

# Curso de Métodos Numéricos

DEMAT, Universidad de Guanajuato

## Clase 4: Solución de ecuaciones no lineales (Parte 1)

- Librería GSL
- Método de bisección
- Métodos de punto fijo
- Método de Newton-Raphson

---

**MAT-251**

Dr. Joaquín Peña Acevedo  
CIMAT A.C.

**e-mail:** [joaquin@ciimat.mx](mailto:joaquin@ciimat.mx)

# Librería GSL (I)

La librería GSL comprende una amplia gama de métodos numéricos robustos.

- Está escrita en C.
- En la documentación se puede ver la cantidad y variedad de funciones que tiene.
- Hay que consultar la página del curso para las instrucciones de instalación, en el apartado "Extra".
- Para poder usar una función, hay que ver en que archivo .h se encuentra declarada e incluirlo en el código del programa.

Por ejemplo, para usar las funciones matemáticas básicas y algunas constantes, hay que incluir:

```
#include <gsl/gsl_math.h>
```

Algunas constantes que están definidas en ese archivo son

M_E	$e$
M_PI	$\pi$
M_PI_2	$\pi/2$
M_SQRTPI	$\sqrt{\pi}$

Revisar los ejemplos

- `representacionIEEE.c` para ver la representación de punto flotante de un número.
- `serie.c` para modificar la forma en que se hace el redondeo (funciona en linux)
- `pruebaGsl.c` muestra que las funciones de la librería son robustas y eficientes.

En linux, para compilar desde la línea de comandos:

```
gcc -o pruebaGsl pruebaGsl.c -lgsl -lgslcblas -lm
```

En Code::Blocks, ver las instrucciones en la página del curso.

Unidad 2:

---

## Solución de ecuaciones no lineales

# Introducción (I)

Tenemos una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $D \subset \mathbb{R}$ , y queremos determinar un valor  $x^*$  tal que

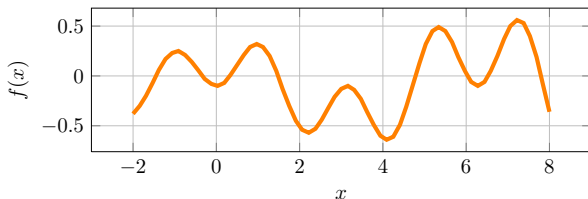
$$\underline{f(x^*) = 0}.$$

Tal valor se dice que es un **raíz o un cero** de la función  $f$ . Entonces, dada la ecuación

$$f(x) = 0,$$

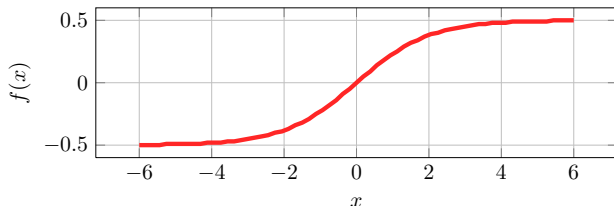
pueden ocurrir los siguientes casos:

Múltiples raíces

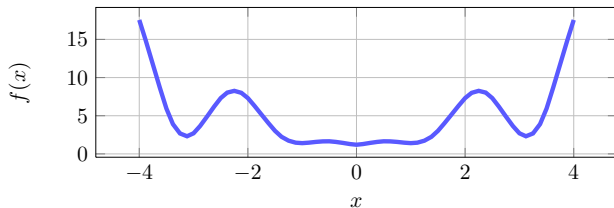


## Introducción (II)

Una raíz única



Sin raíces



- En general, no hay fórmulas cerradas para calcular todas las raíces de una ecuación no lineal, por lo que hay que recurrir a algoritmos numéricos iterativos.

## Introducción (III)

- Un caso particular son las ecuaciones polinomiales,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i x^i = 0, \quad x, a_i \in \mathbb{R},$$

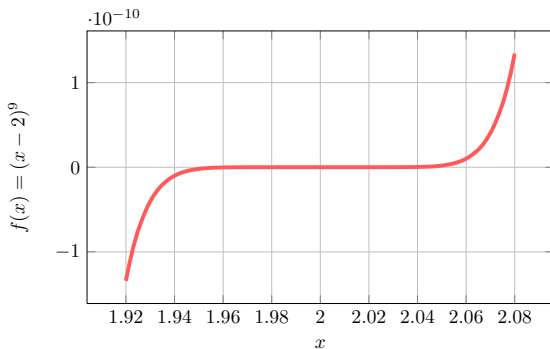
tiene a lo más  $n$  raíces reales.

- Un problema que se tiene es la evaluación de las funciones usando aritmética de punto flotante.
- Tomando en cuenta la propagación de errores por la representación de los números en la computadora, es conveniente cambiar el problema y buscar un punto  $\bar{x}$  tal que

$$|f(\bar{x})| < \text{tolerancia}$$

**Ejemplo. 1** Sea  $f(x) = (x - 2)^9$ . Evaluando esta función se obtiene la siguiente gráfica.

## Introducción (IV)

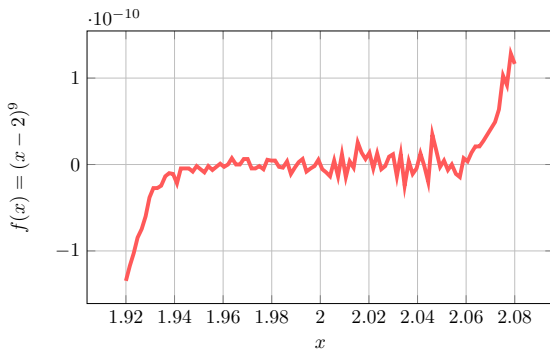


Al generar la gráfica evaluando la expresión al desarrollar el binomio:

$$\begin{aligned} f(x) = & x^9 - 18x^8 + 144x^7 - 672x^6 + 2016x^5 - 4032x^4 \\ & + 5376x^3 - 4608x^2 + 2304x - 512 \end{aligned}$$



# Introducción (V)



# Esquema general de los métodos iterativos para encontrar raíces

La función  $f(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$  es conocida. Los métodos iterativos trabajan de la siguiente forma:

- 1 Se da un valor inicial  $x_0 \in D$ .
- 2 El algoritmo itera generando una sucesión de valores  $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$
- 3 Si el algoritmo tiene éxito, se debe tener que

$$\underline{x_k \longrightarrow x^* \quad \text{con} \quad f(x^*) = 0.}$$

- 4 En la práctica, sólo se aplica un cierto número de iteraciones, de modo que en la iteración final  $n$  sólo se tiene

$$\underline{f(x_n) \approx 0.}$$

- 5 Si se quiere obtener una raíz diferente, hay que dar otro punto inicial.

# Esquema general de los métodos iterativos para encontrar raíces

- En general, los algoritmos sólo obtienen una raíz a la vez. Hay que aplicarlos con diferentes condiciones iniciales para recuperar diferentes raíces.
- Dada una ecuación no lineal, no sabemos cuantas raíces tiene en total.
- Por tanto, no sabemos cuantas veces hay que aplicar el algoritmo para recuperar todas las raíces.

# Condiciones de paro del método iterativo

Las condiciones que se utilizan para parar al algoritmo iterativo pueden una combinación de las siguientes restricciones:

$$|x_n - x_{n-1}| < \delta_x$$

$$|x_n - x_{n-1}| < \delta_r(\epsilon + |x_n|)$$

$$|f(x_n)| < \delta_f$$

$$n < N_{\max}$$

donde  $\delta_x, \delta_r, \delta_f > 0$  son tolerancias dadas y  $N_{\max}$  es el número máximo de iteraciones.

Estos valores dependen de la precisión en la computadora y del tipo de variables que se usan en el programa que calcula la solución.

# Propiedades deseadas en los métodos iterativos

- Eficiente – que no requiera demasiadas evaluaciones de la función
- Robusto – que generalmente obtenga un resultado sin importar del punto inicial.
- Requerimientos mínimos – que se necesite pocos datos adicionales, como la derivada de la función.
- Mínimos supuestos sobre  $f$  – para que el algoritmo pueda ser aplicada a una gran variedad de funciones.
- Generalizable – para poder aplicarlo a ecuaciones con más variables.

**Nota:** Ningún algoritmo satisface todas estas condiciones.

# Método de bisección (I)

Supongamos que tenemos un intervalo  $[a, b]$  en el que se cumple que

$$\underline{f(a)f(b) < 0}.$$

Si  $f$  es continua, debe haber un cero de  $f$  en  $[a, b]$ .

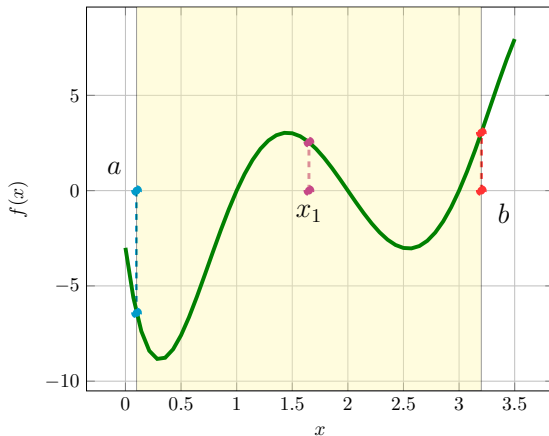
Calculamos el punto medio del intervalo:

$$c = \frac{1}{2}(a + b)$$

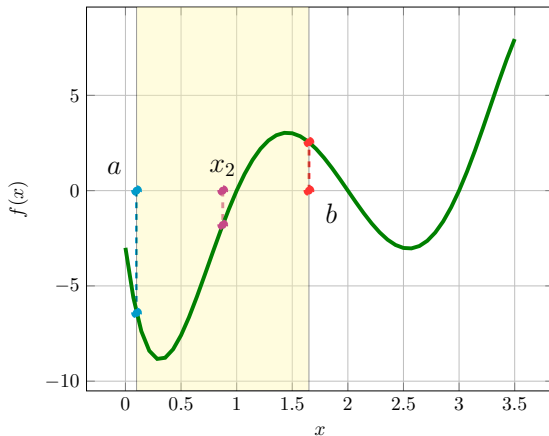
Entonces tenemos los siguiente casos:

- Si  $|f(c)| < \tau$ , terminamos.
- Si  $f(c)f(a) < 0$ , entonces debe haber un cero de  $f$  en  $[a, c]$ .  
Reemplazamos el intervalo  $[a, b]$  por  $[a, c]$  y repetimos el proceso.
- Si  $f(c)f(b) < 0$ , entonces debe haber un cero de  $f$  en  $[c, b]$ .  
Reemplazamos el intervalo  $[a, b]$  por  $[c, b]$  y repetimos el proceso.

## Ejemplo 2. Iteración 1

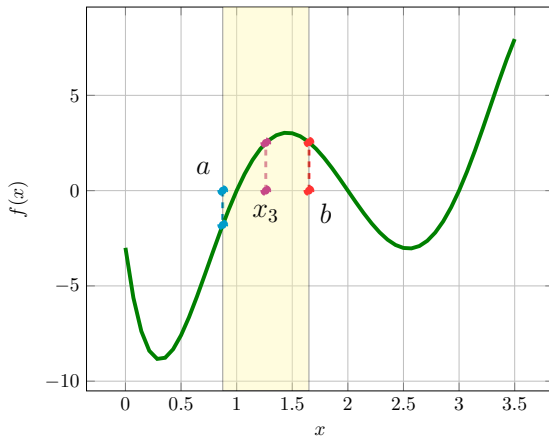


## Ejemplo 2. Iteración 2

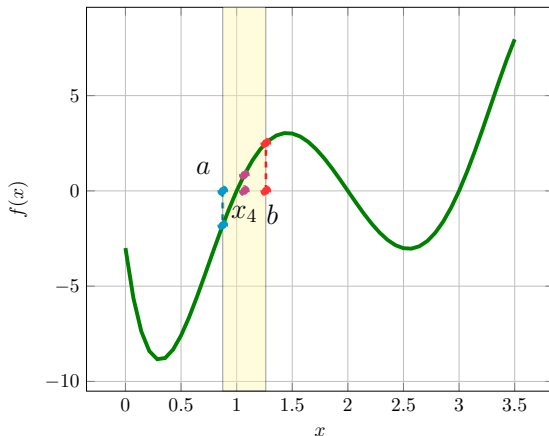




## Ejemplo 2. Iteración 3



## Ejemplo 2. Iteración 4



## Ejemplo del método de bisección (I)

**Ejemplo 3.** Sea

$$f(x) = x^9 - 18x^8 + 144x^7 - 672x^6 + 2016x^5 - 4032x^4 + 5376x^3 - 4608x^2 + 2304x - 512$$

Tomando  $a = -2$ ,  $b = 8$  y una tolerancia  $\tau = 10^{-14}$  se obtiene lo siguiente:

k	$x_k$	$f(x_k)$
1	3.000000	1.0000
2	0.500000	-38.4430
3	1.750000	$-3.8147 \times 10^{-6}$
4	2.375000	$1.4665 \times 10^{-4}$
5	2.062500	$1.4552 \times 10^{-11}$
6	1.906250	$-5.6025 \times 10^{-10}$
7	1.984375	0.0000

# Métodos basados en la teoría de punto fijo (I)

El problema

$$f(x) = 0$$

puede ser escrito como

$$x = g(x).$$

En esta formulación, buscamos un *punto fijo*, es decir, un punto  $x^*$  tal que

$$x^* = g(x^*)$$

de modo que también se debería cumplir que

$$f(x^*) = 0.$$

De esta forma la función  $g(x)$  no es arbitraria, y generalmente se define en términos de la función  $f(x)$ .

**Ejemplo 4.** Algunas opciones para la función  $g$  son las siguientes:

- $g(x) = x - f(x)$ .
- $g(x) = x + 2f(x)$ .
- $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$  si  $f'(x) \neq 0$ .



### Algoritmo iterativo de punto fijo

Dada una función de una variable  $f(x)$  y una función  $g(x)$  tal que si  $f(x) = 0$  si y sólo si  $x = g(x)$ , un punto inicial  $x_0$ , una tolerancia  $\tau$ , un número máximo de iteraciones  $N$  y  $k = 0$ . Hacer

1. Terminar si  $|x_k - g(x_k)| < \tau$  o  $k > N$
2. Si no, calcular  $x_{k+1} = g(x_k)$ .
3. Hacer  $k \leftarrow k + 1$  y volver al paso 1.

## Métodos basados en la teoría de punto fijo (III)

Este proceso genera una sucesión  $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$  mediante

$$\underline{x_{k+1} = g(x_k)}, \quad \underline{k = 0, 1, 2, \dots}$$

iniciando en un punto  $x_0$ . Si tal sucesión converge, debe hacerlo a un punto fijo de la ecuación.

Las propiedades de la sucesión dependen de la función  $g$ . Lo que queremos ver es

- ¿Bajo que condiciones converge la sucesión  $\{x_k\}$  a un punto fijo  $x^*$ ?
- Si converge, ¿el punto  $x^*$  es único?
- ¿Qué tan rápido converge?
- Si no converge, ¿esto significa que no existe una raíz del problema?



## Teorema de punto fijo

Si  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua y  $a \leq g(x) \leq b$  para todo  $x \in [a, b]$ , entonces hay un punto fijo  $x^* \in [a, b]$ .

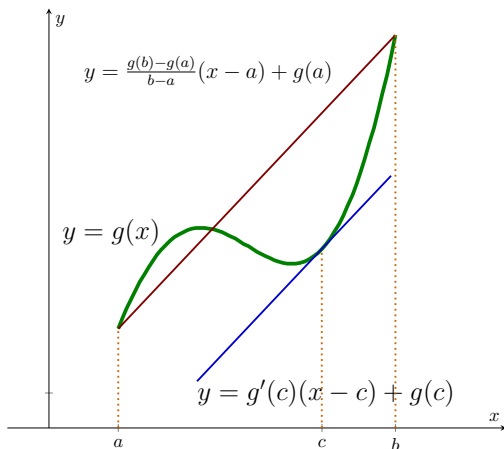
Además, si la derivada de  $g$  existe en el intervalo  $[a, b]$  y hay una constante  $0 < \rho < 1$  tal que

$$|g'(x)| \leq \rho \quad \forall x \in (a, b),$$

entonces el punto fijo es único en este intervalo.

## Teorema de punto fijo (II)

El teorema establece una condición suficiente. Para demostrarlo, hay que aplicar el teorema del valor intermedio y el teorema del valor medio.



El teorema del valor medio garantiza la existencia de un punto  $c$  en el que la derivada es igual a la pendiente de la secante que une a  $(a, g(a))$  y  $(b, g(b))$ :

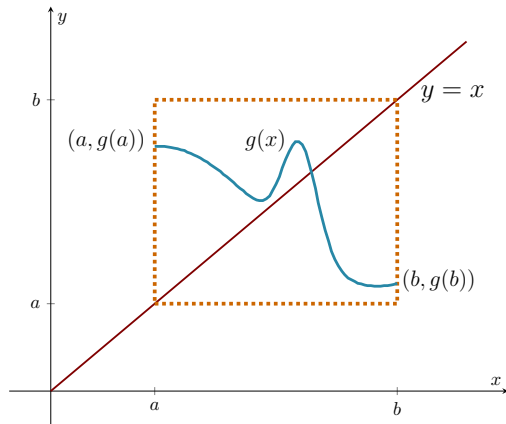
$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

o

$$g(b) - g(a) = g'(c) (b - a)$$



## Teorema de punto fijo (III)



Si  $g(a) = a$  o  $g(b) = b$ , el punto fijo existe.

Si  $g(a) > a$  y  $g(b) < b$ , definimos

$$h(x) = g(x) - x.$$

El teorema del valor intermedio garantiza la existencia del punto fijo:

Puesto que  $h$  es continua  $h(a) > 0$  y  $h(b) < 0$ , existe  $x^* \in (a, b)$  tal que

$$h(x^*) = 0.$$

## Teorema de punto fijo (IV)

Para la convergencia de la sucesión  $\{x_k\}$  a  $x^*$ , hay que notar que

$$|x_{k+1} - x^*| = |g(x_k) - g(x^*)| = |g'(\xi_k)(x_k - x^*)| \leq \rho |x_k - x^*|$$

Así,

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \rho |x_k - x^*| \leq \rho^2 |x_{k-1} - x^*| \leq \dots \leq \rho^{k+1} |x_0 - x^*|$$

Como  $\rho^k \rightarrow 0$ , entonces

$$|x_k - x^*| \rightarrow 0 \quad \text{i.e.} \quad x_k \rightarrow x^*.$$

## Ejemplo (I)

Considere la función  $f(x) = 2xe^x - 1$ .

Si definimos  $g_1(x) = x - f(x)$ , al aplicar el algoritmo de punto fijo con una tolerancia  $\tau = \sqrt{\epsilon_m}$  se obtiene:

$k$	$x_k$	$g_1(x_k)$	$ x_k - g_1(x_k) $
1	0.5000	-0.1487	0.65
2	-0.1487	1.1076	1.26
3	1.1076	-4.5982	5.71
4	-4.5982	-3.5056	1.09
5	-3.5056	-2.2951	1.21
6	-2.2951	-0.8326	1.46
7	-0.8326	0.8916	1.72
8	0.8916	-2.4580	3.35
9	-2.4580	-1.0372	1.42
10	-1.0372	0.6981	1.74
11	0.6981	-1.1080	1.81
12	-1.1080	0.6237	1.73
13	0.6237	-0.7040	1.33
14	-0.7040	0.9924	1.70
15	0.9924	-3.3623	4.35
16	-3.3623	-2.1292	1.23
17	-2.1292	-0.6228	1.51
18	-0.6228	1.0454	1.67
19	1.0454	-3.9020	4.95
20	-3.9020	-2.7444	1.16

## Ejemplo (II)

En cambio, si se define  $g_2(x) = x - \frac{1}{2}e^{-x}f(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$ .

$k$	$x_k$	$g_2(x_k)$	$ x_k - g_1(x_k) $
1	0.50000000	0.30326533	1.97e-01
2	0.30326533	0.36920157	6.59e-02
3	0.36920157	0.34564303	2.36e-02
4	0.34564303	0.35388255	8.24e-03
5	0.35388255	0.35097870	2.90e-03
6	0.35097870	0.35199937	1.02e-03
7	0.35199937	0.35164028	3.59e-04
8	0.35164028	0.35176658	1.26e-04
9	0.35176658	0.35172215	4.44e-05
10	0.35172215	0.35173778	1.56e-05
11	0.35173778	0.35173228	5.50e-06
12	0.35173228	0.35173421	1.93e-06
13	0.35173421	0.35173353	6.80e-07
14	0.35173353	0.35173377	2.39e-07
15	0.35173377	0.35173369	8.41e-08
16	0.35173369	0.35173372	2.96e-08
17	0.35173372	0.35173371	1.04e-08

El valor de la función  $f$  en el punto fijo es

$$f(x_{17}) \approx 2.96 \times 10^{-8}$$

# Método de Newton-Raphson (I)

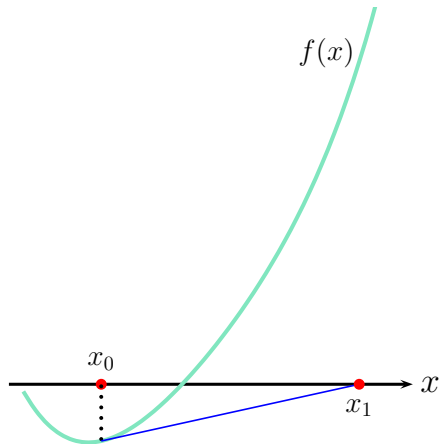
Se da un punto  $x_0$ . Si  $f(x_0) \neq 0$ , consideramos la aproximación de la función  $f$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = m(x)$$

Seleccionamos  $x_1$  de modo que sea un cero de la función  $m(x)$ . Así, si  $m(x_1) = 0$ , entonces

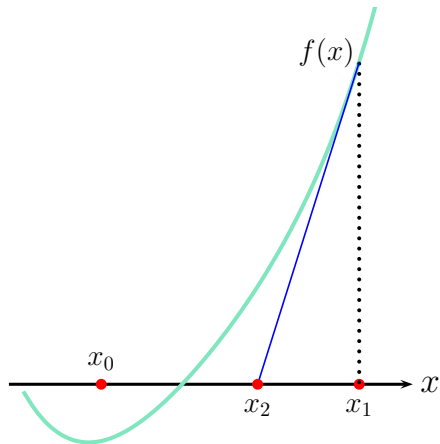
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

# Método de Newton-Raphson (II)



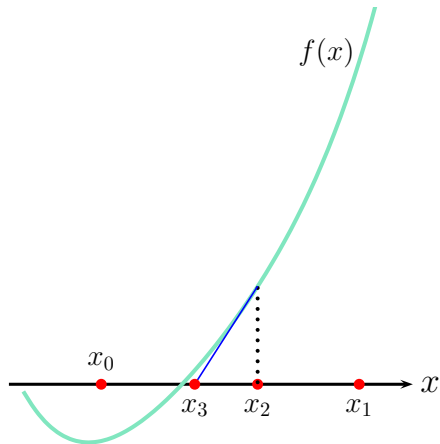
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

# Método de Newton-Raphson (III)



$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

# Método de Newton-Raphson (IV)



$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$



## Método de Newton-Raphson (V)

Si  $|f(x_1)| < \epsilon$ , terminamos. Si no, continuamos. En general, definimos la secuencia

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

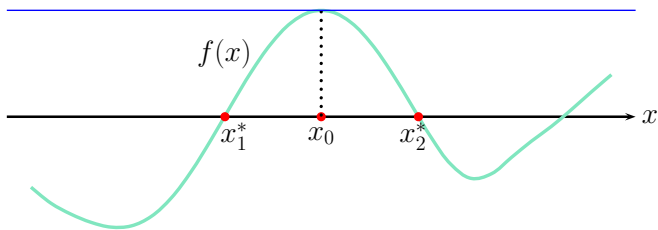
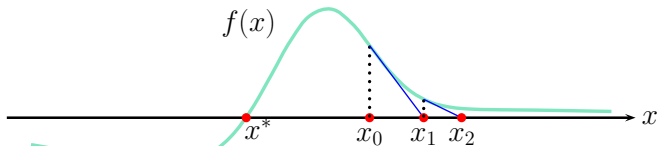
Terminamos cuando  $|f(x_{k+1})| < \epsilon$ .

### Observaciones:

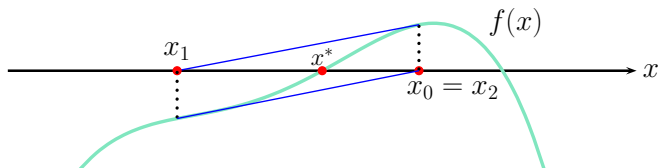
- El punto al que converge el algoritmo depende del valor inicial  $x_0$ .
- El método funciona bien para raíces simples.
- Cerca de la raíz, el método tiene convergencia cuadrática.
- Puede que no converja, dependiendo de la inicialización,

Los siguientes casos ilustran algunos problemas del método de Newton-Raphson.

# Método de Newton-Raphson (VI)



# Método de Newton-Raphson (VII)



Las aritmética de punto flotante en la computadora puede hacer que este último caso no ocurra tan fácilmente.

**Ejemplo 1.** Sea  $f(x) = 2x^3 - 3x - 6$ . Queremos hallar una raíz de  $f(x) = 0$ .  
Aplicando Newton-Raphson:

k	$x_k$	$f(x_k)$
1	1.000000	-7.00000000
2	3.333333	58.07407407
3	2.421175	15.12276195
4	1.951123	3.00202004
5	1.799821	0.26106567
6	1.783938	0.00271644
7	1.783769	0.00000030
8	1.783769	$2.6 \times 10^{-15}$

## Ejemplo 2 (I)

Aplicamos el método de Newton-Raphson para encontrar la raíz de  $f(x) = (x-2)^9 = x^9 - 18x^8 + 144x^7 - 672x^6 + 2016x^5 - 4032x^4 + 5376x^3 - 4608x^2 + 2304x - 512$ .

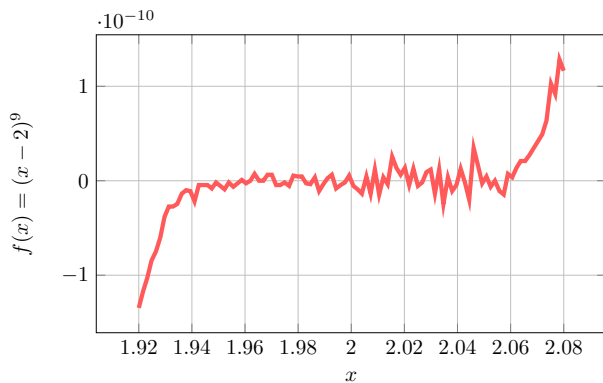
**Nota:** Sabemos que no se debería aplicar este método a esta función, pero queremos ver como se comporta este método.

Para hacer esto, requerimos evaluar la derivada de la función:

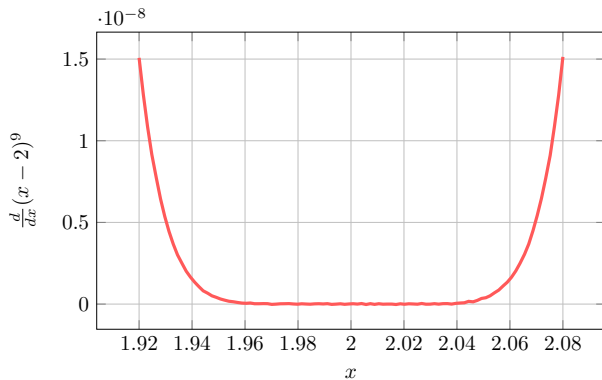
$$\begin{aligned} f'(x) = & 9x^8 - 144x^7 + 1008x^6 - 4032x^5 + 10080x^4 \\ & - 16128x^3 + 16128x^2 - 9216x + 2304 \end{aligned}$$

Las siguientes figuras muestran las gráficas de la función  $f(x)$  y su derivada.

## Ejemplo 2 (II)

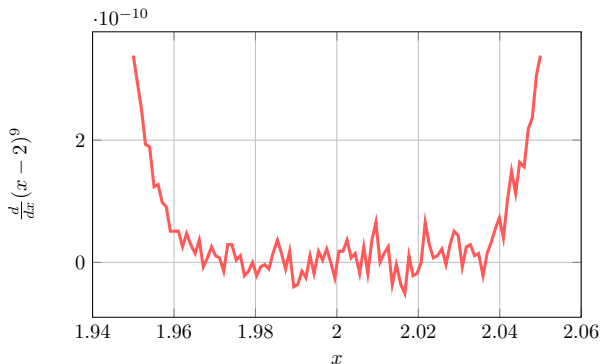


## Ejemplo 2 (III)



## Ejemplo 2 (IV)

Gráfica de la derivada de  $f(x)$  más cerca del punto  $x = 2$ .



Aplicando el método de Newton-Raphson a esta función se obtiene:



## Ejemplo 2 (V)

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$x_{k+1}$
1	10.0000	1.3422e+08	1.5099e+08	9.1111
2	9.1111	4.6498e+07	5.8849e+07	8.3210
3	8.3210	1.6109e+07	2.2936e+07	7.6187
4	7.6187	5.5807e+06	8.9393e+06	6.9944
5	6.9944	1.9334e+06	3.4840e+06	6.4394
6	6.4394	6.6980e+05	1.3579e+06	5.9462
7	5.9462	2.3205e+05	5.2923e+05	5.5077
8	5.5077	8.0390e+04	2.0626e+05	5.1180
9	5.1180	2.7850e+04	8.0390e+04	4.7715
10	4.7715	9.6484e+03	3.1331e+04	4.4636
11	4.4636	3.3426e+03	1.2211e+04	4.1898
12	4.1898	1.1580e+03	4.7593e+03	3.9465
13	3.9465	4.0118e+02	1.8549e+03	3.7302
14	3.7302	1.3898e+02	7.2294e+02	3.5380
15	3.5380	4.8150e+01	2.8176e+02	3.3671
16	3.3671	1.6681e+01	1.0981e+02	3.2152
17	3.2152	5.7789e+00	4.2800e+01	3.0802
18	3.0802	2.0020e+00	1.6681e+01	2.9602

## Ejemplo 2 (VI)

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$x_{k+1}$
19	2.9602	6.9359e-01	6.5013e+00	2.8535
20	2.8535	2.4029e-01	2.5338e+00	2.7586
21	2.7586	8.3245e-02	9.8755e-01	2.6744
22	2.6744	2.8839e-02	3.8489e-01	2.5994
23	2.5994	9.9910e-03	1.5001e-01	2.5328
24	2.5328	3.4613e-03	5.8465e-02	2.4736
25	2.4736	1.1991e-03	2.2787e-02	2.4210
26	2.4210	4.1542e-04	8.8809e-03	2.3742
27	2.3742	1.4392e-04	3.4613e-03	2.3326
28	2.3326	4.9859e-05	1.3490e-03	2.2957
29	2.2957	1.7273e-05	5.2577e-04	2.2628
30	2.2628	5.9842e-06	2.0492e-04	2.2336
31	2.2336	2.0731e-06	7.9865e-05	2.2077
32	2.2077	7.1822e-07	3.1127e-05	2.1846
33	2.1846	2.4882e-07	1.2131e-05	2.1641
34	2.1641	8.6196e-08	4.7280e-06	2.1458
35	2.1458	2.9872e-08	1.8427e-06	2.1296
36	2.1296	1.0351e-08	7.1797e-07	2.1152

## Ejemplo 2 (VII)

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$x_{k+1}$
37	2.1152	3.5761e-09	2.7957e-07	2.1024
38	2.1024	1.2442e-09	1.0905e-07	2.0910
39	2.0910	4.3292e-10	4.2419e-08	2.0808
40	2.0808	1.6098e-10	1.6353e-08	2.0710
41	2.0710	5.5479e-11	5.7880e-09	2.0614
42	2.0614	-1.8190e-12	1.8263e-09	2.0624

Se puede ver que se genera una secuencia decreciente de puntos que tiende hacia la raíz y se detiene cuando el valor de  $|f(x_k)|$  es menor que la tolerancia.