MINF0402 - Février 2020 - Corrigé

ic v0.7 - corr 1.3

Exercice 1 (Corrigé)

Voici la sortie de la console (avec seulement des modifications pour la mise en page) - avec quelques commentaires

```
1  --> x=1:3
2   x  =
3     1.   2.   3.
4
5  --> y=2:2:6
6   y  =
7     2.   4.   6.
8
9  --> a=x+y
10  a  =
11    3.   6.   9.
12
13 --> b=x*y
14  Dimensions ligne/colonne incohérentes.
15
16 --> c=x.*y
17  c  =
18    2.   8.   18.
19
20 --> d=x*y'
21  d  =
22    28.
23
24 --> z=[x y]
25  z  =
26    1.   2.   3.   2.   4.   6.
27
28 --> w=[x;y]
29  w  =
30    1.   2.   3.
31    2.   4.   6.
32
33 --> f=x(5)
34 Indice invalide.
35
36 --> x(5)=10
37  x  =
38    1.   2.   3.   0.   10.
39
40 --> A=[3 4 5 6;2 1 7 8; 12 10 11,9]
41  A  =
42    3.    4.    5.    6.
43    2.    1.    7.    8.
44    12.   10.   11.   9.
45
46 --> B=A([3 1],[2 4])
47  B  =
48       10.   9.
49       4.    6.
50
51 --> C=zeros(B)
52  C  =
53    0.   0.
54    0.   0.
55
56 --> D=matrix(1:9,3,3)
57  D  =
58    1.   4.   7.
59    2.   5.   8.
60    3.   6.   9.
61
62 --> E=diag(D)
63  E  =
64    1.
65    5.
66    9.
67
68 --> F=diag(E)
69  F  =
70    1.   0.   0.
71    0.   5.   0.
72    0.   0.   9.
73
74 -->  t=linspace(-10,10,11)
75  t  =
76   -10. -8. -6. -4. -2. 0. 2. 4. 6. 8. 10.
77 --> plot(t,100-t.*t);plot(t,100-t.*t,'r*')
```

- A la ligne 13, la multiplication d'une matrice (1,3) par une matrice (1,3) n'est pas possible !
- A la ligne 16, il s'agit d'une multiplication terme à terme de x et y.
- A la ligne 20, on multiplie une matrice (1,3) par une matrice (3,1) ce qui donne une (1,1).
- A la ligne 33, en effet x(5) n'a pas été défini, l'unique indice de x varie de 1 à 3.
- A la ligne 36, on définit x(5), incidemment cela définit et initialise x(4) à 0.
- A la ligne 40, la virgule avant le 9 ne joue aucun rôle : un simple séparateur le même rôle qu'un simple espace.
- A la ligne 46, on sélectionne (et dans cet ordre) sur le tableau A les lignes 3 et 1 et les colonnes 2 et 4 que l'on affecte alors dans un nouveau tableau B.

— Aux lignes 62 et 68, selon son argument : tableau mono-dimensionnel ou tableau bidimensionnel le fonctionnement de diag est différent.

— A la ligne 74, 11 valeurs équi-réparties de -10 à 10, ce qui donne un pas de 2 ($= (10 - (-10))/(11 - 1)$). Il y a 11 points, donc $11 - 1 = 10$ intervalles.

— A la ligne 77, on trace en fait la fonction $y = f(x) = 100 - x^2$, plus précisément on relie par des segments de droite les points $(t_1, 100 - t_1^2)$, $(t_2, 100 - t_2^2)$, ..., $(t_{11}, 100 - t_{11}^2)$ et on trace une étoile en rouge au niveau de ces points, la courbe associée est bien entendu une parabole, comme il n'y a pas assez de points, le tracé parait anguleux.

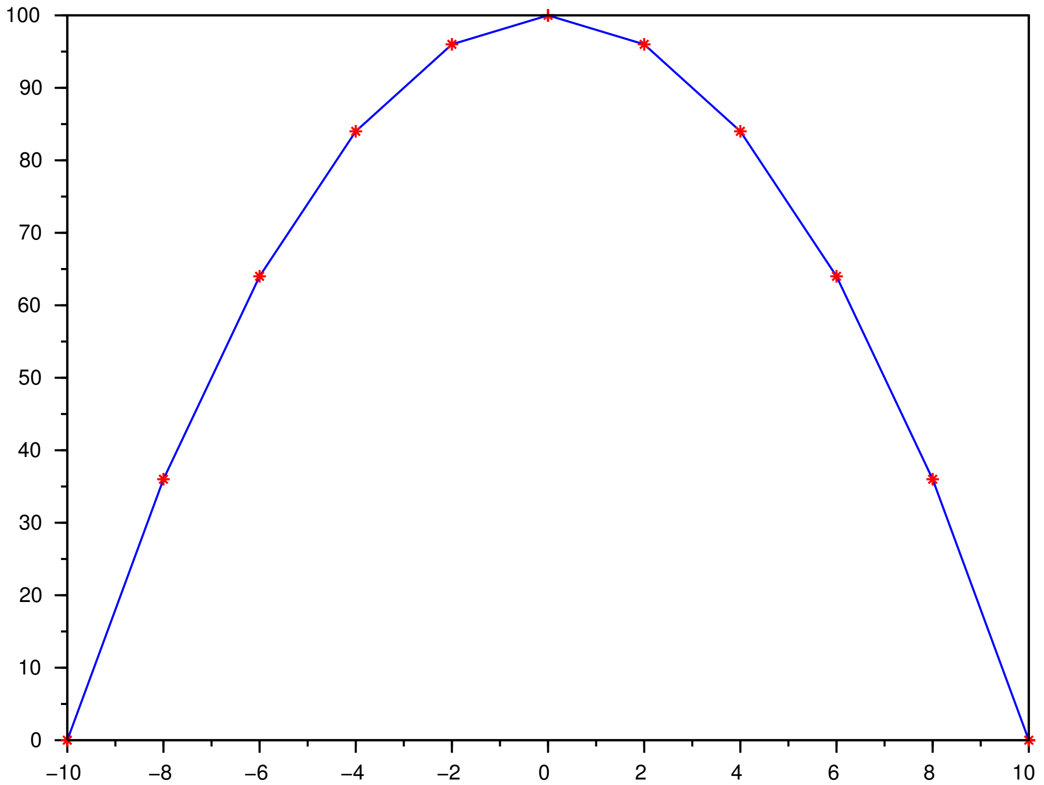

Figure 1 – Le tracé de l'exercice 1

Soyons précis : on note (S_x) le système d'équations et $\mathcal{S}_x$ son ensemble de solutions -

Exercice 2

$$(S_1)\begin{cases} x+2y-2z+t=-2 \\ -3x-8y+6z-2t=10 \\ 2x+4y-3z+t=-4 \\ -x-4y+4z-t=10 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-2z+t=-2 \\ -2y+t=4 \\ z-t=0 \\ -2y+2z=8 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-2z+t=-2 \\ -2y+t=4 \\ z-t=0 \\ 2z-t=4 \end{cases}$$

$L_2\leftarrow L_2+3L_1$ $L_3\leftarrow L_3-2L_1$ $L_4\leftarrow L_4+L_1$; $L_4\leftarrow L_4-L_2$; $L_4\leftarrow L_4-2L_3$

$$\sim\begin{cases} x+2y-2z+t=-2 \\ -2y+t=4 \\ z-t=0 \\ t=4 \end{cases} \sim \begin{cases} t=4 \\ z=4 \\ y=-\frac{1}{2}(4-4)=0 \\ x=-2-0+8-4=2 \end{cases}$$

l'ensemble des solution est $\mathcal{S}_1=\{(2,0,4,4)\}$

$$(S_2)\begin{cases} x+2y-z-2t=-5 \\ 2x+3y-4z-4t=-14 \\ -2x-5y+z+5t=10 \\ -x-y+3z+t=8 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z-2t=-5 \\ -y-2z=-4 \\ -y-z+t=0 \\ y+2z-t=3 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z-2t=-5 \\ -y-2z=-4 \\ -y-z+t=0 \\ z=3 \end{cases} \sim \begin{cases} z=3 \\ y=-2z+4=-2 \\ t=y+z=1 \\ x=-5-2y+z+2t \\ \quad=-5+4+3+2 \\ \quad=4 \end{cases}$$

$L_2\leftarrow L_2-2L_1$ $L_3\leftarrow L_3+2L_1$ $L_4\leftarrow L_4+L_1$; $L_4\leftarrow L_4+L_3$

donc $\mathcal{S}_2=\{(4,-2,3,1)\}$

ou bien

$$\begin{cases} x+2y-z-2t=-5 \\ -y-2z=-4 \\ z+t=4 \\ -t=-1 \end{cases} \text{ par } L_3\leftarrow L_3-L_2,\ L_4\leftarrow L_4+L_2 \quad \begin{cases} t=1 \\ z=4-t=3 \\ y=4-2z=-2 \\ x=-5-2y+z+2t \\ \quad=-5+4+3+2=4 \end{cases}$$

qui donne bien entendu le même résultat

$$(S_3)\begin{cases} x+2y-z+2t=7 \\ -2x-7y+z-t=-10 \\ x-y-z+7t=12 \\ -x-5y+2z+3t=-3 \end{cases} \sim (*)\begin{cases} x+2y-z+2t=7 \\ -3y-z+3t=4 \\ -3y+5t=5 \\ -3y+z+5t=4 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z+2t=7 \\ -3y-z+3t=4 \\ -3y+5t=5 \\ 8t=8 \end{cases}$$

$L_2\leftarrow L_2+2L_1$ $L_3\leftarrow L_3-L_1$ $L_4\leftarrow L_4+L_1$; $L_4\leftarrow L_4+L_2$

$$\sim\begin{cases} t=1 \\ y=\frac{1}{3}(5t-5)=0 \\ z=-3y+3t-4=3-4=-1 \\ x=7-2y+z-2t \\ \quad=7-0-1-2=4 \end{cases}$$

ou bien effectuant le système $(*)$: $L_3\leftarrow L_3-L_2$, $L_4\leftarrow L_4-L_2$

$$\begin{cases} x+2y-z+2t=7 \\ -3y-z+3t=4 \\ z+2t=1 \\ 2z+2t=0 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-z+2t=7 \\ -3y-z+3t=4 \\ z+2t=1 \\ -2t=-2 \end{cases} \sim \begin{cases} t=1 \\ z=1-2t=-1 \\ y=(-z+3t-4)/3=(1+3-4)/3=0 \\ x=7-2y+z-2t \\ \quad=7-0-1-2=-4 \end{cases}$$

$L_4\leftarrow L_4-L_3$

ce qui est bien la même chose

et $\mathcal{S}_3=\{(-4,0,-1,1)\}$

Remarque: les trois systèmes ont une unique solution-

Ex3, On cherche donc à appliquer Gauss en tenant compte de la forme de la matrice
A la première etape de Gauss il y a seulement le terme a_{21} à faire disparaitre sur la premiere colonne avec une transformation qui est donc simplement

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1$$

sur le système lineaire car les termes suivants sur la première colonne sont tous nuls.
On remarque en particulier que les lignes 3 à n ne sont pas modifiées par cette transformation. La nouvelle matrice du systeme comprend donc a priori à nouveau 1 seul terme non nul juste en dessous de la diagonale sur les colonnes 2 à n
à la deuxieme etape on aura simplement à effectuer la transformation

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a_{32}}{a_{22}} L_2$$

avec à nouveau une matrice avec un seul terme non nul (a priori) juste sous la diagonale sur les colonnes 3 à n
Ainsi à l'etape k La transformation à effectuer sera telle :

$$L_{k+1} \leftarrow L_{k+1} - \frac{a_{k+1,k}}{a_{kk}} L_k$$

En fait par rapport à la methode de Gauss standard il y a une boucle en moins : à l'etape k nous avons juste à modifier la ligne k+1 du système et pas les lignes k+1 à n!
On aboutit donc finalement à l'algorithme suivant: ⟶

(N.B. comme dans l'exposé sur Gauss, les coefficients a_{ij} (et autres) sont les coefficients qui se transforment au fur et à mesure des etapes et non les simples coefficients de la matrice d'origine)

```
Pour k allant de 1 à n-1 faire          // Boucle de la
                                        // réduction de Gauss
    Aux ← A(k+1,k)/A(k,k)
    A(k+1, k) ← 0
    Pour J allant de k+1 à n faire
        A(k+1,J) ← A(k+1,J) - Aux * A(k,J)
    Fin Pour
    B(k+1) ← B(k+1) - Aux * B(k)
Fin Pour
// Réduction achevée, la matrice du système est
// devenue triangulaire supérieure,
// Remontée triangulaire

X(n) ← B(n)/A(n,n)
Pour i descendant de n-1 à 1 faire
    Aux ← 0
    Pour k allant de i+1 à n faire
        Aux ← Aux + A(i,k) * X(k)
    FinPour
    X(i) ← (B(i) - Aux)/A(i,i)

Fin Pour
Afficher(" La solution:", X)
```