Topología elemental

Mario Calvarro Marines

Índice general

Espacios topológicos

Conjuntos abiertos

Definición

Una <u>*topología*</u> *en un conjunto X es una colección $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(x)$ de subconjuntos tal que:*

1. *$\emptyset, X \in C$*
2. *Las uniones arbitrarias de elementos de $\mathcal{C}$ están en $\mathcal{C}$.*
3. *Las intersecciones* <u>*finitas*</u> *de elementos de $\mathcal{C}$ están en $\mathcal{C}$.*

Se dice que $(X, \mathcal{C})$ es un <u>*espacio topológico*</u>*, los elementos de $\mathcal{C}$ se llaman* <u>*abiertos*</u> *y los elementos de X se llaman* <u>*puntos*</u>*.*

<u>Ejemplo</u>:

1. $\mathcal{C} = \{\emptyset, X\}$ es la topología <u>trivial</u>; $\mathcal{C} = P(X)$, topología <u>discreta</u>: si los puntos $\{x\} \in \mathcal{C}$, entonces cualquier $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ es abierto.
2. $\mathbb{R}^n$ con la topología usual definida mediante las bolas euclídeas.
3. Cualquier distancia d define una topología mediante sus bolas abiertas, igual que se define la usual. <u>Notación</u>:

$$B(a, \varepsilon) = \{d(a, x) < \varepsilon\}, \ B[a, \varepsilon] = \{d(a, x) \leq \varepsilon\}, \ S[a, \varepsilon] = \{d(a, x) = \varepsilon\}$$

4. En un conjunto se pueden definir muchas topologías distintas (por ejemplo (1)) pero se? puede asumir que solo "parezcan" distintas. Ya se sabe que la topología usual de $\mathbb{R}^n$ se puede definir mediante muchas distancias distintas.
5. Una topología para ilustrar muchas propiedades.

   Fijamos $a \in X$:

$$\mathcal{C}_a = \{U \subset X : a \in U\} \cup \{\emptyset\}$$

   La topología "del punto". El punto $\{a\}$ y todos los pares de puntos $\{a, x\}$ son abiertos. Se parece a la discreta pero difiere en que en esta última todos los puntos son abiertos.

Definición

Dos topologías $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$ en X se llaman comparables: $\mathcal{C}_2$ más "fina" que $\mathcal{C}_1$.

Siempre se da:

$$\mathcal{C}_{\text{trivial}} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{C}_{\text{discreta}}$$

Sea $(X, \mathcal{C})$ un espacio topológico; a menudo se omite $\mathcal{C}$ ó el calificativo "topológico".

Definición

1. *Un entorno abierto de un punto $x \in X$ es un abierto U que lo contiene. Se suele escribir U^x.*
2. *Un entorno de un punto $x \in X$ es un conjunto V que contiene un abierto U que contiene al punto. Se suele escribir V^x.*[1]

$$V_1^x \cap V_2^x = V^x$$
$$U_1^x \cap U_2^x = U_{ab}^x \ni x$$

Definición

Sea $A \subset X$. Un punto interior de A es un punto del que A es entorno (luego A lo contiene). El interior de A es el conjunto de sus puntos interiores:

$$\mathrm{Int}_X(A) = \mathring{A} = \{x \in A : \exists U_{ab}^x \subset A\}$$

Proposición

$\mathring{A}$ es el mayor abierto contenido en A:

$$\mathring{A} = \bigcup_{U^{ab} \subset A} U$$

En particular, A abierto $\Leftrightarrow A = \mathring{A} \Leftrightarrow A$ es un entorno de todos los puntos.

[1] La intersección finita de entornos es entorno. (Si son abiertos es trivial)

Demostración:

1. $\mathring{A}$ es abierto:

$$\left.\begin{array}{ll}\forall x \in \mathring{A} & \Rightarrow \exists U_{ab}^{x} \subset A \\ \forall y \in U^{x} & \Rightarrow A \supset U^{x} \text{es un abierto que contiene a } y \Rightarrow y \in \mathring{A}.\end{array}\right\} \Rightarrow U_{ab}^{x} \subset \mathring{A}$$

$$\Rightarrow \mathring{A} = \bigcup_{x \in \mathring{A}} U^{x} \text{ es abierto como unión de abiertos..}$$

2. $\mathring{A}$ es el mayor abierto contenido en A.

$$U^{ab} \subset A \Rightarrow \forall x \in U^{ab} \subset A \Rightarrow x \in \mathring{A} \Rightarrow U \subset \mathring{A}$$

Ejemplo:

1. $(X, \mathcal{C}_{\text{trivial}}) : A \neq X \Rightarrow A \not\supset X \Rightarrow \emptyset$ es el único abierto $\subset A \Rightarrow \mathring{A} = \emptyset$.
2. En $\mathbb{R}^n$ con $\mathcal{C}_{\text{trivial}}$ ya lo sabemos bien:

$$\text{Int}\,(B\,[a, \varepsilon]) = B\,(a, \varepsilon)\,; \;\; \mathring{\mathbb{Q}}^n = \emptyset; \;\; \mathring{\mathbb{Z}}^n = \emptyset$$

3. Si $a \in X,\ \mathcal{C}_a : \{\mathring{a}\} = \{a\};\ x \neq a,\ \{\mathring{x}\} = \emptyset$.

Proposición

1. $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$.

2. $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \text{Int}\,(A \cap B)$.

Demostración:

1. $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset A \subset B$ y $\mathring{A}$ es abierto $\Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$.
2.

$$\left.\begin{array}{ll}\left\{\begin{array}{l}\mathring{A} \cap \mathring{B} \text{ abierto (intersección finita de abiertos)} \\ \mathring{A} \cap \mathring{B} \subset A \cap B\end{array}\right. & \Rightarrow \mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \text{Int}\,(A \cap B) \\ A \cap B \subset A, B \Rightarrow \text{Int}\,(A \cap B) \subset \mathring{A}, \mathring{B} & \Rightarrow \text{Int}\,(A \cap B) \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathring{A} \cap \mathring{B} = \text{Int}\,(A \cap B)}.$$

Conjuntos cerrados

Sea $(X, \mathcal{C})$ un espacio topológico.

Definición

Un conjunto <u>*cerrado*</u> *es un subconjunto $F \subset X$ tal que $U = X \setminus F$ es abierto.*

Observación:

Cerrado <u>no</u> significa "no abierto", hay conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados.

Observación:

Se cumple:

1. $X, \emptyset$ son cerrados.
2. La intersección arbitraria de cerrados es cerrada.
3. La unión finita de cerrados es cerrado.

Demostración:

Porque $\bigcap_{i\in I}(X\setminus U_i) = X\setminus\bigcup_{i\in I}U_i$ y $\bigcup_{i\in I}X\setminus U_i = X\setminus\bigcap_{i\in I}U_i$.

Ejemplo:

1. En la topología trivial solo son cerrados $\emptyset$ y X. En la discreta, todos los subconjuntos son cerrados.
2. En $\mathbb{R}^n$ con la topología usual ya sabemos todos los ejemplos: $B[a,\varepsilon] : \|x-a\| \leq \varepsilon$.
3. Si $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$, todo cerrado de $\mathcal{C}_1$ es cerrado de $\mathcal{C}_2$.

Para saber cuándo se aleja un conjunto de ser cerrado tenemos:

Definición

Sea $A \subset X$. Un punto adherente a A es un punto cuyos entornos intersecan todos a A. La adherencia de A es el conjunto de sus puntos adherentes.

$$\mathrm{Adh}_X(A) = \overline{A} = \{x \in X : \forall V^x \cap A \neq \emptyset\}$$

Observación:

Las primeras fórmulas importantes son:

$$\boxed{X\setminus\overline{A} = \mathrm{Int}(X\setminus A)}$$

$$\boxed{X\setminus\mathring{B} = \overline{X\setminus B}}.$$

Demostración:

- $x \in X\setminus\overline{A} \Leftrightarrow x \notin \overline{A} \Leftrightarrow \exists U^x \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \exists U^x \subset X\setminus A \Leftrightarrow x \in \mathrm{Int}(X\setminus A)$
- $x \notin \mathring{B} \Leftrightarrow \nexists U^x \subset B \Leftrightarrow \forall U^x \cap (X\setminus B) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \overline{X\setminus B}$.

Proposición

$\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A:

$$\boxed{\overline{A} = \bigcap_{F_{cerrado}\supset A} F}$$

En particular, A cerrado $\Leftrightarrow \overline{A} = A \Leftrightarrow A$ contiene todos sus puntos de adherencia.

Demostración:

$\overline{A} = X\setminus\mathrm{Int}(X\setminus A) = X\setminus \underbrace{\bigcup_{U\subset X\setminus A} U = X\setminus\bigcup_{F\supset A}}_{F=X\setminus U}(X\setminus F) = \bigcap_{F\supset A}F$.

Observación:

Lo anterior nos implica:

- $B \supset A \Rightarrow \overline{B} \supset B \supset A \Rightarrow \overline{B} \supset \overline{A}$.
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$:

$$\begin{cases} \overline{A \cup B} \supset A \cup B \supset \begin{cases} A \\ B \end{cases} \Rightarrow \overline{A \cup B} \supset \begin{cases} \overline{A} \\ \overline{B} \end{cases} \Rightarrow \overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cup \overline{B} \\ A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B} \end{cases}$$

La última implicación por que es cerrado al ser la unión de dos cerrados.

Ejemplo:

1. En $\mathbb{R}^n, \mathcal{C}_{\text{usual}} : B\left[a, \varepsilon\right] = \overline{B\left(a, \varepsilon\right)}$; $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$.
2. $a \in X, \mathcal{C}_a$

$$\begin{cases} \overline{\{a\}} = X \left[\forall x, \forall U^x \supset \{a, x\} \ni a \Rightarrow x \in \overline{\{a\}}\right] \\ x \neq a, \overline{\{x\}} = \{x\} \left[y \neq x \Rightarrow U^y = \{a, y\} \cap \{x\} = \emptyset\right] \end{cases}$$

Otros tipos de puntos especiales:

1. x es un punto aislado de A si $\exists V^x \cap A = \{x\}$.
2. x es un punto de acumulación de A si $\forall V^x \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Y, evidentemente,

$$\overline{A} = \underbrace{\{\text{puntos aislados}\}}_{\subset A} \cup \underbrace{\{\text{puntos de acumulación}\}}_{\supset \overline{A} \setminus A}$$

3. x es un punto frontera de A si es adherente a A y a $X \setminus A$, o bien: si no es interior de $X \setminus A$ ni de A. La frontera de A es:

$$\text{Fr}\left(A\right) = \{x \in X : x \text{ es punto frontera de } A\} = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus \mathring{A}$$

Ejemplo:

1. En $\mathbb{R}, \mathcal{C}_n$ todos los puntos de $\mathbb{Z}$ son aislados, $\text{Fr}\left(\mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z}$.
2. En $\mathbb{R}^n, \mathcal{C}_n : \text{Fr}\left(B\left(a, \varepsilon\right)\right) = \text{Fr}\left(B\left[a, \varepsilon\right]\right) = S\left[a, \varepsilon\right] : \|x - a\| = \varepsilon$.
3. En $\mathcal{C}_{\text{discreta}}$ todos los puntos son aislados, todas las fronteras son vacías.
4. $a \in X, \mathcal{C}_a$:

$$\begin{cases} \text{Fr}\left(\{a\}\right) = \overline{\{a\}} \setminus \{\mathring{a}\} = X \setminus \{a\} \\ x \neq a, \text{Fr}\left(\{x\}\right) = \overline{\{x\}} \setminus \{\mathring{x}\} = \{x\} \end{cases}$$

Ahora, un concepto importante:

Definición

$A \subset X$ es denso si $\overline{A} = X$, o bien, todo punto es adherente a A, o bien, todo abierto ($\neq \emptyset$) corta a A.

Ejemplo:

1. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \mathcal{C}_{\text{usual}}; \mathbb{Q} \times \overbrace{\cdots}^{n} \times \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{C}_{\text{usual}}$ son densos.
2. $\{a\}$ es denso en $(X, \mathcal{C}_a)$.

Bases

Sea $X, \mathcal{C}$ un espacio topológico.

Definición

Una base de entornos de $a \in X$ es una colección $\mathcal{V}^a$ de entornos de a, tal que todo entorno de a contiene uno de la $\mathcal{V}^a$.

Observación:

No se supone ninguna propiedad especial, ni que sean abiertos. Veremos que la existencia de base de entornos con propiedades adicionales es una de las cosas que determinan el comportamiento de la topología.

Pero: $\forall \mathcal{V}^a$ se puede refinar a una base $\mathcal{B}^a$ de entornos de abiertos.

$$[\forall V^a \in \mathcal{V}^a \exists U^a \subset V^a \Rightarrow \mathcal{B}^a = \{U^a : V^a \in \mathcal{V}^a\} \text{ es base de entornos}]$$

Política general?

Bastan las bases de entornos para comprobar propiedades de todos los entornos.

Ilustración:

$$a \in \overline{A} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall W^a \text{ entorno } : W^a \cap A \neq \emptyset$$
$$\Longleftrightarrow \forall V^a \in \mathcal{V}^a : V^a \cap A \neq \emptyset.$$

Ejemplo:

1. $\mathbb{R}^n, \mathcal{C}_{\text{usual}}$:
$$\begin{cases} \mathcal{B}^a = \{B(a,\varepsilon) : \varepsilon > 0\} \text{ base de entornos abiertos.} \\ \mathcal{V}^a = \{B[a,\varepsilon] : \varepsilon > 0\} \text{ base de entornos cerrados.} \end{cases}$$
2. $a \in X, \mathcal{C}_a : \mathcal{B}^a = \{\{a\}\}, \mathcal{B}^x = \{\{a,x\}\}, \ x \neq a.$

Definición

Una base de abiertos de $\mathcal{C}$ es una colección de abiertos $B \subset \mathcal{C}$ tal que todo abierto es unión de abiertos de B.

Proposición

$\mathcal{B}$ base de abiertos $\Leftrightarrow \forall x \in X, \ \mathcal{B}^x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ es base de entornos abiertos de $x \Leftrightarrow \forall x \in U, \ \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset U$.

Demostración:

$\Rightarrow) \forall V^x \Rightarrow x \in U \subset V^x \Rightarrow$

$$\mathcal{B} \text{ base } U = \bigcup_{i \in I} \overbrace{B_i}^{\in \mathcal{B}} \overset{x \in U}{\Longrightarrow} \exists x \in B_i \subset U \subset V^x$$

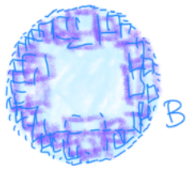
$\Leftarrow) U \in \mathcal{C}, \ \forall x \in U, \ \exists \underbrace{B^x}_{\in \mathcal{B}} \subset U \Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} B^x$ unión de abiertos de $\mathcal{B}$.

Ejemplo:

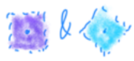
1. $\mathcal{C}_{\text{discreta}} : \mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ es mínima. $\left[\text{si} B' \text{ es base } : \forall x, \{x\} = \bigcup_{i \in I} \overbrace{B_i}^{\in B'} \Rightarrow B_i = \{x\} \right]$

2. $\mathcal{C}_a : \mathcal{B} = \{\{a, x\} : x \in X\}$.

3. $\mathbb{R}^n, \mathcal{C}_{\text{usual}} \mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) : \varepsilon > 0, x \in \mathbb{R}^n\}$



Pero también,



porque

$$B(x, \varepsilon) = \bigcup_{i \in I} cuadrados = \bigcup_{j \in J} rectangulos$$

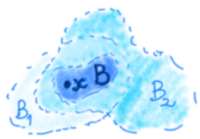
Política general , como antes: a menudo basta considerar los abiertos de $\mathcal{B}$

Ilustración: $A \subset X$ denso $\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}, B \cap A \neq \emptyset$.

Proposición

$\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ es base de una topología (única) $\mathcal{C}$ es X. Es equivalente a:

- $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.
- $\forall x \in B_1 \cap B_2,\ \exists B^x \subset B_1 \cap B_2$.



Demostración:

- Unicidad: $\mathcal{C} = \{\bigcup_{i \in I} B_i : \{B_i\} \subset \mathcal{B}\}$.
- Existencia: Esa $\mathcal{C}$ es efectivamente topología. Lo importante: $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \bigcup_{x \in B_1 \cap B_2} B^x \in \mathcal{C}$.

Topología relativa

Sea $(X, \mathcal{C})$ espacio topológico.

Definición

$Y \subset X : \mathcal{C}|_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{C}\}$ es una topología en Y (fácil), denominada relativa ó restricción a Y; también se dice que $(Y, \mathcal{C}|_Y)$ es un subespacio de $(X, \mathcal{C})$ y que $(X, \mathcal{C})$ es el espacio ambiente.

Observación:

1. Los cerrados en $\mathcal{C}|_Y$ son $F \cap Y$ con F cerrado en $\mathcal{C}$.

$$[Y \setminus U \cap Y = Y \cap (X \setminus U) = Y \cap F]$$

2. $\begin{cases} y \in Y \subset X \\ \mathcal{V}^y \text{ base de entornos de } y \text{ en } \mathcal{C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{V}^y \cap Y = \{V^y \cap Y : V^y \in \mathcal{V}^y\} \\ \text{base de entornos de } y \text{ en } \mathcal{C}|_Y \end{cases}$

3. $\mathcal{B}$ base de $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B} \cap Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ base de $\mathcal{C}|_Y$

Esta idea es general: en un subespacio se hacen las construcciones intersecando.

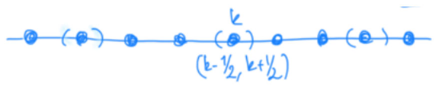
Ejemplo:

1. y es un punto aislado de $Y \Leftrightarrow \{y\}$ abierto en $\mathcal{C}|_Y$. $[\{y\} = V^y \cap Y]$

2. Todos los puntos de Y son aislados $\Leftrightarrow C|_Y =$ discreta.

   Se dice: Y es un subespacio discreto.

   Por ejemplo, en $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$:



3. $a \in X, \mathcal{C}_a|_{X\setminus\{a\}} =$ discreta.

Observación:

1. $Y \subset_{\text{ab}} X : W$ abierto de $Y \Leftrightarrow W$ abierto de X contenido en Y.

$$\left[W = U \cap Y^{ab},\ U^{ab} \subset X \Rightarrow W^{ab} \subset X \text{ por intersección finita}\right]$$

2. $Y \subset_{\text{cerr}} X : F$ cerrado de $Y \Leftrightarrow F$ cerrado de X contenido en Y.

$$[C = F \cap Y^{cerr},\ F^{cerr} \subset X \Rightarrow C^{cerr} \subset X \text{ por intersección finita}]$$