Tarea 9

Fecha de publicación: Octubre 29, 2020

Fecha de entrega: Domingo 8 de noviembre de 2020.

Ejercicio 1. (10 puntos)

Escriba un programa que interpole un conjunto de puntos $\{(x_0, f_0), ..., (x_n, f_n)\}$ mediante un spline natural cúbico.

1. Escriba una función que reciba como argumentos:

   - Un apuntador a un arreglo 2D de tamaño $(n+1) \times 2$ en el que cada fila tiene las coordenadas (x_i, f_i) de un punto en el plano.
   - el entero n,

   La función debe resolver el sistema triadiagonal que permite calcular los valores $M_0, M_1, ..., M_n$ de las segundas derivadas del spline en los nodos $x_0 < x_1 < ... < x_n$, y para que el spline sea "natural" se debe tener que $M_0 = M_n = 0$.

   La función debe devolver un arreglo con los valores $M_0, M_1, ..., M_n$.

2. Escriba una función para evaluar el spline cúbico en un punto x. Debe recibir como parámetros el apuntador a la matriz que tiene los $n+1$ puntos (x_i, f_i), el arreglo que tiene los valores de los coeficientes $M_0, M_1, ..., M_n$ del spline natural, el entero n y un valor $x \in [x_0, x_n]$. La función debe determinar el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ que contiene el punto x y que devuelve el valor del polinomio cúbico

   $$S_{i-1}(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + C_{i-1}(x - x_{i-1}) + \hat{C}_{i-1}.$$

   donde

   $$h_i = x_i - x_{i-1}, \qquad \hat{C}_{i-1} = f_{i-1} - M_{i-1}\frac{h_i^2}{6}, \qquad C_{i-1} = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i-1}).$$

3. Escriba el programa que recibe desde la línea de comandos un entero n, y los valores a y b; que corresponden a los extremos del intervalo $[a, b]$ y n es el número de divisiones que se harán de ese intervalo.

   El programa debe generar una partición del intervalo $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = n$, y evaluar la función $f(x) = x + (1 + x)\sin(x^2) + 2\cos(6x)$ en esos puntos. Cree una matriz de tamaño $(n + 1) \times 2$ que tenga en cada fila los puntos (x_i, f_i).

   Use las funciones anteriores para obtener los coeficientes del spline natural $s(x)$ que interpola al conjunto de puntos.

   Defina $m = 100$ y genere una partición uniforme del intervalo $[a, b]$ con $m+1$ puntos: $a = z_0 < z_1 < ... < z_m = b$. Evalue el spline en los puntos $z_0, z_1, ..., z_m$. Genere un archivo de texto que tenga tres columnas, de modo que cada fila del archivo tenga los siguientes datos:

$$z_i \qquad f(z_i) \qquad s(z_i)$$

4. Pruebe el programa con $a = -3$, $b = 3$, $n = 10$ y $n = 30$. Usando los archivos de salida, genere las gráficas que muestre la comporación de la gráfica de $f(x)$ y la del spline natural cúbico $s(x)$.