Exercice 1

1°) a) $\det P = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4-2 = -6$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$\det P \neq 0$ la matrice est bien inversible et $P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ admet donc une solution unique. Soient

$\Delta x = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -7 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -16 & -5 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -7 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -16 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -32+20 = -12$

$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3$

$\Delta y = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & -7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -16 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & -7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -16 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 8-32 = -24$

$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3$

$\Delta z = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -9 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -9 \end{vmatrix} = -2(-27+18) = 18$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

Donc l'unique solution est $\left(\frac{\Delta x}{\det P}, \frac{\Delta y}{\det P}, \frac{\Delta z}{D p}\right) = \left(\frac{-12}{-6}, \frac{-24}{-6}, \frac{18}{-6}\right) = (2, 4, -3)$

b) par Gauss on écrit :

$\begin{cases} -2x - y + 2z = -2 \\ -2x + 2y = 4 \\ 2x - 2y - z = -7 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x - 5y = -16 \\ -2x + 2y = 4 \\ 2x - 2y + z = -7 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x - 5y = -16 \\ -3y = -12 \\ 2x - 2y + z = -7 \end{cases}$

$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$\sim \begin{cases} y = 4 \\ x = (-16+5y)/2 = 4/2 = 2 \\ z = -7 - 2x + 2y = -7 - 4 + 8 = -3 \end{cases}$

On a bien la même solution.

2°) a) On a déjà calculé $\det P$ il faut calculer la comatrice

$\mathrm{Com}\,P = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & -6 \\ 4 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & -5 & -4 \\ -2 & -2 & -4 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

b) par la methode magique

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -5 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -5 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3$ $\quad$ $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ $\quad$ $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ $\quad$ $L_1 \leftarrow 3L_1 - 5L_2$, $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & -2 & -5 & -4 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & -2 & -5 & -4 \\ 0 & 6 & 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right) \text{ ve donne } P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & -5 & -4 \\ -2 & -2 & -4 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow -2L_2$ $\quad$ $L_3 \leftarrow 6L_3$ $\quad$ ou directement

c) $$P^{-1}b = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & -5 & -4 \\ -2 & -2 & -4 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4-20+28 \\ 4-8+28 \\ 24-42 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ce qui est bien la même chose

Exercice 2

1°) $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 3 \\ 6-\lambda & 2-\lambda & 3 \\ 6-\lambda & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 6-\lambda & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 6-\lambda & 3 \\ 6-\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix}$

$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ $\quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$= -\lambda(6-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(6-\lambda)$ les valeurs propres sont donc
0 double
6 simple

2°) Déterminons les espaces propres

E_6] $(A - 6I_d)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} -5x + 2y + 3z = 0 \\ x - 4y + 3z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_3$ $\quad L_2 \leftarrow L_2 + L_3$

$\begin{cases} x = y \\ z = \frac{1}{3}(x + 2y) = y \end{cases}$ $\quad E_6 = \{(y,y,y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \{y v^6 \mid y \in \mathbb{R}\}$
avec $v^6 = (1,1,1)$

(v^6) est une base de E_6 et $\dim E_6 = 1$

E_0] $(A - 0I_d)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \sim \{x + 2y + 3z = 0$

$E_0 = \{(-2y - 3z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \{(-2y, y, 0) + (-3z, 0, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$

$= \{y v^0 + z w^0 \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ avec $v^0 = (-2, 1, 0)$ et $w^0 = (-3, 0, 1)$

$= \mathrm{vec}(v^0, w^0)$ $\quad (v^0, w^0)$ est donc génératrice de E_0

et par ailleurs v^0 et w^0 ne sont pas colinéaires.

(v^0, w^0) est donc une base de E_0 et $\dim E_0 = 2$

3°) La dimension de chaque espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre associée, donc la matrice est diagonalisable
$B = (v^0, w^0, v^6)$ est donc une base de $\mathbb{R}^3$. Soit B_c la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$P = Pass(B_c, B) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (Il suffit d'écrire v^0, w^0 et v^6 en colonnes)

et $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ sans calcul

Les valeurs propres prises dans le même ordre que les vecteurs propres.

Ex 3,

1°) a) la dernière équation s'écrit : $a_{n1} x_1 = b_1$ soit $x_1 = \frac{b_n}{a_{n,1}}$

l'équation n-1 s'écrit $a_{n-1,1} x_1 + a_{n-1,2} x_2 = b_{n-1}$

soit $x_2 = (b_{n-1} - a_{n-1,1} x_1)/a_{n-1,2}$

b) l'équation n-2 s'écrit :

$a_{n-2,1} x_1 + a_{n-2,2} x_2 + a_{n-2,3} x_3 = b_{n-2}$

d'où donc $x_3 = (b_{n-2} - a_{n-2,1} x_1 - a_{n-2,2} x_2)/a_{n-2,3}$

- les éléments a_{ij} de cette diagonale "secondaire" sont caractérisés par $i+j = n+1$ ~ $i = n-j+1$

si $j=k$ considérons la ligne $\underline{n+1-j}$ les elts de cette ligne sont

$a_{n+1-k,1}$ $a_{n+1-k,2}$ .... $a_{n+1-k,k-1}, a_{n+1-k,k}, 0$ —— 0

↑ 1er elt ↑ kème elt ↑ nème elt

l'équation correspondant à cette ligne est donc

$$\sum_{p=1}^{k} a_{n+1-k,p} x_p = b_{n+1-j} \sim \sum_{p=1}^{k-1} a_{n+1-k,p} x_p + a_{n+1-k,k} x_k = b_{n+1-k}$$

donc $x_k = \left(b_{n+1-k} - \sum_{p=1}^{k-1} a_{n+1-k,p} x_p\right) / a_{n+1-k,k}$

2°)
```
X(1) ← b(n)/A(n,1)
Pour k allant de 2 à n
        Aux ← 0
        Pour p allant de 1 à k-1
              Aux ← Aux + A(n+1-k,p)*X(p)
        FIN POUR
        X(k) ← (b(n+1-k) - Aux)/A(n+1-k,k)
FIN Pour
AFFICHER("La solution est:", X)
```