MINF0402 - DST Mai 2019 - *Durée 1H30*

L'usage de tout document, calculatrice, téléphone, boulier ou divination est interdit, toutes les réponses doivent être justifiées.

N'oubliez pas - d'écrire votre nom, vos prénoms, de numéroter chacune de vos copies, d'y reporter votre numéro de place et d'en indiquer le nombre total (-1pt par omission). Pour l'évaluation de la copie, il sera tenu compte de la rigueur, de la qualité et de la propreté de la rédaction.

ic v 0.32

Les calculs devront être détaillés, les transformations indiquées. Les résolutions des systèmes linéaires (ce qui vaut aussi pour la méthode magique) devront être explicitées et toutes les transformations devront être indiquées.

Le non respect de ces consignes et le "bricolage séparé" d'équations seront sanctionnés. Tout résultat sans justification sera considéré comme nul.

Exercice 1 (environ 10 minutes)

Soient n, m et q trois entiers strictement positifs.

Soient A, B et C trois tableaux bi-dimensionnels de types respectifs : (n,m), (m,q) et (n,q).

1. On considère que A, B et C correspondent à des matrices respectivement (n,m), (m,q) et (n,q) et que $C = AB$, donner l'expression mathématique des $c_{i,j}$.
2. Donner l'algorithme calculant le produit matriciel AB et renvoyant le résultat dans le tableau C.

Exercice 2 (environ 20 minutes)

A désignant un tableau bi-dimensionnel (n,n) et b et x des tableaux mono-dimensionnels de longueur n, on considère qu'ils correspondent respectivement à une matrice (n,n) et des vecteurs colonnes de longueur n. On considère l'équation linéaire $Ax = b$.

1. On considère que A est une matrice triangulaire inférieure inversible, écrire le système d'équations correspondant et donner l'expression mathématique, permettant de calculer de proche en proche les (x_i). Donner ensuite l'algorithme permettant d'effectuer cette résolution.
2. On considère que A est une matrice triangulaire supérieure inversible, écrire le système d'équations correspondant et donner l'expression mathématique, permettant de calculer de proche en proche les (x_i). Donner ensuite l'algorithme permettant d'effectuer cette résolution.

Exercice 3 (environ 25 minutes)

Soit :

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer l'inverse S de R par la méthode de Cramer (détaillez vos calculs en faisant en particulier apparaître les 9 déterminants 2 x 2 de la comatrice).
2. Retrouver ce résultat par la méthode magique (ou la méthode de Gauss ce qui est la même chose) (détaillez soigneusement vos calculs).
3. Résoudre l'équation $R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b$, par la méthode de Cramer à l'exclusion de toute autre méthode.
4. Retrouver ce résultat en utilisant directement la matrice S (détailler explicitement vos calculs).

—— **Tourner la page s.v.p.** ——

Exercice 4 (environ 35 minutes)

1. Soit la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$
   (a) Déterminer le polynôme caractéristique de A et en déduire les valeurs propres et leurs multiplicités.
   (b) Pour chaque valeur propre, déterminer l'espace propre associé, une base et la dimension de celui-ci.
   (c) Montrer que A est diagonalisable, c'est à dire donc qu'il existe une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale. On donnera bien entendu les matrices D et P.
2. Soit $\epsilon \neq 0$ et soit la matrice :
$$A_\epsilon = \begin{pmatrix} 3+2\epsilon & -4\epsilon & 4\epsilon \\ -1+\epsilon & 5-2\epsilon & 2+2\epsilon \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$
   (remarque pour $\epsilon = 0$, on trouverait $A_0 = A$)
   (a) Montrer en le calculant que A_ϵ a le même polynôme caractéristique que A ! et donc les mêmes valeurs propres.
   (b) Montrer que A_ϵ n'est pas diagonalisable (un seul espace propre à déterminer, bien utiliser le fait que $\epsilon \neq 0$ et indiquer à quel moment ceci est utilisé !).

—— Bonne Chance ——