Topología elemental
Problemas

Íker Muñoz Martínez

Índice general

Lista 0: Para Empezar

Número 0.1

Enunciado

Comprobar las leyes distributivas para la unión y la intersección de conjuntos, y las leyes de De Morgan.

Solución:

- Ley distributiva de la unión: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

  $x \in (A \cap B) \cup C \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$

- Ley distributiva de la intersección: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

  $x \in (A \cup B) \cap C \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$

- Leyes de De Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ & $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

  (1) $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$

  (2) $A \cap B = A^{cc} \cap B^{cc} \overset{(1)}{=} (A^c \cup B^c)^c$, y tomando complementarios en ambos lados obtenemos la segunda ley.

Número 0.2

Enunciado

Se consideran una aplicación $f : A \to B$ y subconjutos $A_0 \subset A, B_0 \subset B$.

(1) Demostrar que $A_0 \subset f^{-1}(f(A_0))$ y que se da la igualdad si f es inyectiva.

(2) Demostrar que $f(f^{-1}(B_0)) \subset B_0$ y que se da la igualdad si f es sobreyectiva.

Solución:

(1) Sea $x \in A_0$. Así, $f(x) \in f(A_0)$, y por definición de preimagen, $x \in f^{-1}(f(A_0))$. En particular, obtenemos la igualdad $A_0 = f^{-1}(f(A_0))$ si f es inyectiva. Supongamos que $\exists y \in f^{-1}(f(A_0)) \setminus A_0$. Así, $f(y) \in f(A_0)$, luego existe un $x \in A_0$ tal que $f(y) = f(x)$. Como f es inyectiva, $x = y \in A_0$, lo que nos lleva a una contradicción.

(2) Sea $y \in f(f^{-1}(B_0))$. Así, existe $x \in f^{-1}(B_0)$ tal que $y = f(x)$. Por tanto, si aplicamos f, obtenemos que $f(x) = y \in B_0$. En particular, obtenemos la igualdad $f(f^{-1}(B_0)) = B_0$ si f es sobreyectiva. Si $y \in B_0$, como f es sobreyectiva, existe un $x \in f^{-1}(B_0)$ tal que $f(x) = y$. Aplicamos f^{-1} y obtenemos que $f^{-1}(y) = x \in f^{-1}(B_0)$, y al aplicar f obtenemos $f(x) = y \in f(f^{-1}(B_0))$.

Número 0.3

Enunciado

Se consideran una aplicación $f : A \to B$ y colecciones de subconjutos $A_i \subset A, B_i \subset B$.

(1) *Probar que f^{-1} conserva inclusiones, uniones, intersecciones y diferencias*

  (a) *Si $B_i \subset B_j$, entonces $f^{-1}(B_i) \subset f^{-1}(B_j)$*
  (b) $f^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i)$
  (c) $f^{-1}(\bigcap_i B_i) = \bigcap_i f^{-1}(B_i)$
  (d) $f^{-1}(B_i \setminus B_j) = f^{-1}(B_i) \setminus f^{-1}(B_j)$

(2) *Demostrar que f conserva solamente las uniones y las inclusiones:*

  (a) *Si $A_i \subset A_j$, entonces $f(A_i) \subset f(A_j)$*
  (b) $f(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f(A_i)$
  (c) $f(\bigcap_i A_i) \subset \bigcap_i f(A_i)$*; se da la igualdad si f es inyectiva.*
  (d) $f(A_i \setminus A_j) \supset f(A_i) \setminus f(A_j)$*; se da la igualdad si f es inyectiva.*

Solución:

(1) Probar que f^{-1} conserva inclusiones, uniones, intersecciones y diferencias

  (a) Sea $x \in f^{-1}(B_i)$. Así, $f(x) \in B_i \subset B_j$, y por tanto, $x \in f^{-1}(B_j)$.
  (b) Sea $x \in f^{-1}(\bigcup_i B_i) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_i B_i \Leftrightarrow \exists i \in I : f(x) \in B_i \Leftrightarrow \exists i \in I : x \in f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow x \in \bigcup_i f^{-1}(B_i)$.
  (c) Análogamente, sea $x \in f^{-1}(\bigcap_i B_i) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_i B_i \Leftrightarrow \forall i \in I : f(x) \in B_i \Leftrightarrow \forall i \in I : x \in f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow x \in \bigcap_i f^{-1}(B_i)$.
  (d) Sea $x \in f^{-1}(B_i \setminus B_j) \Leftrightarrow f(x) \in B_i \setminus B_j \Leftrightarrow f(x) \in B_i \wedge f(x) \notin B_j \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_i) \wedge x \notin f^{-1}(B_j) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_i) \setminus f^{-1}(B_j)$.

(2) Demostrar que f conserva solamente las uniones y las inclusiones:

  (a) Sea $x \in f(A_i)$. Entonces, $\exists a \in A_i : f(a) = x \Rightarrow a \in A_i \subset A_j$, luego $x = f(a) \in f(A_j)$.
  (b) Sea $x \in f(\bigcup_i A_i) \Leftrightarrow \exists a \in \bigcup_i A_i : f(a) = x \Leftrightarrow \exists i \in I\ \exists a \in A_i : f(a) = x$. Por tanto, $\exists i \in I : f(a) \in f(A_i)\ \&\ f(a) = x \Leftrightarrow f(a) \in \bigcup_i f(A_i)\ \&\ f(a) = x \Leftrightarrow x \in f \bigcup_i f(A_i)$.
  (c) Veamos primero el contenido general, y después el caso en que f es inyectiva.
    - Sea $x \in f(\bigcap_i A_i)$. Entonces, $\exists a \in \bigcap_i A_i : f(a) = x \Rightarrow \forall i \in I\ \exists a \in A_i$, luego $\forall i \in I\ \exists f(a) \in f(A_i)\ \&\ f(a) = x$. Por tanto, $\forall i \in I x \in f(A_i)$, es decir, $x \in \bigcap_i f(A_i)$.
    - (Si f inyectiva) Sea $x \in \bigcap_i f(A_i)$. Entonces, $\forall i \in I : x \in f(A_i)$. Entonces, $\forall i \in I\ \exists a \in A_i : f(a) = x \Rightarrow \exists a \in \bigcap_i A_i : f(a) = x$, y como la f es inyectiva, $x \in f(\bigcap_i A_i)$.
  (d) Veamos primero el contenido general, y después el caso en que f es inyectiva.
    - Sea $x \in f(A_i)\setminus f(A_j)$, es decir, $x \in f(A_i) \wedge x \in f(A_j)^c$. Por tanto, $\begin{cases} \exists a \in A_i : f(a) = x \\ \nexists a \in A_j : f(a) = x \end{cases} \Rightarrow$ $\exists a \in A_i \cap A_j^c : f(a) = x$, es decir, $x \in f(A_i \setminus A_j)$.
    - (Si f inyectiva) Sea $x \in f(A_i \setminus A_j)$, es decir $\exists a \in A_i \setminus A_j : f(a) = x$. Por tanto, $\begin{cases} \exists a \in A_i : f(a) = x \\ \exists a \notin A_j : f(a) = x \end{cases}$. Como f es inyectiva, los a son los mismos y por tanto $x \in f(A_i) \cap f(A_j)^c$, es decir, $x \in f(A_i) \setminus f(A_j)$.

Número 0.4

Enunciado

Probar que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es numerable. Probar que el intervalo $[0,1]$ no es numerable, y que por tanto no lo es $\mathbb{R}$.

Solución:

(1) Veamos primeramente que el conjunto $\mathbb{Q}$ es numerable. Apoyándonos en el hecho de que $\mathbb{Z}$ es numerable, construimos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* &\to \mathbb{Q} \\ (p,q) &\mapsto \frac{p}{q} \end{aligned}$$

La aplicación f es sobreyectiva, ya que $\forall x \in \mathbb{Q}, \exists p,q \in \mathbb{Z} : x = \frac{p}{q}, q \neq 0$. Así,

$$Card(\mathbb{Q}) \leq Card(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = Card(\mathbb{N})$$

Luego $\mathbb{Q}$ es numerable.

(2) Para probar que el intervalo $[0,1]$ no es numerable, emplearemos el argumento conocido como *diagonalización de Cantor*. Por reducción al absurdo, supongamos que el intervalo fuere numerable. Si lo fuera, admitiría una posible enumeración $\{r_n\}_n$. Cada uno de los elementos de la sucesión será un $x \in (0,1)$ (no afecta a la numerabilidad que quitemos los extremos, pues son únicamente dos puntos, es decir, un conjunto finito), que podemos expresar utilizando sus cifras decimales $x = 0.\ldots$ La sucesión tendría la pinta:

$$\begin{aligned} r_1 &= 0.a_1^1 a_2^1 a_3^1 \ldots \\ r_2 &= 0.a_1^2 a_2^2 a_3^2 \ldots \\ r_3 &= 0.a_1^3 a_2^3 a_3^3 \ldots \\ r_4 &= 0.a_1^4 a_2^4 a_3^4 \ldots \\ r_5 &= 0.a_1^5 a_2^5 a_3^5 \ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Cada a_i^j es un número natural comprendido entre 0 y 9. Consideramos entonces el siguiente número:

$$R = 0.r_1 r_2 r_3 r_4 \ldots : r_i = a_i^i + 1(\text{mod}10)$$

El número R pertenece al intervalo; no obstante, difiere con todos los r_i en al menos una posición. Es decir, hemos construido un número que no se encuentra en la sucesión $\{r_n\}_n$, por lo que nuestra hipótesis de que el intervalo $[0,1]$ fuera numerable debe ser falsa.

Además, no es difícil comprobar que la aplicación

$$\begin{aligned} f : (0,1) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tan\left[\pi(x - \frac{1}{2})\right] \end{aligned}$$

Es una biyección. Por tanto, $\mathbb{R}$ no es numerable, y en particular, $Card(\mathbb{R}) = Card([0,1])$

Número 0.5

Enunciado

(Distancias en $\mathbb{R}^n$) Comprobar que cada una de las siguientes es una distancia en $\mathbb{R}^n$ y estudiar como son las bolas en cada una de ellas.

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2} \qquad \rho_1(x,y) = \sum_i |x_i - y_i| \qquad \rho_2(x,y) = \max_i |x_i - y_i|$$

Para la primera, utilizar la desigualdad triangular o de Minkowsky

$$\sqrt{\sum_i (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_i a_i^2} + \sqrt{\sum_i b_i^2}$$

Solución:

dgerhgsre

Lista 1: Espacios Topológicos

Número 1.1

Enunciado

Sea X un conjunto, y $\mathcal{T}_{CF}$ la familia de todos los subconjuntos de X cuyo complementario es finito, más el conjunto vacío. Probar que $\mathcal{T}_{CF}$ es una topología en X. Esta topología se llama, por razones evidentes, topología de los complementarios finitos. ¿Qué topología obtenemos si X es un conjunto finito?

Solución:

Veamos que $\mathcal{T}_{CF}$ satisface las tres propiedades para que sea topología:

(1) Por definición, $\emptyset \in \mathcal{T}_{CF}$. Además, $X^c = \emptyset$ es finito, por lo que $X \in \mathcal{T}_{CF}$.

(2) Comprobemos que las uniones arbitrarias de elementos del $\mathcal{T}_{CF}$ están en $\mathcal{T}_{CF}$. Sean $U_i \in \mathcal{T}_{CF}$ con $i \in I$ arbitrario. Veamos entonces que $X \setminus \bigcup_{i\in I} U_i$ es finito.

$$X \setminus \bigcup_{i\in I} U_i \overset{DeMorgan}{=} \bigcap_{i\in I} X \setminus U_i$$

Como los $U_i \in \mathcal{T}_{CF}$, su complementario es finito, y la intersección arbitraria de conjuntos finitos es finita. Así, $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_{CF}$

(3) Finalmente, comprobemos que las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{T}_{CF}$ están en $\mathcal{T}_{CF}$. Basta comprobarlo para dos conjuntos U, U', pues la intersección finita de conjuntos puede definirse dos a dos. Así, sean $U, U' \in \mathcal{T}_{CF}$, y veamos que $X \setminus (U \cap U')$ es finito.

$$X \setminus (U \cap U') \overset{DeMorgan}{=} (X \setminus U) \cup (X \setminus U')$$

Como $U, U' \in \mathcal{T}_{CF}$, su complementario es finito, y la unión finita de conjuntos finitos es finita. Por tanto, $\bigcap_{i\in I} U_i : I$ finito $\in \mathcal{T}_{CF}$.

En particular, si X es finito, cualquier subconjunto suyo $A \subset X$ tiene complementario finito, y por tanto, pertenece a $\mathcal{T}_{CF}$. Así, en particular todos los puntos son abiertos, y por tanto, $\mathcal{T}_{CF} = \mathcal{T}_{Discreta}$.

Número 1.4

Enunciado

Sea X un conjunto infinito y $\mathcal{T}$ una topología en la que todos los conjuntos infinitos son abiertos. Demostrar que $\mathcal{T}$ es la topología discreta.

Solución:

La idea de la demostración consiste en utilizar la caracterización de la topología discreta, es decir, para ver que la topología es la discreta tenemos que ver que todos los puntos del conjunto son abiertos.

Como X es infinito, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos diferentes. Sea $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \subset X$ cuyos elementos son los de la sucesión x_n. Como A es infinito, por la definición de la topología, $A \in \mathcal{T}$, y además podemos descomponer de forma disjunta A como la subsucesión de elementos con índice par y la subsucesión de elementos de índice impar:

$$A = A_1 \sqcup A_2 = \{x_i : i \text{ mod } 2 = 1\} \sqcup \{x_i : i \text{ mod } 2 = 0\}$$

Y además, por ser ambos infinitos, $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$. Por ser $\mathcal{T}$, las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{T}$ están contenidas en $\mathcal{T}$, y también las uniones arbitrarias; así, dado $x \in X$ arbitrario:

$$\underbrace{(A_1 \cup \{x\})}_{\in\mathcal{T}} \cap \underbrace{(A_2 \cup \{x\})}_{\in\mathcal{T}} = \{x\} \in \mathcal{T}$$

Como x es arbitrario, quiere decir que todos los puntos son abiertos, y por la caracterización, la topología ante la que nos encontramos es la discreta.

Número 1.7

Enunciado

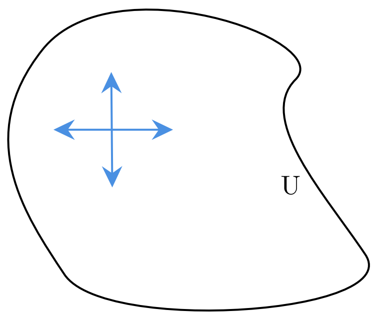
En el plano $X = \mathbb{R}^2$ se considera la familia $\mathcal{T}$ de todos los subconjuntos U tales que para cada punto $(a, b) \in U$ existe $\varepsilon > 0$ con

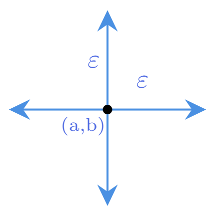
$$((a-\varepsilon, a+\varepsilon) \times \{b\}) \cup (\{a\} \times (b-\varepsilon, b+\varepsilon)) \subset U$$

Estudiar si $\mathcal{T}$ es una topología en X.

Solución:

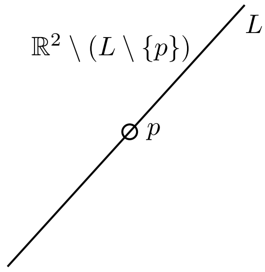
Para comprobar que $\mathcal{T}$ es en efecto una topología, debemos comprobar que satisface las tres propiedades de la definición de topología. No obstante, antes de comenzar a demostrar, intentaremos tener una idea intuitiva de cómo son los abiertos en esta topología.





Observamos en primer lugar que la propiedad descrita puede decirse informalmente como que alrededor de cada punto (a, b) de un abierto U, existe un *aspa* de longitud ε totalmente contenida en U, que denotaremos $aspa((a, b), \varepsilon)$. Nos surge la duda de si la topología descrita es la usual; aunque pronto observamos que no, ya que $\mathcal{T}_{Aspa} \subset \mathcal{T}_{Usual}$. Intuitivamente, todos los abiertos de la topología usual están contenidos en esta topología, que denotamos topología del aspa, y además tiene otros abiertos. Por ejemplo, dada una recta L no vertical y un punto $p \in L$, el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus (L \setminus \{p\})$.

Comprobemos entonces que $\mathcal{T}_{Aspa}$ es topología:



(1) Es inmediato comprobar que $\emptyset, X \in \mathcal{T}_{Aspa}$.

(2) Comprobemos las uniones arbitrarias. Sean $U_i \in \mathcal{T}_{Aspa}$ con $i \in I$ arbitrario. Sea $(a,b) \in \bigcup_{i\in I} U_i$. Entonces, existe un $i_0 \in I$ tal que $(a,b) \in U_{i_0}$, luego $\exists \varepsilon > 0$ tal que $aspa((a,b),\varepsilon) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Así, $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_{Aspa}$.

(3) Comprobamos finalmente las intersecciones finitas. Sean $U, U' \in \mathcal{T}_{Aspa}$, y consideramos $(a,b) \in U \cap U'$. Entonces, $\begin{cases} \exists \varepsilon > 0 : aspa((a,b),\varepsilon) \subset U \\ \exists \varepsilon' > 0 : aspa((a,b),\varepsilon') \subset U' \end{cases}$. Si elegimos $\varepsilon_0 = \text{mín}\{\varepsilon, \varepsilon'\}$ se cumple que $aspa((a,b),\varepsilon_0) \subset U \cap U'$. Por tanto, $U \cap U' \in \mathcal{T}_{Aspa}$ y consecuentemente $\bigcap_{i\in I} U_i : I$ finito $\in \mathcal{T}_{Aspa}$.

Número 1.8

Enunciado

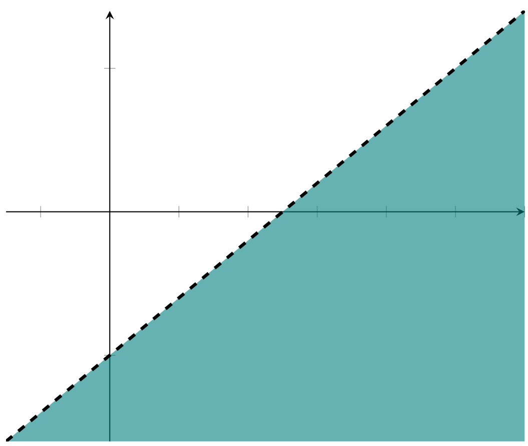
En $X = \mathbb{R}^2$ se consideran los subconjuntos

$$G_t = \{(x,y) \in X : x > y + t\} \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

Demostrar que estos subconjuntos, junto con $\emptyset$ y X, son los abiertos de una topología en X. ¿Es esto mismo cierto si $t \in \mathbb{N}$? ¿Y si $t \in \mathbb{Q}$?

Solución:

Antes de comprobar que la topología descrita $\mathcal{T}$ en efecto lo es, echamos un vistazo a la pinta que tienen los conjuntos G_t, lo cual nos ayudará a desarrollar una intuición de cómo proceder con la demostración.



Comprobemos entonces que $\mathcal{T}$ es una topología:

(1) Por definición $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(2) Comprobemos las uniones arbitrarias. Sean $G_{t_i} \in \mathcal{T}$ con $i \in I$ arbitrario. Definimos $t^* = \text{ínf}\, t_i$, y observamos que
$$\bigcup_{i\in I} G_{t_i} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y + t_i\}$$
Distinguimos dos casos. En caso de que el ínfimo t^* esté bien definido, esta unión es G_{t^*}, y por tanto es un abierto de $\mathcal{T}$. En el caso de que este ínfimo fuera $-\infty$, esta unión equivaldría a todo el conjunto X, que por definición también es abierto. Así, la unión arbitraria de elementos de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

(3) Finalmente, comprobamos las intersecciones finitas. Sean $G_t, G_s \in \mathcal{T}$. Así, $G_t \cap G_s = \begin{cases} x - y > t \\ x - y > s \end{cases} \Rightarrow$ $x - y > \text{máx}\{s,t\} = G_{\text{máx}\{s,t\}}$. Por tanto, $U \cap U' \in \mathcal{T}$ y consecuentemente $\bigcap_{i\in I} U_i : I$ finito $\in \mathcal{T}$.

Contestamos las dos cuestiones siguientes:

- En el caso de que $t \in \mathbb{N}$, se siguen manteniendo las propiedades de topología, ya que si $t, t' \in \mathbb{N}$, entonces $\text{máx}\{t, t'\} \in \mathbb{N}$, y por tanto se conserva la propiedad de intersecciones finitas; y además, si tenemos una colección arbitraria $\{t_i\} \subset \mathbb{N}$, entonces sabemos que $\text{ínf}\{t_i\} \in \mathbb{N}$, luego también mantiene la propiedad de uniones arbitrarias. No obstante, la topología con los naturales tiene menos abiertos, y se dice menos fina o más gruesa.
- En el caso de que $t \in \mathbb{Q}$, ya no nos encontramos ante una topología, pues el ínfimo de una sucesión de racional puede no ser racional, y por tanto no preservaría la propiedad de uniones arbitrarias.

  Por ejemplo, si consideramos la sucesión $\{-\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\} \longrightarrow -e$ obtenemos un contraejemplo.

Número 1.14

Enunciado

La topología usual $\mathcal{T}_u$ de la recta real $\mathbb{R}$ está generada por los intervalos abiertos (a,b). Mostrar que los intervalos semiabiertos $[a,b)$ generan otra topología $\mathcal{T}_{[,)}$. Esta topología se denomina de Sorgenfrey. Compararla con la usual. ¿Y si se toman los intervalos $(a,b]$?

Solución:

Para comprobar que en efecto los intervalos semiabiertos generan otra topología, comprobaremos que el conjunto $\mathcal{B} = \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$ es una base.

(1) Primeramente comprobamos que $\mathbb{R}$ se puede expresar como unión de estos intervalos, lo que es inmediato pues
$$\mathbb{R} = \bigcup_{a,b\in\mathbb{R}} [a,b) = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$$

(2) Comprobamos también que dados dos elementos de la base $B_1 = [a_1, b_1)$ y $B_2 = [a_2, b_2)$, y un elemento arbitrario $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe un tercer elemento de la base $B_3 = [a_3, b_3)$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Si tomamos $B_3 = B_1 \cap B_2 = [\text{máx}\{a_1, a_2\}, \text{mín}\{b_1, b_2\})$, entonces $B_3 \in \mathcal{B}$ y además cumple las condiciones pedidas.

Por tanto, $\mathcal{B}$ es base de la topología de Sorgenfrey. Comparándola con la topología usual, resulta que esta nueva topología es más fina que la usual, ya que todo abierto usual de la forma (a,b) se puede expresar como unión arbitraria de abiertos de Sorgenfrey, por ejemplo:
$$(a,b) = \bigcup_{c\in(a,b)} [c,b)$$

o bien
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a+\frac{1}{n},b)$$

Y además es estrictamente más fina, ya que existen abiertos de Sorgenfrey que no son abiertos con la topología usual; por ejemplo, el intervalo $[0,1)$ no es un abierto usual pues si lo fuese, entonces $[0,1)=\bigcup_{i\in I}(a_i,b_i)$, y por tanto existiría un i_0 tal que $0\in(a_{i_0},b_{i_0})$, y por tanto existiría un número negativo contenido en dicho intervalo. Obsérvese que además, dado un abierto de Sorgenfrey, también es cerrado en esta topología pues su complementario

$$\mathbb{R}\setminus[a,b)=(-\infty,a)\cup[b,a)$$

está compuesto por una unión de abiertos, y por tanto, es cerrado.

Finalmente, si se tomaran intervalos de la forma $(a,b]$, el razonamiento sería análogo.

Número 1.15

Enunciado

En $\mathbb{R}^2$ se considera la familia $\mathcal{B}$ de todos los subconjuntos

$$B((x,y),\varepsilon)=((x,x+\varepsilon)\times(y,y+\varepsilon))\cup\{(x,y)\}:\ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\varepsilon>0$$

(1) Demostrar que $\mathcal{B}$ es base de una topología $\mathcal{T}$ en $\mathbb{R}^2$.

(2) Estudiar la relación de esta topología con la topología usual $\mathcal{T}_u$ del plano.

(3) Hallar el interior de $[0,1]\times[0,1]$ y la adherencia de $(0,1)\times(0,1)$ en $\mathcal{T}$ y en $\mathcal{T}_u$.

Solución:

Número 1.16

Enunciado

En $\mathbb{R}^2$ se considera la topología $\mathcal{T}$ del número 1.8. ¿Son las rectas cerrados de esta topología? Si no lo son, ¿cuál es su adherencia? Calcular:

(1) Las adherencias de los cuadrantes $A: x\geq 0, y\leq 0$ y $B: x\geq 0, y\geq 0$.

(2) El interior y la adherencia del conjunto $\{x>y\}\cup\{x>-y\}$.

(3) ¿Tiene algún punto (x,y) algún entorno cerrado distinto de todo el plano?

Solución:

Número 1.17

Enunciado

Sea d la distancia euclídea en el plano $\mathbb{R}^2$. Se definen otras dos distancias mediante

$$D(P,Q) = \begin{cases} 0 & \text{si } P = Q \\ d(O,P) + d(O,Q) & \text{si no} \end{cases}$$

$$\delta(P,Q) = \begin{cases} d(P,Q) & \text{si } O, P \text{ y } Q \text{ están alineados} \\ d(O,P) + d(O,Q) & \text{si no} \end{cases}$$

donde O es el origen, y una tercera

$$\rho(P,Q) = \begin{cases} |y_1 - y_2| & \text{si } x_1 = x_2 \\ |y_1| + |x_1 - x_2| + |y_2| & \text{si no} \end{cases}$$

donde $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$. Se consideran entonces las cuatro topologías del plano asociadas a las cuatro distancias d, D, δ, ρ. Hallar en todas ellas el interior y la adherencia de:

(1) *Una recta.*

(2) $[0,1) \times [0,1)$

(3) $[0,1] \times [0,1]$

(4) $[1,2] \times [1,2]$

Solución:

↯Número 1.20

Lista 2: Aplicaciones continuas

Lista 3: Construcción de topologías

Lista 4: Separación

Lista 5: Numerabilidad

Lista 6: Compacidad

Lista 7: Conexión

Lista 8: Conexión por caminos

Lista 9: Homotopía

Lista 10: Borsuk y sus variantes