Topología elemental
Problemas

Íker Muñoz Martínez

Índice general

Lista 0: Para Empezar

Número 0.1

Enunciado

Comprobar las leyes distributivas para la unión y la intersección de conjuntos, y las leyes de De Morgan.

Solución:

- Ley distributiva de la unión: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

  $x \in (A \cap B) \cup C \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$

- Ley distributiva de la intersección: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

  $x \in (A \cup B) \cap C \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$

- Leyes de De Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ & $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

  (1) $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$

  (2) $A \cap B = A^{cc} \cap B^{cc} \overset{(1)}{=} (A^c \cup B^c)^c$, y tomando complementarios en ambos lados obtenemos la segunda ley.

Número 0.2

Enunciado

Se consideran una aplicación $f : A \to B$ y subconjutos $A_0 \subset A, B_0 \subset B$.

(1) Demostrar que $A_0 \subset f^{-1}(f(A_0))$ y que se da la igualdad si f es inyectiva.

(2) Demostrar que $f(f^{-1}(B_0)) \subset B_0$ y que se da la igualdad si f es sobreyectiva.

Solución:

(1) Sea $x \in A_0$. Así, $f(x) \in f(A_0)$, y por definición de preimagen, $x \in f^{-1}(f(A_0))$. En particular, obtenemos la igualdad $A_0 = f^{-1}(f(A_0))$ si f es inyectiva. Supongamos que $\exists y \in f^{-1}(f(A_0)) \setminus A_0$. Así, $f(y) \in f(A_0)$, luego existe un $x \in A_0$ tal que $f(y) = f(x)$. Como f es inyectiva, $x = y \in A_0$, lo que nos lleva a una contradicción.

(2) Sea $y \in f(f^{-1}(B_0))$. Así, existe $x \in f^{-1}(B_0)$ tal que $y = f(x)$. Por tanto, si aplicamos f, obtenemos que $f(x) = y \in B_0$. En particular, obtenemos la igualdad $f(f^{-1}(B_0)) = B_0$ si f es sobreyectiva. Si $y \in B_0$, como f es sobreyectiva, existe un $x \in f^{-1}(B_0)$ tal que $f(x) = y$. Aplicamos f^{-1} y obtenemos que $f^{-1}(y) = x \in f^{-1}(B_0)$, y al aplicar f obtenemos $f(x) = y \in f(f^{-1}(B_0))$.

Número 0.3

Enunciado

Se consideran una aplicación $f : A \to B$ y colecciones de subconjutos $A_i \subset A, B_i \subset B$.

(1) *Probar que f^{-1} conserva inclusiones, uniones, intersecciones y diferencias*

  (a) *Si $B_i \subset B_j$, entonces $f^{-1}(B_i) \subset f^{-1}(B_j)$*
  (b) $f^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i)$
  (c) $f^{-1}(\bigcap_i B_i) = \bigcap_i f^{-1}(B_i)$
  (d) $f^{-1}(B_i \setminus B_j) = f^{-1}(B_i) \setminus f^{-1}(B_j)$

(2) *Demostrar que f conserva solamente las uniones y las inclusiones:*

  (a) *Si $A_i \subset A_j$, entonces $f(A_i) \subset f(A_j)$*
  (b) $f(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f(A_i)$
  (c) $f(\bigcap_i A_i) \subset \bigcap_i f(A_i)$*; se da la igualdad si f es inyectiva.*
  (d) $f(A_i \setminus A_j) \supset f(A_i) \setminus f(A_j)$*; se da la igualdad si f es inyectiva.*

Solución:

(1) Probar que f^{-1} conserva inclusiones, uniones, intersecciones y diferencias

  (a) Sea $x \in f^{-1}(B_i)$. Así, $f(x) \in B_i \subset B_j$, y por tanto, $x \in f^{-1}(B_j)$.
  (b) Sea $x \in f^{-1}(\bigcup_i B_i) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_i B_i \Leftrightarrow \exists i \in I : f(x) \in B_i \Leftrightarrow \exists i \in I : x \in f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow x \in \bigcup_i f^{-1}(B_i)$.
  (c) Análogamente, sea $x \in f^{-1}(\bigcap_i B_i) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_i B_i \Leftrightarrow \forall i \in I : f(x) \in B_i \Leftrightarrow \forall i \in I : x \in f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow x \in \bigcap_i f^{-1}(B_i)$.
  (d) Sea $x \in f^{-1}(B_i \setminus B_j) \Leftrightarrow f(x) \in B_i \setminus B_j \Leftrightarrow f(x) \in B_i \wedge f(x) \notin B_j \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_i) \wedge x \notin f^{-1}(B_j) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_i) \setminus f^{-1}(B_j)$.

(2) Demostrar que f conserva solamente las uniones y las inclusiones:

  (a) Sea $x \in f(A_i)$. Entonces, $\exists a \in A_i : f(a) = x \Rightarrow a \in A_i \subset A_j$, luego $x = f(a) \in f(A_j)$.
  (b) Sea $x \in f(\bigcup_i A_i) \Leftrightarrow \exists a \in \bigcup_i A_i : f(a) = x \Leftrightarrow \exists i \in I\ \exists a \in A_i : f(a) = x$. Por tanto, $\exists i \in I : f(a) \in f(A_i)\ \&\ f(a) = x \Leftrightarrow f(a) \in \bigcup_i f(A_i)\ \&\ f(a) = x \Leftrightarrow x \in f \bigcup_i f(A_i)$.
  (c) Veamos primero el contenido general, y después el caso en que f es inyectiva.
    - Sea $x \in f(\bigcap_i A_i)$. Entonces, $\exists a \in \bigcap_i A_i : f(a) = x \Rightarrow \forall i \in I\ \exists a \in A_i$, luego $\forall i \in I\ \exists f(a) \in f(A_i)\ \&\ f(a) = x$. Por tanto, $\forall i \in I x \in f(A_i)$, es decir, $x \in \bigcap_i f(A_i)$.
    - (Si f inyectiva) Sea $x \in \bigcap_i f(A_i)$. Entonces, $\forall i \in I : x \in f(A_i)$. Entonces, $\forall i \in I\ \exists a \in A_i : f(a) = x \Rightarrow \exists a \in \bigcap_i A_i : f(a) = x$, y como la f es inyectiva, $x \in f(\bigcap_i A_i)$.
  (d) Veamos primero el contenido general, y después el caso en que f es inyectiva.
    - Sea $x \in f(A_i) \setminus f(A_j)$, es decir, $x \in f(A_i) \wedge x \in f(A_j)^c$. Por tanto, $\begin{cases} \exists a \in A_i : f(a) = x \\ \nexists a \in A_j : f(a) = x \end{cases} \Rightarrow$ $\exists a \in A_i \cap A_j^c : f(a) = x$, es decir, $x \in f(A_i \setminus A_j)$.
    - (Si f inyectiva) Sea $x \in f(A_i \setminus A_j)$, es decir $\exists a \in A_i \setminus A_j : f(a) = x$. Por tanto, $\begin{cases} \exists a \in A_i : f(a) = x \\ \exists a \notin A_j : f(a) = x \end{cases}$. Como f es inyectiva, los a son los mismos y por tanto $x \in f(A_i) \cap f(A_j)^c$, es decir, $x \in f(A_i) \setminus f(A_j)$.

Número 0.4

Enunciado

Probar que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es numerable. Probar que el intervalo $[0,1]$ no es numerable, y que por tanto no lo es $\mathbb{R}$.

Solución:

(1) Veamos primeramente que el conjunto $\mathbb{Q}$ es numerable. Apoyándonos en el hecho de que $\mathbb{Z}$ es numerable, construimos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* &\to \mathbb{Q} \\ (p,q) &\mapsto \frac{p}{q} \end{aligned}$$

La aplicación f es sobreyectiva, ya que $\forall x \in \mathbb{Q}, \exists p,q \in \mathbb{Z} : x = \frac{p}{q}, q \neq 0$. Así,

$$Card(\mathbb{Q}) \leq Card(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = Card(\mathbb{N})$$

Luego $\mathbb{Q}$ es numerable.

(2) Para probar que el intervalo $[0,1]$ no es numerable, emplearemos el argumento conocido como *diagonalización de Cantor*. Por reducción al absurdo, supongamos que el intervalo fuere numerable. Si lo fuera, admitiría una posible enumeración $\{r_n\}_n$. Cada uno de los elementos de la sucesión será un $x \in (0,1)$ (no afecta a la numerabilidad que quitemos los extremos, pues son únicamente dos puntos, es decir, un conjunto finito), que podemos expresar utilizando sus cifras decimales $x = 0.\ldots$ La sucesión tendría la pinta:

$$\begin{aligned} r_1 &= 0.a_1^1 a_2^1 a_3^1 \ldots \\ r_2 &= 0.a_1^2 a_2^2 a_3^2 \ldots \\ r_3 &= 0.a_1^3 a_2^3 a_3^3 \ldots \\ r_4 &= 0.a_1^4 a_2^4 a_3^4 \ldots \\ r_5 &= 0.a_1^5 a_2^5 a_3^5 \ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Cada a_i^j es un número natural comprendido entre 0 y 9. Consideramos entonces el siguiente número:

$$R = 0.r_1 r_2 r_3 r_4 \ldots : r_i = a_i^i + 1(\text{mod} 10)$$

El número R pertenece al intervalo; no obstante, difiere con todos los r_i en al menos una posición. Es decir, hemos construido un número que no se encuentra en la sucesión $\{r_n\}_n$, por lo que nuestra hipótesis de que el intervalo $[0,1]$ fuera numerable debe ser falsa.

Además, no es difícil comprobar que la aplicación

$$\begin{aligned} f : (0,1) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tan\left[\pi(x - \frac{1}{2})\right] \end{aligned}$$

Es una biyección. Por tanto, $\mathbb{R}$ no es numerable, y en particular, $Card(\mathbb{R}) = Card([0,1])$

Número 0.5

Enunciado

(Distancias en $\mathbb{R}^n$) Comprobar que cada una de las siguientes es una distancia en $\mathbb{R}^n$ y estudiar como son las bolas en cada una de ellas.

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2} \qquad \rho_1(x,y) = \sum_i |x_i - y_i| \qquad \rho_2(x,y) = \max_i |x_i - y_i|$$

Para la primera, utilizar la desigualdad triangular o de Minkowsky

$$\sqrt{\sum_i (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_i a_i^2} + \sqrt{\sum_i b_i^2}$$

Solución:

dgerhgsre

Lista 1: Espacios Topológicos

Número 1.1

Enunciado

Sea X un conjunto, y $\mathfrak{T}_{CF}$ la familia de todos los subconjuntos de X cuyo complementario es finito, más el conjunto vacío. Probar que $\mathfrak{T}_{CF}$ es una topología en X. Esta topología se llama, por razones evidentes, topología de los complementarios finitos. ¿Qué topología obtenemos si X es un conjunto finito?

Solución:

Veamos que $\mathfrak{T}_{CF}$ satisface las tres propiedades para que sea topología:

(1) Por definición, $\emptyset \in \mathfrak{T}_{CF}$. Además, $X^c = \emptyset$ es finito, por lo que $X \in \mathfrak{T}_{CF}$.

(2) Comprobemos que las uniones arbitrarias de elementos del $\mathfrak{T}_{CF}$ están en $\mathfrak{T}_{CF}$. Sean $U_i \in \mathfrak{T}_{CF}$ con $i \in I$ arbitrario. Veamos entonces que $X \setminus \bigcup_{i\in I} U_i$ es finito.

$$X \setminus \bigcup_{i\in I} U_i \overset{DeMorgan}{=} \bigcap_{i\in I} X \setminus U_i$$

Como los $U_i \in \mathfrak{T}_{CF}$, su complementario es finito, y la intersección arbitraria de conjuntos finitos es finita. Así, $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathfrak{T}_{CF}$

(3) Finalmente, comprobemos que las intersecciones finitas de elementos de $\mathfrak{T}_{CF}$ están en $\mathfrak{T}_{CF}$. Basta comprobarlo para dos conjuntos U, U', pues la intersección finita de conjuntos puede definirse dos a dos. Así, sean $U, U' \in \mathfrak{T}_{CF}$, y veamos que $X \setminus (U \cap U')$ es finito.

$$X \setminus (U \cap U') \overset{DeMorgan}{=} (X \setminus U) \cup (X \setminus U')$$

Como $U, U' \in \mathfrak{T}_{CF}$, su complementario es finito, y la unión finita de conjuntos finitos es finita. Por tanto, $\bigcap_{i\in I} U_i : I$ finito $\in \mathfrak{T}_{CF}$.

En particular, si X es finito, cualquier subconjunto suyo $A \subset X$ tiene complementario finito, y por tanto, pertenece a $\mathfrak{T}_{CF}$. Así, en particular todos los puntos son abiertos, y por tanto, $\mathfrak{T}_{CF} = \mathfrak{T}_{Discreta}$.

Número 1.4

Enunciado

Sea X un conjunto infinito y $\mathfrak{T}$ una topología en la que todos los conjuntos infinitos son abiertos. Demostrar que $\mathfrak{T}$ es la topología discreta.

Solución:

Número 1.7

Enunciado

En el plano $X = \mathbb{R}^2$ se considera la familia $\mathcal{T}$ de todos los subconjuntos U tales que para cada punto $(a, b) \in U$ existe $\varepsilon > 0$ con

$$((a - \varepsilon, a + \varepsilon) \times \{b\}) \cup (\{a\} \times (b - \varepsilon, b + \varepsilon)) \subset U$$

Estudiar si $\mathcal{T}$ es una topología en X.

Solución:

Número 1.8

Enunciado

En $X = \mathbb{R}^2$ se consideran los subconjuntos

$$G_t = \{(x, y) \in X : x > y + t\} \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

Demostrar que estos subconjuntos, junto con $\emptyset$ y X, son los abiertos de una topología en X. ¿Es esto mismo cierto si $t \in \mathbb{N}$? ¿Y si $t \in \mathbb{Q}$?

¡

Solución:

Lista 2: Aplicaciones continuas

Lista 3: Construcción de topologías

Lista 4: Separación

Lista 5: Numerabilidad

Lista 6: Compacidad

Lista 7: Conexión

Lista 8: Conexión por caminos

Lista 9: Homotopía

Lista 10: Borsuk y sus variantes