MINF0402 Série 3

v-1.0 - ic - RS

Exercice 1

Calculer les déterminants suivants :

$$d_1 = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} \qquad d_2 = \begin{vmatrix} \alpha\cos\theta & -\beta\sin\theta \\ \alpha\sin\theta & \beta\cos\theta \end{vmatrix} \qquad d_3 = \begin{vmatrix} \alpha\cos\theta & -\beta\sin\theta & 0 \\ \alpha\sin\theta & \beta\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix}$$

Exercice 2 -

Calculer les déterminants suivants :

$$d_0 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \qquad d_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 12 & 4 & 4 \\ 10 & 2 & 4 \end{vmatrix} \qquad d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 12 & 4 \\ 0 & 10 & 4 \end{vmatrix} \qquad d_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & 10 \end{vmatrix}$$

Exercice 3 -

Calculer les déterminants suivants :

$$d_0 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \qquad d_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \qquad d_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \qquad d_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

Exercice 4 -

Calculer :

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 2 & 5 & 12 \\ 3 & 6 & 13 \end{vmatrix} \qquad d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 2 & 20 & 201 \\ 4 & 41 & 399 \end{vmatrix} \qquad d_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix} \qquad d_4 = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix}$$

$$d_5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad d_6 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 3 \\ 3 & 9 & 27 & 6 \\ 4 & 16 & 64 & 10 \end{vmatrix} \quad d_7 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 & c \\ 0 & 0 & v & 0 & 0 \\ g & h & k & u & l \\ x & e & z & 0 & f \\ 0 & y & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \quad d_8 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Exercice 5 -

Calculer les déterminants suivants

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix} \qquad d_2 = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix} \qquad d_3 = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

Exercice 6 -

Calculer les déterminants suivants dits déterminants de Vandermonde :

$$V(x_0,x_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_0 & x_1 \end{vmatrix}, \quad V(x_0,x_1,x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix}, \quad V(x_0,x_1,x_2,x_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_0^3 & x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \end{vmatrix}.$$

Exercice 7 -

Calculer les déterminants (n,n) suivants

$$d_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad e_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad f_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 8 - *Extrait d'examen* -

Soit :

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et } b = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de S, que peut-on en déduire sur l'inversibilité de S ?
2. Par la méthode de Cramer, résoudre l'équation $Sx = b$, on donnera les calculs intermédiaires (la solution est à coefficients entiers, vérifier le résultat).
3. Par la méthode de Cramer, déterminer $U = S^{-1}$, on donnera les calculs intermédiaires.
4. Utiliser la matrice U pour retrouver la solution de $Sx = b$.

Exercice 9 - *Extrait d'examen* -

Soit :

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de R, que peut-on en déduire sur l'inversibilité de R ?
2. Par la méthode de Cramer, résoudre l'équation $Rx = b$, on donnera les calculs intermédiaires (la solution est à coefficients entiers, vérifier le résultat).
3. Par la méthode de Cramer, déterminer $S = R^{-1}$, on donnera les calculs intermédiaires.
4. Utiliser la matrice S pour retrouver la solution de $Rx = b$.