Université de Reims Champagne Ardenne
U.F.R. de Sciences Exactes et Naturelles

MASTER 1 CHPS
CHPS0742 (Optimisation) - 2018/2019
Pierre Delisle

Travaux dirigés n° 1

Optimisation linéaire

Exercice 1 (Résolution d'un programme linéaire par la méthode géométrique)
Pour chaque question, résolvez le programme linéaire par la méthode géométrique en détaillant votre démarche et expliquez la réponse obtenue.

1°) Maximiser $z = 400x_1 + 200x_2$

Sous les contraintes
$$\begin{array}{rcrcl} 30x_1 & + & 20x_2 & \leq & 6000 \\ 40x_1 & + & 10x_2 & \leq & 4000 \end{array}$$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

2°) Maximiser $z = 6x_1 + 4x_2$

Sous les contraintes
$$\begin{array}{rcrcl} -3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 16 \\ x_1 & & & \leq & 3 \end{array}$$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

3°) Maximiser $z = x_1 + x_2$

Sous les contraintes
$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & - & 2x_2 & \leq & 1 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 2 \end{array}$$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

4°) Maximiser $z = x_1 + x_2$

Sous les contraintes
$$\begin{array}{rcrcl} -2x_1 & + & 3x_2 & \leq & -4 \\ x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \end{array}$$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

Exercice 2 (Maximisation de la marge sur coût variable)
Une entreprise fabrique deux biens, ce qui nécessite l'utilisation de deux ateliers dont les capacités de production exprimées en heure d'usinage sont de 12. Chaque unité du premier bien demande 2 heures d'usinage dans le premier atelier et 1 heure dans le second. De son côté, chaque unité du second bien demande 1 heure d'usinage dans le premier atelier et 2 heures dans le second. On veut déterminer les productions des deux biens qui maximisent la marge sur coût variable de l'entreprise si les marges unitaires des deux biens sont de 4 et 3.

1°) Écrivez, sous forme standard, le programme linéaire correspondant à cette situation.

2°) Résolvez le programme linéaire par l'algorithme du simplexe en priorisant initialement la production du premier bien.

3°) Résolvez le programme linéaire par l'algorithme du simplexe en priorisant initialement la production du second bien.

4°) Si vos réponses aux deux questions précédentes ne sont pas identiques, révisez vos notes de cours et reprenez l'exercice du début !

5°) Donnez la représentation géométrique du programme linéaire et observez le cheminement suivi lors de chacune des deux résolutions par l'algorithme du simplexe.

6°) Le prix du premier bien est susceptible d'augmenter fortement en raison d'une demande importante. À partir de la représentation géométrique de la question précédente, expliquez la conséquence de cette augmentation sur la production, ainsi que sur la valeur de la solution optimale.

Exercice 3 (Résolution d'un programme linéaire par la méthode du simplexe)
Pour chaque question, résolvez le programme linéaire par la méthode du simplexe en détaillant votre démarche.

1°)

Maximiser $z = 3x_1 + 2x_2 + 4x3$

Sous les contraintes

$$\begin{array}{lllllll} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\ 2x_1 & & & + & 3x_3 & \leq & 5 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 7 \end{array}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

2°)

Maximiser $z = 5x_1 + 6x_2 + 9x3 + 8x_4$

Sous les contraintes

$$\begin{array}{lllllllll} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & \leq & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & \leq & 3 \end{array}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3, x_4 \geq 0$$

Exercice 4 (Encore des profits, toujours des profits)
Pour fabriquer deux produits P_1 et P_2, on doit leur faire subir des opérations sur trois machines M_1, M_2 et M_3 successivement mais dans un ordre indifférent. Les temps unitaires d'exécution sont donnés par le tableau suivant :

	M_1	M_2	M_3
P_1	11 minutes	7 minutes	6 minutes
P_2	9 minutes	12 minutes	16 minutes

Les heures disponibles de chaque machine pour une activité d'un mois sont de 165 heures pour la machine M_1, 140 heures pour la machine M_2 et 160 heures pour la machine M_3. Le produit P_1 donne un profit unitaire de 900 euros et le produit P_2, un profit unitaire de 1000 euros. Dans ces conditions, on veut savoir quel plan de fabrication des produits permet d'obtenir un profit total maximum.

1°) Écrivez, sous forme standard, le programme linéaire correspondant à cette situation.

2°) Résolvez ce programme linéaire par la méthode géométrique.

3°) Résolvez ce programme linéaire par la méthode du simplexe.

4°) Si vos réponses aux deux questions précédentes ne sont pas identiques, relisez vos notes de cours et reprenez l'exercice !

Exercice 5 (Dualité)
On considère le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{Minimiser} & & & z = x_1 + x_2 & & & & \\
& & & & & & & \\
\text{Sous les} & & 3x_1 & + & x_2 & \geq & 4 \\
\text{contraintes} & - & 7x_1 & + & x_2 & \geq & \text{-}7 \\
& & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0 & & & &
\end{array}$$

1°) Résolvez ce problème par la méthode géométrique.

2°) Écrivez ce problème sous forme standard et donnez le Dictionnaire I associé. Est-il possible de résoudre ce problème directement par la méthode du simplexe ? Expliquez.

Afin de résoudre ce problème, on peut utiliser le problème dual.

3°) Écrivez le problème dual sous forme standard.

4°) Résolvez le problème dual en utilisant la méthode géométrique et comparez le résultat obtenu à celui du problème primal.

5°) Donnez le Dictionnaire I associé au problème dual. Est-il possible de résoudre ce problème directement par la méthode du simplexe ? Dans l'affirmative, vérifiez votre réponse de la question précédente en résolvant le problème dual par la méthode du simplexe.

Exercice 6 (Prenez bien soin des caribous !)
Vous exploitez un élevage de caribous. Malgré le fait que vous aimez bien vos bêtes, ces dernières mangent énormément alors vous cherchez à optimiser les coûts associés à leur alimentation. Un diététiste expert en caribous vous informe que pour qu'ils demeurent en santé, ces animaux doivent avoir une alimentation contenant une certaine dose de sel, de sucre, de gras et de basilic. L'industrie alimentaire des caribous fabrique deux aliments contenant ces composants : le Royal-Caribou et le Kebab-Caribou. 1 kg de Royal-Caribou contient 100g de sel, 100g de gras et 200g de basilic. 1kg de Kebab-Caribou contient 100g de sucre, 200g de gras et 100g de basilic. Un caribou doit consommer au moins par jour : 0,4kg de sel, 0,6kg de sucre, 2kg de gras et 1,7kg de basilic. Le Royal-Caribou coûte 10 euros le kg et le Kebab-Caribou coûte 4 euros le kg. On veut connaître les quantités de Royal-Caribou et de Kebab-Caribou à utiliser par jour et par animal pour réaliser l'alimentation la moins coûteuse.

1°) Écrivez le programme linéaire correspondant à cette situation.

2°) Résolvez ce programme linéaire par la méthode géométrique.

3°) Quel problème allons-nous rencontrer si nous voulons résoudre ce problème par la méthode du simplexe ?

4°) Récrivez le programme linéaire de sorte à ce qu'il ait une formulation standard.

5°) Donnez la représentation géométrique de ce programme et comparez-la avec la première.

6°) Résolvez ce programme linéaire par la méthode du simplexe.

7°) Si les solutions optimales de la méthode géométrique et de la méthode du simplexe ne sont pas identiques, relisez vos notes de cours et reprenez l'exercice !

Exercice 7 (Minimisation des coûts)
Une entreprise peut fabriquer un même produit dans deux de ses ateliers. Les capacités de production de ces deux ateliers, exprimées en quantité de produit, sont de 7 pour le premier atelier et de 10 pour le second. D'autre part, on suppose que le nombre d'heures de main d'oeuvre qu'on peut affecter globalement à cette production est de 60. Or, chaque unité de produit nécessite 10 heures de main d'oeuvre dans le premier atelier et de 5h dans le second. Enfin, la production totale doit permettre de satisfaire au moins une demande de 8. Sachant que les coûts variables unitaires sont de 2 pour le premier atelier et 3 pour le second, l'entreprise désire produire à coût minimum.

1°) Écrivez le programme linéaire correspondant à cette situation.

2°) Résolvez le programme linéaire par la méthode géométrique en répondant aux questions suivantes :

a) Donnez la représentation géométrique du programme linéaire en identifiant le polyèdre des solutions réalisables ainsi que le point correspondant à la solution optimale.

b) À partir de la représentation géométrique, donnez la solution optimale du problème.

On désire maintenant vérifier, en utilisant la méthode du simplexe, que la solution donnée à la question précédente est bien la solution optimale.

3°) Quel(s) problème(s) allons-nous rencontrer relativement au démarrage de la méthode du simplexe ?

4°) Récrivez le programme linéaire de la question précédente de sorte à obtenir une formulation standard.

5°) Montrez qu'on peut définir un sommet A du domaine des solutions réalisables correspondant à une production maximale du second atelier sans production du premier.

6°) En partant de A, résolvez le programme linéaire par la méthode du simplexe.

7°) À partir de la représentation géométrique définie précédemment, observez le cheminement suivi durant l'exécution de l'algorithme.

8°) Une autre façon de résoudre ce type de problème est l'utilisation du programme dual. Écrivez la formulation standard du programme dual et résolvez-le par la méthode du simplexe.