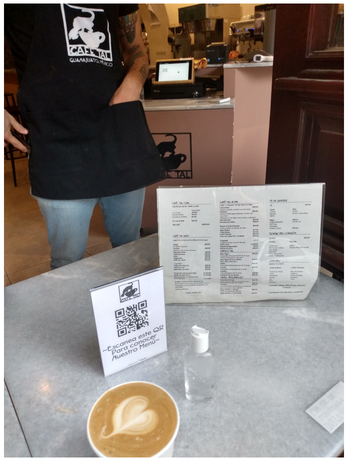
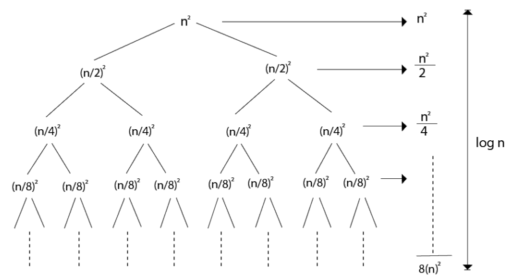
Resolver ecuaciones de recurrencias

Johan Van Horebeek

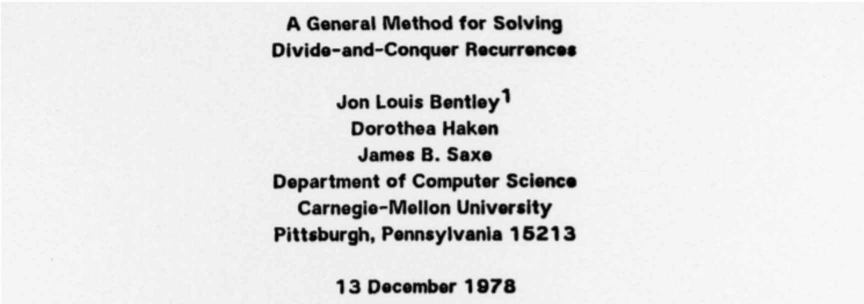


Estudiar complejidad de algoritmos recursivos

1. Usar arbol de ejecución:



2. Usar el Teorema Master



A General Method for Solving Divide-and-Conquer Recurrences

Jon Louis Bentley[1]
Dorothea Haken
James B. Saxe
Department of Computer Science
Carnegie-Mellon University
Pittsburgh, Pennsylvania 15213

13 December 1978

3. Buscar inspiración para proponer una expresión y demostrar por inducción.

¿cuáles son las limitaciones?

Algunas limitaciones

Limitaciones a la forma de las ecuaciones de recurrencia.

Por ejemplo, teorema Master no dice nada sobre:

$$T(n) = 2T(n/2) + n\log(n)$$

Dibujo de los árboles puede convertirse en algo muy complejo.

No es evidente proponer una solución:

Expresiones asimptóticas no dicen todo (*hasta una constante*).

¿Cómo obtener soluciones exactas (en ciertos casos)?

Ecuaciones lineales de recurrencias (diferencias)

Punta de partida:

una sucesión $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$

y cierta relación entre los elementos.

$$a_n = a_{n-1}^2 + 5,\ a_1 = 2 \qquad 3a_n + a_{n-2} + n = 0$$

Nos limitamos a ecuaciones lineales en $\{a_n\}$de la forma:

$$a_{n+k} + b_1 a_{n+k-1} + \cdots + b_k a_n = f_n \tag{1}$$

Llamamos k el orden.

Si $f_n = 0$, hablamos de una ecuación homogenea.

Observa: si fijamos $(a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}) \in \mathcal{R}^k$, está definida toda la secuencia

Ecuaciones lineales de recurrencias (diferencias) homogeneas

Dada

$$a_{n+k} + b_1 a_{n+k-1} + \cdots + b_k a_n = 0 \tag{2}$$

Cada solución está asociada *relación 1-1* a un vector $\vec{x} = (a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}) \in \mathcal{R}^k$

Propiedad:

La solucion general de (2) es una combinacion lineal de k soluciones independientes.

Es decir, si $\{x_n^1\}, \{x_n^2\}, \cdots, \{x_n^k\}$ son soluciones independientes, cualquier solución es de la forma:

$$\sum_{l=1}^{k} c_l x_n^l$$

Insertar bosquejo demostración

Ecuaciones lineales de recurrencias (diferencias) homogeneas

Dada

$$a_{n+k} + b_1 a_{n+k-1} + \cdots + b_k a_n = 0 \tag{3}$$

Cada solución está asociada *relación 1-1* a un vector $\vec{x} = (a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}) \in \mathcal{R}^k$

Propiedad:

La solucion general de (3) es una combinacion lineal de k soluciones independientes.

Es decir, si $\{x_n^1\}, \{x_n^2\}, \cdots, \{x_n^k\}$ son soluciones independientes, cualquier solución es de la forma:

$$\sum_{l=1}^{k} c_l x_n^l$$

Insertar bosquejo demostración.

Ejemplo: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

 Trata: $a_n = r^n$

Ecuaciones lineales de recurrencias (diferencias) homogeneas

Dada

$$a_{n+k} + b_1 a_{n+k-1} + \cdots + b_k a_n = 0 \tag{4}$$

Cada solución está asociada *relación 1-1* a un vector $\vec{x} = (a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}) \in \mathcal{R}^k$

Propiedad:

La solucion general de (4) es una combinacion lineal de k soluciones independientes.

Es decir, si $\{x_n^1\}, \{x_n^2\}, \cdots, \{x_n^k\}$ son soluciones independientes, cualquier solución es de la forma:

$$\sum_{l=1}^{k} c_l x_n^l$$

Insertar bosquejo demostración.

Ejemplo: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

Trata: $a_n = r^n$

Buscamos raices del polinomio: $r^k + b_1 r^{k-1} + \cdots + b_k = 0$

Ecuaciones lineales de recurrencias (diferencias) homogeneas

Dada

$$a_{n+k} + b_1 a_{n+k-1} + \cdots + b_k a_n = 0 \tag{5}$$

Buscamos k soluciones independientes $\Rightarrow$ buscar raices de : $r^k + b_1 r^{k-1} + \cdots + b_k = 0$

Ecuaciones lineales de recurrencias (diferencias) homogeneas

Dada

$$a_{n+k} + b_1 a_{n+k-1} + \cdots + b_k a_n = 0 \tag{6}$$

Buscamos k soluciones independientes $\Rightarrow$ buscar raices de : $r^k + b_1 r^{k-1} + \cdots + b_k = 0$

Caso raices complejos: si r es solucion, también $\bar{r}$ (¿por qué?)

Ecuaciones lineales de recurrencias (diferencias) homogeneas

Dada

$$a_{n+k} + b_1 a_{n+k-1} + \cdots + b_k a_n = 0 \tag{7}$$

Buscamos k soluciones independientes $\Rightarrow$ buscar raices de : $r^k + b_1 r^{k-1} + \cdots + b_k = 0$

Caso raices complejos: si r es solución, también $\bar{r}$ (¿por qué?)

Escribe $r = |r|(cos(\theta) + isin(\theta))$

Trabaja con soluciones: $|r|^n cos(n\theta)$ y $|r|^n sin(n\theta)$

Ecuaciones lineales de recurrencias (diferencias) homogeneas

Dada

$$a_{n+k} + b_1 a_{n+k-1} + \cdots + b_k a_n = 0 \tag{8}$$

Buscamos k soluciones independientes $\Rightarrow$ buscar raices de : $r^k + b_1 r^{k-1} + \cdots + b_k = 0$

Caso raices complejos: si r es solución, también $\bar{r}$ (¿por qué?)

Escribe $r = |r|(cos(\theta) + isin(\theta))$

Trabaja con soluciones: $|r|^n cos(n\theta)$ y $|r|^n sin(n\theta)$

Caso raices múltiples: si r es solución con multiplicidad m

Trabaja con soluciones: $r^n, nr^n, n^2 r^n, \cdots, n^{m-1} r^n$

Ecuaciones lineales de recurrencias (diferencias) no homogeneas

$$a_{n+k} + b_1 a_{n+k-1} + \cdots + b_k a_n = f_n \tag{9}$$

Propiedad

Cualquier solución de (9) es la solución de la homogenea asociada y una solución particular