Topología elemental
Problemas

Íker Muñoz Martínez

Índice general

Lista 0: Para Empezar

Número 0.1

Enunciado

Comprobar las leyes distributivas para la unión y la intersección de conjuntos, y las leyes de De Morgan.

Solución:

dgerhgsre

Número 0.2

Enunciado

Se consideran una aplicación $f : A \to B$ y subconjutos $A_0 \subset A, B_0 \subset B$.

(1) Demostrar que $A_0 \subset f^{-1}(f(A_0))$ y que se da la igualdad si f es inyectiva.

(2) Demostrar que $f(f^{-1}(B_0)) \subset B_0$ y que se da la igualdad si f es sobreyectiva.

Solución:

Número 0.3

Enunciado

Se consideran una aplicación $f : A \to B$ y colecciones de subconjutos $A_i \subset A, B_i \subset B$.

(1) Probar que f^{-1} conserva inclusiones, uniones, intersecciones y diferencias

(a) Si $B_i \subset B_j$, entonces $f^{-1}(B_i) \subset f^{-1}(B_j)$

(b) $f^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i)$

(c) $f^{-1}(\bigcap_i B_i) = \bigcap_i f^{-1}(B_i)$

(d) $f^{-1}(B_i \setminus B_j) = f^{-1}(B_i) \setminus f^{-1}(B_j)$

(2) Demostrar que f conserva solamente las uniones y las inclusiones:

(a) *Si $A_i \subset A_j$, entonces $f(A_i) \subset f(A_j)$*

(b) $f(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f(A_i)$

(c) *$f(\bigcap_i A_i) \subset \bigcap_i f^(A_i)$; se da la igualdad si f es inyectiva.*

(d) *$f(A_i \setminus A_j) \supset f^(A_i) \setminus f(A_j)$; se da la igualdad si f es inyectiva.*

Solución:

Número 0.4

Enunciado

Probar que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es numerable. Probar que el intervalo $[0,1]$ no es numerable, y que por tanto no lo es $\mathbb{R}$.

Solución:

dgerhgsre

Número 0.5

Enunciado

(Distancias en $\mathbb{R}^n$) Comprobar que cada una de las siguientes es una distancia en $\mathbb{R}^n$ y estudiar como son las bolas en cada una de ellas.

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2} \qquad \rho_1(x,y) = \sum_i |x_i - y_i| \qquad \rho_2(x,y) = \max_i |x_i - y_i|$$

Para la primera, utilizar la desigualdad triangular o de Minkowsky

$$\sqrt{\sum_i (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_i a_i^2} + \sqrt{\sum_i b_i^2}$$

Solución:

dgerhgsre

Lista 1: Espacios Topológicos

Lista 2: Aplicaciones continuas

Lista 3: Construcción de topologías

Lista 4: Separación

Lista 5: Numerabilidad

Lista 6: Compacidad

Lista 7: Conexión

Lista 8: Conexión por caminos

Lista 9: Homotopía

Lista 10: Borsuk y sus variantes