CHPS0742

OPTIMISATION

COURS 2

OPTIMISATION LINÉAIRE

UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE

Pierre Delisle
Département de Mathématiques et Informatique
Septembre 2018

Plan de la séance

- Principe général de l’optimisation linéaire
- Résolution de problèmes
  - Méthode géométrique
  - Algorithme du simplexe
- Dualité
- Dégénérescence et cyclage
- Problème dual-réalisable

Notions de base

- Soit un phénomène économique *y*, résultant de plusieurs effets élémentaires

$$e_1, e_2, \ldots e_n$$

- Si l'on suppose que les effets élémentaires sont additifs, on a

$$y = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$$

- De plus, si l'on suppose que chacun des effets élémentaires e_i est proportionnel à sa cause x_i, on peut écrire

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

- a_1, a_2, ..., a_n étant les coefficients de proportionnalité
- Cette égalité est du premier degré par rapport aux variables : c'est une *fonction linéaire*

Notions de base

- Dans beaucoup de problèmes, les $m+1$ effets sont tous proportionnels aux causes (au moins de façon suffisamment approchée)
- Le problème peut alors se décrire uniquement au moyen de formes linéaires

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \dots + a_{1n}\,x_n \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y_m &= a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \dots + a_{mn}\,x_n \\
y_{m+1} &= a_{m+1,1}\,x_1 + a_{m+1,2}\,x_2 + \dots + a_{m+1,n}\,x_n
\end{aligned}
$$

- En limitant supérieurement ou inférieurement les m premiers effets

$$y_1 \underset{<}{>} b_1 \,;\, y_2 \underset{<}{>} b_2 \,;\, \dots \,;\, y_m \underset{<}{>} b_m$$

- C'est-à-dire en écrivant m *contraintes*, on permet l'optimisation du $(m+1)^{e}$ effet

$$\text{maximiser } y_{m+1}$$

- C'est la *fonction économique* du problème

Notions de base

- Les m contraintes, si elles sont compatibles, délimitent dans un espace à n dimensions (autant que de variables) un polytope convexe à l'intérieur ou à la périphérie duquel se trouve(nt) le (ou les) point(s) dont les coordonnées ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) satisfont aux contraintes
- Objet de l'optimisation linéaire
  - Résoudre le problème d'optimisation qui consiste à maximiser une fonction linéaire (la fonction économique) dans le domaine ainsi défini
- On peut résoudre les petits problèmes par la méthode géométrique (méthode graphique)

Méthode géométrique - Exemple à deux variables

- Une usine fabrique deux sortes de produits
  - p_1 et p_2
- À l'aide de deux machines
  - m_1 et m_2
- Chaque produit à fabriquer doit passer successivement sur les deux machines dans un ordre indifférent et pendant les temps suivants

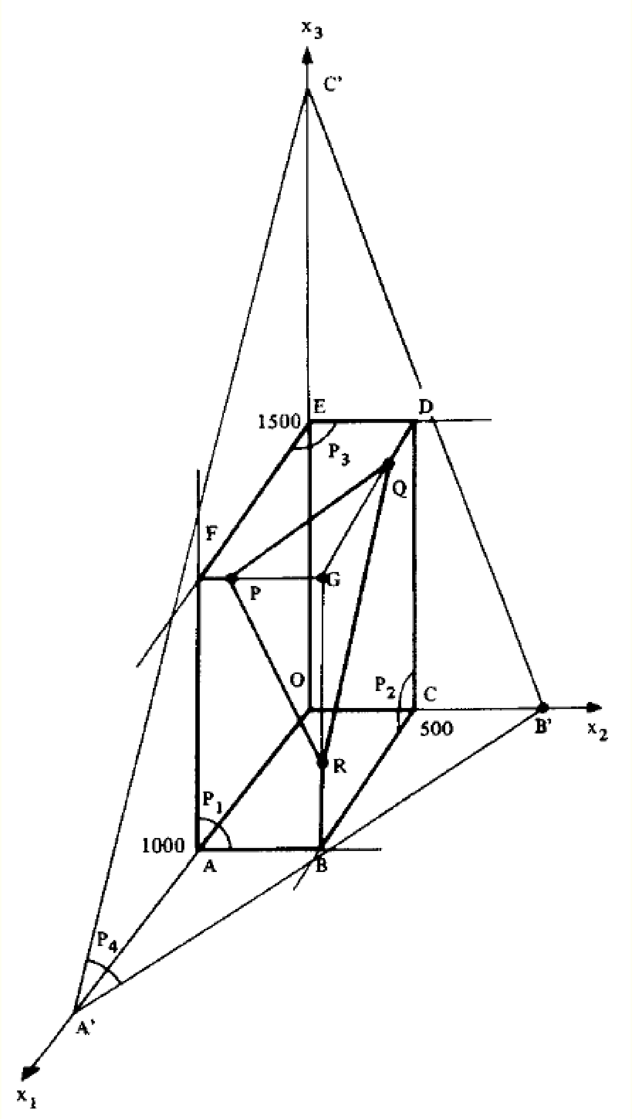
	p_1	p_2
m_1	30	20
m_2	40	10

- La machine m_1 est disponible 6000 min/mois
- La machine m_2 est disponible 4000 min/mois
- Le profit réalisé sur une unité du produit p_1 est de 400 euros
- Le profit réalisé sur une unité du produit p_2 est de 200 euros
- On veut trouver le plan de fabrication mensuel qui maximise le profit

Méthode géométrique - Exemple à trois variables

- Une usine peut fabriquer, sur une machine donnée travaillant 45 heures, 3 produits différents p_1, p_2 et p_3
- Le profit net en produisant chaque produit
  - 4 euros pour p_1
  - 12 euros pour p_2
  - 3 euros pour p_3
- Rendement de la machine
  - 50 produits par heure pour p_1
  - 25 produits par heure pour p_2
  - 75 produits par heure pour p_3
- Une étude de marché indique que les possibilités de vente ne dépassent pas
  - 1000 produits $p1$
  - 500 produits $p2$
  - 1500 produits $p3$
- Problème : répartir la capacité de production entre les trois produits de sorte à maximiser le profit

Illustration d'un problème à 3 variables



Limites de la méthode géométrique

- C'est embêtant de résoudre un problème à plus de 3 variables par la méthode géométrique !
- Il faudra alors utiliser d'autres méthodes (dont une sera vue dans quelques instants)

Formulation standard d'un problème d'optimisation linéaire

- Maximiser une forme linéaire de *n* variables

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

- Les variables étant soumises à *m* contraintes linéaires

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \qquad i = 1, \ldots, m$$

- Et aux *n* contraintes de non-négativité

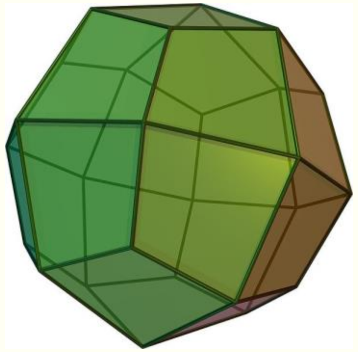
$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, \ldots n$$

Ramener les « variantes » à la formulation standard :

- Minimiser une fonction *f* revient à maximiser -*f*
  - Minimum de *f* = -Maximum de -*f*
- Transformer une inégalité de type « ≥ » en une inégalité de type « ≤ »
  - On la multiplie par -1
- Égalité $\alpha = \beta$
  - Revient aux 2 inégalités $\alpha \leq \beta$ et $-\alpha \leq -\beta$
- On remplace une variable *x* contrainte à être négative ou nulle par -*x*
- On exprime une variable *x* qui n'a pas de signe imposé par la différence de deux variables positives ou nulles
  - $x = x^+ - x$ avec $x^+ \geq 0$ et $x \geq 0$

Généralisation

- Pour un problème d'optimisation linéaire de n variables, m contraintes et n contraintes de non-négativité
  - L'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ (espace vectoriel réel de dimension n) de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ (par rapport à une base déterminée) et vérifiant les $m + n$ contraintes détermine ce qu'on appelle un polytope convexe ...
  - ... ou, lorsque la distance de ces points à l'origine est bornée, un polyèdre convexe appelé <u>polyèdre des contraintes</u>



- Les n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ qui satisfont les contraintes s'appellent <u>solutions réalisables</u> du problème
  - Ce sont les coordonnées des points intérieurs au polyèdre de contraintes
- On peut prouver le théorème suivant
  - On considère une forme linéaire des n variables $x_1, \ldots, x_n$, soumises à des contraintes linéaires. Son maximum, qui existe si cette forme est majorée, <u>est atteint au moins en un sommet du polyèdre des contraintes</u>
- Le principe de l'algorithme du simplexe
  - Passer itérativement d'un sommet du polyèdre des contraintes à un sommet adjacent de façon à augmenter la valeur de la fonction à optimiser jusqu'à trouver un sommet où le maximum est atteint

ALGORITHME DU SIMPLEXE

Exemple à 2 variables

Algorithme du simplexe

- Proposé en 1948 par Georges Dantzig (mathématicien américain)
- Permet la détermination d'une solution optimale d'un programme linéaire
- Consiste à progresser de sommet en sommet sur le polyèdre des solutions réalisables de façon à améliorer à chaque fois la fonction économique

À partir de la formulation standard

- Introduction de <u>variables d'écart</u> positives ou nulles
  - Mesurent, pour chaque ressource, l'écart entre la quantité initialement disponible et la quantité consommée par le plan donné par les variables initiales du problème
- Réécriture des contraintes du problème sous forme d'équations
- Création du dictionnaire I

- Le polyèdre des contraintes est alors limité dans $\mathbb{R}^2$ par les droites (hyperplans pour un plus grand nombre de dimensions)
  - $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$
- Les variables x_3 et x_4 sont exprimées comme fonctions affines des variables x_1 et x_2
  - On dit que les variables x_3 et x_4 sont actuellement les <u>variables de base</u>…
  - … et que les variables x_1 et x_2 sont actuellement les <u>variables hors-base</u>

Solution basique

- On s'intéresse alors à ce qu'on appelle la **solution basique** associée au dictionnaire I
  - C'est la solution obtenue en donnant la valeur 0 à toutes les variables hors-base
  - Les valeurs des variables de base en découlent
- Les 4 variables ayant des valeurs non négatives dans cette solution basique, ce dictionnaire est **réalisable**
  - Correspond au point de coordonnées (0,0)
    - Sommet du polyèdre (ici polygone) des contraintes
  - Donne la valeur 0 à z (autrement dit, on ne fait rien)

Base de la méthode du simplexe

- Remarque
  - Si, en choisissant une variable x_j hors-base de coefficient strictement positif, on fait croître celle-ci à partir de 0 (les autres variables hors-base restant nulles), la valeur correspondante de la fonction z croît
- On pourrait alors choisir x_1 ou x_2
  - On choisit x_2
  - Gardant x_1 à 0, on cherche à augmenter x_2 au maximum, en conservant la propriété que le point M de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(0,x_2)$ reste dans le polyèdre des contraintes
    - On se déplace sur une arête du polyèdre issue de (0,0)
- À partir du dictionnaire actuel (I), on peut voir les contraintes sur l'augmentation de x_2
  - Les variables x_3 et x_4 doivent rester ≥ 0
- La variable la plus contraignante (ici x_3) représente la première droite (hyperplan) rencontrée (d'équation $x_3 = 0$)
  - Nouveau sommet du polyèdre des contraintes
  - Intersection des droites d'équation $x_1 = 0$ et $x_3 = 0$
- Il faut alors faire un changement de dictionnaire en échangeant les rôles de x_2 et x_3

Changement de dictionnaire

- À partir du dernier dictionnaire (I), on utilise l'équation associée à x_3 pour exprimer x_2 en fonction de x_1 et x_3
  - On remplace ensuite x_2 par cette expression dans les autres équations du dictionnaire, ce qui donne le dictionnaire II
  - On dit qu'on a fait **entrer x_2 en base** et qu'on a fait **sortir x_3 de la base** ...
  - ... ou que x_2 est *variable entrante* et x_3 est *variable sortante*
  - Les variables de base sont maintenant x_2 et x_4
  - Les variables hors-base sont maintenant x_1 et x_3
  - Nouvelle solution basique (obtenue en annulant les variables hors-base)
  - Nouvelle solution réalisable plus intéressante

Solution optimale ?

- Dans la nouvelle expression de la fonction z, on voit que la variable x_1 a un coefficient strictement positif
  - Cela veut dire que l'augmentation de x_1 fera croitre encore la fonction économique z : la solution actuelle n'est pas optimale
  - Il faut donc répéter le processus → on fait entrer x_1 en base et on parcourt ainsi une nouvelle arête du polyèdre des contraintes
  - À partir des contraintes, on fait sortir x_4 de la base
  - Ce qui mène au dictionnaire III et à une nouvelle solution basique
- À partir du dictionnaire III, dans la nouvelle expression de la fonction économique z, on voit que les variables x_3 et x_4 ont toutes les deux un coefficient négatif
  - Augmenter x_3 ou x_4 ne fera plus croître la fonction économique
  - La solution est donc optimale → l'algorithme est terminé
- Interprétation
  - Il faut fabriquer 40 unités de *p*1
  - Il faut fabriquer 240 unités de *p*2
  - Il ne reste plus de minutes sur la machine *m*1
  - Il ne reste plus de minutes sur la machine *m*2
  - Le profit net est de 64 000 euros

Algorithme du simplexe - Exemple à 4 variables

- Une fabrique d'objets en terre cuite produit des cendriers, des cruches, des bols et des vases
- La fabrication de chacun des objets nécessite un certain nombre d'heures de moulage, de cuisson et de peinture
- La vente de ces objets rapporte un certain bénéfice

	Cendrier	Bol	Cruche	Vase
Moulage	2	4	5	7
Cuisson	1	1	2	2
Peinture	1	2	3	3
Bénéfice	7	9	18	17

- L'entreprise dispose quotidiennement de 42 heures de moulage, 17 heures de cuisson et 24 heures de peinture
- Établir un plan de fabrication de façon à maximiser le chiffre d'affaires

DUALITÉ

Prix dual

- À chaque contrainte d'un programme linéaire, on peut associer un nombre appelé *prix dual*
  - Accroissement de la fonction économique lorsque varie le second membre de la contrainte considérée
- À l'optimum, la solution du programme et les prix duaux vérifient un ensemble de relations qui constituent les *conditions d'optimalité*
- Exemple

Définition du problème dual

- On considère le problème (*P*) :

Maximiser $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

Sous les contraintes
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & \text{pour } i = 1, \ldots, m \\ x_j \geq 0 & \text{pour } j = 1, \ldots n \end{cases}$$

Définition du problème dual

- S'il existe m réels y_i positifs ou nuls tels que, pour tout $j = 1, ..., n$:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$$

- alors on a, pour toute solution réalisable (x_1, ... , x_n) de (P)

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

- D'où :

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

- et cette dernière quantité donne donc un majorant de la fonction objectif

Définition du problème dual

- Le problème dual (*D*) du problème (*P*) s'écrit :

Minimiser $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

Sous les contraintes $\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j & \text{pour } j = 1, \ldots, n \\ y_i \geq 0 & \text{pour } i = 1, \ldots m \end{cases}$

Définition du problème dual

- Le problème (P) prend alors le nom de *problème primal*
- Pour toute solution réalisable $y_1^*, \ldots, y_m^*$ du dual (i.e. satisfaisant les contraintes de (D)),

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

- est un majorant de la fonction objectif du problème primal

- De la définition du problème dual, on déduit la proposition suivante :
  - Soient $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ une solution réalisable du problème primal ...
  - ... et $(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$ une solution réalisable du problème dual. On a :

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

  - De plus, si les deux quantités sont égales, alors
    - $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ constituent une solution optimale du problème primal
    - $(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$ constituent une solution optimale du problème dual

Application

- La considération du problème dual permet de vérifier qu'une solution optimale a été trouvée par l'algorithme du simplexe pour un problème donné
- Exemple
- À partir de la proposition, on peut affirmer que 147 est l'optimum du problème primal
  - On a trouvé une solution réalisable du dual qui donne à la fonction objectif du dual ...
  - ... la même valeur que la solution trouvée par le primal donnait à la fonction objectif du primal
  - Certificat d'optimalité de la solution trouvée par le primal

Théorème de la dualité

- Si le problème primal a une solution optimale
  - $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$
- Alors le problème dual a une solution optimale
  - $y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*$
- Et

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

- Si le problème primal admet une solution optimale et si l'expression de la fonction objectif du primal dans le dernier dictionnaire obtenu par la méthode du simplexe s'écrit :

$$z = z^* + \sum_{k=1}^{n+m} d_k x_k$$

(où x_{n+i} représente la $i^{\text{ème}}$ variable d'écart)

- Alors une solution optimale du problème dual est donnée par $y_i^* = -d_{n+i}$

Signification économique du dual

- b_i : la quantité totale de la ressource i
- a_{ij} : nombre d'unités de la ressource i consommées par la fabrication d'une unité de produit j
- x_j : nombre d'unités du produit j fabriquées
- c_j : valeur unitaire du produit j
- La relation à l'optimum :

$$z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

- Induit que y_i représente la « valeur unitaire » de la ressource i
  - Prix que l'on serait prêt à payer pour obtenir une unité supplémentaire de la ressource i

- Une personne étrangère à l'entreprise souhaite acquérir les ressources de l'entreprise
- Elle doit proposer un prix tel que ce soit plus intéressant pour l'entreprise de lui vendre ses ressources que de fabriquer elle-même ses produits (c_j est le profit escompté sur le produit j)
- a_{ij} représentant la quantité de ressource i requise pour fabriquer une unité du produit j,

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$$

- Représente la somme à dépenser pour acquérir les ressources nécessaires à la fabrication d'une unité du produit j

Exemple

- Le fabricant d'objet de terre cuite a la possibilité de faire faire à ses ouvriers de peinture quelques heures supplémentaires à un taux horaire t
- A-t-il intérêt ou non à utiliser cette possibilité ?

Solution

- On appelle u le nombre d'heures supplémentaires pour la peinture (on suppose u assez petit pour ne pas sortir du polyèdre des contraintes)
- La variation du second membre (ressources) est (0, 0, u)
- La solution optimale du problème dual est (0,3,4)
- La variation de la fonction objectif est donc égale à 4$\underline{u}$
  - Variation du chiffre d'affaires que le patron peut espérer de u heures supplémentaires
  - Mais ce n'est pas un bénéfice net parce qu'elles lui coûteront t * u euros
- Il a donc intérêt à donner des heures supplémentaires dès que le taux de rémunération horaire $t \leq 4$ euros (!!!)

SYNTHÈSE DES DÉFINITIONS

Synthèse des définitions

- Soit un problème d'optimisation linéaire mis sous forme standard
  - Tout n-uplet de valeurs $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ satisfaisant les contraintes est une *solution réalisable*
  - La fonction z est dite *fonction objectif* ou *fonction économique*
  - Les variables $x_1, \ldots, x_n$ sont appelées *variables de décision* ou *variables de choix*
  - Les variables $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ sont appelées *variables d'écart*
  - Une solution réalisable qui maximise la fonction objectif est dite *solution optimale*
  - Si un problème de programmation linéaire n'admet aucune solution, il est dit *infaisable*
  - Si un problème de programmation linéaire admet des solutions réalisables mais n'a pas de valeur optimale, il est dit *non borné*
  - Une solution réalisable que l'on peut exprimer à l'aide d'un dictionnaire est dite *solution de base réalisable*
  - Un dictionnaire est un système d'équations linéaires liant $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ et z et satisfaisant les deux propriétés suivantes
    - Les équations constituant un dictionnaire quelconque doivent exprimer z et m des $n+m$ variables (les m variables de base) en fonction des n autres variables (les n variables hors-base)
    - Tout dictionnaire est algébriquement équivalent au dictionnaire définissant les variables d'écart et la fonction objectif (le premier dictionnaire lorsqu'on commence au point $(0, \ldots, 0)$)

CAS PARTICULIERS

Dégénérescence et cyclage

Dictionnaire initial non-réalisable

Dégénérescence

- Dégénérescence de 1ère espèce
  - Coefficient d'une variable hors-base à 0 dans le dictionnaire
  - On peut alors faire entrer cette variable dans la base (plus grand coefficient non négatif)
  - La fonction objectif n'augmente alors pas
  - Correspond au cas où la fonction économique est parallèle à l'hyperplan associé à une des contraintes
- Dégénérescence de 2e espèce
  - Valeur nulle pour au moins l'une des variables de base
  - Correspond au cas où il passe, par un des sommets au moins, un ou plusieurs hyperplans supplémentaires
- La dégénérescence peut induire un phénomène de cyclage
  - On retrouve un dictionnaire déjà rencontré
- Théorème de Bland
  - Il ne peut y avoir de cyclage lorsque, à toute itération effectuée à partir d'un dictionnaire dégénéré, on choisit les variables entrante et sortante comme celles du plus petit indice parmi les candidats possibles
  - Permet de toujours éviter le cyclage

Dictionnaire initial non réalisable

- Dans certains cas, un problème admet des solutions réalisables, mais le dictionnaire initial n'est pas réalisable
  - Origine non réalisable, certains b_i négatifs
- Il existe une méthode permettant de ramener le problème à un dictionnaire réalisable en utilisant une variable artificielle (méthode à deux phases)
- Dans certains cas, on peut utiliser le dual
- Problème dual-réalisable
  - L'utilisation du problème dual permet de résoudre un problème de programmation linéaire où la solution nulle n'est pas réalisable
    - Il faut que les coefficients c_j de la fonction objectif du problème écrit sous forme standard soient tous négatifs
    - Un tel problème est dit *dual-réalisable*
  - Exemple

Accélérer la méthode du simplexe

- On peut utiliser d'autres formalismes pour accélérer la méthode du simplexe
  - Forme du pivot
  - Forme matricielle

- On peut aussi utiliser un ordinateur !
  - GNU Linear Programming Kit (GLPK)
  - IBM ILOG CPLEX Optimization Studio (CPLEX)
  - General Algebraic Modeling System (GAMS)
  - …

Conclusion

- L'optimisation c'est…
  1. Analyse d'un problème de décision à résoudre
  2. Modélisation du problème
     - Formulation mathématique du problème → représentation simplifiée du problème réel
  3. Résolution du problème
     - Application d'un algorithme approprié → mise en œuvre logicielle
  4. Analyse des résultats
     - Décisions, retour sur le modèle, ajout d'expertise

PROCHAIN COURS :

GRAPHES