

## Travaux dirigés n° 2

### Tables de hachage

#### Exercice 1 (Tables à adressage direct)

1°) Illustrez le fonctionnement d'une table à adressage direct, notée  $t[0..m-1]$ , en utilisant l'univers  $u = \{0, 1, \dots, 9\}$  et l'ensemble des clés réelles  $k = \{2, 3, 5, 8\}$ .

2°) Définissez les procédures suivantes qui implémentent les opérations de dictionnaire sur les tables à adressage direct :

- a) `rechercher-adressage-direct` ;
- b) `insérer-adressage-direct` ;
- c) `supprimer-adressage-direct`.

#### Exercice 2 (Méthode de la division et résolution des collisions par chaînage)

1°) En insérant successivement les clés  $k = \{5, 28, 19, 15, 20, 33, 12, 17, 10\}$ , illustrez le fonctionnement d'une table de hachage où les collisions sont résolues par chaînage, où la fonction de hachage est la méthode de la division et où  $m = 9$ .

2°) Définissez les procédures suivantes qui implémentent les opérations de dictionnaire sur les tables de hachage avec résolution des collisions par chaînage et donnez leur temps d'exécution dans le cas le plus défavorable :

- a) `insérer-hachage-chaînée` ;
- b) `rechercher-hachage-chaînée` ;
- c) `supprimer-hachage-chaînée`.

3°) Pour apprécier l'efficacité du hachage avec chaînage, il convient d'analyser le cas moyen plutôt que le cas le plus défavorable.

- a) Quel est le facteur de remplissage d'une table de hachage  $t$  à  $m$  alvéoles qui stocke  $n$  éléments ?
- b) Quelle condition principale doit être respectée pour que le hachage donne une bonne performance dans le cas moyen ?
- c) En supposant l'hypothèse du hachage uniforme simple et en notant la longueur de la liste  $t[j]$  par  $n_j$  pour  $j = 0, 1, \dots, m-1$ , donnez la valeur moyenne de  $n_j$ .
- d) Sachant que dans une table de hachage pour laquelle les collisions sont résolues par chaînage, une recherche prend un temps moyen de  $\Theta(1 + \alpha)$  (temps du calcul de  $h(k)$  + le nombre moyen d'éléments examinés), déduisez-en le temps d'exécution de la recherche dans le cas moyen.

4°) Peut-on obtenir des gains de performance significatifs si l'on modifie le schéma de chaînage de telle manière que chaque liste de la table de hachage soit triée ? Comment cette modification affecte-t-elle le temps d'exécution des recherches réussies, des recherches infructueuses, des insertions et des suppressions ?

5°) Le choix de la valeur de  $m$  peut influencer grandement la qualité d'une fonction de hachage basée sur la méthode de la division.

a) En insérant successivement les clés  $k = \{1, 7, 15, 21, 27, 29, 31, 35, 43, 45, 59, 67\}$ , illustrez le fonctionnement d'une table de hachage où les collisions sont résolues par chaînage, où la fonction de hachage est la méthode de la division et où  $m = 8$ . Que peut-on en déduire sur le choix de la valeur de  $m$  ?

b) Refaites l'exercice de la question précédente avec  $m = 9$ . Que peut-on en déduire cette fois-ci ?

### Exercice 3 (Tables à adressage ouvert)

1°) Illustrez le résultat de l'insertion des clés  $k = \{10, 22, 31, 4, 15, 28, 17, 88, 59\}$  par sondage linéaire dans une table de hachage de longueur  $m = 11$  en utilisant la méthode de division comme fonction de hachage auxiliaire.

2°) Soit une fonction de hachage auxiliaire  $h(k, i)$  qui retourne la position de l'alvéole à sonder à partir de la clé  $k$  et du nombre de sondages  $i$ , définissez les procédures suivantes s'appliquant à une table de hachage en adressage ouvert :

a) **insérer-hachage**( $t, k$ ) : prend en entrée une table de hachage  $t$  et une clé  $k$ , et retourne le numéro de l'alvéole où elle stocke la clé  $k$ . Signale une erreur si la table est déjà pleine.

b) **rechercher-hachage**( $t, k$ ) : prend en entrée une table de hachage  $t$  et une clé  $k$ , et retourne  $j$  si l'alvéole  $j$  contient la clé  $k$ . Si la clé  $k$  n'est pas présente dans la table  $t$ , la procédure retourne *NIL*.

c) Expliquez pourquoi la suppression dans une table à adressage ouvert est difficile.

### Références

Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L. et Stein C., "Algorithmique" 3e édition, Dunod, 2010.