Différentes façons d'inverser une même matrice.
Méthodes de Gauss et Gauss Jordan
Par les systèmes ou les tableaux (magique)

AD v-vi 0.001

Soit la matrice à inverser :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Par les systèmes on écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

soit donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcllll} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & a & & & \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & & + & b & \\ -2x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & & & & + \quad c \end{array} \right.$$

Par la méthode des tableaux (méthode magique) on travaille directement sur :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

C'est en fait la même chose que précédemment mais on ne fait apparaitre que les coefficients de x_1, x_2, x_3, a, b et c. Les opérations autorisées et utilisées sont les mêmes dans les deux cas :

- On peut permuter les équations (respectivement les lignes).
- On peut multiplier une équation (respectivement une ligne) par un scalaire <u>non nul</u>.
- On peut ajouter/soustraire une équation (respectivement une ligne) mutipliée par des scalaires quelconques aux <u>autres</u> équations (respectivement lignes) (*un seul jeu d'opérations de ce type par étape*)

1. Par les systèmes façon Gauss

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & a & & & & & \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & & + & b & & & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & & & & + & c & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & a & & & & & \\ & + & x_2 & - & x_3 & = & a & + & b & & & \\ & + & x_2 & - & 2x_3 & = & +2a & & & + & c & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & a & & & & \\ & + & x_2 & - & x_3 & = & a & + & b & & \\ & & & - & x_3 & = & a & - & b & + & c \end{array}\right.$$

Ici on peut procéder pour la remontée triangulaire comme dans le corrigé principal ou bien :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & a & & & & & L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ & + & x_2 & - & x_3 & = & a & + & b & & & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ & & & - & x_3 & = & a & - & b & + & c & \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} x_1 & - & x_2 & & & = & +2a & - & b & + & c & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ & + & x_2 & & & = & & + & 2b & - & c & \\ & & & - & x_3 & = & a & - & b & + & c & \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} x_1 & & & & & = & +2a & + & b & & & \\ & + & x_2 & & & = & & + & 2b & - & c & \\ & & & - & x_3 & = & a & - & b & + & c & L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & & & & & = & +2a & + & b & & \\ & + & x_2 & & & = & & + & 2b & - & c \\ & & & + & x_3 & = & -a & + & b & - & c \end{array}\right.$$

Soit : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. Par la méthode de tableaux (méthode magique) à la Gauss - c'est en fait la même chose que précédemment mais avec une écriture différente.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

0.001

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

On passe à la remontée triangulaire :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow -L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Soit : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3. Par les systèmes façon Gauss Jordan

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & a & & & & \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & & + & b & & \\ -2x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & & & & + & c \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & a & & & & \\ & + & x_2 & - & x_3 & = & a & + & b & & \\ & + & x_2 & - & 2x_3 & = & +2a & & & + & c \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & & & & & = & +2a & + & b & & \\ & + & x_2 & - & x_3 & = & a & + & b & & \\ & & & - & x_3 & = & a & - & b & + & c \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ \end{array}$$

0.001

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & & & & & = & +2a & + & b & & & & \\ & + & x_2 & & & = & & + & 2b & - & c & & \\ & & & - & x_3 & = & +a & - & b & + & c & & L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & & & & & = & +2a & + & b & & \\ & + & x_2 & & & = & & + & 2b & - & c \\ & & & + & x_3 & = & -a & + & b & - & c \end{array}\right.$$

Soit : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

4. Par la méthode de tableaux (méthode magique) à la Gauss-Jordan - c'est en fait la même chose que précédemment mais avec une écriture différente.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Soit : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$