Algèbre linéaire -CH II Résolutions de système linéaires par la méthode de Gauss, présentée sur des exemples. (v IXa)

Théorème (Rappel)
Un système d'équations linéaires peut selon les cas avoir
- (a) aucune solution
- (b) une solution unique
- (c) une infinité de solutions

et il n'y a pas d'autre possibilité.

La méthode de Gauss ne présente pas de difficulté particulière. Le texte qui suit est relativement long, mais nous avons tenu à détailler les calculs effectués sur des exemples souvent trés voisins mais illustrant des situations trés différentes.

I Systèmes à solution unique.

Soit donc dans $\mathbb{R}^4$ le système d'équations linéaires en (x, y, z, t):

$$(EQ\ 1)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 3y & - & z & + & 4t & = & 27 \\ -4x & - & 11y & + & 6z & - & 14t & = & -105 \\ -2x & - & 10y & - & 7z & - & 14t & = & -55 \\ 2x & + & 9y & + & 6z & + & 9t & = & 37 \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions de ce système est donc un sous ensemble de $\mathbb{R}^4$ c'est à dire un ensemble de quadruplets (à coefficients réeels).

Notons que ce système s'écrit matriciellement sous la forme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ -4 & -11 & 6 & -14 \\ -2 & -10 & -7 & -14 \\ 2 & 9 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ -105 \\ -55 \\ 37 \end{pmatrix} \text{ ou encore } \boxed{A\ X = B}$$

où $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ -4 & -11 & 6 & -14 \\ -2 & -10 & -7 & -14 \\ 2 & 9 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ est la <u>matrice du système linéaire</u>, $B=\begin{pmatrix} 27 \\ -105 \\ -55 \\ 37 \end{pmatrix}$

est le <u>second membre</u> et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ est le <u>vecteur des inconnues</u> (ou de façon plus brève <u>l'inconnue du système</u>)

On va résoudre ce sytème par la méthode de Gauss employée systématiquement. Dans la méthode de Gauss, on effectue des transformations successives élémentaires sur le système lineaire considéré, de facon à obtenir à chaque étape un système linéaire équivalent au système précédent. L'équivalence est obtenue par le fait que les transformations effectuées sur le système sont réversibles. (Dire que deux systèmes d'équations linéaires (S) et (S') sont équivalents (ce qu'on note "(S)~(S')" ou "(S) $\Leftrightarrow$ (S')"), c'est dire que toute solution de (S) est solution de (S') et que réciproquement toute solution de (S') est solution de (S)).
Les opérations effectuées sur les lignes sont indiquées à gauche et doivent être systématiquement indiquées. <u>Il est à noter qu'il n'y a ici aucune permutation de lignes ni aucune permutations dans l'ordre des variables</u>.

1.1

$$\begin{cases} \boxed{1}x + 3y - z + 4t = 27 & \\ -4x - 11y + 6z - 14t = -105 & L_2 \leftarrow L_2+4L_1 \quad (L_2 \leftarrow L_2-(-4/\boxed{1})L_1) \\ -2x - 10y - 7z - 14t = -55 & L_3 \leftarrow L_3+2L_1 \quad (L_3 \leftarrow L_3-(-2/\boxed{1})L_1) \\ 2x + 9y + 6z + 9t = 37 & L_4 \leftarrow L_4-2L_1 \quad (L_4 \leftarrow L_4-(2/\boxed{1})L_1) \end{cases}$$

Elimination de x des équations 2,3 et 4.

$$\begin{cases} x + 3y - z + 4t = 27 & \\ \boxed{1}y + 2z + 2t = 3 & \\ -4y - 9z - 6t = -1 & L_3 \leftarrow L_3+4L_2 \quad (L_3 \leftarrow L_3-(-4/\boxed{1})L_2) \\ 3y + 8z + t = -17 & L_4 \leftarrow L_4-3L_2 \quad (L_4 \leftarrow L_4-(3/\boxed{1})L_2) \end{cases}$$

Elimination de y des équations 3 et 4.

$$\begin{cases} x + 3y - z + 4t = 27 & \\ y + 2z + 2t = 3 & \\ \boxed{-1}z + 2t = 11 & \\ 2z - 5t = -26 & L_4 \leftarrow L_4+2L_3 \quad (L_4 \leftarrow L_4-(2/(\boxed{-1}))L_3) \end{cases}$$

Elimination de z de l'équation 4.

$$\begin{cases} x + 3y - z + 4t = 27 \\ y + 2z + 2t = 3 \\ -z + 2t = 11 \\ \boxed{-1}t = -4 \end{cases}$$

Les nombres encadrés sont les <u>pivots</u>, ici ils sont tous égaux à ±1 ce qui rend les calculs trés faciles.
Le système est donc maintenant <u>échelonné</u>, ici on dit même que le système est <u>triangulaire</u>, notons que tous les coefficients diagonaux sont ici non nuls . La résolution - dite <u>remontée triangulaire</u> est alors immédiate. Afin d'éviter les erreurs il est recommandé d'écrire comme ci- dessous les calculs intermédiaires:

$$\begin{cases} t = 4 \\ z = -(11-2t) = -(11 -8) = -3 \\ y = 3 -2z-2t = 3-8 +6 = 1 \\ x = 27-3y+z-4t = 27-3-3 -16 = 5 \end{cases}$$

Soit donc revenant à "l'ordre initial des inconnues" x, y ,z, t

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \\ z = -3 \\ t = 4 \end{cases} \qquad \mathcal{S}_{EQ1}=\{(5, 1, -3, 4)\}$$

Le système admet donc une unique solution.

On devra systématiquement adopter cette présentation pour la résolution de système linéaires - les bricolages ne seront pas admis.

Remarque: il est faux de dire que l'ensemble des solutions est

{ 5, 1, -3, 4}

en effet il s'agit d'un ensemble de réels non de quadruplets et ces réeels ne peuvent donc etre solutions de (EQ 1)!

Par ailleurs {5, 1, -3, 4}= {5, -3, 4, 1} et (5, -3, 4, 1) n'est pas solution de (EQ 1)...

1.2

Si on considère le même système mais avec un autre second membre:

$$\text{(EQ 2)}\quad\begin{cases} x + 3y - z + 4t = -10 \\ -4x - 11y + 6z - 14t = 35 \\ -2x - 10y - 7z - 14t = 29 \\ 2x + 9y + 6z + 9t = -8 \end{cases}$$

Les calculs sont de fait les mêmes sauf pour le second membre:

$$\begin{cases} x + 3y - z + 4t = -10 & \\ -4x - 11y + 6z - 14t = 35 & L_2 \leftarrow L_2+4L_1 \\ -2x - 10y - 7z - 14t = 29 & L_3 \leftarrow L_3+2L_1 \\ 2x + 9y + 6z + 9t = -8 & L_4 \leftarrow L_4-2L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y - z + 4t = -10 & \\ y + 2z + 2t = -5 & \\ -4y - 9z - 6t = 9 & L_3 \leftarrow L_3+4L_2 \\ 3y + 8z + t = 12 & L_4 \leftarrow L_4+3L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y - z + 4t = -10 & \\ y + 2z + 2t = -5 & \\ -z + 2t = -11 & \\ 2z -5t = 27 & L_4 \leftarrow L_4+2L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y - z + 4t = -10 \\ y + 2z + 2t = -5 \\ -z + 2t = -11 \\ -t = 5 \end{cases}$$

La forme triangulaire du système est la même que précédemment.

$$\begin{cases} t = -5 \\ z = -(-11-2t) = -(-11+10) = 1 \\ y = -5 -2z-2t = -5-2+10 = 3 \\ x = -10-3y+z-4t = -10-9+1+20 = 2 \end{cases}$$

Soit donc revenant à "l'ordre initial des inconnues" x, y ,z, t

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 1 \\ t = -5 \end{cases} \qquad \mathscr{S}_{EQ2}=\{(2, 3, 1, -5)\}$$

1.3

Si on considère maintenant le même système mais avec un second membre quelconque:

$$\text{(EQ 3)}\quad\begin{cases} x + 3y - z + 4t = a \\ -4x - 11y + 6z - 14t = b \\ -2x - 10y - 7z - 14t = c \\ 2x + 9y + 6z + 9t = d \end{cases}$$

Il n'y a pas plus de difficulté, il y a simplement quelques calculs supplémentaires pour le second membre:

$$\begin{cases} x + 3y - z + 4t = a & \\ -4x - 11y + 6z - 14t = b & L_2 \leftarrow L_2+4L_1 \\ -2x - 10y - 7z - 14t = c & L_3 \leftarrow L_3+2L_1 \\ 2x + 9y + 6z + 9t = d & L_4 \leftarrow L_4-2L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y - z + 4t = a & \\ y + 2z + 2t = b+4a & \\ -4y - 9z - 6t = c+2a & L_3 \leftarrow L_3+4L_2 \\ 3y + 8z + t = d-2a & L_4 \leftarrow L_4+3L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y - z + 4t = a & \\ y + 2z + 2t = b+4a = 4a+b & \\ -z + 2t = c+2a + 4(b+4a) = 18a + 4b +c & \\ 2z -5t = d-2a - 3(b+4a)= -14a -3b +d & L_4 \leftarrow L_4+2L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y - z + 4t = a \\ y + 2z + 2t = 4a + b \\ -z + 2t = 18a + 4b + c \\ -t = -14a - 3b + d + 2(18a + 4b + c) \\ = 22a + 5b + 2c + d \end{cases}$$

La remontée triangulaire ne pose pas plus de problèmes, elle est simplement un peu plus pénible, afin d'éviter les erreurs il est plus que recommandé d'écrire comme ci- dessous les calculs intermédiaires:

$$\begin{cases} t = -22a-5b-2c-d \\ z = -(18a+4b+c)+2t = -(18a+4b+c) + 2(-22a-5b-2c-d) \\ = -62a-14b-5c-2d \\ y = 4a+b-2z-2t = 4a+b-2(-62a-14b-5c-2d)-2(-22a-5b-2c-d) \\ = 172a+39b+14c+6d \\ x = a-3y+z-4t \\ = a -3(172a+39b+14c+6d) + (-62a-14b-5c-2d) - 4(-22a-5b-2c-d) \\ = -489a-111b-39c-16d \end{cases}$$

Réécrivons maintenant la solution en respectant l'ordre des inconnues: x, y, z, t et des variables du second membre: a, b, c, d :

$$\begin{cases} x = -489a - 111b - 39c - 16d \\ y = 172a + 39b + 14c + 6d \\ z = -62a - 14b - 5c - 2d \\ t = -22a - 5b - 2c - d \end{cases}$$

(l'ordre est important pour ce qui suit:)

Soit matriciellement $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -489 & -111 & -39 & -16 \\ 172 & 39 & 14 & 6 \\ -62 & -14 & -5 & -2 \\ -22 & -5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

$$\mathcal{S}_{EQ3}=\{(-489a-111b-39c-16d,172a+39b+14c+6d,-62a-14b-5c-2d,-22a-5b-2c-d)\}$$

Le système admet donc <u>une et une seule solution quelque que soit le second membre</u>. On dit dans ce cas que la matrice A est inversible.On verra ultérieurement qu'une matrice inversible est necessairement carrée. (Mais par contre il existe des matrices carrées non inversibles)

$M = \begin{pmatrix} -489 & -111 & -39 & -16 \\ 172 & 39 & 14 & 6 \\ -62 & -14 & -5 & -2 \\ -22 & -5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ est ici définie sans ambiguité et on a donc

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ soit encore $\boxed{X = M\ B}$ on note alors $M=A^{-1}$.

Et on dit alors que la matrice M est <u>l'inverse</u> de la matrice A.

1.4

Soit maintenant le système:

$$(EQ\ 4) \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} -4x & - & 11y & + & 6z & - & 14t & = & -105 \\ 2x & + & 9y & + & 6z & + & 9t & = & 37 \\ x & + & 3y & - & z & + & 4t & = & 27 \\ -2x & - & 10y & - & 7z & - & 14t & = & -55 \end{array} \right.$$

Il est immédiat qu'en **permutant les lignes ce système,** ce qui ne change pas l'ensemble de solutions, on se ramène au système (EQ 1). Et on résoud donc immédiatement ce système, on peut aussi effectuer la résolution directement sur ce système:

<u>Résolution 1 (Gauss rusé)</u>

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} -4x & - & 11y & + & 6z & - & 14t & = & -105 \\ 2x & + & 9y & + & 6z & + & 9t & = & 37 \\ \boxed{1}x & + & 3y & - & z & + & 4t & = & 27 \\ -2x & - & 10y & - & 7z & - & 14t & = & -55 \end{array} \right. \quad \begin{array}{ll} L_1 \leftarrow L_1+4L_3 & L_1 \leftarrow L_1-(-4/\boxed{1})L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2-2L_3 & L_2 \leftarrow L_2-(\ 2/\boxed{1})L_3 \\ & \\ L_4 \leftarrow L_4+2L_3 & L_4 \leftarrow L_4-(-2/\boxed{1})L_3 \end{array}$$

Elimination de x des équations 1,2 et 4:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} & & \boxed{1}y & + & 2z & + & 2t & = & 3 \\ & & 3y & + & 8z & + & t & = & 5 \\ x & + & 3y & - & z & + & 4t & = & 27 \\ & & -4y & - & 9z & - & 6t & = & -1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{ll} & \\ L_2 \leftarrow L_2-3L_1 & L_2 \leftarrow L_2-(\ 3/\boxed{1})L_1 \\ & \\ L_4 \leftarrow L_4+4L_1 & L_4 \leftarrow L_4-(-4/\boxed{1})L_1 \end{array}$$

Elimination de y des équations 2 et 4:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} & & y & + & 2z & + & 2t & = & 3 \\ & & & & 2z & & -5t & = & -26 \\ x & + & 3y & - & z & + & 4t & = & 27 \\ & & & & \boxed{-1}z & + & 2t & = & 11 \end{array} \right. \quad \begin{array}{ll} & \\ L_2 \leftarrow L_2+2L_4 & L_2 \leftarrow L_2-(2/\boxed{-1})L_4 \\ & \\ & \end{array}$$

Elimination de z de l'équation 2:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} & & y & + & 2z & + & 2t & = & 3 \\ & & & & & & \boxed{-1}t & = & -4 \\ x & + & 3y & - & z & + & 4t & = & 27 \\ & & & & -z & + & 2t & = & 11 \end{array} \right.$$

Les choix de pivots sont ici effectués en choisissant les plus simples c'est à dire ici ±1.Si on n'est pas trés habitué on préfera effectuer la permutation des lignes.Remarquons que l'on traite ici toujous les inconnues dans l'ordre x, y, z, t.

On dit à nouveau que le système est échelonné - en effet a une permutation de lignes on a un sysème échelonné au sens précédent. La remontée triangulaire est alors identique:

$$\begin{cases} t = 4 \\ z = -(11-2t) = -(11-8) = -3 \\ y = 3 - 2z - 2t = 3-8+6 = 1 \\ x = 27-3y+z-4t = 27-3-3-16 = 5 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_{EQ4}=\{(5, 1, -3, 4)\}$$

1.5

Résolution 2 (Gauss Brutal)

C'est la méthode qui se programme sur ordinateur pour les systèmes de taille raisonable (jusqu'à quelques centaines d'équations)

$$\begin{cases} \boxed{-4}x - 11y + 6z - 14t = -105 & \\ 2x + 9y + 6z + 9t = 37 & L_2 \leftarrow L_2-(2/\boxed{-4})L_1 \\ x + 3y - z + 4t = 27 & L_3 \leftarrow L_3-(1/\boxed{-4})L_1 \\ -2x - 10y - 7z - 14t = -55 & L_4 \leftarrow L_4-(-2/\boxed{-4})L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x - 11y + 6z - 14t = -105 & \\ \boxed{(7/2)}y + 9z + 2t = -31/2 & \\ (1/4)y + (1/2)z + (1/2)t = 3/4 & L_3 \leftarrow L_3-(1/4)/\boxed{(7/2)}L_2 \\ (-9/2)y - 10z - 7t = 5/2 & L_4 \leftarrow L_4-(-9/2)/\boxed{(7/2)}L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x - 11y + 6z - 14t = -105 & \\ (7/2)y + 9z + 2t = -31/2 & \\ \boxed{(-1/7)}z + (5/14)t = 13/7 & \\ (11/7)z - (31/7)t = -157/7 & L_4 \leftarrow L_4-((11/7)/(\boxed{-1/7}))L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x - 11y + 6z - 14t = -105 \\ (7/2)y + 9z + 2t = -31/2 \\ (-1/7)z + (5/14)t = 13/7 \\ (-1/2)t = -2 \end{cases}$$

Soit alors par remontée triangulaire:

$$\begin{cases} t = -2/(-1/2) = 4 \\ z = ((13/7)-(5/14)t)/(-1/7) = ((13/7)-(20/14))/(-1/7) = -3 \\ y = (-31/2 - 9z - 2t)/(7/2) = (-31/2+27-8)/(7/2) = 1 \\ x = (-105+11y-6z+14t)/(-4) = (-105+11+18+56)/4 = (-20/4) = 5 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_{EQ4}=\{(5, 1, -3, 4)\}$$

La résolution telle qu'elle est ici présentée, - si elle est adaptée à la résolution en calcul flottant sur ordinateur - implique cependant lorsqu'elle est faite à la main "exactement" sur un sytème simple l'apparition immédiate de fractions ce qui est désagréable. On peut en fait effectuer les calculs comme dans ls section suivante. (Notons cependant en anticipant sur le cours, que le calcul du déterminant s'effectue selon cette méthode et non selon la suivante ...)

(N.B en fait dans l'implémentation de la méthode de Gauss sur ordinateur on effectue également des choix de pivots, mais dans le but de limiter les accumulations d'erreurs de calcul, liées à la représentation en flottant des réels)

1.6

Résolution 3 (Gauss plus tendre)

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} \boxed{-4}x & -11y & +6z & -14t & = -105 & \\ 2x & +9y & +6z & +9t & = 37 & L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ x & +3y & -z & +4t & = 27 & L_3 \leftarrow 4L_3 + L_1 \\ -2x & -10y & -7z & -14t & = -55 & L_4 \leftarrow 2L_4 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} -4x & -11y & +6z & -14t & = -105 & \\ & \boxed{7}y & +18z & +4t & = -31 & \\ & y & +2z & +2t & = 3 & L_3 \leftarrow 7L_3 - L_2 \\ & -9y & -20z & -14t & = -5 & L_4 \leftarrow 7L_4 + 9L_2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} -4x & -11y & +6z & -14t & = -105 & \\ & 7y & +18z & +4t & = -31 & \\ & & \boxed{-4}z & +10t & = 52 & \\ & & 22z & -62t & = -314 & L_4 \leftarrow 2L_4 + 11L_3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} -4x & -11y & +6z & -14t & = -105 \\ & 7y & +18z & +4t & = -31 \\ & & -4z & +10t & = 52 \\ & & & \boxed{-14}t & = -56 \end{array}\right.$$

Remarquons que nous simplifions au mieux les transformations sur les lignes.

Le système est maintenant échelonné et on n'a pas fait apparaître de fractions; on peut alors effectuer la remontée triangulaire:

$$\text{soit} \left\{\begin{array}{l} t = 56/14 = 4 \\ z = (52-10t)/(-4)=12/(-4)=-3 \\ y = (-31 -18z -4t)/7=(-31+54-16)/7 = 7/7 = 1 \\ x = (-105+11y-6z+14t)/(-4)=(-105+11+18+56)/(-4)=-20/(-4)=5 \end{array}\right.$$

$$\mathcal{S}_{EQ4}=\{(5, 1, -3, 4)\}$$

Il est à noter que les fractions qui apparaissent ici disparaissent ausitôt car l'unique solution est entière ! dans le cas général avec un matrice à coeffcients entiers en principe on n'y échappe pas !

1.7 (Ordre total)

Soit maintenant le système:

$$\text{(EQ 5)} \left\{\begin{array}{rrrrr} -11x & +6y & -4z & -14t & = -105 \\ 9x & +6y & +2z & +9t & = 37 \\ 3x & -y & +z & +4t & = 27 \\ -10x & -7y & -2z & -14t & = -55 \end{array}\right.$$

On peut résoudre ce système en se ramenant à un système similaire à (EQ1) en permutant les lignes et "l'ordre des inconnues:"

$$\begin{cases} z + 3x - y + 4t = 27 \\ -4z - 11x + 6y - 14t = -105 \\ -2z - 10x - 7y - 14t = -55 \\ 2z + 9x + 6y + 9t = 37 \end{cases}$$

l'unique solution est alors (on revient à l'ordre x, y, z, t):

$$\mathcal{S}_{EQ5}=\{(1, -3, 5, 4)\}$$

On peut bien entendu résoudre ce système en appliquant brutalement la méthode de Gauss.
On peut aussi résoudre ce système directement par la méthode de Gauss en choisissant - a priori - les pivots les plus simples:

$$\begin{cases} -11x + 6y - 4z - 14t = -105 & L_1 \leftarrow L_1+6L_3 & (L_1 \leftarrow L_1-(6/\boxed{-1})L_3) \\ 9x + 6y + 2z + 9t = 37 & L_2 \leftarrow L_2+6L_3 & (L_2 \leftarrow L_2-(6/\boxed{-1})L_3) \\ 3x + \boxed{-1}y + z + 4t = 27 & & \\ -10x - 7y - 2z - 14t = -55 & L_4 \leftarrow L_4-7L_3 & (L_4 \leftarrow L_4-(-7/\boxed{-1})L_3) \end{cases}$$

Elimination de y des équations 1,2 et 4:

$$\begin{cases} 7x + \quad + \boxed{2}z + 10t = 57 & & \\ 27x + \quad + 8z + 33t = -199 & L_2 \leftarrow L_2- \ 4\ L_1 & (L_2 \leftarrow L_2-(8/\boxed{2})L_1) \\ 3x - y + z + 4t = 27 & & \\ -31x \quad - 9z - 42t = -244 & L_4 \leftarrow L_4+(9/2)L_1 & (L_4 \leftarrow L_4+(9/\boxed{2})L_1) \end{cases}$$

Elimination de z des équations 2 et 4:

$$\begin{cases} 7x + \quad + 2z + 10t = 57 & & \\ \boxed{-1}x + \quad - 7t = -29 & & \\ 3x - y + z + 4t = 27 & & \\ (1/2)x \quad + 3t = 25/2 & L_4 \leftarrow L_4+(1/2)L_1 & (L_4 \leftarrow L_4-(-(1/2)/\boxed{-1})L_1) \end{cases}$$

Elimination de x de l'équation 4:

$$\begin{cases} 7x + \quad + 2z + 10t = 57 \\ -x + \quad - 7t = -29 \\ 3x - y + z + 4t = 27 \\ \boxed{-(1/2)}t = -2 \end{cases}$$

A nouveau on aurait pu effectuer les permutations de lignes et d'ordre des inconnues nécessaires au cours de la méthode de Gauss pour avoir un système véritablement échelonné. Remarquons qu'en permuttant dans le système ci dessus l'ordre des équations et des inconnues on a effectivement un système échelonné. Notons que si on avait utilisé comme pivot initial le coefficient en 3ème ligne et 3ème colonne, on aurait eu un calcul similaire a celui effectué dans (EQ1)
On peut effectuer la remontée triangulaire:

$$\begin{cases} t = 4 \\ x =-(-29+7t) = 1 \\ z = (57-7x-10t)/2 = (57-7-40)/2 = 5 \\ y = -(27-3x-z-4t) = -(27-3-5-16) = -3 \end{cases}$$

Soit $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = 5 \\ t = 4 \end{cases}$ $\mathcal{S}_{EQ5}=\{(1, -3, 5, 4)\}$

Nous avons traité dans cette section d'un exemple où le nombre d'équations etait égal au nombre d'inconnues.Il ne faut pas pourtant croire qu'un tel système admette toujours une solution et une seule.

Soit par exemple

$$(EQ\ (i))\begin{cases} x + 3y - z + 4t = 27 \\ -4x - 11y + 6z - 14t = -105 \\ -2x - 10y - 7z - 14t = -55 \\ x + 3y - z + 4t = 1997 \end{cases}$$

Ce système n'admet aucune solution.-Montrez le ! -

Soit par ailleurs

$$(EQ\ (ii))\begin{cases} x + 3y - z + 4t = 27 \\ -4x - 11y + 6z - 14t = -105 \\ -2x - 10y - 7z - 14t = -55 \\ x + 3y - z + 4t = 27 \end{cases}$$

Ce système admet une infinité de solutions.-Montrez le ! -

En fait les possibilités sont illustrées dans les exemples suivants.

IISystèmes surdéterminés

On entend par système surdéterminé tout système pour lequel le nombre d'équations est supérieur au nombre d'inconnues. "Il y a trop d'équations". Un tel système n'admettra (au moins) une solution que si certaines conditions dites équations de compatibilité (portant sur le second membre) sont satisfaites.

La technique de résolution par la méthode de Gauss est strictement la même! - Ce qui est heureux, car en général on ne connaît pas d'avance le "nombre" de solutions du système. Aussi serons nous plus bref que précédemment sur la résolution!

II.1 Système à solution unique

$$\text{(EQ 6)}\quad \left\{\begin{array}{rcl} x + 3y - z + 4t &=& 27 \\ -4x - 11y + 6z - 14t &=& -105 \\ -2x - 10y - 7z - 14t &=& -55 \\ 2x + 9y + 6z + 9t &=& 37 \\ 2x + 18y + 26z + 23t &=& 42 \end{array}\right.$$

On peut comparer ce système à celui de (EQ 1) et on remarque qu'il y a mainteant une cinquième équation. Résolvons ce système par la méthode de Gauss comme précédemment, les calculs sont les mêmes à ceci près qu'il faut tenir compte de l'équation supplémentaire:

$$\left\{\begin{array}{rcll} x + 3y - z + 4t &=& 27 & \\ -4x - 11y + 6z - 14t &=& -105 & L_2 \leftarrow L_2+4L_1 \\ -2x - 10y - 7z - 14t &=& -55 & L_3 \leftarrow L_3+2L_1 \;) \\ 2x + 9y + 6z + 9t &=& 37 & L_4 \leftarrow L_4-2L_1 \\ 2x + 18y + 26z + 23t &=& 42 & L_5 \leftarrow L_5-2L_1 \end{array}\right.$$

Elimination de x des équations 2,3,4 et 5.

$$\left\{\begin{array}{rcll} x + 3y - z + 4t &=& 27 & \\ y + 2z + 2t &=& 3 & \\ -4y - 9z - 6t &=& -1 & L_3 \leftarrow L_3+ 4L_2 \\ 3y + 8z + t &=& -17 & L_4 \leftarrow L_4- 3L_2 \\ 12y + 28z + 15t &=& -12 & L_5 \leftarrow L_5-12L_2 \end{array}\right.$$

Elimination de y des équations 3, 4 et 5.

$$\left\{\begin{array}{rcll} x + 3y - z + 4t &=& 27 & \\ y + 2z + 2t &=& 3 & \\ -z + 2t &=& 11 & \\ 2z - 5t &=& -26 & L_4 \leftarrow L_4+2L_3 \\ 4z - 9t &=& -48 & L_5 \leftarrow L_5+4L_3 \end{array}\right.$$

Elimination de z des équations 4.et 5

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 3y - z + 4t &=& 27 \\ y + 2z + 2t &=& 3 \\ -z + 2t &=& 11 \\ -t &=& -4 \\ -t &=& -4 \end{array}\right.$$

On remarque que les deux dernières équations sont identiques, on peut dire que la cinquième équation est redondante et la supprimer, on peut aussi mécaniquement éliminer t de la dernière équation:

$$\begin{cases} x + 3y - z + 4t = 27 \\ y + 2z + 2t = 3 \\ -z + 2t = 11 \\ -t = -4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

La cinquième équation est toujours satisfaite et on est ramené à la même remontée triangulaire que pour (EQ 1)

$$\mathcal{S}_{EQ8}=\mathcal{S}_{EQ1}$$

Notons qu'il est possible de mettre en évidence une relation entre les lignes du sytème de départ... cherchez la !

II.2 Système sans solution.

Soit le système suivant

$$\text{(EQ 7)} \begin{cases} x + 3y - z + 4t = 27 \\ -4x - 11y + 6z - 14t = -105 \\ -2x - 10y - 7z - 14t = -55 \\ 2x + 9y + 6z + 9t = 37 \\ 2x + 18y + 26z + 23t = 45 \end{cases}$$

Ce système ne diffère du précédent que par la second membre de la dernière équation.

$$\begin{cases} x + 3y - z + 4t = 27 & \\ -4x - 11y + 6z - 14t = -105 & L_2 \leftarrow L_2+4L_1 \\ -2x - 10y - 7z - 14t = -55 & L_3 \leftarrow L_3+2L_1 \\ 2x + 9y + 6z + 9t = 37 & L_4 \leftarrow L_4-2L_1 \\ 2x + 18y + 26z + 23t = 45 & L_5 \leftarrow L_5-2L_1 \end{cases}$$

Elimination de x des équations 2,3,4 et 5.

$$\begin{cases} x + 3y - z + 4t = 27 & \\ y + 2z + 2t = 3 & \\ -4y - 9z - 6t = -1 & L_3 \leftarrow L_3+ 4L_2 \\ 3y + 8z + t = -17 & L_4 \leftarrow L_4- 3L_2 \\ 12y + 28z + 15t = -9 & L_5 \leftarrow L_5-12L_2 \end{cases}$$

Elimination de y des équations 3, 4 et 5.

$$\begin{cases} x + 3y - z + 4t = 27 & \\ y + 2z + 2t = 3 & \\ -z + 2t = 11 & \\ 2z - 5t = -26 & L_4 \leftarrow L_4+2L_3 \\ 4z - 9t = -45 & L_5 \leftarrow L_5+4L_3 \end{cases}$$

Elimination de z des équations 4.et 5

$$\begin{cases} x + 3y - z + 4t = 27 \\ y + 2z + 2t = 3 \\ -z + 2t = 11 \\ -t = -4 \\ -t = -1 \end{cases}$$

On remarque que les deux dernières équations ne peuvent être simultanément satisafaites, on dit que ces deux équations sont **incompatibles** et arriver directement à la conclusion. On peut aussi éliminer t de la dernière équation:

$$\left\{\begin{array}{rcl}
x + 3y - z + 4t &=& 27\\
y + 2z + 2t &=& 3\\
-z + 2t &=& 11\\
-t &=& -4\\
0 &=& 3
\end{array}\right.$$

La dernière équation ne peut manifestement être satisfaite, le système n'admet pas de solutions!

$$\mathscr{S}_{EQ7}=\varnothing$$

II.3 Conditions d'existence d'une solution

Considérons maintenant le système:

$$(EQ\ 8)\ \left\{\begin{array}{rcl}
x + 3y - z + 4t &=& a\\
-4x - 11y + 6z - 14t &=& b\\
-2x - 10y - 7z - 14t &=& c\\
2x + 9y + 6z + 9t &=& d\\
2x + 18y + 26z + 23t &=& e
\end{array}\right.$$

et regardons à quelles conditions sur le second membre ce système admet (au moins) une solution.

$$\left\{\begin{array}{rcll}
x + 3y - z + 4t &=& a &\\
-4x - 11y + 6z - 14t &=& b & L_2 \leftarrow L_2+4L_1\\
-2x - 10y - 7z - 14t &=& c & L_3 \leftarrow L_3+2L_1\ )\\
2x + 9y + 6z + 9t &=& d & L_4 \leftarrow L_4-2L_1\\
2x + 18y + 26z + 23t &=& e & L_5 \leftarrow L_5-2L_1
\end{array}\right.$$

Elimination de x des équations 2,3,4 et 5.

$$\left\{\begin{array}{rcll}
x + 3y - z + 4t &=& a &\\
y + 2z + 2t &=& 4a+b &\\
-4y - 9z - 6t &=& 2a+c & L_3 \leftarrow L_3+ 4L_2\\
3y + 8z + t &=& -2a+d & L_4 \leftarrow L_4- 3L_2\\
12y + 28z + 15t &=& -2a+e & L_5 \leftarrow L_5-12L_2
\end{array}\right.$$

Elimination de y des équations 3, 4 et 5.

$$\left\{\begin{array}{rcll}
x + 3y - z + 4t &=& a &\\
y + 2z + 2t &=& 4a+ b &\\
-z + 2t &=& 18a+ 4b+c &\\
2z - 5t &=& -14a- 3b+d & L_4 \leftarrow L_4+2L_3\\
4z - 9t &=& -50a-12b+e & L_5 \leftarrow L_5+4L_3
\end{array}\right.$$

Elimination de z des équations 4.et 5

$$\left\{\begin{array}{rcl}
x + 3y - z + 4t &=& a\\
y + 2z + 2t &=& 4a+ b\\
-z + 2t &=& 18a+4b+ c\\
-t &=& 22a+5b+2c+d\\
-t &=& 22a+4b+4c+e
\end{array}\right.$$

Remarquons que les deux dernières équations ne diffèrent que par le second membre.
Elimination de t de la dernière équation:

$$\left\{\begin{array}{rcl}
x + 3y - z + 4t &=& a\\
y + 2z + 2t &=& 4a+ b\\
-z + 2t &=& 8a+4b+1c\\
-t &=& 22a+5b+2c+d\\
0 &=& -\ \ b+2c-d+e
\end{array}\right.$$

Il est immédiat que si la dernière équation est satisfaite alors le système admet une solution obtenue en effectuant la remontée triangulaire comme dans (EQ 3). Et par ailleurs le système n'admet pas de solutions si la dernière équation n'est pas satisfaite.

(EQ 8) admet donc (au moins) une solution si et seulement si:

$$\boxed{-b+2c-d+e=0}$$

On dit aussi que les équations de (EQ8) sont **compatibles** si et seulement si cette condition est vérifiée.

III Systèmes sous déterminés

On entend par système sous-déterminé tout système pour lequel le nombre d'équations est inférieur au nombre d'inconnues. "Il n'y a pas assez d'équations". Un tel système n'admettra selon les cas: aucune solution ou une infinité de solutions.

III.1

$$\text{(EQ 9)}\quad\begin{cases} x + 3y - z + 4t = 27 \\ -4x - 11y + 6z - 14t = -105 \\ -2x - 10y - 7z - 14t = -55 \end{cases}$$

En comparant avec (EQ 1) on constate que l'on a une equation de moins! Mais peu importe, on utilise toujours la méthode de Gauss !

$$\begin{cases} x + 3y - z + 4t = 27 & \\ -4x - 11y + 6z - 14t = -105 & L_2 \leftarrow L_2+4L_1 \\ -2x - 10y - 7z - 14t = -55 & L_3 \leftarrow L_3+2L_1 \end{cases}$$

Elimination de x des équations 2 et 3.

$$\begin{cases} x + 3y - z + 4t = 27 & \\ y + 2z + 2t = 3 & \\ -4y - 9z - 6t = -1 & L_3 \leftarrow L_3+ 4L_2 \end{cases}$$

Elimination de y de la dernière équation.

$$\begin{cases} x + 3y - z + 4t = 27 \\ y + 2z + 2t = 3 \\ -z + 2t = 11 \end{cases}$$

Ce qu'on peut écrire sous la forme:

$$\begin{cases} x + 3y - z = 27-4t \\ y + 2z = 3-2t \\ -z = 11-2t \end{cases}$$

x, y, z sont les inconnues principales et t est l'inconnue secondaire.

$$\begin{cases} z = 2t-11 \\ y = 3-2t-2z = 3-2t-2(2t-11) = -6t+25 \\ x = 27-4t-3y+z = 27-4t-3(-6t+25)+2t-11 = 16t-59 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_{(EQ\ 9)}=\{(16t-59,\ -6t+25,\ 2t-11,\ t)\ |\ t \in \mathbb{R}\}$$

III.2

Considérons maintenant le même système que précédemment mais avec un second membre quelconque:

$$\text{(EQ 10)}\quad\begin{cases} x + 3y - z + 4t = a \\ -4x - 11y + 6z - 14t = b \\ -2x - 10y - 7z - 14t = c \end{cases}$$

On utilise toujours la méthode de Gauss, comme dans (EQ 3) !

$$\begin{cases} x + 3y - z + 4t = a \\ -4x - 11y + 6z - 14t = b & L_2 \leftarrow L_2+4L_1 \\ -2x - 10y - 7z - 14t = c & L_3 \leftarrow L_3+2L_1 \end{cases}$$

Elimination de x des équations 2 et 3.

$$\begin{cases} x + 3y - z + 4t = a \\ y + 2z + 2t = 4a+b \\ -4y - 9z - 6t = 2a+c & L_3 \leftarrow L_3+ 4L_2 \end{cases}$$

Elimination de y de la dernière équation.

$$\begin{cases} x + 3y - z + 4t = a \\ y + 2z + 2t = 4a+ b \\ -z + 2t = 18a+4b+c \end{cases}$$

Ce qu'on peut écrire sous la forme:

$$\begin{cases} x + 3y - z = a -4t \\ y + 2z = 4a+ b -2t \\ -z = 18a+4b+c-2t \end{cases}$$

x, y, z sont les inconnues principales et t est l'inconnue secondaire.

$$\begin{cases} z = -18a-4b-c+2t \\ y = 4a+b-2t-2z = 4a+b-2t-2(-18a-4b-c+2t) = 40a+9b+2c-6t \\ x = a-4t-3y+z= a-4t-3(40a+9b+2c-6t)+(-18a-4b-c+2t)= -137a-31b-7c+16t \end{cases}$$

$\mathcal{S}_{(EQ\ 10)}=\{(-137a-31b-7c+16t,40a+9b+2c-6t,-18a-4b-c+2t,\ t)\ |\ t \in \mathbb{R}\}$

La solution est ici exprimée en fonction de la quatrième inconnue t dit "paramètre".

on peut aussi écrire le système sous la forme:

$$\begin{cases} x + 3y + 4t = a + z \\ y + 2t = 4a + b - 2z \\ 2t = 18a + 4b + c + z \end{cases}$$ x,y et t sont les inconnues principales et z est l'inconnue secondaire.

$$\begin{cases} t = 9a+2b+(1/2)c+(1/2)z \\ y = 4a+b-2z-2t = 4a+b-2z-(18a+4b+c+z) = -14a-3b-c-3z \\ x = a+z-3y-4t = a+z-3(-14a-3b-c-3z)-2(18a+4b+c+z) = 7a+b+c+8z \end{cases}$$

$\mathcal{S}_{(EQ\ 10)}=\{(7a+b+c+8z,\ -14a-3b-c-3z,\ z,\ 9a+2b+(1/2)c+(1/2)z)\ |\ z \in\mathbb{R}\}$

La solution est ici exprimée en fonction de la troisième inconnue inconnue z.

Notons que nous avons exprimé les solutions en fonction de t ou de z et qu'il aurait ici semble t-il été possible d'exprimer les solutiuons en fonction de x ou y. Il n'est pas toujours possible d'avoir un choix aussi large par exemple si dans la dernière équation (après l'échelonnement du système) le coefficient de z avait été nul, il n'aurait pas éte possible alors d'exprimer les solutions en fonction de t ....

IV Exemple "complet"

IV.1

On va illuster à nouveau la méthode de Gauss mais sur un exemple un peu plus complet.
Soit donc le système suivant:

$$
\text{(EQ 11)}\quad
\begin{cases}
20y-40z+20t+8u+8v+52w+64 = 340 \\
2x+3y+11t-u+4v+9w+6s = 47 \\
-6x-4y-10z-28t+5u-10v-14w+-2s = -56 \\
-8x+3y-30z-29t+10u-10v+3w+24s = 67 \\
-4x-26y+40z-42t-u-14v-72w-80s = -454 \\
10x+30y-30z+70t-9u+24v+86w+82s = 510 \\
-52x-143y+130z-351t+40u-120v-413w-384s = -2427
\end{cases}
$$

7 equations et 8 inconnues: le système est "sous-déterminé".
Le coeeficient de x dans la première équation est nul, aussi est -on amené à considérer la seconde équation (ou à ne pas considérer x en premier).
$L_3 \leftarrow L_3+3L_2$, $L_4 \leftarrow L_4+4L_2$, $L_5 \leftarrow L_5+L_2$, $L_6 \leftarrow L_6+5L_2$, $L_7 \leftarrow L_7+26L_7$,

$$
\begin{cases}
20y-40z+20t+8u+8v+52w+64s = 340 \\
2x+3y+11t-u+4v+9w+6s = 47 \\
5y-10z+5t+2u+2v+13w+16s = 85 \\
15y-30z+15t+6u+6v+39w+48s = 255 \\
-20y+40z-20t-3u-6v-54w-68s = -360 \\
15y-30z+15t-4u+4v+41w+52s = 275 \\
-65y+130z-65t+14u-16v-179w-228s = -1205
\end{cases}
$$

En choisissant de pivoter autour d'un des coeeficients de y, on choisit la troisième ligne comme offrant le pivot le plus simple:
$L_1 \leftarrow L_1-4L_3$, $L_4 \leftarrow L_4-3L_3$, $L_5 \leftarrow L_5-4L_3$, $L_6 \leftarrow L_6+3L_3$, $L_7 \leftarrow L_7-13L_7$

$$
\begin{cases}
0 = 0 \\
2x+3y+11t-u+4v+9w+6s = 47 \\
5y-10z+5t+2u+2v+13w+16s = 85 \\
0 = 0 \\
5u+2v-2w-4s = -20 \\
-10u-2v+2w+4s = 20 \\
40u+10v-10w-20s = -100
\end{cases}
$$

On note la disparition de deux équations, il etait possible de remarquer à l'étape précédente que les équations (1) et (4) étaient redondantes avec (3). On est amené alors à pivoter au tour du coefficient de u dans la cinquième équation.

$L_6 \leftarrow L_6+2L_5$, $L_7 \leftarrow L_7+8L_5$,

$$
\begin{cases}
0 = 0 \\
2x+3y+11t-u+4v+9w+6s = 47 \\
5y-10z+5t+2u+2v+13w+16s = 85 \\
0 = 0 \\
5u+2v-2w-4s = -20 \\
2v-2w-4s = -20 \\
-6v+6w+12s = 60
\end{cases}
$$

$L_7 \leftarrow L_7+3L_6$,

$$\left\{\begin{array}{rcl}
 & & 0 = 0 \\
2x+3y+11t-u+4v+9w+6s & = & 47 \\
5y-10z+5t+2u+2v+13w+16s & = & 85 \\
 & & 0 = 0 \\
5u+2v-2w-4s & = & -20 \\
2v-2w-4s & = & -20 \\
 & & 0 = 0
\end{array}\right.$$

On peut en fait éliminer les équations inutiles - ce qu'on pouvait faire aussi bien entendu en cours de route ! On a donc le système:

$$\left\{\begin{array}{rcl}
2x+3y+11t-u+4v+9w+6s & = & 47 \\
5y-10z+5t+2u+2v+13w+16s & = & 85 \\
5u+2v-2w-4s & = & -20 \\
2v-2w-4s & = & -20
\end{array}\right.$$

On peut encore écrire ce système sous la forme:

$$\left\{\begin{array}{rcl}
2x+3y-u+4v & = & 47-11t-9w-6s \\
5y+2u+2v & = & 85+10z-5t-13w-16s \\
5u+2v & = & -20+2w+4s \\
2v & = & -20+2w+4s
\end{array}\right.$$

x, y, u et v sont les inconnues principales et z, t, w, s sont les inconnues secondaires.notons que tous les termes diagonaux à gauche sont non nuls - en fait ce sont les pivots utilisés lors de la résolution. Sous cette forme il doit dejà être clair qu'il y a une infinité de solutions.

On peut procéder pour la résolution comme précédemment, en procédant par substitution successives. Du fait du second membre on préfere ici effectuer les calculs de la façon suivante qui consiste à éliminer les termes au dessus de la diagonale (**méthode dite de Gauss-Jordan)**

$$\left\{\begin{array}{rcl}
2x+3y-u+4v & = & 47-11t-9w-6s \\
5y+2u+2v & = & 85+10z-5t-13w-16s \\
5u+2v & = & -20+2w+4s \\
2v & = & -20+2w+4s
\end{array}\right.$$

$L_3 \leftarrow L_3-L_4$, $L_2 \leftarrow L_2-L_4$, $L_1 \leftarrow L_1-2L_4$,

$$\left\{\begin{array}{rcl}
2x+3y-u+ & = & 87-11t-13w-14s \\
5y+2u+ & = & 105+10z-5t-15w-20s \\
5u+ & = & 0 \\
2v & = & -20+2w+4s
\end{array}\right.$$

$L_2 \leftarrow L_2-(2/5)L_3$, $L_1 \leftarrow L_1+(1/5)L_3$

$$\left\{\begin{array}{rcl}
2x+3y & = & 87-11t-13w-14s \\
5y & = & 105+10z-5t-15w-20s \\
5u & = & 0 \\
2v & = & -20+2w+4s
\end{array}\right.$$

$L_1 \leftarrow L_1-(3/5)L_4$

$$\left\{\begin{array}{rcl}
2x & = & 24-6z-8t-4w-2s \\
5y & = & 105+10z-5t-15w-20s \\
5u & = & 0 \\
2v & = & -20+2w+4s
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl}
x & = & 12-3z-4t-2w-s \\
y & = & 21+2z-t-3w-4s \\
u & = & 0 \\
v & = & -10+w+2s
\end{array}\right.$$

$\mathscr{S}_{EQ11} = \{ (12-3Z-4t-2w-s, 21+2z-t+3w-4s, z, t, 0, -10+w+2s) \mid z,t,w,s \in \mathbb{R} \}$

IV.2

Considérons maintenant le même système mais avec un second membre quelconque:

$$\left\{\begin{array}{rcl}
+20y-40z+20t+8u+8v+52w+64s &=& a\\
2x+3y+11t-u+4v+9w+6s &=& b\\
-6x-4y-10z-28t+5u-10v-14w-2s &=& c\\
-8x+3y-30z-29t+10u-10v+3w+24s &=& d\\
-4x-26y+40z-42t-u-14v-72w-80s &=& e\\
10x+30y-30z+70t-9u+24v+86w+82s &=& f\\
-52x-143y+130z-351t+40u-120v-413w-384s &=& g
\end{array}\right.$$

Vis à vis de ce système on peut se poser donc 2 problèmes:

(1) A quelle(s) condition(s) sur le second membre admet-il au moins une solution ?

(2) Déterminer l'ensemble des solutions lorsqu'il est non vide.

On effectue alors les mêmes calculs que précédemment sauf bien sur pour le second membre !

$$\left\{\begin{array}{rcl}
20y-40z+20t+8u+8v+52w+64s &=& a\\
2x+3y+11t-u+4v+9w+6s &=& b\\
5y-10z+5t+2u+2v+13w+16s &=& 3b+c\\
15y-30z+15t+6u+6v+39w+48s &=& 4b+d\\
-20y+40z-20t-3u-6v-54w-68s &=& 2b+e\\
15y-30z+15t-4u+4v+41w+52s &=& -5b+f\\
-65y+130z-65t+14u-16v-179w-228s &=& 26b+g
\end{array}\right.$$

$L_3 \leftarrow L_3+3L_2$, $L_4 \leftarrow L_4+4L_2$, $L_5 \leftarrow L_5+L_2$, $L_6 \leftarrow L_6+5L_2$, $L_7 \leftarrow L_7+26L_7$,

$$\left\{\begin{array}{rcl}
0 &=& a-12b-4c\\
2x+3y+11t-u+4v+9w+6s &=& b\\
5y-10z+5t+2u+2v+13w+16s &=& 3b+c\\
0 &=& -5b-3c+d\\
5u+2v-2w-4s &=& 14b+4c+e\\
-10u-2v+2w+4s &=& -14b-3c+f\\
40u+10v-10w-20s &=& 65b+13c+g
\end{array}\right.$$

$L_1 \leftarrow L_1-4L_3$, $L_4 \leftarrow L_4-3L_3$, $L_5 \leftarrow L_5-4L_3$, $L_6 \leftarrow L_6+3L_3$, $L_7 \leftarrow L_7-13L_7$

$$\left\{\begin{array}{rcl}
0 &=& a-12b-4c\\
2x+3y+11t-u+4v+9w+6s &=& b\\
5y-10z+5t+2u+2v+13w+16s &=& 3b+c\\
0 &=& -5b-3c+d\\
5u+2v-2w-4s &=& 14b+4c+e\\
2v-2w-4s &=& 14b+5c+2e+f\\
-6v+6w+12s &=& -47b-19c-8e+g
\end{array}\right.$$

On note déja l'apparition de deux équations de compatibilité.

$L_6 \leftarrow L_6+2L_5$, $L_7 \leftarrow L_7+8L_5$,

$$\begin{cases}
0 = a-12b-4c \\
2x+3y+11t-u+4v+9w+6s = b \\
5y-10z+5t+2u+2v+13w+16s = 3b+c \\
0 = -5b-3c+d \\
5u+2v-2w-4s = 14b+4c+e \\
2v-2w-4s = 14b+5c+2e+f \\
0 = -5b-4c-2e+3f+g
\end{cases}$$

On remarque l'apparition d'une troisème équation de compatibilité. On a donc le système:

$$\begin{cases}
2x+3y+11t-u+4v+9w+6s = b \\
5y-10z+5t+2u+2v+13w+16s = 3b+c \\
5u+2v-2w-4s = 14b+4c+e \\
2v-2w-4s = 14b+5c+2e+f \\
0 = -5b-4c-2e+3f+g \\
0 = a-12b-4c \\
0 = -5b-3c+d
\end{cases}$$

Ce qu'on peut encore écrire:

$$\begin{cases}
2x+3y-u+4v = b-11t-9w-6s \\
5y+2u+2v = 3b+c+10z-5t-13w-16s \\
5u+2v = 14b+4c+e+2w+4s \\
2v = 14b+5c+2e+f+2w+4s \\
0 = 5b-4c-2e+3f+g \\
0 = a-12b-4c \\
0 = -5b-3c+d
\end{cases}$$

Le système admet des solutions si et seulement si les 3 dernières équations sont satisfaites soit donc:

$$\begin{cases}
-5b-4c-2e+3f+g = 0 \\
a-12b-4c = 0 \\
-5b-3c+d = 0
\end{cases}$$

Ce sont les conditions de compatibilité du système !

Ce système ici se résoud (dans cet exemple, car il est échelonné!) directement on a:

$$\begin{cases}
g = 5b+4c+2e-3f \\
a = 12b+4c \\
d = 5b+3c
\end{cases}$$

NB: Il n'est pas toujours demandé de résoudre le système d'équations de compatibilité, cependant on demande toujours de s'assurer qu'il n'y a pas d'équation redondante en en éliminant au besoin ! Pour cela, il faut au minimum echelonner le système !

$$\begin{cases}
g = 5b+4c+2e-3f \\
a = 12b+4c \\
d = 5b+3c
\end{cases}$$

Si les équations de compatibilité sont satisfaites on a donc le système:

$$\begin{cases}
2x+3y-u+4v = b-11t-9w-6s \\
5y+2u+2v = 3b+c+10z-5t-13w-16s \\
5u+2v = 14b+4c+e+2w+4s \\
2v = 14b+5c+2e+f+2w+4s
\end{cases}$$

On effectue la remontée triangulaire par Gauss-Jordan:

$L_3 \leftarrow L_3-L_4$, $L_2 \leftarrow L_2-L_4$, $L_1 \leftarrow L_1-2L_4$.

$$\begin{cases} 2x+3y-u+ = -27b-10c-4e-2f \quad -11t-13w-14s \\ 5y+2u+ = -11b-4c-2e-f \quad +10z-5t-15w-20s \\ 5u+ = -c-e-f \\ 2v = 14b+5c+2e+f \quad +2w+4s \end{cases}$$

L_2 <- $L_2-(2/5)L_3$, L_1 <- $L_1+(1/5)L_3$

$$\begin{cases} 2x+3y = -27b-\frac{51}{5}c-\frac{21}{5}e-\frac{11}{5}f \quad -11t-13w-14s \\ 5y = -11b-\frac{18}{5}c-\frac{8}{5}e-\frac{3}{5}f \quad +10z-5t-15w-20s \\ 5u = -c-e-f \\ 2v = 14b+5c+2e+f \quad +2w+4s \end{cases}$$

L_1 <- $L_1-(3/5)L_4$

$$\begin{cases} 2x = -\frac{102}{5}b-\frac{201}{25}c-\frac{81}{25}e-\frac{46}{25}f \quad -6z-8t-4w-2s \\ 5y = -11b-\frac{18}{5}c-\frac{8}{5}e-\frac{3}{5}f \quad +10z-5t-15w-20s \\ 5u = -c-e-f \\ 2v = 14b+5c+2e+f \quad +2w+4s \end{cases}$$

Soit donc:

$$\begin{cases} x = -3z-4t-2w-s-\frac{51}{5}b-\frac{201}{50}c-\frac{81}{50}e-\frac{23}{25}f \\ y = 2z-t-3w-4s-\frac{11}{5}b-\frac{18}{25}c-\frac{8}{25}e-\frac{3}{25}f \\ u = -\frac{1}{5}c-\frac{1}{5}e-\frac{1}{5}f \\ v = w+2s+7b+\frac{5}{2}c+e+\frac{1}{2}f \end{cases}$$

$\mathscr{S}_{EQ}=\{(-3z-4t-2w-s-\frac{51}{5}b-\frac{201}{50}c-\frac{81}{50}e-\frac{23}{25}f,\ 2z-t-3w-4s-\frac{11}{5}b-\frac{18}{25}c-\frac{8}{25}e-\frac{3}{25}f,$
$z,t,-\frac{1}{5}c-\frac{1}{5}e-\frac{1}{5}f,\ w+2s+7b+\frac{5}{2}c+e+\frac{1}{2}f,w,s)\ |\ z,t,w,s\in\mathbb{R}\}$