

Université de Reims  
Champagne-Ardenne  
U.F.R. de Sciences  
Exactes et Naturelles

Licence 3 INFO / PASSERELLE  
INFO0502  
2020/2021  
J.-C. Boisson

### TD 3

#### Logique des prédicats : syntaxe, interprétation et mise sous forme prénexe

#### Exercice 1 (Variables, Termes, Formules)

1) Pour les formules suivantes, identifiez les constantes, les variables, les termes, les atomes et les formules :

1.  $F = Q(a)$
2.  $F = P(x, y)$
3.  $F = Q(s(x)) \wedge P(q(s(y)), s(x))$
4.  $F = \forall y P(y, z)$
5.  $F = \exists z (P(z, a) \wedge Q(z))$
6.  $F = Q(y) \wedge (\forall x (P(x, z)))$
7.  $F = \forall y (P(x, y) \wedge \forall x Q(x))$
8.  $F = ((\exists x P(x, v) \implies \forall y \exists x P(x, y)) \wedge (\exists x \forall y P(x, y))) \implies \forall y \exists x P(x, y)$
9.  $F = (P(y) \implies \forall z P(z)) \implies ((\exists x P(x) \implies P(y)) \implies (\exists x P(x) \implies \forall z P(z)))$
10.  $F = (P(x, y) \implies (\exists x P(x, r) \vee R(f(x)))) \implies (Q(a, z) \implies R(x, z))$

2) Identifiez les occurrences libres et liées des variables.

3) Procédez à la substitution suivante :  $F[x|f(w), y|g(s(u)), z|h(y)]$

#### Exercice 2 (Interpretations)

On considère les formules suivantes :

1.  $F = \forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \implies R(x, z))$
2.  $F = \forall x \forall y (\neg R(x, y) \iff (x = y \vee R(y, x)))$
3.  $F = \forall x \neg R(x, x)$
4.  $F = \forall x \exists y R(x, y)$
5.  $F = \forall x \exists y R(y, x)$
6.  $F = \forall x \forall y ((\exists z (R(x, z) \wedge R(z, y))) \iff R(x, y))$

Pour chaque interprétation suivante, précisez la signification de chaque formule et indiquez si elle est juste ou non :

- $\mathcal{D} = \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{I}_P = R(x, y)$  signifie  $x < y$
- $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{I}_P = R(x, y)$  signifie  $x < y$
- $\mathcal{D} = \mathbb{R}^+$ ,  $\mathcal{I}_P = R(x, y)$  signifie  $x < y$
- $\mathcal{D} =$  un nombre fini de petits lapins,  $\mathcal{I}_P = R(x, y)$  signifie  $x$  est plus mignon que  $y$

**Exercice 3 (Forme prénexe)**

Mettez les formules suivantes sous forme prénexe :

1.  $\forall x((\exists y R(x, g(y, z))) \implies \forall y S(z, h(x, y, z)))$

2.  $\forall y(R(z, y) \implies \forall z S(z, y))$

3.  $\forall z(P(x, y) \iff \exists x(P(z, x) \wedge P(x, z)))$

4.  $\forall x \forall y((R(x, y) \vee \neg S(y, x)) \iff \exists z T(x, y, z))$

5.  $\exists x(P(x, y) \implies \exists y \forall z(P(y, z) \wedge P(z, z)) \implies \forall y(P(x, y) \wedge Q(x, y) \implies (Q(x, z) \wedge Q(z, z))))$