MA0407- DS février 2018 - *Durée 1h00*

L'usage de tout document, calculatrice, téléphone, boulier ou divination est interdit, toutes les réponses doivent être justifiées.

N'oubliez pas - d'écrire votre nom, vos prénoms, de numéroter chacune de vos copies, d'y reporter votre numéro de place et d'en indiquer le nombre total (-1pt par omission). Pour l'évaluation de la copie, il sera tenu compte de la rigueur, de la qualité et de la propreté de la rédaction.

ic-ctot. v1.01

Exercice 1 (Magique - mais sans surprise)

Déterminer les inverses des matrices suivantes par la méthode des tableaux (la méthode magique) ou par la méthode de Gauss - ce qui comme vous devez le savoir est la même chose. (Toute autre méthode est exclue).
<u>Indiquer systématiquement les transformations effectuées.</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 10 & -6 \\ -2 & 7 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(Remarque : il n'y a aucune fraction)

Exercice 2 (Sky My Lab)

Que donne à l'affichage, l'exécution des commandes successives suivantes, c'est à dire que contiennent A, B, C, etc... après ces instructions. (écrire les lignes en ligne et les colonnes en colonne)

```
>A=[1  2]
>B=[3;4]
>C=A*B    // petit calcul
>D=B*A    // petits calculs
>E=A.*B'
>F=[A'  , B]
>G=[B'  ; A]
>AA=10*matrix(1:9,3,3)
>BB=diag(AA)
>CC=diag(BB)
>EE=AA([2  3],[2  3])
>FF=AA(3:-1:1,3:-1:1)
>x=linspace(-3,3,7)
>y=x.*x
```

Exercice 3 (Algo - Quelle surprise !)

On cherche à résoudre un système linéaire à matrice carrée inversible $AX = B$ de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & 0 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & \cdots & \cdots & \vdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & a_{(n-3)(n-2)} & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \cdots & \ddots & a_{(n-2)(n-2)} & a_{(n-2)(n-1)} & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)(n)} \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-3} \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-3} \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

A est donc une matrice (n, n) "ressemblant" à une matrice triangulaire inférieure, mais avec donc des termes supplémentaires a priori non nuls juste "au dessus" de la diagonale principale. On a en fait :

$$a_{i,j} = 0 \text{ pour } j > i + 1 \quad i, j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$$

Par rapport à une matrice triangulaire inférieure, on a donc des termes supplémentaires a_{12}, a_{23}, a_{34}, ..., $a_{(n-3)(n-2)}$, $a_{(n-2)(n-1)}$ et $a_{(n-1)n}$ devant a priori être considérés comme non nuls.

Ecrire un algorithme de résolution "à la Gauss" tirant partie de la structure du système en pseudo code. C'est en fait très simple : la première étape fera en fait une "réduction de Gauss adaptée" qui transformera le système en système triangulaire <u>inférieur</u> - il faut donc visiblement commencer par la dernière équation ! Il suffira ensuite de résoudre alors le système triangulaire dans la seconde étape. (On suppose bien entendu qu'il n'y a pas de problème de résolution : on pourra effectuer notre réduction/résolution, sans devoir effectuer de permutation de lignes)

— **Bonne Chance** —