MA0407 DST avril 2017

Exercice 1

1) a) $\Delta = \det P = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 5 \\ -2 & -3 & -2 \\ -7 & -6 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -3(-1+3) = -6$

$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$

$\det P \neq 0$ donc P est inversible

par Cramer nous avons trois déterminants à calculer

$\Delta_x = \begin{vmatrix} -3 & 6 & 5 \\ 3 & -3 & -2 \\ -1 & -6 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 6 & 5 \\ 3 & -3 & -2 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4 \times (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -4(-12+15) = -12$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 5 \\ -2 & 3 & -2 \\ -7 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -7 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \times 2 \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2(15-6) = 18$

$C_3 \leftarrow C_3 - C_1$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \\ -7 & -6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & -7 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \times (-3) \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} = -6$

$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$

Donc l'unique solution est $(x,y,z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta}\right) = \left(\frac{-12}{-6}, \frac{18}{-6}, \frac{-6}{-6}\right) = (2,-3,1)$

b) $P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b$ s'écrit $\begin{cases} 5x + 6y + 5z = -3 \\ -2x - 3y - 2z = 3 \\ -7x - 6y - 5z = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + z = 3 \\ -2x - 3y - 2z = 3 \\ -3x - z = -7 \end{cases} \sim \begin{cases} x + z = 3 \\ -2x - 3y - 2z = 3 \\ -2x = -4 \end{cases}$

$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

$\sim \begin{cases} x = 2 \\ z = 3 - x = 1 \\ y = (-2x - 2z - 3)/3 = \frac{1}{3}(-4-2-3) \\ \quad = -3 \end{cases}$ On retrouve donc la solution $(2,-3,1)$

2°) a)

$$\mathrm{com}\,P = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -6 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -7 & -5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -7 & -6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -6 & -5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -7 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -7 & -6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -9 \\ 0 & 10 & -12 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$Q = P^{-1} = \frac{1}{\det}[\mathrm{com}\,P]^T = \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 4 & 10 & 0 \\ -9 & -12 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ -4 & -10 & 0 \\ 9 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

b)
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \multicolumn{3}{c|}{\overbrace{\hphantom{-7\ -6\ -5}}^{P}} & & & \\ 5 & 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & -6 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \qquad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \quad L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \qquad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 0 & -4 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 12 & 3 \end{array}\right) \quad \text{soit } P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ -4 & -10 & 0 \\ 9 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

c) la solution est $P^{-1}b = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ -4 & -10 & 0 \\ 9 & 12 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 9+0+3 \\ 12-30+0 \\ -27+36-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a donc bien retrouvé la solution.

Ex 2

1) $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ \lambda & 1-\lambda & \lambda\\ 0 & 1 & -\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix} = \lambda^2\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}$

$C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \quad C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$= \lambda^2 (-1)^{1+1} \times (-1)\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} = -\lambda^2(\lambda - 3) = -(\lambda-0)^2(\lambda-3)$

Les valeurs propre sont donc 0 (vp double) 3 vp simple

2) Soit E_3 l'espace propre associé à la vp 3, on doit résoudre

$(A-3Id)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \sim \begin{cases}-2x+y+z=0\\ x-2y+z=0\\ x+y-2z=0\end{cases} \sim \begin{cases}-3y+3z=0\\ x-2y+z=0\\ 3y-3z=0\end{cases}$

$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$\sim \begin{cases}y=z\\ x=2y-z=z\end{cases} \qquad E_3 = \{(z,z,z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z v^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$

avec $v^3 = (1,1,1)$

(v^3) est une base de E_3 et $\dim E_3 = 1$ ce qui est normal car

$1 \leq \dim E_3 \leq$ multiplicité de la vp 3

Soit maintenant l'espace propre E_0 associé à la vp 0 on doit résoudre

$(A-0Id)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \sim \begin{cases}x+y+z=0\\ x+y+z=0\\ x+y+z=0\end{cases} \sim z=-x-y$

$E_0 = \{(x,y,-x-y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \{(x,0,-x)+(0,y,-y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ avec $v^0=(1,0,-1)$ et $w^0=(0,1,-1)$

$= \{x v^0 + y w^0 \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

$= \mathrm{vec}(v^0, w^0)$ (v^0, w^0) est donc génératrice de E_0 et comme ses deux vecteurs ne sont visiblement pas colinéaires, (v^0, w^0) est une base de E_0 et $\dim E_0 = 2$

3°) La dimension de chaque espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre associée donc la matrice est diagonalisable.

$B = (v^0, w^0, v^3)$ est donc une base de $\mathbb{R}^3$, soit $P = \mathrm{Pass}(B_c, B)$ où B_c est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ alors

$P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix} \qquad P^{-1}AP = D$ avec $D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

(les valeurs propres sont sur la diagonale de D et dans le même ordre que celui dans lequel on a considéré les vecteurs propres associés.

Exercice 3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{(n-3)(n-2)} & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{(n-2)(n-2)} & a_{(n-2)(n-1)} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{(n-1)(n-2)} & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)(n)} \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{(n\ \ )(n-2)} & a_{(n\ \ )(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

Tout est expliqué dans les indications

```
Pour I descendant de n-1 à 1
    aux ← A(I,I+1)/ A (I+1,I+1)
    Pour J allant de 1 à I
        A(I, J) ← A (I,J) - aux× A(I+1,J)
    Fin Pour
    A (I,I+1) ← 0
    b (I) ← b(I) - aux × b(I+1)
Fin Pour
```

en termes de lignes sur le système d'équations on effectue :

$$L_I \leftarrow L_I - \frac{A(I,I+1)}{A(I+1,I+1)} L_{I+1}$$

cela fait disparaître le terme $A(I, I+1$

```
// La matrice du système (stockée dans A)
// est maintenant triangulaire inférieure
// La résolution est immédiate
Pour I allant de 1 à n
    Aux ← b(I)
    Pour J allant de 1 à I-1
        AUX ← AUX - A(I,J)× X(J)
    Fin Pour
    X(I) ← AUX/A (I,I)
Fin Pour
AFFICHER ("La solution est:", X)
```

cette partie c'est juste la résolution (vue en TD) d'un système avec une matrice triangulaire inférieure