

Topología elemental
Problemas

Íker Muñoz Martínez

Índice general

1. Lista 0: Para Empezar	5
1.1. Número 0.1	5
1.2. Número 0.2	5
1.3. Número 0.3	6
1.4. Número 0.4	7
1.5. Número 0.5	7
2. Lista 1: Espacios Topológicos	9
3. Lista 2: Aplicaciones continuas	11
4. Lista 3: Construcción de topologías	13
5. Lista 4: Separación	15
6. Lista 5: Numerabilidad	17
7. Lista 6: Compacidad	19
8. Lista 7: Conexión	21
9. Lista 8: Conexión por caminos	23
10. Lista 9: Homotopía	25
11. Lista 10: Borsuk y sus variantes	27

Lista 0: Para Empezar

Número 0.1

Enunciado

Comprobar las leyes distributivas para la unión y la intersección de conjuntos, y las leyes de De Morgan.

Solución:

- Ley distributiva de la unión: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
 $x \in (A \cap B) \cup C \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- Ley distributiva de la intersección: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
 $x \in (A \cup B) \cap C \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- Leyes de De Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ & $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
(1) $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$
(2) $A \cap B = A^{cc} \cap B^{cc} \stackrel{(1)}{=} (A^c \cup B^c)^c$, y tomando complementarios en ambos lados obtenemos la segunda ley.

Número 0.2

Enunciado

Se consideran una aplicación $f : A \rightarrow B$ y subconjuntos $A_0 \subset A, B_0 \subset B$.

- (1) Demostrar que $A_0 \subset f^{-1}(f(A_0))$ y que se da la igualdad si f es inyectiva.
 - (2) Demostrar que $f(f^{-1}(B_0)) \subset B_0$ y que se da la igualdad si f es sobreyectiva.
-

Solución:

- (1) Sea $x \in A_0$. Así, $f(x) \in f(A_0)$, y por definición de preimagen, $x \in f^{-1}(f(A_0))$. En particular, obtenemos la igualdad $A_0 = f^{-1}(f(A_0))$ si f es inyectiva. Supongamos que $\exists y \in f^{-1}(f(A_0)) \setminus A_0$. Así, $f(y) \in f(A_0)$, luego existe un $x \in A_0$ tal que $f(y) = f(x)$. Como f es inyectiva, $x = y \in A_0$, lo que nos lleva a una contradicción.

- (2) Sea $y \in f(f^{-1}(B_0))$. Así, existe $x \in f^{-1}(B_0)$ tal que $y = f(x)$. Por tanto, si aplicamos f , obtenemos que $f(x) = y \in B_0$. En particular, obtenemos la igualdad $f(f^{-1}(B_0)) = B_0$ si f es sobreyectiva. Si $y \in B_0$, como f es sobreyectiva, existe un $x \in f^{-1}(B_0)$ tal que $f(x) = y$. Aplicamos f^{-1} y obtenemos que $f^{-1}(y) = x \in f^{-1}(B_0)$, y al aplicar f obtenemos $f(x) = y \in f(f^{-1}(B_0))$.

Número 0.3

Enunciado

Se consideran una aplicación $f : A \rightarrow B$ y colecciones de subconjuntos $A_i \subset A, B_i \subset B$.

- (1) Probar que f^{-1} conserva inclusiones, uniones, intersecciones y diferencias

- (a) Si $B_i \subset B_j$, entonces $f^{-1}(B_i) \subset f^{-1}(B_j)$
- (b) $f^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i)$
- (c) $f^{-1}(\bigcap_i B_i) = \bigcap_i f^{-1}(B_i)$
- (d) $f^{-1}(B_i \setminus B_j) = f^{-1}(B_i) \setminus f^{-1}(B_j)$

- (2) Demostrar que f conserva solamente las uniones y las inclusiones:

- (a) Si $A_i \subset A_j$, entonces $f(A_i) \subset f(A_j)$
- (b) $f(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f(A_i)$
- (c) $f(\bigcap_i A_i) \subset \bigcap_i f(A_i)$; se da la igualdad si f es inyectiva.
- (d) $f(A_i \setminus A_j) \supset f(A_i) \setminus f(A_j)$; se da la igualdad si f es inyectiva.

Solución:

- (1) Probar que f^{-1} conserva inclusiones, uniones, intersecciones y diferencias

- (a) Sea $x \in f^{-1}(B_i)$. Así, $f(x) \in B_i \subset B_j$, y por tanto, $x \in f^{-1}(B_j)$.
- (b) Sea $x \in f^{-1}(\bigcup_i B_i) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_i B_i \Leftrightarrow \exists i \in I : f(x) \in B_i \Leftrightarrow \exists i \in I : x \in f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow x \in \bigcup_i f^{-1}(B_i)$.
- (c) Análogamente, sea $x \in f^{-1}(\bigcap_i B_i) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_i B_i \Leftrightarrow \forall i \in I : f(x) \in B_i \Leftrightarrow \forall i \in I : x \in f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow x \in \bigcap_i f^{-1}(B_i)$.
- (d) Sea $x \in f^{-1}(B_i \setminus B_j) \Leftrightarrow f(x) \in B_i \setminus B_j \Leftrightarrow f(x) \in B_i \wedge f(x) \notin B_j \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_i) \wedge x \notin f^{-1}(B_j) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_i) \setminus f^{-1}(B_j)$.

- (2) Demostrar que f conserva solamente las uniones y las inclusiones:

- (a) Sea $x \in f(A_i)$. Entonces, $\exists a \in A_i : f(a) = x \Rightarrow a \in A_i \subset A_j$, luego $x = f(a) \in f(A_j)$.
- (b) Sea $x \in f(\bigcup_i A_i) \Leftrightarrow \exists a \in \bigcup_i A_i : f(a) = x \Leftrightarrow \exists i \in I \exists a \in A_i : f(a) = x$. Por tanto, $\exists i \in I : f(a) \in f(A_i) \ \& \ f(a) = x \Leftrightarrow f(a) \in \bigcup_i f(A_i) \ \& \ f(a) = x \Leftrightarrow x \in f(\bigcup_i f(A_i))$.
- (c) Veamos primero el contenido general, y después el caso en que f es inyectiva.
 - Sea $x \in f(\bigcap_i A_i)$. Entonces, $\exists a \in \bigcap_i A_i : f(a) = x \Rightarrow \forall i \in I \exists a \in A_i$, luego $\forall i \in I \exists f(a) \in f(A_i) \ \& \ f(a) = x$. Por tanto, $\forall i \in I x \in f(A_i)$, es decir, $x \in \bigcap_i f(A_i)$.
 - (Si f inyectiva) Sea $x \in \bigcap_i f(A_i)$. Entonces, $\forall i \in I : x \in f(A_i)$. Entonces, $\forall i \in I \exists a \in A_i : f(a) = x \Rightarrow \exists a \in \bigcap_i A_i : f(a) = x$, y como la f es inyectiva, $x \in f(\bigcap_i A_i)$.

- (d) Veamos primero el contenido general, y después el caso en que f es inyectiva.

- Sea $x \in f(A_i) \setminus f(A_j)$, es decir, $x \in f(A_i) \wedge x \notin f(A_j)$. Por tanto, $\begin{cases} \exists a \in A_i : f(a) = x \\ \nexists a \in A_j : f(a) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists a \in A_i \cap A_j^c : f(a) = x, \text{ es decir, } x \in f(A_i \setminus A_j). \\ \text{Si } f \text{ inyectiva) Sea } x \in f(A_i \setminus A_j), \text{ es decir } \exists a \in A_i \setminus A_j : f(a) = x. \text{ Por tanto,} \\ \begin{cases} \exists a \in A_i : f(a) = x \\ \exists a \notin A_j : f(a) = x \end{cases} \end{cases}$. Como f es inyectiva, los a son los mismos y por tanto $x \in f(A_i) \cap f(A_j)^c$, es decir, $x \in f(A_i) \setminus f(A_j)$.

Número 0.4

Enunciado

Probar que el conjunto \mathbb{Q} de los números racionales es numerable. Probar que el intervalo $[0, 1]$ no es numerable, y que por tanto no lo es \mathbb{R} .

Solución:

dgerhgsre

Número 0.5

Enunciado

(Distancias en \mathbb{R}^n) Comprobar que cada una de las siguientes es una distancia en \mathbb{R}^n y estudiar como son las bolas en cada una de ellas.

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2} \quad \rho_1(x, y) = \sum_i |x_i - y_i| \quad \rho_2(x, y) = \max_i |x_i - y_i|$$

Para la primera, utilizar la desigualdad triangular o de Minkowsky

$$\sqrt{\sum_i (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_i a_i^2} + \sqrt{\sum_i b_i^2}$$

Solución:

dgerhgsre

Lista 1: Espacios Topológicos

Lista 2: Aplicaciones continuas

Lista 3: Construcción de topologías

Lista 4: Separación

Lista 5: Numerabilidad

Lista 6: Compacidad

Lista 7: Conexión

Lista 8: Conexión por caminos

Lista 9: Homotopía

Lista 10: Borsuk y sus variantes
