MA0407- DS Mars 2017 - - Corrigé

v1.01

Exercice 1 - Corrigé

1. Par la méthode magique à la Gauss Jordan :

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2+2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1+2L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3+2L_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1+L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2+L_3 \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Par les systèmes à la Gauss Jordan :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & a \\ -2\lambda_1 & + & 5\lambda_2 & - & 3\lambda_3 & = & b \\ 2\lambda_1 & - & 6\lambda_2 & + & 5\lambda_3 & = & c \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2+2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1 \end{array}$$

$$\sim \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & a \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 2a+b \\ & - & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & -2a+c \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1+2L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3+2L_2 \end{array}$$

$$\sim \left\{\begin{array}{rcrcl} \lambda_1 & & & - \lambda_3 & = 5a+2b \\ & & \lambda_2 & - \lambda_3 & = 2a+b \\ & & & \lambda_3 & = 2a+2b+c \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1+L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2+L_3 \\ \end{array}$$

$$\sim \left\{\begin{array}{rrrl} \lambda_1 & & & = 7a+4b+c \\ & \lambda_2 & & = 4a+3b+c \\ & & \lambda_3 & = 2a+2b+c \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 7a+4b+c \\ \lambda_2 = 4a+3b+c \\ \lambda_3 = 2a+2b+c \end{array}\right.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Par la méthode magique à la Gauss Jordan :

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -4 & 3 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1+4L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2-2L_3 \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & -9 & 18 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -9 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -4L_1-9L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow 4L_3+3L_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 0 & 9 & -4 & -9 & 2 \\ 0 & 4 & -9 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ L_3 \leftarrow -3L_3-L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 0 & 9 & -4 & -9 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & -8 & 0 \\ -12 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 12 & 0 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -4 & -9 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 9 & 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 9 & 0 & -9 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -4 & -9 & 2 \end{array}\right)$$

$$B^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ -9 & -18 & 0 \\ -4 & -9 & 2 \end{pmatrix}$$

Par Les systèmes à la Gauss Jordan :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -4\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & - & 6\lambda_3 & = & a \\ 2\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & b \\ \lambda_1 & - & 3\lambda_2 & + & 6\lambda_3 & = & c \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1+4L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2-2L_3 \\ \end{array}$$

$$\sim \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & - & 9\lambda_2 & + & 18\lambda_3 & = & a + 4c \quad L_1 \leftarrow -4L_1 - 9L_2 \\ & & 4\lambda_2 & - & 9\lambda_3 & = & b - 2c \\ \lambda_1 & - & 3\lambda_2 & + & 6\lambda_3 & = & c \quad L_3 \leftarrow 4L_3 + 3L_2 \end{array}\right.$$

$$\sim \left\{\begin{array}{rcrcl} & & 9\lambda_3 & = & -4a - 9b + 2c \\ & 4\lambda_2 & - 9\lambda_3 & = & b - 2c \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 4\lambda_1 & & - 3\lambda_3 & = & 3b - 2c \quad L_3 \leftarrow -3L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\sim \left\{\begin{array}{rrrcl} & & 9\lambda_3 & = & -4a - 9b + 2c \\ & 4\lambda_2 & & = & -4a - 8b \\ -12\lambda_1 & & & = & 4a + 4c \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rrrcl} 12\lambda_1 & & & = & -4a - 4c \\ & 4\lambda_2 & & = & -4a - 8b \\ & & 9\lambda_3 & = & -4a - 9b + 2c \end{array}\right.$$

$$\sim \left\{\begin{array}{rcl} 9\lambda_1 & = & -3a - 3c \\ 9\lambda_2 & = & -9a - 18b \\ 9\lambda_3 & = & -4a - 9b + 2c \end{array}\right.$$

$$B^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ -9 & -18 & 0 \\ -4 & -9 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Par la méthode magique à la Gauss Jordan :

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} -1 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_4 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Par les systèmes à la Gauss Jordan :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & a \\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & - & 3\lambda_4 & = & b \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & + & \lambda_4 & = & c \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & - & \lambda_3 & - & 2\lambda_4 & = & d \quad L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1 \end{array}\right.$$

$$\sim \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & a \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ & & \lambda_2 & & & - & \lambda_4 & = & 2a + b \\ & & & & \lambda_3 & & & = & -a + c \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & & & = & 2a + d \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}\right.$$

$$\sim \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -\lambda_1 & & & + & \lambda_3 & + & 2\lambda_4 & = & -a - b \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ & & \lambda_2 & & & - & \lambda_4 & = & 2a + b \\ & & & & \lambda_3 & & & = & -a + c \\ & & & & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & - b + d \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{array}\right.$$

$$\sim \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -\lambda_1 & & & & & + & 2\lambda_4 & = & - b - c \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_4 \\ & & \lambda_2 & & & - & \lambda_4 & = & 2a + b \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_4 \\ & & & & \lambda_3 & & & = & -a + c \\ & & & & & & \lambda_4 & = & a - b - c + d \end{array}\right.$$

$$\sim \begin{cases} -\lambda_1 & & & & = & -2a & + & b & + & c & - & 2d \\ & \lambda_2 & & & = & 3a & & & - & c & + & d \\ & & \lambda_3 & & = & -a & & & + & c & & \\ & & & \lambda_4 & = & a & - & b & - & c & + & d \end{cases} \sim \begin{cases} \lambda_1 & = & 2a & - & b & - & c & + & 2d \\ \lambda_2 & = & 3a & & & - & c & + & d \\ \lambda_3 & = & -a & & & + & c & & \\ \lambda_4 & = & a & - & b & - & c & + & d \end{cases}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 - Corrigé
Faisons tourner Scilab!! :

```
-->t=linspace(10,12,5)
 t  =
     10.     10.5     11.     11.5     12.

-->A=[2  3  4  5]
 A  =
     2.     3.     4.     5.

-->B=[2  3;  4  5]
 B  =
     2.     3.
     4.     5.

-->C=matrix(1:20,4,5)
 C  =
     1.     5.     9.     13.     17.
     2.     6.     10.    14.     18.
     3.     7.     11.    15.     19.
     4.     8.     12.    16.     20.

Remarque 1:20 produit les entiers de de 1 à 20
qui sont alors utilisés pour remplir une matrice de 4 lignes et 5 colonnes.
Sous scilab, les tableaux sont rangés par colonnes.
(mais une erreur dans le sens de rangement n'était pas sanctionnée)

-->D=C([4:-2:1],[1:2:5])
 D  =
     4.     12.     20.
     2.     10.     18.

Remarques [4:-2:1] produit le tableau [4 2] et [1:2:5] produit le tableau [1 3 5]
L'instruction extrait donc les lignes 4 et 2 sur les colonnes 1 3 et 5 du tableau C.
```

—— **suite** ————————>

Ex3

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & \cdots & \vdots & a_{2n} \\
0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & \cdots & \vdots & a_{3n} \\
0 & 0 & a_{43} & a_{44} & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \cdots & 0 & a_{(n-1)(n-2)} & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)(n)} \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{n(n-1)} & a_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

A est donc une matrice (n, n) "ressemblant" à une matrice triangulaire supérieure, mais avec donc des termes supplémentaires a priori non nuls juste en dessous de la diagonale principale.

Bien entendu, il serait possible d'utiliser brutalement la méthode de Gauss du cas général – Qui peut le plus, peut le moins – Mais ce n'est visiblement pas ce qui est demandé : il faut optimiser la méthode pour tirer parti de la forme de la matrice –

En fait, il est facile de remarquer qu'il suffit simplement à chaque itération de la méthode de Gauss de faire apparaître un zéro juste en dessous de la diagonale sur la colonne k en dessous du pivot, les termes situés plus bas étant déjà nuls ! (et ceci n'est pas altéré par les transformations déjà effectuées), il n'y a donc qu'une ligne à modifier à chaque étape

```
// Gauss
Pour k allant de 1 à n-1
    Aux ← A(k+1,k)/A(k,k)
    pour j allant de k+1 à n
        A(k+1,j) ← A(k+1,j) – Aux * A(k,j)
    Fin Pour
    A(k+1,k) ← 0
    b(k+1) ← b(k+1) – Aux * b(k)
Fin Pour
// Remontée triangulaire   la même que d'habitude
Pour k descendant de n à 1
    Aux ← b(k)
    Pour j allant de k+1 à n
        Aux ← Aux – A(k,j) * X(j)
    Fin Pour
    X(k) ← Aux / A(k,k)
Fin Pour
Afficher("la solution est", X)
```

On suppose bien entendu que A est prédéfini tableau (n,n)
b ______ (n)
x ______ (n)
en flottants