MA0407- DS février 2018 - - Corrigé

ic-ctot. v1.2

Exercice 1 - Corrigé

1. Par la méthode magique à la Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 10 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{lcl} & & \\ L_2 & \leftarrow & L_2 + 3L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & L_1 + 3L_2 \\ & & \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -8 & 10 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & L_1 + 8L_3 \\ L_2 & \leftarrow & L_2 + 3L_3 \\ & & \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Par la méthode Magique à la Gauss

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 10 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{lcl} & & \\ L_2 & \leftarrow & L_2 + 3L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{lcl} & & \\ & & \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & L_1 - L_3 \\ L_2 & \leftarrow & L_2 + 3L_3 \\ & & \end{array}$$

Remontée (façon Gauss Jordan)

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & L_1 + 3L_2 \\ & & \\ & & \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Par les systèmes à la Gauss : Réduction

$$\sim \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 3y & + & z & = & a \\ -3x & + & 10y & - & 6z & = & b \\ -2x & + & 7y & - & 4z & = & c \end{array}\right. \quad \begin{array}{lcl} & & \\ L_2 & \leftarrow & L_2 + 3L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$\sim \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 3y & + & z & = & a \\ & & y & - & 3z & = & 3a + b \\ & & y & - & 2z & = & 2a + c \end{array}\right. \quad \begin{array}{lcl} & & \\ & & \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\sim \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & - & 3y & + & z & = & a & & & & \\ & & y & - & 3z & = & 3a & + & b & & \\ & & & & z & = & -a & - & b & + & c \end{array}\right.$$

Remontée (façon Gauss-Jordan, on peut aussi faire de la substitution) :

$$\sim \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & - & 3y & + & z & = & a & & & & \\ & & y & - & 3z & = & 3a & + & b & & \\ & & & & z & = & -a & - & b & + & c \end{array}\right. \qquad \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & L_1 - L_3 \\ L_2 & \leftarrow & L_2 + 3L_3 \\ & & \end{array}$$

$$\sim \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & - & 3y & & & = & 2a & + & b & - & c \\ & & y & & & = & & - & 2b & + & 3c \\ & & & & z & = & -a & - & b & + & c \end{array}\right. \qquad \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & L_1 + 3L_2 \\ & & \\ & & \end{array}$$

$$\sim \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & & & & & = & 2a & - & 5b & + & 8c \\ & & y & & & = & & - & 2b & + & 3c \\ & & & & z & = & -a & - & b & + & c \end{array}\right.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Par la méthode magique à la Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{lcl} & & \\ L_2 & \leftarrow & L_2 + 2L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 + L_1 \\ L_4 & \leftarrow & L_4 - 3L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & L_1 - L_2 \\ & & \\ L_3 & \leftarrow & L_3 + L_2 \\ L_4 & \leftarrow & L_4 + L_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{lcl} & & \\ L_2 & \leftarrow & L_2 - L_3 \\ & & \\ & & \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & L_1 + L_4 \\ L_2 & \leftarrow & L_2 - 2L_4 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 + 2L_4 \\ & & \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par la méthode Magique à la Gauss

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{lcl} & & \\ L_2 & \leftarrow & L_2 + 2L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 + L_1 \\ L_4 & \leftarrow & L_4 - 3L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{lcl} & & \\ & & \\ L_3 & \leftarrow & L_3 + L_2 \\ L_4 & \leftarrow & L_4 + L_2 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&1&-1&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&2&1&0&0\\ 0&0&1&-2&3&1&1&0\\ 0&0&0&1&-1&1&0&1 \end{array}\right)\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1+L_4\\ \\ L_3 \leftarrow L_3+2L_4\\ \\ \end{array}$$

Remontée façon Gauss- Jordan

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&1&0&0&1&0&1\\ 0&1&1&0&2&1&0&0\\ 0&0&1&0&1&3&1&2\\ 0&0&0&1&-1&1&0&1 \end{array}\right)\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1-L_3\\ L_2 \leftarrow L_2-L_3\\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&0&0&-1&-2&-1&-1\\ 0&1&0&0&1&-2&-1&-2\\ 0&0&1&0&1&3&1&2\\ 0&0&0&1&-1&1&0&1 \end{array}\right)\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1-L_2\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&-2&0&0&1\\ 0&1&0&0&1&-2&-1&-2\\ 0&0&1&0&1&3&1&2\\ 0&0&0&1&-1&1&0&1 \end{array}\right)$$

$$C^{-1}=\begin{pmatrix} -2&0&0&1\\ 1&-2&-1&-2\\ 1&3&1&2\\ -1&1&0&1 \end{pmatrix}$$

Par les systèmes à la Gauss : Réduction

$$\sim\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z-t &=& a\\ -2x-y-z+2t &=& b \qquad L_2 \leftarrow L_2+2L_1\\ -x-2y-z-t &=& c \qquad L_3 \leftarrow L_3+L_1\\ 3x+2y+2z-2t &=& d \qquad L_4 \leftarrow L_4-3L_1 \end{array}\right.$$

$$\sim\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z-t &=& a\\ y+z &=& 2a+b\\ -y-2t &=& a+c \qquad L_3 \leftarrow L_3+L_2\\ -y-z+t &=& -3a+d \qquad L_4 \leftarrow L_4+L_2 \end{array}\right.$$

$$\sim\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z-t &=& a\\ y+z &=& 2a+b\\ z-2t &=& 3a+b+c\\ t &=& -a+b+d \end{array}\right.$$

$$\sim\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z-t &=& a\\ y+z &=& 2a+b\\ z-2t &=& 3a+b+c\\ t &=& -a+b+d \end{array}\right.$$

Remontée (façon Gauss-Jordan - on peut aussi faire de la substitution)

$$\sim\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z-t &=& a \qquad L_1 \leftarrow L_1+L_4\\ y+z &=& 2a+b\\ z-2t &=& 3a+b+c \qquad L_3 \leftarrow L_3+2L_4\\ t &=& -a+b+d \end{array}\right.$$

$$\sim\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& b+d \qquad L_1 \leftarrow L_1-L_3\\ y+z &=& 2a+b \qquad L_2 \leftarrow L_2-L_3\\ z &=& a+3b+c+2d\\ t &=& -a+b+d \end{array}\right.$$

$$\sim\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& -a-2b-c-d \qquad L_1 \leftarrow L_1-L_2\\ y &=& a-2b-c-2d\\ z &=& a+3b+c+2d\\ t &=& -a+b+d \end{array}\right.$$

$$\sim \left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} x & & & & = & -2a & & & & & + & d \\ & y & & & = & a & - & 2b & - & c & - & 2d \\ & & z & & = & a & + & 3b & + & c & + & 2d \\ & & & t & = & -a & + & b & & & + & d \end{array} \right.$$

$$\sim \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & = & -2a & & & & & + & d \\ y & = & a & - & 2b & - & c & - & 2d \\ z & = & a & + & 3b & + & c & + & 2d \\ t & = & -a & + & b & & & + & d \end{array} \right.$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 - Corrigé

Voici la sortie de la console - avec quelques commentaires

```
-->A=[1  2]  //  Ligne
 A  =
     1.      2.

-->B=[3;4]   //  colonne
 B  =
     3.
     4.

-->C=A*B     //Produit  matriciel
 C  =          //  (1,2)x(2,1)->(1,1)
     11.

-->D=B*A  //Produit  matriciel
 D  =       //  (2,1)x(1,2)->(2,2)
     3.    6.
     4.    8.

-->E=A.*B'
 E  =
     3.    8.
//  produit  terme  de  A  avec  la
//  transposée  de  B.

-->F=[A'  ,  B]
 F  =
     1.      3.
     2.      4.
//  juxtaposition  de  deux  colonnes

-->G=[B'  ;  A]
 G  =
     3.      4.
     1.      2.
//  superposition  de  deux  lignes

-->AA=10*matrix(1:9,3,3)
 AA  =
     10.     40.     70.
     20.     50.     80.
     30.     60.     90.

-->BB=diag(AA)
 BB  =
     10.
     50.
     90.

-->CC=diag(BB)
 CC  =
     10.     0.      0.
     0.      50.     0.
     0.      0.      90.

-->EE=AA([2  3],[2  3])
 EE  =
     50.     80.
     60.     90.

-->FF=AA(3:-1:1,3:-1:1)
 FF  =
     90.     60.     30.
     80.     50.     20.
     70.     40.     10.
//  Lignes  et  colonnes  sont  donc  prises
//  dans  l'ordre  3  2  1  que  définit  3:-1:1

-->x=linspace(-3,3,7)
 x  =
  - 3.  - 2.  - 1.   0.   1.   2.   3.
//  on  va  de  -3  à  3  avec
//  7  points  donc  6  espaces
//  le  pas  est  donc  (3-(-3))/6=1

-->y=x.*x
 y  =
     9.   4.   1.   0.   1.   4.   9.
//  simple  produit  terme  à  terme
//  de  x  avec  lui  même
//
//
```

Exercice 3 - Corrigé

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & 0 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & \cdots & \cdots & \vdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & a_{(n-3)(n-2)} & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \cdots & \ddots & a_{(n-2)(n-2)} & a_{(n-2)(n-1)} & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)(n)} \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-3} \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-3} \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

Il serait bien maladroit de faire du Gauss directement. C'est en fait peu différent du DS de l'an passé mais on commence ici par le bas.

```
Pour i descendant de n à 2                          // a(ii) est le pivot
    Aux ← a(i-1,i)/a(i,i)
    Pour j allant de 1 à i-1
        a(i-1,j) ← a(i-1,j) - aux * a(i,j)
    Fin Pour
    a(i-1,i) ← 0
    b(i-1) ← b(i-1) - aux * b(i)
Fin Pour
```

étape 1 : reduction en un système triangulaire inférieur

```
Pour i allant de 1 à n
    aux ← 0
    Pour j allant de 1 à i-1
        aux ← aux + a(i,j) * x(j)
    Fin Pour
    x(i) ← (b(i) - Aux)/a(i,i)
Fin pour
Affiche ('La solution est: ', x)
```

étape 2 : resolution du système triangulaire inférieur