v2.0

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 8 & -15 & 15 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$AX = B$

Methode 1 (Gauss)

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = a \\ 8x - 15y + 15z = b \\ 2x - 2y + 3z = c \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 8L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = a \\ y - z = -8a + b \\ 2y - z = -2a + c \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = a \\ y - z = -8a + b \\ z = 14a - 2b + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 14a - 2b + c \\ y = \begin{matrix} -8a + b \\ +14a - 2b + c \end{matrix} = 6a - b + c \\ x = \begin{matrix} a \\ +12a - 2b + 2c \\ -28a + 4b - 2c \end{matrix} = -15a + 2b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -15a + 2b \\ y = 6a - b + c \\ z = 14a - 2b + c \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -15 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & 1 \\ 14 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Méthode 2 (Magique!)

$$\left\{ \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -2 & 2 \\ 8 & -15 & 15 \\ 2 & -2 & 3 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{Id} \right) \right.$$

$$\left\{ \left(\begin{matrix} 1 & -2 & +2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{matrix} \right) \right.$$

$$\left\{ \left(\begin{matrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 0 \\ 14 & -2 & 1 \end{matrix} \right) \right.$$

$$\begin{cases} x-2y+2z=a \\ \quad y-z=-8a+b \\ \qquad z=14a-2b+c \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 14 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_3$

$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$

$$\begin{cases} x-2y = -27a+4b-2c \\ \quad y = 6a-b+c \\ \qquad z=14a-2b+c \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -27 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 14 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$

$$\begin{cases} x = -15a+2b \\ \quad y = 6a-b+c \\ \qquad z=14a-2b+c \end{cases} \qquad \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{Id} \middle| \underbrace{\begin{array}{ccc} -15 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & 1 \\ 14 & -2 & 1 \end{array}}_{A^{-1}}\right)$$

La Méthode 2 n'est qu'une réécriture de la methode 1 !
en multipliant la matrice de gauche par $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et celle de droite par $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$
on a le système de gauche!
Toutes les operations s'effectuent sur Les Lignes (addition, permutation, multiplication ou division par un scalaire non nul
on fait Apparaître Id à gauche et A^{-1} à droite

Variante (Gauss Jordan)

$$\left(\overbrace{\begin{matrix} 1 & -2 & 2 \\ 8 & -15 & 15 \\ 2 & -2 & 3 \end{matrix}}^{A} \middle| \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}^{Id}\right) \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 8L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -15 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 14 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{matrix} (L_1 \leftarrow L_1 - 0L_3) \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{matrix}$$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{Id} \middle| \underbrace{\begin{matrix} -15 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & 1 \\ 14 & -2 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}}\right)$$

Rq Dans ce système, il n'a pas été nécessaire de permuter les lignes ni de les diviser (ou multiplier) par un scalaire non nul — ce qui survient souvent en pratique