Congruences, petit théorème de Fermat

Exercice 1:

Compléter : $a \equiv b[n] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}\ tel\ que$: ……………………………………

1) Montrer que si $a \equiv a'[n]\ et\ b \equiv b'[n] alors\ a + b \equiv a' + b'[n]$
2) Montrer que si $a \equiv a'[n]\ et\ b \equiv b'[n] alors\ a \times b \equiv a' \times b'[n]$

Exercice 2 :

1) Déterminer pour $k \in \mathbb{N}$, à quoi est congru 10^k modulo 3.
2) En déduire une condition suffisante pour que $N = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \ ... + a_1 \times 10 + a_0$ soit divisible par 3.

Exercice 3 :

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $5n^3 + n$ est divisible par 6
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(n-1)n(n+1)$ est divisible par 3 et est divisible par 2. Peut-on en déduire que $(n-1)n(n+1)$ est divisible par 6 ?
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 8^{2n} \equiv 1\ [21]$

Exercice 4 :

1) Déterminer $u \in \mathbb{Z}$ tel que $12u \equiv 1[137]$
2) Déterminer les entiers vérifiant : $12x + 5 \equiv 0\ [137]$
3) Résoudre $18x - 31 \equiv 0[7]$

Exercice 5 : Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant :

$$\begin{cases} x \equiv 2[7] \\ x \equiv 5\ [9] \end{cases}$$

Exercice 6 :

1) Décomposer 143 en facteur premiers
2) Trouver a $\in \mathbb{Z}$ tel que $27^{103} \equiv\ a\ [13]$.
3) Trouver b $\in \mathbb{Z}$ tel que $27^{103} \equiv b\ [11]$
4) En déduire le reste de la division euclidienne de 27^{103} par 143.

Exercice : Petit théorème de Fermat

Soit $p \in \mathbb{P}$ et $1 \leq k \leq p - 1$

1) Montrer que $\binom{p}{k}$ est divisible par p. On pourra remarquer une relation entre $\binom{p}{k}\ et\ \binom{p-1}{k-1}$
2) Montrer par récurrence sur $a \in \mathbb{N}^*$, $a^p \equiv a[p]$

Exercice 7 : Soit $n \in \mathbb{Z}$, on pose $A = n^7 - n$

1) Montrer que $A \equiv 0\ [7]$
2) Montrer que $A \equiv 0\ [2]$
3) En déduire que $A \equiv 0\ [14]$

Exercice 8 :

1) Décomposer 546 en produit de facteurs premiers
2) Montrer que l'on a :
$$x^{13} \equiv x\ [13]\ ;\ x^{13} \equiv x[7];\ x^{13} \equiv x[3];\ x^{13} \equiv x[2] \quad x\ \in \mathbb{N}$$
3) En déduire que pour tout entier x, on a $x^{13} \equiv x\ [546]$

Exercice 9 : On considère l'équation (E): $11x^2 - 7y^2 = 5$ où $x, y \in \mathbb{Z}$

1) Montrer que si (x, y)est solution de (E) alors $x^2 \equiv 2y^2\ [5]$
2) Utiliser un tableau de congruence pour calculer les restes possibles de $x^2 et\ 2y^2$ modulo 5.
3) En déduire que si (x, y)est solution de (E) alors x, y sont des multiples de 5.
4) Etudier la réciproque. Que penser de (E) ?