

Topología elemental

Mario Calvarro Marines

Índice general

1. Espacios topológicos	5
1.1. Conjuntos abiertos	5
1.2. Conjuntos cerrados	7
1.3. Bases	10
1.4. Topología relativa	12
2. Aplicaciones continuas	13
2.1. Continuidad	13
2.2. Continuidad y subespacios	15
2.3. Homeomorfismos	15
3. Construcciones	19
3.1. Imágenes inversas	19
3.2. Imágenes directas	20
3.3. Productos (finitos)	23
3.4. Sumas (finitas)	25
3.5. Espacios proyectivos reales	26
4. Separación	29
4.1. Concepto	29
4.2. Tabla de comportamiento	30
5. Numerabilidad	31
6. Compacidad	33
7. Compacidad local	35

8. Conexión	37
9. Componentes conexas y conexión local	39
10. Conexión por caminos	41
11. Componentes conexas por caminos y conexión local por caminos	43
12. Homotopía	45
13. Homotopía por caminos	47
14. El grupo fundamental	49
15. Retractos	51
16. Recubridores	53
17. Cálculos mediante recubridores	55
18. Aplicaciones en dimensión 2	57
19. Más aplicaciones por el mismo precio	59
20. Superficies	61
21. Clasificación de superficies	63
22. Grande finale	65

Espacios topológicos

Conjuntos abiertos

Definición

Una topología en un conjunto X es una colección $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ de subconjuntos tal que:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. Las uniones arbitrarias de elementos de \mathcal{T} están en \mathcal{T} .
3. Las intersecciones finitas de elementos de \mathcal{T} están en \mathcal{T} .

Se dice que (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico, los elementos de \mathcal{T} se llaman abiertos y los elementos de X se llaman puntos.

Ejemplo:

1. $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ es la topología trivial; $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, topología discreta: si los puntos $\{x\} \in \mathcal{T}$, entonces cualquier $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ es abierto.
2. \mathbb{R}^n con la topología usual definida mediante las bolas euclídeas.
3. Cualquier distancia d define una topología mediante sus bolas abiertas, igual que se define la usual. Notación:

$$B(a, \varepsilon) = \{d(a, x) < \varepsilon\}, \quad B[a, \varepsilon] = \{d(a, x) \leq \varepsilon\}, \quad S[a, \varepsilon] = \{d(a, x) = \varepsilon\}$$

4. En un conjunto se pueden definir muchas topologías distintas (por ejemplo (1)) pero se puede asumir que solo “parezcan” distintas. Ya se sabe que la topología usual de \mathbb{R}^n se puede definir mediante muchas distancias distintas.



El dibujo representa distintas distancias¹ en \mathbb{R}^n , pero todas definen la misma topología.

¹Procedentes de *normas*.

5. Una topología para ilustrar muchas propiedades (y contraejemplos).

Fijamos $a \in X$:

$$\mathcal{T}_a = \{U \subset X : a \in U\} \cup \{\emptyset\}$$

La topología “del punto”. El punto $\{a\}$ y todos los pares de puntos $\{a, x\}$ son abiertos. Se parece a la discreta pero difiere en que en esta última todos los puntos son abiertos.

Definición

Dos topologías $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ en X se llaman comparables: \mathcal{T}_2 es más “fina” que \mathcal{T}_1 .

Siempre se da:

$$\mathcal{T}_{\text{trivial}} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{\text{discreta}}$$

Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico; a menudo se omite \mathcal{T} ó el calificativo “topológico”.

Definición

1. Un entorno abierto de un punto $x \in X$ es un abierto U que lo contiene. Se suele escribir U^x .
2. Un entorno de un punto $x \in X$ es un conjunto V que contiene un abierto U que contiene al punto. Se suele escribir V^x .²



Observación:

1. Con $U^x \subset V^x$:

$$\begin{aligned} V_1^x \cap V_2^x &= V^x \\ U_1^x \cap U_2^x &= U_{\text{ab}}^x \ni x \end{aligned}$$

2. $U \in \mathcal{T}$ es entorno de todos sus puntos.

Demostración:

$$x \in U \text{ abierto} \subset U$$

Definición

Sea $A \subset X$. Un punto interior de A es un punto del que A es entorno (luego A lo contiene). El interior de A es el conjunto de sus puntos interiores:

$$\text{Int}_X(A) = \overset{\circ}{A} = \{x \in A : \exists U_{\text{ab}}^x \subset A\}$$



²La intersección finita de entornos es entorno. (Si son abiertos es trivial)

Proposición

\mathring{A} es el mayor abierto contenido en A :

$$\mathring{A} = \bigcup_{U^{ab} \subset A} U$$

En particular, A abierto $\Leftrightarrow A = \mathring{A} \Leftrightarrow A$ es un entorno de todos los puntos.

Demostración:

1. \mathring{A} es abierto:

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \in \mathring{A} \Rightarrow \exists U_{ab}^x \subset A \\ \forall y \in U^x \Rightarrow A \supset U^x \text{ es un abierto que contiene a } y \Rightarrow y \in \mathring{A}. \end{array} \right\} \Rightarrow U^x \subset \mathring{A} \\ \Rightarrow \mathring{A} = \bigcup_{x \in \mathring{A}} U^x \text{ es abierto como unión de abiertos.}$$

2. \mathring{A} es el mayor abierto contenido en A .

$$U^{ab} \subset A \Rightarrow \forall x \in U^{ab} \subset A \Rightarrow x \in \mathring{A} \Rightarrow U \subset \mathring{A}$$

Ejemplo:

1. $(X, \mathcal{T}_{\text{trivial}}) : A \neq X \Rightarrow A \not\supset X \Rightarrow \emptyset$ es el único abierto $\subset A \Rightarrow \mathring{A} = \emptyset$.

2. En \mathbb{R}^n con $\mathcal{T}_{\text{trivial}}$ ya lo sabemos bien:

$$\text{Int}(B[a, \varepsilon]) = B(a, \varepsilon); \quad \mathring{\mathbb{Q}}^n = \emptyset; \quad \mathring{\mathbb{Z}}^n = \emptyset$$

3. Si $a \in X$, $\mathcal{T}_a : \{\mathring{a}\} = \{a\}; \quad x \neq a, \quad \{\mathring{x}\} = \emptyset$.

Proposición

1. $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$.

2. $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \text{Int}(A \cap B)$.

Demostración:

1. $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset A \subset B$ y \mathring{A} es abierto $\Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$.

2.

$$\left. \begin{array}{l} \mathring{A} \cap \mathring{B} \text{ abierto (intersección finita de abiertos)} \\ \mathring{A} \cap \mathring{B} \subset A \cap B \end{array} \right\} \Rightarrow \mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \text{Int}(A \cap B) \\ \left. \begin{array}{l} A \cap B \subset A, B \Rightarrow \text{Int}(A \cap B) \subset \mathring{A}, \mathring{B} \\ \Rightarrow \text{Int}(A \cap B) \subset \mathring{A} \cap \mathring{B} \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \boxed{\mathring{A} \cap \mathring{B} = \text{Int}(A \cap B)}.$$

Conjuntos cerrados

Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico.

Definición

Un conjunto cerrado es un subconjunto $F \subset X$ tal que $U = X \setminus F$ es abierto.

Observación:

Cerrado no significa “no abierto”, hay conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados.



Observación:

Se cumple, $\mathcal{F} = \{\text{cerrados}\}$:

1. X, \emptyset son cerrados.
2. La intersección arbitraria de cerrados es cerrada.
3. La unión finita de cerrados es cerrado.

Demostración:

Porque $\bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i) = X \setminus \bigcup_{i \in I} U_i$ y $\bigcup_{i \in I} X \setminus U_i = X \setminus \bigcap_{i \in I} U_i$.

Ejemplo:

1. En la topología trivial solo son cerrados \emptyset y X . En la discreta, todos los subconjuntos son cerrados.
2. En \mathbb{R}^n con la topología usual ya sabemos todos los ejemplos: $B[a, \varepsilon] : \|x - a\| \leq \varepsilon$.
3. Si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, todo cerrado de \mathcal{T}_1 es cerrado de \mathcal{T}_2 . (Cuidado con el orden)

Para saber cuándo se aleja un conjunto de ser cerrado tenemos:

Definición

Sea $A \subset X$. Un punto adherente a A es un punto cuyos entornos intersecan todos a A . La adherencia de A es el conjunto de sus puntos adherentes.

$$\text{Adh}_X(A) = \overline{A} = \{x \in X : \forall V^x \cap A \neq \emptyset\} \supset A$$

Observación:

Las primeras fórmulas importantes son:

$$\boxed{X \setminus \overline{A} = \text{Int}(X \setminus A)}$$

$$\boxed{X \setminus \overset{\circ}{B} = \overline{X \setminus B}}.$$

Demostración:

- $x \in X \setminus \overline{A} \Leftrightarrow x \notin \overline{A} \Leftrightarrow \exists U^x \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \exists U^x \subset X \setminus A \Leftrightarrow x \in \text{Int}(X \setminus A)$
- $x \notin \overset{\circ}{B} \Leftrightarrow \nexists U^x \subset B \Leftrightarrow \forall U^x \cap (X \setminus B) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \overline{X \setminus B}$.

Proposición

\overline{A} es el menor cerrado que contiene a A :

$$\overline{A} = \bigcap_{F_{\text{cerrado}} \supset A} F$$

En particular, A cerrado $\Leftrightarrow \overline{A} = A \Leftrightarrow A$ contiene todos sus puntos de adherencia.

Demostración:

$$\overline{A} = X \setminus \text{Int}(X \setminus A) = X \setminus \underbrace{\bigcup_{U \subset X \setminus A} U}_{F = X \setminus U} = X \setminus \bigcup_{F \supset A} (X \setminus F) = \bigcap_{F \supset A} F.$$

Observación:

Lo anterior nos implica:

$$\blacksquare B \supset A \Rightarrow \overline{B} \supset \overline{A} \Rightarrow \overline{B} \supset A \Rightarrow \overline{B} \supset \overline{A}.$$

$$\blacksquare \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}:$$

$$\begin{cases} \overline{A \cup B} \supset A \cup B \supset \begin{cases} A \\ B \end{cases} \Rightarrow \overline{A \cup B} \supset \begin{cases} \overline{A} \\ \overline{B} \end{cases} \Rightarrow \overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cup \overline{B} \\ A \cup B \subset \overline{A \cup B} \Rightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B} \end{cases}$$

La última implicación por que es cerrado al ser la unión de dos cerrados.

Ejemplo:

$$1. \text{ En } \mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{usual}} : B[a, \varepsilon] = \overline{B(a, \varepsilon)}; \overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n.$$

$$2. a \in X, \mathcal{T}_a$$

$$\begin{cases} \overline{\{a\}} = X \left[\forall x, \forall U^x \supset \{a, x\} \ni a \Rightarrow x \in \overline{\{a\}} \right] \\ x \neq a, \overline{\{x\}} = \{x\} [y \neq x \Rightarrow U^y = \{a, y\} \cap \{x\} = \emptyset] \end{cases}$$

Definición (Otros puntos especiales)

1. x es un punto aislado de A si $\exists V^x \cap A = \{x\}$.

2. x es un punto de acumulación de A si $\forall V^x \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Y, evidentemente,

$$\overline{A} = \underbrace{\{\text{puntos aislados}\}}_{\subset A} \sqcup \underbrace{\{\text{puntos de acumulación}\}}_{\supset \overline{A} \setminus A}$$

3. x es un punto frontera de A si es adherente a A y a $X \setminus A$, o bien, si no es interior de $X \setminus A$ ni de A . La frontera de A es:

$$\text{Fr}(A) = \{x \in X : x \text{ es punto frontera de } A\} = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$$

Ejemplo:

$$1. \text{ En } \mathbb{R}, \mathcal{T}_n \text{ todos los puntos de } \mathbb{Z} \text{ son aislados, } \text{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

$$2. \text{ En } \mathbb{R}^n, \mathcal{T}_n : \text{Fr}(B(a, \varepsilon)) = \text{Fr}(B[a, \varepsilon]) = S[a, \varepsilon] : \|x - a\| = \varepsilon.$$

$$3. \text{ En } \mathcal{T}_{\text{discreta}} \text{ todos los puntos son aislados, todas las fronteras son vacías.}$$

4. $a \in X, \mathcal{T}_a :$

$$\begin{cases} \text{Fr}(\{a\}) = \overline{\{a\}} \setminus \{a\} = X \setminus \{a\} \\ x \neq a, \text{Fr}(\{x\}) = \overline{\{x\}} \setminus \{x\} = \{x\} \end{cases}$$

Ahora, un concepto importante:

Definición

$A \subset X$ es denso si $\overline{A} = X$, o bien, todo punto es adherente a A , o bien, todo abierto ($\neq \emptyset$) corta a A .

Ejemplo:

1. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{usual}}; \mathbb{Q} \times \overbrace{\mathbb{Q} \times \dots \times \mathbb{Q}}^n \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{usual}}$ son densos.
2. $\{a\}$ es denso en (X, \mathcal{T}_a) .

Bases

Sea X, \mathcal{T} un espacio topológico.

Definición

Una base de entornos de $a \in X$ es una colección \mathcal{V}^a de entornos de a , tal que todo entorno de a contiene uno de la \mathcal{V}^a .

Observación:

No se supone ninguna propiedad especial, ni que sean abiertos. Veremos que la existencia de base de entornos con propiedades adicionales es una de las cosas que determinan el comportamiento de la topología.

Pero: $\forall \mathcal{V}^a$ se puede refinar a una base \mathcal{B}^a de entornos de abiertos.

$$[\forall V^a \in \mathcal{V}^a \exists U^a \subset V^a \Rightarrow \mathcal{B}^a = \{U^a : V^a \in \mathcal{V}^a\} \text{ es base de entornos}]$$

Política general:

Bastan las bases de entornos para comprobar propiedades de todos los entornos.

Ilustración:

$$\begin{aligned} a \in \overline{A} &\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall W^a \text{ entorno} : W^a \cap A \neq \emptyset \\ &\iff \forall V^a \in \mathcal{V}^a : V^a \cap A \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Ejemplo:

1. $\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{usual}} :$

$$\begin{cases} \mathcal{B}^a = \{B(a, \varepsilon) : \varepsilon > 0\} \text{ base de entornos abiertos.} \\ \mathcal{V}^a = \{B[a, \varepsilon] : \varepsilon > 0\} \text{ base de entornos cerrados.} \end{cases}$$

2. $a \in X, \mathcal{T}_a : \mathcal{B}^a = \{\{a\}\}, \mathcal{B}^x = \{\{a, x\}\}, x \neq a.$

Definición

Una base de abiertos de \mathcal{T} es una colección de abiertos $B \subset \mathcal{T}$ tal que todo abierto es unión de abiertos de B .

Proposición

\mathcal{B} base de abiertos $\Leftrightarrow \forall x \in X, \mathcal{B}^x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ es base de entornos abiertos de $x \Leftrightarrow \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset U$.

Demostración:

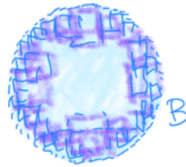
$$\Rightarrow) \forall V^x \Rightarrow x \in U \subset V^x \Rightarrow$$

$$\mathcal{B} \text{ base } U = \bigcup_{i \in I} \overbrace{B_i}^{\in \mathcal{B}} \xrightarrow{x \in U} \exists x \in B_i \subset U \subset V^x$$

$$\Leftarrow) U \in \mathcal{T}, \forall x \in U, \exists \underbrace{B^x}_{\in \mathcal{B}} \subset U \Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} B^x \text{ unión de abiertos de } \mathcal{B}.$$

Ejemplo:

1. $\mathcal{T}_{\text{discreta}} : \mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ es mínima. $\left[\text{si } \mathcal{B}' \text{ es base} : \forall x, \{x\} = \bigcup_{i \in I} \overbrace{B_i}^{\in \mathcal{B}'} \Rightarrow B_i = \{x\} \right]$
2. $\mathcal{T}_a : \mathcal{B} = \{\{a, x\} : x \in X\}$.
3. $\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{usual}} \mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) : \varepsilon > 0, x \in \mathbb{R}^n\}$



Pero también,



porque

$$B(x, \varepsilon) = \bigcup_{i \in I} \text{cuadrados} = \bigcup_{j \in J} \text{rectángulos}$$

Política general:

Como antes, a menudo basta considerar los abiertos de \mathcal{B}

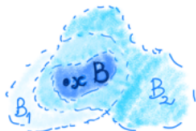
Ilustración:

$$A \subset X \text{ denso} \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}, B \cap A \neq \emptyset.$$

Proposición

$\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ es base de una topología (única) \mathcal{T} en X . Es equivalente a:

- $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.
- $\forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B^x \subset B_1 \cap B_2$.



Demostración:

- Unicidad: $\mathcal{T} = \{\bigcup_{i \in I} B_i : \{B_i\} \subset \mathcal{B}\}$.
- Existencia: Esa \mathcal{T} es efectivamente topología. Lo importante: $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \bigcup_{x \in B_1 \cap B_2} B^x \in \mathcal{T}$.

Topología relativa

Sea (X, \mathcal{T}) espacio topológico.

Definición

$Y \subset X : \mathcal{T}|_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$ es una topología en Y (fácil), denominada relativa ó restricción a Y ; también se dice que $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ es un subespacio de (X, \mathcal{T}) y que (X, \mathcal{T}) es el espacio ambiente.



Observación:

1. Los cerrados en $\mathcal{T}|_Y$ son $F \cap Y$ con F cerrado en \mathcal{T} .

$$[Y \setminus U \cap Y = Y \cap (X \setminus U) = Y \cap F]$$

2. $\begin{cases} y \in Y \subset X \\ \mathcal{V}^y \text{ base de entornos de } y \text{ en } \mathcal{T} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{V}^y \cap Y = \{V^y \cap Y : V^y \in \mathcal{V}^y\} \\ \text{base de entornos de } y \text{ en } \mathcal{T}|_Y \end{cases}$
3. \mathcal{B} base de $\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{B} \cap Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ base de $\mathcal{T}|_Y$

Esta idea es general: en un subespacio se hacen las construcciones intersecando.

Ejemplo:

1. y es un punto aislado de $Y \Leftrightarrow \{y\}$ abierto en $\mathcal{T}|_Y$. $[\{y\} = V^y \cap Y]$
2. Todos los puntos de Y son aislados $\Leftrightarrow C|_Y = \text{discreta}$.

Se dice: Y es un subespacio discreto.

Por ejemplo, en $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$:



3. $a \in X, \mathcal{T}_a|_{X \setminus \{a\}} = \text{discreta}$.

Observación:

1. $Y \subset_{\text{ab}} X : W$ abierto de $Y \Leftrightarrow W$ abierto de X contenido en Y .

$$[W = U \cap Y^{\text{ab}}, U^{\text{ab}} \subset X \Rightarrow W^{\text{ab}} \subset X \text{ por intersección finita}]$$

2. $Y \subset_{\text{cerr}} X : F$ cerrado de $Y \Leftrightarrow F$ cerrado de X contenido en Y .

$$[C = F \cap Y^{\text{cerr}}, F^{\text{cerr}} \subset X \Rightarrow C^{\text{cerr}} \subset X \text{ por intersección finita}]$$

Aplicaciones continuas

Continuidad

El famoso $\varepsilon - \delta$ en $\mathbb{R}^n \mathcal{T}_u; x_0 \in X, f : \overbrace{X}^{\subset \mathbb{R}^p} \rightarrow \overbrace{Y}^{\subset \mathbb{R}^q} :$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \begin{cases} \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon \Leftrightarrow \\ x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon) \Leftrightarrow \\ f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon) \end{cases} \Rightarrow$$
$$\boxed{\forall B(f(x_0), \varepsilon), \exists B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))}.$$

Definición

$f : X \rightarrow Y$ será continua en $x_0 \in X$ si:

$$\forall V^{f(x_0)} : f^{-1}(V^{f(x_0)}) = V^{x_0}$$

Proposición (Composición de continuidades)

La composición de funciones continuas es continua:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z : \left. \begin{array}{l} f \text{ continua en } x_0 \\ g \text{ continua en } y_0 \end{array} \right\} \Rightarrow h = g \circ f \text{ continua en } x_0$$

Demostración:

$$\text{Sea } V^{h(x_0)} \rightarrow h^{-1}V^{h(x_0)} = f^{-1}g^{-1}V^{g(y_0)} = f^{-1}V^{y_0} = V^{x_0}.$$

Ejemplo:

1. $\forall f : X_{\text{discreta}} \rightarrow Y$ es continua. [Todo es abierto, luego todo es entorno en $\mathcal{T}_{\text{disc}}$]
2. $\forall f : X \rightarrow Y_{\text{trivial}}$ continua. [$V^{f(x)} = Y$ es el único abierto, luego el único entorno, de $f^{-1}V^{f(x)} = f^{-1}Y = X$ es abierto]
3. $f : X \rightarrow Y_{\text{discreta}}$ es continua $\Rightarrow f$ localmente creciente. [$\{f(x_0)\} = V^{f(x_0)}$ en $\mathcal{T}_{\text{discr}} \xrightarrow{f \text{ cont.}}$
 $f^{-1}f(x_0) = V^{x_0} \wedge f \equiv f(x_0)$]

4. $f : X \rightarrow Y$ localmente constante \Rightarrow continua.

$[\forall x_0 \in X, \exists U^{x_0} : f|_{U^{x_0}} \equiv f(x_0) \Rightarrow \forall V^{f(x_0)} : f^{-1}V^{f(x_0)} \supset U^{x_0} \Rightarrow f^{-1}V^{f(x_0)} = U^{x_0} \text{ es entorno de } x_0]$

Proposición

Son equivalentes:

1. f es continua.
2. $f^{-1}(\text{abierto}) = \text{abierto}$, $\forall \text{abierto} \in Y$.
3. $f^{-1}(\text{cerrado}) = \text{cerrado}$, $\forall \text{cerrado de } Y$.
4. $f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset \text{Int}(f^{-1}(A))$, $\forall A \subset Y$
5. $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, $\forall A \subset X$

Demostración:

1. $1 \Rightarrow 2)$

$$W^{\text{ab}} \subset Y \Rightarrow W \text{ ent. de } f(x), \forall x \in f^{-1}W \Rightarrow f^{-1}W \text{ ent. de } \forall x \in f^{-1}W \Rightarrow f^{-1}W \subset X$$

2. $2 \Rightarrow 3)$

$$C_{\text{cerr}} \subset Y \Rightarrow Y \setminus C \subset Y \Rightarrow^{2)} \underbrace{f^{-1}(Y \setminus C)}_{=X \setminus f^{-1}C} \subset X \Rightarrow f^{-1}C \overset{\text{cerr}}{\subset} X$$

3. $3 \Rightarrow 5)$

$$\overline{f(A)} \overset{\text{cerr}}{\subset} Y \Rightarrow^{3)} \underbrace{f^{-1}\overline{f(A)}}_{\subset f^{-1}f(A) \supset A} \subset X \Rightarrow \overline{A} \subset f^{-1}\overline{f(A)} \Rightarrow f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

4. $5 \Rightarrow 4)$

$$Y \setminus \overset{\circ}{A} \Rightarrow \overline{Y \setminus \overset{\circ}{A}} \supset \overline{f(X \setminus f^{-1}A)} \overset{5)}{\supset} f(\overline{X \setminus f^{-1}(A)}) = f(X \setminus \text{Int}(f^{-1}A)) \Rightarrow \\ X \setminus \text{Int}(f^{-1}A) \subset f^{-1}(Y \setminus \overset{\circ}{A}) = X \setminus f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \Rightarrow f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset \text{Int}(f^{-1}A).$$

5. $4 \Rightarrow 1)$

$$V^{f(x)} \Rightarrow f(x) \in \text{Int}(V^{f(x)}) \Rightarrow x \in f^{-1}(\text{Int}(V^{f(x)})) \subset \text{Int}(f^{-1}V^{f(x)}) \Rightarrow \\ f^{-1}V^{f(x)} \text{ entorno de } x.$$

Observación:

1. Los cuatros primeros enunciados tratan sobre “imágenes inversas”. Por ejemplo, la segunda dice que $f^{-1}\mathcal{T}_Y \subset \mathcal{T}_X$.
2. Pensando que un punto adherente es un “punto límite”, 5 nos dice que “la imagen del límite es el límite de la imagen”.
3. $Id : (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ es continua $\Rightarrow \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$. [$Id^{-1}\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$]

Y no mencionamos todos los ejemplos conocidos en espacios afines \mathbb{R}^n con \mathcal{T}_u .

Continuidad y subespacios

Proposición

Sea $f : X \rightarrow Y$ continua y $Z \subset X$ subespacio $\Rightarrow f|_Z : Z \rightarrow Y$ es continua.

Demostración:

Se aplica el criterio “imagen inversa de abierto es abierto” y la fórmula:

$$(f|_Z)^{-1}(A) = Z \cap f^{-1}A, \forall A \subset Y$$

Criterios de continuidad por recubrimientos. Sea $f : X \rightarrow Y$.

- **Por abiertos:** $\exists X = \bigcup_{i \in I} U_i : \forall f|_{U_i} : U_i \rightarrow Y$ es continua.

Demostración:

$W \subset Y \Rightarrow$

$$\begin{cases} f^{-1}W = \bigcup_{i \in I} U_i \cap f^{-1}W = \bigcup_{i \in I} (f|_{U_i})^{-1}W \\ (f|_{U_i})^{-1}W \subset U_i \subset X \Rightarrow (f|_{U_i})^{-1}W \subset X \end{cases} \Rightarrow f^{-1}W \subset X$$

Por unión de abiertos.

- **Por cerrados:** $\exists X = \bigcup_{i=0}^n F_i : \forall f|_{F_i} : F_i \rightarrow Y$ es continua.

Demostración:

$C \subset Y \Rightarrow$

$$\begin{cases} f^{-1}C = \bigcup_{i \in I} F_i \cap f^{-1}C = \bigcup_{i \in I} (f|_{F_i})^{-1}C \\ (f|_{F_i})^{-1}C \subset F_i \subset X \Rightarrow (f|_{F_i})^{-1}C \subset X \end{cases} \Rightarrow f^{-1}C \subset X$$

Por unión finita de cerrados.

Homeomorfismos

Recordemos las definiciones de continuidad que hemos visto:

$$f \text{ continua} \Leftrightarrow f^{-1}(\text{abierto}) = \text{abierto} \Leftrightarrow f^{-1}(\text{cerrado}) = \text{cerrado}$$

Ahora veamos que ocurre al invertir la relación.

Definición

Sea $f : X \rightarrow Y$, será $\begin{cases} \text{abierto} \\ \text{cerrado} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\text{ab}) = \text{ab} \\ f(\text{cerr}) = \text{cerr} \end{cases}$

Observación:

Cuidado: Continuidad no implica que sea abierta, cerrada ni viceversa.

Ejemplo:

1. $Id : X_{\text{trivial}} \rightarrow X_{\text{discreta}}$, -cont. +ab. +cerr.
2. $Id : X_{\text{discreta}} \rightarrow X_{\text{trivial}}$, +cont. -ab. -cerr.

3. $j : [0, 1] \subset \mathbb{R}_u$, +cont. -ab. +cerr.
4. $j : (0, 1) \subset \mathbb{R}_u$, +cont. +ab. -cerr.

Proposición (Trivialidades esenciales)

Sea f biyectiva, es equivalente:

- f es abierta
- f es cerrada
- f^{-1} es continua.

Demostración:

1. $F_{\text{cerr}} \subset X \Rightarrow X \setminus F_{\text{ab}} \subset X \Rightarrow f^{\text{ab}} \underbrace{f(X \setminus F)}_{=Y \setminus f(F)(\text{biy.})} \subset_{\text{ab}} X \Rightarrow f(F) \subset_{\text{cerr}} Y \Rightarrow f \text{ cerr.}$
2. $F_{\text{cerr}} \subset X \Rightarrow f^{\text{cerr}} \underbrace{f(F)}_{=(f^{-1})^{-1}(F)(\text{biy})} \subset_{\text{cerr}} Y \Rightarrow f^{-1} \text{ cont.}$
3. $U_{\text{ab}} \subset X \Rightarrow f^{-1 \text{ cont}} \underbrace{(f^{-1})^{-1}(U)}_{f(U)(\text{biy.})} \subset Y \Rightarrow f \text{ ab.}$

Definición

Sea $f : X \rightarrow Y$ biyectiva, es homeomorfismo si f & f^{-1} son continuas, o equivalentemente si:

$$\begin{cases} f \text{ biy.} \\ \text{cont.} \\ \text{ab.} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ biy.} \\ \text{cont.} \\ \text{cerr.} \end{cases}$$

Definición (Localización de un homeomorfismo)

Sea $f : X \rightarrow Y$, es homeomorfismo local en $x_0 \in X$ si $f : V^{x_0} \rightarrow V^{f(x_0)}$ es homeomorfismo para entornos de x_0 y $f(x_0)$. Se suele decir para entornos “suficientemente pequeños”.

Ejercicio: Se pueden tomar $V^{x_0}, V^{f(x_0)}$ abiertos.

Observación:

Un homeomorfismo local es abierto.

Demostración:

$U \subset_{\text{ab}} X \Rightarrow f(U)$ entorno $\forall y_0 = f\left(\underbrace{\in U}_{x_0}\right) \in f(U)$. Como f homeomorfismo local $\Rightarrow f| : V^{x_0} \rightarrow V^{y_0}$ es homeomorfismo $\Rightarrow f\left(\underbrace{\ni y_0=f(x_0)}_{\overline{U \cap V^{x_0}}}\right) \subset_{\text{ab}} V^{y_0} \Rightarrow f\left(\underbrace{\subset f(U)}_{\overline{U \cap V^{x_0}}}\right)$ entorno de $y_0 \Rightarrow f(U)$ entorno de y_0 .

Ejemplo: (¡Importantes!)

1. Proyección estereo? $\mathbb{S}^m \setminus \{\text{punto}\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ homeomorfismo.
2. Proyección exponencial $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 : \theta \mapsto e^{2\pi i \theta} = (\cos 2\pi \theta, \sin 2\pi \theta)$, homeomorfismo local.

3. Proyección antipodal: $\mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{R}P^m : x \mapsto [x]$ homeomorfismo local.
4. Lemniscata: $f : \mathbb{R} \rightarrow X \subset \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4} \right)$ es biy. cont, pero no homeomorfismo local.

Engañosamente:

$$\forall t \in \mathbb{R} \exists (t - \varepsilon, t + \varepsilon) = I_\varepsilon : f| : I_\varepsilon \rightarrow f(I_\varepsilon)$$

es homeomorfismo.

En $t = 0$, $f(I_\varepsilon)$ no es entorno de $f(0) = (0, 0)$.

Definición

Una variedad topológica de dim m es un espacio localmente homeomorfo a \mathbb{R}^m , es decir, cada punto tiene un entorno abierto homeomorfo a una bola $B(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^m$ (luego a cualquier bola, luego a todo \mathbb{R}^m).

Ejemplo:

Esferas, espacios proyectivos, toros...

Construcciones

Imágenes inversas

Problema: Hacer $f : Y \rightarrow (X, \mathcal{T})$ continua con $\begin{cases} \text{top. discreta en } Y \text{ (matricialidad)} \\ \text{top. menos fina en } Y \end{cases}$

Sol: $f^{-1}\mathcal{T} = \{f^{-1}U : U \in \mathcal{T}\}$ top. imagen inversa.

1. Es topología (inm.)
2. Es mínima. [f es continua $\Rightarrow \forall f^{-1}U$ es abierto]

Teorema (Caracterización imagen inversa)

1.

$$\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T} \Leftrightarrow \forall g [g \text{ cont.} \Leftrightarrow f \circ g \text{ cont.}] \quad (3.1)$$

2. Y.

$$\begin{array}{ccc} (Y, \mathcal{C}') & \xrightarrow{f} & (X, \mathcal{C}) \\ g \uparrow & & \uparrow f \circ g \\ (Z, \mathcal{C}'') & & \end{array}$$

Demostración:

1. $\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T}$:

- $g \text{ cont.} \Rightarrow f \circ g \text{ cont.}$ (Composición de continuas)
- $f \circ g \text{ cont.} \Rightarrow g \text{ cont.}$ ($V \in \mathcal{T}' \Rightarrow g^{-1}V \stackrel{\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T}}{=} g^{-1}f^{-1}U = (f \circ g)^{-1}U \stackrel{f \circ g \text{ cont.}}{\in} \mathcal{T}''$)

2. Por otro lado,

$$\begin{array}{ccc} (Y, \mathcal{C}') & \xrightarrow{f} & (X, \mathcal{C}) \\ \text{Id} \uparrow \text{cont.} & & \uparrow f \circ \text{Id} \\ (Y, \mathcal{C}') & \xrightarrow{f \text{ cont.}} & (X, \mathcal{C}) \end{array}$$

$\mathcal{C}' \supset \mathcal{C}$ es la menor fina

Ejercicio: Demostrar (ii) sin usar que $f^{-1}\mathcal{T}$ es la menos fina (usar que cumple la caracterización).

La anterior caracterización se llama propiedad universal.

Caso esencial:

$$\boxed{f : Y \rightarrow X \text{ inyectiva}}$$

Definición

Una aplicación continua inyectiva $f : (Y, \mathcal{T}') \rightarrow (X, \mathcal{T})$ tal que $\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T}$ se llama inmersión (se suelen omitir las topologías).

Observación:

$$1. \mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T} \Leftrightarrow (Y, \mathcal{T}') \xrightarrow{\text{homeomorfismo}} (f(Y), \mathcal{T}|_{f(Y)})$$

$$[V \in f^{-1}\mathcal{T} \Leftrightarrow V = f^{-1} \underbrace{U}_{\mathcal{T}} = f^{-1} \left(\underbrace{U \cap f(Y)}_{\mathcal{T}|_{f(Y)}} \right)]$$

$$2. f : Y \rightarrow X \text{ 1-1 cont.} + \begin{cases} \text{ab.} \Rightarrow \text{inmersión} [\text{ab. en } X \Rightarrow \text{ab. en } f(Y)] \\ \text{cerr.} \Rightarrow \text{inmersión} [\text{cerr. en } X \Rightarrow \text{cerr. en } f(Y)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(Y) \xrightarrow{\text{ab.}} X : V = f^{-1}U \in f^{-1}\mathcal{T} \Rightarrow fV = U \cap f(Y) \in \mathcal{T} \text{ (inter. abierto)} \\ f(Y) \xrightarrow{\text{cerr.}} X : C \subset f^{-1}\mathcal{T} \Rightarrow Y \setminus C = f^{-1}U \in f^{-1}\mathcal{T} \Rightarrow f(C) \subset (X \setminus U) \cap f(Y) \xrightarrow{\text{cerr.}} X \text{ i. c.} \end{cases}$$

3. Tenemos:

- Inmersión + ab. + \not cerr.
- Inmersión + ab. + cerr.
- Inmersión + ab. + cerr.

Observación:

Las inmersiones permiten considerar unos espacios como subespacios de otros. Las frases “el plano proyectivo real no es un subespacio de \mathbb{R}^3 ”, “la esfera no es un subespacio de \mathbb{R}^2 ”, “el plano proyectivo real es un subespacio de \mathbb{R}^4 ” se refieren a esto: cuándo hay o no hay una inmersión del primer espacio en el segundo, es decir, un subespacio del segundo homeomorfo al primero. Es un problema fundamental de la topología y de la geometría.

Imágenes directas

Problema: Hacer $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow Y$ continua en $\begin{cases} \text{top. trivial en } Y \text{ (matrivialidad)} \\ \text{top. más fina en } Y \end{cases}$

Sol: $f\mathcal{T} = \{V \subset Y : f^{-1}V \in \mathcal{T}\}$ top. imagen directa.

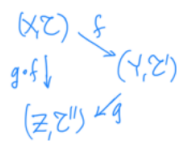
1. Es topología (inm.)
2. Máxima [f es continua $\Leftrightarrow \forall f^{-1}V$ es abierto]

Teorema (Caracterización imágenes directas)

1.

$$\begin{aligned} \mathcal{T}' &= f\mathcal{T} \Leftrightarrow \\ \forall g [g \text{ cont.} &\Leftrightarrow g \circ f \text{ cont.}] \end{aligned} \tag{3.2}$$

2. Y .

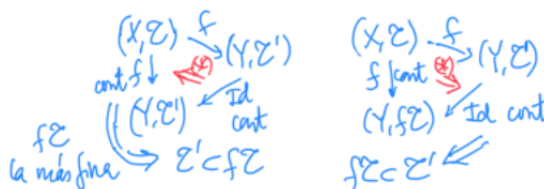


Demostración:

1. $\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T}$:

- g cont. $\Rightarrow g \circ f$ cont. (Composición de continuas)
- $g \circ f$ cont. $\Rightarrow g$ cont. ($W \in \mathcal{T}'' \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}W) = \underbrace{(g \circ f)^{-1}}_{\text{cont.}} W \in \mathcal{T} \xrightarrow{\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T}} g^{-1}W \in \mathcal{T}'$)

2. Por otro lado,



Ejercicio: Demostrar (ii) sin usar que $f\mathcal{T}$ es la más fina (usar que cumple la caracterización)

La caracterización anterior se llama propiedad universal.

Observación:

$f(X)$ es abierto y cerrado en $f\mathcal{T}$: $\begin{cases} \forall y \in Y \setminus f(X), f^{-1}y = \emptyset \in \mathcal{T} \Rightarrow \{y\} \in f\mathcal{T} \\ f^{-1}f(X) = X \in \mathcal{T} \Rightarrow f(X) \in f\mathcal{T} \end{cases}$

Caso esencial:

$$f : X \rightarrow Y \text{ sobreyectiva.}$$

Para entender los abiertos de una imagen directa es conveniente representarlos en el dominio. El concepto es conjuntista en realidad:

Definición

Un conjunto $A \subset X$ es saturado (respecto de f) si $f^{-1}f(A) = A$.

Proposición

Los abiertos de $f\mathcal{T}$ son las imágenes de los abiertos saturados de \mathcal{T} .

Demostración:

1. $V \in f\mathcal{T} \Rightarrow f^{-1}V \in \mathcal{T}$ y $V \stackrel{f \text{ sobre}}{=} f^{-1}fV$
2. $U \in \mathcal{T}$, saturado $\Rightarrow f(U) = V \in f\mathcal{T} : f^{-1}V = f^{-1}f(U) \stackrel{U \text{ sat.}}{=} U \in \mathcal{T}$

Observación:

Los abiertos no saturados de X pueden tener imágenes no abiertas de Y .

Ejemplo:

1. $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1 = Y : t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = \exp(2\pi it)$

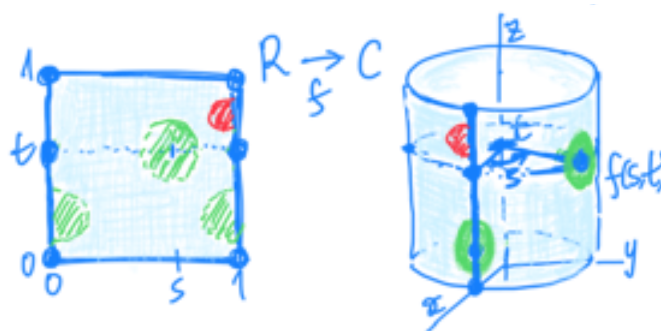


La topología imagen directa es la usual en S^1 .

2. Tenemos:

$$f : R = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow C \subset \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1$$

$$(s, t) \mapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, t).$$



Analizando los abiertos saturados y no saturados se concluye que la topología imagen directa es la usual en el tronco del cilindro.

Definición

Una aplicación continua sobre $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ tal que $\mathcal{T}' = f\mathcal{T}$ se llama identificación (se suelen omitir las topologías)

Observación:

1. Identificación: $V \overset{\text{ab}}{\subset} Y \Leftrightarrow f^{-1}V \overset{\text{ab}}{\subset} X$

Continua: $V \overset{\text{ab}}{\subset} Y \Rightarrow f^{-1}V \overset{\text{ab}}{\subset} X$

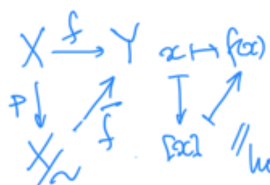
2. Sea $f : X \rightarrow Y$ sobre. continua. Si además es:

■ Abierta $\Rightarrow f$ es identificación [por (1)]

■ Cerrada $\Rightarrow f$ es identificación $[f^{-1}V \overset{\text{ab}}{\subset} X \overset{+}{\Rightarrow} f \left(\underbrace{X \setminus f^{-1}(V)}_{=Y \setminus V} \right) \overset{\text{cerr.}}{\subset} Y \Rightarrow V \overset{\text{ab}}{\subset} Y]$

Definición (Cociente)

Dentro de las identificaciones tenemos un caso particular: $(X, \mathcal{T}) \xrightarrow{p} Y = \underbrace{X / \sim}_{p\mathcal{T}=\text{top. cociente}}$. Cociente respecto de una relación de equivalencia en X .



Tenemos que $x_1 \sim x_2 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(x_1) = f(x_2)$. Homeomorfismo de $p\mathcal{T}$ sobre $f\mathcal{T} \Leftrightarrow f$ identificación tal que:

$$\begin{cases} \bar{f} \text{ es biyección} \\ p^{-1}V = f^{-1}\bar{f}V \text{ y } f^{-1}W = p^{-1}\bar{f}^{-1}W \end{cases}$$

Política general:

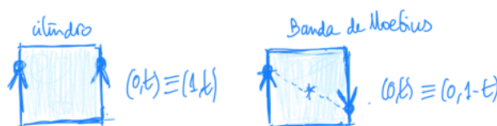
Los cocientes son cómodos para definir espacios, las identificaciones son mejores para estudiar las propiedades que tenemos. Conviene pues tener triángulos como el anterior. Se puede contemplar Y como un modelo del cociente.

Ejemplo: (Anteriores)

La circunferencia y el cilindro como cocientes:



Para representar cocientes se utilizan dibujos que indican las identificaciones en los espacios de partida:



Productos (finitos)

Problema: Hacer $X_1 \times \dots \times X_r = Y \xrightarrow{p_i} (X_i, \mathcal{T}_i), 1 \leq i \leq r$ continuas con

$$\begin{cases} \text{top. discreta en } Y \text{ trivialidad} \\ \text{top. menos fina en } Y \end{cases}$$

Solución: p_i cont. $\Rightarrow p_i^{-1} \underbrace{U_i}_{\mathcal{T}_i} = \underbrace{X_1 \times \dots \times U_i \times \dots \times X_r}_{\text{deben ser abiertos}} \Rightarrow \bigcap_i p_i^{-1} U_i = \underbrace{U_1 \times \dots \times U_r}_{\text{abiertos}}$ pero no son topología \Rightarrow

$\mathcal{B} = \{U_1 \times \dots \times U_r : U_i \in \mathcal{T}_i\}$ es la base de la topología producto: $\prod_i \mathcal{T}_i$

Ejemplo:

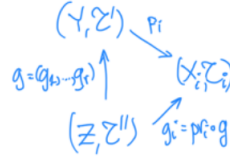
La \mathcal{T}_u en \mathbb{R}^n es el producto de la usual en cada factor \mathbb{R} de \mathbb{R}^n . La base de la definición de topología producto está formada por las “bolas cuadradas”.

Teorema (Caracterización topología producto)

1.

$$\mathcal{T}' = \prod_i \mathcal{T} \Leftrightarrow \forall g [g \text{ cont.} \Leftrightarrow \forall g_i \text{ cont.}] \quad (3.3)$$

2. Y .

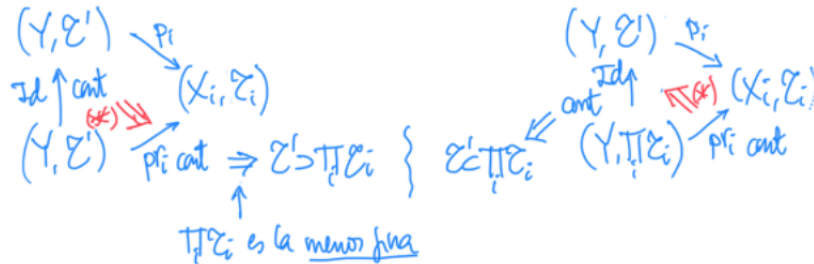


Demostración:

1. $\mathcal{T}' = \prod_i \mathcal{T}$:

- $g \text{ cont.} \Rightarrow g_i \text{ cont.}$ (Composición de continuas)
- $g_i \text{ cont.} \Rightarrow g^{-1}(U_1 \times \dots \times U_r) = \underbrace{g_1^{-1}(U_1)}_{\mathcal{T}''} \cap \dots \cap \underbrace{g_r^{-1}(U_r)}_{\mathcal{T}''} \in \mathcal{T}''$ (intersección finita de abiertos)

2. Por otro lado,



Ejemplo:

Demostrar (ii) sin usar que $\prod_i \mathcal{T}_i$ es la menos fina (usar que cumple la caracterización)

La anterior caracterización se llama propiedad universal.

Proposición

1. $p_i : Y \rightarrow X_i$ es abierta. $[p_i(U_1 \times \dots \times U_r) = U_i]$
2. $X_j \xrightarrow{\alpha_j} Y : x_j \mapsto (a_1, \dots, x_j, \dots, a_r)$ es inmersión ($a_i \in X_i$ fijados).

$$\left[\begin{array}{l} \alpha_j(X_j) = \{a_1\} \times \dots \times X_j \times \dots \times \{a_r\} \\ \alpha_j(U_j) = \{a_1\} \times \dots \times U_j \times \dots \times \{a_r\} = \alpha(X_j) \cap (X_1 \times \dots \times U_j \times \dots \times X_r) \end{array} \right]$$

Política general:

En una topología producto “todo se genera en productos”.

Ejemplo:

- Bases de entornos: $\mathcal{V}^a = \mathcal{V}^{a_1} \times \dots \times \mathcal{V}^{a_r} \stackrel{mut??}{=} \{V_1 \times \dots \times V_r : V_i \in \mathcal{V}^{a_i}\} (a \in Y)$.
- Base de abiertos: $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_r = \{B_1 \times \dots \times B_r : B_i \in \mathcal{B}_i\}$ (esto repite la construcción de $\prod_i \mathcal{T}_i$)

Sumas (finitas)

Problema: Hacer $(X_i, \mathcal{T}_i) \xrightarrow{e_i} Y = X_1 + \dots + X_r = (X_1 \times \{1\}) \cup \dots \cup (X_r \times \{r\}), 1 \leq i \leq r : x_i \mapsto (x_i, i)$ continuas, con

$$\begin{cases} \text{top. trivial en } Y \text{ mativialidad} \\ \text{top. más fina en } Y \end{cases}$$

Solución: $\underbrace{U_i}_{\mathcal{T}_i} \in e_i^{-1}(U_i \times \{i\}) \Rightarrow \mathcal{B} = \{U_1 \times \{1\}, \dots, U_r \times \{r\} : U_1 \in \mathcal{T}_1, U_r \in \mathcal{T}_r\}$ es base de una topología en Y , la topología suma: $\mathcal{T}_1 + \dots + \mathcal{T}_r$.

Proposición

$\forall i, e_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \rightarrow (X_i \times \{i\}, \mathcal{T}|_{X_i \times \{i\}})$ es *inmersión abierta y cerrada*.

Demostración:

- Inmersión abierta: $e_i(U_i) = U_i \times \{i\} \in \mathcal{T}$
- Cerrada: $Y \setminus e_i(X_i) = Y \setminus X_i \times \{i\} = \bigcup_{j \neq i} X_j \times \{j\} \in \mathcal{T}$

Teorema (Caracterización topología suma)

1.

$$\mathcal{T}' = \mathcal{T}_1 + \dots + \mathcal{T}_r \Leftrightarrow$$

$$\forall g [g \text{ cont.} \Leftrightarrow \forall g_i \text{ cont.}] \text{ (Propiedad universal)} \quad (3.4)$$

2. Y.

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{e_i} & (Y, \mathcal{T}) \\ (X_i, \mathcal{T}_i) & \searrow & \downarrow g \\ & \xrightarrow{g|_{X_i} = g \circ e_i} & (Z, \mathcal{T}') \end{array}$$

Demostración:

Análoga a las anteriores construcciones.

Política general:

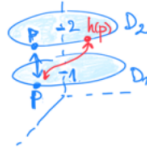
Localmente $Y = X_1 + \dots + X_r$ es como sea cada X_i . Por ejemplo, las bases de entornos de Y son las de los sumandos. Globalmente, se trata cada sumando separadamente. Por ejemplo, las bases de abiertos de los sumandos se unen para dar una base de abiertos de Y . Olvidando el tecnicismo $X_i \times \{i\} \equiv X_i$:

Y es unión disjunta de los sumandos
Los sumando son subespacios abiertos y cerrados de Y

Es un formalismo para hacer cómodamente otras construcciones. Por ejemplo, “pegar dos discos por sus bordes” sería:

$$\text{disco } D \subset \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \text{ borde } \partial D = \mathbb{S}^1 : x^2 + y^2 = 1$$

$$D_1 + D_2 / \sim \quad \overbrace{(p, 1)}^{\partial D} \sim (p, 2).$$



y más elaborado $h : \partial D \xrightarrow{\text{homeo.}} \partial D$ con $\overbrace{p}^{\in \partial D} \sim h(p)$.

Finalmente, hay otros conceptos de “suma” más significativos que veremos en algún ejemplo.

Espacios proyectivos reales

Como vimos en geometría lineal tenemos que:

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{P}^n = \mathbb{R}^{nH} \setminus \{0\} / \underbrace{\sim}_{\text{Prop.}} \Rightarrow \mathbb{P}^n = \{\text{rectas vectoriales de } \mathbb{R}^{n+1}\}$$

Que en coordenadas es:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^{nH} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{P}^n \\ (x_0, \dots, x_n) &\mapsto (x_0 : \dots : x_n). \end{aligned}$$

Las ecuaciones serán de la forma: $h \in \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]$ homogénea $\Rightarrow \begin{cases} h(x) = 0 \\ h(x) \neq 0 \end{cases}$ está bien definido en \mathbb{P}^n .

$$\left. \begin{array}{l} \cdot \text{Variedades proyectivas lineales} \\ \cdot \text{Variedades proyectivas} \\ \cdot \text{Variedades proyectivas algebraicas} \end{array} \right\} \text{ecuaciones homogéneas de grado: } \begin{cases} 1 \\ 2 \\ \text{arbitrario} \end{cases}$$

Cartas afines:

$$\begin{aligned} \underbrace{H \subset \mathbb{P}^n}_{\text{hiperplano proyectivo}} &\rightarrow \underbrace{\hat{H} \subset \mathbb{R}^{n+1}}_{\text{hiperplano lineal}} : \underbrace{h=0}_{\text{forma lineal}}, H = \hat{H} \setminus \{0\} / \sim \\ \pi| : \underbrace{\{h=1\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}_{\text{hiperplano afín}} &\rightarrow \underbrace{\mathbb{P}^n \setminus H}_{\{h \neq 0\}} = 0 \text{ es biyección..} \end{aligned}$$

Terminología: H es hiperplano del infinito de la carta afín U .

Topología en U : La imagen directa de la usual en $\{h=1\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \Rightarrow \pi| : \{h=1\} \rightarrow U$ homeomorfismo.

Topología en \mathbb{P}^n :

- Cociente de la usual vía $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n : (x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0 : \dots : x_n)$
- “Suma” de las definidas en las cartas afines:

$$W \text{ abierto si } W \cap U \text{ es abierto } \forall U \text{ carta afín. [Es top. en } \mathbb{P}^n]$$

Estas dos topologías coinciden.

Demostración:

1. U es abierto en la top. cociente. $[\pi^{-1}U = \{h \neq 0\}$ abierto usual]

2. La topología cociente en U coincide con la topología de carta afín:

$$\begin{array}{ccc}
 W \subset U : \pi^{-1}W = \text{cono sobre } (\pi^{-1}W) \cap \{h=1\} & & \\
 \uparrow \text{ por la top. cociente} & \Downarrow & \leftarrow \text{ por la top. de carta afín.} \\
 \pi^{-1}W \subset \mathbb{R}^{n+1} & \cong & (\pi^{-1}_{h=1})^{-1}W \subset \{h=1\} \\
 \uparrow \text{ } & & \uparrow \text{ } \\
 W \text{ ab top. cociente} & & W \text{ ab top. carta afín}
 \end{array}$$

1. + 2. \Rightarrow La top. cociente está generada por las topologías de las cartas afines, que forman un recubrimiento abierto de \mathbb{P}^n .

Observación:

De lo anterior deducimos:

1. U_1, U_2 dos cartas afines $\Rightarrow U_1 \cap U_2$ abiertos.

$$\left[\text{Cartas afines: } U_i = \{h_i \neq 0\} \left\{ \begin{array}{l} \pi|_{\{h_i=1\}} : \{h_i=1\} \rightarrow U_i \text{ homeo.} \\ (\pi_1)^{-1}(U_1 \cap U_2) = \{h_1=1, h_2 \neq 0\} \subset^{\text{ab.}} \{h_1=1\} \end{array} \right. \right]$$

2. Las topologías de U_1 y U_2 coinciden en $U_1 \cap U_2$.

[De nuevo conviene entenderlo con cartas:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^{n+1} = \{h_1=1, h_2 \neq 0\} & \xrightarrow{\text{homeo para } U_1} & U_1 \cap U_2 \\
 \uparrow \text{ homeo? } & & \uparrow \text{ homeo para } U_2 \\
 \mathbb{R}^{n+1} = \{h_2=1, h_1 \neq 0\} & \xrightarrow{\text{homeo para } U_2} & U_1 \cap U_2
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{ccc}
 \text{esp. abto} & & x = y/h_1(y) \\
 \uparrow \text{ } & & \uparrow \text{ homeo, univ. } \checkmark \\
 y = x/h_2(x) & &
 \end{array}$$

Atlas afín canónico: No se suelen utilizar todas las cartas afines: $n+1$ distintas ya cubren \mathbb{P}^n . Típicamente $\mathbb{P}^n = U_0 \cup \dots \cup U_n$ con:

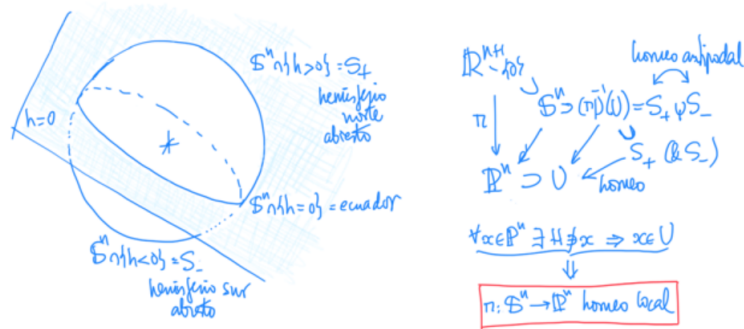
$$U_i = \{x_i \neq 0\} \leftrightarrow \underbrace{\{x_i = 1\}}_{\cong \mathbb{R}^n} : (x_0 : \dots : x_i : \dots : x_n) \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \overbrace{1}^{\mathbb{R}^n \rightarrow}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right), 0 \leq i \leq n$$

Cociente antipodal: Toda recta de \mathbb{R}^{n+1} corta a $S^n : x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1$ en dos puntos antipodales, así que denotamos un “sub” cociente, que es también identificación.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & & S^n \\
 \downarrow & \swarrow \pi & \downarrow \\
 \mathbb{P}^n & & \text{cociente antipodal de } S^n
 \end{array}$$

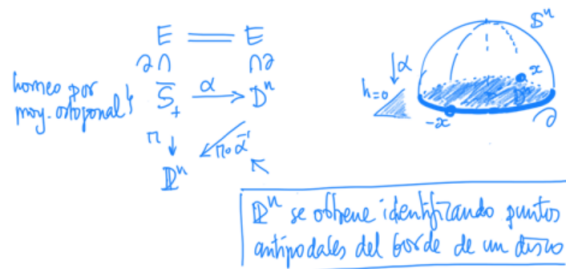
$$\left[\text{Como antes tenemos conos: } \pi^{-1}W = \text{cono sobre } \underbrace{S^n \cap \pi^{-1}W}_{=(\pi/S^n)^{-1}W} \right]$$

Las cartas afines tienen una representación muy conveniente:



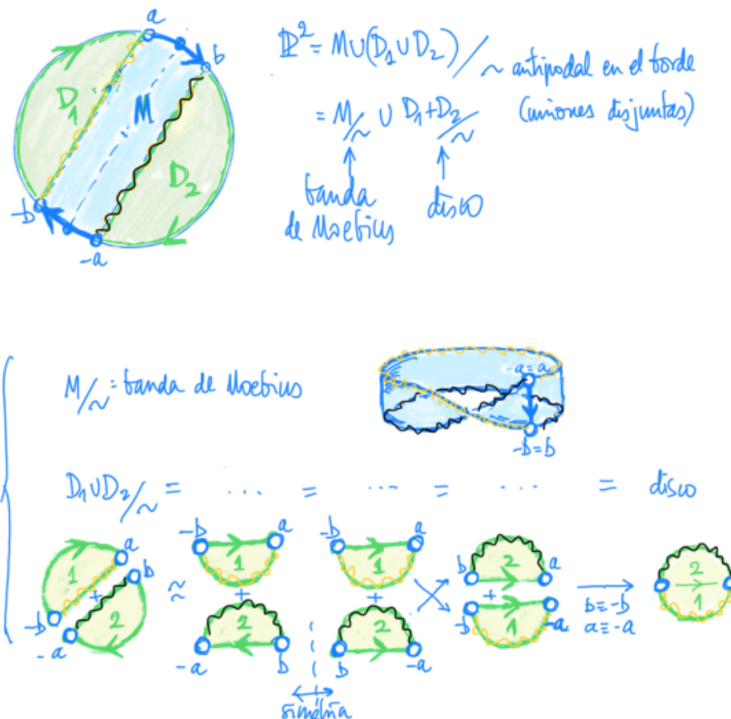
Cociente de un disco:

$$E = \{h = 0, x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\} = \partial \begin{cases} \bar{S}_+ = S^n \cap \{h \geq 0\} \text{ hemisferio cerrado.} \\ D^n = \{h = 0, x_0^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\} \text{ disco.} \end{cases}$$



Ejemplo:

$\mathbb{P}^2 \setminus D^2 = \text{banda de Möbius.}$



Separación

Concepto

Definición

Un espacio X es Hausdorff o T_2 si cada par de puntos distintos $x, y \in X$ tienen entornos disjuntos: $V^x \cap V^y = \emptyset$.

Hay otras formas de separación, más débiles o más fuertes, pero nos contentaremos con ésta al ser la más intuitiva.

Observación:

1. Si existen entornos disjuntos, existen entornos abiertos disjuntos $[\forall V \supset U]$
2. Si X es Hausdorff, los puntos son cerrados.

$$\left[\forall y \neq x, \exists U^y \not\ni x \Rightarrow X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} U^y \text{ es abierto.} \right]$$

3. (X, \mathcal{T}_{CF}) no es Hausdorff: dos abiertos cualesquiera se cortan (X infinito) tiene puntos cerrados: $X \setminus \{x\}$ es abierto.
4. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es Hausdorff: $x \neq y \Rightarrow B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$ si $\varepsilon \leq \|x - y\|/2$
5. En (X, \mathcal{T}_a) el punto a no es cerrado: $a \notin X \setminus \{a\} \Rightarrow X \setminus \{a\}$ no es abierto. $\forall x \neq a \forall U^x \supset \{a, x\} \ni a$!!!.

Proposición

Sean $f, g : X \rightarrow Y$ continuas con Y Hausdorff $\Rightarrow \{f = g\} = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es cerrado.

Demostración:

1. $f(x) \neq g(x) \xrightarrow{T_2} \exists V^{f(x)} \cap V^{g(x)} = \emptyset \xrightarrow{\text{cont.}} f^{-1}V^{f(x)} \cap g^{-1}V^{g(x)} = V^x$ entorno de x .
 2. $V^x \cap \{f = g\} = \emptyset : y \in V^x \Rightarrow \begin{cases} f(y) \in V^{f(x)} \\ g(y) \in V^{g(x)} \end{cases} \Rightarrow f(y) \neq g(y)$
1. + 2. $X \setminus \{f = g\} = \{f \neq g\}$ es entorno de todos sus puntos, luego abierto, luego $\{f = g\}$ es cerrado.

Corolario

Si $f = g$ es un subconjunto denso, entonces $f \equiv g$

Demostración:

$$\exists \bar{A} = X : f|_A = g|_A \Rightarrow \{f = g\} \supset A \xrightarrow{\text{prop.}} \{f = g\} \supset \bar{A} = X.$$

Caso particular importante: Funciones $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Observación:

$$f : X \rightarrow \underbrace{Y}_{\in T_2} \text{ continua} \Rightarrow f^{-1}(Y) \text{ cerrado } \forall y \in Y.$$

Porque los puntos de Y son cerrados y, de hecho, eso basta.

Tabla de comportamiento

Se trata de saber si la propiedad se conserva por las construcciones conocidas.

Se tiene:

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
T_2	✓	×	✓	✓

$$1. Y \subset X = T_2 : y_1, y_2 \in Y \Rightarrow \exists \underbrace{V^{y_1}}_{\text{En } X} \cap V^{y_2} = \emptyset \Rightarrow \underbrace{(V^{y_1} \cap Y)}_{\text{En } Y} \cap (V^{y_2} \cap Y) = \emptyset.$$

$$2. Y = \mathbb{R}/\mathbb{Q} : \left. \begin{array}{l} y_1 = \mathbb{Q} \in Y \\ y_2 = \sqrt{2} \in Y \end{array} \right\} \nexists V^{y_1} \cap V^{y_2} = \emptyset : \text{todo entorno abierto de } \sqrt{2} \text{ contiene racionales,} \\ \text{luego al saturar, contiene } \mathbb{Q}.$$

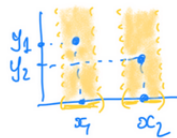
$$3. X \text{ y } Y \text{ ambos } T_2 \Leftrightarrow X \times Y T_2.$$

\Rightarrow)

$$(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \in X \times Y \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 \neq x_2 \Rightarrow \exists V^{x_1} \cap V^{x_2} = \emptyset \Rightarrow (V^{x_1} \times Y) \cap (V^{x_2} \times Y) = \emptyset \\ \text{ó} \\ y_1 \neq y_2 \Rightarrow \exists V^{y_1} \cap V^{y_2} = \emptyset \Rightarrow (V^{x_1} \times V^{y_1}) \cap (V^{x_2} \times V^{y_2}) = \emptyset \end{array} \right.$$

\Leftarrow)

$$X \approx X \times \{y_0\} \subset X \times Y, T_2 \xrightarrow{1} X \times \{y_0\} T_2 \Rightarrow X T_2$$



$$4. X \text{ y } Y \text{ ambos } T_2 \Leftrightarrow X + Y T_2$$

Único comentario: $x \in X$ y $y \in Y \Rightarrow X = V^x, Y = V^y$ y $X \cap Y = \emptyset$.

Numerabilidad

Compacidad

Compacidad local

Conexión

Componentes conexas y conexión local

Conexión por caminos

Componentes conexas por caminos y conexión local por caminos

Homotopía

Homotopía por caminos

El grupo fundamental

Retractus

Recubridores

Cálculos mediante recubridores

Aplicaciones en dimensión 2

Más aplicaciones por el mismo precio

Superficies

Clasificación de superficies

Grande finale
