Chapitre VIII

Formules de Cramer

VIII.1 Formules de Cramer pour la résolution des systèmes linéaires

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ une matrice inversible (c.a.d. $det(A) \neq 0$) On considère l'équation

$$(E) \qquad AX = b.$$

On a vu d'après les propositions II.3.1 et II.3.2 12 que (E) admet une solution unique si et seulement si A est inversible, donc en tenant compte du théorème VII.4.1 page 47, si et seulement si $det(A) \neq 0$ Notons

$$\Delta_i = det(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(i-1)}, b, A^{(i+1)}, \ldots, A^{(n)}$$

En clair Δ_i est le déterminant obtenu à partir de A en remplacant la $i$ème colonne par le second membre b.

Théorème VIII.1.1 ***Formules de Cramer pour la résolution des systèmes linéaires.*** *L'unique solution de*

$$(E) \qquad AX = b.$$

est donnée par

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\textit{dét } A} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

Exemple VIII.1.2 *Soit donc le système :*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & 18 \\ 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & - & 5\lambda_3 & = & 7 \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & & & = & 4 \end{array} \right.$$

La matrice du système est donc :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} det(P) & = & \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{c} C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ & = & 1 \times (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -1 \end{array}$$

Le déterminant est non nul, la matrice est donc inversible et le système admet une solution unique.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 18 & 1 & -2 \\ 7 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 16 & -2 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = 140$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 18 & -2 \\ 2 & 7 & -5 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 14 & -2 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & -2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -72$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 18 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 18 \\ 0 & -1 & -29 \\ 0 & 1 & -14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -29 \\ 1 & -14 \end{vmatrix} = 43$$

On obtient donc finalement :

$$\lambda_1 = \frac{\Delta_1}{det(P)} = -140, \quad \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{det(P)} = 72, \quad \lambda_3 = \frac{\Delta_3}{det(P)} = -43.$$

Et donc

$$\mathcal{S} = \{(-140, 72, -43)\}$$

Remarque VIII.1.3 *En dehors du cas des matrices 2×2 les formules de Cramer ne sont pas utilisée pour la résolution numérique de systèmes linéaires, on leur préfère la méthode de Gauss plus économique. En revanche les formules de Cramer sont utilisées pour le calcul formel (quand la matrice où le second membre dépend d'un ou plusieurs paramètres).*

VIII.2 Formules de Cramer pour l'inversion de matrices

Théorème VIII.2.1 ***Formules de Cramer pour l'inversion de matrices***
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, inversible (cad $det(A) \neq 0$)) Alors l'inverse de A est donnée par :

$$A^{-1} = \frac{1}{d\acute{e}t\ A} \left[Com(A)\right]^T . \tag{VIII.2.1.1}$$

Où $com(A)$ désigne la comatrice de A définie page 44 Comme pour les systèmes linéaires, les formules de Cramer ne sont pas utilisées pour calculer numériquement l'inverse d'une matrice, on leur préfère des méthodes plus économiques en calculs comme la méthode de Gauss. Vous reverrez tout cela plus tard.

Exemple VIII.2.2 *Soit la matrice*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice a déjà été utilisée dans l'exemple VIII.1.2 et on a vu que $det(P) = -1 \neq 0$ et donc P est inversible. En fait on a déjà calculé l'inverse de cette matrice par la méthode de Gauss dans l'exemple (II.3.4) page 13. Calculons maintenant la comatrice de P :

$$com(P) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Soit donc :

$$Com(P) = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{det(P)}[Com(P)]^T = \begin{pmatrix} -10 & 4 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Et on retrouve (heureusement !) le résultat déjà obtenu dans l'exemple (II.3.4).

Remarque VIII.2.3 *Comme pour les systèmes linéaires, les formules de Cramer ne sont pas utilisées pour calculer numériquement l'inverse d'une matrice, on leur préfère des méthodes plus économiques en calculs, comme la méthode de Gauss. En revanche les formules de Cramer sont utilisées pour le calcul formel (quand la matrice dépend d'un ou plusieurs paramètres)*