Topología elemental
Problemas

Íker Muñoz Martínez

Índice general

Lista 0: Para Empezar

Número 0.1

Enunciado

Comprobar las leyes distributivas para la unión y la intersección de conjuntos, y las leyes de De Morgan.

Solución:

- Ley distributiva de la unión: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

  $x \in (A \cap B) \cup C \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$

- Ley distributiva de la intersección: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

  $x \in (A \cup B) \cap C \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$

- Leyes de De Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ & $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

  (1) $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$

  (2) $A \cap B = A^{cc} \cap B^{cc} \overset{(1)}{=} (A^c \cup B^c)^c$, y tomando complementarios en ambos lados obtenemos la segunda ley.

Número 0.2

Enunciado

Se consideran una aplicación $f : A \to B$ y subconjutos $A_0 \subset A, B_0 \subset B$.

(1) Demostrar que $A_0 \subset f^{-1}(f(A_0))$ y que se da la igualdad si f es inyectiva.

(2) Demostrar que $f(f^{-1}(B_0)) \subset B_0$ y que se da la igualdad si f es sobreyectiva.

Solución:

(1) Sea $x \in A_0$. Así, $f(x) \in f(A_0)$, y por definición de preimagen, $x \in f^{-1}(f(A_0))$. En particular, obtenemos la igualdad $A_0 = f^{-1}(f(A_0))$ si f es inyectiva. Supongamos que $\exists y \in f^{-1}(f(A_0)) \setminus A_0$. Así, $f(y) \in f(A_0)$, luego existe un $x \in A_0$ tal que $f(y) = f(x)$. Como f es inyectiva, $x = y \in A_0$, lo que nos lleva a una contradicción.

(2) Sea $y \in f(f^{-1}(B_0))$. Así, existe $x \in f^{-1}(B_0)$ tal que $y = f(x)$. Por tanto, si aplicamos f, obtenemos que $f(x) = y \in B_0$. En particular, obtenemos la igualdad $f(f^{-1}(B_0)) = B_0$ si f es sobreyectiva. Si $y \in B_0$, como f es sobreyectiva, existe un $x \in f^{-1}(B_0)$ tal que $f(x) = y$. Aplicamos f^{-1} y obtenemos que $f^{-1}(y) = x \in f^{-1}(B_0)$, y al aplicar f obtenemos $f(x) = y \in f(f^{-1}(B_0))$.

Número 0.3

Enunciado

Se consideran una aplicación $f : A \to B$ y colecciones de subconjutos $A_i \subset A, B_i \subset B$.

(1) Probar que f^{-1} conserva inclusiones, uniones, intersecciones y diferencias

- *(a) Si $B_i \subset B_j$, entonces $f^{-1}(B_i) \subset f^{-1}(B_j)$*
- *(b) $f^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i)$*
- *(c) $f^{-1}(\bigcap_i B_i) = \bigcap_i f^{-1}(B_i)$*
- *(d) $f^{-1}(B_i \setminus B_j) = f^{-1}(B_i) \setminus f^{-1}(B_j)$*

(2) Demostrar que f conserva solamente las uniones y las inclusiones:

- *(a) Si $A_i \subset A_j$, entonces $f(A_i) \subset f(A_j)$*
- *(b) $f(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f(A_i)$*
- *(c) $f(\bigcap_i A_i) \subset \bigcap_i f^(A_i)$; se da la igualdad si f es inyectiva.*
- *(d) $f(A_i \setminus A_j) \supset f^(A_i) \setminus f(A_j)$; se da la igualdad si f es inyectiva.*

Solución:

Número 0.4

Enunciado

Probar que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es numerable. Probar que el intervalo $[0,1]$ no es numerable, y que por tanto no lo es $\mathbb{R}$.

Solución:

dgerhgsre

Número 0.5

Enunciado

(Distancias en $\mathbb{R}^n$) Comprobar que cada una de las siguientes es una distancia en $\mathbb{R}^n$ y estudiar como son las bolas en cada una de ellas.

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2} \qquad \rho_1(x,y) = \sum_i |x_i - y_i| \qquad \rho_2(x,y) = \max_i |x_i - y_i|$$

Para la primera, utilizar la desigualdad triangular o de Minkowsky

$$\sqrt{\sum_i (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_i a_i^2} + \sqrt{\sum_i b_i^2}$$

Solución:

dgerhgsre

Lista 1: Espacios Topológicos

Lista 2: Aplicaciones continuas

Lista 3: Construcción de topologías

Lista 4: Separación

Lista 5: Numerabilidad

Lista 6: Compacidad

Lista 7: Conexión

Lista 8: Conexión por caminos

Lista 9: Homotopía

Lista 10: Borsuk y sus variantes