MINF0402
DST Mai 2019

Ex1,

1) $C = AB \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q \end{matrix}$

2)
```
Pour I allant de 1 à n
    Pour J allant de 1 à q
        AUX ← 0
        Pour k allant de 1 à m
            AUX ← AUX + A(I,k) * B(K,J)
        FIN POUR
        C(I,J) ← AUX
    FIN POUR
FIN POUR
```

Ex2,

<u>remarque préliminaire</u>: dans les deux questions A étant une matrice triangulaire son déterminant est le produit de ses termes diagonaux. Comme de plus A est inversible, son déterminant est non nul donc tous ses termes diagonaux sont non nuls.

1°) $Ax = b$ soit donc :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = b_3 \\ \text{-----------------} & = \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ii}x_i & = b_i \\ \text{-----------------} & = \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

soit $\sum_{k=1}^{i} a_{ik} x_k = b_i \quad 1 \leq i \leq n$

on a donc :

$x_1 = b_1 / a_{11}$

$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1) / a_{22}$

$x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2) / a_{33}$

$x_i = (b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{i\,i-1}x_{i-1}) / a_{ii}$

qu'on établit à partir de $\sum_{k=1}^{i} a_{ik} x_k = b_i$ soit $\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} x_k + a_{ii} x_i = b_i$

d'où $\boxed{x_i = \left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} x_k\right) / a_{ii}} \quad 1 \leq i \leq n$

pour calculer x_i on utilise donc les valeurs précédemment calculées $x_1, x_2, \_\_\_\_ x_{i-1}$

On a donc l'algo:

$x(1) \leftarrow b(1)/A(1,1)$

Pour I allant de 2 à n
    AUX ← 0
    Pour k allant de 1 à I-1
        AUX ← AUX + A(I,k) * X(k)
    Fin Pour
    X(I) ← (b(I) − AUX) / A(I,I)
Fin Pour

remarque

il est en fait inutile de traiter séparemment le cas "I = 1"

on peut directement faire boucle I de 1 à n (dans le cas I = 1, la boucle interne en k ne sera pas exécutée !)

2°)
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - - - - - - - - + a_{1n}x_n = b_1 \\ - - - - - - - - - - - = - \\ a_{ii}x_i + a_{i,i+1}x_{i+1} + \quad + a_{i,n}x_n = b_i \\ - - - - - - - - = b_{n-1} \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\ a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

soit $\sum_{i=k}^{n} a_{ik}x_k = b_i \quad 1 \leq i \leq n$

on part de la dernière équation:

$x_n = b_n / a_{nn}$

$x_{n-1} = (b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n) / a_{n-1,n-1}$

$x_{n-2} = (b_{n-2} - a_{n-2,n-1}x_{n-1} - a_{n-2,n}x_n) / a_{n-2,n-2}$

la ième équation s'écrit encore :

$$a_{ii}x_i + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}x_k = b_i \quad \text{soit} \quad x_i = \left(b_i - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}x_k\right) / a_{ii}$$

$1 \leq i \leq n$

Pour calculer x_i, on utilise donc les valeurs précédemment calculées à savoir x_{i+1} x_{i+2} —— x_n

D'où l'algo:

$X(n) \leftarrow b(n)/A(n,n)$

Pour I <u>descendant</u> de (n-1) à 1
    AUX ← 0
    Pour k allant de (I+1) à n
        AUX ← AUX + A(I,k) * X(k)
    Fin Pour
    X(I) ← (b(I) − AUX) / A(I,I)
Fin Pour

Exercice 3

1°) On va donc devoir calculer le determinant de R puis la comatrice pour pouvoir obtenir l'inverse

$$\det R = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

donc R est inversible

$$\operatorname{com} R = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$R^{-1} = \frac{1}{\det R} (\operatorname{com} R)^T = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2°) Par Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 4 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow 4L_2 + L_1 \quad L_3 \leftarrow 4L_3 - L_1$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

donc $R^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

<u>ou bien</u> $R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2x + 2y = a \\ x + z = b \\ y + z = c \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim} \begin{cases} 2y - 2z = a - 2b \\ x + z = b \\ y + z = c \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$$

$$\begin{cases} -4z = a - 2b - 2c \\ x + z = b \\ y + z = c \end{cases}$$

$z = \frac{1}{4}(-a + 2b + 2c)$

$x = b - \frac{1}{4}(-a + 2b + 2c) = \frac{1}{4}(a + 2b - 2c)$

$y = c - \frac{1}{4}(-a + 2b + 2c) = \frac{1}{4}(a - 2b + 2c)$

En remettant alors dans l'ordre (x,y,z) et (a,b,c) :

soit donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} a+2b-2c \\ a-2b+2c \\ -a+2b+2c \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{R^{-1}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

3°) $\Delta x = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = -16$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

(det $R \neq 0$ donc R est inversible)

$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 9 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 9 & 1 \\ -1 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = 8$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -20$

$C_3 \leftarrow C_3 - 3C_2$

d'où avec $\Delta = \det R$ l'unique solution donnée par

$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = 4 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = -2 \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = 5$

4°) $R\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4+18-6 \\ 4-18+6 \\ -4+18+6 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 16 \\ -8 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$!

Exercice 4

1°a) $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 5-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\left((5-\lambda)^2 - 2^2\right)$

$= (3-\lambda)(5-\lambda-2)(5-\lambda+2) = (3-\lambda)^2(7-\lambda)$

$\lambda = 3$ est donc valeur propre double

$\lambda = 7$ ——— simple

b) • E_3 on doit résoudre $(A - 3Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soit donc

$\begin{cases} 0 = 0 \\ -x+2y+2z = 0 \\ -x+2y+2z = 0 \end{cases} \sim x = 2(y+z)$

$E_3 = \{ (2(y+z), y, z) \mid y,z \in \mathbb{R} \} = \{ (2y,y,0)+(2z,0,z) \mid y,z \in \mathbb{R} \}$

$= \{ y v^3 + z w^3 \mid y,z \in \mathbb{R} \}$ avec $v^3 = (2,1,0)$, $w^3 = (2,0,1)$

E_3 est donc engendré par deux vecteurs propres v^3 et w^3 non colinéaires qui en constitue donc une base donc $\dim E_3 = 2$ = multiplicité de la vp 3 donc la matrice est diagonalisable (Il n'y a rien à vérifier avec l'autre valeur propre car elle est simple)

- E_7 on doit résoudre $(A - 7Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soit

$$\begin{cases} -4x = 0 \\ -x - 7y + 7z = 0 \\ -x + 7y - 7z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

$E_7 = \{(0, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z v_7 \mid z \in \mathbb{R}\}$

avec $v_7 = (0, 1, 1)$

E_7 est donc engendré par un seul vecteur (non nul) v^7 donc $\dim E_7 = 1$ c'est normal car 7 est une valeur propre simple, c'est à dire de multiplicité 1.

c) On a montré ci dessus que A était diagonalisable

on prend maintenant $P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_3 & w_3 & v_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

On a donc ici $P = R$ mais en effectuant les calculs autrement on aurait obtenu a priori $P \neq R$

et on a alors $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

2°)

a) $P_{A_\varepsilon}(\lambda) = \begin{vmatrix} 3+2\varepsilon-\lambda & -4\varepsilon & 4\varepsilon \\ -1+\varepsilon & 5-2\varepsilon-\lambda & 2+2\varepsilon \\ -1 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+2\varepsilon-\lambda & -4\varepsilon & 0 \\ -1+\varepsilon & 5-2\varepsilon-\lambda & 7-\lambda \\ -1 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix}$ $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$

$C_3 \leftarrow C_3 + C_2$

$= \begin{vmatrix} 3+2\varepsilon-\lambda & -4\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 3-2\varepsilon-\lambda & 0 \\ -1 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)\begin{vmatrix} 3+2\varepsilon-\lambda & -4\varepsilon \\ \varepsilon & 3-2\varepsilon-\lambda \end{vmatrix}$ $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$

$= (7-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -6+2\lambda \\ \varepsilon & 3-2\varepsilon-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ \varepsilon & 3-2\varepsilon-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(3-\lambda)^2$

b) le polynôme caractéristique étant le même, les valeurs propres sont donc les mêmes et avec la même multiplicité. Regardons l'espace propre E_3^ε associé à la valeur propre double qui détermine la diagonalisabilité.
On doit donc résoudre $(A_\varepsilon - 3Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soit

$$\begin{cases} 2\varepsilon x - 4\varepsilon y + 4\varepsilon z = 0 \\ (-1+\varepsilon)x + (2-2\varepsilon)y + (2+2\varepsilon)z = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ -x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\varepsilon x - 4\varepsilon y + 4\varepsilon z = 0 \\ \varepsilon x - 2\varepsilon y + 2\varepsilon z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

qu'on peut simplifier par $2\varepsilon \neq 0$, $\varepsilon \neq 0$

si ε était nul ces deux équations disparaîtraient en $0=0$!

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 4z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y \\ z = 0 \end{cases}$$

$E_3^\varepsilon = \{(2y, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$
$= \{y v^3 \mid y \in \mathbb{R}\}$ avec à nouveau $v^3 = (2,1,0)$

E_3^ε est engendré par un seul vecteur non nul donc $\dim E_3^\varepsilon = 1$
la dimension n'est pas égale à la multiplicité de la vp associée donc la matrice n'est pas diagonalisable

<u>Remarque</u> $R^{-1} A_\varepsilon R = S A_\varepsilon R = \begin{pmatrix} 3 & 4\varepsilon & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

si $\varepsilon = 0$ on retombe sur la forme diagonale