Logique et programmation logique

J.-C. Boisson
Jean-Charles.Boisson@univ-reims.fr
(Auteur original Leonardo Brenner 2009-2010)

Licence 3 Informatique / Passerelle - Info0502 - Logique et programmation logique

2020-2021

Partie n°2

Aspects syntaxiques, aspects sémantiques, tables de vérités

Logique des propositions

Concept

La logique des propositions ou calcul propositionnel est l'étude des connecteurs propositionnels.

Ces connecteurs sont des opérateurs sur les énoncés ou formules.

Une première axiomatisation a été proposée par Gottlob Frege en 1879.

Le calcul propositionnel consiste (globalement) à savoir :

- construire des formules propositionnelles à partir de variables propositionnelles.
- donner un sens aux formules (*propositionnelles*).
- comparer des formules (*propositionnelles*).

Aspects syntaxiques

Notation

- $\mathcal{P}$ est un ensemble non vide, fini ou infini appelé ensemble des variables propositionnelles :

$$\mathcal{P} = \{A, B, C, \ldots\}$$

- $\mathcal{C}$ l'ensemble des 5 connecteurs propositionnels $\notin \mathcal{P}$:

$$\mathcal{C} = \{\neg, \vee, \wedge, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow\}$$

- $\mathcal{S}$ l'ensemble de deux symboles supplémentaires $\notin \mathcal{P}$ et $\notin \mathcal{C}$:

$$\mathcal{S} = \{\ ),\ (\ \}$$

Aspects syntaxiques

Connecteurs propositionnels

	Type	Nom	Signification
$\neg$	unaire	NON	*négation*
$\vee$	binaire	OU	*disjonction*
$\wedge$	binaire	ET	*conjonction*
$\Longrightarrow$	binaire	IMPLIQUE	*implication*
$\Longleftrightarrow$	binaire	EQUIVAUT A	*équivalence*

Aspects syntaxiques

Définition des formules propositionnelles

Une formule propositionnelle est un mot sur l'alphabet :

$$\mathcal{A} = \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{S}$$

Structure des formules propositionnelles

Soit $\mathcal{F}$, l'ensemble des formules propositionnelles construites sur $\mathcal{P}$. Toute formule F de $\mathcal{F}$ est de l'une des trois formes suivantes :

1. $F = A$ avec $A \in \mathcal{P}$
2. $F = \neg G$ avec $G \in \mathcal{F}$
3. $F = (G \alpha H)$ avec $\alpha \in \{\vee, \wedge, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow\}$ et $G, H \in \mathcal{F}^2$

Aspects syntaxiques

Mot considéré comme une formule

$$A$$

$$(A \Longrightarrow (B \Longleftrightarrow A))$$

$$\neg(A \Longrightarrow A)$$

Mot non considéré comme une formule

$$A \wedge B$$

$$(A \wedge B \wedge C)$$

$$\neg(A)$$

Aspects syntaxiques

Formule ou pas ? ? ?

$$(\neg A \implies A)$$

$$A \implies B, C$$

$$(((A \wedge (\neg B \implies \neg A)) \wedge (\neg B \vee \neg C)) \implies (C \implies \neg A))$$

$$((A \wedge (B \implies C)) \vee (\neg A \implies (B \wedge C)) \wedge (\neg A \vee B))$$

Formule ou pas ? ? ?

$$(\neg A \Longrightarrow A)$$

$$A \Longrightarrow B, C$$

$$(((A \wedge (\neg B \Longrightarrow \neg A)) \wedge (\neg B \vee \neg C)) \Longrightarrow (C \Longrightarrow \neg A))$$

$$((A \wedge (B \Longrightarrow C)) \vee (\neg A \Longrightarrow (B \wedge C)) \wedge (\neg A \vee B))$$

Aspects syntaxiques

Décomposition arborescente d'une formule

Pour ce convaincre qu'un mot est bien une formule, il faut être capable de la décomposer en un arbre binaire (non nécessairement équilibré) de mots dont les feuilles sont des variables propositionnelles.

Décomposition arborescente d'une formule

$$M = (((A \land (\neg B \implies \neg A)) \land (\neg B \lor \neg C)) \implies (C \implies \neg A))$$

Aspects syntaxiques

Décomposition arborescente d'une formule

$$M = (((A \wedge (\neg B \Longrightarrow \neg A)) \wedge (\neg B \vee \neg C)) \Longrightarrow (C \Longrightarrow \neg A))$$

$$M_0 = ((A \wedge (\neg B \Longrightarrow \neg A)) \wedge (\neg B \vee \neg C)) \ et \ M_1 = (C \Longrightarrow \neg A)$$

$$M = (M_0 \Longrightarrow M_1)$$

Décomposition arborescente d'une formule

$$M_{00} = (A \wedge (\neg B \Longrightarrow \neg A)) \ et \ M_{01} = (\neg B \vee \neg C)$$

$$M_0 = (M_{00} \wedge M_{01})$$

$$M_{10} = C \ et \ M_{11} = \neg A$$

$$M_1 = (M_{10} \Longrightarrow M_{11})$$

$$M = ((M_{00} \wedge M_{01}) \Longrightarrow (M_{10} \Longrightarrow M_{11}))$$

Aspects syntaxiques

Décomposition arborescente d'une formule

$$M_{000} = A \text{ et } M_{001} = (\neg B \implies \neg A)$$

$$M_{00} = (M_{000} \wedge M_{001})$$

$$M_{010} = \neg B \text{ et } M_{011} = \neg C$$

$$M_{01} = (M_{010} \vee M_{011})$$

$$M_{110} = A \text{ et } M_{11} = \neg M_{110}$$

$$M = (((M_{000} \wedge M_{001}) \wedge (M_{010} \vee M_{011})) \implies (M_{10} \implies \neg M_{110}))$$

Décomposition arborescente d'une formule

$$M_{0010} = \neg B \text{ et } M_{0011} = \neg A$$

$$M_{001} = (M_{0010} \implies M_{0011})$$

$$M_{00} = (M_{000} \wedge (M_{0010} \implies M_{0011}))$$

$$M_{0100} = B \text{ et } M_{010} = \neg M_{0100}$$

$$M_{0110} = C \text{ et } M_{011} = \neg M_{0110}$$

$$M_{01} = (\neg M_{0100} \vee \neg M_{0110})$$

$$M = (((M_{000} \wedge (M_{0010} \implies M_{0011})) \wedge (\neg M_{0100} \vee \neg M_{0110}))$$
$$\implies (M_{10} \implies \neg M_{110}))$$

Aspects syntaxiques

Décomposition arborescente d'une formule

$$M_{00100} = B \text{ et } M_{0010} = \neg M_{00100}$$

$$M_{00110} = A \text{ et } M_{0011} = \neg M_{00110}$$

$$M_{001} = (\neg M_{00100} \Longrightarrow \neg M_{00110})$$

$$M_{00} = (M_{000} \wedge (\neg M_{00100} \Longrightarrow \neg M_{00110}))$$

$$M = (((M_{000} \wedge (\neg M_{00100} \Longrightarrow \neg M_{00110}))) \wedge (\neg M_{0100} \vee \neg M_{0110})) \\ \Longrightarrow (M_{10} \Longrightarrow \neg M_{110}))$$

Aspects syntaxiques

Décomposition arborescente d'une formule

Pour ce convaincre qu'un mot est bien une formule, il faut être capable de la décomposer en un arbre binaire (non nécessairement équilibré) de mots dont les feuilles sont des variables propositionnelles.

Vérificateur de syntaxe

A partir de la définition d'une formule, en s'inspirant de la décomposition binaire, peut-on proposer un algorithme de vérification qui indique si oui ou non une formule de la logique propositionnelle est syntaxiquement valide ?

Aspects sémantiques

Valeurs de vérités

Une distribution de valeurs de vérité sur $\mathcal{P}$ est une application de $\mathcal{P}$ dans l'ensemble $\{0,1\}$.

Interprétation

On estimera qu'une valeur de vérité valant 0 (resp. 1) sera interprété comme faux (resp. vrai.)

Aspects sémantiques

Application sur les opérateurs propositionnels

Pour toute distribution de valeurs de vérité $\delta \in \{0,1\}^p$, il existe une unique application $\bar{\delta} : \mathcal{F} \to \{0,1\}$ qui prolonge δ et vérifie les propriétés suivantes :

- *Pour toute formule $F \in \mathcal{F}$:*

$$\bar{\delta}(\neg F) = 1 \textit{ si et seulement si (ssi) } \bar{\delta}(F) = 0$$

- *Pour toute formule $F, G \in \mathcal{F}$:*

$$\bar{\delta}((F \wedge G)) = 1 \textit{ ssi } \bar{\delta}(F) = \bar{\delta}(G) = 1$$

- *Pour toute formule $F, G \in \mathcal{F}$:*

$$\bar{\delta}((F \vee G)) = 0 \textit{ ssi } \bar{\delta}(F) = \bar{\delta}(G) = 0$$

Aspects sémantiques

Application sur les opérateurs propositionnels (suite et fin)

- *Pour toute formule* $F, G \in \mathcal{F}$ *:*

$$\bar{\delta}((F \Longrightarrow G)) = 0 \textit{ ssi } \bar{\delta}(F) = 1 \textit{ et } \bar{\delta}(G) = 0$$

- *Pour toute formule* $F, G \in \mathcal{F}$ *:*

$$\bar{\delta}((F \Longleftrightarrow G)) = 1 \textit{ ssi } \bar{\delta}(F) = \bar{\delta}(G)$$

Pour une formule $F \in \mathcal{F}$ *et* δ *une distribution de valeurs de vérité, on dit que* δ **satisfait** F *lorsque* $\bar{\delta}(F) = 1$

Aspects sémantiques

Table de vérité -principe-

Pour un opérateur α d'arité n et n formules $F_i \in \mathcal{F}$ pour i allant de 1 à n, une ligne de la table de vérité correspond à l'application $\overline{\delta}(\alpha(F_i))$.

Tables de vérité associées aux opérateurs

- Pour toute formule $F \in \mathcal{F}$, la table de vérité de l'opérateur $\neg$ est :

F	¬F
0	1
1	0

- Pour toute formule $F, G \in \mathcal{F}$, la table de vérité de l'opérateur $\wedge$ est :

F	G	$(F \wedge G)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Aspects sémantiques

Tables de vérité associées aux opérateurs (suite)

- Pour toute formule $F, G \in \mathcal{F}$; la table de vérité de l'opérateur $\vee$ est :

F	G	$(F \vee G)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Pour toute formule $F, G \in \mathcal{F}$; la table de vérité de l'opérateur $\iff$ est :

F	G	$(F \iff G)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tables de vérité associées aux opérateurs (suite et fin)

- Pour toute formule $F, G \in \mathcal{F}$; la table de vérité de l'opérateur $\Longrightarrow$ est :

F	G	$(F \Longrightarrow G)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Exercice

Lors d'un procès, le procureur général déclare : "si l'accusé est coupable, il a un complice" et l'avocat de la défense de répliquer : "c'est faux !". Pourquoi s'agit-il d'un mauvais avocat ?

Exercice

Définissez la table de vérité de la formule $((\neg F \implies G) \wedge (G \iff H))$

Tables de vérité

Table de vérité de $((\neg F \implies G) \wedge (G \iff H))$

F	G	H	$\neg F$	$\neg F \implies G$	$G \iff H$	$((\neg F \implies G) \wedge (G \iff H))$
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1

Formules particulières

Tautologie

- *Une formule $F \in \mathcal{F}$ est une* **tautologie** *(resp.* **antilogie***) si et seulement si pour toute distribution de valeur de vérité, F est vrai (resp. faux).*
- *La notation "F est une tautologie" (resp. antilogie) est :*

$$\vdash F \ (resp. \ \nvdash F)$$

Formules particulières

Equivalence logique

- *Soit deux formule* $F, G \in \mathcal{F}$, F *est* **logiquement équivalente** *à* G *si la formule* $(F \iff G)$ *est une* **tautologie**.
- *La notation "F est logiquement équivalente à G" est :*

$$F \sim G$$

Formules particulières

Tautologies connues

1. $((F \wedge F) \iff F)$ idempotence du $\wedge$
2. $((F \vee F) \iff F)$ idempotence du $\vee$
3. $((F \wedge G) \iff (G \wedge F))$ commutativité du $\wedge$
4. $((F \vee G) \iff (G \vee F))$ commutativité du $\vee$
5. $((F \wedge (G \wedge H)) \iff ((F \wedge G) \wedge H))$ associativité du $\wedge$
6. $((F \vee (G \vee H)) \iff ((F \vee G) \vee H))$ associativité du $\vee$
7. $((F \wedge (G \vee H)) \iff ((F \wedge G) \vee (F \wedge H)))$ distributivité du $\wedge$ sur le $\vee$
8. $((F \vee (G \wedge H)) \iff ((F \vee G) \wedge (F \vee H)))$ distributivité du $\vee$ sur le $\wedge$
9. $((F \wedge (F \vee G)) \iff F)$ loi d'absorption
10. $((F \vee (F \wedge G)) \iff F)$ loi d'absorption

Formules particulières

Tautologies connues (suite)

$\top$ (resp. $\bot$) signifie une quelconque tautologie (resp. antilogie).

1. $(\neg(F \vee G) \iff (\neg F \wedge \neg G))$ loi de Morgan
2. $(\neg(F \wedge G) \iff (\neg F \vee \neg G))$ loi de Morgan
3. $((F \wedge \top) \iff F)$ $\top$ est l'élément neutre du $\wedge$
4. $((F \vee \bot) \iff F)$ $\bot$ est l'élément neutre du $\vee$
5. $((F \wedge \bot) \iff \bot)$ $\bot$ est l'élement absorbant du $\wedge$
6. $((F \vee \top) \iff \top)$ $\top$ est l'élement absorbant du $\vee$
7. $((F \implies G) \iff (\neg G \implies \neg F))$ toute implication est logiquement équivalente à sa contraposée

Formules particulières

Exercice

Prouver que les lois de Morgan sont des tautologies :

$$M_1 \ : \vdash (\neg(F \vee G) \Longleftrightarrow (\neg F \wedge \neg G))$$

et

$$M_2 \ : \vdash (\neg(F \wedge G) \Longleftrightarrow (\neg F \vee \neg G))$$

Formules particulières

$M_1 \quad : \vdash (\neg(F \vee G) \iff (\neg F \wedge \neg G))$

F	G	$\neg F$	$\neg G$	$(F \vee G)$	$\neg(F \vee G)$	$(\neg F \wedge \neg G)$	M_1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1

$M_2 \quad : \vdash (\neg(F \wedge G) \iff (\neg F \vee \neg G))$

F	G	$\neg F$	$\neg G$	$(F \wedge G)$	$\neg(F \wedge G)$	$(\neg F \vee \neg G)$	M_2
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1

Formes normales

Forme normale disjonctive FND (resp. conjonctive FNC)

Soit une formule $F \in \mathcal{F}$ et l'ensemble des n variables A_i apparaissant dans F. F est sous forme normale disjonctive FND (resp. conjonctive FCC) si elle est de la forme :

$$F = \bigvee(\bigwedge(\neg) \underset{i\in[1,n]}{A_i}) \left(resp.\ F = \bigwedge(\bigvee(\neg) \underset{i\in[1,n]}{A_i}) \right)$$

Simplification de l'écriture

Dans le cas des FND (resp. FNC), on omettera certaines parenthèses pour des raisons pratiques. Nous savons, de part les équivalences logiques vues, que le sens de lecture n'a pas d'impact sur la valeur de vérité associée à certains types de formule.

Formes normales canoniques

Forme normal disjonctive canonique FNDC (resp. conjonctive canonique FNCC)

Soit une formule $F \in \mathcal{F}$ et l'ensemble des n variables A_i apparaissant dans F. F est sous forme normale disjonctive canonique FNDC (resp. conjonctive canonique FNCC) si elle est de la forme :

$$F = \bigvee (\bigwedge (\neg) \underset{\forall i \in [1,n]}{A_i}) \left(resp.\ F = \bigwedge (\bigvee (\neg) \underset{\forall i \in [1,n]}{A_i}) \right)$$

Simplification de l'écriture

Dans le cas des FNDC (resp. FNCC), on omettera certaines parenthèses pour des raisons pratiques. Nous savons, de part les équivalences logiques vues, que le sens de lecture n'a pas d'impact sur la valeur de vérité associée à certains types de formule.

Formes normales

Théorème de forme normale

Toute formule est logiquement équivalente à au moins une formule sous forme normale disjonctive et à au moins une formule sous forme normale conjonctive.

Détermination de la FNDC et de la FNCC d'une formule

Soit une formule F dont on connaît la table de vérité :

- *La FNDC de F est donné par la disjonction des cas où la valeur de vérité vaut vrai ;*
- *La FNDC de $\neg F$ est donné par la conjonction des cas où la valeur de vérité vaut faux ;*
- *La FNCC de F est la négation de la FNDC de $\neg F$.*

Détermination des FNDC et FNCC d'une formule

Table de vérité

Déterminons la table de vérité de la formule :

$$F = (A \Longrightarrow (((B \wedge \neg A) \vee (\neg C \wedge A)) \Longleftrightarrow (A \vee (A \Longrightarrow \neg B))))$$

Table de vérité

$$F = (A \Longrightarrow (((B \wedge \neg A) \vee (\neg C \wedge A)) \Longleftrightarrow (A \vee (A \Longrightarrow \neg B))))$$

$$F_0 = (B \wedge \neg A) \ et \ F_1 = (\neg C \wedge A)$$

$$F_2 = (F_0 \vee F_1) \ et \ F_3 = (A \Longrightarrow \neg B))$$

A	B	C	F_0	F_1	F_2	F_3	$(A \vee F_3)$	$(F_2 \Longleftrightarrow (A \vee F_3))$	F
0	0	0	0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0

Détermination des FNDC et FNCC d'une formule

Déduction des FNDC et FNCC

$$F = (A \Longrightarrow (((B \land \neg A) \lor (\neg C \land A)) \Longleftrightarrow (A \lor (A \Longrightarrow \neg B))))$$

- FNDC de F :

$$(\neg A \land \neg B \land \neg C) \lor (\neg A \land \neg B \land C) \lor (\neg A \land B \land \neg C)$$

$$\lor (\neg A \land B \land C) \lor (A \land \neg B \land \neg C) \lor (A \land B \land \neg C)$$

- FNDC de $\neg F$:

$$(A \land \neg B \land C) \lor (A \land B \land C)$$

- FNCC de F :

$$(\neg A \lor B \lor \neg C) \land (\neg A \lor \neg B \lor \neg C)$$

Détermination des FND et FNC d'une formule

Sans table de vérité

Sans table de vérité, il faut utiliser les équivalences logiques connues pour faire disparaître tous les connecteurs $\notin [\neg, \wedge, \vee]$ et obtenir une FND ou une FNC.

Substitution de formules

Soit une formule $F \in \mathcal{F}$. La substitution de G par une formule $H \in \mathcal{F}$ correspond à remplacer chaque de G dans F par H. Cette substitution se note :

$$F_{G/H}$$

Equivalence logique

La formule F' resultant de $F_{G/H}$ est logiquement équivalente F si et seulement si G est logiquement équivalente à H.

Détermination des FND et FNC d'une formule

Substitution de formules

$$F = (A \Longrightarrow (((B \wedge \neg A) \vee (\neg C \wedge A)) \Longleftrightarrow (A \vee (A \Longrightarrow \neg B))))$$

Détermination des FND et FNC d'une formule

Substitution de formules

$$F = (A \Longrightarrow (((B \wedge \neg A) \vee (\neg C \wedge A)) \Longleftrightarrow (A \vee (A \Longrightarrow \neg B))))$$

$$F_{(A \Longrightarrow \neg B)/(\neg A \vee \neg B)} = (A \Longrightarrow (((B \wedge \neg A) \vee (\neg C \wedge A)) \Longleftrightarrow (A \vee (\neg A \vee \neg B))))$$

$$F = (A \Longrightarrow (((B \wedge \neg A) \vee (\neg C \wedge A)) \Longleftrightarrow (A \vee \neg A \vee \neg B)))$$

$$F = (A \Longrightarrow (((B \wedge \neg A) \vee (\neg C \wedge A)) \Longleftrightarrow \top))$$

$$F = (A \Longrightarrow ((B \wedge \neg A) \vee (\neg C \wedge A)))$$

$$F_{(A \Longrightarrow F_0)/(\neg A \vee F_0)} = (\neg A \vee ((B \wedge \neg A) \vee (\neg C \wedge A)))$$

$$F = \neg A \vee (\neg C \wedge A) \vee (B \wedge \neg A)$$

$$F = ((\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee A)) \vee (B \wedge \neg A)$$

$$F = \neg A \vee \neg C \vee (B \wedge \neg A)$$

$$F = \neg A \vee \neg C$$

Détermination des FNDC et FNCC d'une formule

FND VS Table de vérité

$$F = (A \implies (((B \wedge \neg A) \vee (\neg C \wedge A)) \iff (A \vee (A \implies \neg B))))$$

$$FND_F = \neg A \vee \neg C$$

A	B	C	F	FND_F
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

Systèmes complets de connecteurs

Complétude

On appelle système complet de connecteurs tout ensemble de connecteurs propositionnels permettant d'engendrer, par composition de ses éléments, tous les connecteurs propositionnels.

Exemple de système complet

$$\{\neg, \wedge, \vee\}$$

Systèmes complets de connecteurs

Complétude minimale

Un système complet de connecteurs est dit minimal lorsqu'aucun de ses sous-ensembles stricts n'est un système complet de connecteurs.

Est-il minimal ?

$$\{\neg, \wedge, \vee\}$$

Systèmes complets de connecteurs

Est-il minimal ?

$$\{\neg, \wedge, \vee\}$$

$$A \wedge B \sim \neg(\neg A \vee \neg B)$$

$$A \vee B \sim \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

Systèmes complets minimaux

$$\{\neg, \wedge\}$$

$$\{\neg, \vee\}$$

Systèmes complets de connecteurs

Systèmes complets minimaux

$$\{\neg, \wedge\}$$

$$\{\neg, \vee\}$$

$$\{\neg, \Longrightarrow\}$$

nand : $\{\uparrow\}$

nor : $\{\downarrow\}$

Tables de vérité des opérateurs $\uparrow$ et $\downarrow$

A	B	$(A \uparrow B)$	$(A \downarrow B)$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

Systèmes complets de connecteurs

Système complet minimal $\{\uparrow\}$

Exprimer $\neg$ et $\wedge$ avec $\uparrow$

Systèmes complets de connecteurs

Système complet minimal $\{\uparrow\}$

Exprimer $\neg$ et $\wedge$ avec $\uparrow$

A	$\neg A$	$(A \uparrow A)$
0	1	1
1	0	0

A	B	$(A \uparrow B)$	$(A \wedge B)$	$((A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B))$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1

$$\neg A \sim (A \uparrow A)$$

$$A \wedge B \sim ((A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B))$$

Théorème de compacité : prémisses (1/2)

Définitions

Soient $\mathcal{A}$ un ensemble de formules $\in \mathcal{F}$, F une formule $\in \mathcal{F}$ et δ est une distribution de valeurs de vérité sur $\mathcal{P}$:

- *$\mathcal{A}$ est satisfait par δ (ou δ satisfait $\mathcal{A}$) ssi δ satisfait toutes les formules qui appartiennent à $\mathcal{A}$;*
- *$\mathcal{A}$ est satisfaisable (ou consistant ou non contradictoire) ssi il existe au moins une distribution de valeurs de vérité qui satisfait $\mathcal{A}$;*
- *$\mathcal{A}$ est finiment satisfaisable ssi tout sous-ensemble fini de $\mathcal{A}$ est satisfaisable ;*
- *$\mathcal{A}$ est contradictoire ssi il n'est pas satisfaisable.*

Théorème de compacité : prémisses (2/2)

Définitions

Soient $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *deux ensembles de formules* $\in \mathcal{F}$*, F une formule* $\in \mathcal{F}$ *et* δ *est une distribution de valeurs de vérité sur P :*

- *F est conséquence de* $\mathcal{A}$ *ssi toute distribution de valeurs de vérité qui satisfait* $\mathcal{A}$ *satisfait F. Cette relation est notée :*

  $$\mathcal{A} \vdash^* F$$

  Pour exprimer la non conséquence, on pourra écrire :

  $$\mathcal{A} \nvdash^* F$$

- $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *sont équivalent ssi toute formule de* $\mathcal{A}$ *est conséquence de* $\mathcal{B}$ *et toute formule de* $\mathcal{B}$ *est conséquence de* $\mathcal{A}$*.*

Théorème de compacité

Ce théorème peut s'exprimer des trois manières suivantes :

Version 1

Pour tout ensemble $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$, $\mathcal{A}$ est satisfaisable ssi $\mathcal{A}$ est finiment satisfaisable.

Version 2

Pour tout ensemble $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$, $\mathcal{A}$ est contradictoire ssi $\mathcal{A}$ admet au moins un sous-ensemble fini contradictoire.

Version 3

Pour tout ensemble $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$ et $F \in \mathcal{F}$, F est conséquence de $\mathcal{A}$ ssi F est conséquence d'au moins une partie finie de $\mathcal{A}$.

Théorème de compacité

Propriétés

A partir des définitions et théorèmes précédents, prouvez les propriétés suivantes :

- Une formule $F \in \mathcal{F}$ est une tautologie ssi F est conséquence de l'ensemble vide.
- $\mathcal{A}$ est contradictoire ssi toute formule est conséquence de $\mathcal{A}$
- $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont équivalents ssi ils sont satisfait par les mêmes distributions de valeurs de vérité.