Examen 2. Teoría de la computación

Prof. Jesús Rodríguez Viorato

Lunes 12 de Octubre de 2020

Contesta todos los problemas y regresa las soluciones antes de que acabe el día.

1. (4 pts) Sea $A = \{< R, S > | R, S$ expresiones regulares con $L(R) \subset L(S)\}$. Muestra que A es decidible.

2. (3 pts) Encuentra un apareo para la siguiente instancia del Problema de Correspondencia de Post.

$$\left\{ \left[\frac{ab}{abab}\right], \left[\frac{b}{a}\right], \left[\frac{aba}{b}\right], \left[\frac{aa}{a}\right] \right\}$$

3. (3 pts) Para cada uno de los siguientes casos, decide si la afirmación es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta.

   a) $n^2 = O(n)$

   b) $3^n = 2^{O(n)}$

   c) $n \cdot log(n) = O(n^2)$

1. (4 pts) Sea $A = \{< R, S > | R, S$ expresiones regulares con $L(R) \subset L(S)\}$. Muestra que A es decidible.

Sabemos, por el corolario 3.19, que algo es decidible si podemos construir una maquina de Turing que lo decida.

Por el Teorema 4.3 del libro, todos las expresiones regulares son decidibles.

Y por el Teorema 4.4 podemos definir un automata que reconozca si un automata no reconoce cadena alguna.

Entonces podemos concatenar automatas para que reconozan ambos (and), alguno (or) o ninguno de los lenguajes de los automatas concatenados.

Por lo que para R,S definimos A_R, A_S respectivamente como maquinas de Turing que reconozcan dichos lenguajes. Ademas, definimos el enumerador E_R que enumera al lenguaje R (el cual existe porque R es turing-reconocible (Teo 3.21)).

Sea M la maquina de Turing que:

1. Genera a R con E_R.
2. Para cada elemento r de R
3. Lo pasamos a A_S.
4. Si A_S rechaza a r
5. Rechazamos la entrada de M
6. Si recorrimos todos los r, entonces acepatamos la enrada de M.

4 4 2 1
aa aa b ab
a a a abab

2. (3 pts) Encuentra un apareo para la siguiente instancia del Problema de Correspondencia de Post.

$\{A \mid B\}$ $\left\{\left[\frac{ab}{abab}\right], \left[\frac{b}{a}\right], \left[\frac{aba}{b}\right], \left[\frac{aa}{a}\right]\right\}$

Para que el apareo cumpla con la correspondencia, debemos encontrar una sucesión $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k$ tq

$$A_{\ell_1}, A_{\ell_2}, \ldots, A_{\ell_k} = B_{\ell_1}, B_{\ell_2}, \ldots, B_{\ell_k}$$

Sabemos que el primer elemento debe ser 1 o 4 (porque los demás no empiezan igual y rompen la correspondencia). Lo demás a prueba y error podemos probar

$$\ell = [4, 4, 2, 1]$$

Que genera

$A_4 \circ A_4 \circ A_2 \circ A_1 = aa\,aa\,b\,ab = aaaabab = a\,a\,a\,abab = B_4 \circ B_4 \circ B_2 \circ B_1$

por lo que ℓ cumple la correspondencia.

3. (3 pts) Para cada uno de los siguientes casos, decide si la afirmación es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta.

a) $n^2 = O(n)$

b) $3^n = 2^{O(n)}$

c) $n \cdot log(n) = O(n^2)$

Sabemos que $g \in O(f)$ si existen $c, n_0 \in \mathbb{Z}$ tq para todo $n \geq n_0$ se cumple

$$g(n) \leq c f(n)$$

3a) $n^2 = O(n)$ implica que existe una constante $c \in \mathbb{Z}$ tq

$$n^2 \leq cn \quad / \div n$$
$$n \leq c$$

Pero podemos ver que para cualquier constante c se da que con $n > c$

$$n^2 > cn$$

por lo que $n^2 \notin O(n)$. Falso

3.b) $3^n = 2^{O(n)} \Rightarrow \log_2 3^n = O(n)$

Esto implica que $\exists c$ tq

$$\log_2 3^n \leq cn$$
$$n \log_2 3 \leq cn \quad / \div n \ (3)$$
$$\log_2 3 \leq c$$

Tomamos $c = \log_2 3 \approx 1.6$ para buscar a n se tiene que se cumple para $n_0 = 0$

Cierto

3c) $n \log n = O(n^2)$

De esto se tiene que existe una constante c tq

$$n \log n \leq c n^2 \quad / \div n$$
$$\log n \leq cn$$

lo que se cumple para todo $c \geq 1$, con un $n \geq \frac{\log n}{n}$

Cierto