Chapitre VII

Déterminants

VII.1 Définition du déterminant

Définition VII.1.1 *Si* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *alors on définit le* ***déterminant de*** A, $det(A)$ *par :*

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Ceci n'est rien d'autre que le produit vectoriel des deux colonnes de A et correspond à la surface du parallélogramme définie par les deux vecteurs définis par les colonnes de A*([1]) C'est qu'on appelle la* ***formule de Sarrus pour les déterminants*** 2×2

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ *alors on définit le* ***déterminant de*** A, $det(A)$ *par :*

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Ce n'est rien d'autre que le produit mixte des trois colonnes de A, ce qui correspond au volume du parallélépipède défini par ces trois vecteurs colonnes ([2]).
En fait on peut aussi écrire cette dernière quantité sous la forme :

$$det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

Dite formule du développement par rapport à la première ligne, où l'on a utilisé des déterminants 2×2.
Le calcul donne l'expression suivante :

$$det\ A \ = \ a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

On peut aussi écrire cette expression sous la forme dite (dite ***formule de Sarrus pour les déterminants*** 3×3*)*

$$det\ A \ = \ (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{12}a_{33})$$

(Pour obtenir "mécaniquement" cette formule, on utilise le procédé mnémotechnique suivant : on recopie juste en dessous de la matrice les deux premières lignes de celle ci puis pour obtenir les 3 premiers termes de l'expression (avec le +) on considère le produit des termes situés sur la "diagonale" principale que l'on raye, idem avec les deux "pseudo-diagonales" situées en dessous ; puis pour obtenir les 3 derniers termes de l'expression (avec le −) on considère dans "l'autre sens" de la même façon la "diagonale" secondaire et les deux "pseudo-diagonales" situées en dessous que l'on raye.

1. le signe est lié à *l'orientation* du système de deux vecteurs défini par les colonnes de A
2. le signe est lié à *l'orientation* du système de trois vecteurs défini par les colonnes de A

Dans le cas général, le déterminant généralise la notion de volume en dimension n et est défini de façon récurrente par :

Définition VII.1.2 *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,n}$*, on définit le* déterminant de A *:* $\det(A)$*, de la manière suivante :*

— *si* $n = 1$*,* $A = (a)$*, on pose* $det\ A = a$*,*

— *si* $n > 1$*, notons* $A_{|i,j|}$ *la matrice (dite* mineure*) obtenue à partir de* A *en supprimant la* i^e *ligne et la* j^e *colonne, on pose alors :*

$$det\ A = (-1)^{1+1}a_{11}det\ A_{|1,1|} + \ldots + (-1)^{k+1}a_{1k}det\ A_{|1,k|} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{1n}det\ A_{|1,n|}. \quad \text{(VII.1.2.1)}$$

C'est la formule du développement par rapport à la première ligne.
Le scalaire det A *est dit* **déterminant** *de* A *et on le note habituellement :*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Proposition VII.1.3 *On montre en fait que l'on peut aussi utiliser pour* $0 \leq i \leq n$ *:*

$$\begin{aligned} det\ A &= (-1)^{i+1}a_{i1}det\ A_{|i,1|} + \ldots + (-1)^{i+k}a_{ik}det\ A_{|i,k|} + \ldots + (-1)^{i+n}a_{in}det\ A_{|i,n|} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{ik}det\ A_{|i,k|} \end{aligned} \quad \text{(VII.1.3.1)}$$

C'est la formule dite du <u>*développement par rapport à la ligne i*</u>*, le résultat est indépendant de la ligne i utilisée.*

Proposition VII.1.4 *Et on montre qu'on peut aussi utiliser pour* $0 \leq j \leq n$ *:*

$$\begin{aligned} det\ A &= (-1)^{1+j}a_{1j}det\ A_{|1,j|} + \ldots + (-1)^{k+j}a_{kj}det\ A_{|k,j|} + \ldots + (-1)^{n+j}a_{nj}det\ A_{|n,j|} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}det\ A_{|k,j|} \end{aligned} \quad \text{(VII.1.4.1)}$$

C'est la formule dite du <u>*développement par rapport à la colonne j*</u>*, le résultat est indépendant de la colonne j utilisée.*

Définition VII.1.5 *La quantité* $c_{ij} = (-1)^{i+j}det\ A_{|i,j|}$ *est nommé* ***cofacteur de*** a_{ij} *et soit* $C = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ C *est la* ***matrice des cofacteurs de*** A *ou encore la* ***comatrice de*** A *et est notée* $com(A)$*.*

Exemple VII.1.6 *Les flèches dans les calculs qui suivent, indiquent la colonne ou la ligne par rapport* *à laquelle on effectue le développement.*

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \leftarrow \\
&= 2 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \leftarrow \quad + 0 + 4 \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} \leftarrow \\
&\quad +4 \times (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \leftarrow \\
&= 2 \times \left[1 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + 0 + 2 \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \right] \\
&\quad +4 \times \left[0 + 2 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 4 \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right] \\
&\quad -4 \left[0 + 2 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-2) \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right] \\
&= 2 \times (-6 + 8) + 4 \times (-14 + 12) - 4 \times (6 - 6) = 4 - 8 = -4
\end{aligned}
$$

Proposition VII.1.7 *La définition permet d'obtenir immédiatement les propriétés suivantes :*

1. *Le déterminant d'une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure) est égal au produit de ses termes diagonaux.*
2. *En particulier le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit de ses termes diagonaux. En particulier le déterminant de la matrice identité est égal à 1.*
3. *Dans le cas complexe, si $\overline{A}$ est la matrice dont les termes sont les conjugués de ceux de A alors*

$$det\ \overline{A} = \overline{det\ A}.$$

Théorème VII.1.8 *Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n alors*

$$det(AB) = det(A) \times det(B)$$

On en déduit immédiatement

Proposition VII.1.9 *Soient A et A' deux matrices carrées semblables d'ordre n, c'est à dire telles qu'il existe P inversible d'ordre n avec $A' = P^{-1}AP$ alors $det(A) = det(A')$.*

VII.2 Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition VII.2.1 *On définit le déterminant d'une famille de n vecteurs*

$$(v^1, v^2, \ldots, v^n) \quad de \quad \mathbb{K}^n$$

comme étant le déterminant de la matrice dont les colonnes sont définies respectivement par $v^1, v^2, \ldots, v^n$.

plus généralement :

Définition VII.2.2 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit $\mathcal{B}$ une base de E.*
Soit $(v^1, v^2, \ldots, v^n)$ une famille d'éléments de E alors on définit :

$$det_{\mathcal{B}}(v^1, v^2, \ldots, v^n)$$

comme étant le déterminant de la matrice formée par les coordonnées de $(v^1, v^2, \ldots, v^n)$ sur la base $\mathcal{B}$.

Bien entendu, ceci dépend de la base utilisée ! ([3]) Dans le cas de $\mathbb{K}^n$ avec la base canonique, on retrouve la définition précédente.

VII.3 Propriétés relativement aux lignes et colonnes

Théorème VII.3.1 (n-linéarité du déterminant) *Lorsque l'on fixe toutes les colonnes sauf une (ci dessous la $k^{\text{ème}}$) le déterminant se comporte comme une application linéaire. On dit que le déterminant est n-linéaire. C'est à dire :*

$$\begin{aligned} & det\ (A^{(1)}, \dots, A^{(k-1)}, \lambda A^{(k)}, A^{(k+1)}, \dots, A^{n}) \\ = \ & \lambda\ det\ (A_1, \dots, A^{(k-1)}, A^{k}, A^{(k+1)}, \dots, A^{(n)}) \end{aligned} \tag{VII.3.1.1}$$

$$\begin{aligned} & det\ (A^{(1)}, \dots, A^{(k-1)}, B + C, A^{(k+1)}, \dots, A^{(n)}) \\ = \ & det\ (A^{(1)}, \dots, A^{(k-1)}, B, A^{(k+1)}, \dots, A^{(n)}) \\ + \ & det\ (A^{(1)}, \dots, A^{(k-1)}, C, A^{(k+1)}, \dots, A^{(n)}). \end{aligned} \tag{VII.3.1.2}$$

($\lambda \in K$, B et C sont des vecteurs colonnes).

En conséquence, si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, on a

$$\det\ (\lambda A) = \det\ (\lambda A^{(1)}, \dots, \lambda A^{(n)}) = \lambda^n \det\ A$$

puisque "on sort un λ par colonne" ([4]) et :

$$\det\ (A^{(1)}, \dots, A^{(k-1)}, 0, A^{(k+1)}, \dots, A^{(n)}) = 0$$

puisque une colonne nulle peut être considérée comme le produit du réel 0 par une colonne quelconque.

Théorème VII.3.2
1. *Si une colonne est composée uniquement de 0, alors le déterminant est nul.*
2. *Si deux colonnes sont égales, le déterminant est nul.*
3. *Si deux colonnes sont proportionnelles alors le déterminant est nul.*
4. *Si on échange entre elles deux colonnes de la matrice, le déterminant change de signe, c'est la propriété d'antisymmétrie.*
5. *Le déterminant d'une matrice ne change pas, si à une colonne, on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes.*
6. *Si une colonne est une combinaison linéaire des autres, alors le déterminant est nul.*

Théorème VII.3.3 *Le déterminant d'une matrice est égale au déterminant de sa transposée.*

On déduit le théorème cousin de (VII.3.2) :

Théorème VII.3.4
1. *Si une ligne est composée uniquement de 0, alors le déterminant est nul.*
2. *Si deux lignes sont égales, le déterminant est nul.*
3. *Si deux lignes sont proportionnelles alors le déterminant est nul.*
4. *Si on échange entre elles deux lignes de la matrice, le déterminant change de signe.*
5. *Le déterminant d'une matrice ne change pas, si à une ligne, on ajoute une combinaison linéaire des autres lignes.*
6. *Si une ligne est une combinaison linéaire des autres, alors le déterminant est nul.*

Ces propriétés sont utilisées pour faciliter le calcul des déterminants, par une méthode qui est similaire à la méthode de Gauss mais qui peut opérer sur les lignes et sur les colonnes.

3. Ce qui n'a rien de surprenant, cela équivaut à se définir un "système d'unités" !
4. Ainsi si l'on multiplie la longueur d'une (seule) arête d'un parallélépipède par λ alors le volume est multiplié par λ, par contre si on multiplie la longueur de chacune des arêtes par λ, le volume est multiplié par λ^3

Exemple VII.3.5 *On reprend le déterminant de l'exemple (VII.1.6) qu'on va recalculer en utilisant les propriétés des détermiants :*

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - 2C_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & -7 \end{vmatrix} \leftarrow \\
&= 2 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & -7 \end{vmatrix} \; C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1 \\
&= 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & -7 \end{vmatrix} \leftarrow \\
&= 2 \times (-1)^{1+1} \times 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} = 2 \times (-14 + 12) = -4
\end{aligned}
$$

VII.4 Propriétés fondamentales

L'importance du déterminant est lié aux théorèmes suivants :

Théorème VII.4.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, alors A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.*

En fait soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ une matrice inversible alors :
$AA^{-1} = Id_n$ et donc $det(AA^{-1}) = det(Id_n) = 1$ soit encore $det(A) \times det(A^{-1}) = 1$ et donc $det(A) \neq 0$ et $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$
La réciproque est cependant moins triviale.
On a le remarquable :

Théorème VII.4.2 *Dans $\mathbb{K}^n$ une famille de n vecteurs est libre si et seulement le déterminant de la matrice associée est non nul.*

En utilisant le fait qu'une famille libre maximale est une base on déduit immédiatement :

Théorème VII.4.3 *Dans $\mathbb{K}^n$ une famille de n vecteurs est une base si et seulement le déterminant de la matrice associée est non nul.*