$\mathbb{Z}/\boldsymbol{n}\mathbb{Z}$

Exercice 1 :

On note φ la fonction indicatrice d'Euler. $\varphi(n) = \#\{1 \leq k \leq n \mid k \wedge n = 1\}$

$\varphi(n)$ est égal au nombre de nombre premiers avec n compris entre 1 et n

1) Soit $p \in \mathbb{P}$. Que vaut $\varphi(p)$
2) Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p$
3) Soit $n, m \in \mathbb{N}$, on admet que si $m \wedge n = 1$ alors $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$
   Soit $n = p_1^{\alpha_1} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k} \in \mathbb{N}$. Donner la valeur de $\varphi(n)$.

Exercice 2 :

1) Déterminer le nombre d'entiers inférieurs à 20 premiers avec 20.
2) Combien y-a-t-il d'éléments inversibles dans $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$. On dit que ces éléments sont dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$
3) Déterminer le plus petit entier k strictement positif tel que $\overline{3}^k = \overline{1}$. Cet entier s'appelle l'ordre de $\overline{3}$ dans $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^*$.

Ps : Le théorème d'Euler montre que si $a \in \mathbb{Z}$ avec $a \wedge n = 1$ alors $a^{\varphi(n)} \equiv 1\ [n]$. Néanmoins rien n'assure qu'il s'agisse de la première puissance telle que $a^k \equiv 1[n]$