INFO0501

ALGORITHMIQUE AVANCÉE

COURS 1

PRÉSENTATION DE LA MATIÈRE, ORGANISATION ET INTRODUCTION

UNIVERSITÉ
DE REIMS
CHAMPAGNE-ARDENNE

Pierre Delisle
Département de Mathématiques, Mécanique et Informatique
Septembre 2019

Pierre Delisle

- Maître de Conférences au département de Math-Meca-Info (MMI) de l'URCA
- Mail
  - pierre.delisle@univ-reims.fr
- Site Web
  - http://cosy.univ-reims.fr/~pdelisle

Plan de la séance

- Description de la matière
  - Objectifs, pré-requis, organisation
- Introduction/Rappels
  - Premiers algorithmes
    - tri par insertion
- Analyse des algorithmes
- Conception des algorithmes
  - Méthode diviser pour régner : tri par fusion
- Croissance des fonctions

Objectifs de la matière

- Objectif général
  - Apprendre à utiliser des structures de données avancées en algorithmique et en programmation
- Compétences spécifiques
  - Définition et utilisation des tables de hachage
  - Définition, représentation et utilisation des graphes
  - Algorithmes de la théorie des graphes
  - Implémentations en langage C
- Pré-requis
  - Info0301 : Programmation en langage C
  - Info0401 : Algorithmique

Organisation

- CM : 8 x 2h30 heures + 2 x 2 heures
  - Lundi 13h30-16h00
  - Mardi 10h15-12h15 s. 36-37
- TD : 8 x 2 heures
  - Mardi 10h15-12h15 s. 38-…..
- TP : 10 x 2 heures
  - S5O6a : Vendredi 14h00-16h00
  - S5O6b + S5O7 : Jeudi 14h00-16h00
  - Création d'un 3e TP, à confirmer

- Évaluation

Nature de l'évaluation	Nombre de points
DS	30
CRTP (TPs + Projet)	20
DST	50
Total	100

- Changements possibles sur les groupes et sur les emplois du temps
- Surveillez votre bureau virtuel et le site de la Licence Info !

Quelques informations pratiques…

- Emplois du temps et informations
  - Bureau virtuel
    - ebureau.univ-reims.fr/
  - Site Web de la Licence Informatique
    - http://www.licenceinfo.fr/
  - Site Web de la scolarité
    - http://www.univ-reims.fr/ufrsciences
- Demi-groupes de TP
  - Voir sur le site de la Licence Informatique
- Supports de cours, énoncés de TD/TP et autres informations utiles
  - Moodle

Structure de la matière

- Partie 1 – Introduction et rappels
  - Analyse et conception des algorithmes
- Partie 2 – Graphes 1
  - Définition et représentation
  - Algorithmes de base
    - Parcours en largeur
    - Parcours en profondeur
    - Rappels sur les types de données élémentaires nécessaires : Piles, files, listes chaînées, tables de hachage
- Partie 3 – Graphes 2
  - Algorithmes classiques et/ou avancés
    - Tri topologique
    - Connexité
    - Plus courts chemins
    - Arbres couvrants de poids minimal
    - Flot maximal
    - Optimisation linéaire/combinatoire
    - Rappels sur les types de données élémentaires nécessaires : tas, arbres, ensembles disjoints
- Bibliographie
  - T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein, "Algorithmique", 3e édition, Dunod, 2010

LE RÔLE DES ALGORITHMES EN INFORMATIQUE

Algorithme

- Procédure de calcul bien définie qui
  - Prend en entrée une valeur ou un ensemble de valeurs
  - Donne en sortie une valeur ou un ensemble de valeurs
- Séquence d'étapes de calcul qui transforment l'entrée en sortie
- Outil permettant de résoudre un problème de calcul

- Des problèmes complexes à résoudre par des ordinateurs nécessitent des algorithmes performants
  - Calcul scientifique : simulation de systèmes
  - Internet : recherche et manipulation de grands volumes de données
  - Commerce électronique : sécurité, encryptage
  - Industrie : allocation de ressources
  - …

Algorithmes en tant que technologie

- Les ordinateurs
  - ne sont pas infiniment rapides
  - n'ont pas une mémoire infinie
- Le temps machine et l'espace mémoire sont des ressources limitées
- Une machine moins performante qui exécute de bons algorithmes pourra surpasser une machine plus performante qui exécute de mauvais algorithmes

ANALYSE DES ALGORITHMES

Exemple : le problème de tri

- Entrée
  - Une suite de n nombres $\langle a_1, a_2, \ldots a_n \rangle$
- Sortie
  - Une permutation (réorganisation) $\langle a_1', a_2', \ldots a_n' \rangle$ de la suite donnée en entrée
  - De sorte que $a_1' \leq a_2' \leq \ldots \leq a_n'$
- La suite ⟨31, 41, 59, 26, 41, 58⟩
  - Est une <u>instance</u> du problème de tri

- Opération majeure en informatique
  - Employée par une multitude de programmes comme phase intermédiaire
- L'algorithme optimal pour une application donnée dépend
  - Du nombre d'éléments à trier
  - De la façon dont les éléments sont plus ou moins triés initialement
  - Des restrictions sur les valeurs des éléments
  - …

31	41	59	26	41	58

Tri

26	31	41	41	58	59

Un 1er algorithme : le tri par insertion

- Algorithme naturel pour l'être humain
  - Comment triez-vous vos cartes quand vous jouez aux cartes (si vous jouez aux cartes !) ?
  - On prend les cartes une à une et on les place au bon endroit dans sa main
- Efficace quand il s'agit de trier un petit nombre d'éléments
- Exemple 1
  - Application sur l'instance ⟨5, 2, 4, 6, 1, 3⟩
- Pseudo-code

```
TRI-INSERTION (t)
    pour j = 2 à t.longueur
        clé = t[ j]
        //insère t[ j] dans la séquence triée t [1.. j - 1]
        i = j – 1
        tant que i > 0 et t[ i ] > clé
            t[ i + 1] = t[ i ]
            i = i – 1
        t[ i + 1] = clé
```

Correction d'un algorithme

- Un algorithme est dit <u>correct</u> si, pour chaque instance en entrée, il se termine en produisant la bonne sortie
  - Un algorithme correct <u>résoud</u> le problème donné
- Un algorithme incorrect peut
  - Ne pas se terminer pour certaines instances
  - Se terminer sur une réponse autre que celle voulue
- On montre qu'un algorithme est correct par les <u>invariants de boucle</u>

Invariant de boucle

- Propriété qui est vraie à chaque passage dans la boucle
- On doit montrer 3 choses concernant un invariant de boucle
  - **Initialisation** : il est vrai avant la première itération de la boucle
  - **Conservation** : s'il est vrai avant une itération de la boucle, il le reste avant l'itération suivante
  - **Terminaison** : Une fois terminée la boucle, l'invariant fournit une propriété utile qui aide à montrer la validité de l'algorithme

Validité du tri par insertion

- Invariant de boucle

  Au début de chaque itération de la boucle **pour**
  le sous-tableau $t\,[1\,..\,j-1]$ se compose
  des éléments qui occupaient initialement les positions $t\,[1\,..\,j-1]$
  mais qui sont maintenant triés

- **Initialisation**
  - Avant la 1ère itération de la boucle, $j = 2$
  - Le sous-tableau $t\,[1\,..\,j-1]$ se compose donc uniquement de l'élément $t\,[\,1\,]$
  - … qui est l'élément originel de $t\,[\,1\,]$
  - … qui est trié (trivialité : un élément seul est nécessairement trié)
  - L'invariant est donc vérifié avant la 1ère itération de la boucle

- **Conservation**
  - Le corps de la boucle **pour** fonctionne en déplaçant $t\,[\,j-1]$, $t\,[\,j-2]$, $t\,[\,j-3]$, etc. d'une position vers la droite jusqu'à ce qu'on trouve la bonne position pour $t\,[\,j\,]$
  - Le sous-tableau $t\,[1\,..\,j\,]$ se compose alors des éléments situés initialement dans $t\,[1\,..\,j\,]$, mais en ordre trié
  - L'incrémentation de j pour l'itération suivante de la boucle **pour** préserve alors l'invariant

- **Terminaison**
  - La condition forçant la boucle **pour** à se terminer est que $j > t.longueur = n$
  - Comme chaque itération de la boucle augmente j de 1, on doit avoir $j = n + 1$ à cet instant
  - En substituant $n + 1$ à j dans la formulation de l'invariant de boucle, on a que le sous-tableau $t\,[1\,..\,n\,]$ se compose des éléments qui appartenaient originellement à $t\,[1\,..\,n\,]$, mais qui ont été triés depuis
  - Or, le sous-tableau $t\,[1\,..\,n\,]$ est le tableau complet, donc le tableau tout entier est trié, et donc l'algorithme est correct

Analyse des algorithmes

- Prévoir les ressources nécessaires à cet algorithme
  - Temps de calcul
  - Mémoire
  - Largeur de bande,
  - ...
- C'est généralement le **temps de calcul** qui nous intéresse
- En analysant plusieurs algorithmes pour un problème, on peut identifier le plus efficace
- Nécessite un modèle de la technologie employée (ressources, coûts) : le modèle RAM

Modèle RAM

- Modèle de calcul générique basé sur une machine à accès aléatoire à processeur unique
- Instructions exécutées l'une après l'autre
- Permet les instructions
  - Arithmétiques (addition, soustraction, …)
  - De transfert de données (lecture, copie, …)
  - De contrôle (branchement, appel de routine, …)
- Chaque instruction a un temps d'exécution constant
- Types de données : entier et réel (avec taille limitée)

Analyse du tri par insertion

Durée d'exécution de TRI-INSERTION

- Dépend de l'entrée
  - Temps pour 1000 nombres > temps pour 3 nombres
  - Temps peut être différent pour 2 entrées de même taille, selon qu'elles sont plus ou moins triées partiellement
- En général
  - Le <u>temps d'exécution</u> d'un algorithme croît avec la <u>taille de l'entrée</u>
  - On exprime donc le temps d'exécution en fonction de cette taille

Taille de l'entrée

- Dépend du problème étudié
- Pour le problème de tri
  - Nombre d'éléments constituant l'entrée
  - Longueur n du tableau à trier
- Peut être le nombre total de bits nécessaire à la représentation de l'entrée en notation binaire
- Peut être plusieurs nombres plutôt qu'un seul
  - Pour les algorithmes de graphes
    - Nombre de sommets et nombre d'arcs

Temps d'exécution

- Nombre d'opérations élémentaires exécutées
- On considère que chaque ligne de pseudo-code demande un temps constant
- Pour TRI-INSERTION
  - Temps d'exécution de la ligne $i \rightarrow c_i$
  - On multiplie c_i par le nombre de fois que l'instruction est exécutée

Analyse du temps d'exécution de TRI-INSERTION

TRI-INSERTION (t)	coût	fois
{1} pour j = 2 à t.longueur	c_1	n
{2} $clé = t[j]$	c_2	$n - 1$
{3} //insère $t[j]$ dans la séquence triée t [1.. j - 1]	0	$n - 1$
{4} $i = j - 1$	c_4	$n - 1$
{5} tant que $i > 0$ et $t[i] > clé$	c_5	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
{6} $t[i + 1] = t[i]$	c_6	$\sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$
{7} $i = i - 1$	c_7	$\sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$
{8} $t[i + 1] = clé$	c_8	$n - 1$

t_j = nombre de fois que le test de la boucle **tant que** est exécuté pour cette valeur de j

n = *t.longueur*

Temps d'exécution	$T(n) = c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5\sum_{j=2}^{n} t_j + c_6\sum_{j=2}^{n} (t_j-1) + c_7\sum_{j=2}^{n} (t_j-1) + c_8(n-1)$
Cas le plus favorable (t déjà trié $\rightarrow t_j = 1$)	$T(n) = (c_1 + c_2 + c_4 + c_5 + c_8)\, n \;-\; (c_2 + c_4 + c_5 + c_8)$ Forme $an + b$ → **Fonction linéaire de n**
Cas le plus défavorable (t trié décroissant $\rightarrow t_j = j$)	$T(n) = (c_5/2 + c_6/2 + c_7/2)\, n^2 + (c_1 + c_2 + c_4 + c_5/2 - c_6/2 - c_7/2 + c_8)\, n - (c_2 + c_4 + c_5 + c_8)$ Forme $an^2 + bn + c$ → **Fonction quadratique de n**

Analyse du temps d'exécution

Ce qui nous intéresse généralement le plus

- Temps d'exécution dans le cas le plus défavorable
  - Temps d'exécution maximal <u>pour une quelconque entrée de taille *n*</u>
- Borne supérieure du temps d'exécution
  - Certitude qu'on ne pourra faire pire
  - Pour certains algorithmes, ce cas arrive souvent
  - Souvent, cas moyen presque aussi mauvais que le pire

Ce qui nous intéresse vraiment

- *Taux de croissance* du temps d'exécution
  - Ou *ordre de grandeur* du temps d'exécution
- On ne considérera que le terme dominant d'une formule, sans les coefficients constants
  - $an + b = \Theta(n)$ (théta de *n*)
  - $an^2 + bn + c = \Theta(n^2)$ (théta de *n*-deux)
- Un algorithme est plus efficace qu'un autre si son temps d'exécution du cas le plus défavorable a un ordre de grandeur inférieur

CONCEPTION DES ALGORITHMES

Méthode diviser-pour-régner

Techniques de conception

- Tri par insertion → approche <u>incrémentale</u>
  - Après avoir trié $t[1..j-1]$, on produit $t[1..j]$
- Approche diviser-pour-régner
  - Méthode récursive
  - L'algorithme s'appelle lui-même pour traiter des sous-problèmes similaires, mais de taille inférieure
  - Les solutions des sous-problèmes sont combinées pour produire la solution du problème original
- Les 3 étapes de l'approche diviser-pour-régner
  - Diviser
    - Création de sous-problèmes qui sont des instances plus petites du même problème
  - Régner
    - Traiter les sous-problèmes de façon récursive
    - Lorsque la taille d'un sous-problème est assez petite, on peut le résoudre directement
  - Combiner
    - Production de la solution du problème en combinant les solutions des sous-problèmes

Exemple : Le tri par fusion

- Diviser
  - Diviser la suite de n éléments à trier en 2 sous-suites de $n/2$ éléments chacune
- Régner
  - Trier les 2 sous-suites récursivement avec le tri par fusion
- Combiner
  - Fusionner les 2 sous-suites triées pour produire la réponse
- Arrêt de la récursivité
  - Séquence de longueur 1
- Exemple 2
  - Application de la fusion sur l'instance $\langle 2, 4, 5, 7, 1, 2, 3, 6 \rangle$

La procédure FUSION

```
FUSION (t, p, q, r)
    n1 = q − p + 1
    n2 = r − q
    Créer tableaux g[1..n1 + 1] et d[1..n2 + 1]
    pour i = 1 à n1
        g[i] = t[p + i - 1]
    pour j = 1 à n2
        d[i] = t[q + j]
    g[n1 + 1] = ∞
    d[n2 + 1] = ∞
    i = 1
    j = 1
    pour k = p à r
        Si g[i] ≤ r[j]
            t[k] = g[i]
            i = i + 1
        Sinon
            t[k] = d[i]
            j = j + 1
```

- 2 premières boucles pour
  - $\Theta(n1 + n2) \rightarrow \Theta(n)$
- 3e boucle pour
  - n itérations ($n = r - p + 1$)
  - Temps constant pour chaque itération
  - $\Theta(n)$
- Temps d'exécution
  - $\Theta(n)$

La procédure TRI-FUSION

```
TRI-FUSION (t, p, r)
    si p < r
        q = ⌊(p + r) / 2⌋
        TRI-FUSION (t, p, q)
        TRI-FUSION (t, q + 1, r)
        FUSION(t, p, q, r)
```

- Exemple 3

  Application du tri par fusion sur l'instance $\langle 5, 2, 4, 7, 1, 3, 2, 6 \rangle$

- Analyse ?

Analyse des algorithmes diviser-pour-régner

- Algorithme avec appel récursif à lui-même
  - Temps d'exécution décrit par une récurrence
  - Décrit le temps d'exécution global pour un problème de taille n à partir du temps d'exécution pour des entrées de taille moindre
  - On peut alors se servir d'outils mathématiques pour résoudre la récurrence
- $T(n)$
  - Temps d'exécution d'un problème de taille n
- Si la taille du problème est suffisamment petite ($n \leq c$)
  - La solution directe prend un temps constant → $\Theta(1)$
- Si on divise le problème en a sous-problèmes
  - La taille de chacun étant $1 / b$ de la taille du problème initial
  - Il faut le temps $T(n / b)$ pour résoudre un sous problème de taille n / b
  - Il faut $aT(n / b)$ pour résoudre a sous-problèmes
  - Il faut un temps $D(n)$ pour diviser le problème en sous-problèmes
  - Il faut un temps $C(n)$ pour construire la solution finale
- On a donc la récurrence

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{si } n \leq c \\ aT(n / b) + D(n) + C(n) & \text{sinon} \end{cases}$$

Analyse du tri par fusion

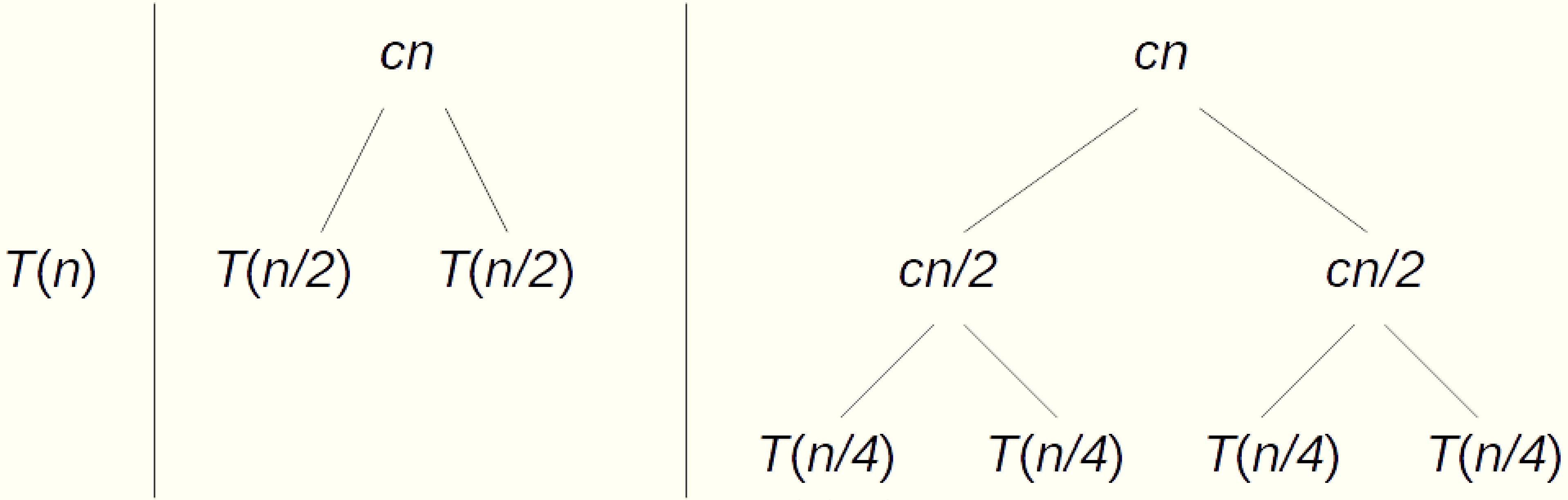
- Diviser
  - On calcule le milieu du sous-tableau
  - $D(n) = \Theta(1)$
- Régner
  - On résout récursivement 2 sous-problèmes, chacun ayant la taille $n\ /\ 2$
  - $2T(n\ /\ 2)$
- Combiner
  - Utiliser la procédure fusion sur un sous-tableau à n éléments
  - $C(n) = \Theta(n)$

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{si } n = 1 \\ 2T(n / 2) + \Theta(n) & \text{si n} > 1 \end{cases}$$

Arbre récursif

c :
- Temps requis pour résoudre des problèmes de taille 1
- Temps par élément de tableau des étapes diviser et combiner

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{si } n = 1 \\ 2T(n/2) + cn & \text{si } n > 1 \end{cases}$$



Arbre récursif

Coût par niveau

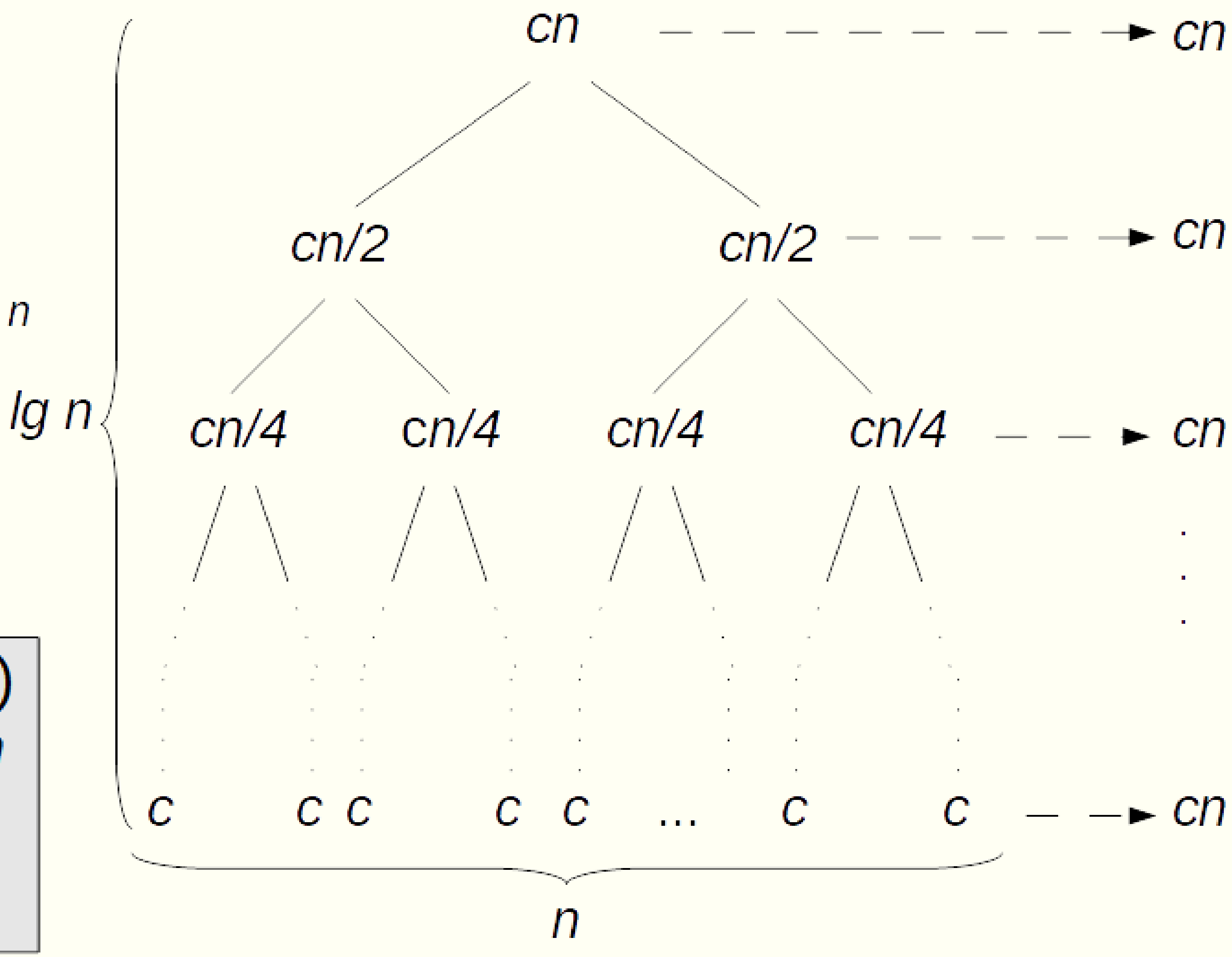
$\boxed{cn}$

Arbre de hauteur lg *n*

$\boxed{\lg n + 1 \text{ niveaux}}$

Coût total

$$\begin{aligned} & cn\,(\lg n + 1) \\ &= cn \lg n + cn \\ &= \Theta\,(n \lg n) \end{aligned}$$

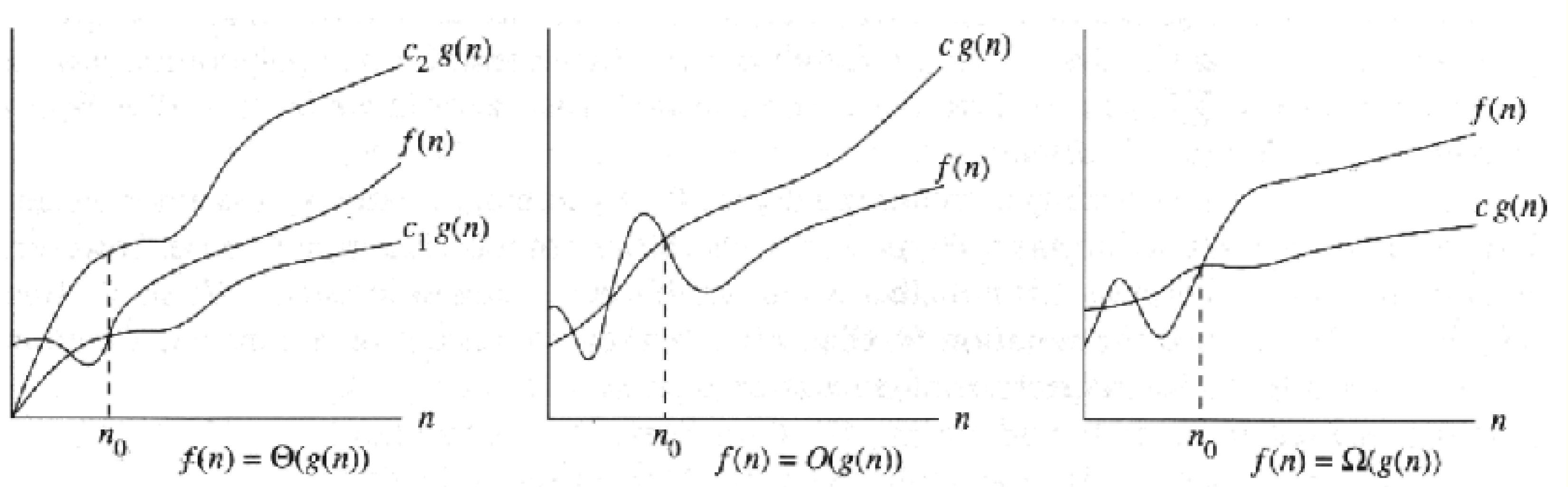


CROISSANCE DES FONCTIONS

Ordre de grandeur du temps d'exécution

- Caractérisation de l'efficacité de l'algorithme
- Comparatif des performances relatives de plusieurs algorithmes pour un même problème
  - Tri par insertion : $\Theta(n^2)$ dans le pire des cas
  - Tri par fusion : $\Theta(n \lg n)$ dans le pire des cas
- Performance asymptotique
  - Augmentation du temps d'exécution à la limite, quand la taille de l'entrée augmente indéfiniment

Notation asymptotique



Il existe des constantes positives c_1 et c_2 telles que $f(n)$ puisse être prise en sandwich entre $c_1 g(n)$ et $c_2 g(n)$, pour n assez grand

(borne asymptotiquement approchée)

Il existe une constante positive c telle que la valeur de $f(n)$ est inférieure ou égale à $g(n)$, pour n assez grand

(borne supérieure asymptotique)

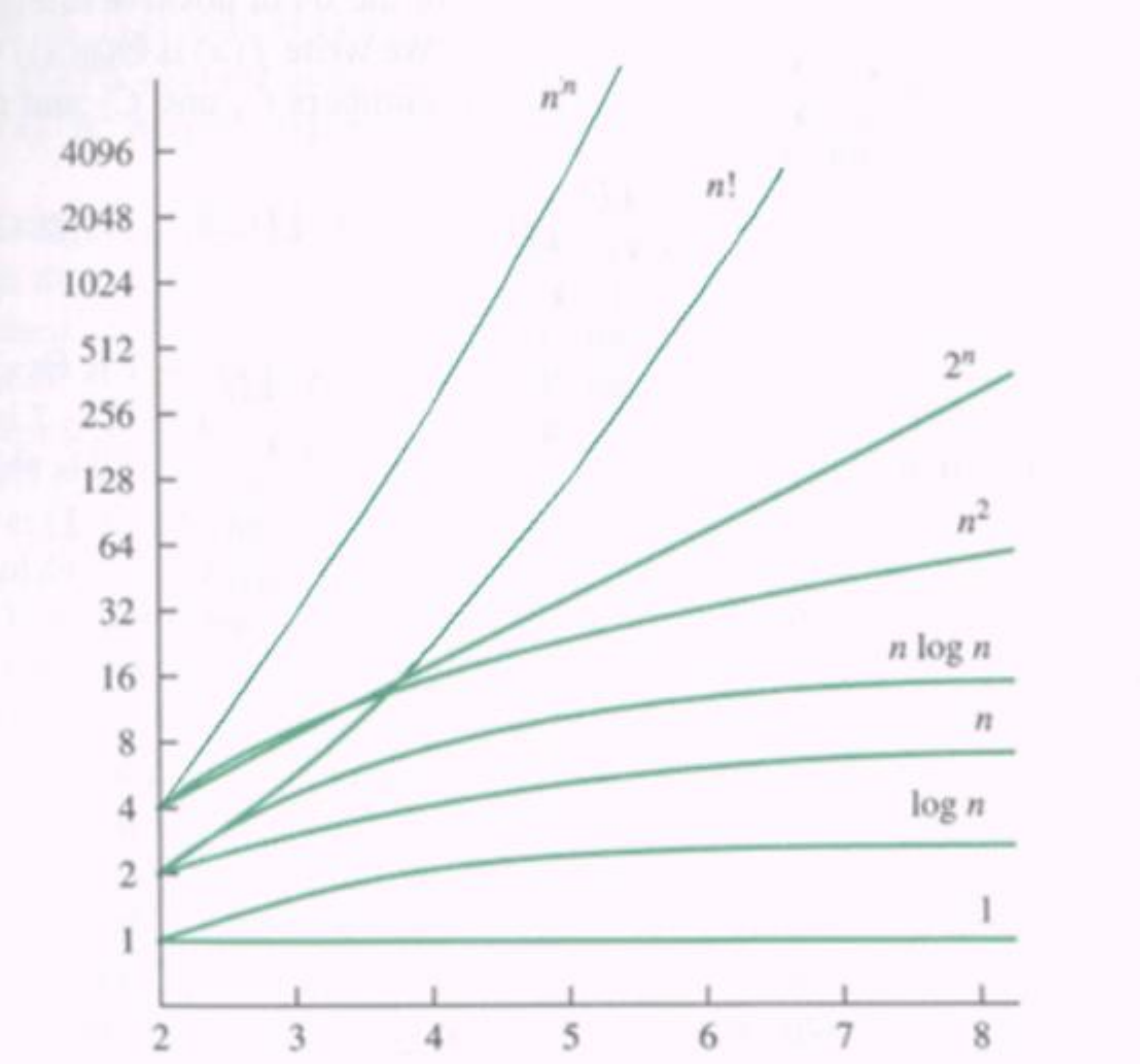
Il existe une constante positive c telle que la valeur de $f(n)$ est supérieure ou égale à $g(n)$, pour n assez grand

(minorant asymptotique)

Temps d'exécution du tri par insertion

- $\Omega(n)$
- $O(n^2)$

Ordre de grandeur de quelques fonctions parmi les plus connues



PROCHAIN COURS

GRAPHES
NOTIONS DE BASE ET REPRÉSENTATION