MINF0402 - Mars 2019 - *Durée 1h00*

L'usage de tout document, calculatrice, téléphone, boulier ou divination est interdit, toutes les réponses doivent être justifiées. N'oubliez pas - d'écrire votre nom, vos prénoms, de numéroter chacune de vos copies, d'y reporter votre numéro de place et d'en indiquer le nombre total (-1pt par omission). Pour l'évaluation de la copie, il sera tenu compte de la rigueur, de la qualité et de la propreté de la rédaction.

ic-ctot. v2.0 - C2.11

Exercice 1 (Ciel mon Lab)

Que donne à l'affichage, l'exécution des commandes successives suivantes, c'est à dire que contiennent A, B, R1... après ces instructions ou que s'affiche t-il à l'écran ?

```
>A=0:10:30
>B=4:-1:1
>R1=A+B
>R2=A*B'
>R3=A'*B
>R4=A.*B
>C=zeros(A)
>S=0; for i=1:5 S=S+i; end; disp(S)
>t=linspace(-1,1,11);
>plot(t,t.*t);plot(t,t.*t,'r+')
```

Exercice 2 (C'est magique !)

Déterminer les inverses des matrices suivantes par la méthode magique. **Indiquer systématiquement les transformations effectuées.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & -4 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 6 & 10 \\ 2 & 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Remarque : tous les matrices inverses sont à coefficients entiers !

Exercice 3 (Attention ce n'est pas l'exercice de TD)

On veut résoudre le système linéaire $Mx = K$ de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & & & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & & & & \\ & & a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} & d_{n-2} \\ & & & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & & & a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \cdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ \cdots \\ k_{n-1} \\ k_n \end{pmatrix}$$

M est donc une matrice à n lignes et n colonnes, les coefficients qui n'apparaissent pas sur la représentation ci-dessus sont nuls. On suppose que l'on ne rencontre pas de pivot nul, dans l'élimination de Gauss. Attention les coefficients α_i, β_i et γ_i qui apparaissent dans ce qui suit ne dépendent pas de $x_1, ...x_n$.

1. Premières étapes
   (a) Ecrire la première équation et montrer que l'on peut écrire : $x_1 = \alpha_1 x_2 + \beta_1 x_3 + \gamma_1$ où l'on précisera ce que valent α_1, β_1 et γ_1 en fonction des coefficients de M et K.
   (b) Ecrire la seconde équation et montrer que l'on peut écrire : $x_2 = \alpha_2 x_3 + \beta_2 x_4 + \gamma_2$ où l'on exprimera α_2, β_2 et γ_2 en fonction de α_1, β_1 et γ_1 et des coefficients de M et K.
2. Etape générale : i-ème étape.
   On suppose que l'on a donc établi à l'étape précédente : $x_{i-1} = \alpha_{i-1} x_i + \beta_{i-1} x_{i+1} + \gamma_{i-1}$.
   Ecrire la i-ème équation et montrer que l'on peut écrire : $x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i x_{i+2} + \gamma_i$ où l'on exprimera α_i, β_i et γ_i en fonction de α_{i-1}, β_{i-1} et γ_{i-1} et des coefficients de M et K.
3. Dernières étapes
   (a) Ecrire la (n-1)-ème équation et montrer que l'on peut écrire : $x_{n-1} = \alpha_{n-1} x_n + \gamma_{n-1}$, où l'on exprimera α_{n-1} et γ_{n-1} en fonction de α_{n-2}, β_{n-2} et γ_{n-2} et des coefficients de M et K.
   (b) Ecrire la (n)-ème équation et montrer que l'on peut écrire : $x_n = \gamma_n$, où l'on exprimera γ_n en fonction de α_{n-1} et γ_{n-1} et des coefficients de M et K.
4. ALGO -En déduire la méthode de résolution de $Mx = K$ qu'on écrira donc en pseudo-code.

— • **Bon Courage** • —

MINF0402 - Mars 2019 - - Corrigé

ic-ctot. v2.0 - C2.11

Exercice 1 (Corrigé)

Voici la sortie de la console - avec quelques commentaires

```
1 --> A=0:10:30
2  A  =
3
4      0.    10.    20.    30.
5 --> B=4:-1:1
6  B  =
7
8      4.    3.    2.    1.
9 --> R1=A+B
10  R1  =
11
12     4.    13.    22.    31.
13 --> R2=A*B'
14  R2  =
15
16     100.
17 --> R3=A'*B
18  R3  =
19
20     0.     0.     0.     0.
21     40.    30.    20.    10.
22     80.    60.    40.    20.
23     120.   90.    60.    30.
24 --> R4=A.*B
25  R4  =
26
27     0.    30.    40.    30.
28 --> C=zeros(A)
29  C  =
30
31     0.    0.    0.    0.
32 --> S=0; for i=1:5 S=S+i; end; disp(S)
33
34     15.
35 --> t=linspace(-1,1,11);
36 --> plot(t,t.*t);plot(t,t.*t,'r+')
```

— A la ligne 14, B' est la transposé de B, A*B' est donc une multiplication ligne par colonne $(1,4)\times(4,1)\to(1,1)$ un scalaire!

— A la ligne 18, A' est la transposé de A, A'*B est donc une multiplication colonne par ligne $(4,1)\times(1,4)\to(4,4)$.

— A la ligne 25, “ .* ” indique que l'on effectue la multiplication élément par élément.

— A la ligne 33, on fait donc la somme des nombres de 1 à 5!

— Avec l'instruction à la ligne 36 : " >t=**linspace**(−1,1,11);" t contient 11 valeurs équi-réparties de -1 à 1, on a donc un pas de $\frac{1-(-1)}{11-1}=0.2$ soit : " −1. −0.8 −0.6 −0.4 −0.2 0. 0.2 0.4 0.6 0.8 1. bien entendu du fait du “ ; ” rien ne s'affiche à l'écran.

— Avec les instructions de la ligne 37, " >**plot**(t,t.*t);**plot**(t,t.*t,'r+')" " t.*t" est un tableau contenant les carrés des éléments de t, on effectue ensuite sur un même dessin (plus précisément dans une (nouvelle) fenêtre graphique) les deux tracés. En langage courant on a la fonction $f(x)=x^2$, x en abscisse et $y=f(x)$ en ordonnée, la fonction étant calculée pour tous les $t_i \quad (1\le i\le 11)$, on a donc les points (t_1,t_1^2), $(t_2,t_2^2),\ldots,(t_{11},t_{11}^2)$ avec le premier plot on trace les segments de droite joignant ces différents points dans la couleur par défaut, et avec le second plot on trace le signe “+” en rouge à l'emplacement de chacun de ces points. Comme on a pris très peu de points, la courbe n'est pas trés jolie : on voit les segments des droite, il faudrait prendre au moins le double de points pour avoir un tracé correct de la fonction $f(x)=x^2$. La représentation est donnée à toutes fins utiles ci dessous. (les “+ rouge” sont à peine visible du fait de la réduction.

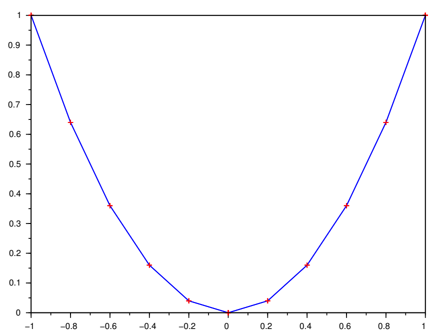

FIGURE 1 – Le tracé de l'exercice 1

Exercice 2 (Corrigé)

1. A : Inversion à la Gauss Jordan, dans l'ordre

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 4L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -8 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Soit : $A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -1 & 4 \\ -5 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. B : Inversion à la Gauss-Jordan : dans l'ordre

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Soit : $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B : Inversion à la Gauss-Jordan : plus astucieux avec un autre ordre.

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & -1 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & -1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Soit donc bien entendu à nouveau : $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. C : Inversion à la Gauss Jordan - dans l'ordre

$$\sim\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & L_1 - L_4 \\ L_2 & \leftarrow & L_2 + L_4 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - 2L_4 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Soit : $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3 (Corrigé)

1. (a) La première équation s'écrit : $b_1x_1 + c_1x_2 + d_1x_3 = k_1$
   On a alors $x_1 = \alpha_1x_2 + \beta_1x_3 + \gamma_1$ avec :

$$\alpha_1 = -\frac{c_1}{b_1}, \quad \beta_1 = -\frac{d_1}{b_1} \quad \text{et} \quad \gamma_1 = \frac{k_1}{b_1}$$

   (b) La deuxième équation s'écrit : $a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2x_4 = k_2$. Soit alors en reportant l'expression obtenue au dessus :

$$a_2(\alpha_1x_2 + \beta_1x_3 + \gamma_1) + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2x_4 = k_2$$
$$\sim (a_2\alpha_1 + b_2)x_2 + (a_2\beta_1 + c_2)x_3 + d_2x_4 = k_2 - a_2\gamma_1$$

   On peut alors écrire $x_2 = \alpha_2x_3 + \beta_2x_4 + \gamma_2$ où :

$$\alpha_2 = -\frac{a_2\beta_1 + c_2}{a_2\alpha_1 + b_2}, \quad \beta_2 = \frac{-d_2}{a_2\alpha_1 + b_2} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \frac{k_2 - a_2\gamma_1}{a_2\alpha_1 + b_2}$$

2. La i-ème équation s'écrit : $a_ix_{i-1} + b_ix_i + c_ix_{i+1} + d_ix_{i+2} = k_i$.
   La relation obtenue à l'étape (i-1) s'écrivant : $x_{i-1} = \alpha_{i-1}x_i + \beta_{i-1}x_{i+1} + \gamma_{i-1}$ alors en reportant on a :

$$a_i(\alpha_{i-1}x_i + \beta_{i-1}x_{i+1} + \gamma_{i-1}) + b_ix_i + c_ix_{i+1} + d_ix_{i+2} = k_i$$
$$\sim (a_i\alpha_{i-1} + b_i)x_i + (a_i\beta_{i-1} + c_i)x_{i+1} + d_ix_{i+2} = k_i - a_i\gamma_{i-1}$$

   Soit alors : $x_i = \alpha_ix_{i+1} + \beta_ix_{i+2} + \gamma_i$ avec :

$$\alpha_i = -\frac{a_i\beta_{i-1} + c_i}{a_i\alpha_{i-1} + b_i}, \quad \beta_i = \frac{-d_i}{a_i\alpha_{i-1} + b_i} \quad \text{et} \quad \gamma_i = \frac{k_i - a_i\gamma_{i-1}}{a_i\alpha_{i-1} + b_i}$$

3. (a) La (n-1)-ème équation s'écrit : $a_{n-1}x_{n-2} + b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-1}x_n = k_{n-1}$
   La relation obtenue à l'étape (n-2) s'écrit : $x_{n-2} = \alpha_{n-2}x_{n-1} + \beta_{n-2}x_n + \gamma_{n-2}$, d'où en la reportant dans l'équation :

$$a_{n-1}(\alpha_{n-2}x_{n-1} + \beta_{n-2}x_n + \gamma_{n-2}) + b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-1}x_n = k_{n-1}$$
$$\sim (a_{n-1}\alpha_{n-2} + b_{n-1})x_{n-1} + (a_{n-1}\beta_{n-2} + c_{n-1})x_n = k_{n-1} - a_{n-1}\gamma_{n-2}$$

   Soit donc $x_{n-1} = \alpha_{n-1}x_n + \gamma_{n-1}$ avec :

$$\alpha_{n-1} = -\frac{a_{n-1}\beta_{n-2} + c_{n-1}}{a_{n-1}\alpha_{n-2} + b_{n-1}} \quad \text{et} \quad \gamma_{n-1} = \frac{k_{n-1} - a_{n-1}\gamma_{n-2}}{a_{n-1}\alpha_{n-2} + b_{n-1}}$$

   (b) La n-ième et dernière équation s'écrit : $a_nx_{n-1} + b_nx_n = k_n$, d'où en reportant l'expression précédente :

$$a_n(\ \alpha_{n-1}x_n + \gamma_{n-1}\ ) + b_nx_n = k_n$$

$$x_n = \frac{k_n - a_n\gamma_{n-1}}{a_n\alpha_{n-1} + b_n} = \gamma_n$$

L'algorithme en pseudo-code

- On reprend pour l'essentiel les notations précédentes : on suppose que l'on dispose de tableaux de longueurs n : a,b,c,d et k (prédéfinis) et X, Alpha, Beta, Gamma qui seront remplis au cours de l'algo. NB (a(1), d(n-1), c(n), d(n), Beta(n-1), Alpha(n) et Beta(n) ne servent à rien)

```
// Phase 1
Alpha(1) <-- c(1)/b(1)
 Beta(1) <-- d(1)/b(1)
Gamma(1) <-  k(1)/b(1)
Pour I allant de 2 à n-2
        Denom    <- a(i)*Alpha(i-1)+b(i)
       Alpha(i) <- -(a(i)*Beta(i-1)+c(i))/Denom
        Beta(i) <-- d(i)/Denom
       Gamma(i) <- (k(i)-a(i)*Gamma(i-1))/Denom
Fin Pour
     Denom  <- a(n-1)*Alpha(n-2)+b(n-1)
Alpha(n-1) <- -(a(n-1)*Beta(n-2)+c(n-1))/Denom
Gamma(n-1) <- (k(n-1)-a(n-1)*Gamma(n-2))/Denom
  Gamma(n) <- (k(n)-a(n)*Gamma(n-1))/ (a(n)*Alpha(n-1)+b(n))
// Phase 2
  x(n) <- Gamma(n)
x(n-1) <- Alpha(n-1)*x(n)+Gamma(n-1)
Pour i descendant de n-2 à 1
     x(i) <- Alpha(i)*x(i+1)+Beta(i)*x(i+2)+Gamma(i)
Fin Pour
Afficher(`` La solution est : '',x)
```