Tarea 3

Fecha de publicación: Septiembre 11, 2020

Fecha de entrega: Domingo 20 de septiembre de 2020.

Ejercicio 1 (3 puntos).
Vimos que el algoritmo de eliminación Gaussiana vimos que se puede ver como ir pre-multiplicando a la matriz $\boldsymbol{A}$ del sistema de ecuaciones por matrices triangulares inferiores elementales de la forma:

$$\boldsymbol{L}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -l_{k+1,k} & 1 & & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -l_{n-1,k} & 0 & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -l_{n,k} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad i = k+1, k+2, ..., n,$$

donde $a_{ij}^{(k-1)}$ son los elementos de la matriz $\boldsymbol{A}^{(k-1)} = \boldsymbol{L}_{k-1} \cdots \boldsymbol{L}_1 \boldsymbol{A}$.

Note que $\boldsymbol{L}_k = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{l}_k \boldsymbol{e}_k^\top$, donde $\boldsymbol{I}$ es la matriz identidad de tamaño n, con el vector $\boldsymbol{l}_k = (0, 0, ..., 0, l_{k+1,k}, l_{k+2,k}, ..., l_{n,k})^\top$ y $\boldsymbol{e}_k$ es el k-ésimo vector canónico con un 1 en la posición k-ésima.

1. Muestre que la inversa de $\boldsymbol{L}_k$ es $\boldsymbol{L}_k^{-1} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{l}_k \boldsymbol{e}_k^\top$. Así, la inversa de una matriz triangular inferior elemental es otra matriz triangular inferior elemental.

2. Muestre que $\boldsymbol{L}_{k-1}^{-1}\boldsymbol{L}_k^{-1} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{l}_{k-1}\boldsymbol{e}_{k-1}^\top + \boldsymbol{l}_k\boldsymbol{e}_k^\top$, y a partir de esto, muestre que

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1^{-1}\boldsymbol{L}_2^{-1}\cdots\boldsymbol{L}_{n-1}^{-1} = \boldsymbol{I} + \sum_{k=1}^{n-1}\boldsymbol{l}_k\boldsymbol{e}_k^\top,$$

por lo que $\boldsymbol{L}$ es una matriz triangular inferior con $1's$ en la diagonal.

Ejercicio 2 (3.5 puntos).
Escriba un programa para calcular la solución de sistemas con matrices triangulares inferiores.

1. Escriba una función que imprima los elementos de un arreglo 1D. La función recibe el apuntador a un arreglo 1D $\boldsymbol{x}$ y su dimensión n. Si $n \leq 8$, la función debe imprimir en la consola todos los elementos de $\boldsymbol{x}$. Si no, sólo debe imprimir en la consola los primeros cuatro elementos de $\boldsymbol{x}$, la cadena " ... " y los últimos cuatro elementos del vector $\boldsymbol{x}$.

2. Programar la función `forwardSubstitution` que aplica el método de sustitución hacia adelante para resolver el sistema $\boldsymbol{Lx} = \boldsymbol{b}$, donde $\boldsymbol{L}$ es una matriz triangular inferior.
   La función debe recibir como parámetros el apuntador a la matriz $\boldsymbol{L}$, su tamaño n, el apuntador al arreglo $\boldsymbol{b}$ y una tolerancia τ para prevenir la división entre un número muy pequeño. La función debe devolver el apuntador a un arreglo $\boldsymbol{x}$ que es solución del sistema si el algoritmo termina exitósamente o `NULL` si no se pudo calcular la solución.

3. Escriba un programa que lea desde la línea de comandos los nombres de dos archivos binarios, uno que tiene la información de una matriz triangular inferior $\boldsymbol{L}$ y el otro con la información del vector de términos independientes $\boldsymbol{b}$.
   Haga que el programa lea la información de los archivos y cree la matriz $\boldsymbol{L}$ y el vector $\boldsymbol{b}$ y que imprima el tamaño de la matriz y el tamaño del vector $\boldsymbol{b}$.
   Use la función `forwardSubstitution` para resolver el sistema $\boldsymbol{Lx} = \boldsymbol{b}$, usando como tolerancia $\tau = \epsilon_m^{2/3}$.
   Si el sistema tuvo solución, use la función del primer punto para imprimir la información del vector solución. En caso contrario, imprima el mensaje de que el sistema no tiene solución única.
   Imprima el valor del error $\|\boldsymbol{Lx} - \boldsymbol{b}\|$. Si no se calculó la solución, haga que el programa imprima un mensaje que indique que la matriz es singular.
   Libere la memoria.

4. Pruebe el programa usando los datos del archivo `datos.zip`, usando las parejas de archivos:

```
matL5     vecb5
matL50    vecb50
matL500   vecb500
```

En el Zip hay tres carpetas, una para cada versión de los datos: texto, binario y para el formato npy de python. Elija uno.

Copie las salidas del programa al archivo de respuestas.

Una recomendación: Las operaciones como el producto matriz por vector o el cálculo de la norma de un vector, hay que escribirlas como funciones o usar alguna implementación, porque son operaciones que se harń frecuentemente.

Ejercicio 3 (3.5 puntos).
Escriba un programa para calcular la solución de sistemas con matrices triangulares superiores.

1. Programar la función `backwardSubstitution` que aplica el método de sustitución hacia atrás para resolver el sistema $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, donde $\boldsymbol{U}$ es una matriz triangular superior.
   La función debe recibir como parámetros el apuntador a la matriz $\boldsymbol{U}$, su tamaño n, el apuntador al arreglo $\boldsymbol{b}$ y una tolerancia τ para prevenir la división entre un número muy pequeño. La función debe devolver el apuntador a un arreglo $\boldsymbol{x}$ que es solución del sistema si el algoritmo termina exitósamente o `NULL` si no se pudo calcular la solución.

2. Análogamente al ejercicio 2, escriba un programa para resolver el sistema $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ siguiendo las mismas indicaciones y pruebe el programa usando los datos del archivo `datos.zip` con las siguiente parejas de archivos:

   ```
   matU5     vecb5
   matU50    vecb50
   matU500   vecb500
   ```

   Copie las salidas del programa en el archivo de respuestas.