MA0407 - DST Avril 2017 - *Durée 1H30*

L'usage de tout document, calculatrice, téléphone, boulier ou divination est interdit, toutes les réponses doivent être justifiées.

N'oubliez pas - d'écrire votre nom, vos prénoms, de numéroter chacune de vos copies, d'y reporter votre numéro de place et d'en indiquer le nombre total (-1pt par omission). Pour l'évaluation de la copie, il sera tenu compte de la rigueur, de la qualité et de la propreté de la rédaction.

v 1.10

Les calculs des déterminants devront être détaillés, les transformations indiquées. Les résolutions des systèmes linéaires (ce qui vaut aussi pour la méthode magique) devront être explicitées et toutes les transformations devront être écrites. Le non respect de ces consignes et le "bricolage séparé" d'équations seront sanctionnés. Tout résultat sans justification sera considéré comme nul.

Exercice 1 -

Soient

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 \\ -2 & -3 & -2 \\ -7 & -6 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

.

1. (a) Résoudre l'équation $P\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = b$, par la méthode de Cramer (en utilisant les déterminants donc) à l'exclusion de toute autre méthode.
   (b) Vérifier votre résultat en résolvant l'équation $P\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = b$ directement avec la méthode de Gauss.
2. (a) Déterminer l'inverse Q de P par la méthode de Cramer (méthode des déterminants) à l'exclusion de tout autre méthode. (Détaillez vos calculs en faisant en particulier apparaître les 9 déterminants 2×2 de la comatrice).
   (b) Déterminer (retrouver) l'inverse Q de P par la méthode de Gauss (ou la méthode des tableaux (la méthode magique) ce qui est la même chose) (détaillez soigneusement vos calculs).
   (c) En utilisant la matrice Q retrouver à nouveau la solution de $P\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = b$. Détaillez vos calculs intermédiaires.

Exercice 2 -

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A et en déduire les valeurs propres et leurs multiplicités.
2. Pour chaque valeur propre, déterminer l'espace propre associé, une base et la dimension de celui-ci.
3. Montrer que A est diagonalisable, c'est à dire donc qu'il existe une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale. On donnera bien entendu les matrices D et P (ne pas chercher à calculer P^{-1} c'est inutile).

—— **Tourner la page s.v.p.** ——

Exercice 3 *Algo*

On cherche à résoudre un système linéaire $AX = b$ de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{(n-3)(n-2)} & 0 & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{(n-2)(n-2)} & a_{(n-2)(n-1)} & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{(n-1)(n-2)} & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)(n)} \\
a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{(n\ \ )(n-2)} & a_{(n\ \ )(n-1)} & a_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

A est donc une matrice (n, n) "ressemblant" à une matrice triangulaire inférieure, mais avec des termes supplémentaires a priori non nuls juste au dessus de la diagonale principale. On a en fait :

$$a_{ij} = 0 \text{ pour } j > i + 1 \quad i, j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$$

(i étant bien entendu l'indice de ligne et j l'indice de colonnes, pour des raisons de clarté dans l'écriture de la matrice, on utilise les notations a_{ij} ou $a_{(i)(j)}$)
Par rapport à une "vraie" matrice triangulaire inférieure, on a donc des termes supplémentaires :

$$a_{12},\ a_{23},\ a_{34},\ \dots\ ,\ a_{(n-3)(n-2)},\ \ a_{(n-2)(n-1)},\ a_{(n-1)n}$$

devant a priori être considérés comme non nuls.

Utiliser la méthode de Gauss usuelle pour résoudre ce système serait maladroit. Par contre il est assez facile de transformer ce système en un nouveau système où la matrice est triangulaire inférieure. On commencera par les dernières lignes et on fera disparaitre avec des transformations à la Gauss les termes au dessus de la diagonale en commençant par $a_{(n-1)(n)}$ puis $a_{(n-2)(n-1)}$... et en remontant ainsi ensuite sur les lignes précédentes. (On supposera bien entendu que la matrice A est inversible et qu'on ne rencontre pas de pivot nul qui nous obligerait à permuter des lignes)

On suppose que les tableaux A (bidimensionnel (n, n), b et X (mono-dimensionnels de longueur n) sont prédéfinis.

1. Ecrire l'algorithme transformant ce système en un système où la matrice est triangulaire inférieure.
2. Ecrire à la suite les quelques lignes supplémentaires pour obtenir alors la solution du nouveau système obtenu.

——————— • **Bon Courage** • ———————