Minf0402 - Tp2 - Exercice 2

Complément ou aide

1.00- ST

Quelques éléments et aides complémentaires pour pouvoir faire le TP2, mais je le répète : lisez de façon approfondie l'énoncé qui est très détaillé et explicite.

Exercice TP2

Ecriture de quelques équations (comme il est demandé

$$
\begin{cases}
-\cancel{u_0}+2u_1-u_2 = h^2 f_1 \\
-u_1+2u_2-u_3 = h^2 f_2 \\
-u_2+2u_3-u_4 = h^2 f_3 \\
\quad\ddots \\
-u_{i-1}+2u_i-u_{i+1} = h^2 f_i \\
\quad\ddots \\
-u_{N-2}+2u_{N-1}-u_N = h^2 f_{N-1} \\
-u_{N-1}+2u_N-\cancel{u_{N+1}} = h^2 f_N
\end{cases}
$$

$u_0=u_{N+1}=0$

soit donc
$$A\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 f_1 \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ h^2 f_N \end{pmatrix}$$

avec A matrice (N,N) :

$$
\begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
-1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\
0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\
0 & \cdots & 0 & -1 & 2
\end{pmatrix}
$$

qui est donc tridiagonale

et vous pouvez donc résoudre avec votre méthode spécifique pour les tridiagonales du TP1

Pour faire les test initiaux, il est indispensable de travailler avec très peu de points pour faire la mise au point. Dans l'exemple ci dessous (qui ne figure pas volontairement pas dans le TP et qu'il n'est pas utile d'expliciter ici) et pour un tracé d'illustration spécifique on utilise en fait $N = 7$. En trait continu, on a représenté la solution exacte de l'équation (avec bien plus de points) et avec des marqueurs "*" en rouge on a marqué les points calculés.

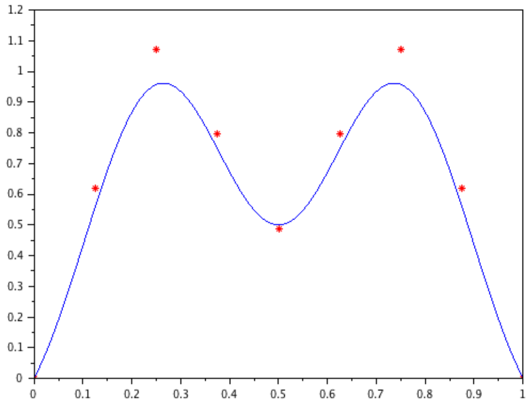

FIGURE 1 – Tracé simple (N=7)

On peut au besoin tracer la courbe (formée de segments de droites) joignant ces différents points - mais ceci ne devient vraiment intéressant que quand N est plus grand mais traçons néanmoins :

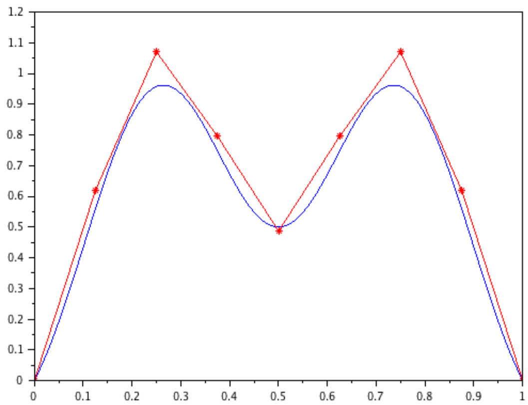

FIGURE 2 – Autre Tracé simple

La courbe est anguleuse, car il n'y a pas assez de points. Cependant le dessin est intéressant car on est amené à se rappeler que l'on doit aussi avoir sur celui-ci les points $(x_0, u_0) = (0, 0)$ et $(x_{N+1}, u_{N+1}) = (1, 0)$ que l'on a sans calcul et qu'il faut prendre soin de réincorporer comme il a été dit dans le TP. En fait on peut voir sur le premier dessins les marqueurs "*" dans les coins droits et gauches masqués en presque totalité par le cadre.

Si à la suite du premier tracé, on modifie les propriétés du dessin - pour élargir un peu la fenêtre - par les commandes :

```
-->a=gca();
-->a.data_bounds=[-0.1 1.1,-0.1 1.2];
```

On a le dessin de la figure 3

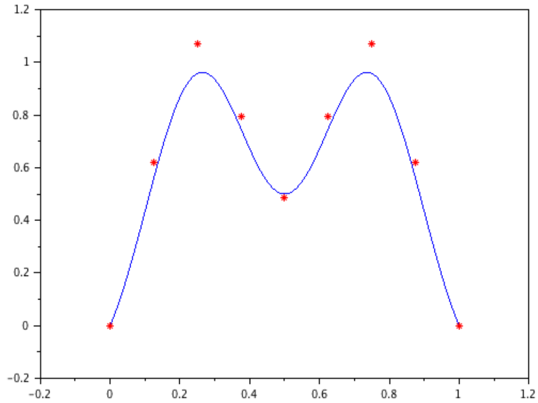

FIGURE 3 – Détails

On peut voir clairement tous les points. Il est très important de s'assurer que le tracé où les points extrêmes doivent être incorporés est correct : on considère une fonction définie sur $[0, 1]$, si lors de la mise au point on teste seulement avec N élevé on ne verra rien.

Enfin il faut visualiser les erreurs : ici la valeur absolue de la différence entre la solution exacte et la solution approchée, représentés sous formes de barres (avec plot2d3).

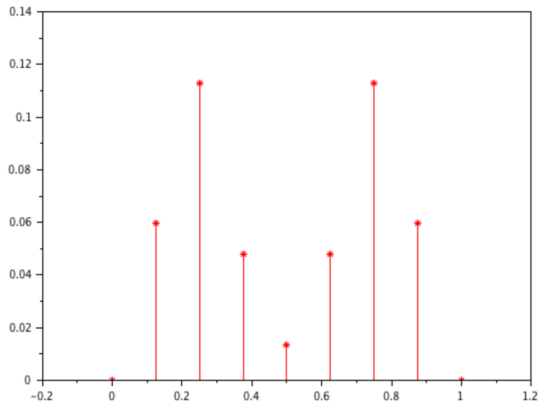

FIGURE 4 – les erreurs

Avec bien évidemment une erreur nulle en x_0 et x_{N+1}.

Il est bien évident que plus N élevé, plus la précision sera importante dans l'approximation, cependant ce qui est tout aussi intéressant c'est de voir quelle est la précision avec N pas trop grand et il est absurde de vouloir utiliser des grandes valeurs de N quand de plus petites suffisent !

Dans l'exemple (a) du TP il n'y a pas d'erreur ($\forall N > 1$) ! en dehors des erreurs d'arrondi de calculs. Dés l'exemple (b) il y a des erreurs d'approximations par contre (mais faibles : moins de 10^{-2} pour $N = 9$). (a) et (b) comme indiqués sont là pour vos tests personnels et mis au point. Les erreurs sont plus importantes dans les exemples suivants. (utiliser par exemple N=4 ou N=9 pour vos premiers tests - ainsi on aura h=0.2 ou 0.1)

• FIN •