Tarea 8

Fecha de publicación: Octubre 23, 2020

Fecha de entrega: Domingo 1 de noviembre de 2020.

Ejercicio 1. (10 puntos) Programar y probar el método de descomposición en valores singulares. Aunque el algoritmo permite factorizar una matriz rectangular, el programa se va a probar con matrices cuadradas para revisar su número de condición y el uso de la factorización para resolver sistemas de ecuaciones.

1. Escriba una función que implemente el Algoritmo 1 para obtener las matrices $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ y el arreglo $\boldsymbol{s}$ de la descomposición en valores singulares de una matriz $\boldsymbol{A}$.

2. Escriba una función que calcule una aproximación de la solución del sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ usando la descomposición en valores singulares de la siguiente manera. La función recibe las matrices $\boldsymbol{U}$ y $\boldsymbol{V}$, el arreglo $\boldsymbol{s}$ con los valores singulares, su tamaño n y un índice k. La función debe devolver el vector

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\boldsymbol{u}_i^\top \boldsymbol{b}}{s_i} \boldsymbol{v}_i,$$

   siendo $\boldsymbol{u}_i$ la i-ésima columna de la matriz $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{v}_i$ la i-ésima columna de la matriz $\boldsymbol{V}$ y s_i el i-ésimo valor singular.

3. Escriba un programa que reciba desde la línea de comandos el nombre de un archivo que contiene una matriz.
   Lea el archivo para crear la matriz $\boldsymbol{A}$ y use la función del inciso 1 para calcular su descomposición en valores singulares tomando $\tau = \sqrt{\epsilon_m}$.
   Imprima la siguiente información:

   (a) Las dimensiones m y n de la matriz.

   (b) El valor del error de la ortogonalidad de $\boldsymbol{U}$, $\|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{U}^\top \boldsymbol{U}\|$.

   (c) El valor del error de la ortogonalidad de $\boldsymbol{V}$, $\|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{V}^\top \boldsymbol{V}\|$.

   (d) Cree la matriz $\boldsymbol{S}$ que tiene en su diagonal los valores singulares $\boldsymbol{s}$ e imprima el valor del error de la factorización $\|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^\top\|$.

(e) El número de condición de la matriz $\kappa_2 = s_1/s_n$.

Puede eligir la norma matricial para calcular los errores.

4. Genere el vector $\boldsymbol{x}$ que tiene sus entradas iguales a 1 y calcule el vector $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

   Use la función del inciso 2 para calcular la solución $\boldsymbol{x}_1$ del sistema de ecuaciones usando $k = n$. Imprima las primeras y últimas entradas del vector $\boldsymbol{x}_1$ y reporte el error $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1\|$ y $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{b}\|$.

   Use la función del inciso 2 para calcular el vector $\boldsymbol{x}_2$ usando el índice k tal que $s_k > \epsilon_m^{2/3}$ pero $s_{k+1} \leq \epsilon_m^{2/3}$. Imprima las primeras y últimas entradas del vector $\boldsymbol{x}_2$ y reporte el error $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_2\|$ y $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{b}\|$.

5. Probar el programa con los archivos que están incluidos en `datosTarea08.zip`, en donde aparecen dos de las matrices triangulares superiores de la tarea 3.

   Agregue algún comentario en el reporte sobre la conveniencia o no de usar la solución $\boldsymbol{x}_2$ cuando las matrices están mál condicionadas.

Algoritmo 1: Descomposición en valores singulares.

Data: La matriz $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1 \quad ... \quad \boldsymbol{a}_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, el número de filas m, el número columnas n, con $m \geq n$, una tolerancia $\tau > 0$ y un número máximo de iteraciones $N_{\max}$.

Result: Las matrices $\boldsymbol{U}_1 = [\boldsymbol{u}_1 \quad ... \quad \boldsymbol{u}_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{v}_1 \quad ... \quad \boldsymbol{v}_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de la descomposición y un arreglo $\boldsymbol{s}$ con los valores singulares $s_1 \geq s_2 \geq ... \geq s_n \geq 0$

Inicializar $\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{v}_1 \quad ... \quad \boldsymbol{v}_n] = \boldsymbol{I}$ (la matriz identidad), $k = 0$, $F = 1$;
while $k < N_{\max}$ y $F > 0$ **do**
  $k = k + 1$;
  $F = 0$;
  for $i = 1, ..., n-1$ **do**
    for $j = i+1, ..., n$ **do**
      $\alpha = \boldsymbol{a}_i^\top \boldsymbol{a}_i$;
      $\gamma = \boldsymbol{a}_j^\top \boldsymbol{a}_j$;
      $\beta = \boldsymbol{a}_i^\top \boldsymbol{a}_j$;
      if $\alpha\gamma > \epsilon_m$ y $|\beta| > \tau\alpha\gamma$ **then**
        $F = 1$;
        if $\beta \neq 0$ **then**
          $\eta = (\gamma - \alpha)/(2\beta)$;
          $t = 1/(|\eta| + \sqrt{1 + \eta^2})$;
          if $\eta < 0$ **then**
            $t = -t$;
          end
          $c = 1/\sqrt{1 + t^2}$;
          $s = tc$;
        else
          $c = 1, \; s = 0, \; t = 0$;
        end
        Hacer las copias: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_j$;
        Actualizar las columnas de $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{a}_i = c\boldsymbol{a} - s\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{a}_j = s\boldsymbol{a} + c\boldsymbol{b}$;
        Hacer las copias: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{v}_j$;
        Actualizar la columnas de $\boldsymbol{V}$: $\boldsymbol{v}_i = c\boldsymbol{a} - s\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{v}_j = s\boldsymbol{a} + c\boldsymbol{b}$;
      end
    end
  end
end
for $j = 1, ..., n$ **do**
  $s_j = \|\boldsymbol{a}_j\|_2$;
end
Ordenar los valores singulares de modo que $s_1 \geq s_2 \geq ... \geq s_n \geq 0$, y aplicar este mismo reordenamiento a las columnas de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{V}$;
for $j = 1, ..., n$ **do**
  Actualizar las columnas de $\boldsymbol{U}$: $\boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{a}_j / s_j$;
end