UnADM
Universidad Abierta y a Distancia de México

Primer semestre

Álgebra lineal

Cuaderno de ejercicios

División de Ciencias de la Salud, Biológicas y Ambientales

Álgebra lineal

Cuaderno de ejercicios

Índice

Unidad 1

1.2.2. Magnitud y dirección de un vector

La magnitud de un vector con punto inicial en (a_1, b_1) y punto final en (a_2, b_2), es igual a:

$$\sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$$

Ejemplo: la magnitud del vector que inicia en (7, -4) y termina en (3, -1), es igual a 5, ya que:

$$\sqrt{(3-7)^2 + [-1-(-4)]^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Recuerda que cuando sólo se indica un punto, éste corresponde al punto final del vector, y el origen se considera como su punto inicial.

Instrucciones:
Determina la magnitud de los siguientes vectores:

1. (3, 5)
2. (7, -2)
3. (-7, -5)
4. (0, -4)
5. (6, 0)

La dirección de un vector con punto inicial en (a_1, b_1) y punto final en (a_2, b_2), es igual al ángulo θ, medido en radianes, que forma el vector con el lado positivo del eje X. Donde:

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{|b|}{|a|}\right)$$

Ejemplo: la magnitud del vector que inicia en (7, -4) y termina en (3, -1), es aproximadamente igual a 143.1301, ya que:

Primero, llevamos el vector al origen

$$a = 3 — 7 = -4$$
$$b = -1 - (4) = -1 + 4 = 3$$

Entonces, tenemos el vector (a, b) = (-4, 3), cuya dirección es igual a la del vector original.

Entonces,

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{|3|}{|-4|}\right) = tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 36.8699°$$

Y como la dirección se da en ángulos medidos en radianes, tenemos que:

$$\varphi = \pi - \theta = 180 - 36.8699 = 143.1301$$

El sentido de un vector está dado por la ubicación de su punto final con respecto de su punto inicial.

Ejemplo: el sentido del vector que inicia en (7, -4) y termina en (3, -1), es hacia la izquierda y hacia arriba, ya que:

Su punto final está a la izquierda y arriba de su punto inicial.

Instrucciones:
Encuentra la dirección y el sentido de los siguientes vectores.

a) u = (1, -6)
b) v = (-11, -7)
c) v = (1, 1)
d) v = (-1, 2)
e) v = (-1, 2)

1.2.4. Vectores unitarios

El vector unitario de un vector v dado, cuya magnitud es $|v|$, es igual a:

$$\frac{v}{|v|}$$

Ejemplo: el vector unitario del vector que inicia en (7, -4) y termina en (3, -1), es $\left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, ya que:
Primero se lleva el vector al origen como punto inicial:

$$a = 3—7 = -4$$
$$b = -1 - (4) = -1 + 4 = 3$$

Y además sabemos que la magnitud de este vector es igual a 5.

Entonces, tenemos el vector (a, b) = (-4, 3). Así que su vector unitario es:

$$\frac{(-4,3)}{5} = \left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

Instrucciones:
Calcula los vectores unitarios, de cada uno de los vectores que se te presentan a continuación.

a) u = (5, 2)
b) v = (6, 4)
c) w = (7, -2)
d) u = (-10, 8)
e) v = (4, 4)
f) w = $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
g) u = $\left(\frac{36}{10}, \frac{64}{10}\right)$
h) v = $\left(-\frac{5}{\sqrt{3}}, 2\right)$
i) w = $(\tan\theta, 1)$

1.2.6. Igualdad de vectores

Dos vectores son iguales si llevados al origen tienen el punto final igual.

Ejemplo: el vector unitario del vector que inicia en (7, -4) y termina en (3, -1), es igual al vector que inicia en (4, 1) y termina en (0, 4), ya que:
Primero se lleva cada vector al origen como punto inicial:

$$a_1 = 3 — 7 = -4$$
$$b_1 = -1 - (4) = -1 + 4 = 3$$

$$a_2 = 0 — 4 = -4$$
$$b_2 = 4 - 1 = 3$$

Podemos ver que los dos vectores son iguales $(a_1, b_1) = (-4,3) = (a_2, b_2)$

Por lo tanto, el vector unitario del vector que inicia en (7, -4) y termina en (3, -1), es igual al vector que inicia en (4, 1) y termina en (0, 4).

Instrucciones:
Determina si los siguientes puntos son extremos de vectores iguales, los puntos iniciales de los vectores son M y P, los puntos finales de los mismos son N y Q respectivamente.

a) M = (2, 4), N = (0, 1); P = (-9, -18) y Q = (-11, -21)
b) M = (- 2, - 6), N = (7, 11); P = (-37, 19) y Q = (-28, 36)
c) M = (9, 2), N = (4, 6); P = (-11, -11) y Q = (5, -4)
d) M = (-7, 3), N = (8, 9); P = (3, 10) y Q = (18, 16)
e) M = (2, 4), N = (0, 1); P = (3, 10) y Q = (18, 16)

1.3.3. Suma de vectores

La suma de dos vectores $u = (a_1, b_1)$ y $v = (a_2, b_2)$ es igual a:

$$u + v = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

Recuérdese que si los vectores no tienen como punto inicial al origen entonces primero deberán ser llevados allá. De ahora en adelante haremos esto sin más explicación.

Ejemplo: la suma de los vectores (a_1, b_1), que inicia en (7, -4) y termina en (3, -1), y (a_2, b_2), que inicia en (2, -2) y termina en (6, -1), es igual al vector (0, 4), ya que:

Primero se lleva cada vector al origen como punto inicial:

$$a_1 = 3 — 7 = -4$$
$$b_1 = -1 - (4) = -1 + 4 = 3$$

$$a_2 = 6 — 2 = 4$$
$$b_2 = -1 - (-2) = -1 + 2 = 1$$

Así que:

$$u + v = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (-4 + 4, 3 + 1) = (0, 4)$$

Instrucciones:

1. **Encuentra** la suma de los siguientes vectores

a) u = (5, -3), v = (4, 2)
b) u = (1, 7), v = (2, -2)
c) u = (-11, -6), v = (13, 9)
d) u = (6, 6, 2), v = (3, 1, 8)
e) u = (5, 7, 0), v = (6, 2, -11)

2. **Encuentra** la magnitud, dirección, sentido y el vector unitario del vector resultante de la suma de los vectores anteriores.

1.3.4. Resta de vectores

La resta de dos vectores $\mathrm{u} = (\mathrm{a}_1, \mathrm{b}_1)$ y $\mathrm{v} = (\mathrm{a}_2, \mathrm{b}_2)$ es igual a:

$$\mathrm{v} - \mathrm{u} = (\mathrm{a}_2 - \mathrm{a}_1, \mathrm{b}_2 - \mathrm{b}_1)$$

Ejemplo: la resta de los vectores (a_1, b_1), que inicia en (7, -4) y termina en (3, -1), y (a_2, b_2), que inicia en (2, -2) y termina en (6, -1), es igual al vector (8,-2), ya que:

Primero se lleva cada vector al origen como punto inicial:

$$a_1 = 3 — 7 = -4$$
$$b_1 = -1 - (4) = -1 + 4 = 3$$

$$a_2 = 6 — 2 = 4$$
$$b_2 = -1 - (-2) = -1 + 2 = 1$$

La gráfica muestra el vector original coordenada a subíndice uno coma be subíndice uno inicia en coordenada siete coma menos cuatro y termina en la coordenada tres coma menos uno. La coordenada siete coma menos cuatro se dirige hacia la izquierda y la coordenada tres coma menos cuatro se dirige hacia abajo.

La gráfica muestra el vector original con coordenadas iniciales siete coma menos cuatro y coordenadas final es tres coma menos uno.

El punto siete coma menos cuatro se dirige a la izquierda y hacia arriba para alcanzar al punto tres coma menos uno eso de los subíndices significa otra cosa sólo se están haciendo bolas

Así que:

$$\mathrm{v} - \mathrm{u} = (\mathrm{a}_2 - \mathrm{a}_1, \mathrm{b}_2 - \mathrm{b}_1) = (4 - (-4), 1 - 3) = (8, -2)$$

Instrucciones:
Encuentra las diferencias u-v y v-u de los siguientes vectores.

a) u = (1, 1, 2), v = (0, 2, 1)
b) u = (6, 0, 2), v = (3, 5, 1)
c) u = (6, 1), v = (7, -1)

d) u = (-5, 0), v = (3, 1)
e) u = (11, -8), v = (0, 7)
f) u= (3, 4), v = (6, -1)

1.4.1. Producto escalar

El coseno del ángulo entre dos vectores está dado por el producto escalar entre ellos y por sus magnitudes:

$$\cos\theta \;=\; \frac{u\cdot v}{|u|\cdot|v|}$$

Entonces, el ángulo formado entre dos vectores es igual a:

$$\theta = \cos^{-1}(\frac{u\cdot v}{|u|\cdot|v|})$$

Ejemplo: el ángulo formado entre los vectores (a_1, b_1), que inicia en (7, -4) y termina en (3, -1), y (a_2, b_2), que inicia en (2, -2) y termina en (6, -1), es aproximadamente igual a $140.9061°$, ya que:

Primero se lleva cada vector al origen como punto inicial:

$$a_1 = 3 — 7 = -4$$
$$b_1 = -1-(4) = -1+4 = 3$$

$$a_2 = 6 — 2 = 4$$
$$b_2 = -1-(-2) = -1+2 = 1$$

Luego se sacan las magnitudes de los vectores:

$$|(a_1, b_1)| = \sqrt{(-4)^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$|(a_2, b_2)| = \sqrt{(4)^2+1^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

Entonces,

$$\cos\theta \;=\; \frac{u\cdot v}{|u|\cdot|v|} = \frac{(-4i+3j)\cdot(4i+1j)}{5(\sqrt{17})} = \frac{-16+3}{5(\sqrt{17})} = \frac{-13}{5(\sqrt{17})}$$

De donde,

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-16}{5(\sqrt{17})}\right) \approx 140.9061°$$

Instrucciones:
Encuentra el ángulo que existe entre los siguientes pares de vectores.

a) u = 2i – 4j, v = 3i + 2j
b) u = 6i – 11j, v = 11i + 9j
c) u = i + j, v = – 5i + 7j
d) u = 5i – 4j, v = 3i + 4j
e) u = 25i + 45j, v = 5i + 9j
f) u = -13i -10j, v = 13i – 10j

1.4.2. Condición de perpendicularidad

Dos vectores son perpendiculares si el producto punto entre ellos es igual a cero.

Ejemplo: los vectores (a_1, b_1), que inicia en (7, -4) y termina en (3, -1), y (a_2, b_2), que inicia en (2, -2) y termina en (6, -1), no son perpendiculares ya que:

Primero se lleva cada vector al origen como punto inicial:

$$a_1 = 3 — 7 = -4$$
$$b_1 = -1 - (4) = -1 + 4 = 3$$

$$a_2 = 6 — 2 = 4$$
$$b_2 = -1 - (-2) = -1 + 2 = 1$$

Luego, obtenemos el producto punto entre ellos:

$$u \cdot v = (-4i + 3j) \cdot (4i + 1j) = -16 + 3 = -13$$

Dado que el producto punto es distinto de cero, los vectores no son perpendiculares.
De hecho, vimos que el ángulo formado entre ellos es aproximadamente igual a $140.9061°$, lo cual verifica que efectivamente los vectores no son perpendiculares.

Instrucciones:
Establece si los siguientes pares de vectores son o no perpendiculares entre sí.

1) u = (3,5), v = (-5, 3)
2) u = (8, -2), v = (-1, 4)
3) u = (0,4), v = (2, 0)
4) u = (6, 9), v = (2, -3)
5) u = (5, 0), v= (-5, 0)
6) u = (0, 11), v = (-3, 0)

1.4.5. Producto cruz

El producto cruz entre dos vectores $u = a_1 i + b_1 j + c_1 k$ y $v = a_2 i + b_2 j + c_2 k$, se define como:

$$u \times v = (b_1 c_2 - b_2 c_1) i + (a_2 c_1 - a_1 c_2) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k$$

Ejemplo: El producto cruz de los vectores u = i + j – k y v = 6j + k – 5k es igual al vector $-4i - j - 5k$, ya que:

$$u \times v = (b_1 c_2 - b_2 c_1) i + (a_2 c_1 - a_1 c_2) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k$$

$$= [(1)(-5) - (1)(-1)]i + [(6)(-1) - (1)(-5)]j + [(1)(1) - (6)(1)]k$$

$$= (-5 + 1)i + (-6 + 5)j + (1 - 6)k = -4i - j - 5k$$

Instrucciones:
Calcula el producto cruz de los siguientes vectores.

1) u = i + j – k, v = 2i – 3j + 5k
2) u = 3i – 4j + 5k, v = 6j + k – 5k
3) u = 11i + 15k, v = 2i + 2j + 2 k
4) u = j – 5k + I, v = 3k + 7i – 4j
5) v = 2j + 5k – 4i, v = 100i + 200j + 300k
6) u = 0.1i – 0.7j + 0.4k, v = 0.09i + 0.02j – 0.4k

Aplicación de vectores: resolución de problemas a través de las propiedades del producto punto y cruz.

1. **Lee** con atención el problema.

Una empresa mexicana puso en marcha un proyecto de biotecnología en el que crearán plantas transgénicas, el objetivo es lograr una producción anual de cada uno de los siguientes productos: 75 Ton de café con mejor sabor, resistente a las plagas, con menos cafeína; 50 Ton de maíz resistente a los insectos; 40 Ton de girasol, con mejor composición de ácidos grasos. 80 Ton de manzana, resistente a las plagas y a los herbicidas; 150 Ton de melón más duradero; 200 Ton de papas, con menor capacidad de absorción de aceite, resistentes a las plagas; 95 Ton de lechugas resistentes a las plagas y 150 Ton de tomates resistentes a las plagas. La tonelada de café la venden en $40 000, la tonelada de maíz en $3, 000, la tonelada de girasol en $4 000, la tonelada de manzana en $15 000, la tonelada de melón en $3 500, la tonelada de papa en $7 000, la tonelada de lechugas en $2 000 y la de tomates en $4 000.

2. Con base en la información del problema.

a) **Representa** las cantidades en toneladas de la producción anual de cada producto mediante un vector.
b) **Representa** el precio de venta de una tonelada de cada producto mediante un vector.
c) **Encuentra** el vector que representa la cantidad total que resulta de la venta de todos los productos.

UNIDAD 2

2.2.1. Suma y resta de matrices

Para sumar o restar dos matrices, éstas deben ser de la misma dimensión.
La suma, y la resta, de dos matrices, se realiza sumando, o restando, según sea el caso, cada una de las entradas correspondientes.

Ejemplo: La suma de las matrices $A = \begin{pmatrix} -20 & 8 \\ 19 & -25 \\ 13 & 21 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 7 & 8 \\ -7 & 10 \end{pmatrix}$ es igual a la matriz $\begin{pmatrix} -8 & 20 \\ 26 & -17 \\ 6 & 31 \end{pmatrix}$, ya que:

$$\begin{pmatrix} -20 & 8 \\ 19 & -25 \\ 13 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 7 & 8 \\ -7 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20+12 & 8+12 \\ 19+7 & -25+8 \\ 13+(-7) & 21+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 20 \\ 26 & -17 \\ 6 & 31 \end{pmatrix}$$

Mientras que la resta de las matrices $A = \begin{pmatrix} -20 & 8 \\ 19 & -25 \\ 13 & 21 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 7 & 8 \\ -7 & 10 \end{pmatrix}$ es igual a la matriz $\begin{pmatrix} -32 & -4 \\ 12 & -33 \\ 20 & 11 \end{pmatrix}$, ya que:

$$\begin{pmatrix} -20 & 8 \\ 19 & -25 \\ 13 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 7 & 8 \\ -7 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20-12 & 8-12 \\ 19-7 & -25-8 \\ 13-(-7) & 21-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 & -4 \\ 12 & -33 \\ 20 & 11 \end{pmatrix}$$

Instrucciones:
Resuelve las siguientes operaciones con matrices.

Si $A = \begin{pmatrix} 8 & -12 \\ 19 & -25 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -20 & -16 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

Calcula A + B =
Calcula A - B =

Sea $C = \begin{pmatrix} 87 & -36 & 12 \\ 13 & -74 & 16 \\ 25 & 33 & 44 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 15 & 23 & -19 \\ -45 & 17 & 28 \\ 21 & -51 & 63 \end{pmatrix}$

Halla C + D =
Halla C-D =

2.2.3. Producto matricial

Para que sea posible el producto cruz entre dos matrices A y B, es necesario que el número de columnas de A sea igual al número de renglones de B.

Dadas las matrices A de m x n y B de n x p, el elemento c_{ij} de la matriz que resulta del producto cruz de ambas es igual a:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

Ejemplo: El producto cruz de las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & -8 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ es igual a $\begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 2 & 71 \\ 10 & 38 \end{pmatrix}$, ya que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & -8 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (2)(4) + (3)(3) + (4)(-2) & (2)(1) + (3)(-7) + (4)(8) \\ (7)(4) + (-8)(3) + (1)(-2) & (7)(1) + (-8)(-7) + (1)(8) \\ (4)(4) + (2)(3) + (6)(-2) & (4)(1) + (2)(-7) + (6)(8) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 + 9 - 8 & 2 - 21 + 32 \\ 28 - 24 - 2 & 7 + 56 + 8 \\ 16 + 6 - 12 & 4 - 14 + 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 2 & 71 \\ 10 & 38 \end{pmatrix}$$

Instrucciones:
Multiplica las siguientes matrices:

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, determina A x B = y B x A =

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcula A x B = y B x A

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calcula A x B =

Calcula B x A =

2.3.2. Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales

Dado un sistema de ecuaciones lineales, se denomina matriz principal asociada a dicho sistema a la matriz cuyas entradas son los coeficientes del sistema, organizados en columnas de acuerdo con la variable a la cual están asociados dichos coeficientes.

Ejemplo: la matriz principal asociada al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Es igual a

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Ya que estos son los coeficientes asociados a cada variable y están organizados en columnas de acuerdo con la variable con la cual se asocian, es decir, en la primera columna están los coeficientes de x_1, en la segunda columna están los coeficientes de x_2 y en la tercera columna están los coeficientes de x_3.

Dado un sistema de ecuaciones lineales, se denomina matriz ampliada asociada a dicho sistema a la matriz cuyas entradas son los coeficientes del sistema, organizados en columnas de acuerdo con la variable a la cual están asociados dichos coeficientes y en cuya última columna se encuentran las constantes del sistema.

Ejemplo: la matriz principal asociada al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Es igual a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 4 & 1 & -5 & 9 \end{array}\right)$$

Ya que estos son los coeficientes asociados a cada variable y están organizados en columnas de acuerdo con la variable con la cual se asocian, es decir, en la primera columna están los coeficientes de x_1, en la segunda columna están los coeficientes de x_2 y en la tercera columna están los coeficientes de x_3. Y, finalmente, en la última columna se encuentran las constantes del sistema.

Instrucciones:
Encuentra la matriz principal y la matriz ampliada asociadas a los siguientes sistemas de ecuaciones:

1.-
$x_1 - x_2 + 4x_3 = 7$
$4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10$
$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 23$

2.-
$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$
$4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$
$x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 3$

3.-
$2x_1 - 6x_2 + 10x_3 = 1$
$-4x_1 - 3x_2 + 20x_3 = 1$
$10x_1 - 9x_2 - 15x_3 = -1$

2.5.1. Método de eliminación de Gauss

El método de eliminación de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones consiste en llevar la matriz ampliada asociada al sistema a una matriz diagonal superior con unos en las entradas de la diagonal, a través de las operaciones con renglones. Y, posteriormente, ir sustituyendo los valores de las variables en las ecuaciones de la matriz diagonalizada.

Ejemplo: Las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Son:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Ya que la matriz ampliada asociada al sistema es igual a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 4 & 1 & -5 & 9 \end{array}\right)$$

Convertiremos esta matriz en una matriz diagonal superior, con unos en la diagonal, a través de operaciones con los renglones.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 4 & 1 & -5 & 9 \end{array}\right)$$

Primero, como tenemos cero en la entrada a_{21}, entonces multiplicamos el segundo renglón por $\frac{1}{2}$ para hacer 1 en la entrada a_{22}.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 4 & 1 & -5 & 9 \end{array}\right)$$

Multiplicamos el primer renglón por -4 y se lo sumamos al tercer renglón para hacer cero en la entrada a_{31}.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 9 & -9 & 9 \end{array}\right)$$

Multiplicamos por-9 el renglón dos y se lo sumamos al renglón 3 para hacer cero en la entrada a_{32}.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 27 & -27 \end{array}\right)$$

Multiplicamos por $\frac{1}{27}$ para hacer uno en la entrada a_{33}.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Así, obtenemos el valor de x_3, $x_3 = -1$.

Sustituimos este valor en la ecuación

$$x_2 - 4x_3 = 4$$

Tenemos que

$$x_2 - 4(-1) = 4$$
$$x_2 + 4 = 4$$
$$x_2 = 4 - 4$$
$$x_2 = 0$$

De donde $x_2 = 0$.

Finalmente, sustituimos ambos valores en la ecuación

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

Tenemos que

$$x_1 - 2(0) + (-1) = 0$$
$$x_1 - 0 - 1 = 0$$
$$x_1 - 1 = 0$$
$$x_1 = 1$$

De donde $x_3 = 1$

Instrucciones:
Utiliza el método de eliminación de Gauss para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones. Indica en cada paso las operaciones que realizaste con los renglones de la matriz.

1.-
$x_1 - x_2 + 4x_3 = 7$
$4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10$
$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 23$

2.-
$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$
$4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$
$x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 3$

3.-
$2x_1 - 6x_2 + 10x_3 = 1$
$-4x_1 - 3x_2 + 20x_3 = 1$
$10x_1 - 9x_2 - 15x_3 = -1$

2.5.2. Método de Gauss-Jordan

El método de Gauss-Jordan para resolver sistemas de ecuaciones consiste en llevar la matriz ampliada asociada al sistema a una matriz identidad a través de las operaciones con renglones. Y de esa forma obtener los valores de las variables en las ecuaciones de la matriz identidad.

Ejemplo: Las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Son:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Ya que la matriz ampliada asociada al sistema es igual a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 4 & 1 & -5 & 9 \end{array}\right)$$

Convertiremos esta matriz en una matriz identidad a través de operaciones con los renglones.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 4 & 1 & -5 & 9 \end{array}\right)$$

Hemos transformado ya la matriz ampliada asociada al sistema en la matriz diagonal superior siguiente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Ahora multiplicamos el segundo renglón por 2 y lo sumamos con el primer renglón para hacer cero en la entrada a_{12}.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Multiplicamos el tercer renglón por 7 y lo sumamos con el primer renglón para hacer un cero en la entrada a_{13}.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Finalmente, multiplicamos el tercer renglón por 4 y lo sumamos con el segundo renglón para hacer cero en la entrada a_{23}.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Así, tenemos que las soluciones del sistema de ecuaciones son:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = -1$$

Instrucciones:
Utiliza el método de Gauss – Jordan para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. Indica en cada paso las operaciones que realizaste con los renglones de la matriz.

1.-
$x_1 - x_2 + 4x_3 = 7$
$4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10$
$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 23$

2.-
$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$
$4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$
$x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 3$
3.-
$2x_1 - 6x_2 + 10x_3 = 1$
$-4x_1 - 3x_2 + 20x_3 = 1$
$10x_1 - 9x_2 - 15x_3 = -1$

Aplicación de matrices: resolución de problemas utilizando sistemas de ecuaciones y matrices

Lee con atención el planteamiento del problema Productos transgénicos.

Un grupo de biólogos, pretenden observar la cantidad de productos transgénicos que se pueden obtener mediante su cultivo en un terreno determinado, para esto, supervisan la siembra de semillas de chiles y tomates transgénicos, una vez desarrollada la siembra y transcurrido un tiempo, se realiza la primera cosecha, de la cual se obtiene el 15% de chiles y el 25% de tomates. En la segunda cosecha se obtiene el 20% de chiles y el 25% de tomates. ¿Qué cantidad de semillas de chiles y tomates transgénicos se debe de sembrar si se pretende obtener un total de 5 toneladas en la primera cosecha y 9 toneladas de la segunda cosecha?

Instrucciones:
- **Construye** un sistema de ecuaciones lineales con los datos de las tres pruebas que se mencionan en el problema.
- **Representa** el sistema mediante su forma matricial.

A partir de los datos del problema Productos transgénicos, **realiza** lo siguiente:

-**Utiliza** el método de eliminación de Gauss y encuentra la cantidad en litros que se colocó en cada vaso de la primera, segunda y tercera sustancia.
-**Comprueba** tus resultados.
-**Utiliza** el método de Gauss-Jordan y encuentra la cantidad en litros que se colocó en cada vaso de la primera, segunda y tercera sustancia.
-**Comprueba** tus resultados.
-**Comprueba** tus resultados con los que obtuviste para el método de Gauss.

UNIDAD 3

3.1.1. Introducción a los determinantes

Los determinantes están definidos únicamente para matrices cuadradas.
Para obtener el determinante de una matriz se elige una fila, o bien una columna, y se multiplica cada una de las entradas a_{ij} de dicha fila o columna, por el cofactor $A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$.

Ejemplo: El determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -9 & 1 \\ -4 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es igual a cero, ya que:

Eligiendo la segunda columna tenemos que:

$$|A| = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -9 & 1 \\ -4 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-9)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (6)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (0)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= (-9)(-1)[(-4)(0) - (5)(0)] + (6)(1)[(5)(0) - (1)(0)] + (0)(-1)[(5)(5) - (1)(-4)] =$$

$$= 9(0) + 6(0) + (0)(29) = 0$$

Instrucciones:
Calcula el determinante de las siguientes matrices.

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$
b) $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$
c) $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -15 & 7 \end{pmatrix}$
d) $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -7 \\ -2 & -9 & -6 \\ 4 & -12 & 7 \end{pmatrix}$
e) $B = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -3 \\ 3 & 7 & 2 \\ -2 & -1 & 9 \end{pmatrix}$

f) $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 9 \\ 11 & 18 & -13 \end{pmatrix}$

g) $C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 & 4 \\ 9 & 16 & 11 & 8 \\ 7 & 0 & 1 & 3 \\ 15 & 0 & -32 & 1 \end{pmatrix}$

h) $C = \begin{pmatrix} 16 & 20 & 32 & 28 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \\ -7 & 15 & 21 & 10 \\ -4 & -5 & -8 & -7 \end{pmatrix}$

i) $C = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 9 & -2 \\ -9 & 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 16 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

j) $D = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -4 & 0 & -11 \\ 9 & 16 & 11 & 0 & 22 \\ -2 & 1 & 5 & 0 & -3 \\ 4 & -5 & -1 & 0 & -15 \\ 5 & -16 & 8 & 0 & -13 \end{pmatrix}$

3.1.3. Propiedades de los determinantes

Se vieron 7 propiedades de los determinantes que facilitan la obtención de los mismos.

Ejemplo: El determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -9 & 1 \\ -4 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es igual a cero, ya que:

Según la propiedad 1, si A es una matriz de n x n, tal que A tiene una fila o una columna de ceros, entonces |A|= 0.

Instrucciones:
Utiliza las propiedades anteriores y calcula el determinante de las siguientes matrices. Indica en cada caso la propiedad, o propiedades que utilizaste.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 3 & 15 & 21 \\ 81 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 9 & \frac{9}{2} & 7 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 15 & 10 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 16 & 13 & 6 & 4 \\ 11 & 7 & 3 & 15 \\ 8 & 1 & 8 & 2 \\ 9 & 6 & 15 & 1 \end{pmatrix}$

e) $B = \begin{pmatrix} 3 & 13 & 6 & 4 \\ 5 & 7 & 3 & 15 \\ 3 & 1 & 8 & 2 \\ 4 & 6 & 15 & 1 \end{pmatrix}$

f) $C = \begin{pmatrix} 13 & 13 & 6 & 4 \\ 6 & 7 & 3 & 15 \\ 5 & 1 & 8 & 2 \\ 5 & 6 & 15 & 1 \end{pmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 & 4 & 11 \\ -7 & 3 & -8 & 5 & 0 \\ 10 & 6 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & -12 & 8 & 4 & 1 \\ 15 & 0 & -7 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

h) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -7 & 2 & 9 \\ 6 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 11 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

i) $C = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -10 & 8 & 11 \\ -7 & 3 & -8 & 5 & 0 \\ 10 & 6 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & -12 & 8 & 4 & 3 \\ 15 & 0 & -7 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

3.2.1. Regla de Cramer

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales por medio de los determinantes del sistema, primero se obtienen los determinantes D_1, D_2, D_3, etc., cada uno de ellos asociados a las variables del sistema, y el determinante D de la matriz principal asociada al sistema.

La regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones lineales consiste en dividir cada uno de los determinantes obtenidos D_1, D_2, D_3, etc., entre el determinante D de la matriz principal asociada al sistema.

Donde D_i es igual al determinante principal asociado al sistema pero en el cual la columna i ha sido substituida por los valores de las constantes del sistema.

Según la regla de Cramer, los valores correspondientes de las variables estarán dados por:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D}$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D}$$
$$\vdots$$
$$x_n = \frac{D_n}{D}$$

Ejemplo: Las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Son:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Para aplicar el método de Cramer primero obtenemos los determinantes D_1, D_2, D_3 y D.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 1[(2)(-5) - (-8)(1)] - 0[(-2)(-5) - (1)(1)] + 4[(-2)(-8) - (1)(2)]$$

$$= 1(-10 + 8) - 0(10 - 1) + 4(16 - 2) = -2 - 0 + 56 = 54$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -8 \\ 9 & 1 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 0[(2)(-5) - (-8)(1)] - 8[(-2)(-5) - (1)(1)] + 9[(-2)(-8) - (1)(2)] =$$

$$= 0(-10 + 8) - 8(10 - 1) + 9(16 - 2) = 0 - 72 + 126 = 54$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & -8 \\ 4 & 9 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 1[(8)(-5) - (-8)(9)] - 0[(0)(-5) - (1)(9)] + 4[(0)(-8) - (1)(8)] =$$

$$= 1(-40 + 72) - 0(0 - 9) + 4(0 - 8) = 32 - 0 - 32 = 0$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \\ 4 & 1 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 1[(2)(9) - (8)(1)] - 0[(-2)(9) - (0)(1)] + 4[(-2)(8) - (0)(2)] =$$

$$= 1(18 - 8) - 0(-18 - 0) + 4(-16 - 0) = 10 - 0 - 64 = -54$$

De donde,

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{54}{54} = 1$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{0}{54} = 0$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-54}{54} = -1$$

Instrucciones:
Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de Cramer.
Indica cada uno de los determinantes que utilizaste.

1.-
$x_1 - x_2 + 4x_3 = 7$
$4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10$
$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 23$

2.-
$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$
$4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$
$x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 3$

3.-
$2x_1 - 6x_2 + 10x_3 = 1$
$-4x_1 - 3x_2 + 20x_3 = 1$
$10x_1 - 9x_2 - 15x_3 = -1$

Aplicación de determinantes: resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones y regla de Cramer

Instrucciones:

- **Lee** con atención el planteamiento de los problemas 1 y 2.
- Con base en la información que se te proporciona en cada uno de los problemas, **resuélvelos** con el método de la regla de Cramer.

Problema 1. Implementación de un plaguicida

En la implementación de un plaguicida que se utiliza en campo abierto, un grupo de biólogos descubrió que éste disminuye el ritmo cardiaco de los insectos dependiendo del tiempo en el cual estos se desplacen, después de algunos experimentos, tres biólogos analizaron el tiempo en el cual tres plagas distintas continuaban en movimiento, con las observaciones de los tres, establecieron 3 ecuaciones distintas en términos de sus tiempos, que representaron como $x_1, x_2\ y\ x_3$ para el biólogo 1, 2 y 3 respectivamente, los resultados que obtuvieron para las tres plagas fueron.

Plaga 1: Realizó un recorrido de 150 metros en un tiempo de $\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + 2x_3$

Plaga 2: Realizó un recorrido de 213 metros en un tiempo de $\frac{3}{8}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{7}x_3$

Plaga 3: Realizó un recorrido de 500 metros en un tiempo de $\frac{1}{9}x_1 - \frac{1}{12}x_2 + \frac{1}{2}x_3$

Con base en los datos anteriores:

- **Construye** un sistema de ecuaciones lineales, en el cual el vector de constantes este dado por los recorridos de las plagas en metros.
- **Encuentra** la matriz asociada al sistema que construiste.
- **Encuentra** la matriz inversa de la matriz asociada.
- **Calcula** el determinante de la matriz asociada.
- **Establece** los valores de los tiempos dados por los biólogos para resolver el sistema.

Problema 2. Proyecto petróleo

Un grupo de ingenieros establece que una vez que se agote el petróleo, el país quedaría sin éste preciado recurso no renovable, por esta razón han propuesto un proyecto que garantiza la duración del petróleo por un periodo de tiempo más largo, el proyecto consiste en extraer una cantidad determinada del preciado oro negro durante un día de la semana. Para esto, se necesita colocar un ingeniero en cada una de las 5 bombas de extracción, que registre la cantidad de hombres que trabajan en un día, así como la cantidad en litros que extraen. Para ello, la cantidad de petróleo en litros que se extraen en cada turno de una bomba determinada, se establece como:

x_1 para representar la cantidad de petróleo en litros que se extraen de cada bomba en el primer turno.
x_2 para representar la cantidad de petróleo en litros que se extraen de cada bomba en el segundo turno.
x_3 para representar la cantidad de petróleo en litros que se extraen de cada bomba en el tercer turno.
x_4 para representar la cantidad de petróleo en litros que se extraen de cada bomba en el cuarto turno.
x_5 para representar la cantidad de petróleo en litros que se extraen de cada bomba en el quinto turno.

Con respecto de las bombas, en un día se extrajeron de cada una de ellas 50 000 litros de petróleo. Además, los ingenieros obtuvieron los siguientes datos.

Bomba 1: Se registraron 7 trabajadores durante el primer turno, 5 trabajadores en el segundo turno, 8 trabajadores durante el tercer turno, 4 trabajadores durante el cuarto turno y 6 trabajadores durante el quinto turno.
Bomba 2: Se registraron 4 trabajadores, durante el primer turno, 12 trabajadores en el segundo turno, 8 trabajadores en el tercer turno, 6 trabajadores en el cuarto turno y 5 trabajadores en el quinto turno.
Bomba 3: Se registraron 5 trabajadores en el primer turno, 6 trabajadores en el segundo turno, 5 trabajadores en el tercer turno, 6 trabajadores en el cuarto turno y 5 trabajadores en el quinto turno.
Bomba 4: Se registraron 6 trabajadores en el primer turno, 4 trabajadores en el segundo turno, 6 trabajadores en el tercer turno, 7 trabajadores en el cuarto turno y 8 trabajadores en el quinto turno.
Bomba 5: Se registraron 7 trabajadores en el primer turno, 4 trabajadores en el segundo turno, 4 trabajadores en el tercer turno, 5 trabajadores en el cuarto turno y 10 trabajadores en el quinto turno.

Lo que se pretende es encontrar los valores de las cantidades x_i, que son las que nos permitirán continuar con la extracción del petróleo sin el abuso excesivo del mismo.

Realiza lo que se solicita:
1. **Representa** el problema mediante un sistema de ecuaciones lineales.
2. **Realiza** la matriz asociada al sistema de ecuaciones lineales del problema.
3. **Encuentra** el determinante de la matriz asociada.
4. **Encuentra** la inversa de la matriz asociada.
5. **Encuentra** los valores de los x_i.