Chapitre II

Systèmes linéaires

II.1 Systèmes linéaires généraux

Systèmes linéaires généraux

Un système d'équations linéaires dans $\mathbb{K}$ est un système d'équations de la forme :

$$(E) \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m & = & b_n \end{array} \right.$$

Où $x_1, x_2, \ldots, x_m$ désignent les inconnues et où les autres coefficients sont des éléments de $\mathbb{K}$ donnés. La *matrice de ce système* et son *second membre* sont respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

On dira que l'*équation est homogène* si le second membre est nul.

Le système(E) peut encore s'écrire matriciellement sous la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{II.1.0.1}$$

Soit donc de façon plus concise :

$$(E) \quad AX = b$$

Et c'est en fait pour cela, qu'a été introduite la multiplication "matrice par vecteur colonne".

Au système (E), on peut toujours associer le système homogène (H).

$$(H) \quad AX = 0_{\mathbb{K}^n}$$

Il est facile de montrer :

Proposition II.1.1 — *(H) admet toujours une solution, à savoir la solution dite triviale : $X = 0_{\mathbb{K}^m}$*

— *Si (H) admet une solution non triviale alors il admet une infinité de solution.*

On en déduit alors :

Théorème II.1.2 *Si* (E) *admet au moins une solution (dite solution particulière) notée* X^* *alors pour obtenir la solution générale de* (E)*, il suffit d'ajouter* X^* *à la solution générale de* H*. En d'autre termes en désignant par* S_E *et* S_H *les ensembles de solutions respectifs de* (E) *et* (H) *on a :*

$$S_E = \{X^* + Z \ \mid \ Z \in S_H\}$$

Et on déduit immédiatement :

Théorème II.1.3 *Un système d'équations tel que* (E) *admet soit :*

— *pas de solution,*

— *une solution unique,*

— *une infinité de solution.*

II.2 Méthode de Gauss

Pour la résolution des systèmes linéaires, l'une des méthodes les plus simples est la *méthode de Gauss* que - tel Monsieur Jourdain et sa prose- l'on a en fait déjà employée sans la nommer ! Cette méthode repose sur la propriété élémentaire suivante :

Proposition II.2.1 *Soit la donnée d'un système d'équations linéaires, alors on ne modifie pas l'ensemble des solutions de ce système en enchainant les transformations suivantes*

— *On ajoute une équation multipliée par différents scalaires aux <u>autres</u> équations*

— *On multiplie une équation par un scalaire <u>non nul</u>.*

— *On permutte l'ordre des équations.*

— *On ajoute à une équation une combinaison linéaire des <u>autres</u>.*

Exemple II.2.2 *Soit le système d'équations dans* $\mathbb{R}$ *:*

$$(H)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Alors en effectuant les transformations :
$L_2 \leftarrow L_2 - L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1,\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1,$ *on a :*

$$(H)\ \sim \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Soit donc : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rcrr} x_2 & = & & 2x_3 \\ x_1 & = & - & 3x_3 \end{array}\right.$

$$\sim \left\{ x = x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right.$$

$$S_H = \{(-3x_3,\ 2x_3,\ x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Exemple II.2.3 *Si on reprend l'exemple précédent, mais avec un second membre non nul : Alors avec les mêmes transformations que précédemment on obtient :*

$$(E)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ x_1 & & & + & 3x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \end{array}\right.$$
$$\sim\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & + & x_2 & - & 2x_3 & = & -2 \\ & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$
$$\sim\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & + & x_2 & - & 2x_3 & = & -2 \end{array}\right.$$
$$\sim\left\{\begin{array}{rcrr} x_2 & = & 2x_3 & -2 \\ x_1 & = & -3x_3 & +3 \end{array}\right.$$

$$\textit{Soit : } x = \begin{pmatrix} -3x_3 & +3 \\ 2x_3 & -2 \\ x_3 & \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit donc

$$S_E = \{\ (-3x_3 + 3,\ 2x_3 - 2,\ x_3\ ) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Soit encore en faisant apparaître une solution particulière de (E) *:*

$$S_E = \{x_3(-3,\ 2,\ )\ +\ (3,\ -2,\ 0) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$$

On trouve donc les solutions du système $Ax = b$ en sommant les solutions du système homogène et une solution particulière du système non homogène.

Exemple II.2.4 *Si on prend un autre second membre pour le système précédent :*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ x_1 & & & + & 3x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

Alors il est facile de voir par les mêmes transformations que précédemment que ce système n'a pas de solution.

Exemple II.2.5 *Traitons maintenant un système un peu plus complet :*

$$(E)\quad\left\{\begin{array}{rcrcrcll} \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & \alpha & \\ 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & - & 5\lambda_3 & = & \beta & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & & & = & \gamma & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\textit{Soit}\quad\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & \alpha & \\ & - & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & \beta - 2\alpha & \\ & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & \gamma - \alpha & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}\right.$$

$$\textit{Soit}\quad\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & \alpha \\ & - & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & \beta - 2\alpha \\ & & & & \lambda_3 & = & \gamma + \beta - 3\alpha \end{array}\right.$$

$$\textit{Soit}\quad\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \lambda_3 & = & -3\alpha & + & \beta & + & \gamma \\ \lambda_2 & = & 2\alpha & - & \beta & - & \lambda_3 \\ & = & 5\alpha & - & 2\beta & - & \gamma \\ \lambda_1 & = & \alpha & - & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 \\ & = & -10\alpha & + & 4\beta & + & 3\gamma \end{array}\right.$$

$$\textit{Soit}\quad\left\{\begin{array}{rcrrr} \lambda_1 & = & -10\alpha & +4\beta & +3\gamma \\ \lambda_2 & = & 5\alpha & -2\beta & -\gamma \\ \lambda_3 & = & -3\alpha & +\beta & +\gamma \end{array}\right.$$

Soit donc

$$S_E = \{(-10\alpha + 4\beta + 3\gamma, 5\alpha - 2\beta - \gamma, -3\alpha + \beta + \gamma)\}$$

II.3 Cas des matrices inversibles

Les systèmes d'équations linéaires - pour lesquels la matrice est inversible - jouissent de propriétés remarquables :

Proposition II.3.1 *Soit le système :*

$$(E) \quad AX = b$$

où A est une matrice carrée inversible d'ordre n. alors (E) possède une solution unique donnée par :

$$X = A^{-1}b$$

Il est en effet immédiat de vérifier que $A^{-1}b$ est effectivement solution de (E) et en multipliant les deux membres de (E) par A^{-1} il est immédiat que c'est la seule.
Cette proposition admet la réciproque suivante :

Proposition II.3.2 *Soit A est une matrice carrée d'ordre n, s'il existe un vecteur colonne d'ordre n : b^* tel que :*

$$(E^*) \quad AX = b^*$$

admette une solution unique, alors la matrice A est inversible. et en conséquence l'équation

$$(E) \quad AX = b$$

admet quel que soit le second membre une unique solution.

On déduit immédiatement :

Proposition II.3.3 *Soit A est une matrice carrée d'ordre n, l'équation homogène*

$$(H) \quad AX = 0_{\mathbb{K}^n}$$

admet une solution unique si et seulement si la matrice A est inversible.

On déduit de ces propositions qu'en utilisant la méthode de Gauss, il est facile de déterminer si une matrice A est effectivement inversible et de calculer alors son inverse :

Exemple II.3.4 *Soit donc la matrice P suivante :*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

En fait c'est la matrice associée à l'exemple (II.2.5) Pour déterminer si P est inversible cherchons à résoudre le système suivant où le second membre est quelconque :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Soit donc le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & \alpha \\ 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & - & 5\lambda_3 & = & \beta \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & & & = & \gamma \end{array} \right.$$

*Qui est donc le système de l'exemple II.2.5 et on a vu que celui ci admettait une unique solution, P est donc inversible. Par ailleurs l'unique solution est donnée par : (**attention** il faut impérativement remettre tous les variables dans "l'ordre initial" : $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et α, β, γ si cela n'a déjà été fait) de façon à pouvoir écrire :*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 4 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

et on a donc fait apparaître P^{-1} :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 4 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

II.4 Méthode de Gauss et Méthode Magique - Exemples

On reprend ici la méthode Magique et la méthode de Gauss décrites sur des exemples. On suggère d'aller voir directement les exemples - en particulier l'inversion de la matrice 4x4 avant de revenir au descriptif.

Soit donc à inverser une matrice carrée M inversible,

- Avec la méthode par les systèmes "à la Gauss", on écrit le système $MX = Y$ pour un second membre quelconque et la résolution $X = M^{-1}Y$ fait apparaître la matrice M^{-1}.
- Dans la méthode magique ou méthode des tableaux , on écrit à droite de M la matrice identité et en effectuant des transformations à la Gauss sur les lignes de la grande matrice ainsi obtenue, on fait apparaitre à gauche la matrice identité et à droite il apparait alors M^{-1}.

Les transformations à la Gauss utilisées et autorisées sont les suivantes :
(on entend par "ligne" les "grandes lignes" de la matrice obtenue en écrivant à droite de la matrice considérée, la matrice identité et ses transformées successives.)

1. On ajoute une équation (ou une ligne) multipliée par différents scalaires aux autres équations (ou lignes).
   cette ligne qui est ajoutée aux autres est la ligne comprenant le pivot.
2. On multiplie une équation (ou une ligne) par un scalaire non nul.
3. On permute l'ordre des équations (ou des lignes).

Dans chacun des cas il y a deux variantes de la méthode : "à la Gauss" et "à la Gauss-Jordan". *Dans le cas de la méthode de Gauss-Jordan sur la colonne du pivot - à l'exception de celui ci tous les éléments deviennent nuls dans la transformation. Dans la méthode à la Gauss simple, sur la colonne du pivot, dans la transformation les éléments qui appartiennent à des lignes qui n'ont pas encore été utilisées pour le choix des pivots deviennent nuls.* A la fin de la méthode de Gauss-Jordan, l'inversion est pratiquement terminée - il suffit éventuellement de permuter les lignes et/ou de les multiplier par des constantes. Dans la méthode de Gauss classique, on obtient un système échelonné (triangulaire à une permutation des lignes près), il faut ensuite effectuer la remontée triangulaire. Ceci se comprend plus facilement en regardant les exemples en particulier avec la matrice 4x4.A noter que l'on procède toujours "colonne par colonne" même si on ne les prend pas dans l'ordre.

Dans le cas de la méthode des systèmes on aligne systématiquement les inconnues par colonnes et il est souhaitable de le faire également avec les éléments du second membre. Les deux méthodes sont identiques, simplement dans la méthode magique, on écrit uniquement les coefficients des inconnues et des éléments du second membre (donc obligatoirement dans des tableaux et obligatoirement alignés par le fait). Pour chacune des trois matrices, on donne le calcul de l'inverse par :

- La méthode magique à la Gauss-Jordan,
- La méthode par les systèmes à la Gauss-Jordan (équivaut à la précédente),
- La méthode magique à la Gauss,
- La méthode par les systèmes à la Gauss (équivaut à la précédente).

Soit donc à déterminer les inverses des matrices suivantes par la méthode des tableaux (la méthode magique) ou par la méthode de Gauss.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\3&4&3\\2&5&-4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-5&-1&4\\3&1&-2\\-4&-2&3\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&2&-2&2\\1&-2&3&-3\\-1&2&-3&4\end{pmatrix}$$

Les transformations sont systématiquement indiquées - ce qu'il vous est demandé de toujours faire. Le pivot est encadré.

La matrice A :

•Par la méthode magique à la Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\boxed{1}&1&2&1&0&0\\3&4&3&0&1&0\\2&5&-4&0&0&1\end{array}\right)\quad\begin{array}{l}\\L_2\leftarrow L_2-3L_1\\L_3\leftarrow L_3-2L_1\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&\boxed{1}&-3&-3&1&0\\0&3&-8&-2&0&1\end{array}\right)\quad\begin{array}{l}L_1\leftarrow L_1-L_2\\ \\L_3\leftarrow L_3-3L_2\end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 7 & -3 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & L_1 - 5L_3 \\ L_2 & \leftarrow & L_2 + 3L_3 \\ & & \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -31 & 14 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 18 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{Soit } A^{-1} = \begin{pmatrix} -31 & 14 & -5 \\ 18 & -8 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>La matrice A :</u>

•Par les systèmes à la Gauss-Jordan :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} \boxed{x_1} & + & x_2 & + & 2x_3 & = & a & & & & \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & & b & & & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & 4x_3 & = & & & c & & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}\right.$$

$$\sim \left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & a & & & & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ & & \boxed{x_2} & - & 3x_3 & = & -3a & + & b & & \\ & & 3x_2 & - & 8x_3 & = & -2a & & & + c & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array}\right.$$

$$\sim \left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & & & + & 5x_3 & = & 4a & - & b & & L_1 \leftarrow L_1 - 5L_3 \\ & & x_2 & - & 3x_3 & = & -3a & + & b & & L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3 \\ & & & & \boxed{x_3} & = & 7a & - & 3b & + c & \end{array}\right.$$

$$\sim \left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & = & -31a & + & 14b & - & 5c \\ & x_2 & & = & 18a & - & 8b & + & 3c \\ & & x_3 & = & 7a & - & 3b & + & c \end{array}\right. \qquad \text{Soit } A^{-1} = \begin{pmatrix} -31 & 14 & -5 \\ 18 & -8 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>La matrice A :</u>

•Par la méthode magique à la Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{lcl} & & \\ L_2 & \leftarrow & L_2 - 3L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{lcl} & & \\ & & \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - 3L_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 7 & -3 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & L_1 - 2L_3 \\ L_2 & \leftarrow & L_2 + 3L_3 \\ & & \end{array}$$

L'échelonnement est terminé, on passe à la "remontée triangulaire" effectuée ici en éliminant les termes au dessus de la diagonale (avec les premières transformations indiquées ci dessus) :

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -13 & 6 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 18 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & L_1 - L_2 \\ & & \\ & & \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -31 & 14 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 18 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{Soit } A^{-1} = \begin{pmatrix} -31 & 14 & -5 \\ 18 & -8 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A :

•Par les systèmes à la Gauss :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} \boxed{x_1} & + & x_2 & + & 2x_3 & = & a & & & & \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & & b & & & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & 4x_3 & = & & & c & & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}\right.$$

$$\sim\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & a & & & & \\ & & \boxed{x_2} & - & 3x_3 & = & -3a & + & b & & \\ & & 3x_2 & - & 8x_3 & = & -2a & & & + & c \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array}$$

$$\sim\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & a & & & & \\ & & x_2 & - & 3x_3 & = & -3a & + & b & & \\ & & & & \boxed{x_3} & = & 7a & - & 3b & + & c \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3 \\ \\ \end{array}$$

L'échelonnement est terminé, on passe à la "remontée triangulaire" effectuée ici en éliminant les termes au dessus de la diagonale (avec les premières transformations indiquées ci dessus) :

$$\sim\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & = & -13a & + & 6b & - & 2c \\ & & \boxed{x_2} & & & = & 18a & - & 8b & + & 3c \\ & & & & x_3 & = & 7a & - & 3b & + & c \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & & & & & = & -31a & + & 14b & - & 5c \\ & & x_2 & & & = & 18a & - & 8b & + & 3c \\ & & & & x_3 & = & 7a & - & 3b & + & c \end{array}\right. \quad \text{Soit } A^{-1} = \begin{pmatrix} -31 & 14 & -5 \\ 18 & -8 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice B :

•Par la méthode magique à la Gauss-Jordan, - dans cet exemple les colonnes de la matrice à gauche ne sont pas considérées dans l'ordre usuel - :

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -5 & \boxed{-1} & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr} -5 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 - 5L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \end{array}$$

Notons que l'on a évité de faire apparaître des fractions en utilisant la transformation : $L_1 \leftarrow 2L_1 - 5L_2$ et pas $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{5}{2}L_2$

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & -2 & -2 & -3 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ \\ \end{array} \quad \sim\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

C'est terminé : à une permutation de lignes près la matrice à gauche est diagonale, il suffit juste alors de permuter et de multiplier les lignes par les coefficients adaptés.

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \quad \sim\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 & 2 \end{array}\right) \quad \text{Soit } B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice B :

•Par les systèmes à la Gauss-Jordan - dans cet exemple les inconnues x_1, x_2, x_3 ne sont pas considérées dans l'ordre usuel :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -5x_1 & - & \boxed{x_2} & + & 4x_3 & = & a & & & & \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & & & b & & \\ -4x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & & & & & c \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\sim\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -5x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & a & & & & \\ -\boxed{2x_1} & & & + & 2x_3 & = & a & + & b & & \\ 6x_1 & & & - & 5x_3 & = & -2a & & & + & c \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 - 5L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \end{array}$$

Notons que l'on a évité de faire apparaître des fractions en utilisant la transformation : $L_1 \leftarrow 2L_1 - 5L_2$ et pas $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{5}{2}L_2$.

$$\sim \left\{ \begin{array}{rrrrrrrr} & - & 2x_2 & - & 2x_3 & = & -3a & - & 5b & & \\ -2x_1 & & & + & 2x_3 & = & a & + & b & & \\ & & & & \boxed{x_3} & = & a & + & 3b & + & c \end{array} \right. \qquad \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & L_1 + 2L_3 \\ L_2 & \leftarrow & L_2 - 2L_3 \\ & & \end{array}$$

$$\sim \left\{ \begin{array}{rrrrrrrrr} & - & 2x_2 & = & -a & + & b & + & 2c \\ -2x_1 & & & = & -a & - & 5b & - & 2c \\ & & x_3 & = & a & + & 3b & + & c \end{array} \right.$$

Simplification et permutation

$$\sim \left\{ \begin{array}{rrrrrrrr} 2x_1 & & & = & a & + & 5b & + & 2c \\ & 2x_2 & & = & a & - & b & - & 2c \\ & & x_3 & = & a & + & 3b & + & c \end{array} \right. \qquad \text{Soit } B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>La matrice B :</u>

•Par la méthode magique à la Gauss :

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -5 & \boxed{-1} & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \qquad \begin{array}{lcl} & & \\ L_2 & \leftarrow & L_2 + L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -5 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{-2} & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -5 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 3 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & L_1 - 4L_3 \\ L_2 & \leftarrow & L_2 - 2L_3 \\ & & \end{array}$$

L'échelonnement est terminé, on passe à la "remontée triangulaire" effectuée ici en éliminant colonne après colonne (reprises dans l'ordre inverse du précédent - même si ce n'est pas obligatoire) les termes en dehors des pivots (avec les premières transformations indiquées ci dessus) :

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -5 & -1 & 0 & -3 & -12 & -4 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & 2L_1 - 5L_2 \\ & & \\ & & \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 & 2 \end{array} \right) \qquad \text{Soit } B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>La matrice B :</u>

•Par les systèmes à la Gauss :

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrrrrrr} -5x_1 & - & \boxed{x_2} & + & 4x_3 & = & a & & & \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & & b & & \\ -4x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & & & c \end{array} \right. \qquad \begin{array}{lcl} & & \\ L_2 & \leftarrow & L_2 + L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\sim \left\{ \begin{array}{rrrrrrrrrr} -5x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & a & & & \\ -\boxed{2x_1} & & & + & 2x_3 & = & a & + & b & \\ 6x_1 & & & - & 5x_3 & = & -2a & & & + c \end{array} \right. \qquad \begin{array}{lcl} & & \\ & & \\ L_3 & \leftarrow & L_3 + 3L_2 \end{array}$$

$$\sim \left\{ \begin{array}{rrrrrrrrrrr} -5x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & a & & & & \\ -2x_1 & & & + & 2x_3 & = & a & + & b & & \\ & & & & \boxed{x_3} & = & a & + & 3b & + & c \end{array} \right. \qquad \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & L_1 - 4L_3 \\ L_2 & \leftarrow & L_2 - 2L_3 \\ & & \end{array}$$

L'échelonnement est terminé, on passe à la "remontée triangulaire" effectuée ici en éliminant colonne après colonne (reprises dans l'ordre inverse du précédent - même si ce n'est pas obligatoire) les termes en dehors des pivots (avec les premières transformations indiquées ci dessus) :

$$\sim\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} -5x_1 & - & x_2 & & & = & -3a & - & 12b & - & 4c & L_1 \leftarrow 2L_1-5L_2 \\ -\boxed{2x_1} & & & & & = & -a & - & 5b & - & 2c & \\ & & & & x_3 & = & a & + & 3b & + & c & \end{array}\right.$$

$$\sim\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} & - & 2x_2 & & & = & -a & + & b & + & 2c \\ -2x_1 & & & & & = & -a & - & 5b & - & 2c \\ & & & & x_3 & = & a & + & 3b & + & c \end{array}\right.$$

Simplification et permutation

$$\sim\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & = & a & + & 5b & + & 2c \\ 2x_2 & = & a & - & b & - & 2c \\ 2x_3 & = & 2a & + & 6b & + & 2c \end{array}\right. \qquad \text{Soit } B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>La matrice C :</u>

•Par la méthode magique à la Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} \boxed{1} & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4+L_1 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1+L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3+L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4-L_2 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2+L_3 \\ \\ L_4 \leftarrow L_4+L_3 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3+L_4$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \text{Soit } C^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>La matrice C :</u>

•Par les systèmes à la Gauss-Jordan :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \boxed{x_1} & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & a \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & \quad b \qquad\qquad L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & = & \qquad c \qquad L_3 \leftarrow L_3-L_1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & \qquad\quad d \quad L_4 \leftarrow L_4+L_1 \end{array}\right.$$

$$\sim\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & a \qquad\qquad\qquad L_1 \leftarrow L_1+L_2 \\ & & \boxed{x_2} & - & x_3 & + & x_4 & = & a + b \\ & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & -a \quad + c \qquad L_3 \leftarrow L_3+L_2 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & a \qquad + d \quad L_4 \leftarrow L_4-L_2 \end{array}\right.$$

$$\sim \left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} x_1 & & & & = & 2a & + & b & & \\ & x_2 & - & x_3 + x_4 & = & a & + & b & & L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ & & & \boxed{x_3} - x_4 & = & & & b & + c & \\ & & - & x_3 + 2x_4 & = & & - & b & + d & L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{array}\right.$$

$$\sim \left\{\begin{array}{rrrrrrrl} x_1 & & & = & 2a & + b & & \\ & x_2 & & = & a & + 2b & + c & \\ & & x_3 - x_4 & = & & b & + c & L_3 \leftarrow L_3 + L_4 \\ & & \boxed{x_4} & = & & & c + d & \end{array}\right.$$

$$\sim \left\{\begin{array}{rrrrrrrr} x_1 & & & & = & 2a & + b & \\ & x_2 & & & = & a & + 2b & + c \\ & & x_3 & & = & & b & + 2c + d \\ & & & x_4 & = & & & c + d \end{array}\right. \qquad \text{Soit } C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>La matrice C :</u>

•Par la méthode magique à la Gauss :

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} \boxed{1} & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_4 \\ \end{array}$$

L'échelonnement est terminé, on passe à la remontée triangulaire (avec les premières transformations indiquées ci dessus) :

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{Soit } C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>La matrice C :</u>

•Par les systèmes à la Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrrrrl} \boxed{x_1} & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & a & & & & \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & & b & & & L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & = & & & c & & L_3 \leftarrow L_3-L_1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & & & & d & L_4 \leftarrow L_4+L_1 \end{array}\right.$$

$$\sim\left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & a \\ & & \boxed{x_2} & - & x_3 & + & x_4 & = & a+b \\ & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & -a+c \qquad L_3 \leftarrow L_3+L_2 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & a+d \qquad L_4 \leftarrow L_4-L_2 \end{array}\right.$$

$$\sim\left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & a \\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & a+b \\ & & & & \boxed{x_3} & - & x_4 & = & b+c \\ & & & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -b+d \qquad L_4 \leftarrow L_4+L_3 \end{array}\right.$$

$$\sim\left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & a \\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & a+b \\ & & & & x_3 & - & x_4 & = & b+c \\ & & & & & & x_4 & = & c+d \end{array}\right.$$

$$\sim\left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & a \qquad L_1 \leftarrow L_1+L_4 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & a+b \qquad L_2 \leftarrow L_2-L_4 \\ & & & & x_3 & - & x_4 & = & b+c \qquad L_3 \leftarrow L_3+L_4 \\ & & & & & & \boxed{x_4} & = & c+d \end{array}\right.$$

L'échelonnement est terminé, on passe à la remontée triangulaire (avec les premières transformations indiquées ci dessus) :

$$\sim\left\{\begin{array}{rrrrrrrl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & = & a+c+d \qquad L_1 \leftarrow L_1-L_3 \\ & & x_2 & - & x_3 & & = & a+b-c-d \qquad L_2 \leftarrow L_2+L_3 \\ & & & & \boxed{x_3} & & = & b+2c+d \\ & & & & & x_4 & = & c+d \end{array}\right.$$

$$\sim\left\{\begin{array}{rrrrrrl} x_1 & - & x_2 & & & = & a-b-c \qquad L_1 \leftarrow L_1+L_2 \\ & & \boxed{x_2} & & & = & a+2b+c \\ & & & x_3 & & = & b+2c+d \\ & & & & x_4 & = & c+d \end{array}\right.$$

$$\sim\left\{\begin{array}{rrrrrl} x_1 & & & & = & 2a+b \\ & x_2 & & & = & a+2b+c \\ & & x_3 & & = & b+2c+d \\ & & & x_4 & = & c+d \end{array}\right. \qquad \text{Soit } C^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$