

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 8 & -15 & 15 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$AX = B$$

Méthode 1 (Gauss)

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = a \\ 8x - 15y + 15z = b \\ 2x - 2y + 3z = c \end{cases}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 8L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = a \\ y - z = -8a + b \\ 2y - z = -2a \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = a \\ y - z = -8a + b \\ z = 14a - 2b + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 14a - 2b + c \\ y = -8a + b + 14a - 2b + c = 6a - b + c \\ x = a + 12a - 2b + 2c = -15a + 2b + 2c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -15a + 2b + 2c \\ y = 6a - b + c \\ z = 14a - 2b + c \end{cases}$$

Méthode 2 (Magique!)

$$\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 8 & -15 & 15 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}}_A : \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Id} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 0 \\ 14 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -15 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & 1 \\ 14 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = a \\ y - z = -8a + b \\ z = 14a - 2b + c \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 14 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_3$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\begin{cases} x - 2y = -27a + 4b - 2c \\ y = 6a - b + c \\ z = 14a - 2b + c \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -27 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 14 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$\begin{cases} x = -15a + 2b \\ y = 6a - b + c \\ z = 14a - 2b + c \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -15 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 14 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{Id} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} -15 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & 1 \\ 14 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}$

La Méthode 2 n'est qu'une réécriture de la méthode 1 !

en multipliant la matrice de gauche par $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et celle de droite par $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

On a le système de gauche !

Toutes les opérations s'effectuent sur les lignes

(addition, permutation, multiplication ou division par un scalaire non nul)

On fait apparaître Id à gauche et A^{-1} à droite

Variante (Gauss-Jordan)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & -15 & 15 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 8L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -15 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 14 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$(L_1 \leftarrow L_1 - 0L_3)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -15 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 14 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

I_d

A^{-1}

Laq Dans ce système, il n'a pas été nécessaire de permuter les lignes ni de les diviser (ou multiplier) par un scalaire non nul - ce qui survient souvent en pratique