INFO0501

ALGORITHMIQUE AVANCÉE

COURS 5

STRUCTURES DE DONNÉES DYNAMIQUES
TABLES DE HACHAGE ET ARBRES BINAIRES DE RECHERCHE

Pierre Delisle
Département de Mathématiques, Mécanique et Informatique
Novembre 2019

Plan de la séance

- Structures de données dynamiques élémentaires
- Tables de hachage
- Arbres binaires de recherche
- Arbres rouge et noir

- Bibliographie
  - T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein, "Algorithmique", 3e édition, Dunod, 2010

Structures de données dynamiques élémentaires

- Ensemble
  - Notion fondamentale en informatique
- Ensembles dynamiques
  - Peuvent croître, diminuer et subir des modifications au cours du temps
- Principales opérations sur les ensembles
  - Insérer
  - Supprimer
  - Tester l'appartenance
- Un ensemble qui supporte ces trois opérations est appelé **dictionnaire**
- La meilleure implémentation d'un ensemble dynamique dépend des opérations qu'il doit reconnaître

- Implémentation classique
  - Chaque élément est représenté par un objet
  - Attributs manipulés par un pointeur vers l'objet
- Clé
  - Attribut qui sert à identifier l'objet et à implémenter l'ensemble
- Données satellites
  - Attributs qui servent à stocker les autres données de chaque objet de l'ensemble

Opérations sur les ensembles dynamiques

Requêtes

- RECHERCHER (S, k)
  - Étant donnés un ensemble S et une valeur de clé k
  - … retourne un pointeur x sur un élément de S tel que $x.clé = k$ ou NIL si l'élément n'appartient pas à S
- MINIMUM (S)
  - Retourne l'élément de S (totalement ordonné) ayant la plus petite clé
- MAXIMUM (S)
  - Retourne l'élément de S (totalement ordonné) ayant la plus grande clé
- SUCCESSEUR (S, x)
  - Étant donné un élément x dont la clé appartient à S (totalement ordonné), retourne le prochain élément de S qui est plus grand que x, ou NIL si x est l'élément maximal
- PRÉDÉCESSEUR (S, x)
  - Étant donné un élément x dont la clé appartient à S (totalement ordonné), retourne le prochain élément de S qui est plus petit que x, ou NIL si x est l'élément minimal

Opérations de modification

- INSERTION (S, x)
  - Ajoute à l'ensemble S l'élément pointé par x
  - Suppose que tous les attributs de l'élément x requis pour la définition de l'ensemble ont déjà été initialisés
- SUPPRESSION (S, x)
  - Étant donné un pointeur x vers un élément de l'ensemble S
  - …élimine x de S
  - Utilise un **pointeur** vers l'élément x et non une valeur de clé

Ensembles dynamiques élémentaires

- Piles, Files, Listes, Arbres

- Supportent certaines opérations de façon plus ou moins efficace, utilisation circonstancielle

- Comment être efficace sur plusieurs opérations en même temps ?
  - Tables de hachage
  - Arbres binaires de recherche
  - …

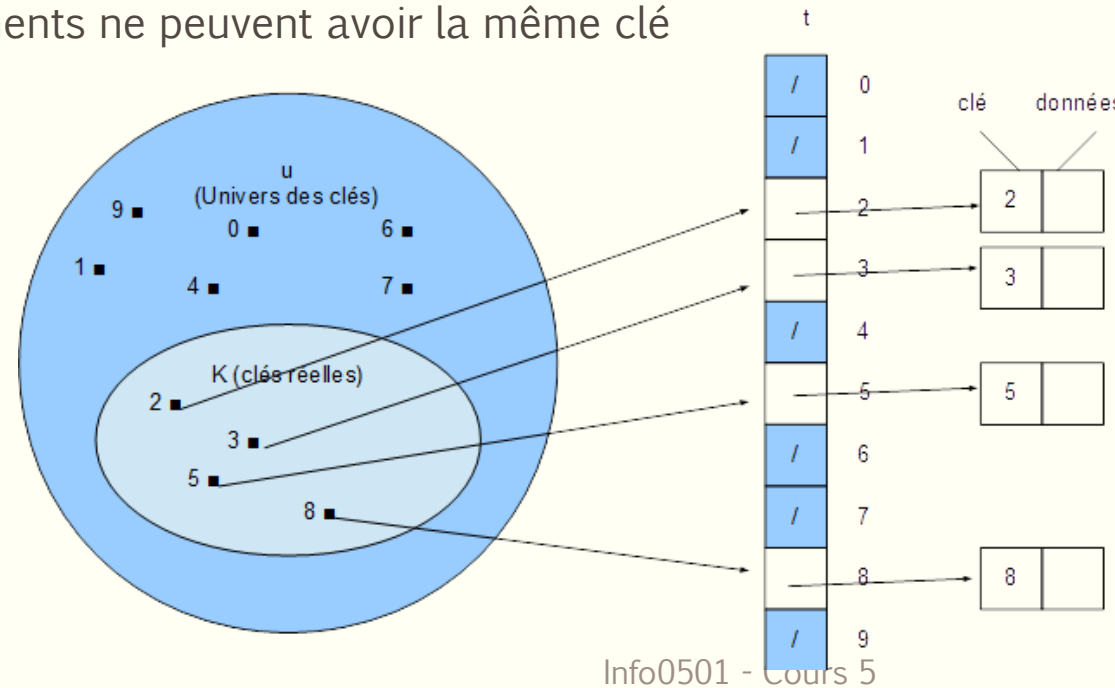
TABLES DE HACHAGE

Table de hachage ?

- Beaucoup d'applications nécessitent des ensembles dynamiques qui ne supportent que
  - INSÉRER, RECHERCHER ET SUPPRIMER
- Implémentation efficace des dictionnaires
  - INSÉRER ET SUPPRIMER → $O(1)$
  - RECHERCHER → $O(n)$ en pire cas
  - … mais on peut obtenir un temps moyen de $O(1)$
- Généralisation de la notion de tableau
  - Tableau → table à adressage direct

Table à adressage direct

- Efficace lorsque l'univers u des clés est raisonnablement petit
- Chaque élément possède une clé prise dans l'univers $u = \{0, 1, \ldots, m - 1\}$
  - où m n'est « pas trop grand »
  - … et deux éléments ne peuvent avoir la même clé
- $u = \{0, 1, .., 9\}$
- $k = \{2, 3, 5, 8\}$



- On utilise un tableau
  - $t[0 .. m - 1]$
  - L'alvéole k pointe sur l'élément ayant pour clé k

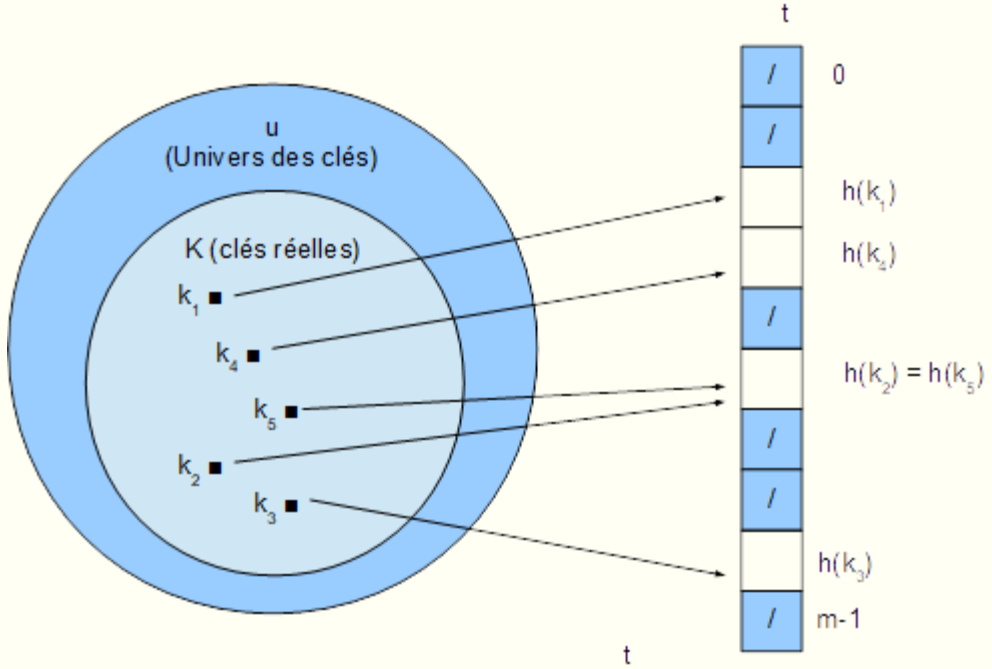
- RECHERCHER-ADRESSAGE-DIRECT (t, k)
- INSÉRER-ADRESSAGE-DIRECT (t, x)
- SUPPRIMER-ADRESSAGE-DIRECT (t, x)

Limites de l'adressage direct

- Si l'univers u est trop grand
  - Gérer une table de taille | u | ???
  - Taille mémoire !!!
- L'ensemble k des clés réellement stockées peut être petit comparé à u
  - Gaspillage de l'espace mémoire
- Solution : table de hachage

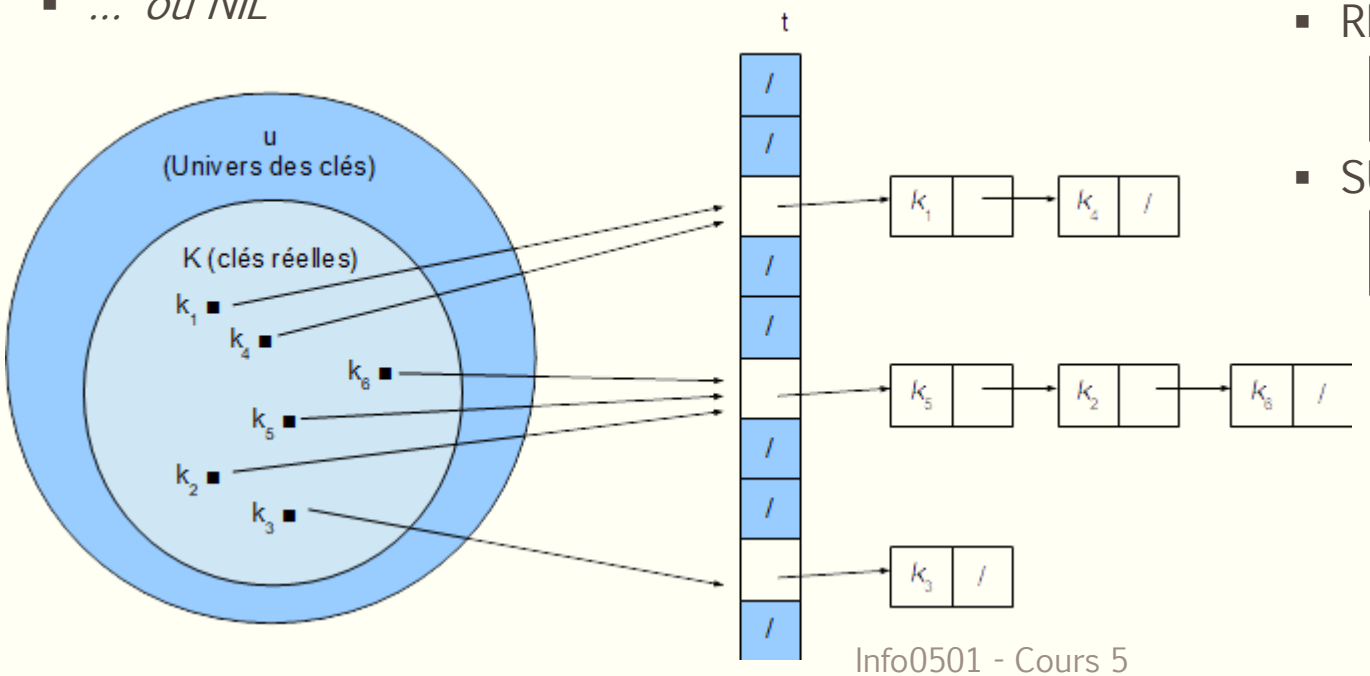
Table de hachage

- Lorsque l'ensemble k des clés stockées est petit comparé à u
  - Requiert moins d'espace de stockage qu'une table à adressage direct
  - … tout en conservant la recherche en $O(1)$ (moyen)
- Élément de clé k
  - Stocké dans l'alvéole $h(k)$
- On utilise une **fonction de hachage** h pour calculer l'alvéole à partir de la clé k
- h établit une correspondance entre l'univers u des clés et les alvéoles d'une table de hachage $t[0 .. m - 1]$
  - m : taille de la table de hachage
  - Un élément de clé k est *haché* dans l'alvéole $h(k)$
- Plusieurs clés peuvent être hachées vers la même alvéole
  - Il y a alors **collision**
- Pour résoudre les collions
  - Techniques de résolution, fonctions de hachage



Résolution des collisions par chaînage

- Éléments hachés vers la même alvéole
  - Insérés dans une même liste chaînée
- L'alvéole *j*
  - Contient un pointeur vers la tête de liste de tous les éléments hachés vers *j*
  - *… ou NIL*



- Exemple 1

- INSÉRER-HACHAGE-CHAINÉE (*t*, *x*)
- RECHERCHER-HACHAGE-CHAINÉE (*t*, *k*)
- SUPPRIMER-HACHAGE-CHAINÉE (*t*, *x*)

Recherche dans une table de hachage avec chaînage

- Table de hachage t
  - … à m alvéoles
  - … qui stocke n éléments
- Facteur de remplissage
  - $\alpha = n / m$ (nb moyen d'éléments d'une chaîne)
- Cas le plus défavorable
  - Les n clés sont hachées dans la même alvéole
  - $O(n)$ + le temps de calcul de la fonction de hachage
- On s'intéresse plutôt au cas moyen

Recherche dans une table de hachage avec chaînage - Cas moyen

- Les performances dépendent de la répartition en moyenne de l'ensemble des clés à stocker
- On suppose que chaque élément a la même chance d'être haché vers une quelconque alvéole
- Pour $j = 0, 1, \ldots, m - 1$
  - Longueur de la liste $t[j] \rightarrow n_j$
  - $n = n_0 + n_1 + \ldots + n_{m-1} \rightarrow$ valeur moyenne de n_j : $E[n_j] = \alpha = n / m$
- Temps requis pour la recherche d'un élément de clé k
  - Dépend linéairement de la longueur de la liste $t[h(k)]$
  - (si la valeur de hachage $h(k)$ peut être calculée en $O(1)$)
- Donc, temps moyen de la recherche
  - Temps de recherche jusqu'à la fin de la liste $t[h(k)]$
  - ... qui a une longueur moyenne $E[n_{h(k)}] = \alpha$
  - = Temps de calcul de $h(k)$ + temps de recherche
  - $= O(1) + O(\alpha) = O(1 + \alpha)$
- Si le nombre d'alvéoles de la table de hachage est au moins proportionnel au nombre d'éléments de la table
  - $n = O(m)$
  - $\alpha = n / m = O(m) / m = O(1)$
- <u>L'efficacité dépend de la fonction de hachage</u>

Fonctions de hachage

- Une bonne fonction de hachage
  - Vérifie l'hypothèse du **hachage uniforme simple**
    - Chaque clé a autant de chances d'être hachée vers l'une quelconque des *m* alvéoles, indépendamment des endroits où sont allées les autres clés
  - Minimise le risque que des valeurs « proches » se retrouvent hachées dans la même alvéole
- 3 fonctions de hachage (il en existe d'autres)
  - Méthode de la division
  - Méthode de la multiplication
  - Hachage universel

Méthode de la division

- On fait correspondre une clé k à l'une des m alvéoles en prenant le reste de la division de k par m
  - $h(k) = k \bmod m$
- Très rapide
  - Une opération de division seulement est requise
- Attention au choix de la valeur de m
  - Ex. 2 : k = {1,7,15,21,27,29,31,35,43,45,59,67} et m = 8/9
- De façon générale
  - Bonne idée → nombre premier pas trop proche d'une puissance de 2

Méthode de la multiplication

- 2 étapes
  - On multiplie la clé k par une constante A de l'invervalle $0 < A < 1$ et on extrait la partie décimale
  - On multiplie la valeur obtenue par m et on prend la partie entière du résultat
- $h(k) = \lfloor m\ (k\ A \bmod 1) \rfloor$
- Choix de la valeur de m non critique
- Certaines valeurs de A fonctionnent mieux
  - Une bonne valeur → $(\sqrt{5} - 1) / 2 = 0{,}6180339887...$

Hachage universel

- Si un ennemi choisit les clés à hacher par une fonction de hachage spécifique
  - Il peut choisir n clés qui seront toutes hachées vers la même alvéole
  - Recherche → $O(n)$ ☹
- Toute fonction de hachage fixée à l'avance est vulnérable à ce type de comportement
  - Cas le plus défavorable
  - Une bonne idée est alors de choisir la fonction de hachage aléatoirement parmi plusieurs

Adressage ouvert

- Tous les éléments occupent la table de hachage elle-même
- Pour rechercher un élément
  - On examine les alvéoles de la table jusqu'à trouver l'élément ou réaliser qu'elle ne s'y trouve pas
- Aucune information conservée hors de la table
  - Pas de listes chaînées
- Permet d'éviter le recours aux pointeurs
  - On calcule la séquence des alvéoles à examiner

Insertion dans une table de hachage avec adressage ouvert

- On examine successivement (sonde) la table de hachage jusqu'à trouver une alvéole vide
- Au lieu de suivre l'ordre 0, 1, … m – 1 ($O(n)$)
  - La séquence des positions sondées **dépend de la clé**
- La séquence de sondage
  - $\langle h(k, 0), h(k, 1), \ldots, h(k, m-1) \rangle$
  - … doit être une permutation de $\langle 0, 1, \ldots, m-1 \rangle$ (chaque position doit être considérée)
- Différentes techniques de sondage
  - Linéaire, quadratique, double hachage

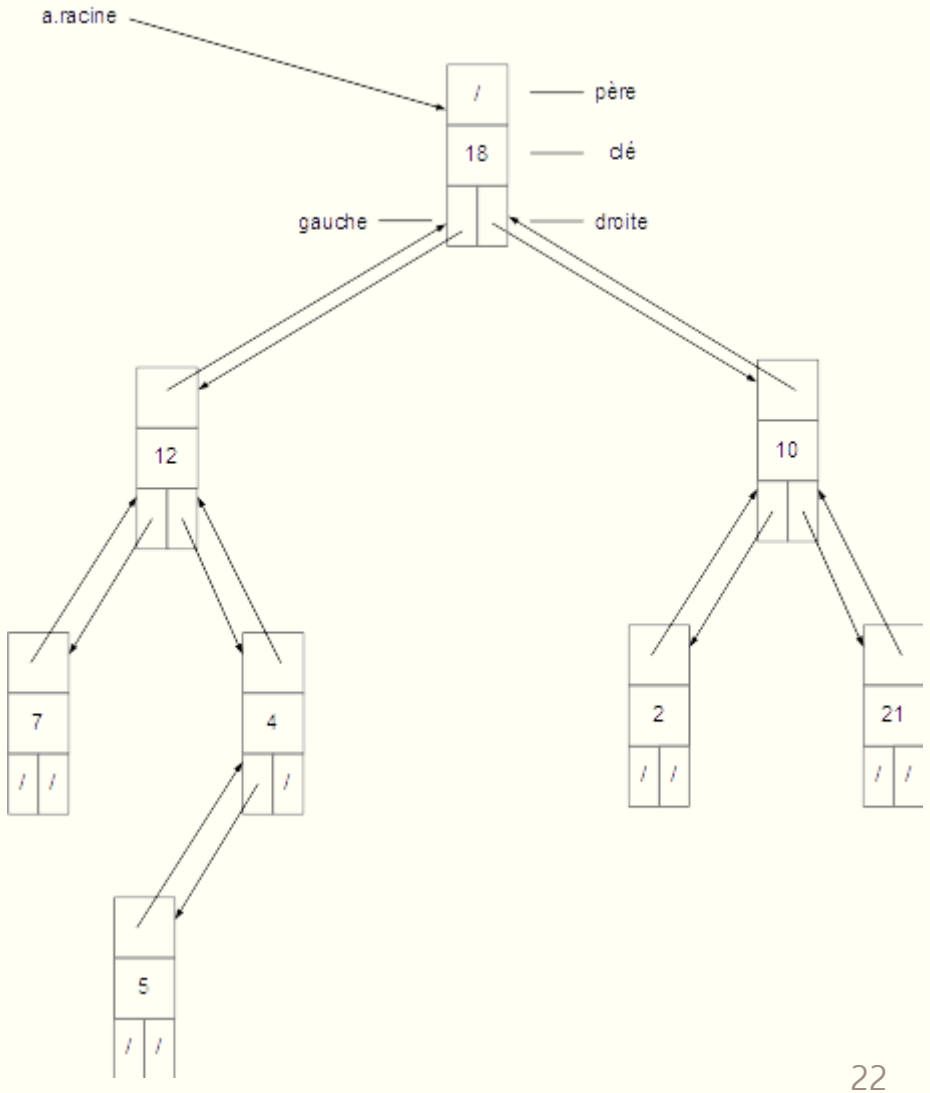
Sondage linéaire

- Étant donnée une fonction de hachage ordinaire h'
  - Appelée **fonction de hachage auxiliaire**
- … utilise la fonction de hachage
  - $h(k, i) = (h'(k) + i) \bmod m$
  - pour $i = 0, 1, \ldots, m - 1$
- Exemple 3 : insertion des clés
  - $k = \{10, 22, 31, 4, 15, 28, 17, 88, 59\}$
  - $m = 11$ et $h'(k)$: méthode de la division

ARBRES BINAIRES DE RECHERCHE

Arbre binaire de recherche

- Structure de données pouvant supporter plusieurs opérations d'ensemble dynamique
  - RECHERCHER, MINIMUM, MAXIMUM, PRÉDÉCESSEUR, SUCCESSEUR, INSÉRER, SUPPRIMER
  - Temps proportionnel à la hauteur de l'arbre
    - $O(\lg n)$
  - Peut servir aussi bien de dictionnaire que de file de priorités
- Représentation chaînée
- Chaque nœud est un objet
- Attributs de chaque noeud
  - clé, données satellites, gauche, droite, pere
- Attribut de l'arbre
  - Racine

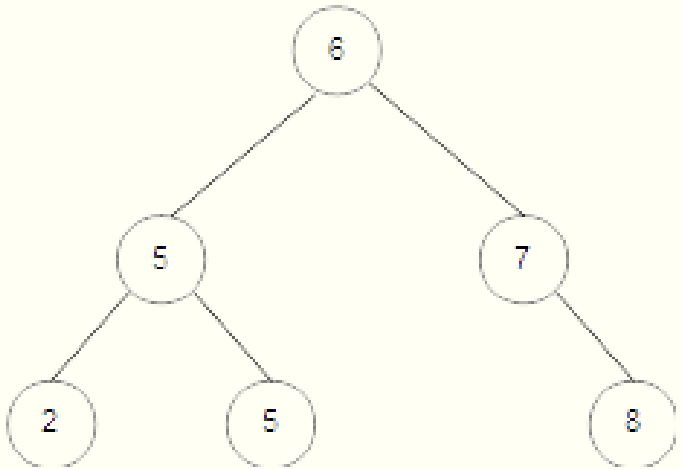


Propriété d'arbre binaire de recherche

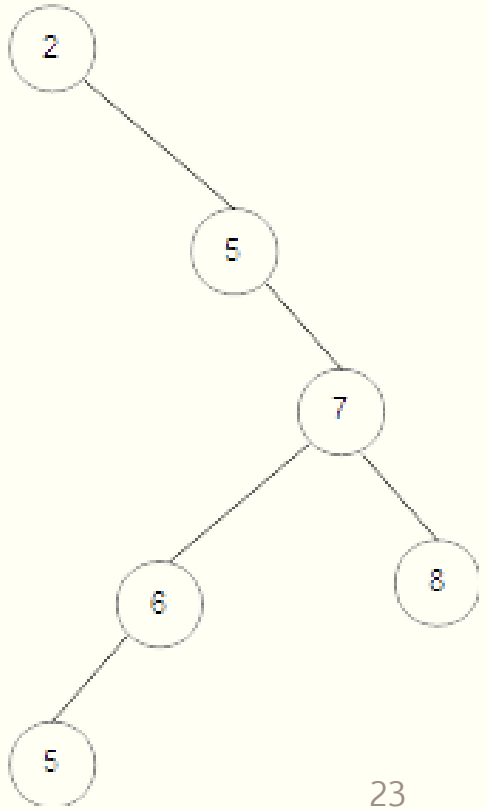
- Les clés d'un arbre binaire de recherche sont toujours stockées de manière à satisfaire la **propriété d'arbre binaire de recherche :**
- Soit x un nœud d'un arbre binaire de recherche
  - Si y est un nœud du sous-arbre de gauche de x
    - Alors $y.clé \leq x.clé$
  - Si y est un nœud du sous-arbre de droite de x
    - Alors $x.clé \leq y.clé$

- Arbre binaire de recherche avec $k = \{2, 5, 5, 6, 7, 8\}$

de hauteur 2



de hauteur 4



Affichage d'un arbre binaire de recherche

- Dépend de l'ordre de parcours des noeuds
- Parcours infixe
  - Affiche la clé de la racine entre les clés du sous-arbre de gauche et les clés du sous-arbre de droite
- Parcours préfixe
  - Affiche la racine avant les sous-arbres
- Parcours postfixe
  - Affiche la racine après les sous-arbres
- Exemple 4

Requêtes dans un arbre binaire de recherche

- Rechercher
  - Récursif, Itératif
- Minimum
- Maximum
- Successeur
- Prédécesseur
- Insertion
- Suppression

Requêtes dans un arbre binaire de recherche

RECHERCHER-ARBRE (x, k)

- On démarre la recherche à la racine
- On suit un chemin simple descendant
  - À chaque nœud, on compare k à $x.clé$
    - Égale → Recherche terminée
    - Plus petit → on continue dans le sous-arbre de gauche
    - Plus grand → on continue dans le sous-arbre de droite
- Exemple 5 – Recherche
- Temps d'exécution
  - $O(h)$ où h est la hauteur de l'arbre

MINIMUM-ARBRE(x)

- On suit les pointeurs *gauche* à partir de la racine jusqu'à ce qu'on rencontre NIL
- MAXIMUM-ARBRE(x)
  - Même chose, mais en suivant les pointeurs *droite*
- Exemple 6-7 : Min et max
- Temps d'exécution
  - $O(h)$

Requêtes dans un arbre binaire de recherche

SUCCESSEUR-ARBRE(x)

- Donne le noeud qui suit x dans un parcours infixe
  - Noeud possédant la plus petite clé supérieure à x
- Pas besoin de comparer les clés
  - Si le sous-arbre de droite n'est pas vide → minimum
  - Si le sous-arbre de droite est vide → premier ancêtre de x dont l'enfant de gauche est aussi un ancêtre de x
- PRÉDÉCESSEUR-ARBRE(x) → Symétrique
- Exemples 8-9 : Successeur et prédécesseur
- Temps d'exécution
  - $O(h)$

Insertion dans un arbre binaire de recherche

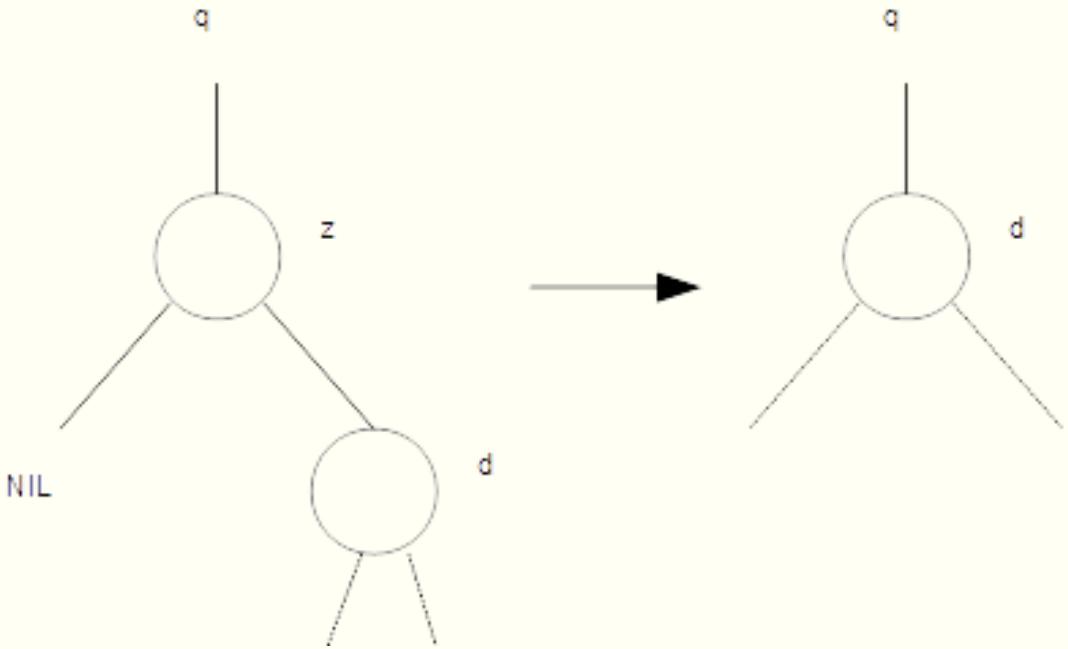
- Modifie la structure de l'arbre
- La propriété d'arbre binaire de recherche doit être conservée après insertion
- Pour insérer une valeur *v*, on insère un nœud *z*
  - *z.clé* = *v*
  - *z.gauche* = NIL, *z.droite* = NIL
- On modifie l'arbre et *z* pour permettre à *z* d'être inséré à sa position correcte dans l'arbre
- On démarre à la racine de l'arbre
- On insère sous une feuille de l'arbre
  - On descend dans l'arbre
  - … à droite ou à gauche selon la valeur de *z.clé*
  - … en cherchant un NIL à remplacer par *z*
  - La position du NIL trouvé indique où placer *z*
- Exemple 10 – Insertion
- Temps d'exécution
  - $O(h)$

Suppression dans un arbre binaire de recherche

- On veut supprimer un nœud z de l'arbre
- La propriété d'arbre binaire de recherche doit être conservée après suppression
- On distingue 3 situations possibles
  - z n'a pas d'enfants : on remplace le pointeur vers z de son parent par NIL (facile)
  - z n'a qu'un seul enfant : on remonte l'enfant pour qu'il prenne la place de z dans l'arbre (facile)
  - z a 2 enfants : on trouve le successeur de z et on lui fait prendre la place de z (un peu moins facile)
- Au niveau de l'algorithme, on subdivisera en 4 cas pour gérer ces 3 situations
  - z n'a pas d'enfant gauche
  - z n'a qu'un seul enfant (qui est son enfant gauche)
  - z a 2 enfants et son successeur est son enfant droit
  - z a 2 enfants et son successeur n'est pas son enfant droit

Suppression dans un arbre binaire de recherche

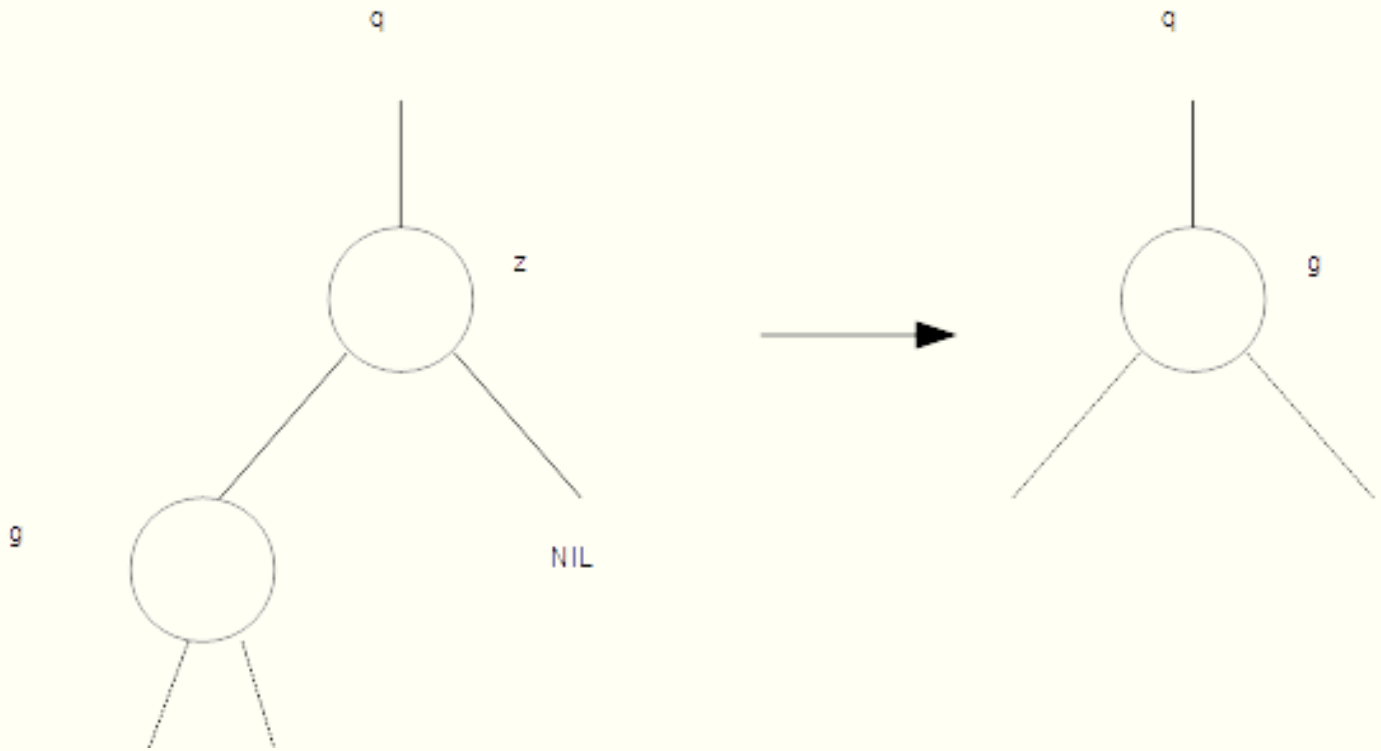
- Cas 1
  - *z* n'a pas d'enfant gauche



- On remplace *z* par son enfant droit *d*
  - Qui est ou n'est pas NIL
  - Si c'est NIL → on a géré le cas où *z* n'a pas d'enfants
- Autrement dit, on transplante le nœud *d* au nœud *z*
- Exemple 11
  - Suppression du nœud 15

Suppression dans un arbre binaire de recherche

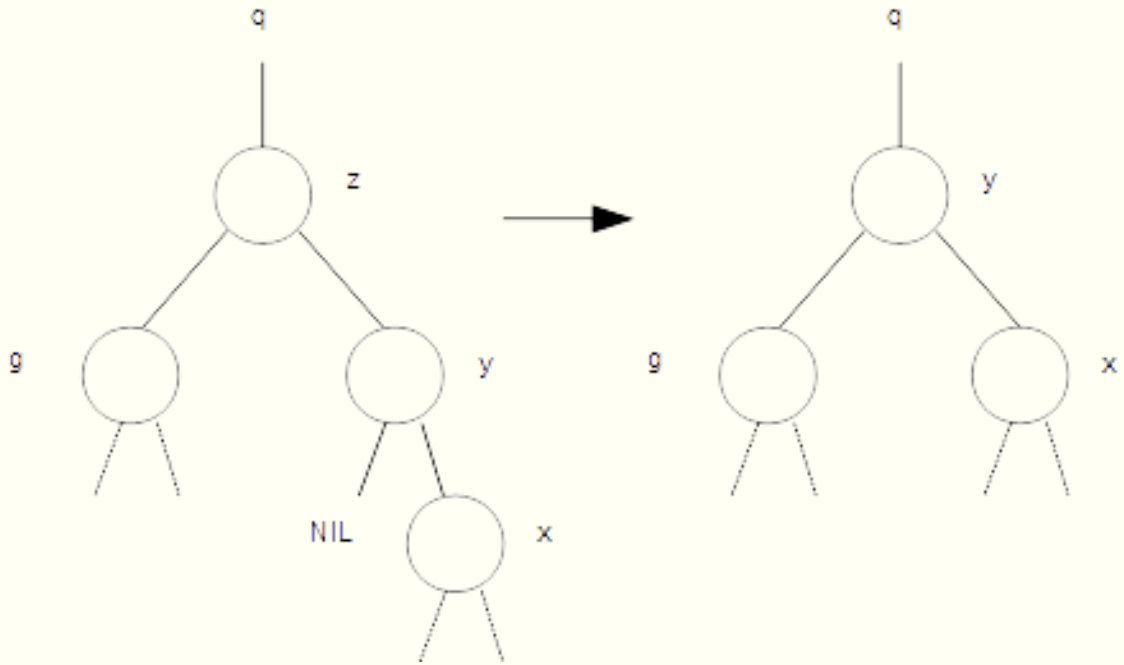
- Cas 2
  - z n'a qu'un seul enfant (qui est son enfant gauche)
- On remplace z par g
- Autrement dit, on transplante le nœud g au nœud z



Suppression dans un arbre binaire de recherche

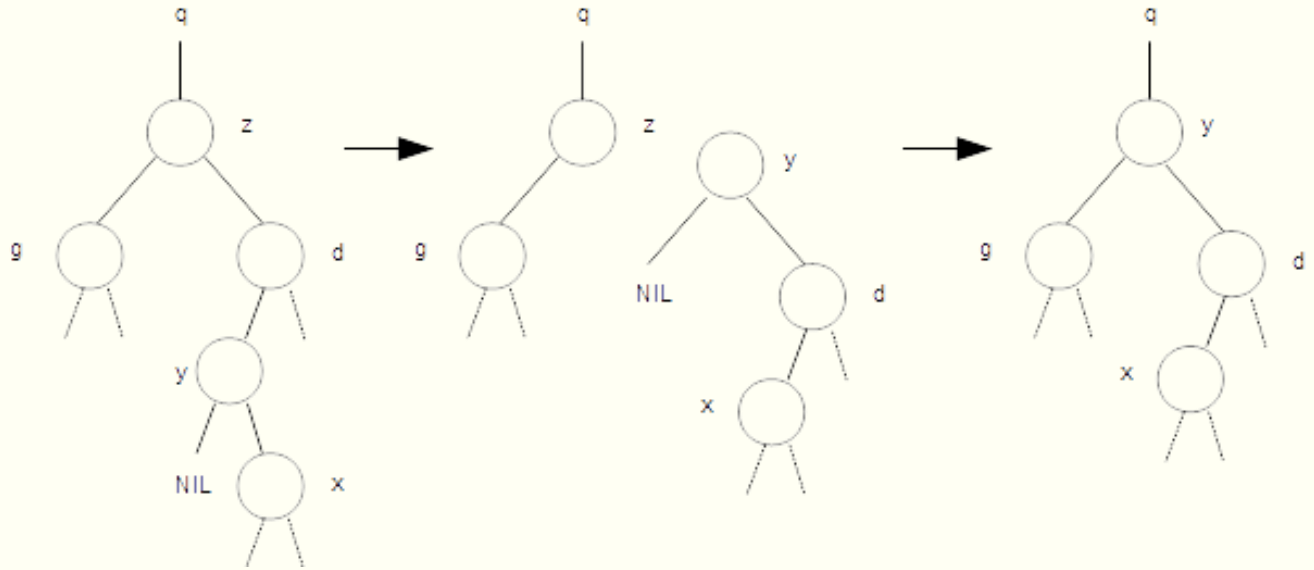
- Cas 3
  - z a 2 enfants et son successeur est son enfant droit

- $g \rightarrow$ enfant gauche de z
- $y \rightarrow$ successeur de z
- $x \rightarrow$ enfant droit de y
- On transplante le nœud y au nœud z
- On modifie le gauche de z pour qu'il soit le gauche de y
- On modifie le père de ce
- nouveau gauche par y
- Exemple 12
  - Suppression du nœud 5



Suppression dans un arbre binaire de recherche

- Cas 4
  - z a 2 enfants et son successeur n'est pas son enfant droit



- $g \rightarrow$ enfant gauche de z
- $d \rightarrow$ enfant droit de z
- $y \rightarrow$ successeur de z
- $x \rightarrow$ enfant droit de y
- On transplante x au nœud y
- On modifie y pour en faire le parent de d
- On transplante le nœud y au nœud z
- On change le fils gauche de y par g
- On remplace le père de ce fils gauche par y
- Exemple 13
  - Suppression du nœud 12
- Temps d'exécution de la suppression
  - $O(h)$

Synthèse

- Avec un arbre binaire de recherche
  - On peut implémenter l'ensemble des opérations fondamentales d'ensemble dynamique en $O(h)$
- Si la hauteur est petite → efficace
- Si la hauteur est grande → pas efficace ! (pas mieux qu'une liste chaînée)
- Il est important que l'arbre soit équilibré
  - $O(h) \rightarrow O(\lg n)$
- Une solution → en faire un arbre rouge-noir

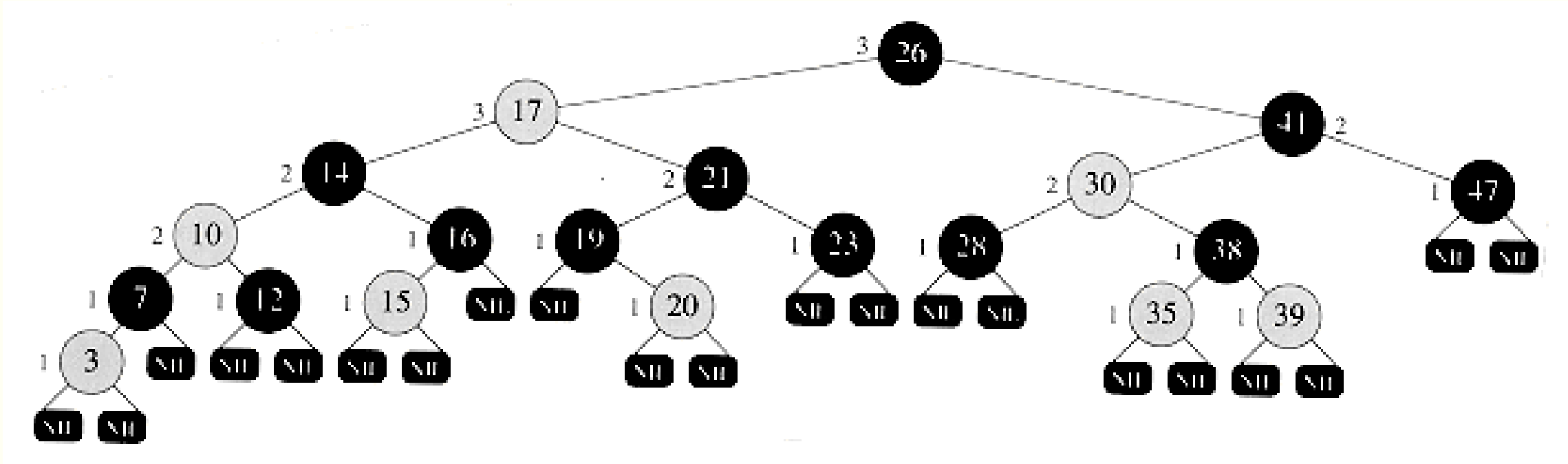
ARBRES ROUGE-NOIR

Propriétés des arbres rouge-noir

- Arbre binaire de recherche
- Chaque nœud possède un attribut additionnel
  - Couleur → rouge ou noir
- En contrôlant la manière dont les nœuds sont coloriés sur n'importe quel chemin simple allant de la racine à une feuille
  - On garantit qu'aucun de ces chemins n'est plus de 2 fois plus long que n'importe quel autre
  - Arbre approximativement équilibré

Propriétés des arbres rouge-noir

- Propriétés rouge-noir
  - Chaque nœud est soit rouge, soit noir
  - La racine est noire
  - Chaque feuille (NIL) est noire
  - Si un nœud est rouge, alors ses 2 enfants sont noirs
  - Pour chaque nœud, tous les chemins simples reliant le nœud à des feuilles situées plus bas contiennent le même nombre de nœuds noirs (hauteur noire)



Propriétés des arbres rouge-noir

- Un arbre rouge-noir ayant n nœuds internes
  - a une hauteur au plus égale à $2 \lg(n + 1)$
- Insertion et suppression
  - Toujours en $O(\lg n)$
  - Pour conserver les propriétés d'arbre rouge-noir
    - Changement de la couleur de certains noeuds
    - Rotations
- À suivre...

PROCHAIN COURS
ON REVIENT SUR LES GRAPHES
PLUS COURTS CHEMINS