Partie 2 : algèbre linéaire (1 seul chapitre)

I) espaces vectoriels :

Feuille 11

On peut dire Rn  de :

-une addition :

Si X et Y sont 2 éléments de Rn i.e X=(x1,…xn) et Y=(y1,…yn) alors X+Y désigne le n uplet X+Y=(x1+y1…xn+yn)

Exemple :

(1,2,3)+(4,5,6)=(5,7,9)

-une multiplication par un scalaire (ou externe)

Si X est un élément de Rn i.e X=(x1,…xn) et lambda un réel.

Alors lambdaX désigne le n uplet lambdaX=(lambdax1,…lambdaxn)

Exemple dans R3:

Feuille

On a coutume de noter(R3,+,.) pour signifier qu'on a num R3 de 2 opérations (l'add + et la multi externe)

Définition :

Un espace vectoriel E sur R (ou R espace vectoriel) est un ensemble non vide muni d'une addition et d'une multiplication externe qui satisfait aux conditions suivantes :

Feuille

Terminologie :

Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés des vecteurs

OE notamment est appelé vecteur nul.

Remarque :

Il existe un grand nombre de R ev(espace vectoriel) plus ou moins "abstraits" mais on se placera systématiquement dans Rn.

Théorème :

(Rn,+,.) est un R ev i.e il verifie les 8 axiomes de la définition précédente. Son vecteur nul OE est le n-uplet OE=(0,0,…,0) et l'opposé d'un vecteur u=(x1,…xn)

Preuve : vérifier les 8axiomes à la maison

Définition :

Soit E un R ev; soit u1,…up p vecteurs de E?

On appelle combinaison linéaire (CL) des vecteurs u1,…up tout vecteur de la forme lambda1u1+…+lambdapup où lambda1,…, lambdan sont des réels .

Exemple:

Feuille

II) sous espaces vectoriel

Définition : un sous-ensemble F d'un R ev E set un sous espace vectoriel (sev) de E si

\* il contient le vecteur nul OE

\* pour tout u,v € F, pour tout lambda € R, lambda u+v € F

Exemple :

Feuille

Proposition :

Soient F1,…Fn des sev d'un meme R ev E. alors F1interF2inter….interFn est encore un sev de E.

Preuve :

Feuille

Définition:

Soient E er G sev d'un R ev E.

La somme de F et de G noté F+G est l'ensemble suivant : F+G={u+v / u€F et v€G}

C'est un sous espace vectoriel de E

Remarque :

Feuille

III) base et dimension d'un espace vectoriel

Définition:

Soient u1,u2…up p vecteur d'un R ev E. la famille (u1,..up) est dite libre ou le curant independant si pour toute CL verifiant : lambda1u1 … lambdapup=0

Alors nécessairement tous les lambdai sont nuls. Autrement dit aucun des vecteurs ne peut s'exprimer c(barre au dessus du c) CL des autres. Dans le cas contraire on dit que la famille est liée.

Remarque :

1 : si une famille (u1…up) contient le vecteur nul OE alors elle est Ou1+Ou2…+lambdaOE +…+Oup avec lambda différent de 0.

2: feuille

Définition:

Un espace vectoriel est dit de dimension finie sil admet une famille générative finie. Dans le cas contraire, on dit qu'il est de dimension infinie.

Exemple:

Feuille

Definition :  
 une famille (u1,…un) d'un R ev E qui est a la fois libre et génératrice est appelé bare de E. Dans ce cas tout vecteur x de E s'écrit de facon unique : x=lambda1u1+…+lambdanun où lambda1,….lambdan sont des réels appelés les coordonnées de x dans la bare (u1,…,un).

Exemple :

Feuille

Remarque :

Il existe plusieurs bare d'un meme espace vectoriel E

Exemple :

Feuille

Th-def :

Dans un meme R ev E toutes les bares sont des familles qui contiennent le meme nombre de vecteurs. Ce nombre est appelé dimension de E et est noté dim(E).

Exemple :

Feuille