Segundo examen parcial del curso de Métodos Numéricos

Fecha del examen: Diciembre 10, 2020

Hora de inicio: 14:30
Hora de entrega: 17:45

Indicaciones generales: Seleccione sólo 2 ejercicios para resolver durante el examen.

Indicaciones para el envío del examen:

1. Crea un archivo en el que puedas agregar texto e imágenes, y que después lo puedas exportar a PDF.
2. Comienza escribiendo tu nombre.
3. Antes de poner la respuesta, escribe a qué ejercicio corresponde.
4. Escribe el nombre del archivo que se tiene que pasar al interprete de Python, o en el caso de C/C++, el archivo que se tiene que compilar. Si requiere alguna instrucción especial para compilarlo, agrega el comando.
5. Si el programa recibe parámetros, indica en que orden se tienen que proporcionar.
6. Da al menos un ejemplo de la manera en que se tiene que ejecutar tu programa y agrega la salida del programa, poniendo directamente el texto que imprime tu programa o poniendo una imagen.
7. Si se te pide generar una gráfica de algún resultado, agrégala al archivo de respuestas.
8. Si tiene algun comentario, agrégalo también al documento de respuestas.
9. Trata de dejar algún espacio en blanco entre los ejercicios, por si el revisor quiere poner comentarios.

10. Sube los códigos en un archivo ZIP para que no tengas que subir archivo por archivo. Recuerda no adjuntar los executables y los códigos de cada ejercicio deben estar en carpetas diferentes.

11. Convierte el archivo de respuestas a un PDF y súbelo al classroom como archivo independiente.

12. Revisa que estén los archivos que quieres enviar antes de presiona el botón para enviar tu trabajo.

Ejercicio 1. (5 puntos)
Ajustar una circunferencia a un conjunto de puntos $\{(x_1, y_1), ..., (x_m, y_m)\}$ usando el siguiente procedimiento, el cual requiere realizar el calculó del eigenvector asociado al eigenvalor más pequeño en valor de absoluto de una matriz no simétrica:

Primero hay que leer los datos y luego construir las matrices

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) & \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) & \cdots & \frac{1}{2}(x_m^2 + y_m^2) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{m}\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^\top\boldsymbol{M}.$$

Luego hay que calcular el eigenvector $\boldsymbol{v}$ de $\boldsymbol{P}$ asociado al eigenvalor más pequeño en valor absoluto. Se puede usar el método de la potencia inversa:

Dar un vector inicial $\boldsymbol{x}^{(0)} = (1, 0, 0, 0)^\top$, $k = 0$ y una tolerancia $\tau = \sqrt{\epsilon_m}$.
Ejecutar los siguientes pasos:

1. Revolver $\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}^{(k)} = \boldsymbol{x}^{(k)}$
2. Calcular $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{y}^{(k)}/\|\boldsymbol{y}^{(k)}\|$.
3. Calcular $\lambda_{k+1} = \left(\boldsymbol{x}^{(k+1)}\right)^\top \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}^{(k+1)}$.
4. Calcular $e = \|\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \lambda_{k+1}\boldsymbol{x}^{(k+1)}\|$
5. Si $e > \tau$, hacer $k = k + 1$ y regresar al paso 1.

Si $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4) = \boldsymbol{x}^{(k+1)}$ es el eigenvector asociado al eigenvalor λ más pequeño, en valor absoluto, de $\boldsymbol{P}$, hay que definir

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4) = \left(\frac{v_1}{v_3},\ \frac{v_2}{v_3},\ 1,\ \frac{v_4}{v_3}\right)$$

Entonces el centro $\boldsymbol{c}$ y el radio r de la circunferencia están dadas por

$$\boldsymbol{c} = (u_1, u_2)\,, \qquad r = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 - 2u_4}. \tag{1}$$

1. Escriba un programa que lea desde la línea de comandos el nombre de un archivo que contiene los datos de las coordenadas de los puntos. En la primera columna tiene los valores x_i y en la segunda columna tiene los valores y_i.

2. Lea el archivo de datos y almacene la información en una matriz $\boldsymbol{A}$ y la cantidad de filas m.

   Haga que la función cree las matrices $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{P}$, de acuerdo al procedimiento descrito previamente.

   Use el algoritmo de la potencia inversa para obtener el eigenvalor $\boldsymbol{v}$ asociada al eigenvalor más pequeño en valor absoluto y a partir de éste vector, obtener el centro y radio de acuerdo con (1).

   La función tiene que devolver $\boldsymbol{c}$ y r (se le pueden pasar por referencia estas variables como parámetros de la función, para que modifique sus valores).

3. Haga que el programa imprima m, $\boldsymbol{c}$ y r.

4. Haga que el programa escriba en un archivo una serie puntos que sobre la circunferencia, que se pueda usar para graficar la circunferencia.

5. Con los datos de salida del programa, genere una gráfica que muestre que los datos y la circunferencia.

   Los puntos de la circunferencia se pueden generar a partir de una partición $0 = \theta_0 < \theta_1 < ... < \theta_q = 2\pi$ y calcular los puntos $(r\cos\theta_i + c_1,\ r\sin\theta_i + c_2)$

Ejercicio 2. (5 puntos)
Calcular los valores de la integral

$$F(n) = \int_0^1 \frac{x^n}{5+x}dx.$$

para $n = 1, 2, ..., 25$.

Vimos que se puede obtener la siguiente relación

$$\begin{aligned} F(1) &= 1 - 5\ln\tfrac{6}{5} \\ F(n) &= \tfrac{1}{n} - 5\,F(n-1) \quad \text{para} \quad n = 2, 3, ... \end{aligned} \tag{2}$$

1. Escriba una función reciba como argumentos dos enteros m y N. La función debe crear una matriz de tamaño $N \times 2$. La primera columna de esta matriz debe tener los valores de las integrales $F(n)$ para $n = 1, ..., N$ usando una partición del intervalo $[0, 1]$ usando 2^m subintervalos y aplicando el método de trapecio o el método de Romberg.

   La segunda columna de la matriz también tiene los valores de la integrales $F(n)$, pero use una partición del intervalo $[0, 1]$ que tiene 2^{m+1} subintervalos.

   La función debe devolver esta matriz.

2. Escriba una función que reciba como argumento un entero N. La función debe generar un arreglo que contenga los valores $F(n)$ para $n = 1, ..., N$ usando la fórmula (2).

3. Escriba un programa que calcule el error que se comete al calcular los valores de las integrales $F(n)$ mediante la fórmula (2). Fije $N = 25$.

   Primero, para la función que calcula las integrales con una regla de cuadratura y que devuelve una matriz $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$, elija el valor m de modo que

$$E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |a_{i1} - a_{i2}| < 0.00001$$

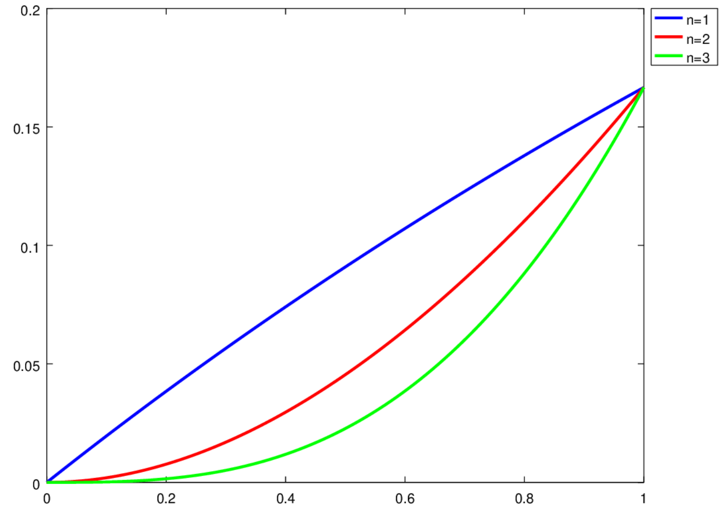
   Haga pruebas para encontrar el valor m que hace se cumpla la condición anterior. Esto es para seleccionar una partición para la cual no hay un cambio significativo en el valor de las estimaciones de las integrales, de modo que podemos considerar que tenemos buenas aproximaciones. No tiene que buscar el menor valor de m para el cual se cumple que $E < 0.00001$. Si en el primer intento que haga se cumple la condición, no hay más pruebas que hacer.

   Una vez que ha encontrado este valor para m, déjelo fijo en el programa e imprime el valor del error E.

   Si $\boldsymbol{b} = (b_1, ..., b_N)$ es el arreglo que devuelve la función que calcula $F(n)$ usando (2), haga que el programa imprima una tabla de valores en la que cada fila tenga los siguientes datos:

$$n \qquad a_{n2} \qquad b_n \qquad \left| \frac{b_n - a_{n2}}{a_{n2}} \right|$$

   Revise la tabla y escriba en el reporte para que valor n considera que el error relativo da un “salto” que hace que afecta de forma significativa a la secuencia $b_n, b_{n+1}, ...$ que hace que los errores se disparen. Finalmente, se puede ver que $\frac{x^n}{5+x} > \frac{x^{n+1}}{5+x}$ para $x \in (0, 1)$:



Escriba en el reporte un comentario sobre el problema que puede tener el método de integración conforme n aumenta y si se puede corregir incrementando la discretización del intervalo $[0, 1]$.

Ejercicio 3. (5 puntos)
Resolver el problema de valores en la frontera

$$\begin{aligned} y'' &= \sin x - y \qquad x \in (0, \pi/2), \\ y(0) &= 0 \\ y(\pi/2) &= 0 \end{aligned}$$

La solución exacta del problema es

$$y(x) = -x\cos(x)/2.$$

Opción 1: Programe el método de disparo utilizando el método de Runge-Kutta de orden 2 para resolver un problema de valor inicial

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= \sin x - y_1, \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= z_0 \end{aligned}$$

Escriba una función que reciba vector que tiene los nodos de la discretización uniforme $0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = \pi/2$ y el valor z_0. La función debe aplicar el método de disparo para encontrar el valor z_k tal que al poner $y'(0) = z_k$ en la condición inicial y resolviendo el PVI mediante el método de Runge-Kutta de orden 2, se obtengan las aproximaciones y_i de la solución del PVI de modo que $|y_n| < 0.0001$, para aceptar estos valores como solución del problema de valores en la frontera.

La función debe devolver un arreglo que tenga los valores y_i.

Opción 2: Use el método de diferencias finitas. Escriba en el reporte el sistema de ecuaciones que resulta al aplicar este método para obtener las aproximaciones y_i de la solución del problema en cada nodo de la discretización del intervalo $[0, \pi/2]$.

Escriba una función que reciba vector que tiene los nodos de la discretización uniforme $0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = \pi/2$, construya el sistema de ecuaciones y devuelva un arreglo con los valores y_i de la solución numérica en los nodos.

- Escriba un programa que calcule la solución del problema de valores en la frontera usando alguna de las opciones anteriores.

  Genere una partición uniforme del intervalo $[0, \pi/2]$ usando $n = 50$ subintervalos.

  Si usa el método de disparo, utilice como primeros intentos $z_0 = 10$ y $z_1 = 8$.

  Imprima los primeros y últimos valores del vector que tiene las aproximaciones y_i.

  Reporte el error absoluto promedio entre las aproximaciones y la verdadera solución del problema:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |y_i - y(x_i)|.$$