Divisibilité, Division euclidienne, PGCD

Exercice 1 : Soient $A; B \in \mathbb{K}[X]$

Soient $U ; V \in \mathbb{K}[X]$ $tels\ que\ AU + BV = PGCD(A; B)$.

Montrer que $U \wedge V = 1$. Comment caractérise-t-on que deux polynômes sont premiers entre eux ?

Exercice 2 :

Réaliser les divisions euclidiennes dans $\mathbb{R}[X]$ de :

- $X^4 + 2X + 3\ par\ X^2 - 1$
- $X^4 + 2X^3 - X + 6$ par $X^3 - 6X^2 + X + 4$
- $1 + 6X^2 + 4X^3 - 5X^4\ par\ X^2 - 5X + 3$

Exercice 3 :

Déterminer les restes dans la division euclidienne de $A = X^n + 2X - 2\ par\ B$ lorsque :

$$B = X - 2\ ;\ B = (X-2)(X-3)\ ;\ B = (X-3)^2$$

Exercice 4 : Soients $a \in \mathbb{K}$, $P \in \mathbb{K}[X]$

1) à l'aide de la division euclidienne montrer que :

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow X - a \mid P$$

2) Donner une condition similaire pour que $(X-a)^2 \mid P$

Exercice 5 : Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ tels que $X^2 - aX + 1$ divise $X^4 - X + a$ dans $\mathbb{R}[X]$

Exercice 6 : Soit A un polynôme dont les reste de la DE par $X - 1$; $X - 2$; $X - 3$ soient respectivement 3 ; 7 et 13.

Déterminer le reste de la division euclidienne de A par $B = (X-1)(X-2)(X-3)$

Exercice 7 :

1) Déterminer un PGCD de $P(X) = X^4 - 1\ et\ Q(X) = X^2 - 3X + 2$.
2) Déterminer une relation de Bézout entre P et Q.
3) Même travail avec $X^7 - X - 1$ et $X^5 + 1$.

Exercice 8 :

Soient $n, m \in \mathbb{N}$. On écrit $n = mq + r$ la division euclidienne de $n\ par\ m$.

Montrer que $X^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $X^n - 1\ par\ X^m - 1$

Exercice 9 : Effectuer la division euclidienne de $2X^3 + 3X^2 + 1\ par\ X^2 + 2X + 3$ dans $\mathbb{F}_5[X]$

Exercice 10 : Soient $P, Q \in \mathbb{F}_2[X]$ tels que $P(X) = X^4 + X + 1 et\ Q(X) = 1 + X^2 + X$, $R(X) = X^7$.

1) Ecrire la division euclidienne de R par P
2) Calculer, dans $\mathbb{F}_2[X]$, $PGCD(P; Q)$. Que dire de Q dans $\mathbb{F}_2[X]/< P >$?

Exercice 11 : Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\sin(\theta)\, X + \cos(\theta))^n\ par\ X^2 + 1$

Irréductibilité

Exercice 1 :

1) Montrer qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré 1 est irréductible.
2) Montrer que si $P \in \mathbb{K}[X]$ est de degré 2 ou 3. P est irréductible si et seulement si il ne possède pas de racine.
3) Montrer que $P = X^3 + X + 1$ est irréductible dans $F_5[X]$. L'est-il dans $\mathbb{R}[X]$

Exercice 2 : Dire si les polynômes suivants sont irréductibles dans $\mathbb{F}_2[X]$

- $X^2 + 1$
- $X^2 + X + 1$
- $X^3 + X + 1$

Exercice 3 :

Soit $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ \dots + a_1 X + a_0$ un polynôme à coefficient dans $\mathbb{Z}$ avec $a_n \neq 0$.

1) Si $x = \frac{p}{q}\ avec\ p \wedge q = 1$ est une racine de P, montrez que p divise a_0 et q divise a_n
2) Montrer que $X^3 - X - 1$ n'a pas de racine rationnelle. (pouvant s'écrire comme au-dessus)
3) Déterminer les racines rationnelles de $Q(X) = 3X^3 + 8X^2 + 12X - 5$.
4) En déduire la décomposition en produit d'irréductible dans de Q dans $\mathbb{R}[X]$

Exercice 4 : On pose $P(X) = X^4 + 1$.

1) Ce polynôme est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$? Donner sa décomposition s'il ne l'est pas.
2) Est-il irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$? Même question dans $\mathbb{F}_2[X]\ et\ \mathbb{F}_3[X]$

Exercice 5 : Nombre de polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_p$. Soit $p \in \mathbb{P}$

1) Combien existe-t-il de polynôme unitaires de degré 2 dans $\mathbb{F}_p[X]$
2) Montrer que si P est un polynôme unitaire réductible de degré 2 de $\mathbb{F}_p[X]$ alors :
   - Ou bien $P = (X-a)(X-b) avec\ a \neq b \in \mathbb{F}_p$. Combien existe-t-il de tels polynômes ?
   - Ou bien $P = (X-a)^2\ avec\ a \in \mathbb{F}_p[X]$. Combien existe-t-il de tels polynômes ?
3) En déduire le nombre de polynômes unitaires irréductibles de degré 2 dans $\mathbb{F}_p[X]$. Les lister pour $p = 3$
4) Montrer qu'il existe $\frac{1}{3}p(p^2 - 1)$ polynômes irréductibles de degré 3 dans $\mathbb{F}_p[X]$. On pourra remarquer qu'un polynôme réductible P s'écrit :
   - Ou bien $P(X) = (X-a)(X-b)(X-c)\ a \neq b \neq c \in \mathbb{F}_p$
   - Ou bien $P(X) = (X-a)^2(X-b)\ a \neq b \in \mathbb{F}_p$ (attention l'ordre compte)
   - Ou bien $P(X) = (X-a)^3, a \in \mathbb{F}_p$
   - Ou bien $P(X) = (X-a)Q(X)$ avec Q irréductible de degré 2 sur $\mathbb{F}_p$