu.y \in F \end{cases}$$

**Exemple 1.7.** (1) $\{0_E\}, E$ *sont des sous espace vectoriel de* $E$.

(2) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$ *est un sous espace vectoriel car ;*
- $0_E = 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in F \Rightarrow F \neq \emptyset$.
- $\forall (x, y), (x', y') \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *montrons que* $\lambda(x, y) + \mu(x', y') \overset{?}{\in} F$ *; c'est à dire* $(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \overset{?}{\in} F$

$$\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y' = \lambda(x + y) + \mu(x' + y') = \lambda.0 + \mu.0 = 0,$$

*car* $(x, y) \in F \Rightarrow x + y = 0,$ *et* $(x', y') \in F \Rightarrow x' + y' = 0.$
*Ainsi* $\lambda(x, y) + \mu(x', y') \in F$, $F$ *est sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$.

(3) $F = \{(x + y + z, x - y, z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$ *est un s.e.v de* $\mathbb{R}^3$*, en effet,*
- $0^3_{\mathbb{R}} = (0, 0, 0) \in F$ *car* $(0, 0, 0) = (0 + 0 + 0, 0 - 0, 0) \Rightarrow F \neq \emptyset$.
- $\forall X, Y \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *montrons que* $\lambda X + \mu Y \overset{?}{\in} F$ *; on a :*

$$X \in F \Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / X = (x + y + z, x - y, z),$$

$$Y \in F \Leftrightarrow \exists (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 / Y = (x' + y' + z', x' - y', z'),$$

$$\lambda X + \mu Y = (\lambda x + \lambda y + \lambda z, \lambda x - \lambda y, \lambda z) + (\mu x' + \mu y' + \mu z', \mu x' - \mu y', \mu z')$$

$$\lambda X + \mu Y = ((\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z'), (\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y'), \lambda z + \mu z)$$

*d'où* $\exists x'' = \lambda x + \mu x' \in \mathbb{R}, \exists y'' = \lambda y + \mu y' \in \mathbb{R}, \exists z'' = \lambda z + \mu z' \in \mathbb{R}$, *ainsi*

$$\lambda X + \mu Y = (x'' + y'' + z'', x'' - y'', z'') \in F.$$

**Théorème 1.8.** *L'intersection d'une famille non vide de s.e.v est un sous espace vectoriel.*

**Remarque 1.9.** *La réunion de deux s.e.v n'est pas forcément un s.e.v.*

**Exemple 1.10.** $E_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}, E_2 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2\}, E_1 \cup E_2$ *n'est un s.e.v car* $U_1 = (1, 0), U_2 = (0, 1) \in E_2$ *et* $U_1 + U_2 = (1, 1) \notin E_1 \cup E_2$, *car* $(1, 1) \notin E_1 \wedge (1, 1) \notin E_2$.

## 2. Somme de deux sous espaces vectoriels

Soit $E_1, E_2$ deux sous espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}-$e.v $E$, on appelle somme de deux espaces vectoriels, $E_1$ et $E_2$ et on note $E_1 + E_2$ l'ensemble suivant :

$$E_1 + E_2 = \{U \in E / \exists U_1 \in E_1, \exists U_2 \in E_2 / U = U_1 + U_2\}.$$

**Proposition 2.1.** *La somme de deux s.e.v de* $E_1$ *et* $E_2$ *(d'un même* $\mathbb{K}$*-e.v) est un s.e.v de* $E$ *contenant* $E_1 \cup E_2$, *i.e.*, $E_1 \cup E_2 \subset E_1 + E_2$.

## 3. Somme directe de deux sous espaces vectoriels

On dira que la somme $E_1 + E_2$ est directe si $\forall U = U_1 + U_2$, il existe un unique vecteur $U_1 \in E_1$, un unique vecteur $U_2 \in E_2$, $U = U_1 + U_2$, on note $E_1 \bigoplus E_2$.

**Théorème 3.1.** *Soit* $E_1, E_2$ *deux s.e.v d'un même* $\mathbb{K}-$*e.v* $E$ *la somme* $E_1 + E_2$ *est directe si* $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

**3.1. Sous espace supplémentaires.** Soient $E_1$ et $E_2$ deux s.e.v d'un même $\mathbb{K}-$e.v $E$, on dit que $E_1$ et $E_2$ sont supplémentaires si $E_1 \bigoplus E_2 = E$

**Exemple 3.2.** $E_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}, E_2 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2\}, E_1 \bigoplus E_2 = \mathbb{R}^2$, $E_1$ *et* $E_2$ *sont supplémentaires.*

## 4. Familles génératrices, familles libres et bases

Dans la suite, on désignera l'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ par $E$.

**Définitions 4.1.** *Soit* $E$ *un e.v et* $e_1, e_2 ..., e_n$ *des éléments de* $E$,

(1) *On dit que* $\{e_1, e_2 ..., e_n\}$ *sont libres ou linéairement independents, si* $\forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0, \textit{solution unique.}$$

*Dans le cas contraire, on dit qu'ils sont liés.*

(2) *On dit que* $\{e_1, e_2 ..., e_n\}$ *est une famille génératrice de* $E$, *ou que* $E$ *est engendré par* $\{e_1, e_2 ..., e_n\}$ *si* $\forall x \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K} /$

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n.$$

(3) *Si* $\{e_1, e_2..., e_n\}$ *est une famille libre et génératrice de* $E$, *alors* $\{e_1, e_2..., e_n\}$ *est appelée une base de* $E$.

**Remarque 4.2.** *Dans un espace vectoriel* $E$, *tout vecteur non nul est libre.*

**Théorème 4.3.** *Si* $\{e_1, e_2..., e_n\}$ *et* $\{e_1^{'}, e_2^{'}..., e_m^{'}\}$ *sont deux bases de l'espace vectoriel* $E$, *alors* $n = m$. *En d'autre termes, si un espace vectoriel admet une base alors toutes les bases de* $E$ *ont le même nombre d'éléments (ou même cardinal), ce nombre la ne dépend pas de la base mais il dépend seulement de l'espace* $E$. *D'où la définition suivante.*

**Définition 4.4.** *Soit* $E$ *un* $\mathbb{K}-$ *espace vectoriel de base* $B = \{e_1, e_2..., e_n\}$, *alors* $dim(E) = Card(B)$.
*où* $dim(E)$ *: est la dimension de* $E$ *et* $Card(B)$ *: est le cardinal de* $B$.

**Remarque 4.5.** *donc chercher une base pour un espace vectoriel c'est trouver une famille de vecteurs dans* $E$, *qui forment un famille libre et génératrice de* $E$, *le nombre d'éléments de cette famille représente* $dimE$.

**Exemple 4.6.** (1) *Cherchons une base de* $\mathbb{R}^3$, *il faut trouver une famille de vecteurs dans* $\mathbb{R}^3$ *qui engendre* $\mathbb{R}^3$ *et qui soit libre :*

$$\forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y, z) = (x, 0, 0)+(0, y, 0)+(0, 0, z) = x(1, 0, 0)+y(0, 1, 0)+z(0, 0, 1).$$

*En posant,* $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ *on voit bien que* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *est une famille génératrice, et aussi libre en effet; si* $\forall\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ :

$$\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\lambda_3 e_3 = (0, 0, 0) \Rightarrow \lambda_1(1, 0, 0)+\lambda_2(0, 1, 0)+\lambda_3(0, 0, 1) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0).$$

$\{e_1, e_2, e_3\}$ *est appelée base canonique de* $\mathbb{R}^3$.

(2) *Montrons que les* $f_1 = (1, -1), f_2 = (1, 1)$ *il forment une base de* $\mathbb{R}^2$, *montrons que*

(a) $\{f_1, f_2\}$ *est génératrice* $\Leftrightarrow \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

$$(x, y) = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, (x, y) = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_1)$$

*ainsi*

$$\lambda_2 = \frac{x + y}{2}, \lambda_1 = \frac{x - y}{2,}$$

*donc* $\{f_1, f_2\}$ *est génératrice.*

(b) $\{f_1, f_2\}$ *est libre* $\forall\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_1) = (0, 0) \Rightarrow 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_1 = 0.$$

**Théorème 4.7.** *Soit* $E$ *un espace vectoriel de dimension* $n$ *:*

(1) *Si* $\{e_1, e_2..., e_n\}$ *est base de* $E \Leftrightarrow \{e_1, e_2..., e_n\}$ *est génératrice* $\Leftrightarrow \{e_1, e_2..., e_n\}$ *est libre.*

(2) *Si* $\{e_1, e_2..., e_p\}$ *sont* $p$ *vecteur dans* $E$, *avec* $p > n$, *alors* $\{e_1, e_2..., e_p\}$ *ne peut être libre, de plus si* $\{e_1, e_2..., e_p\}$ *est génératrice, alors il existe* $n$ *vecteurs parmis* $\{e_1, e_2..., e_p\}$ *forment une base* $E$.

(3) *Si* $\{e_1, e_2..., e_p\}$ *sont* $p$ *vecteur dans* $E$*, avec* $p < n$*, alors* $\{e_1, e_2..., e_p\}$ *ne peut être génératrice de plus si* $\{e_1, e_2..., e_p\}$ *est libre, alors il existe* $(n-p)$ *vecteur parmis* $\{e_{p+1}, e_{p+2}, ..., e_n\}$ *dans* $E$ *tels que* $\{e_1, e_2..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n\}$ *est une base pour* $E$*.*

(4) *Si* $F$ *est un sous espace vectoriel de* $E$ *alors* $dim F \leq n$*, et de plus* $dim F = n \Leftrightarrow E = F$*.*

**Exemple 4.8.** (1) *Dans l'exemple précédent* $f_1 = (1, -1), f_2 = (2, 1)$ *pour montrer que* $\{f_1, f_2\}$ *forme une base de* $\mathbb{R}^2$*, il suffit de montrer que* $\{f_1, f_2\}$ *est soit libre ou génératrice.( cette propriété est vraie dans le cas des espaces vectoriels de dimensions finies).*

(2) *Pour montrer que* $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, -1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$*, il suffit de montrer qu'elle est libre ou génératrice car* $dim \mathbb{R}^3 = 3, \{f_1, f_2\}$ *est libre car :* $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R},\ \lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(1, 1, 0) + \lambda_3(0, 1, -1) = (0, 0, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \textit{ (solution unique)} \end{cases}$$

*donc* $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, -1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$*.*

(3) *Cherchons une base pour* $F = \{(x + y, x - z, -y - z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$*, comme* $F \subset \mathbb{R}^3$ *alors* $dim F \leq 3$*, donc la base de* $F$ *ne possède pas plus de trois vecteur.*

$$(x + y, x - z, y - z) = x(1, 1, 0) + y(1, 0, -1) + z(0, -1, -1)$$

*ainsi* $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, 0, -1), v_3 = (0, 1, -1)$ *forment une famille génératrice pour* $F$*, si cette famille est libre, alors elle formera une base pour* $F$*.* $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1(1, 1, 0) + \lambda_2(1, 0, -1) + \lambda_3(0, -1, -1) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -\lambda_1 \\ \lambda_3 = \lambda_1 \end{cases}$$

*Donc* $\{(1, 1, 0), (1, 0, -1), (0, -1, -1)\}$ *n'est pas libre, mais d'après le théorème précédent, on peut extraire de cette famille une base de* $F$*, pour le faire on doit chercher deux vecteurs de famille qui sont libres, si on les trouve alors il forment une base pour* $F$*, si on ne trouve pas on prend un vecteur non nul et ce vecteur sera une base pour* $F$*. Prenons par exemple* $\{v_1, v_2\}$

$$\lambda_1(1, 1, 0) + \lambda_2(1, 0, -1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

*ainsi* $\{v_1, v_2\}$ *est une base pour* $F$ *et* $dim F = 2$

## 5. Notion d'Application Linéaire

### 5.1. Généralités.

**Définition 5.1.** (1) *Soit $(E,+,\cdot)$ et $(F,+,\cdot)$ deux $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels et soit $f$ une application de $E$ dans $F$, on dit que $f$ est une application linéaire si et seulement si :*

$$\forall x,y\in E,\forall\lambda\in\mathbb{K}, f(x+y)=f(x)+f(y) et f(\lambda\cdot x)=\lambda\cdot f(x),$$

*où d'une manière équivalente :*

$$\forall x,y\in E,\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K}, f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y).$$

(2) *Si de plus $f$ est bijective, on dit alors que $f$ est un isomorphisme de $E$ dans $F$.*

(3) *Une application linéaire de $(E,+,\cdot)$ dans $(E,+,\cdot)$ est dite un endomorphisme.*

(4) *Un isomorphisme de $(E,+,\cdot)$ dans $(E,+,\cdot)$ est aussi appelé un automorphisme de $E$ dans $E$.*

**Exemple 5.2.** (1) *L'application*

$$f_1:\mathbb{R}^2\longmapsto\mathbb{R}$$
$$(x,y)\longmapsto x-y$$

*est une application linéaire, car :* $\forall(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2,\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},$

$$f_1(\lambda(x,y)+\mu(x',y'))=f_1(\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y')=\lambda x+\mu x'-(\lambda y+\mu y')$$
$$\Rightarrow f_1(\lambda(x,y)+\mu(x',y'))=\lambda(x-y)+\mu(x'-y')=\lambda f_1(x,y)+\mu f_1(x',y').$$

(2) *L'application*

$$f_2:\mathbb{R}^3\longmapsto\mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z)\longmapsto(-x+y,x-5z,y)$$

*est une application linéaire, car :* $\forall(x,y,z),(x',y',z')\in\mathbb{R}^3,\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},$

$$f_2(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z'))=f_2(\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y',\lambda z+\mu z')$$
$$\Leftrightarrow f_2(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z'))=(-\lambda x-\mu x'+\lambda y+\mu y',\mu x'+\mu x'-5\lambda y-5\mu y',\lambda y+\mu y')$$
$$\Leftrightarrow f_2(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z'))=(-\lambda x+\lambda y,\lambda x-5\lambda z,\lambda y)+(-\mu x'+\mu y',\mu x'-5\mu z',\lambda y').$$
$$\Leftrightarrow f_2(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z'))=\lambda(-x+y,x-5z,y)+\mu(-x'+y',x'-5z',y')=\lambda f_2(x,y,z)+\mu f_2(x',y',z').$$

(3) *L'application*

$$f_3:\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$$
$$x\longmapsto-3x$$

*est isomorphisme, en effet,$f_3$ est linèaire car :*

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}, f_3(\lambda x+\mu y)=-3\lambda x-3\mu y=\lambda f_3(x)+\mu f_3(y),$$

**Remarque 5.3.** *On peut montrer facilement la somme de deux applications linéaires est une application linéaire, aussi le produit d'une application linéaire par un scalaire et la composée de deux applications linéaires est une application linéaire.*

**PROPOSITION 5.4.** *Soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$.*

$$1.)f(O_E) = O_F, \quad 2.)\forall x \in E, f(-x) = -f(x).$$

PREUVE. *On a,*

$$1.)f(O_E) = f(O_E + O_E) = f(O_E) + f(O_E) \Rightarrow f(O_E) = O_F.$$

$$2.)f(-x) + f(x) = f(-x + x) = f(O_E) = O_F \Rightarrow f(-x) = -f(x).$$

**DÉFINITION 5.5.** *Soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$.*

(1) *On appelle image de $f$ et on note $Imf$ l'ensemble défini comme suit*

$$Imf = \{y \in F/\exists x \in E : f(x) = y\} = \{f(x)/x \in E\}.$$

(2) *On appelle noyau de $f$ et on note $\ker f$ l'ensemble défini comme suit :*

$$\ker f = \{x \in E/f(x) = O_F\},$$

*On note parfois $\ker f$, par $f^{-1}(\{0\})$.*

**PROPOSITION 5.6.** *Si $f$ est une application linéaire de $E$ dans $F$, alors si $dimImf = n < +\infty$, alors $n$ est appelé rang de $f$ et on note $rg(f)$.*
*$Imf$ et $\ker f$ sont des sous espaces vectoriels de $E$.*

**EXEMPLE 5.7.** (1) *Déterminons le noyau de l'application $f_1$,*

$$\ker f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/f(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x+2y = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x = -2y\}$$

*ainsi*

$$\ker f = \{(-2y,y)/y \in \mathbb{R}\} = \{y(-2,1)/y \in \mathbb{R}\}$$

*donc le $\ker f$ est un sous espace vectoriel engendré par $u = (-2,1)$ donc il est de dimension $1$, et sa base est $\{u\}$.*

(2) *Cherchons l'image de*

$$f_2 : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$$

$$(x,y,z) \longmapsto (-x+y, x-z, y)$$

$$Imf_2 = \{f(x,y,z)/(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \{(-x+y, x-z, y)/(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$Imf_2 = \{x(-1,1,0) + y(1,0,1) + z(0,-1,0)/(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$$

*donc $Imf_2$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\{(-1,1,0),(1,0,1),(0,-1,0)\}$ il est facile de montrer que cette famille est libre et donc il forment une base de $\mathbb{R}^3$ donc $dimImf_2 = 3, rg(f_2) = 3, Imf = \mathbb{R}^3$.*

**PROPOSITION 5.8.** *Soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$ on a les équivalences suivantes :*

(1) *$f$ est **surjective** $\Leftrightarrow Imf = F$.*

(2) *$f$ est **injective** $\Leftrightarrow \ker f = \{0_E\}$.*

**Exemple 5.9.** *Dans l'exemple* $Imf_2 = \mathbb{R}^3$ *donc* $f_2$ *est surjective, montrons que* $f_2$ *est injective*

$$\ker f_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f_2(x,y,z) = (0,0,0)\},$$

$$\Rightarrow \ker f_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (-x+y, x-z, y) = (0,0,0)\} \Rightarrow x = y = z = 0$$

*donc* $\ker f_2 = \{(0,0,0)\}$, *ainsi* $f_2$ *est bijective.*

### 5.2. Application Linéaire sur des espace de dimension finies.

**Proposition 5.10.** *Soit* $E$ *et* $F$ *deux* $\mathbb{K}$ *espace vectoriels et* $f, g$ *deux applications linéaires de* $E$ *dans* $F$. *Si* $E$ *est de dimension finie* $n$ *et* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *une base de* $E$, *alors* $\forall k \in \{1,2,..,n\}, f(e_k) = g(e_k) \Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) = g(x)$.

preuve. *L'implication* $(\Leftarrow)$ *est evidente.*
*Pour* $(\Rightarrow)$ *on a* $E$ *est engendré par* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, *donc* $\forall x \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}, x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$, *comme* $f$ *et* $g$ *sont linéaires, alors*

$$f(x) = f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + ... + \lambda_n f(e_n),$$

$$g(x) = g(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n) = \lambda_1 g(e_1) + \lambda_2 g(e_2) + ... + \lambda_n g(e_n),$$

*donc si on suppose que* $\forall k \in \{1,2,..,n\}, f(e_k) = g(e_k)$ *donc on déduit que* $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.

**Remarque 5.11.** *Pour que deux applications linéaires* $f$ *et* $g$ *de* $E$ *dans* $F$ *soient égales il suffit qu'elles coincident sur la base du* $\mathbb{K}-$ *espace vectoriel* $E$.

**Exemple 5.12.** *Soit* $g$ *une application de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *telle que*

$$g(1,0) = (2,1), g(0,1) = (-1,-1)$$

*alors déterminons la valeur de* $g$ *en tous points de* $\mathbb{R}^2$, *en effet on a :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y) = x(1,0) + y(0,1)$$

$$g(x,y) = g(x(1,0)+y(0,1)) = xg(1,0)+yg(0,1) = x(2,1)+y(-1,-1) = (2x-y, x-y)$$

*ainsi* $g(x,y) = (2x-y, x-y)$.

**Théorème 5.13.** *Soit* $f$ *une application linéaire de* $E$ *dans* $F$ *avec dimension de* $E$ *est finie, on a :*

$$\boxed{dimE = dim \ker f + dimIm(f)}$$

**Exemple 5.14.** *On a montré que* $dim \ker f_1 = 1$ *avec* $f_1$ *définie*

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto x + 2y$$

*comme* $dim\mathbb{R}^2 = 2 \Rightarrow dimIm(f) = dim\mathbb{R}^2 - dim \ker f_1 = 2 - 1 = 1.$

**Proposition 5.15.** *Soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$ avec $dimE = dimF = n$. On a alors les équivalences suivantes :*

$$f\,est\ isomorphisme \Leftrightarrow f\,est\ surjective \Leftrightarrow f\,est\ injective$$

$$\Leftrightarrow dimIm(f) = dimF \Leftrightarrow Imf = F \Leftrightarrow dim \ker f = 0 \Leftrightarrow \ker f = \{0_E\},$$

*de cette proposition, on déduit que si $f$ est un isomorphisme de $E$ dans $F$ avec $dimE$ finie alors nécessairement $dimE = dimF$ en d'autres termes si $dimE \neq dimF$ alors $f$ ne peut être un isomorphisme.*

**Exemple 5.16.**
(1) *L'application $f_1$ n'est pas un isomorphisme car $dim\mathbb{R}^2 \neq dim\mathbb{R}$.*
(2) *Soit $g(x, y) = (2x - y, x - y)$, $g$ définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ on a,$dim\mathbb{R}^2 = dim\mathbb{R}^2$ est un isomorphisme car $dim \ker g = 0$ en effet :*

$$\ker g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/(2x - y, x - y) = (0, 0)\} = \{(0, 0)\},$$

*c'est même un automorphisme.*

## 6. Exercices Corrigés

**Exercice** 15. *On considère dans $\mathbb{R}^3$, le sous ensemble $F$ défini par :*

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/2x + y - z = 0\}$$

(1) *Montrer que $F$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.*
(2) *Donner une base de $F$, quelle est sa dimension ?*
(3) *$F$ est-il égale à $\mathbb{R}^3$ ?*

**Solution.** (1) *:*

$$F\ est\ s.e.v \Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \emptyset, \\ \forall X, Y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda.X + \mu.Y \in F \end{cases}$$

- $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in F \Rightarrow F \neq \emptyset$, *car* $2.0 + 0 - 0 = 0$.
- $\forall X = (x, y, z), Y = (x', y', z') \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *montrons que :*

$$\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z') \overset{?}{\in} F,$$

*c'est à dire* $(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \overset{?}{\in} F$

$$2(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z') = \lambda(2x + y - z) + \mu(2x' + y' - z') = \lambda.0 + \mu.0 = 0,$$

*car :*

$$(x, y, z) \in F \Rightarrow 2x + y - z = 0,$$

$$et\,(x', y'; z') \in F \Rightarrow 2x' + y' - z' = 0.$$

*Ainsi* $\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z') \in F$, *$F$ est sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

(2) *Base de $F$ : soit* $X \in F \Leftrightarrow 2x+y-z=0 \Rightarrow z=2x+y$,
$X=(x,y,z)=(x,y,2x+y)=x(1,0,2)+y(0,1,1)$, *ainsi*
$$F=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3/2x+y-z\}=\{x(1,0,2)+y(0,1,1)/x,y\in\mathbb{R}\}.$$
*D'où $F$ est engendré par* $\{v_1=(1,0,2), v_2=(0,1,1)\}$, *montrons que cette famille est libre si et seulement si*
$$\forall \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}, \lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2=(0,0,0)\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0.$$
$$\lambda_1(1,0,2)+\lambda_2(0,1,1)=(0,0,0)\Rightarrow(\lambda_1,\lambda_2,2\lambda_1+\lambda_2)=(0,0,0)$$
*d'où le résultat. Alors la dimension de $F$ est égale à 2, car* $\{v_1,v_2\}$ *est une base ( libre et génératrice) de* $\mathbb{R}^3$.

(3) $F\neq\mathbb{R}^3$ *car* $\dim F=2\neq 3=\dim\mathbb{R}^3$.

**Exercice** 16. *On considère dans $\mathbb{R}^3$, le sous ensemble $F$ défini par :*
$$F=\{(x-y,2x+y+4z,3y+2z)/\,x,y,z\in\mathbb{R}\}$$
(1) *Montrer que $F$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.*
(2) *Donner une base de $F$, quelle est sa dimension ?*
(3) *$F$ est-il égale à $\mathbb{R}^3$ ?*

**Solution**. (1) – $(0,0,0)\in F$ *car* $(0,0,0)=(0-0,2.0+0+4.0,3.0+2.0)\Rightarrow F\neq\emptyset$.
– $\forall X,Y\in F,\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ *montrons que* $\lambda X+\mu Y\overset{?}{\in}F$ *; on a :*
$$X\in F\Leftrightarrow \exists(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/X=(x-y,2x+y+4z,3y+2z),$$
$$Y\in F\Leftrightarrow \exists(x',y',z')\in\mathbb{R}^3/Y=(x'-y',2x'+y'+4z',3y'+2z'),$$
$$\lambda X+\mu Y=(\lambda x+\lambda y+\lambda z,\lambda x-\lambda y,\lambda z)+(\mu x'+\mu y'+\mu z',\mu x'-\mu y',\mu z')$$
$$\lambda X+\mu Y=((\lambda x+\mu x')-(\lambda y+\mu y'),2(\lambda x+\mu x')+(\lambda y+\mu y')+4(\lambda z+\mu z),3(\lambda y+\mu y')+2(\lambda z+\mu z)$$
*d'où* $\exists x''=\lambda x+\mu x', \exists y''=\lambda y+\mu y', \exists z''=\lambda z+\mu z'$, *ainsi*
$$\lambda X+\mu Y=(x''-y''+,2x''+y''+4z'',3y''+2z'')\in F.$$

(2) *Base de $F$ : soit* $X\in F\Leftrightarrow \exists(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/X=(x-y,2x+y+4z,3y+2z)$,
$X=(x-y,2x+y+4z,3y+2z)=x(1,2,0)+y(-1,1,3)+y(0,4,2)$, *ainsi*
$$F=\{x(1,2,0)+y(-1,1,3)+y(0,4,2)/x,y,z\in\mathbb{R}\}.$$
*D'où $F$ est engendré par* $\{v_1=(1,2,0),v_2=(-1,1,3),v_3=(0,4,2)\}$, *montrons que cette famille est libre si et seulement si*
$$\forall\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R},\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\lambda_3v_3=(0,0,0)\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.$$
$$\lambda_1(1,2,0)+\lambda_2(-1,1,3)+\lambda_3(0,4,2)=(0,0,0)\Rightarrow(\lambda_1-\lambda_2,2\lambda_1+\lambda_2+4\lambda_3,3\lambda_2+2\lambda_3)=(0,0,0)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=\lambda_2,\\3\lambda_2+4\lambda_3=0,\\3\lambda_2+2\lambda_3,\end{cases}\quad\Rightarrow 2\lambda_3=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=0.$$
*d'où le résultat. Alors la dimension de $F$ est égale à 3, car* $\{v_1,v_2,v_3\}$ *est une base ( libre et génératrice) de* $\mathbb{R}^3$.

(3) $F = \mathbb{R}^3$ *car* $\dim F = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

**Exercice** 17. *On considère dans* $\mathbb{R}^4$*, le sous ensemble* $F$ *défini par :*

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / (x + z = 0) \wedge (y + t = 0)\}$$

(1) *Montrer que* $F$ *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

(2) *Donner une base de* $F$*, déduire sa dimension.*

**Solution**. (1) – $(0, 0, 0, 0) \in F \Rightarrow F \neq \emptyset$, *car* $(0+0 = 0) \wedge (0+0 = 0)$.

– $\forall X = (x, y, z, t), Y = (x', y', z', t') \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *montrons que :*

$$\lambda(x, y, z, t) + \mu(x', y', z', t') \in^? F,$$

*c'est à dire* $(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z', \lambda t + \mu t') \in^? F$

$$\begin{cases} X \in F \Rightarrow & (x + z = 0) \wedge (y + t = 0) \\ Y \in F \Rightarrow & (x' + z' = 0) \wedge (y' + t' = 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda(x + z) = 0 \wedge \mu(x' + z') = 0 \Rightarrow & \lambda x + \mu x' + \lambda z + \mu z' = 0 \\ \wedge & \\ \lambda(y + t) = 0 \wedge \mu(y' + t') = 0 \Rightarrow & \lambda y + \mu y' + \lambda t + \mu t' = 0 \end{cases}$$

*ainsi* $\lambda x + \mu x' + \lambda z + \mu z' = 0 \wedge \lambda y + \mu y' + \lambda t + \mu t' = 0$ *c'est dire* $\lambda(x, y, z, t) + \mu(x', y', z', t') \in F$ *d'où le résultat.*

(2) *Base de* $F$ *: soit* $X \in F \Leftrightarrow x = -z \wedge y = -t$,
$X = (x, y, z, t) = (x, y, -x, -y) = x(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, 0, -1)$, *ainsi*

$$F = \{x(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, 0, -1)/x, y \in \mathbb{R}\}.$$

*D'où* $F$ *est engendré par* $\{v_1 = (1, 0, -1, 0), v_2 = (0, 1, 0, -1)\}$, *montrons que cette famille est libre si et seulement si*

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

$\lambda_1(1, 0, -1, 0) + \lambda_2(0, 1, 0, -1) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_1, -\lambda_2) = (0, 0, 0, 0)$

*d'où le résultat. Alors la dimension de* $F$ *est égale à 2, car* $\{v_1, v_2\}$ *est une base ( libre et génératrice) de* $\mathbb{R}^4$.

**Remarque 6.1.** *C'est un exemple de l'intersection de deux s.e.v est un s.e.v on pouvait l'écrire sous cette forme* $F = F_1 \cap F_2$ *où*

$$F_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / (x + z = 0)\},$$
$$F_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / (y + t = 0)\}.$$

*est montrer que* $F_1, F_2$ *sont des s.e.v de* $\mathbb{R}^4$.

**Exercice** 18. (1) *Montrer que la famille* $\{(1, 2), (-1, 1)\}$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^2$.

(2) *quelle sont les famille libre parmis les familles suivantes :* $F_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$, $F_2 = \{(0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (2, 1, 1, 0)\}$.

(3) *Montrer que la famille* $\{(1, 2), (-1, 1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$,
*et que la famille* $F_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

**Solution**. (1) *La famille* $\{(1,2),(-1,1)\}$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^2$ *si et seulement si*

$$\forall X=(x,y)\in\mathbb{R}^2, \exists \lambda,\mu\in\mathbb{R}/X=\lambda(1,2)+\mu(-1,1).$$

*Soit* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$*, cherchons* $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ *tel que :*

$$(x,y)=\lambda(1,2)+\mu(-1,1)=(\lambda-\mu,2\lambda+\mu)$$

*ainsi*

$$\begin{cases} x=\lambda-\mu, & \ldots.(1)\\ y=2\lambda+\mu, & \ldots.(2)\end{cases} (1)+(2)\Rightarrow \lambda=\frac{x+y}{3} et\, \mu=\frac{-2x+y}{3}$$

*d'où cette famille est génératrice.*

(2) *quelle sont les famille libre parmis les familles suivantes :* $F_1=\{(1,1,0),(1,0,0),(0,1,1)\}$, $F_2=\{(0,1,1,0),(1,1,1,0),(2,1,1,0)\}$.

*i)* $F_1=\{(1,1,0),(1,0,0),(0,1,1)\}$ *est libre si et seulement si*

$$\forall \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}, \lambda_1(1,1,0)+\lambda_2(1,0,0)+\lambda_3(0,1,1)=(0,0,0)\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.$$

$$\lambda_1(1,1,0)+\lambda_2(1,0,0)+\lambda_3(0,1,1)=(0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_1+\lambda_3=0\\ \lambda_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\\ \lambda_3=0\end{cases}$$

$F_1$ *est libre.*

*ii)* $F_2=\{(0,1,1,0),(1,1,1,0),(2,1,1,0)\}$ *est n'est pas libre car*

$$\exists \lambda_1=1,\lambda_2=-2,\lambda_3=1\in\mathbb{R}, \lambda_1(0,1,1,0)+\lambda_2(1,1,1,0)+\lambda_3(2,1,1,0)=(0,0,0,0).$$

(3) *La famille* $\{(1,2),(-1,1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$*, car quand le nombre de vecteurs=2=*$\dim\mathbb{R}^2$ *il suffit de montrer qu'elle est soit génératrice ou bien libre pour qu'elle puisse être une base or d'après la question (1) elle est génératrice d'où le résultat.*
*La famille* $F_1=\{(1,1,0),(1,0,0),(0,1,1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$*, car le cardinale de* $F_1$ *est égale à* $3=\dim\mathbb{R}^3$ *est* $F_1$ *étant libre, alors c'est une base de* $\mathbb{R}^3$.

**Exercice** 19. *Soit l'application* $f$ *définie de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$f(x,y)=(x+y,x-y).$$

(1) *Monter que* $f$ *est linéaire.*

(2) *Déterminer* $\ker f$*, et* $Imf$ *et donner leurs dimensions,* $f$ *est-elle bijectives ?*

(3) *Déterminer* $f\circ f$.

**Solution**. (1) $f$ *est linéaire si et seulement si*

$$\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}, \forall (x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2; f(\alpha(x,y)+\beta(x',y'))=\alpha f(x,y)+\beta f(x',y').$$

$$
\begin{aligned}
f(\alpha(x,y)+\beta(x',y')) &= f(\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y')\\
&= (\alpha x+\beta x'+\alpha y+\beta y', \alpha x+\beta x'-\alpha y-\beta y')\\
&= (\alpha x+\alpha y, \alpha x-\alpha y)+(\beta x'+\beta y', \beta x'-\beta y')\\
&= \alpha(x+y, x-y)+\beta(x'+y', x'-y')\\
&= \alpha f(x,y)+\beta f(x',y')
\end{aligned}
$$

*d'où $f$ est linéaire.*

(2) *Déterminons* $\ker f$, *et* $Imf$ *et donner leurs dimensions,* $f$ *est-elle bijectives ?*

$$
\begin{aligned}
\ker f &= \{(x,y)\in \mathbb{R}^2/f(x,y)=(0,0)\}\\
&= \{(x,y)\in \mathbb{R}^2/x+y=0 \wedge x-y=0\}\\
&= \{(0,0)\}
\end{aligned}
$$

*ainsi* $\dim\ker f=0$.

$$
\begin{aligned}
Imf &= \{(x+y, x-y)/(x,y)\in \mathbb{R}^2\}\\
&= \{x(1,1)+y(1,-1)/(x,y)\in \mathbb{R}^2\}.
\end{aligned}
$$

*Ainsi* $Imf$ *est engendré par deux vecteur qui sont libre, alors* $\dim Imf=2$. *Sachant que la dimension de l'ensemble de départ est égale à la dimension de l'ensemble d'arrivée* $f$ *est bijective si elle est soit injective ou bien surjective or* $f$ *est injective car* $\ker f=\{(0,0)\}$ *et aussi surjective car* $\dim \mathbb{R}^2=\dim Imf=2$ *c'est à dire* $Imf=\mathbb{R}^2$.

(3) *Soit* $(x,y)\in\mathbb{R}^2)$ *on a*

$$
\begin{aligned}
f\circ f(x,y) &= f(f(x,y))=f(x+y, x-y)\\
&= ((x+y)+(x-y),(x+y)-(x-y))\\
&= (2x,2y)=2(x,y)=2Id_{\mathbb{R}^2}
\end{aligned}
$$

**Exercice** 20. *Soit l'application* $f$ *définie de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$f(x,y)=(2x-4y, x-2y).$$

(1) *Monter que* $f$ *est linéaire.*

(2) *Déterminer* $\ker f$, *et* $Imf$ *et donner leurs dimensions,* $f$ *est-elle bijectives ?*

**Solution**. (1) $f$ *est linéaire si et seulement si*

$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\forall(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2; f(\alpha(x,y)+\beta(x',y'))=\alpha f(x,y)+\beta f(x',y')$.

$$
\begin{aligned}
f(\alpha(x,y)+\beta(x',y')) &= f(\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y')\\
&= (2\alpha x+2\beta x'-4\alpha y-4\beta y', \alpha x+\beta x'-2\alpha y-2\beta y')\\
&= (2\alpha x-4\alpha y, \alpha x-2\alpha y)+(2\beta x'-4\beta y', \beta x'-2\beta y')\\
&= \alpha(2x-4y, x-2y)+\beta(2x'-4y', x'-2y')\\
&= \alpha f(x,y)+\beta f(x',y')
\end{aligned}
$$

*d'où $f$ est linéaire.*

(2) *Déterminons* $\ker f$, *et $Imf$ et donner leurs dimensions, $f$ est-elle bijectives ?*

$$\begin{aligned}\ker f &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = (0,0)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - 4y = 0 \wedge x - 2y = 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 2y\} \\ &= \{(2y,y)/y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(2,1)/y \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

*ainsi* $\ker f$ *est engendré par le vecteur*$(2,1) \neq 0$, *ainsi* $\dim \ker f = 1$, $f$, *alors n'est pas injective.*

$$\begin{aligned}Imf &= \{(2x - 4y, x - 2y)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(2,1) + y(-4,-2)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\}.\end{aligned}$$

*Ainsi $Imf$ est engendré par deux vecteur qui ne sont pas libre car* $(-4,-2) = -2(2,1)$ *alors* $\dim Imf = 1$ *on peut aussi utliser le fait que la dimension de l'ensemble de départ est égale à la dimension de l'ensemble d'arrivée $f$, alors* $\dim \ker f + \dim Imf = \dim R^2, \Rightarrow \dim Imf = 2 - 1 = 1.$

(3) *$f$ n'est pas bijective car il n'est ni injective ni surjective.*

CHAPITRE 3

# Les matrices

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finies $n$ et $m$, $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$, soit $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de $E$, $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_m\}$ une base de $F$, les vecteurs $f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)$ sont de vecteurs dans $F$ comme $\{e'_1, e'_2, ..., e'_m\}$ est une base de $F$, alors $f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)$ s'écrivent donc comme combinaisons linéaires des vecteurs de la base $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_m\}$. On a pour tout $j = 1, ..., n$.

$$f(e_j) = a_{1j}e'_1 + a_{2j}e'_2 + ... + a_{mj}e'_m.$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & ... & f(e_n) \\ & & & \\ a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ e'_m \end{array}$$

Le tableau suivant :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

est appelé matrice associée à $f$ relativement aux bases $B$ et $B'$. On note la matrice $(a_{ij})$ où $i$ désigne l'indice de ligne et $j$ l'indice de colone.
On introduit maintenant la notion de matrice et les opérations algèbriques des matrices.

## 1. Espace vectoriel des matrices

**Définition 1.1.** *On appelle une matrice dans $\mathbb{K}$ de type $(n, p)$ un tableau rectangulaire $A$ d'éléments de $\mathbb{K}$ ayant $n$ lignes et $p$ colonnes.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{np} \end{pmatrix}$$

On note $a_{ij}$ l'élément qui se trouve à la ligne numéro $i$ et la colonne $j$ et on note la matrice $A$ par $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$. L'ensemble des matrices de type $(n, p)$ est noté $\mathcal{M}(n, p)(\mathbb{K})$.

(1) Pour $n = 1$, on dit que $A$ est une matrice ligne, $A = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1p})$.

(2) Pour $p = 1$ on dit que $A$ est une matrice ligne, $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ .. \\ a_{1p} \end{pmatrix}$.

(3) Pour $n = p$, on dit que $A$ est une matrice carrée d'ordre $n$ et on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**Exemple 1.2.** (1) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, *$A_1$ est une matrice de type* $(4, 3)$.

(2) $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, *$A_2$ est une matrice de type* $(2, 4)$.

(3) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$, *$A_3$ est une matrice carrée d'ordre* 2.

**Définition 1.3.** *Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ deux matrices de types $(n, p)$,*

(1) *On dit que $A = B$ si $\forall i = 1, ..., n, \forall j = 1, ..., p; a_{ij} = b_{ij}$.*

(2) *La transposée de la matrice $A$ est une matrice notée $A^t$ définie par*

$$A^t = (a_{ji})_{1\leq j\leq p, 1\leq i\leq n},$$

*autrement dit $A^t$ c'est la matrice de type $(p, n)$ obtenue en remplaçant les lignes par les colonnes et les colonnes par les lignes et on a : $(A^t)^t = A$.*

**Exemple 1.4.** (1) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(2) $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$

(3) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A_3^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.

**Théorème 1.5.** *En munissant l'ensemble $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ par les opération suivantes :*

$$(+) : \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$$
$$\left( \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & ::: & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{np} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & ::: & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{np} \end{pmatrix} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & ... & a_{1p}+b_{1p} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & ... & a_{2p}+b_{2p} \\ \vdots & \vdots & ::: & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & ... & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix}.$$

*et*

$$(\cdot) : \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$$
$$\left( \lambda, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & ::: & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{np} \end{pmatrix} \right), \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & ... & \lambda a_{1p} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & ... & \lambda a_{2p} \\ \vdots & \vdots & ::: & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & ... & \lambda a_{np} \end{pmatrix}$$

*Alors* $(\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ *est* $\mathbb{K}-$ *espace vectoriel de dimension* $n \times p$*, sachant que l'élément neutre de l'addition est la matrice nulle* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 \\ . & . & .. & . \\ 0 & 0 & .. & 0 \end{pmatrix}$

## 2. Produit de deux matrices

**Définition 2.1.** *Soit* $A \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{(p,m)}(\mathbb{K})$*, on définit le produit de la matrice* $A$ *par* $B$ *comme étant une matrice* $C = (c_{ij})_{1 \leq i \leq, 1 \leq j \leq m} \in \mathcal{M}_{(n,m)}(\mathbb{K})$*, avec* $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{31}b_{3j} + ... + a_{ip}b_{pj}$.

**Remarque 2.2.** (1) *L'élément* $C_{ij}$ *de la matrice* $C$ *se calcule en additionnant le produit des éléments de la ligne* $i$ *de la matrice* $A$ *par la les éléments de la colonne* $j$ *de la matrice* $B$.

(2) *Le produit de deux matrice ne peut se faire que si le nombre de colonnes de la matrice* $A$ *correspond au nombre de lignes dela matrice* $B$.

**Exemple 2.3.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$A$ *est de type* $(2, \boldsymbol{3})$ *et* $B$ *de type* $(\boldsymbol{3}, 4)$ *ainsi* $C$ *sera de type* $(2, 4)$.

$$C = A.B = \begin{pmatrix} 1.1+1.2+0.1 & 1.2+1.0+0.1 & 1.0+1.1+0.0 & 1.1+1.1+0.0 \\ 2.1+2.2+0.1 & 2.2+2.0+0.1 & 2.0+2.1+0.0 & 2.1+2.1+0.0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

**Remarque 2.4.** *Le produit deux matrice n'est pas commutatif voiçi un exemple :*

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \neq B.A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

## 3. Matrices carrées

**Définition 3.1.** *Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$, $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$,*

(1) *La suite des éléments $\{a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}\}$ est appelée la diagonale principle de $A$.*

(2) *La trace de $A$ est le nombre $Tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$.*

(3) *$A$ est dite matrice diagonale si $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$ c'est à dire que les éléments de $A$ sont tous nuls sauf la diagonale principale.*

(4) *$A$ est dite matice triangulaire supérieure (resp inférieure) si $a_{ij} = 0, \forall i > j$, (resp $i < j$), c'est à dire les éléments qui sont au dessous(resp au dessus) de la diagonale sont nuls).*

(5) *$A$ st dite symétrique si $A = A^t$.*

**Exemple 3.2.** (1) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *$A_1$ est une matrice diagonale.*

(2) $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, *$A_2$ est une matrice triangulaire inférieure.*

(3) $A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 40 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, *$A_3$ est une matrice triangulaire supérieure .*

(4) $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 12 & 1 \\ -2 & 1 & 10 \end{pmatrix} = A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 12 & 1 \\ -2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$, *$A_4$ est une matrice symétrique.*

**Proposition 3.3.** *Le produit des matrices est une opération interne dans $\mathcal{M}_{(n,n)}(\mathbb{K})$ et il admet un élément neutre la matrice nommée matrice identitée notée $I_n$ définie par :*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.. & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.. & 0 \\ . & . & . & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ..0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Définition 3.4.** *Soit $A \in \mathcal{M}_{(n,n)}(\mathbb{K})$ on dit que $A$ est invesible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_{(n,n)}(\mathbb{K})$ telle que $A.B = B.A = I_n$.*

**Exemple 3.5.** *Montrons que la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *est inversible et ceci en cherchant la matice* $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *telle que*

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B.A$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a-b \\ c & 2c-d \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

## 4. Les Déterminants

**Définition 4.1.** *Soit* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *une matrice dans* $\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{K})$*, on appelle déterminant de* $A$ *le nombre réel donné par :* $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$*. On le note* $det(A)$ *ou* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,

**Exemple 4.2.** *Calculons le* $det(A)$,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 0.(2) = -1.$$

**Définition 4.3.** *De même, on définit le déterminant d'une matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}),$$

*par*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

**Exemple 4.4.**

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 12 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}.1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} 0. \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-1) \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow |A| = -1 + 0 - 12 = -13$$

**Proposition 4.5.** *Pour calculer le déterminant d'une matrice* $A$ *on peut développer* $A$ *suivant n'importe quelle ligne ou colonne.*

Suivant cette proposition il vaut mieux choisir la ligne ou colonne contenant le plus de zéros.

**Exemple 4.6.** *On reprend la même matrice de l'exemple pécédent mais calculer suivant la troisième ligne on aura :*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 12 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}.0 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}.1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}.0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 12 & -1 \end{vmatrix}$$

$$det(A) = 0 - 13 + 0 = -13$$

on calcule juste un déterminant au lieu de trois.

**Définition 4.7.** *De même, on définit le déterminant d'une matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K}),$$

*par*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

**Définition 4.8.** *Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$,*
*le déterminant suivant la $j$-ème colone est :*

$$det(A) = (-1)^{1+j} a_{1j} D_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} D_{2j} + ... + (-1)^{n+j} a_{nj} D_{nj}, j = 1, ..., n.$$

*Le déterminant suivant la $i$-ème ligne est :*

$$det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} D_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} D_{i2} + ... + (-1)^{i+n} a_{in} D_{in}, i = 1, ..., n.$$

*Où $A_{ij}$ représent ce que nous appelons le déterminant mineur du terma $a_{ij}$, le déterminant d'ordre $n-1$ obtenu de $det(A)$ en supprimant la $i$-ème ligne et la $j$-ème colonne.*

**Proposition 4.9.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :*

1. $det(A) = det(A^t)$.
2. $det(A) = 0$ *si deux lignes de $A$ sont égales (ou deux colonnes).*
3. $det(A) = 0$ *si deux lignes de $A$ sont proportinnelles ( ou deux colonnes le sont).*
4. $det(A) = 0$ *si une ligne est combinaison linéaires de deux autres lignes de $A$ (même chôse pour les colonnes).*

(5) *$det(A)$ ne change pas si on ajoute à une ligne une combinaison linéaires d'autres lignes (même chôse pour les colonnes).*

(6) *Si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $det(A.B) = det(A).det(B)$.*

**Exemple 4.10.** (1) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$, *car la ligne 1 est égale à la ligne 3*, $L_1 = L_3$.

(2) $|B| = \begin{vmatrix} 9 & 0 & -15 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$, *car* $L_1 = 3 * L_4$.

(3) $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -10 & 2 \end{vmatrix} = 0$, *car* $C_1 = C_2$.

**Définition 4.11.** *Soit $V_1, V_2, ..., V_n$, $n$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ on appelle déterminant des vecteurs $(V_1, V_2, ..., V_n)$ et on le note $det(V_1, V_2, ..., V_n)$ le déterminant dont les colonnes sont les vecteurs $V_1, V_2, ..., V_n$.*

**Exemple 4.12.** *Soit $V_1 = (1, 1, 0), V_2 = (0, -1, 1), V_3 = (0, 0, 1)$, alors*

$$det(V_1, V_2, V_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

**Proposition 4.13.** *Soit $V_1, V_2, ..., V_n$, $n$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ on $(V_1, V_2, ..., V_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow det(V_1, V_2, ..., V_n) \neq 0$*

**Exemple 4.14.** *Soit $V_1 = (1, 2, 0), V_2 = (0, -1, 1), V_3 = (0, 0, 1)$, forment une base de $\mathbb{R}^3$, car $det(V_1, V_2, V_3) = -1 \neq 0$.*

### 4.1. Le rang d'un matrice.

**Définition 4.15.** *Soit $A \in M_{(n,p)}(\mathbb{K})$, on appelle rang de $A$ et on note $rgA$ l'ordre de la plus grande matrice carrée $B$ prise (extraite) dans $A$ telle que $detB \neq 0$.*

**Exemple 4.16.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $detA = 2 \neq 0, rgA = 2$.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $detA = 0 \neq 0, rgA = 1$.

$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $rgA < 4(rgA \leq 3)$ *la plus grande matrice carrée contenue* *dans $A$ est d'ordre 3, dans cet exmple on a : 4 possibilité :*

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, C_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$detC_1 = detC_2 = 0$ *et* $detC_3 = detC_4 = 0$ *donc le* $rgA < 3$ *et on a :*

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rgA = 2.$$

**Théorème 4.17.** *le rang d'une matrice est égale au nombre maximale de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants.*

**Définition 4.18.** *Soit* $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, on appelle cofacteur d'indice* $i$ *et* $j$ *de* $A$ *le scalaire*

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} detA_{ij}.$$

*Avec* $A_{ij}$ *est la matrice déduite de* $A$ *par suppression de la ligne* $i$ *t la colonne* $j$*.*
*La matrice* $C = (c_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ *est appelée la matrice des cofacteurs et la matrice* $C^t$ *est appellée la comatrice de* $A$*.*

**Exemple 4.19.** *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$. *Calculons les coffacteurs de* $A$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} det(A_{11}) = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

$$c_{11} = (-1)^{1+2} det(A_{12}) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

$$c_{11} = (-1)^{1+3} det(A_{13}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} det(A_{21}) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} det(A_{22}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} det(A_{23}) = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} det(A_{31}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2}det(A_{32}) = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3}det(A_{33}) = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

*donc la matrice des cofacteurs est donnée par :*

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 6 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

*et la comatrice et*

$$C^t = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

**THÉORÈME 4.20.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :*

$$A \text{est inversible } \Leftrightarrow det(A) \neq 0,$$

*et dans ce cas la matrice inverse de $A$ est donnée par :*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} C^t.$$

*Où $C^t$ est la comatrice de $A$.*

**EXEMPLE 4.21.** *La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $det(A) = 2 \neq 0$ donc elle est inversible, de plus*

$$A^{-1} = \frac{1}{2} C^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

*On peut vérifier que $A^{-1}A = I_3 = AA^{-1}$.*

## 5. Relations entre une application linéaire et sa matrice Associée

**DÉFINITION 5.1.** *La matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ est appelée la matrice de $f$ suivant les bases $B$ et $B'$ et elle est parfois notée $\mathcal{M}_{(B,B')}(f)$.Si $E = F$ et $B = B'$, on dit que $A$ est la matrice de $f$ suivant la base $B$ et on la note $\mathcal{M}_{(B)}(f)$.*

**Exemple 5.2.** (1)
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \to (x + y + z, x - y)$$
*$\mathbb{R}^3$ sa base canonique $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ et $\mathbb{R}^2$ sa base canonique $B' = \{v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1)\}$,*
$$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 1) = v_1 + v_2$$
$$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (1, -1) = v_1 - v_2.$$
$$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (1, 0) = v_1$$
$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \end{array}$$

(2)
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \to (x + y, x - y)$$
*$B = \{e_1 = (1, 2), e_2 = (-1, 1)\}$ et $B' = \{v_1 = (0, 2), v_2 = (-2, 1)\}$, On doit chercher les $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$?*
$$f(e_1) = f(1, 2) = (3, -1) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2,$$
$$f(e_2) = f(-1, 1) = (0, -2) = \lambda_3 v_1 + \lambda_4 v_2,$$
$$(3, -1) = \lambda_1(0, 2) + \lambda_2(-2, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{4} \\ \lambda_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$
$$(0, -2) = \lambda_3(0, 2) + \lambda_4(-2, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = -1 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$
$$M_{(B,B')}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) \\ \frac{1}{4} & -1 \\ -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \end{array}$$

**Proposition 5.3.** *Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}-$ espace vectoriels de dimensions finies $n$ et $m$, $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de $E$ et $B' = (v_1, v_2, ..., v_m)$ une base de $F$, alors la donnée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{(n,m)}(\mathbb{K})$ donne une unique application linéaire $f$ de $E$ dans $F$ la matrice suivant les bases, $B$ et $B'$ est $A$*

**Exemple 5.4.** *$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A$ est la matrice de $f$ suivant la base canonique de $\mathbb{R}^2, (e_1, e_2)$,*
$$f(e_1) = e_1 + 2e_2 \Rightarrow f(1, 0) = (1, 0) + 2(0, 1) = (1, 2),$$
$$f(e_2) = -e_1 \Rightarrow f(0, 1) = -(1, 0) = (-1, 0),$$
$$f(x, y) = f(x(1, 0) + y(0, 1)) = xf(1, 0) + yf(0, 1)$$
$$\Leftrightarrow f(x, y) = x(1, 2) + y(-1, 0) = (x - y, 2x).$$

**Remarque 5.5.** *Si $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ sont munis de leurs bases canoniques alors l'application linéaire $f$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ associée à une matrice $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$ est donnée par*

$$\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, f(x_1, x_2, ..., x_n) = A. \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}$$

**Exemple 5.6.** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$

$$f(x, y) = A. \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x - y, 2x).$$

**Théorème 5.7.** *Soit $E, F$ et $G$ des $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels munis respectivement par les par bases $B, B', B'', f : E \to F, g : F \to G$, deux applications linéaires, alors*

$$M_{(B,B'')}(g \circ f) = M_{(B',B'')}(g) M_{(B,B')}(f)$$

**Remarque 5.8.**

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \ \ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \to (x + y + 2z, x - y), \ \ (x, y) \to (x - y, 2x + y)$$

*où $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ sont munis de leurs bases canoniques alors*

$$g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \to g \circ f(x, y, z)$$

*avec $M(g \circ f) = M(g)M(f)$,*

$$M(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(g \circ f) = M(g)M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

*Ainsi*

$$g \circ f(x, y, z) = M(g \circ f) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (2y + 2z, 3x + y + 4z).$$

**Théorème 5.9.** *Soit $f; E \to F, B$ est une base de $E$ et $B'$ est une base de $F$, on a alors :*

$$f \, bijective \Leftrightarrow det M_{(B,B')}(f) \neq 0$$

*et on a dans ce cas $M_{(B,B')}(f^{-1}) = (M_{(B,B')}(f))^{-1}$.*