

Curso de Métodos Numéricos

DEMAT, Universidad de Guanajuato

Clase 9: Métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales

- Introducción a los métodos iterativos.
- Método iterativo de Jacobi.
- Método iterativo de Gauss-Seidel.

MAT-251

Dr. Joaquín Peña Acevedo
CIMAT A.C.

e-mail: joaquin@cimat.mx

Introducción a los métodos iterativos

En los casos en que la matriz \mathbf{A} del sistema de ecuaciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es muy grande pero rala (tiene muchos ceros), los métodos directos tienen la desventaja de la cantidad de operaciones que se tienen hacer sin aprovechar que la matriz tiene muchos zeros. Además de pueden requerir más memoria.

Los métodos iterativos de solución de sistemas de ecuaciones lineales requieren un vector inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ y generan una secuencia de vectores

$$\mathbf{x}^{(0)} \rightarrow \mathbf{x}^{(1)} \rightarrow \mathbf{x}^{(2)} \rightarrow \dots$$

la cual quisieramos que converja a la solución \mathbf{x} .

La ventaja de estos métodos es que el esfuerzo requerido para generar $\mathbf{x}^{(k+1)}$ a partir de $\mathbf{x}^{(k)}$ es similar al producto de \mathbf{A} por un vector, lo cual es relativamente bajo si \mathbf{A} es rala.

- Los métodos iterativos pueden tener una convergencia lenta, por eso es que no se usan en matrices pequeñas o densas.

Construcción de un método iterativo

Una separación de \mathbf{A} es una descomposición $\mathbf{A} = \mathbf{Q} - \mathbf{P}$, con \mathbf{Q} una matriz no singular.

Una separación puede producir un método iterativo:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x} &\implies \mathbf{x} = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{b}) = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{c} \\ &\text{donde} \\ \mathbf{M} &= \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Queremos un método en el que demos un vector inicial \mathbf{x}^0 y generemos una sucesión mediante

$$\mathbf{x}^t = \mathbf{M}\mathbf{x}^{t-1} + \mathbf{c} \tag{1}$$

tal que $\mathbf{x}^t \rightarrow \mathbf{x}^*$, donde \mathbf{x}^* es la solución del sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

En el proceso iterativo, como la matriz \mathbf{M} y el vector \mathbf{c} no cambian, se dice que el método es estacionario.

Construcción de método iterativo

Tenemos que la solución \mathbf{x}^* de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ satisface

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{M}\mathbf{x}^* + \mathbf{c} \quad (2)$$

Restando (2) de (1) se obtiene

$$\mathbf{x}^t - \mathbf{x}^* = \mathbf{M}(\mathbf{x}^{t-1} - \mathbf{x}^*)$$

$$\Rightarrow \|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}^*\| \leq \|\mathbf{M}\| \|\mathbf{x}^{t-1} - \mathbf{x}^*\|$$

Proposición

Si $\|\mathbf{M}\| < 1$, entonces la sucesión $\{\mathbf{x}^t\}$, con $\mathbf{x}^t = \mathbf{M}\mathbf{x}^{t-1} + \mathbf{c}$, converge para cualquier \mathbf{x}^0 .

$$\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}^*\| \leq \|\mathbf{M}\| \|\mathbf{x}^{t-1} - \mathbf{x}^*\| < \|\mathbf{x}^{t-1} - \mathbf{x}^*\|$$

Criterios para la convergencia

En general, no conocemos \mathbf{x}^* . Por ello, un criterio para terminar de iterar el algoritmo es cuando se cumpla que la sucesión no cambia lo suficiente o si se puede considerar que el vector \mathbf{x}^t es solución del sistema. Por ejemplo:

$$\frac{\|\mathbf{x}^t - \mathbf{x}^{t-1}\|}{\sqrt{\epsilon_m} + \|\mathbf{x}^t\|} < tol \quad \text{o} \quad \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}^t - \mathbf{b}\|}{\sqrt{\epsilon_m} + \|\mathbf{b}\|} < tol$$

Además hay que considerar un número máximo de iteraciones.

Método de Jacobi

Queremos resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ haciendo una separación de la matriz $\mathbf{A} = [\mathbf{Q} - \mathbf{P}]$. Dado que $\mathbf{x} = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{Px} + \mathbf{b})$, conviene elegir \mathbf{Q} de modo que su inversa sea fácil de calcular.

En el método de Jacobi se elige

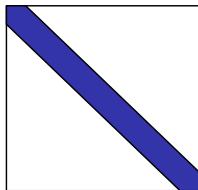
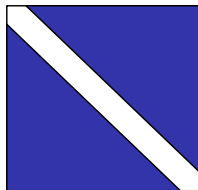
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{21} & \cdots & -a_{n1} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & -a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Si $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)^\top$, $\mathbf{x}^{t-1} = (x_1^{t-1}, x_2^{t-1}, \dots, x_n^{t-1})^\top$, entonces para $i = 1, 2, \dots, n$, la componente i -ésima de \mathbf{x}^t está dada por

Método iterativo de Jacobi

$$\mathbf{x}_i^t = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{t-1} \right)$$

Se requiere que $a_{ii} \neq 0$.

 $\mathbf{x}^{(t+1)}$ $+$  $\mathbf{x}^{(t)}$ $= \mathbf{b}$

Convergencia del método iterativo de Jacobi (I)

Note que

$$\mathbf{M} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{Q} - \mathbf{A}) = \mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad de tamaño n . Entonces

$$\|\mathbf{M}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}$$

De modo que

$$\|\mathbf{M}\|_{\infty} < 1 \implies |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad \forall i.$$

y por tanto la sucesión es convergente.

Proposición

Si la matriz \mathbf{A} es estrictamente diagonal dominante, entonces el método de Jacobi converge para cualquier vector inicial \mathbf{x}^0 .

Ejemplo 1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 15 & 5 & 0 & 2 & 6 \\ 5 & 14 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -18 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 12 & 0 \\ 5 & -4 & 4 & 1 & 15 \end{bmatrix}$$

Elegimos

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 3000 \\ -2000 \\ -1000 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 15000 \\ 32000 \\ -54000 \\ -3000 \\ -8000 \end{pmatrix}$$

Iniciamos con $\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 1.

	t=1	t=3	t=5	t=7	t=9	t=11
x_1	1000.000	1065.794	996.807	996.451	998.268	999.303
x_2	2285.714	2191.327	2050.923	2012.788	2003.548	2001.011
x_3	3000.000	2853.889	2986.866	2997.922	2999.722	3000.026
x_4	-250.000	-1872.778	-1969.974	-1995.201	-1999.320	-1999.953
x_5	-533.333	-919.048	-982.239	-992.414	-997.533	-999.193

	t=13	t=15	t=17	t=19	t=21	t=23
x_1	999.747	999.912	999.970	999.990	999.997	999.999
x_2	2000.297	2000.090	2000.028	2000.009	2000.003	2000.001
x_3	3000.031	3000.015	3000.006	3000.002	3000.001	3000.000
x_4	-2000.023	-2000.016	-2000.007	-2000.003	-2000.001	-2000.000
x_5	-999.736	-999.914	-999.972	-999.991	-999.997	-999.999

Radio espectral de una matriz

Decimos que \mathbf{v} es un *eigenvector* de la matriz \mathbf{A} si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},$$

y llamamos a λ es un *eigenvalor* asociado a \mathbf{v} .

El *radio espectral* $\rho(\mathbf{A})$ de una matriz \mathbf{A} se define como

$$\rho(\mathbf{A}) = \max\{ |\lambda| : \lambda \text{ es eigenvalor de } \mathbf{A} \}$$

Proposición 1

Sea \mathbf{A} una matriz $n \times n$. Entonces $\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|$ para cualquier norma natural. Además, $\mathbf{A}^k \rightarrow 0$ si y sólo si $\rho(\mathbf{A}) < 1$.

Proposición 2

Para cualquier matriz \mathbf{A} y $\epsilon > 0$ existe una norma vectorial $q(\mathbf{x})$ tal que la norma matricial $\|\cdot\|_q$ inducida por esta norma cumple con

$$\|\mathbf{A}\|_q \leq \rho(\mathbf{A}) + \epsilon.$$

Demostración de la proposición 1 (I)

Note que para todo vector $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,

$$\|\mathbf{A}\| \geq \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Si \mathbf{x} es un eigenvector de \mathbf{A} asociado al eigenvalor λ , entonces

$$\|\mathbf{A}\| \geq \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|\lambda\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = |\lambda|.$$

Como esto ocurre para cualquier eigenvalor, $\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|$.

Ahora, dada una matriz \mathbf{A} , existe una matriz \mathbf{S} no singular tal que reduce a \mathbf{A} a su forma de Jordan:

$$\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{SAS}^{-1} = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{bmatrix}$$

Demostración de la proposición 1 (II)

donde cada submatriz J_l es una matriz $n_l \times n_l$ triangular superior de la forma

$$J_l = \begin{bmatrix} \lambda_l & 1 & & & \\ & \lambda_l & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_l \end{bmatrix}$$

Se puede ver que para $m \geq 1$

$$\widehat{\mathbf{A}}^m = \begin{bmatrix} J_1^m & & & \\ & J_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r^m \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, para $m=2$

Demostración de la proposición 1 (III)

$$\mathbf{J}_l^2 = \begin{bmatrix} \lambda_l^2 & 2\lambda_l & 1 & & \\ & \lambda_l^2 & 2\lambda_l & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 2\lambda_l \\ & & & & \lambda_l^2 \end{bmatrix}$$

En general, las entradas de \mathbf{J}_l^m son de la forma

$$(\mathbf{J}_l^m)_{ij} = \begin{cases} 0 & j < i \\ \binom{m}{j-i} \lambda_l^{m-j+i} & i \leq j \leq \min\{n_l, m+i\} \\ 0 & m+i < j \leq n_l \end{cases}$$

Supongamos $\rho(\mathbf{A}) < 1$. Como \mathbf{A} y $\widehat{\mathbf{A}}$ tienen los mismos eigenvalores, $\rho(\widehat{\mathbf{A}}) < 1$, por lo que $|\lambda_l| < 1$ para todo l . Entonces

$$(\mathbf{J}_l^m)_{ij} \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{si } m \rightarrow \infty.$$

Demostración de la proposición 1 (IV)

Por lo que $\widehat{\mathbf{A}}^m \rightarrow \mathbf{0}$, y por tanto $\mathbf{A}^m = \mathbf{S}^{-1}\widehat{\mathbf{A}}^m\mathbf{S}$ también converge a $\mathbf{0}$.

Por otra parte, si $\mathbf{A}^m \rightarrow \mathbf{0}$, $\widehat{\mathbf{A}}^m = \mathbf{S}\mathbf{A}^m\mathbf{S}^{-1} \rightarrow \mathbf{0}$. De aquí que $\mathbf{J}_l^m \rightarrow \mathbf{0}$, por lo que $|\lambda_l| < 1$ para todo l . Por tanto,

$$\rho(\mathbf{A}) < 1.$$

Demostración de la proposición 2 (I)

Dada una matriz \mathbf{A} y $\epsilon > 0$, existe una matriz \mathbf{S} no singular tal que reduce a \mathbf{A} a su forma de Jordan:

$$\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{SAS}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & & \\ & \mathbf{J}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{J}_r \end{bmatrix} \quad \text{donde } \mathbf{J}_l = \begin{bmatrix} \lambda_l & 1 & & \\ & \lambda_l & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_l \end{bmatrix}$$

Podemos calcular la matriz similar $\mathbf{B} = \mathbf{D}_\epsilon^{-1} \widehat{\mathbf{A}} \mathbf{D}_\epsilon$, donde

$$\mathbf{D}_\epsilon = \text{diag}(1, \epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^{n-1}).$$

de modo que las submatrices de \mathbf{B} alrededor de la diagonal son de la forma

$$\begin{bmatrix} \lambda_l & \epsilon & & \\ & \lambda_l & \epsilon & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \epsilon \\ & & & & \lambda_l \end{bmatrix}$$

Demostración de la proposición 2 (II)

Entonces

$$\|\mathbf{D}_\epsilon^{-1} \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{D}_\epsilon\|_1 = \|\mathbf{B}\|_1 = \max_k (|\lambda_k| + \epsilon) \leq \rho(\mathbf{A}) + \epsilon.$$

Se puede ver que $q(\mathbf{x}) = \|\mathbf{D}_\epsilon^{-1} \mathbf{S} \mathbf{x}\|_1$ es una norma vectorial y la norma matricial inducida por q satisface

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|_q &= \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A} \mathbf{x}\|_q}{\|\mathbf{x}\|_q} = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{D}_\epsilon^{-1} \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}\|_1}{\|\mathbf{D}_\epsilon^{-1} \mathbf{S} \mathbf{x}\|_1} \\ &= \sup_{\mathbf{y} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{D}_\epsilon^{-1} \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{D}_\epsilon \mathbf{y}\|_1}{\|\mathbf{y}\|_1} = \|\mathbf{B}\|_1 \leq \rho(\mathbf{A}) + \epsilon. \end{aligned}$$

Otra condición suficiente para convergencia

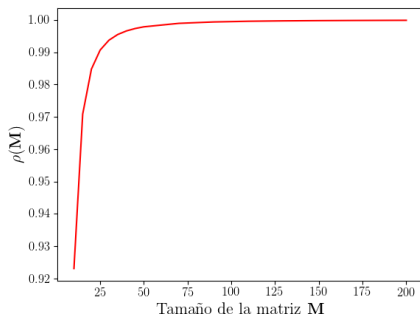
Proposición 3

La sucesión $\mathbf{x}^t = \mathbf{M}\mathbf{x}^{t-1} + \mathbf{c}$ converge para cualquier \mathbf{x}^0 si y sólo si $\rho(\mathbf{M}) < 1$.

Ejemplo 2.

Consideremos las matrices de la forma

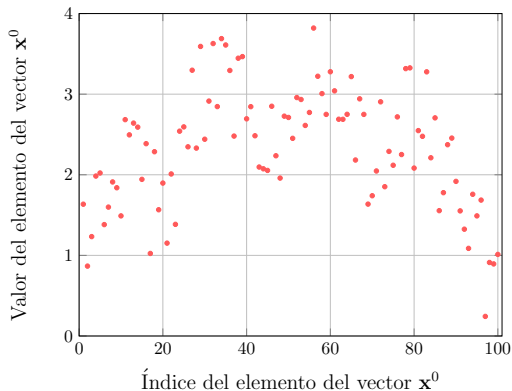
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



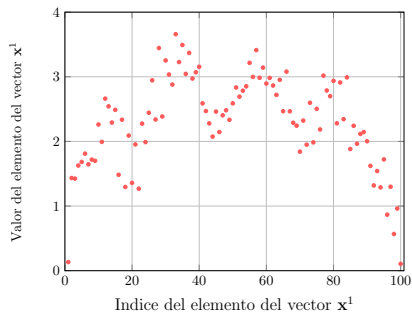
$$\rho(\mathbf{M}_{200}) = 0.99987$$

Ejemplo 2.

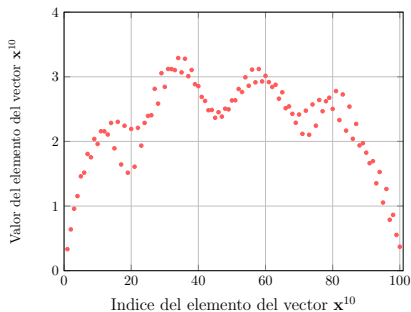
Fijamos $n = 100$. Sea $\mathbf{b} = (1, 0, 0, \dots, 0, 0, 1)^\top$. Entonces, inicializamos el método de Jacobi con el siguiente vector \mathbf{x}^0 :



Ejemplo 2.

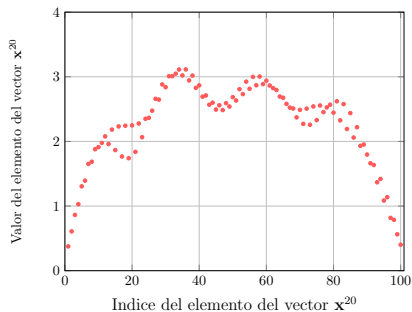


Iteración 1

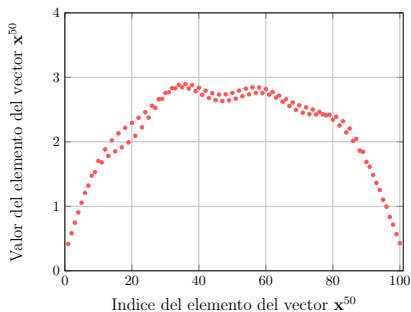


Iteración 10

Ejemplo 2.

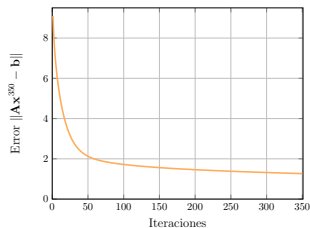
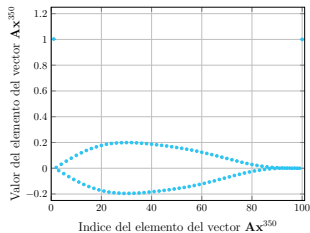
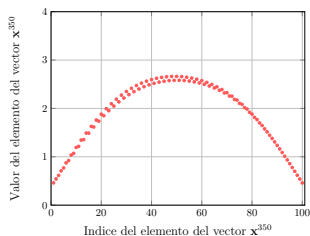


Iteración 20

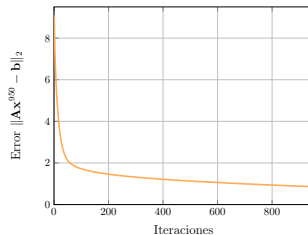
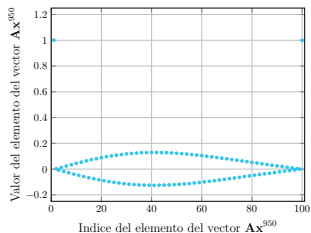
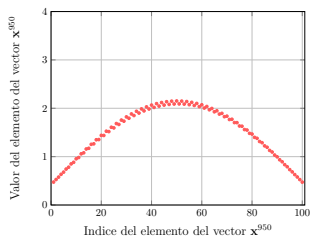


Iteración 50

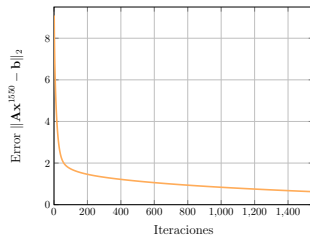
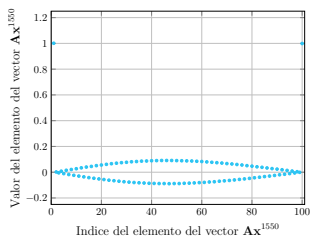
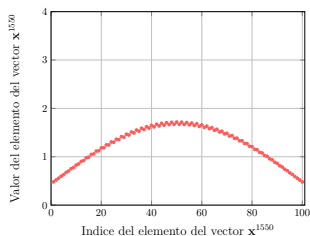
Ejemplo 2: Iteración 350



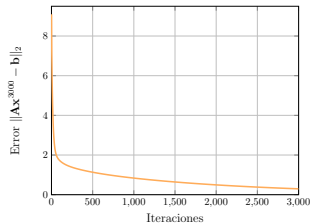
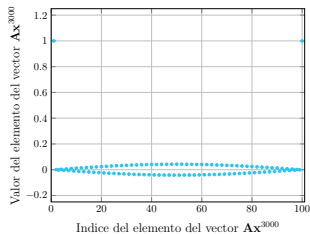
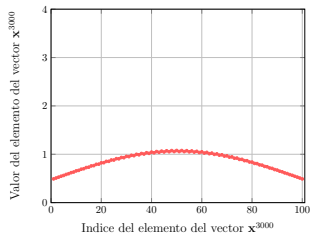
Ejemplo 2: Iteración 950



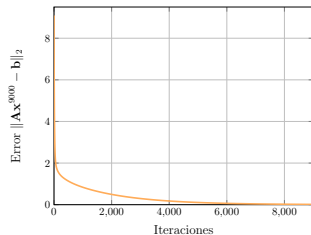
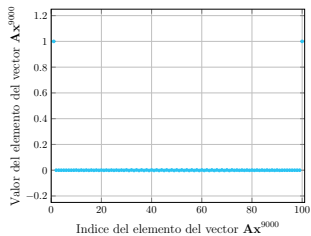
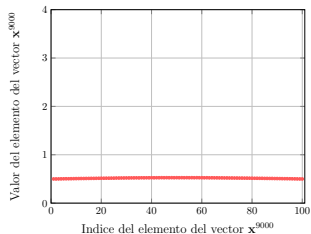
Ejemplo 2: Iteración 1550



Ejemplo 2: Iteración 3000



Ejemplo 2: Iteración 9000



Notas sobre el método de Jacobi (I)

El método de Jacobi

$$x_i^{(t)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(t-1)} \right)$$

puede no converger:

Ejemplo:

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -5 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Inicializamos el algoritmo con $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Notas sobre el método de Jacobi (II)

	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$
$x_1^{(t)}$	3.0	-4.0	-40.0	103.0	816.0	-2080.0
$x_2^{(t)}$	3.0	15.0	-20.0	-257.0	455.0	5160.0
$x_3^{(t)}$	0.5	0.5	10.0	10.5	-179.5	-180.0
$\ A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}\ $	13.9	53.7	276.8	1076.9	5524.8	21602.1

Ahora si intercambiamos dos de las ecuaciones, tenemos

$$A_2 \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Inicializando el algoritmo con el vector cero obtenemos lo siguiente:

Notas sobre el método de Jacobi (III)

	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$	$t = 12$	$t = 20$
$x_1^{(t)}$	-0.60	0.20	1.33	1.53	1.27	0.89	0.99	0.9989
$x_2^{(t)}$	1.00	1.87	2.66	2.33	2.04	1.78	1.98	1.9998
$x_3^{(t)}$	0.50	1.30	1.33	1.17	0.90	0.89	0.99	1.0004
$\ A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}\ $	5.03	6.15	1.45	1.68	2.05	0.48	0.05	0.0084

El algoritmo converge en este caso.

Método de Gauss-Seidel (I)

Para el método de Jacobi tenemos que

$$x_i^{(t+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(t)} \right)$$

a partir de una separación $\mathbf{A} = \mathbf{Q} - \mathbf{P}$, con

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.0 & -a_{2,2} & \cdots & -a_{1,n-1} & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & 0.0 & \cdots & -a_{2,n-1} & -a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,2} & \cdots & 0.0 & -a_{n-1,n} \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0.0 \end{bmatrix}$$

Para el método de Gauss-Seidel separamos la matriz \mathbf{P} en dos matrices triangulares \mathbf{L} y \mathbf{U} , de modo que

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} - \mathbf{L} - \mathbf{U}.$$

Para la separación tomamos la matrices $\mathbf{Q} - \mathbf{L}$ y \mathbf{U} , de modo que

Método de Gauss-Seidel (II)

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \implies (\mathbf{Q} - \mathbf{L})\mathbf{x} = \mathbf{Ux} + \mathbf{b}$$

Entonces la expresión para generar la sucesión de vectores es

$$(\mathbf{Q} - \mathbf{L})\mathbf{x}^{(t+1)} = \mathbf{Ux}^{(t)} + \mathbf{b}$$

(Note que podríamos escribir $\mathbf{x}^{(t+1)} = (\mathbf{Q} - \mathbf{L})^{-1}(\mathbf{Ux}^{(t)} + \mathbf{b})$, pero tendríamos que calcular la inversa de la matriz $\mathbf{Q} - \mathbf{L}$).

De esta forma, las componentes de $\mathbf{x}^{(t+1)}$ se calculan usando la fórmula de sustitución hacia adelante:

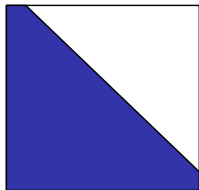
$$a_{ii}x_i^{(t+1)} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(t+1)} = - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(t)} + b_i$$

Es decir,

$$x_i^{(t+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(t+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(t)} \right)$$

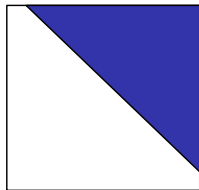
Método de Gauss-Seidel (III)

para $i = 1, 2, \dots, n$.



$\mathbf{x}^{(t+1)}$

+



$\mathbf{x}^{(t)}$

= \mathbf{b}

Ejemplo 1: Para el sistema anterior

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -5 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Inicializamos el algoritmo con $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Método de Gauss-Seidel (IV)

	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$
$x_1^{(t)}$	3.0	-19.0	183.0	-1639.0	14763
$x_2^{(t)}$	1.8	-140.0	1278.0	-11480.0	103340
$x_3^{(t)}$	8.0	-60	548.0	-4920	44288
$\ A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}\ $	52.8	455.3	4077.7	36680	330100

Con el método de Jacobi se obtuvo:

	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$
$\ A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}\ $	13.9	53.7	276.8	1076.9	5524.8	21602.1

Ejemplo 2: Para el sistema

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Inicializamos el algoritmo con $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Método de Gauss-Seidel (V)

Aplicando el algoritmo de Jacobi se obtiene, con el error $e^{(t)} = \|\mathbf{Ax}^{(k)} - \mathbf{b}\|$:

	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$	$t = 7$	$t = 8$
$x_1^{(t)}$	1.2	0.96	1.008	0.998	1.0003	0.99994	1.0	1.0
$x_2^{(t)}$	1.2	0.96	1.008	0.998	1.0003	0.99994	1.0	1.0
$x_3^{(t)}$	1.2	0.96	1.008	0.998	1.0003	0.99994	1.0	1.0
$e^{(t)}$	4.2	0.83	0.166	0.033	0.0066	0.00133	0.00027	5.3×10^{-5}

Aplicando el algoritmo de Gauss-Seidel:

	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
$x_1^{(t)}$	1.20000	0.99480	0.99965	1.0
$x_2^{(t)}$	1.08000	1.00330	1.00000	1.0
$x_3^{(t)}$	0.97200	1.00020	1.00000	1.0
$e^{(t)}$	2.2706	0.05609	0.00346	0.00006

Realizando las operaciones para calcular la matriz \mathbf{M}_J del método de Jacobi y \mathbf{M}_{GS} que se usan en el esquema $\mathbf{x}^{(t+1)} = \mathbf{M}\mathbf{x}^{(t+1)} + \mathbf{c}$, tenemos

Método de Gauss-Seidel (VI)

$$\mathbf{M}_J = \begin{bmatrix} 0.0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.0 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0.0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \|\mathbf{M}_J\|_\infty &= 0.2 \\ \rho(\mathbf{M}_J) &= 0.2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_{GS} = \begin{bmatrix} 0.0 & -0.100 & -0.100 \\ 0.0 & 0.010 & -0.090 \\ 0.0 & -0.009 & 0.019 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \|\mathbf{M}_{GS}\|_\infty &= 0.2 \\ \rho(\mathbf{M}_{GS}) &= 0.0145 \end{aligned}$$

- Cada vez que calcula una componente del vector \mathbf{x}^t , se usa ese valor para calcular la siguiente componente.
- Lo anterior puede ayudar a que el método converja más rápido.
- En cuanto a la implementación del método, se puede usar el mismo arreglo para almacenar la solución:

Se puede reemplazar \mathbf{x}_i^{t-1} por el valor actual \mathbf{x}_i^t , ya que no se vuelve a requerir ese dato.

Relación del método G-S con los residuales (I)

Sea

$$\mathbf{x}_i^{(t)} = (x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \dots, x_{i-1}^{(t)}, x_i^{(t-1)}, \dots, x_n^{(t-1)})^\top$$

la aproximación de la solución que se obtiene en la iteración t después de aplicar el paso del método de Gauss-Seidel a las primeras $i-1$ variables. Al concluir la iteración t formamos el vector de residuales

$$\mathbf{r}_i^{(t)} = (r_{1i}^{(t)}, r_{2i}^{(t)}, \dots, r_{ni}^{(t)})^\top$$

donde la componente m -ésima del vector $\mathbf{r}_i^{(t)}$ es

$$\begin{aligned} r_{mi}^{(t)} &= b_m - \sum_{j=1}^{i-1} a_{mj} x_j^{(t)} - \sum_{j=i}^n a_{mj} x_j^{(t-1)} \\ &= b_m - \sum_{j=1}^{i-1} a_{mj} x_j^{(t)} - \sum_{j=i+1}^n a_{mj} x_j^{(t-1)} - a_{mi} x_i^{(t-1)} \end{aligned}$$

En particular, para $m = i$, se tiene

Relación del método G-S con los residuales (II)

$$r_{ii}^{(t)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(t)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(t-1)} - a_{ii}x_i^{(t-1)}.$$

Puesto que con Gauss-Seidel

$$a_{ii}x_i^{(t)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(t)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(t-1)}$$

Entonces

$$r_{ii}^{(t)} = a_{ii}x_i^{(t)} - a_{ii}x_i^{(t-1)}$$

$$x_i^{(t)} = x_i^{(t-1)} + \frac{r_{ii}^{(t)}}{a_{ii}}$$

Ahora, si $\mathbf{r}_{i+1}^{(t)}$ es el residual asociado al vector

$$\mathbf{x}_{i+1}^{(t)} = (x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \dots, x_i^{(t)}, x_{i+1}^{(t-1)}, \dots, x_n^{(t-1)})^T,$$

Relación del método G-S con los residuales (III)

entonces la componente i -ésima de $\mathbf{r}_{i+1}^{(t)}$ es

$$\begin{aligned} r_{i,i+1}^{(t)} &= b_i - \sum_{j=1}^i a_{ij}x_j^{(t)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(t-1)} \\ &= b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(t)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(t-1)} - a_{ii}x_i^{(t)} = a_{ii}x_i^{(t)} - a_{ii}x_i^{(t)} = 0. \end{aligned}$$

De este modo, el método de Gauss-Seidel elige el valor de $x_i^{(t)}$ de modo que el residual $r_{i,i+1}^{(t)}$ sea cero.

Proposición 1

Sea $\mathbf{A} = \mathbf{Q} - \mathbf{P}$ con \mathbf{A} y \mathbf{P} matrices s.d.p. Si la matriz $2\mathbf{P} - \mathbf{A}$ definida positiva, entonces el método

$$\mathbf{Q}\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{P}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

es convergente para cualquier elección del punto inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ y para $\mathbf{M} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}$ se cumple que $\rho(\mathbf{M}) < 1$.

Proposición 2

Si \mathbf{A} es una matriz estrictamente diagonal dominante, el método de Gauss-Seidel es convergente.