

Chapitre I

Matrices

I.1 Matrices

Définition I.1.1 Soient n et $m \in \mathbb{N}$, une matrice A à coefficients dans \mathbb{K} de type (n, m) est un tableau à n lignes et m colonnes d'éléments de \mathbb{K} .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$$

On note usuellement une matrice par une lettre majuscule et ses coefficients par la lettre minuscule associée. A noter que le coefficient a_{ij} correspond à la ligne i et à la colonne j .

L'ensemble des matrices de type (n, m) à coefficients dans \mathbb{K} est noté $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. On désignera souvent - dans ce cours- les colonnes d'une matrice A de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ par $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots; A^{(m)}$, ainsi la j ème colonne est :

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \quad \text{et ainsi : } A = (A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(m)})$$

On désignera de même dans ce cours- les lignes d'une matrice A de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ par $A_{(1)}, A_{(2)}, \dots; A_{(n)}$, ainsi la i ème ligne de A est :

$$A_{(i)} = (a_{i1} \ a_{i2} \ a_{i3} \ \cdots \ a_{ij} \ \cdots \ a_{im})$$

et ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

I.2 Quelques matrices particulières

On définit dans ce qui suit un certain nombre de matrices particulières qui seront utilisées tout au long de ce cours.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$

1. Si $m = n$ la matrice est dite carrée.

2. Si $n = 1$, la matrice est une *matrice ligne* ou encore un *vecteur ligne*.

Dans ce cas on ne fait usuellement apparaître qu'un seul indice. A est donc de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_m \end{pmatrix}$$

3. Si $m = 1$, la matrice est une *matrice colonne* ou encore un ***vecteur colonne***. Dans ce cas on ne fait apparaître qu'un seul indice. En fait on identifie usuellement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et \mathbb{K}^n . A est donc de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

4. Si $m = n$ et $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, la matrice est une *matrice diagonale*. C'est à dire que A est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La "diagonale" qui apparaît ici est la *diagonale principale de la matrice*, l'autre diagonale est dénommée *diagonale secondaire* et ne joue en fait aucun rôle.

5. Si tous les coefficients de A sont nuls on dit que A est la *matrice nulle d'ordre (n, m)* notée $0_{n \times m}$ (ou même 0 si aucune confusion n'est à craindre) :

$$0_{n \times m} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

6. Si $m = n$, si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et si $a_{ii} = 1$ ($1 \leq i \leq n$), la matrice est la *matrice identité d'ordre n* . On a donc :

$$Id_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Si $m = n$ et $a_{ij} = 0$ pour $i < j$, la matrice est *triangulaire inférieure*. C'est à dire A est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

8. Si $m = n$ et $a_{ij} = 0$ pour $i > j$, la matrice est dite *triangulaire supérieure*. C'est à dire A est de

la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

9. On considérera souvent les matrices "canoniques" ⁽¹⁾ colonnes d'ordre n suivantes étroitement associées à la notion de **base canonique**. (voir plus loin l'exemple (IV.2.6) dans la sous-section (IV.2)).

$$E^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, E^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots; E^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Où donc $E^{(i)}$ désigne la matrice colonne d'ordre n dont toutes les composantes sont nulles sauf la $i^{\text{ème}}$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i^{\text{ème}} \text{ ligne}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow n^{\text{ème}} \text{ ligne}$$

En fait $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots; E^{(n)}$ ne sont rien d'autre également que les colonnes de la matrice identité d'ordre $n : Id_n$.

Définition I.2.1 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, on définit la transposée de A notée A^t comme étant la matrice B de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ définie par :

$$b_{ij} = a_{ji} \text{ pour } 1 \leq j \leq n \text{ et } 1 \leq i \leq m$$

les lignes de A deviennent donc les colonnes de sa matrice transposée.

Exemple I.2.2

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 6 \\ 0 & 9 & 15 & 5 \\ 8 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 3 & 9 & 0 \\ 7 & 15 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Définition I.2.3 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, une matrice carrée, on dit que A est symétrique si elle est égale à sa transposée.

Exemple I.2.4

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & 9 & 7 \\ 8 & 7 & 1 \end{pmatrix} \text{ est symétrique. } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 3 & 9 & 15 \\ 7 & 15 & 1 \end{pmatrix} \text{ n'est pas symétrique.}$$

1. Il n'y a pas de terminologie standard pour ces matrices.

I.3 Somme de matrices, multiplication par un scalaire

Définition I.3.1 Soient A et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, on définit leur **somme** " $A+B$ " comme étant l'élément C de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ donné par

$$c_{i,j} = a_{ij} + b_{ij} \text{ pour } 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq m$$

Exemple I.3.2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 9 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2 & b+3 \\ c+0 & d+9 \\ e+8 & f+0 \end{pmatrix}$$

Définition I.3.3 Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, on définit le **produit** $B = \lambda A$ comme étant l'élément B de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ donné par :

$$b_{i,j} = \lambda a_{ij} \text{ pour } 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq m$$

Exemple I.3.4

$$\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \\ \lambda e & \lambda f \end{pmatrix}$$

Il est facile de vérifier que :

Proposition I.3.5 $\forall A$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $\forall \lambda$ et $\mu \in \mathbb{K}$

- $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ propriété de distributivité
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ propriété de distributivité
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ propriété d'associativité restreinte

Et plus généralement, on a :

Proposition I.3.6 Muni des deux lois définies ci-dessus - addition et multiplication externe, $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur \mathbb{K} .

I.4 Multiplication d'une matrice par un vecteur colonne

Définition I.4.1 Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, et $X \in \mathbb{K}^m$ un vecteur colonne, on définit leur produit AX comme étant l'élément Y de \mathbb{K}^n donné par :

$$\begin{aligned} Y &= AX \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{I.4.1.1}$$

On a donc en fait :

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{im}x_m = \sum_{k=1}^m a_{ik}x_k \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n$$

Remarquons que l'on peut écrire :

$$Y = x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \dots + x_m A^{(m)} = \sum_{k=1}^m x_k A^{(k)} \quad (\text{I.4.1.2})$$

$$Y = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + x_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} \quad (\text{I.4.1.3})$$

et donc $Y = AX$ est une *combinaison linéaire* des colonnes de A . On en déduit immédiatement que :

Proposition I.4.2 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, et soit les matrices colonnes "canoniques" $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(m)}$ (voir page 3 point numéro 9) alors :

$$AE^{(1)} = A^{(1)}, \quad AE^{(2)} = A^{(2)}, \dots \quad AE^{(i)} = A^{(i)}, \dots \quad AE^{(m)} = A^{(m)}$$

Exemple I.4.3

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \\ ex + fy \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix}$$

Remarque I.4.4 Pour des raisons qui doivent paraître évidentes, on dit que l'on effectue une multiplication ligne par colonne.

Remarque I.4.5 Remarquons que pour pouvoir effectuer la multiplication, il doit y avoir concordance entre le nombre de colonnes de la matrice et le nombre de composantes (lignes) du vecteur colonne et qu'en termes de types (dimensions) de matrices on a :

$$(n, m) \times (m, 1) \longrightarrow (n, 1)$$

Proposition I.4.6 Soit $X \in \mathbb{K}^n$ alors

$$Id_n X = X$$

Ce qui justifie bien la dénomination de matrice identité.

On vérifie par ailleurs sans peine :

Proposition I.4.7 $\forall A$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $\forall X$ et $X' \in \mathbb{K}^m$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

- $(A + B)X = AX + BX$ propriété de distributivité
- $A(X + X') = AX + AX'$ propriété de distributivité
- $(\lambda A)X = \lambda(AX) = A(\lambda X)$ propriété d'associativité restreinte

On vérifie de même que :

Proposition I.4.8 Soient Λ une matrice diagonale d'ordre n et $X \in \mathbb{K}^n$:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\text{alors : } \Lambda X = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix}$$

les coefficients de X sont donc multipliés respectivement par : $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

I.5 Multiplication de Matrices

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{K})$, on cherche à définir le produit $C = AB$ de ces deux matrices de telle façon que :

$$(AB)X = CX = A(BX) \quad \forall X \in \mathbb{K}^q \quad (\text{I.5.0.1})$$

Ce qui devrait paraître effectivement naturel : on dédire donc que le produit soit associatif. (Remarquons que pour pouvoir effectuer la composition des deux multiplications "matrices par vecteur colonne" successives, BX étant alors un vecteur colonne à m éléments, A doit effectivement être une matrice à m colonnes où m est le nombre de lignes de B .)

En prenant $X = E^j$ pour $1 \leq j \leq q$, on obtient :

$$CX = (AB)X = AB(E^{(j)}) = A(BE^{(j)}) = AB^{(j)}$$

d'après la proposition (I.4.2) et on déduit donc que la $j^{\text{ème}}$ colonne de C doit valoir $AB^{(j)}$. Soit alors la matrice C ainsi définie montrons qu'elle vérifie l'équation I.5.0.1

Soit alors un élément X quelconque de \mathbb{K}^q , posons :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ on a donc : } X = x_1 E^{(1)} + x_2 E^{(2)} + \dots + x_q E^{(q)}$$

alors

$$CX = C(x_1 E^{(1)} + x_2 E^{(2)} + \dots + x_q E^{(q)}) \quad (\text{I.5.0.2})$$

$$= x_1 (CE^{(1)}) + x_2 (CE^{(2)}) + \dots + x_q (CE^{(q)}) \quad (\text{I.5.0.3})$$

$$= x_1 C^{(1)} + x_2 C^{(2)} + \dots + x_q C^{(q)} \quad (\text{I.5.0.4})$$

$$= x_1 (AB^{(1)}) + x_2 (AB^{(2)}) + \dots + x_q (AB^{(q)}) \quad (\text{I.5.0.5})$$

$$= A(x_1 B^{(1)}) + A(x_2 B^{(2)}) + \dots + A(x_q B^{(q)}) \quad (\text{I.5.0.6})$$

$$= A(x_1 B^{(1)} + x_2 B^{(2)} + \dots + x_q B^{(q)}) \quad (\text{I.5.0.7})$$

$$= A(BX) \quad (\text{I.5.0.8})$$

Où (I.5.0.3) découle de (I.4.7), (I.5.0.4) de (I.4.2), (I.5.0.5) de ce qui précède, (I.5.0.6) de (I.4.7) et (I.5.0.8) de (I.4.1.3).

Ceci nous amène donc à la définition suivante :

Définition I.5.1 Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{K})$, on définit leur produit AB comme étant l'élément C de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ donné par

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + a_{i3} \times b_{3j} + \dots + a_{im} \times b_{mj} \\ &= \sum_{k=1}^m a_{ik} \times b_{kj} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq q. \end{aligned} \quad (\text{I.5.1.1})$$

Ce qui correspond bien à définir la $j^{\text{ème}}$ de C comme étant $AB^{(j)}$. Les colonnes de $C = AB$ sont $AB^{(1)}, AB^{(2)}, \dots, AB^{(q)}$:

$$C = \left(AB^{(1)}, AB^{(2)}, \dots, AB^{(q)} \right)$$

Remarques :

- la multiplication, matrice par vecteur colonne est un cas particulier de la multiplication matricielle.
- Pour pouvoir effectuer la multiplication " AB ", il doit y avoir concordance entre le nombre de colonnes de A et le nombre de lignes de B .

— Le produit d'une matrice de type (n, m) par une matrice de type (m, q) donne une matrice (n, q) :

$$(n, m) \times (m, q) \longrightarrow (n, q)$$

Exemple I.5.2

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + a_{14}b_{42} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} + a_{24}b_{41} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} + a_{24}b_{42} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} + a_{34}b_{41} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} + a_{34}b_{42} \end{pmatrix}$$

A est une matrice $(3, 4)$ et B une matrice $(4, 2)$ le produit $C = AB$ est donc une matrice $(3, 2)$. Soit C la matrice résultat du produit, pour obtenir par exemple C_{21} on multiplie terme à terme les éléments de la deuxième ligne de A par les éléments de la première colonne de B et on en fait la somme.

On montre facilement :

Proposition I.5.3 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, alors :

$$A Id_m = A \quad \text{et} \quad Id_n A = A$$

Ce qui justifie à nouveau l'appellation de *matrice Identité*.

Il est à nouveau facile de montrer :

Proposition I.5.4 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et soit Λ une matrice diagonale d'ordre m :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix}$$

alors :

$$A\Lambda = (\lambda_1 A^{(1)}, \lambda_2 A^{(2)}, \dots, \lambda_m A^{(m)})$$

les colonnes de A sont donc multipliées respectivement par : $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$:

$$A\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \cdots & \lambda_m a_{1m} \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_m a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 a_{n1} & \lambda_2 a_{n2} & \cdots & \lambda_m a_{nm} \end{pmatrix}$$

Il est à nouveau facile de montrer :

Proposition I.5.5 Soit Λ une matrice diagonale d'ordre n et soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

alors :

$$\Lambda A = \begin{pmatrix} \lambda_1 A_{(1)} \\ \lambda_2 A_{(2)} \\ \vdots \\ \lambda_n A_{(n)} \end{pmatrix}$$

les lignes de A sont donc multipliées respectivement par : $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$:

$$\Lambda A = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \cdots & \cdots & \lambda_1 a_{1m} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \cdots & \lambda_2 a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_n a_{n1} & \lambda_n a_{n2} & \cdots & \cdots & \lambda_n a_{nm} \end{pmatrix}$$

On vérifie par ailleurs sans peine :

Proposition I.5.6 *Propriétés standards :*

- propriété de distributivité :
 $\forall A \text{ et } B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \text{ et } C \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{K}) \quad (A + B)C = AC + BC$
- propriété de distributivité :
 $\forall A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \text{ et } B \text{ et } C \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{K}) \quad A(B + C) = AB + AC$
- propriété d'associativité :
 $\forall A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{K}) \text{ et } C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}) \quad A(BC) = (AB)C$

Remarque I.5.7 (le produit matriciel est non commutatif) Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{K})$, on peut donc effectuer le produit AB mais si on veut pouvoir effectuer le produit BA il faut que de plus $q = m$ on alors $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $AB \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ et $BA \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{K})$. On ne peut alors alors comparer AB et BA que si elles sont de même taille - c'est à dire si $n = m = q$. Dans ce cas on a donc : $A, B, AB, BA \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Mais même dans ce cas, a priori (sauf cas particulier) AB et BA sont distinctes.

Contre-exemple I.5.8 (le produit matriciel est non commutatif)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

I.6 Matrices inversibles

Définition I.6.1 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, (c'est à dire une matrice carrée). On dit que A est inversible, si il existe une matrice notée A^{-1} telle

$$AA^{-1} = Id_n \text{ et } A^{-1}A = Id_n$$

En fait, il suffit d'avoir l'une de ces égalités et l'autre est alors automatiquement vérifiée.⁽²⁾ On montre par ailleurs facilement que si une matrice est inversible son inverse est unique. Les exercices correspondant seront vus dans le chapitre suivant.

Remarque I.6.2 Les matrices non carrées ne sont jamais inversibles.

2. La démonstration n'est cependant pas triviale