Benjamín Rivera

Actividad 2: Regla de Cramer

Universidad Abierta y a Distancia de México
TSU en Biotecnología

Materia: Álgebra Lineal
Grupo: BI-BALI-2002-B1-012
Unidad: Unidad 3

Matricula: ES202105994

Fecha de entrega: 31 de julio de 2020

Calcula los determinantes de las siguientes matrices por el Método de Cramer

Dado que las instruccinoes son un poco confusas (porque el metodo de Cramer sirve para obtener las soluciones de un sisitema y nos estan pidiendo la determinante de las matrices) y como no nos dan un vector X para resolver las ecuaciones, entonces, únicamente obtendremos las determinantes por el método de *menores y cofactores*.

A. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 7 & 8 & 6 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

,decidimos utilizar el método por columnas, y tomamos $j = 1$. Siguiendo lo anterior sabemos que tendremos que trabajar con las submatrices a_1, a_2 y a_3, las cuales quedan definidas por

$$\begin{aligned} a_3 &= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \\ a_2 &= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ a_1 &= \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de eso seguimos y aplicando nuestra formula obtenemos que

$$\begin{aligned} det(A) &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot C_{ij} \\ &= 5 \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 5(-10) - 7(-5) + 6(0) = -15 \end{aligned}$$

B. Sea

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

,decidimos utilizar el método por renglones, y tomamos $i = 2$. Siguiendo lo anterior sabemos que tendremos que trabajar con las submatrices b_1, b_2 y b_3, las cuales quedan definidas por

$$\begin{aligned} b_1 &= \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \\ b_2 &= \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \\ b_3 &= \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de eso seguimos y aplicando nuestra formula obtenemos que

$$\begin{aligned} det(B) &= \sum_{j=1}^{m} b_{ij} \cdot C_{ij} \\ &= -3 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ &= 3(33) - 5(30) + 3(3) = -42 \end{aligned}$$

Calcula los determinantes de los siguientes sistemas de ecuaciones

Para este ejercicio primero calcularemos la determinante del sistema, y de cada una de las variables, con el método de menores y coproductos. Después usaremos el método de cramer para obtener las soluciones del sistema.

A. Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x - y + z &= 7 \\ 4x + 2y - 2z &= 10 \\ 2x + 3y + z &= 23 \end{aligned}$$

obtenemos la matriz extendida

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & -2 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & 23 \end{pmatrix}$$

para la cual debemos obtener los determinantes de

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\delta_x = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 10 & 2 & -2 \\ 23 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\delta_y = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 4 & 10 & -2 \\ 2 & 23 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\delta_z = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 7 \\ 2 & -2 & 10 \\ 3 & 1 & 23 \end{pmatrix}$$

para encontrar los determinates trabajaremos sobre columnas bloqueando la fila 1, por lo que

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \det\begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 10 & 2 & -2 \\ 23 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 7\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 23 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 23 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 7(8) + 1(56) + 1(-16) = 96 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_y &= \det\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 4 & 10 & -2 \\ 2 & 23 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1\begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 23 & 1 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 23 \end{vmatrix} \\ &= 1(56) - 7(8) + 1(72) = 72 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_z &= \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 4 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 23 \end{pmatrix} \\ &= 1\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 23 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 23 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1(16) + 1(72) + 7(8) = 144 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1(8) + 1(8) + 1(8) = 24 \end{aligned}$$

Y con estas determinantes calculadas podemos utilizar el método de Cramer, por lo que

$$\begin{aligned} x &= \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{96}{24} = 4 \\ y &= \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{72}{24} = 3 \\ z &= \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{144}{24} = 6 \end{aligned}$$

B. Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 4 \\ 4x + 2y - 2z &= 10 \\ x - 3y - 3z &= 3 \end{aligned}$$

obtenemos la matriz extendida

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & -2 & 10 \\ 1 & -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

para la cual debemos obtener el determinante de

$$\delta = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\delta_x = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 10 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\delta_y = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 10 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\delta_z = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 10 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

para encontrar los determinates, al igual que con el ejercicio anterior, trabajaremos sobre las columnas, bloqueando la fila 1, de donde obtenemos que

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \det\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 10 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \\ &= 4\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 4(-12) - 3(-24) + 1(-36) = -12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_y &= \det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 10 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \\
&= 2\begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 2(-24) - 4(-10) + 1(2) = -6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \\
&= 2\left(\begin{matrix} 2 & -2 \\ -3 & -3 \end{matrix} \right| - 3\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \\
&= 2(-12) - 3(-10) + 1(-14) = -8
\end{aligned}$$

Y con estas determinantes calculadas podemos utilizar el método de Cramer, por lo que

$$\begin{aligned}
\Delta_z &= \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 10 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\
&= 2\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \\
&= 2(36) - 3(2) + 4(-14) = 10
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2} \\
y &= \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4} \\
z &= \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{10}{-8} = -\frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Referencias

[1] UnADM. (2020). *U3 | Determinantes*. 31 de julio de 2020, de División de Ciencias de la Salud, Biológicas y Ambientales Sitio web: https://dmd.unadmexico.mx/contenidos/DCSBA/BLOQUE1/BI/01/BALI/unidad_03/descargables/BALI_U3_Contenido.pdf

[2] BenchHPZ. (2020). *Unidad 3*. 31 de julio de 2020, de GitHub Sitio web: https://github.com/BenchHPZ/UnADM-Biotecnologia/tree/master/B1-1/BALI/Actividades/BALI_U3_BERC.ipynb