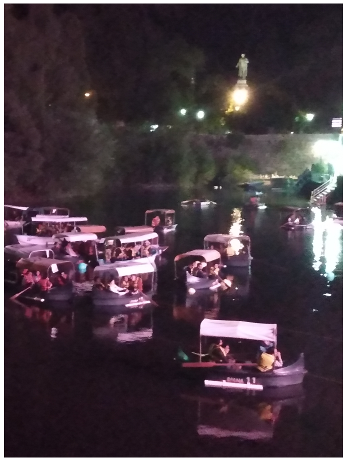
Resolver ecuaciones de recurrencias - 2

Johan Van Horebeek


Ecuaciones lineales de recurrencias (diferencias) homogeneas

Dada

$$a_{n+k} + b_1 a_{n+k-1} + \cdots + b_k a_n = 0 \tag{1}$$

Buscamos k soluciones independientes $\Rightarrow$ buscar raices de : $r^k + b_1 r^{k-1} + \cdots + b_k = 0$

Caso raices complejos: si r es solución, también $\bar{r}$ (¿por qué?)

Escribe $r = |r|(cos(\theta) + isin(\theta))$

Trabaja con soluciones: $|r|^n cos(n\theta)$ y $|r|^n sin(n\theta)$

Caso raices múltiples: si r es solución con multiplicidad m

Trabaja con soluciones: $r^n, nr^n, n^2r^n, \cdots, n^{m-1}r^n$

Ecuaciones lineales de recurrencias (diferencias) no homogeneas

$$a_{n+k} + b_1 a_{n+k-1} + \cdots + b_k a_n = f_n \tag{2}$$

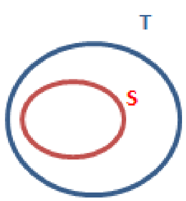
Propiedad

Cualquier solución de (2) es la solución de la homogenea asociada y una solución particular.

No es facil construir una solución particular

$\Rightarrow$ Método del amnihilador

Idea: sea S el espacio de soluciones de (2)



Buscamos T espacio de soluciones de alguna ecuación homogenea y que contiene S

Introducir operadores algebraicos para describir ecuaciones de recurrencias

Introducir operadores algebraicos para describir ecuaciones de recurrencias

Define operador $\mathcal{T}$:

$\mathcal{T}(a_n) = a_{n+1}$

$\mathcal{T}^l(a_n) = a_{n+l},\ l \in \mathbb{N}$

$\mathcal{T}^0(a_n) = a_n$

Construir polinomios en $\mathcal{T}$:

$$a_{n+k} + b_1 a_{n+k-1} + \cdots + b_k a_n = f_n \tag{3}$$

Equivalente a

$$\mathcal{D}(a_n) = f_n$$

con $\mathcal{D} = \mathcal{T}^k + b_1\mathcal{T}^{k-1} + \cdots + b_k\mathcal{T}^0$

Introducir operadores algebraicos para describir ecuaciones de recurrencias

Define operador $\mathcal{T}$:

$\mathcal{T}(a_n) = a_{n+1}$

$\mathcal{T}^l(a_n) = a_{n+l},\ l \in \mathbb{N}$

$\mathcal{T}^0(a_n) = a_n$

Construir polinomios en $\mathcal{T}$:

$$a_{n+k} + b_1 a_{n+k-1} + \cdots + b_k a_n = f_n \tag{4}$$

Equivalente a

$$\mathcal{D}(a_n) = f_n$$

con $\mathcal{D} = \mathcal{T}^k + b_1\mathcal{T}^{k-1} + \cdots + b_k\mathcal{T}^0$

Busca $\mathcal{D}_0$ tal que $\mathcal{D}_0(f_n) = 0 \Rightarrow \mathcal{D}_0\mathcal{D}(a_n) = 0$ y ... eso ya sabemos resolver :-)

Una vez la forma general de las soluciones en T, la substituimos en la ecuación original

Ejemplos

$$x_{n+1} = x_n + 2n$$

Ejemplos

$$x_{n+1} = x_n + 2n$$

$$(\mathcal{T} - \mathcal{T}^0)(x_n) = 2n$$

Buscamos ecuación que tiene como solución $a_n = 2n$

$\boxed{\textbf{Ejemplos}}$

$$x_{n+1} = x_n + 2n$$

$$(\mathcal{T} - \mathcal{T}^0)(x_n) = 2n \tag{5}$$

Buscamos ecuación que tiene como solución $a_n = 2n$

$$(\mathcal{T} - \mathcal{T}^0)^2(2n) = 0$$

Entonces $\mathcal{D}_0\mathcal{D}(x_n) = (\mathcal{T} - \mathcal{T}^0)^3 = 0$

Solución: $x_n = c_1 + c_2 n + c_3 n^2$.

Ejemplos

$$x_{n+1} = x_n + 2n$$

$$(\mathcal{T} - \mathcal{T}^0)(x_n) = 2n \tag{6}$$

Buscamos ecuación que tiene como solución $a_n = 2n$

$$(\mathcal{T} - \mathcal{T}^0)^2(2n) = 0$$

Entonces $\mathcal{D}_0\mathcal{D}(x_n) = (\mathcal{T} - \mathcal{T}^0)^3 = 0$

Solución: $x_n = c_1 + c_2 n + c_3 n^2$.

Debe cumplir (6):

$$(\mathcal{T} - \mathcal{T}^0)(c_1 + c_2 n + c_3 n^2) = 2n$$

Define restricciones sobre coeficientes.

¿ Qué sigue?

¿ Qué sigue?

- Muchas veces hay que hacer algun truco antes:

$$x_{n+1} = 3x_n^2/x_{n-1}$$

¿ Qué sigue?

- Muchas veces hay que hacer algun truco antes:

$$x_{n+1} = 3x_n^2/x_{n-1}$$

Reescribir como: $x_{n+1}/x_n = 3x_n/x_{n-1}$

¿ Qué sigue?

- Muchas veces hay que hacer algun truco antes:

$$x_{n+1} = 3x_n^2/x_{n-1}$$

Reescribir como: $x_{n+1}/x_n = 3x_n/x_{n-1}$

- Usar funciones generatrices

$$a_n + (n+1)a_{n+1} = 7$$

Define $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow A(x) + A'(x) = \frac{7}{1-x}$