v 1.00 - ic - ST

MINF0402 Série 1

Beaucoup de révisions . . .

Exercice 1 ()

Soient :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer AX et BX, que remarque t-on par rapport à la multiplication usuelle dans $\mathbb{R}$?
2. Calculer CY et CY' que remarque t-on par rapport à la multiplication usuelle dans $\mathbb{R}$?
3. Calculer CZ.

Exercice 2 ()

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer AB et BA, que remarque t-on par rapport à la multiplication usuelle dans $\mathbb{R}$?
2. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer AB
3. Soit : $C = \begin{pmatrix} -11 & 4 & 3 \\ -25 & 9 & 7 \\ -8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ Calculer $C^2 = C \times C$ et $C^3 = C \times C \times C$ que remarque t-on par rapport à la multiplication usuelle dans $\mathbb{R}$?

On ne traitera que quelques exercices de résolution, le reste sera travail personnel.

Exercice 3 (Résolutions élémentaires)

Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ y + 2z + t = 3 \\ z + 2t = 4 \end{cases} \quad (S_2)\begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ x + 2y + 2z + 2t = 2 \\ x + 2y + 3z + 3t = 3 \\ x + 2y + 3z + 4t = 4 \end{cases} \quad (S_3)\begin{cases} -x + y + z + 2t = 1 \\ -y - t = -2 \\ -2x + 3y + 3z + 4t = 2 \\ -2x + 2y + 3z + 4t = 1 \end{cases}$$

Exercice 4 (Résolutions élémentaires)

$$(S_1)\begin{cases} -2x - y + z = 5 \\ 6x + y - 4z = -25 \\ -2x - 5y + 2z = -3 \end{cases} \quad (S_2)\begin{cases} -4x - y + z = 15 \\ -8x + y + 2z = 39 \\ 4x + y - 4z = -33 \end{cases} \quad (S_3)\begin{cases} -3x - 3y + z = -21 \\ -9x - 8y + 6z = -69 \\ 6x + 3y - 14z = 69 \end{cases} \quad (S_4)\begin{cases} -4x + 3y + z = 7 \\ -12x + 8y + 4z = 16 \\ 8x - 7y - 4z = -4 \end{cases}$$

Exercice 5 (Résolutions élémentaires)

$$(S_1)\begin{cases} 2x - 3y + 2z + t = 2 \\ -6x + 11y - 6z - 5t = -2 \\ 2x - 7y + 3z + 5t = -2 \\ -6x + 11y - 7z - 6t = -3 \end{cases} \quad (S_2)\begin{cases} -2x - 3y - 3z + 2t = 1 \\ -4x - 5y - 5z + t = -7 \\ -6x - 8y - 6z + 5t = -8 \\ -4x - 7y - z + 12t = 3 \end{cases} \quad (S_3)\begin{cases} 2x + 2y + 3z + 3t = -1 \\ 4x + 3y + 3z + 5t = 7 \\ 6x + 5y + 7z + 11t = -1 \\ 6x + 4y + 3z + 8t = 14 \end{cases}$$

Remarque On donne dans les exercices qui suivent un très grand nombre d'inversions à effectuer, il est cependant clair que seul un petit nombre sera traité en séances, les autres étant là pour effectuer un travail personnel. les inversions seront faites pour l'essentiel par la méthode magique : la méthode des tableaux

Exercice 6 (Inversion de matrices 2×2)

Par les systèmes ou la méthode magique, déterminer les inverses des matrices suivantes quand elles existent.

$$A = A_{101} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} \quad B = A_{102} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \quad C = A_{103} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} \quad D = A_{104} = \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 7 & 56 \end{pmatrix} \quad E = A_{105} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 (Inversion de matrices 3×3)

Par les systèmes ou la méthode magique, déterminer les inverses des matrices suivantes quand elles existent - en dehors peut-être des premières matrices pour lesquelles on pourra même écrire les deux méthodes, on privilégiera la seconde méthode et a priori dans la version Gauss Jordan.

1. $A = A_{2101} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -5 & -8 & -8 \end{pmatrix}$ $B = A_{2102} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ $C = A_{2103} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 15 & 26 \end{pmatrix}$
2. $A = A_{2201} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & -4 \\ -5 & 10 & 7 \end{pmatrix}$ $B = A_{2202} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -5 & -9 & 4 \\ 3 & 9 & -9 \end{pmatrix}$ $C = A_{2203} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & -6 & 2 \\ 4 & 6 & 11 \end{pmatrix}$
3. $A = A_{2301} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = A_{2302} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $C = A_{2303} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
4. $A = A_{2401} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B = A_{2402} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ $D = A_{2404} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 8 & 12 & 4 \\ 7 & 9 & 5 \end{pmatrix}$
5. $A = A_{2501} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & -1 \\ -5 & 12 & 12 \end{pmatrix}$ $B = A_{2502} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -1 \\ 20 & -2 & 3 \\ -10 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ $C = A_{2503} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 7 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$
6. $A = A_{2601} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & -7 \end{pmatrix}$ $B = A_{2602} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ $C = A_{2603} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 8 (Inversion de matrices 4×4)

Par la méthode magique, déterminer les inverses des matrices suivantes quand elles existent.

1. $A = A_{3101} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = A_{3102} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $C = A_{3103} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   $D = A_{3104} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$
2. $A = A_{3201} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = A_{3202} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

   $C = A_{3203} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ -6 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$

——— • **FIN** • ———