MINF0402 - Mars 2019 - - Corrigé

ic-ctot. v2.0 - C2.11

Exercice 1 (Corrigé)

Voici la sortie de la console - avec quelques commentaires

```
1  --> A=0:10:30
2   A  =
3
4     0.    10.    20.    30.
5  --> B=4:-1:1
6   B  =
7
8     4.    3.    2.    1.
9  --> R1=A+B
10  R1  =
11
12    4.    13.    22.    31.
13 --> R2=A*B'
14  R2  =
15
16    100.
17 --> R3=A'*B
18  R3  =
19
20    0.     0.     0.     0.
21    40.    30.    20.    10.
22    80.    60.    40.    20.
23    120.   90.    60.    30.
24 --> R4=A.*B
25  R4  =
26
27    0.    30.    40.    30.
28 --> C=zeros(A)
29  C  =
30
31    0.    0.    0.    0.
32 --> S=0; for i=1:5 S=S+i; end; disp(S)
33
34    15.
35 --> t=linspace(-1,1,11);
36 --> plot(t,t.*t);plot(t,t.*t,'r+')
```

- A la ligne 14, B' est la transposé de B, A*B' est donc une multiplication ligne par colonne $(1,4)\times(4,1)\to(1,1)$ un scalaire !
- A la ligne 18, A' est la transposé de A, A'*B est donc une multiplication colonne par ligne $(4,1)\times(1,4)\to(4,4)$.
- A la ligne 25, " .* " indique que l'on effectue la multiplication élément par élément.
- A la ligne 33, on fait donc la somme des nombres de 1 à 5 !
- Avec l'instruction à la ligne 36 : " >t=**linspace**(−1,1,11);" t contient 11 valeurs équi-réparties de -1 à 1, on a donc un pas de $\frac{1-(-1)}{11-1}=0.2$ soit : " $-1.\quad -0.8\quad -0.6\quad -0.4\quad -0.2\quad 0.\quad 0.2\quad 0.4\quad 0.6\quad 0.8\quad 1.$ bien entendu du fait du " ; " rien ne s'affiche à l'écran.
- Avec les instructions de la ligne 37, " >**plot**(t,t.*t);**plot**(t,t.*t,'r+')" " t.*t" est un tableau contenant les carrés des éléments de t, on effectue ensuite sur un même dessin (plus précisément dans une (nouvelle) fenêtre graphique) les deux tracés. En langage courant on a la fonction $f(x)=x^2$, x en abscisse et $y=f(x)$ en ordonnée, la fonction étant calculée pour tous les $t_i\quad(1\le i\le 11)$, on a donc les points (t_1,t_1^2), $(t_2,t_2^2),\ldots,(t_{11},t_{11}^2)$ avec le premier plot on trace les segments de droite joignant ces différents points dans la couleur par défaut, et avec le second plot on trace le signe "+" en rouge à l'emplacement de chacun de ces points. Comme on a pris très peu de points, la courbe n'est pas trés jolie : on voit les segments des droite, il faudrait prendre au moins le double de points pour avoir un tracé correct de la fonction $f(x)=x^2$. La représentation est donnée à toutes fins utiles ci dessous. (les "+ rouge" sont à peine visible du fait de la réduction.

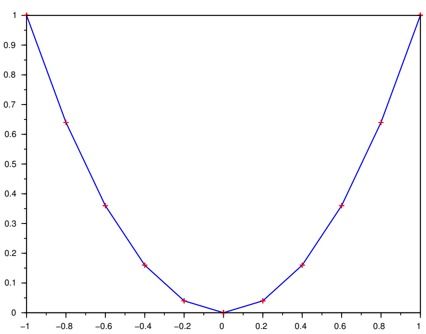

Figure 1 – Le tracé de l'exercice 1

Exercice 2 (Corrigé)

1. A : Inversion à la Gauss Jordan, dans l'ordre

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{lcl} & & \\ L_2 & \leftarrow & L_2 + L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & L_1 + 3L_2 \\ & & \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & L_1 + 4L_3 \\ L_2 & \leftarrow & L_2 + 2L_3 \\ & & \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -8 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Soit : $A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -1 & 4 \\ -5 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. B : Inversion à la Gauss-Jordan : dans l'ordre

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{lcl} & & \\ L_2 & \leftarrow & 2L_2 - 3L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & L_1 + L_2 \\ & & \\ & & \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Soit : $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B : Inversion à la Gauss-Jordan : plus astucieux avec un autre ordre.

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{lcl} & & \\ L_2 & \leftarrow & L_2 - L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & L_1 - 2L_2 \\ & & \\ & & \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & -1 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & L_1 + L_3 \\ & & \\ & & \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & -1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Soit donc bien entendu à nouveau : $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. C : Inversion à la Gauss Jordan - dans l'ordre

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{lcl} & & \\ L_2 & \leftarrow & L_2 - 2L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - 3L_1 \\ L_4 & \leftarrow & L_4 - 2L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & L_1 - L_2 \\ & & \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - 2L_2 \\ L_4 & \leftarrow & L_4 - 2L_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & L_1 - L_4 \\ L_2 & \leftarrow & L_2 + L_4 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - 2L_4 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Soit : $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3 (Corrigé)

1. (a) La première équation s'écrit : $b_1x_1 + c_1x_2 + d_1x_3 = k_1$
   On a alors $x_1 = \alpha_1x_2 + \beta_1x_3 + \gamma_1$ avec :

$$\alpha_1 = -\frac{c_1}{b_1}, \quad \beta_1 = -\frac{d_1}{b_1} \quad \text{et} \quad \gamma_1 = \frac{k_1}{b_1}$$

   (b) La deuxième équation s'écrit : $a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2x_4 = k_2$. Soit alors en reportant l'expression obtenue au dessus :

$$\begin{gathered} a_2(\alpha_1x_2 + \beta_1x_3 + \gamma_1) + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2x_4 = k_2 \\ \sim (a_2\alpha_1 + b_2)x_2 + (a_2\beta_1 + c_2)x_3 + d_2x_4 = k_2 - a_2\gamma_1 \end{gathered}$$

   On peut alors écrire $x_2 = \alpha_2x_3 + \beta_2x_4 + \gamma_2$ où :

$$\alpha_2 = -\frac{a_2\beta_1 + c_2}{a_2\alpha_1 + b_2}, \quad \beta_2 = \frac{-d_2}{a_2\alpha_1 + b_2} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \frac{k_2 - a_2\gamma_1}{a_2\alpha_1 + b_2}$$

2. La i-ème équation s'écrit : $a_ix_{i-1} + b_ix_i + c_ix_{i+1} + d_ix_{i+2} = k_i$.
   La relation obtenue à l'étape (i-1) s'écrivant : $x_{i-1} = \alpha_{i-1}x_i + \beta_{i-1}x_{i+1} + \gamma_{i-1}$ alors en reportant on a :

$$\begin{gathered} a_i(\alpha_{i-1}x_i + \beta_{i-1}x_{i+1} + \gamma_{i-1}) + b_ix_i + c_ix_{i+1} + d_ix_{i+2} = k_i \\ \sim (a_i\alpha_{i-1} + b_i)x_i + (a_i\beta_{i-1} + c_i)x_{i+1} + d_ix_{i+2} = k_i - a_i\gamma_{i-1} \end{gathered}$$

   Soit alors : $x_i = \alpha_ix_{i+1} + \beta_ix_{i+2} + \gamma_i$ avec :

$$\alpha_i = -\frac{a_i\beta_{i-1} + c_i}{a_i\alpha_{i-1} + b_i}, \quad \beta_i = \frac{-d_i}{a_i\alpha_{i-1} + b_i} \quad \text{et} \quad \gamma_i = \frac{k_i - a_i\gamma_{i-1}}{a_i\alpha_{i-1} + b_i}$$

3. (a) La (n-1)-ème équation s'écrit : $a_{n-1}x_{n-2} + b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-1}x_n = k_{n-1}$
   La relation obtenue à l'étape (n-2) s'écrit : $x_{n-2} = \alpha_{n-2}x_{n-1} + \beta_{n-2}x_n + \gamma_{n-2}$, d'où en la reportant dans l'équation :

$$\begin{gathered} a_{n-1}(\alpha_{n-2}x_{n-1} + \beta_{n-2}x_n + \gamma_{n-2}) + b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-1}x_n = k_{n-1} \\ \sim (a_{n-1}\alpha_{n-2} + b_{n-1})x_{n-1} + (a_{n-1}\beta_{n-2} + c_{n-1})x_n = k_{n-1} - a_{n-1}\gamma_{n-2} \end{gathered}$$

   Soit donc $x_{n-1} = \alpha_{n-1}x_n + \gamma_{n-1}$ avec :

$$\alpha_{n-1} = -\frac{a_{n-1}\beta_{n-2} + c_{n-1}}{a_{n-1}\alpha_{n-2} + b_{n-1}} \quad \text{et} \quad \gamma_{n-1} = \frac{k_{n-1} - a_{n-1}\gamma_{n-2}}{a_{n-1}\alpha_{n-2} + b_{n-1}}$$

   (b) La n-ième et dernière équation s'écrit : $a_nx_{n-1} + b_nx_n = k_n$, d'où en reportant l'expression précédente :

$$a_n(\ \alpha_{n-1}x_n + \gamma_{n-1}\ ) + b_nx_n = k_n$$

$$x_n = \frac{k_n - a_n\gamma_{n-1}}{a_n\alpha_{n-1} + b_n} = \gamma_n$$

L'algorithme en pseudo-code

- On reprend pour l'essentiel les notations précédentes : on suppose que l'on dispose de tableaux de longueurs n : a,b,c,d et k (prédéfinis) et X, Alpha, Beta, Gamma qui seront remplis au cours de l'algo. NB (a(1), d(n-1), c(n), d(n), Beta(n-1), Alpha(n) et Beta(n) ne servent à rien)

```
// Phase 1
Alpha(1) <-- c(1)/b(1)
 Beta(1) <-- d(1)/b(1)
Gamma(1) <-  k(1)/b(1)
Pour I allant de 2 à n-2
        Denom    <- a(i)*Alpha(i-1)+b(i)
       Alpha(i) <- -(a(i)*Beta(i-1)+c(i))/Denom
        Beta(i) <-- d(i)/Denom
       Gamma(i) <- (k(i)-a(i)*Gamma(i-1))/Denom
Fin Pour
     Denom  <- a(n-1)*Alpha(n-2)+b(n-1)
Alpha(n-1) <- -(a(n-1)*Beta(n-2)+c(n-1))/Denom
Gamma(n-1) <- (k(n-1)-a(n-1)*Gamma(n-2))/Denom
  Gamma(n) <- (k(n)-a(n)*Gamma(n-1))/ (a(n)*Alpha(n-1)+b(n))
// Phase 2
  x(n) <- Gamma(n)
x(n-1) <- Alpha(n-1)*x(n)+Gamma(n-1)
Pour i descendant de n-2 à 1
     x(i) <- Alpha(i)*x(i+1)+Beta(i)*x(i+2)+Gamma(i)
Fin Pour
Afficher(`` La solution est : '',x)
```