



Primer semestre

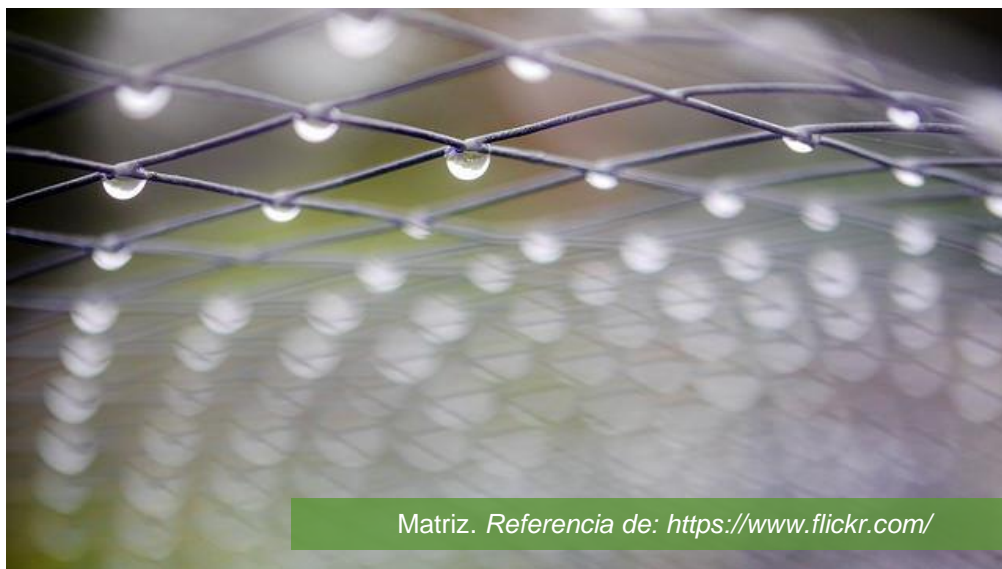
# Álgebra lineal

**U1** | Álgebra lineal



División de Ciencias de la Salud, Biológicas y Ambientales

# Álgebra lineal



Matriz. Referencia de: <https://www.flickr.com/>

## Índice

Presentación .....	4
Competencia específica .....	5
Propósitos .....	5
1.1. Historia del álgebra lineal .....	6
1.2. Vectores .....	8
1.2.1. Conceptos básicos .....	9
1.2.2. Magnitud y dirección de un vector .....	10
1.2.3. Vectores en el plano y en el espacio .....	14
1.2.4. Vectores unitarios .....	15
1.2.5. Componentes de un vector: horizontal y vertical .....	17
1.2.6. Igualdad de vectores .....	18
1.3. Operaciones con vectores .....	19
1.3.1. Multiplicación de un escalar por un vector .....	19
1.3.2. Propiedades del producto de un vector por un escalar .....	20
1.3.3. Suma de vectores .....	20
1.3.4. Resta de vectores .....	22
1.4. Productos vectoriales .....	24
1.4.1. Producto escalar .....	24
1.4.2. Condición de perpendicularidad .....	27
1.4.3. Propiedades del producto escalar .....	29
1.4.4. Aplicaciones del producto escalar .....	30
1.4.5. Producto cruz .....	31
1.5. Triples productos .....	33
1.5.1. Triple producto escalar .....	33
1.5.2. Triple producto vectorial .....	34
Cierre de la unidad .....	36
Fuentes de consulta .....	37

## Presentación

El álgebra lineal tiene un enfoque amplio, ya que se encarga del estudio de conceptos tales como vectores, matrices y sistemas de ecuaciones lineales. De manera más formal, el álgebra lineal estudia los espacios vectoriales y las transformaciones lineales.

En esta unidad revisarás temas de historia del álgebra lineal, vectores, operaciones con vectores, productos vectoriales y triples productos. También encontrarás ejemplos, ejercicios y planteamientos de problemas; conforme vayas conociendo la teoría podrás darte cuenta si esa información es útil para resolver los problemas.

Se considera que es muy importante conocer un poco el origen del álgebra lineal, ya que, desde la antigüedad hasta nuestros días, el ser humano ha utilizado las matemáticas para beneficiarse. Una de las primeras necesidades que tuvo el hombre fue la de contar; muestra de ello, lo puedes encontrar en las diferentes culturas: maya, china, inca, entre otras.

Las operaciones con vectores, tales como la suma, resta y multiplicación, te permitirán resolver situaciones de la vida cotidiana; por ejemplo, las ganancias que obtiene un comerciante se pueden determinar por medio del producto escalar. Los productos vectoriales tienen diversas aplicaciones, sobre todo en las ramas de la física; el triple producto te permitirá hallar el volumen de un paralelepípedo sin necesidad de aplicar la fórmula geométrica; esto lo puedes hacer representando la figura en el plano y conociendo los valores de cada uno de los componentes del vector.

En la actualidad, muchos problemas se plantean en términos de una ecuación o de un sistema de ecuaciones, los cuales contienen las restricciones de cada uno de los problemas. La interpretación de los resultados te permitirá elegir la mejor opción y de esta manera podrás ofrecer alternativas a la sociedad para que se vean beneficiados con las aplicaciones del álgebra lineal.

## Competencia específica

### Unidad 1

**Utiliza** vectores para resolver problemas de distintas áreas mediante el álgebra vectorial.

## Propósitos

**Identificar** los aspectos históricos que permitieron el desarrollo del álgebra lineal, así como representar los vectores en el plano y en el espacio para resolver problemas matemáticos por medio de los productos vectoriales.

## 1.1. Historia del álgebra lineal

Desde la antigüedad, el ser humano comenzó a preguntarse sobre diversos aspectos de la vida cotidiana lo que lo llevó a inventar herramientas que le permitieran medir longitudes, ordenar y contar objetos, así como reconocer fenómenos periódicos de la naturaleza. Como resultado de este proceso, el ser humano ha construido modelos que le han facilitado la tarea de resolver problemas concretos o que le han ayudado a encontrar una solución al problema específico que lo afecta. Todo esto con el propósito de favorecer tanto su forma de vida como la de los miembros de su medio local.

Hacia el año 1650 a.C., el sacerdote egipcio Ahmés escribió el Papiro de Rhind, que es uno de los documentos matemáticos más antiguos. En él se encuentran los primeros conocimientos acerca del álgebra lineal. Este documento contiene 85 problemas redactados en escritura hierática y fue concebido originalmente como un manual práctico para los no iniciados.

Por su parte, los babilonios sabían cómo resolver problemas concretos que involucraban ecuaciones de primer y segundo grado, completando cuadrados o por sustitución, así como ecuaciones cúbicas, bicuadráticas, y sistemas de ecuaciones lineales y no lineales. Algunos ejemplos que se encontraron sobre dichos problemas datan del último período sumerio, aproximadamente del año 2100 a.C.

En tanto, los matemáticos chinos durante los siglos III y IV a.C. continuaron la tradición de los babilonios y proporcionaron los primeros métodos del pensamiento lineal. Por ejemplo, en el tratado *Nueve capítulos sobre el Arte Matemático*, publicado durante la *Dinastía Han*, aparece el siguiente sistema lineal:

$$3x + 2y + z = 39$$

$$2x + 3y + z = 34$$

$$x + 2y + 3z = 26$$

Los matemáticos griegos, no se preocuparon por los problemas lineales, a pesar de que poseían un reconocido pensamiento lineal. En sus trabajos se aprecian algunas tentativas del análisis diofántico, especialmente en el estudio de las magnitudes (Libro V) y las propiedades aritméticas de los números enteros (Libro VII). Sin embargo, la solución general de la ecuación de segundo grado aparece en los Elementos de Euclides; no obstante, dichos elementos no representaban un pensamiento algebraico formalmente hablando, como el que se conoce en la actualidad.

En realidad, las formalidades algebraicas que se estudian en la matemática actual no vieron la luz sino hasta finales del siglo XVII, con el redescubrimiento y desarrollo de las ideas originales de los babilonios, y principalmente de los chinos, sobre el pensamiento lineal, y con la relación entre geometría y álgebra, basada en las ideas de René Descartes y de Pierre de Fermat. Así, hasta el siglo XVIII el álgebra fue el arte de resolver ecuaciones de grado arbitrario.

El álgebra lineal tuvo un fuerte impulso gracias al estudio de los sistemas de ecuaciones lineales.

En 1843, el matemático irlandés Sir William Hamilton descubrió los cuaterniones. En 1863, aparecen con Hamilton, Arthur Cayley (1821-1895) y Hermann Günther Grassmann (1809-1877) las nociones de vector y de espacio vectorial, como una axiomatización de la idea de “vector” que era manejada por los estudiosos de la Mecánica desde fines del siglo XVII; este hecho representó la génesis del cálculo vectorial y de la matemática moderna. Además, Grassmann que es considerado el maestro del álgebra lineal, introdujo el producto geométrico y lineal, siendo el primero de estos, equivalente al producto vectorial.

El primero que utilizó el término “matriz” fue el matemático inglés James Joseph Sylvester en 1850, quien definió una matriz como un arreglo cuadrilongo de términos. Tiempo después estableció contacto con Cayley, quien rápidamente entendió la importancia del concepto de matriz.

Uno de los principales méritos de Cayley fue la introducción de las operaciones básicas de suma y multiplicación de matrices, aunque indicios de éstas ya aparecían en trabajos anteriores de Euler, Lagrange y Gauss. Además, Cayley probó que la multiplicación de matrices es asociativa, e introdujo las potencias de una matriz, así como las matrices simétricas y antisimétricas.

Desde entonces, el álgebra ha evolucionado y seguido varias líneas de desarrollo; por ejemplo, el álgebra moderna ha evolucionado desde el álgebra clásica, al poner más atención en las estructuras matemáticas. Algunos consideran al álgebra moderna como un conjunto de objetos con reglas que los conectan o relacionan. Así, en su forma más general, una buena definición de álgebra es la que dice que *el álgebra es el idioma de las matemáticas*.

En la actualidad, en forma más particular, puede decirse que el *álgebra lineal* es la rama de las matemáticas que estudia conceptos tales como vectores, matrices, sistemas de ecuaciones lineales y, en un enfoque más formal, espacios vectoriales y sus transformaciones lineales. En esta materia estudiarás la parte de vectores, matrices y sistemas de ecuaciones.

Esta área de estudio se relaciona con muchas ramas dentro y fuera de las matemáticas, tales como análisis funcional, ecuaciones diferenciales, investigación de operaciones, gráficas por computadora, ingeniería, etc.

## 1.2. Vectores

### ¿Sabías que...?

*El matemático irlandés Sir William Hamilton (1805-1865) inició el estudio de vectores; él deseaba encontrar una forma de representar ciertos objetos en el plano y en el espacio, lo que lo llevó a descubrir los cuaterniones. Este concepto condujo al desarrollo de lo que actualmente se llaman vectores.*

*Lord Kelvin dijo que los cuaterniones, “aun cuando son bellamente ingeniosos, han sido un mal peculiar para todos aquellos que los han manejado de alguna manera, y los vectores... nunca han sido de la menor utilidad para ninguna criatura”.*

*Sin embargo, Kelvin estaba equivocado, hoy en día, casi todas las ramas de la física clásica y moderna se representan por medio del lenguaje de vectores. Estos también se usan cada día más en las ciencias biológicas y sociales.<sup>1</sup>*

En diferentes libros se encuentra el concepto de vector; en la mayoría de ellos se representa como una línea que apunta hacia alguna parte. En diferentes áreas de las ciencias se utilizan los vectores para facilitar la información que se tiene de algún fenómeno, proyecto o situación que se plantea, debido a que ofrece la información de manera general y ordenada, podría decirse que es un símbolo general que facilita la representación de un problema.

Cabe mencionar que existen diferentes métodos para resolver problemas, evitando el uso de los vectores; sin embargo, éste enseña a representar la información de manera ordenada, general y simple, en muchos de los casos.

Se ha hecho uso de los vectores sin que se den cuenta: al ver una señal en la carretera en la cual se muestra una flecha, al ver los juegos de video cuyos controles indican diferentes direcciones para moverse, al ver correr el agua en una pendiente y en fin, en varias situaciones más. A continuación, se presentan los elementos que forman a los vectores, así como algunas de sus características más importantes.

---

<sup>1</sup> Ortega Pulido, Pedro. (2002). *La enseñanza del álgebra lineal mediante sistemas informáticos de cálculo algebraico. Trabajo de grado*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

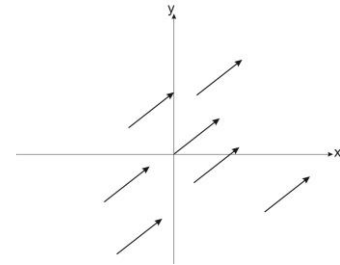


### 1.2.1. Conceptos básicos

Uno de los conceptos más importantes en matemáticas es el de vector, por medio de un vector se puede ubicar el lugar en el que se encuentra un avión, un barco, un automóvil, etc. Para determinar la ubicación de cada uno de ellos, es necesario, conocer la distancia, la dirección y el sentido.

**Definición geométrica de un vector.** El conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos, equivalentes a un segmento de recta dirigido se llama vector. Cualquier segmento de recta en ese conjunto, se conoce como una representación del vector.

Entonces, un vector tiene muchas representaciones, dependiendo del lugar donde se ubique su punto inicial, tal y como lo muestra la siguiente figura, donde aparecen varias representaciones del mismo vector.



**Definición algebraica de vector.** Un vector  $v$  en el plano coordenado, es un par ordenado de números reales  $(a, b)$ . Los números  $a$  y  $b$  se llaman elementos o componentes del vector  $v$ .

Las partes que componen un vector son:

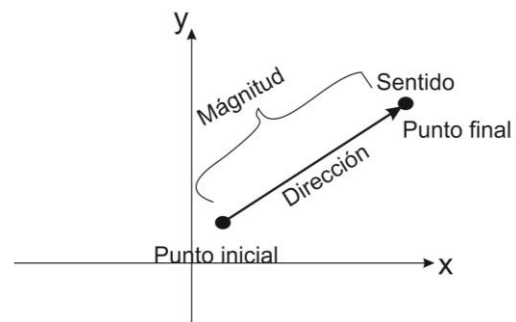
**Punto inicial:** es el punto del plano en donde inicia o parte el vector.

**Punto final:** es el punto del plano en donde finaliza el vector.

**Magnitud:** es la longitud o tamaño del vector.

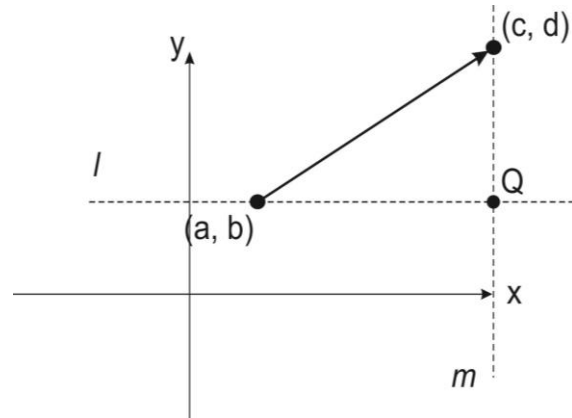
**Dirección:** está formada por la línea que se sigue para ir desde el punto inicial hasta el punto final.

**Sentido:** es el lugar hacia donde apunta el vector, puede ser arriba, abajo, izquierda, derecha, etcétera.



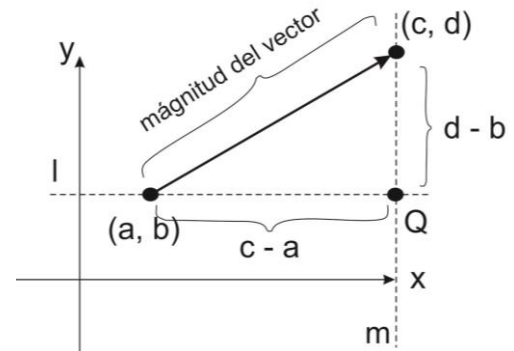
## 1.2.2. Magnitud y dirección de un vector

Para obtener la magnitud de un vector  $v$  (que se representa como  $|v|$ ), cuyas coordenadas del punto inicial son  $(a, b)$  y las coordenadas del punto final  $(c, d)$ , se traza el vector en el plano cartesiano. De esta manera, se puede conocer la magnitud del vector  $v$ , tal y como se muestra en la figura.



Primero se ubican los puntos inicial y final del vector, que en este caso son  $(a, b)$  y  $(c, d)$ ; después, se traza la semirrecta  $l$  paralela al eje  $x$  que pase por el punto  $(a, b)$ , y se traza la recta  $m$  paralela al eje  $y$  que pase por el punto  $(c, d)$ . Al punto de intersección de ambas rectas se llamará  $Q$ . Como se puede observar, se ha formado un triángulo rectángulo con vértices en  $(a, b)$ ,  $(c, d)$  y  $Q$ .

A partir del triángulo se pueden conocer los valores de sus lados paralelos a los ejes coordenados, tal y como se muestra en la siguiente figura.



Entonces, el lado horizontal del triángulo tiene una longitud de  $c - a$  y el lado vertical tiene una longitud de  $d - b$ . Con esto, se puede utilizar el teorema de Pitágoras y encontrar la longitud de la hipotenusa del triángulo, la hipotenusa estará dada por:

$$\sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$

La magnitud del vector  $v$  con punto inicial en  $(a, b)$  y punto final en  $(c, d)$ , es:

$$|v| = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}$$

Se ha calculado la magnitud de un vector con extremos en  $(a, b)$  y  $(c, d)$ .

Basándonos en el ejemplo del cálculo de la magnitud de un vector, se puede aclarar los siguientes puntos:

- Los vectores tienen un punto inicial y un punto final.
- Las coordenadas de un vector están dadas por las coordenadas del punto final menos las coordenadas de un punto inicial.
- La magnitud de un vector está dada por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus componentes.

Los vectores tienen un punto inicial y un punto final. Este punto ha quedado claro, ya que los vectores están delimitados por sus extremos que son dos puntos, en este caso, del plano.

Las coordenadas de un vector están dadas por las coordenadas del punto final menos las coordenadas de un punto inicial. Este punto da las coordenadas del vector; en el ejemplo para calcular la magnitud de un vector, el punto final del vector tiene coordenadas (c, d) y el punto inicial tiene coordenadas (a, b); de esta manera, las coordenadas del vector son (c – a, d – b).

La magnitud de un vector está dada por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus componentes. El último punto indica que la magnitud de un vector está dada por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus coordenadas; de acuerdo con el ejemplo, estará representado como:

$$\sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}$$

La justificación del resultado, ya se ha demostrado.

Cuando el punto inicial del vector es el (0,0) y el punto final es (a, b), la magnitud está dada por:

$$|v| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

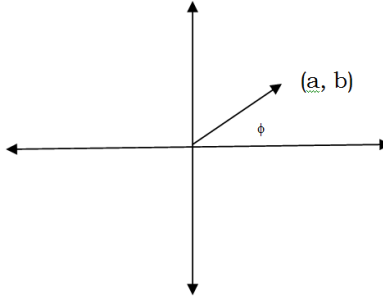
### Dirección de un vector

Se define la dirección de un vector  $v = (a, b)$  como el ángulo  $\theta$ , medido en radianes que forma el vector con el lado positivo del eje x.

Para encontrar el ángulo de un vector, se utilizan cuatro casos diferentes, ya que un vector puede estar ubicado en cualquiera de los cuatro cuadrantes que tiene el plano cartesiano. De acuerdo con el cuadrante en el que se encuentre las componentes del vector, serán positivas, negativas o combinadas.

**Caso 1**

Sea el vector  $(a, b)$  con  $a > 0$  y  $b > 0$ , se elige el ángulo  $\theta = \phi > 0$ .

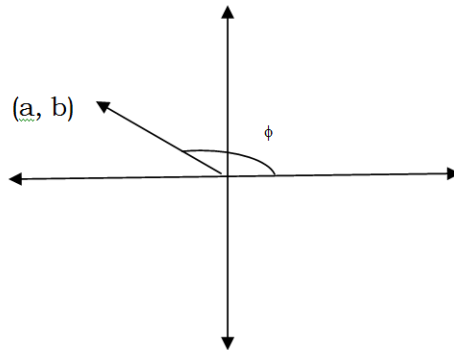


Cuando el vector se encuentra en el primer cuadrante, el ángulo  $\theta$  es igual a:

$$\phi = \theta = \tan^{-1} \frac{|b|}{|a|}$$

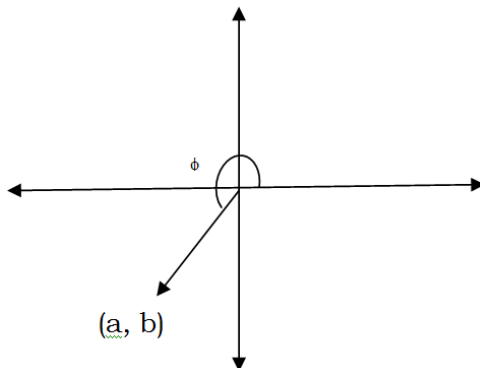
**Caso 2**

Si  $a < 0$  y  $b > 0$ , se elige  $\phi = \pi - \theta > 0$

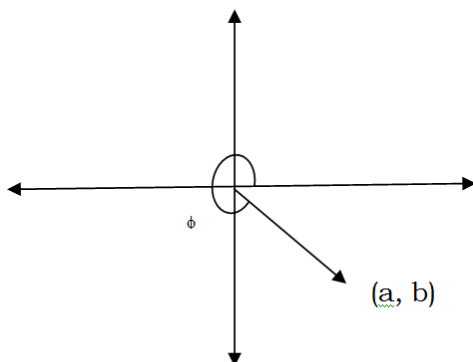


**Caso 3**

Si  $a < 0$  y  $b < 0$ , se elige  $\phi = \theta + \pi > 0$

**Caso 4**

Si  $a > 0$  y  $b < 0$ , se elige  $\phi = 2\pi - \theta > 0$

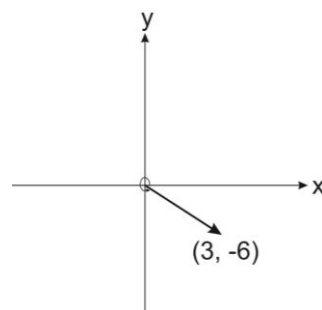
**Ejemplo:**

Calcula la dirección y el sentido que tiene el vector  $v = (3, -6)$

Para calcular la dirección, se debe encontrar el valor del ángulo que tiene el vector con respecto al eje x positivo; para ello, se aplica la fórmula:

$$\phi = 2\pi - \theta$$

Primero se calcula el valor del ángulo  $\theta$ ,



$$\theta = \tan^{-1} \frac{|-6|}{|3|}$$

$$\tan \theta = \frac{6}{3}$$

De esta manera, se tiene:

$$\tan \theta = 2$$

Despejando:

$$\begin{aligned}\theta &= \tan^{-1}(2) \\ \theta &\approx 63.435^\circ\end{aligned}$$

Sustituyendo en la fórmula:  $\phi = 2\pi - \theta = 2\pi - 63.435 = 296.565^\circ$

Por lo tanto, se tiene que la dirección del vector con coordenadas (3, -6) es aproximadamente de unos 296.565 grados y su sentido es hacia la derecha y hacia abajo, tal como lo puedes observar en la figura.

### 1.2.3. Vectores en el plano y en el espacio

Los vectores se utilizan en casi todas las situaciones de la vida cotidiana; por ejemplo, en un plano: si se busca la casa de un amigo en una ciudad desconocida y se pregunta a una persona cómo llegar a la dirección que se busca, podría contestar: caminen 500 metros en línea recta; con esta información no sería suficiente para que se encontrara la casa, ya que se puede caminar 500 metros en al menos dos direcciones distintas.

Preguntando de nuevo a la misma persona hacia qué dirección se debe dirigir, dirá: caminen 500 metros en línea recta por esta calle hacia ese lado, con esta información, la persona informante habrá dado un vector, sin darse cuenta de tal acontecimiento; tomando las instrucciones y llegando a la dirección correspondiente; esto es un claro ejemplo en el cual cotidianamente se utilizan los vectores en un plano.

**Vectores en el plano.** Se le llaman vectores en el plano, a todos aquellos vectores que se encuentran en  $\mathbb{R}^2$  o bien, a aquellos que se representan únicamente con dos coordenadas o componentes, por ejemplo, el vector  $v = (a, b)$ .

Los vectores en el espacio, también se aplican en el entorno, debido a que el mundo tiene tres dimensiones. Por ejemplo, se retoma la situación en la cual se busca un amigo en una ciudad desconocida, una vez que se llega a la dirección deseada se

encuentran frente a un edificio de 20 pisos, en este caso, se sabe que van a caminar hacia el edificio y que su amigo vive en el quinto piso, en el departamento que se encuentre hacia su derecha. Esta es la manera en la que se presentan los vectores en el espacio, ya que además de indicar lo mismo que el vector en el plano, también indican un dato más, en este caso, la altura.

**Vectores en el espacio.** Se le llaman vectores en el espacio a todos aquellos vectores que se encuentran en  $\mathbb{R}^3$  o bien, a aquellos vectores que se representan utilizando tres coordenadas o componentes, por ejemplo, el vector  $w = (a, b, c)$ .

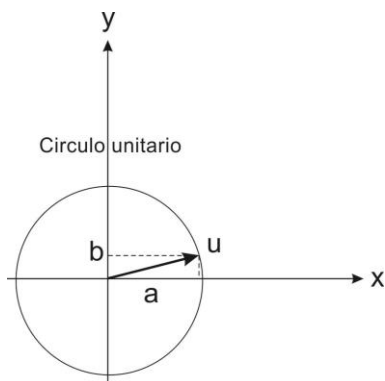
### 1.2.4. Vectores unitarios

Un vector unitario es un vector cuya magnitud es igual a 1.

**Ejemplo:** el vector  $u = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$  es un vector unitario, ya que

$$\begin{aligned} |u| &= \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} \\ &= \sqrt{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Observen lo siguiente:



Sea  $u=(a, b)$  un vector unitario, entonces  $|u| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$ , lo cual significa que  $a^2 + b^2 = 1$ , por esta razón, se puede representar a  $u$  por un punto en el círculo unitario, tal y como se muestra en la figura. Si  $\theta$  es la dirección de  $u$ , entonces,  $a = \cos \theta$  y  $b = \sin \theta$ , de esta manera, se puede representar al vector  $u = (a, b)$  como

$$u = \cos \theta + j \sin \theta$$

Recordando las identidades trigonométricas, se tiene que

$$|u| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$$

Lo cual, indica que la magnitud de 1 no se ha modificado al hacer la sustitución de las funciones seno y coseno por  $a$  y  $b$ .

Sea  $v$  un vector, entonces el vector  $u$  con magnitud igual a la unidad y con la misma dirección que  $v$ , está dado por:

$$u = \frac{v}{|v|}$$

Para cualquier vector, se puede encontrar otro vector que tenga la misma dirección que el primero y cuya magnitud sea igual a 1.

### Ejemplos

Sea  $v = (3, 4)$  un vector; encuentra un vector que tenga la misma dirección que  $v$  y cuya magnitud sea 1.

### Solución

Sea  $u$  el vector buscado; para poder encontrar el vector unitario que tenga la misma dirección que  $v$ , se realiza la división  $\frac{v}{|v|}$  y se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} u &= \frac{v}{|v|} \\ &= \frac{(3, 4)}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \\ &= \left( \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) \end{aligned}$$

Entonces, el vector unitario que tiene la misma dirección que  $v$  es

$$u = \left( \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

Se puede verificar su magnitud, esto es:

$$\begin{aligned} |u| &= \sqrt{\frac{3^2 + 4^2}{(5)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{25}{25}} \\ &= 1 \end{aligned}$$



La dirección del vector  $v$  está dada por

$$\tan \theta = \frac{4}{3}$$

Mientras que la dirección de  $u$  está dada por

$$\tan \alpha = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}$$

$$\tan \alpha = \frac{4}{3}$$

Y como se puede observar,  $\tan \theta = \tan \alpha$

Por lo tanto,  $u$  y  $v$  tienen la misma dirección.

### 1.2.5. Componentes de un vector: horizontal y vertical

Existen dos vectores en el plano, los cuales permiten obtener a todos los demás; dichos vectores son el  $(1, 0)$ , representado por  $\mathbf{i}$  y el vector  $(0, 1)$ , representado por  $\mathbf{j}$ . Así, si  $v = (a, b)$  es un vector del plano, entonces, se puede escribir  $(a, b)$  de la siguiente manera:

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

También se puede escribir a  $v$  como:

$$v = (a, b) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$$

Con esta representación, se dice que  $v$  está en términos de sus componentes rectangulares.

Los vectores unitarios  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  tienen las siguientes propiedades:

- i) Ninguno de ellos es múltiplo de otro vector.
- ii) Cualquier vector se puede escribir en términos de  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$ , tal y como se hizo con  $v$  en la ecuación anterior.

### 1.2.6. Igualdad de vectores

Se explicará que dos vectores son iguales, únicamente cuando todos sus componentes sean iguales entre sí; es decir, para que los vectores  $u = (a, b, c)$  y  $v = (d, e, f)$  sean iguales, entonces,  $a = d$ ,  $b = e$ ,  $c = f$ .

Los vectores:  $u = (2, 3, -5)$  y  $v = (2, -3, -5)$  son vectores distintos, debido a que el signo de la segunda coordenada de  $u$  es diferente de la segunda coordenada de  $v$ , por lo cual, no se puede decir que los vectores sean los mismos.

Si bien es cierto que dos vectores necesitan tener las mismas coordenadas para ser iguales, a pesar de esto, dos vectores pueden tener diferentes extremos y ser iguales, por ejemplo:

Sean  $M = (3, 5)$  y  $N = (2, -1)$  el punto inicial y final de un vector y sean  $P = (6, 2)$  y  $Q = (5, -4)$  el punto inicial y final de otro vector. Demostrar si los vectores son iguales o no.

Para ello, se encuentra el vector que inicia en  $M$  y termina en  $N$  y se representa por  $\overrightarrow{MN}$ , tal y como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= (2 - 3, -1 - 5) \\ \overrightarrow{MN} &= (-1, -6)\end{aligned}$$

Por otra parte, se encuentra el vector que inicia en  $P$  y termina en  $Q$ , al cual se representa por  $\overrightarrow{PQ}$ , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= (5 - 6, -4 - 2) \\ \overrightarrow{PQ} &= (-1, -6)\end{aligned}$$

Dado que las coordenadas de ambos vectores son iguales, entonces, los vectores  $\overrightarrow{MN}$  y  $\overrightarrow{PQ}$  son iguales.

## 1.3. Operaciones con vectores

Debido a su uso, los vectores poseen ciertas propiedades que permiten sumarlos, restarlos y multiplicarlos; sin estas propiedades prácticamente serían inservibles, ya que se utilizarían únicamente como la representación de un problema sin mayor uso que eso.

Actualmente, se les da un uso similar al de los números racionales, ya que, a pesar de no poder colocar todos sus elementos, se sobreentiende la manera en que estos se extienden, por ejemplo, al colocar una serie de números: 2, 4, 6, 8, ..., se entiende que se deben de colocar los números pares; de manera análoga, con el uso de vectores, se puede escribir  $u = (2, 4, 6, 8, \dots)$  y de igual manera se entiende con este lenguaje. En el presente tema se muestran las operaciones que se pueden efectuar con los vectores, sus propiedades y algunos de sus usos.

### 1.3.1. Multiplicación de un escalar por un vector

Para comenzar con esta sección, se utilizarán los vectores y se multiplicarán por un escalar o bien por un número.

Sea el vector  $v = (a, b)$  y sea  $\alpha$  un número; se tiene que

$$\alpha v = (\alpha a, \alpha b)$$

Con lo que

$$\begin{aligned} |\alpha v| &= \sqrt{(\alpha a)^2 + (\alpha b)^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 a^2 + \alpha^2 b^2} \\ &= |\alpha| \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= |\alpha| \cdot |v| \end{aligned}$$

Esto significa que cuando un vector es multiplicado por un escalar distinto de cero, hace que la longitud de dicho vector se multiplique por el valor absoluto del escalar.

### 1.3.2. Propiedades del producto de un vector por un escalar

Cuando un vector es multiplicado por un escalar, o bien por un número, ello puede causarle un cambio de sentido o de magnitud. A continuación, se darán algunas propiedades del producto por un escalar.

Sea  $v$  y  $w$  vectores y sean  $\alpha$  y  $\beta$  escalares; entonces, se cumplen las siguientes propiedades del producto:

$\alpha u$  también es un vector.

$$\begin{aligned}\alpha(u + v) &= \alpha u + \alpha v. \\ (\alpha + \beta)u &= \alpha u + \beta u. \\ \alpha(\beta u) &= (\alpha\beta)u.\end{aligned}$$

Hasta el momento, únicamente se ha utilizado y comprobado la primera propiedad, conforme se avance en el curso, se ira haciendo uso y demostración de las demás, si es que fuese necesario.

### 1.3.3. Suma de vectores

Sean  $u = (a_1, a_2)$  y  $v = (b_1, b_2)$  dos vectores en el plano, se define la suma de dos vectores como un nuevo vector, cuyas componentes están formadas por la suma de las componentes de  $u$  y de  $v$ ; el vector resultante de la suma se denota por  $u + v$ , y la suma se representa como:

$$u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

Para sumar vectores en el espacio el proceso es similar, lo único que cambia es que se realiza la suma de tres coordenadas, como se muestra a continuación:

Sean  $u = (a_1, a_2, a_3)$  y  $v = (b_1, b_2, b_3)$  dos vectores; entonces, la suma de ellos se representa por  $u + v$ ,

$$u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

Con esto ya se está preparado para poder realizar la suma de dos vectores.

## Ejemplos

1. Encuentra las coordenadas del vector que representa la suma de los vectores:  
 $u = (3,5)$  y  $v = (-1,6)$ .

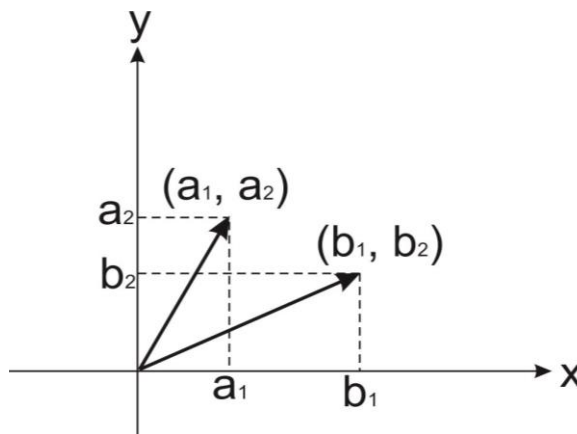
Ahora se debe encontrar  $u + v$ , tal y como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} u + v &= (3 + (-1), 5 + 6) \\ u + v &= (2, 11) \end{aligned}$$

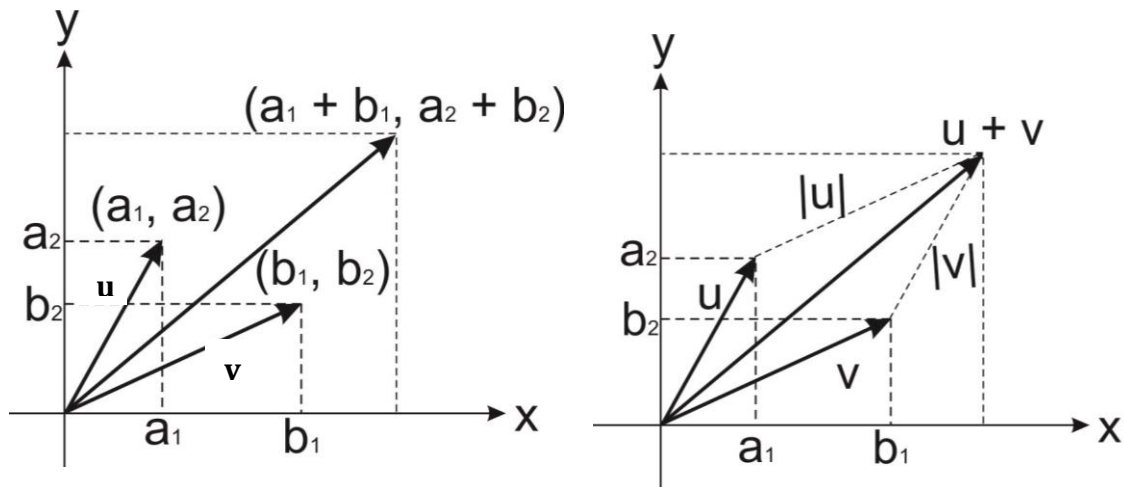
Observa lo que representa la suma de dos vectores en el plano:

Sean  $u = (a_1, a_2)$  y  $v = (b_1, b_2)$ ; se colocan en el plano cartesiano, tal y como se muestra en la siguiente figura:

Se pueden visualizar a ambos vectores como líneas que tienen un punto inicial, un punto final, una dirección y un sentido. En este caso, se toman en el primer cuadrante del plano cartesiano; de igual manera, pueden presentarse en cuadrantes distintos, ambos negativos o con signos distintos; esto no afecta el significado que tiene la suma de dos vectores desde el punto de vista geométrico.



En la figura de la izquierda, se observa el vector  $u + v$ , y en la de la derecha, se puede apreciar que dicho vector representa a la diagonal de un paralelogramo que tiene por lados  $|u|$  y  $|v|$ .



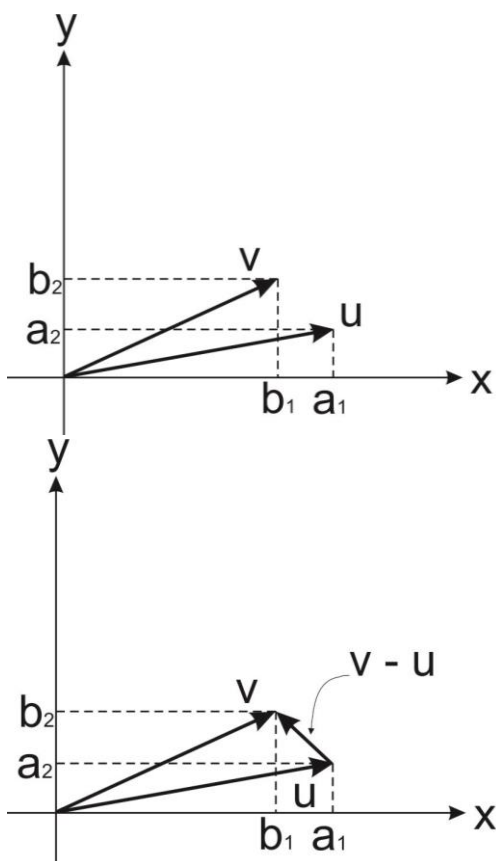
Esta es la representación geométrica de la suma de dos vectores y se utiliza para resolver problemas tales como encontrar el área del paralelogramo formado por los vectores  $u$  y  $v$  o, para encontrar el área del triángulo con lados  $u$  y  $v$ . Esto último también es posible con tres vectores que no sean colineales, es decir, que no se encuentren en una misma línea recta.

### 1.3.4. Resta de vectores

La resta de vectores es muy similar a la suma; para poder obtener la resta de dos vectores, se restan las coordenadas que se encuentran en la misma posición de cada uno de los vectores; para ser más explícitos, observa la siguiente representación.

Sean  $u = (a_1, a_2)$  y  $v = (b_1, b_2)$  dos vectores en el plano, encontrar la diferencia de los vectores  $v - u = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ .

Se representan en el plano cartesiano, tal y como se muestra a continuación.



En la izquierda se encuentra la representación de los vectores  $u$  y  $v$ , en la derecha se muestra el vector resultante de la diferencia  $v - u$ .

Para entender de donde surge la diferencia, se realizarán los siguientes cálculos.

$$\begin{aligned}
 v &= v \\
 v &= v + (-u + u) \\
 v &= (v - u) + u
 \end{aligned}$$

Esto significa que el vector  $v$  es el vector resultante de la suma de los vectores  $v - u$  y  $u$ ; dado que  $u$  y  $v$  ya están trazados, únicamente se unen mediante otro vector; debido a que el punto final del vector resultante coincide con el punto final de la suma de los vectores, entonces,  $v - u$  tiene su punto final en la punta de  $v$  y su punto inicial en la punta de  $u$ .

## 1.4. Productos vectoriales

Los productos vectoriales tienen diversas aplicaciones, sobre todo en las ramas de la física; de igual manera, los encontrarás en diferentes situaciones de tu vida.

Por ejemplo, al realizar una competencia de salto de longitud, aparentemente ésta consiste en correr, saltar y caer, pero en esta actividad, también intervienen los vectores. Si todos los atletas tuvieran las mismas capacidades físicas, los vectores definirían quién sería el ganador, debido a un producto de dos vectores: uno que estaría representado por la velocidad con la que corre un atleta y el otro, representado por la velocidad con la cual salta; este producto permitiría encontrar el ángulo entre los vectores ya mencionados y a partir de él, se podría encontrar en qué dirección deben saltar para llegar más lejos.

### 1.4.1. Producto escalar

Sean  $u = (a_1, b_1)$  y  $v = (a_2, b_2)$ , entonces se define el producto escalar o producto punto de dos vectores  $u \cdot v$  como sigue:

$$u \cdot v = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

Esto significa que el producto escalar de dos vectores da como resultado un escalar; de ahí que lleve el nombre de producto escalar.

A continuación, se realiza la representación geométrica del producto escalar de dos vectores.

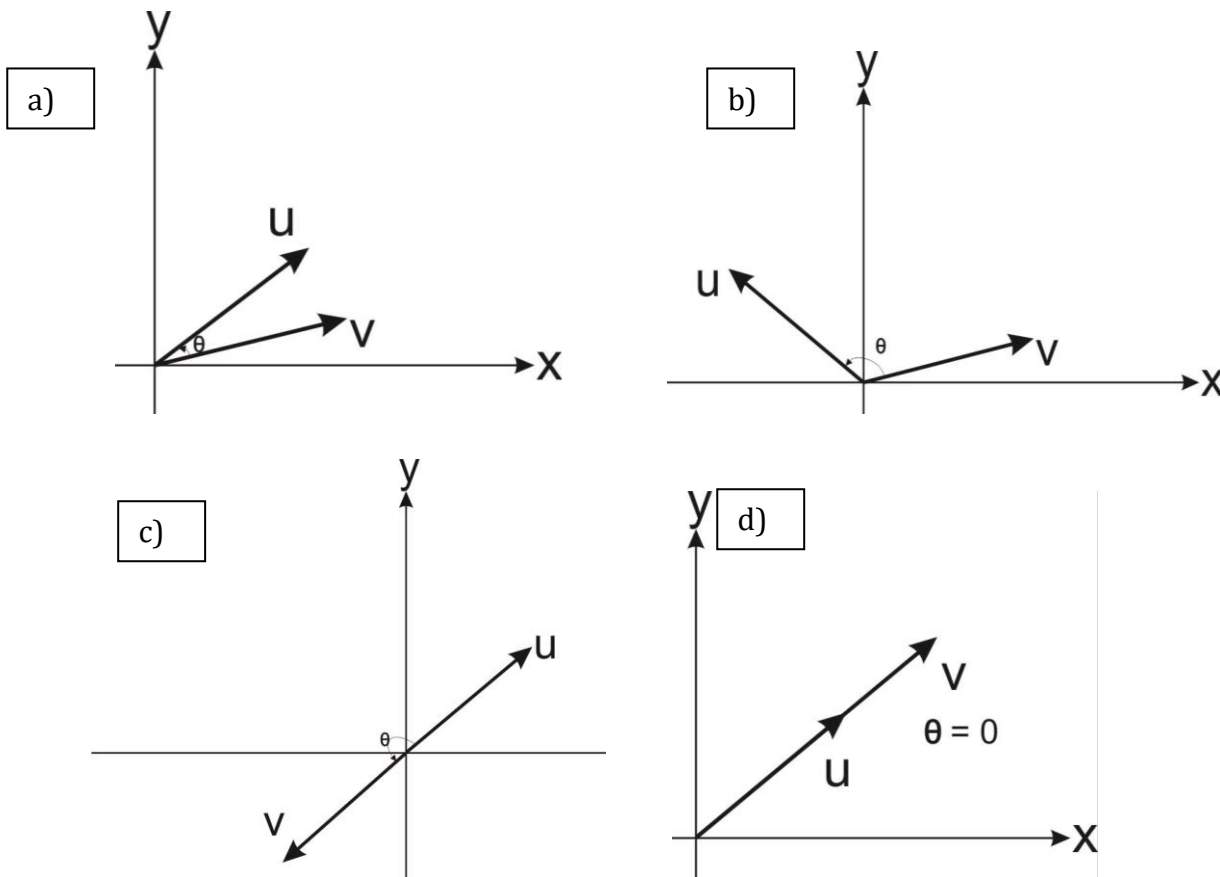
Sean  $u$  y  $v$  dos vectores diferentes de cero. Entonces el ángulo  $\theta$  entre  $u$  y  $v$  está definido como el ángulo más pequeño entre las representaciones de  $u$  y  $v$  que tienen el origen como punto inicial. Si  $u = \alpha v$  para algún escalar  $\alpha$ , entonces

$$\theta = 0, \quad \text{si } \alpha > 0$$

$$\theta = \pi \quad \text{si } \alpha < 0$$

El ángulo comprendido entre dos vectores puede presentarse de diferentes formas, tal y como se muestra en las siguientes figuras.





En las figuras a) y b) se observa el ángulo que forman dos vectores entre sí: en c) se observa a  $v$  cuando  $v = \alpha u$  con  $\alpha < 0$  y por último en d) se observa a  $v = \alpha u$  con  $\alpha > 0$ .

Ahora que ya sabes realizar el producto escalar de dos vectores, se puede demostrar el siguiente teorema:

### Teorema

Sea  $v$  un vector. Entonces

$$|v| = \sqrt{v \cdot v}$$

Este teorema lo puedes demostrar fácilmente como sigue:

Sea  $v = (a, b)$ , entonces

$$|v|^2 = a^2 + b^2$$

Y, además,

$$v \cdot v = (a, b) \cdot (a, b) = a \cdot a + b \cdot b = a^2 + b^2 = |v|^2$$

La parte más importante del producto escalar entre dos vectores, es que permite conocer el valor del ángulo que existe entre ellos, eso es lo que precisamente dice el siguiente teorema.

### Teorema

Sean  $u$  y  $v$  dos vectores diferentes de cero, si  $\theta$  es el ángulo que existe entre ellos, entonces

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$$

Con la fórmula anterior se puede encontrar el ángulo que existe entre dos vectores, a la vez, que da otra manera de definir el producto escalar de  $u$  con  $v$ , despejando y quedaría como sigue:

$$u \cdot v = |u||v| \cos \theta$$

### Ejemplos

1. Calcula el ángulo que existe entre los vectores  $u = 3i + 5j$  y  $v = i - 2j$ .  
Se aplicará la fórmula para obtener el ángulo entre dos vectores como sigue:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} \\ \cos \theta &= \frac{(3i + 5j) \cdot (i - 2j)}{\sqrt{3^2 + 5^2} \sqrt{1^2 + (-2)^2}} \\ \cos \theta &= \frac{-7}{\sqrt{170}} \\ \theta &= \cos^{-1}\left(\frac{-7}{\sqrt{170}}\right) \\ \theta &\approx 122.47 \end{aligned}$$

El ángulo que hay entre  $u$  y  $v$  es de aproximadamente 122.47 grados.

### 1.4.2. Condición de perpendicularidad

Antes de comenzar con las condiciones que deben de cumplir dos vectores para ser perpendiculares, se presentan los vectores paralelos.

#### Definición de vectores paralelos

Dos vectores diferentes de cero  $u$  y  $v$  son paralelos si el ángulo que existe entre ellos es cero o  $\pi$ .

Esta condición dice que los vectores paralelos pueden tener la misma dirección o diferente, dependiendo del valor del ángulo que entre ellos existe.

Al calcular el producto escalar de dos vectores paralelos, éste se realiza de manera similar al producto de dos vectores no paralelos; el resultado del producto, es lo que hace ver si dos vectores son o no paralelos.

#### Ejemplo

Encuentra el producto escalar del siguiente par de vectores y establece si son o no paralelos entre sí; además, encuentra también si tienen la misma dirección o diferentes direcciones.

$$u = (6, 8) \quad \text{y} \quad v = (3, 4)$$

Realizando el producto escalar, se tiene

$$\begin{aligned} u \cdot v &= (6, 8) \cdot (3, 4) \\ u \cdot v &= 18 + 32 \\ u \cdot v &= 50 \\ \cos \theta &= \frac{50}{\sqrt{6^2 + 8^2} \sqrt{3^2 + 4^2}} \\ &= \frac{50}{\sqrt{2500}} \\ &= \frac{50}{50} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, los vectores son paralelos, ya que el  $\cos \theta = 1$ , únicamente cuando el ángulo es cero y como el ángulo es cero, entonces,  $u$  y  $v$  tienen la misma dirección.

Sobre los vectores paralelos, se tiene el siguiente teorema.

**Teorema**

Si  $u \neq 0$ , entonces  $v = \alpha u$  para alguna constante  $\alpha$  si y solo si  $u$  y  $v$  son paralelos.

Ahora se va conocer el momento cuando dos vectores son perpendiculares entre sí.

Los vectores  $u$  y  $v$  diferentes de cero, son perpendiculares u ortogonales si el ángulo entre ellos es  $\frac{\pi}{2}$ .

**Ejemplo**

Demuestra que los vectores  $u = i + 2j$  y  $v = -4i + 2j$  son perpendiculares.

Primero, se obtiene el producto escalar de los vectores.

$$\begin{aligned} u \cdot v &= (i + 2j) \cdot (-4i + 2j) \\ &= -4 + 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, se obtiene el ángulo que existe entre ambos vectores.

$$\cos \theta = \frac{-4 + 4}{\sqrt{1^2 + 2^2} + \sqrt{(-4)^2 + 2^2}}$$

Debido a que el numerador es cero, entonces

$$\cos \theta = 0$$

Se tiene que el ángulo, o bien es de  $90^\circ$ , o de  $270^\circ$ ; para que no existan confusiones, siempre se utilizarán ángulos que se encuentren dentro del intervalo  $[0, 180^\circ]$ . Tomando esto en cuenta, se puede asegurar que dos vectores  $u$  y  $v$  diferentes de cero son perpendiculares, si y solo si, su producto escalar es cero.

Ahora, se va a demostrar el siguiente teorema.

**Teorema**

Sea  $v$  un vector diferente de cero, entonces, para cualquier otro vector  $u$  distinto de cero, el vector

$$w = u - \frac{u \cdot v}{|v|^2} v$$

Es un vector perpendicular a  $v$ .

### 1.4.3. Propiedades del producto escalar

El producto escalar tiene propiedades básicas dentro del álgebra lineal, las cuales son:

#### a) Propiedad conmutativa

Sean  $u$  y  $v$  dos vectores, entonces

$$u \cdot v = v \cdot u$$

#### b) Propiedad asociativa, respecto al producto por un escalar

Sean  $u$  y  $v$  dos vectores y sea  $\alpha$  un escalar, entonces

$$\alpha(u \cdot v) = \alpha u \cdot v$$

#### c) Propiedad distributiva respecto de la suma vectorial

Sean  $u$ ,  $v$  y  $w$  vectores, entonces

$$w \cdot (u + v) = w \cdot u + w \cdot v$$

Se va a demostrar la primera de las propiedades; entonces, se tiene que:

- Dados los vectores  $u$  y  $v$ , demostrar que:

$$u \cdot v = v \cdot u$$

Suponiendo que  $u = (a, b)$  y además que  $v = (c, d)$ . Ahora,

$$\begin{aligned} u \cdot v &= (a, b) \cdot (c, d) \\ &= ac + bd \end{aligned}$$

Debido a que  $ac$  y  $bd$ , es el producto ordinario de dos números, entonces se puede utilizar la conmutatividad de la multiplicación.

$$\begin{aligned} u \cdot v &= ca + db \\ &= (c, d) \cdot (a, b) \\ &= v \cdot u \end{aligned}$$

Con esto se demuestra la primera propiedad del producto escalar.

### 1.4.4. Aplicaciones del producto escalar

En este subtema se va a dar respuesta a uno de los problemas que se plantearon al inicio de la unidad; esto, con el fin de mostrar las aplicaciones que tiene el producto escalar.

El primer problema que se planteo es el siguiente:

#### Problema 1.

Un piloto de una prestigiada aerolínea mexicana tuvo vacaciones en su trabajo y regresó con su familia a la capital mexicana; debido a que viajó por todo el mundo, traía consigo efectivo en diferentes tipos de monedas. Siendo estas: 8,500 yen, 300 libras esterlinas, 400 euros, 85 dólares, 500 soles y 200 francos suizos. Si el tipo de cambio en moneda mexicana es de 0.16 el yen, 20.15 una libra esterlina, 16.76 un euro, 12.96 el dólar, 4.7 el sol y 13 el franco suizo:

a) Representa las cantidades en efectivo que tiene el piloto mediante un vector.  
Sea  $u$  el vector que representa las cantidades que tiene el piloto, entonces, se tendrá que

$$u = (8500, 300, 400, 85, 500, 200)$$

b) Representa el tipo de cambio de cada moneda mediante un vector.  
Sea  $v$  el vector que representa los tipos de cambio; entonces, siguiendo el mismo orden que  $u$ , se tiene que

$$v = (0.16, 20.15, 16.76, 12.96, 4.7, 13)$$

c) Encuentra la cantidad total de efectivo en pesos mexicanos que tiene el piloto; para esto, utiliza el producto escalar.

Desarrollando el producto escalar de los vectores anteriores, se tiene:

$$\begin{aligned} u \cdot v &= (8500)(0.16) + (300)(20.15) + (400)(16.76) + (85)(12.96) + (500)(4.7) \\ &\quad + (200)(13) \\ u \cdot v &= 1360 + 6045 + 6704 + 1101.6 + 2350 + 2600 \\ u \cdot v &= 20160.6 \end{aligned}$$

Entonces, el piloto tiene un total equivalente a \$20,160.6

### 1.4.5. Producto cruz

Hasta este momento, se ha visto todo lo referente al producto escalar de dos vectores; a continuación se presenta lo que corresponde al producto cruz o bien, producto vectorial, el cual está definido únicamente en  $\mathbb{R}^3$ , tal y como se muestra a continuación.

Sean  $u = a_1i + b_1j + c_1k$  y  $v = a_2i + b_2j + c_2k$ , el producto cruz de  $u$  y  $v$ , representa un nuevo vector que se denotará como  $u \times v$  y se define por

$$u \times v = (b_1c_2 - b_2c_1)i + (a_2c_1 - a_1c_2)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$$

El producto cruz es muy diferente del producto escalar de dos vectores; la diferencia más notoria, radica en que el resultado del producto escalar es un escalar y el resultado del producto cruz es un vector.

Se realizarán algunos ejemplos del producto cruz.

Sean  $u = 3i + j - 2k$  y  $v = 4i - 2j + k$  dos vectores en el espacio; calcula su producto cruz.

En este caso, para calcular el producto cruz, se debe utilizar la definición que se acaba de conocer e identificar los elementos de cada vector; del vector  $u$  son:  $a_1 = 3$ ,  $b_1 = 1$  y  $c_1 = -2$ ; por otra parte, los elementos del vector  $v$  son:  $a_2 = 4$ ,  $b_2 = -2$  y  $c_2 = 1$ ; ahora, se van a sustituir estos valores, en la fórmula que define el producto cruz de ambos vectores, como sigue:

$$\begin{aligned} u \times v &= (b_1c_2 - b_2c_1)i + (a_2c_1 - a_1c_2)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k \\ u \times v &= [(1)(1) - (-2)(-2)]i + [(4)(-2) - (3)(1)]j + [(3)(-2) - (4)(1)]k \\ &= [1 - 4]i + [-8 - 3]j + [-6 - 4]k \\ &= -3i - 11j - 10k \end{aligned}$$

Más adelante se conocerá un método más sencillo para realizar el cálculo de este tipo de productos; de momento, se resolverán mediante el uso de la definición.

#### Propiedades del producto cruz

- 1)  $u \times 0 = 0 \times u = 0$
- 2)  $u \times v = -(v \times u)$
- 3)  $(\alpha u) \times v = \alpha(u \times v)$ .
- 4)  $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$
- 5)  $u \cdot (u \times v) = v \cdot (u \times v) = 0$ .

6)  $u \times v = 0$ , con  $u$  y  $v$  distintos de cero, únicamente cuando  $u$  y  $v$  son paralelos.

Estas son algunas de las propiedades del producto cruz; se realiza la demostración de las dos primeras:

$$1) \quad u \times 0 = 0 \times u = 0$$

Sea  $u$  un vector, se va a demostrar que

$$u \times 0 = 0 \times u = 0$$

Antes de comenzar con la demostración, se debe de entender que el producto cruz se puede realizar únicamente entre dos vectores; así entonces, el 0 por el cual se está multiplicando  $u$  es el vector 0, el cual tiene por coordenadas  $0 = 0i + 0j + 0k$ .

Ahora ya están listos para comenzar.

Suponiendo que  $u = ai + bj + ck$  y ya se sabe que  $0 = 0i + 0j + 0k$

Se identifican los valores correspondientes para aplicar la definición del producto cruz, con lo cual se tiene que:  $a_1 = a$ ,  $b_1 = b$  y  $c_1 = c$ , y a su vez,  $a_2 = b_2 = c_2 = 0$

Teniendo los vectores  $u$  y  $0$ , se define el producto cruz de ambos como:

$$\begin{aligned} u \times 0 &= [(b)(0) - (c)(0)]i + [(c)(0) - (a)(0)]j + [(a)(0) - (b)(0)]k \\ &= [0 - 0]i + [0 - 0]j + [0 - 0]k \\ &= 0i + 0j + 0k \\ &= 0 \end{aligned}$$

El producto  $0 \times u$  se realiza de manera análoga a la que se desarrolló; de esta manera, se demostró la primera propiedad del producto cruz.

$$2) \quad u \times v = -(v \times u)$$

Se va a realizar la demostración de la segunda propiedad; para esto, sean  $u = a_1i + b_1j + c_1k$  y  $v = a_2i + b_2j + c_2k$ ; entonces, se tiene

$$\begin{aligned} u \times v &= (b_1c_2 - b_2c_1)i + (a_2c_1 - a_1c_2)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k \\ &= -(b_2c_1 - b_1c_2)i - (a_1c_2 - a_2c_1)j - (a_2b_1 - a_1b_2)k \\ &= -[(b_2c_1 - b_1c_2)i + (a_1c_2 - a_2c_1)j + (a_2b_1 - a_1b_2)k] \end{aligned}$$



En este último cálculo se puede observar que los elementos de  $u$  se han cambiado con los elementos de  $v$ , así que por la definición del producto cruz, se tiene que

$$u \times v = -[v \times u]$$

## 1.5. Triples productos

Por medio del producto escalar y vectorial de tres vectores,  $A$ ,  $B$  y  $C$ , se pueden formar productos de la forma:

$$(A \cdot B)C$$

$$A \cdot (B \times C)$$

$$A \times (B \times C)$$

### 1.5.1. Triple producto escalar

Se llama triple producto escalar, al escalar que se obtiene de un producto cruz entre dos vectores, seguido de un producto escalar, es decir:

Sean  $u$ ,  $v$  y  $w$  tres vectores en el espacio; el producto es definido como sigue:

$$(u \times v) \cdot w$$

Se conoce como triple producto escalar, la interpretación geométrica que tiene este producto; es similar a la que tiene el producto punto, puesto que se realiza como operación final, el producto entre dos vectores, el que resulta del producto cruz y el último vector introducido.

Sobre los triples productos escalares, se tiene la siguiente propiedad:

Sean  $u$ ,  $v$  y  $w$ , tres vectores en el espacio, entonces

$$(u \times v) \cdot w = u \cdot (v \times w)$$

Se llama triple producto escalar, al escalar que se obtiene como resultado de un producto cruz entre dos vectores, seguido de un producto escalar, es decir:

Sean  $u$ ,  $v$  y  $w$  tres vectores en el espacio, el producto definido como sigue:

$$(u \times v) \cdot w$$

Se conoce como triple producto escalar, la interpretación geométrica que tiene este producto; es similar a la que tiene el producto punto, ya que al final de cuentas se realiza como operación final, el producto entre dos vectores, el que resulta del producto cruz y el último vector introducido.

Sobre los triples productos escalares, se tiene la siguiente propiedad:

Sean  $u$ ,  $v$  y  $w$ , tres vectores en el espacio, entonces

$$(u \times v) \cdot w = u \cdot (v \times w)$$

## 1.5.2. Triple producto vectorial

Se le llama triple producto vectorial, al producto que se realiza entre tres vectores, del cual se obtiene un cuarto vector, que estará en el mismo plano que los dos primeros vectores que se multiplicaron. En este subtema se introduce una breve noción de este producto, debido a que más adelante lo utilizarás; aunque no se especifica qué es un triple producto vectorial, es necesario que conozcas las herramientas y procedimientos que estás utilizando; la representación de un triple producto vectorial, es la siguiente.

Sean  $u$ ,  $v$  y  $w$ , tres vectores en el espacio; el producto cruz de estos tres vectores está representado por

$$u \times (v \times w)$$

El resultado del producto anterior, es un vector que se encuentra en el mismo plano que  $v$  y que  $w$ .

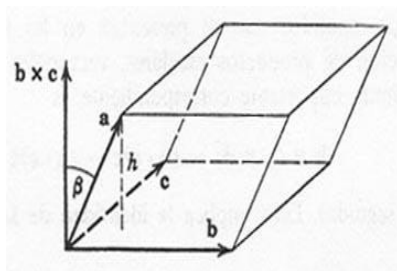
### Volumen de un paralelepípedo

El volumen de un paralelepípedo de aristas  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$ , con signo positivo o negativo según que  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  formen un triedro a derechas o a izquierdas.

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} \quad \mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

Se puede observar la interpretación geométrica en la siguiente imagen:



Ejemplo: Calcular el volumen del paralelepípedo formado por los vectores:

$$a = (3, -2, 5), b = (2, 2, -1) \text{ y } c = (-4, 3, 2)$$

Solución:

$$a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3[(2)(2) - (-1)(3)] - (-2)[(2)(2) - (-1)(-4)] + 5[(2)(3) - (2)(-4)] = 21 + 70 = 91u^3$$

## Cierre de la unidad

Para trabajar esta unidad puedes apoyarte en el curso en versión electrónica: Introducción a MATLAB, en el que encontrarás ejemplos de cómo se utiliza para determinar las operaciones entre vectores.

En la presente unidad repaste los temas centrales del álgebra lineal, tal como la definición de vector, las operaciones que se realizan con ellas, así como el producto cruz.

Se te recomienda resolver todos los ejercicios del cuadernillo que corresponden a esta unidad, para adquirir mayor habilidad. El *Cuadernillo de ejercicios* lo podrás encontrar en Material de apoyo del aula virtual.

## Fuentes de consulta



1. Lay, D. C. (2007). *Álgebra lineal y sus aplicaciones (tercera edición)*. México: Pearson Educación.
2. Corcobado, J. L. y Marijuán, J. Matemáticas I., en:
  - a. < <http://www.sectormatematica.cl/libros.htm>>.
3. Williams, G. (2004). *Álgebra lineal con aplicaciones*. México: Mc Graw Hill.
4. Bernard Kolman, David R. Hill. (2006). *Álgebra lineal* (8a. Edición). México: Pearson Educación.