Devoir MINF0501

18 Novembre 2020

La calculatrice est autorisée.
La rédaction entrera dans une part importante de la notation

Exercice 1 Les questions de cet exercice sont indépendantes

1. Soit n un entier impair. Déterminer la parité de $n^2 + 1$
2. Vrai ou faux : si n est un entier impair alors $n^2 + 1$ est divisible par 4. Justifier
3. Donner une condition suffisante sur a et b pour que si $a|c$ et $b|c$ alors $ab|c$

Exercice 2

1. A l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD de 1617 et 520
2. A l'aide de la question précédente, remonter l'algorithme pour déterminer deux entiers u, v tels que $1617u + 520v = PGCD(1617; 520)$
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation, $(E) : 1617x + 520y = 1$.
   On pourra remarquer que $(73, 227)$ est solution de (E)
4. Déterminer l'ensemble des solutions positives de (E)

Exercice 3

1. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 3150. vous pourrez utiliser la liste donnée en bas de page.
2. Donner le nombre de diviseurs positifs de 3150
3. Quel est le plus petit nombre par lequel faut-il multiplier 3150 pour obtenir un carré parfait ?

Exercice 4 Soient a, b deux nombres premiers entre eux et $p \in \mathbb{P}$

1. Montrer que si p divise a et $a + b$ alors p divise b
2. En déduire une contradiction. Que peut-on affirmer pour a et $a + b$?
3. Montrer que si p divise ab et $a + b$ alors p divise a et $a + b$ ou p divise b et $a + b$
4. Utiliser la question 2 pour obtenir une conclusion sur $PGCD(ab; a + b)$

Exercice 5 Soient $a \in \mathbb{N}^*, a \geq 2$, $n \geq 2$. On pose $M_n = a^n - 1$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, (x^n - 1) = (1 + x + x^2 + ... + x^{n-1})(x - 1)$
2. En utilisant la question précédente, montrer que si $M_n \in \mathbb{P}$ alors $a = 2$.
   On pourra raisonner par l'absurde et supposer $a \geq 3$
3. Supposons que $a = 2$, $n = kl$ avec $k \geq 2$ et $l \geq 2$. Montrer qu'alors $M_n \notin \mathbb{P}$

Liste des nombres premiers inférieurs à 20 : $2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19$