MA0407 - DST Avril 2018 - *Durée 1H30*

L'usage de tout document, calculatrice, téléphone, boulier ou divination est interdit, toutes les réponses doivent être justifiées.

N'oubliez pas - d'écrire votre nom, vos prénoms, de numéroter chacune de vos copies, d'y reporter votre numéro de place et d'en indiquer le nombre total (-1pt par omission). Pour l'évaluation de la copie, il sera tenu compte de la rigueur, de la qualité et de la propreté de la rédaction.

ic v1.4

Les calculs des déterminants devront être détaillés, les transformations indiquées. Les résolutions des systèmes linéaires (ce qui vaut aussi pour la méthode magique) devront être explicitées et toutes les transformations devront être écrites.
Le non respect de ces consignes et le "bricolage séparé" d'équations seront sanctionnés. Tout résultat sans justification sera considéré comme nul.

Exercice 1 (-)

Soient

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

.

1. (a) Résoudre l'équation $P\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = b$, par la méthode de Cramer (en utilisant les déterminants donc) à l'exclusion de toute autre méthode.
   (b) Vérifier votre résultat en résolvant l'équation $P\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = b$ directement avec la méthode de Gauss.
2. (a) Déterminer l'inverse Q de P par la méthode de Cramer (méthode des déterminants) à l'exclusion de tout autre méthode. (Détaillez vos calculs en faisant en particulier apparaître les 9 déterminants 2×2 de la comatrice).
   (b) Déterminer (retrouver) l'inverse Q de P par la méthode de Gauss (ou la méthode des tableaux (la méthode magique) ce qui est la même chose) (détaillez soigneusement vos calculs).
   (c) En utilisant la matrice Q retrouver à nouveau la solution de $P\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = b$. Détaillez vos calculs intermédiaires.

Exercice 2 (-)

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A et en déduire les valeurs propres et leurs multiplicités.
2. Pour chaque valeur propre, déterminer l'espace propre associé, une base et la dimension de celui-ci.
3. Montrer que A est diagonalisable, c'est à dire donc qu'il existe une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale. On donnera bien entendu les matrices D et P (ne pas chercher à calculer P^{-1} c'est inutile).

— **Tourner la page s.v.p.** —

Exercice 3 (Algo)

Soit n un entier strictement positif, on cherche à résoudre le système d'équations linéaires $AX = b$ de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & & & & & \iddots & a_{2(n-1)} & 0 \\ a_{31} & & & & & \iddots & a_{3(n-2)} & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \iddots & \iddots & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \iddots & \iddots & \iddots & & & \vdots \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \iddots & & & & \vdots \\ \vdots & a_{(n-2)2} & a_{(n-2)3} & 0 & & & & & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & 0 & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

A est donc une matrice (n, n) triangulaire mais selon la diagonale "secondaire" de la matrice, ce qui n'est pas usuel et diffère ainsi des exemples que nous avons déjà vus.

On a en fait :

$$a_{ij} = 0 \text{ pour } i > n - j + 1 \quad i, j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$$

(i étant l'indice de ligne et j l'indice de colonnes) On suppose bien entendu que tous les coefficients situés sur la diagonale "secondaire" $(a_{1n}, a_{2(n-1)}, \ldots, a_{(n-1)2}, a_{n1})$ sont non nuls. On ne cherche pas à effectuer de permutations de lignes, ceci étant inutile et couteux en temps calcul pour de grosses matrices.

1. (a) Donner l'expression de x_1, puis de x_2. Justifiez précisément en écrivant les équations utilisées et en précisant leurs numéros.

   (b) Donner l'expression de x_3, puis donner l'expression récurrente de x_k $(1 \leq k \leq n)$ en fonction de x_1, x_2,..., x_{k-1}. Justifiez précisément en écrivant les équations utilisées et en précisant leurs numéros. On utilisera le signe somme (Σ).

2. On suppose que les tableaux A (bidimensionnel (n, n)), b et X (mono-dimensionnels de longueur n) sont tous prédéfinis. Ecrire l'algorithme de résolution en pseudo-code.

• Bon Courage •