复旦大学技术科学类

2012-2013 学年第一学期《数学分析 B1》期终考试试卷标准答案

A 卷　　共 5 页

课程代码：MATH120016.01-08　考试形式：□开卷　☑闭卷 2013 年 1 月 11 日 8:30~10:30

（本试卷答卷时间为 120 分钟，答案必须写在试卷上，做在草稿纸上无效）

专业________________学号________________姓名________________成绩____________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

注意：答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

一、严格表述题（每题 3 分，共 4 题，共 12 分）

1．函数极限 $\lim\limits_{x\to x_{0-}} f(x)=A$ 的定义。

假设 $y=f(x)$ 在点 x_0 的左去心领域 $(x_0-\rho,x_0)$ 中有定义，其中 $\rho>0$，对于任意给点的正数 ε，总是存在正数 δ，当 $-\delta<x-x_0<0$ 时，恒有（必定有）$|f(x)-A|<\varepsilon$

2．β 不是非空数集 A 的上确界。

即或者 $\exists x_0\in A$，使得 $x_0>\beta$，或者 $\exists\varepsilon_0>0$，对于 $\forall x\in A$ 都有 $x\le\beta-\varepsilon_0$

3．拉格朗日（Lagrange）中值定理。

假设 $y=f(x)$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 中可导，则必存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

4．函数 $y=f(x)$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积。

假设 $P=\{x_0,x_1,x_3,\cdots,x_n\}$ 是有限区间 $[a,b]$ 的分割，满足

$a=x_0<x_1<\cdots<x_{k-1}<x_k<\cdots<x_n=b$。$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$，$\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$，$k=1,2,3,\cdots,n$。分割 P 的范数定义为 $\|P\|=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k$，$I$ 是某一个实数。若对于任意给定的正数 ε，总可以找到正数 δ，使得当 $\|P\|<\delta$ 时，都有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k-I\right|<\varepsilon$ 成立

（装订线内不要答题）

二、填空题（每题 4 分，共 5 题，共 20 分）

1．已知 $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+ax+b}{x-3}=1$，则 $a=$ ____-5____，$b=$ ____6____。

2．$\lim_{x\to 0}\frac{(x^3+1)\ln(1+\sin(x^3))}{(e^x-1)\cos x\tan^2 x}=$ ____1____。

3．假设隐函数方程 $y=1-xe^y$ 所确定的函数是 $y=y(x)$，则其导数在点 $x=0$ 的值 $y'(0)=$ ____$-e$____。

4． $y=\sin(x^2)$， $d^2y=\underline{(2\cos(x^2)-4x^2\sin(x^2))dx^2}$。

5． $\int\frac{x}{1+\cos x}dx=\underline{x\tan\frac{x}{2}+2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+C}$。

三、判断简答题（判断下列命题是否正确，如果正确的，请回答“是”，并给予简要证明；如果错误的，请回答“否”，并给出反例。答“是或否”2 分，证明或举反例 4 分）（每题 6 分，共 5 题，共 30 分）

1．假设 $a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$，且 $\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$，若 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}$ 不存在，则 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$ 也不存在。

否。反例：令 $a_n=(-1)^{n-1}$， $b_n=n$， $n=1,2,3,\cdots$ 即可

2．假设函数 f 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续，而且 $f(x)\ge 0$， $\forall x\in[a,b]$，但不恒等于 0，那么，$\int_a^b f(x)dx>0$。

是。证：存在 x_0， $f(x_0)>0$， $x_0\in(a,b)$，不妨设 $x_0\in(a,b)$，因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，对于 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\frac{b-a}{2}>\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时， $f(x)>\frac{f(x_0)}{2}$，这时

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{x_0-\delta}f(x)dx+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)dx+\int_{x_0+\delta}^{b}f(x)dx\ge\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)dx\ge\frac{1}{2}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x_0)dx=$
$\delta f(x_0)>0$，证毕

（装订线内不要答题）

3．无限区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的两个一致连续函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的乘积必是区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的一致连续函数。

否。令 $f(x)=g(x)=x$ ，$x\in(-\infty,+\infty)$ 。这时，$f(x)g(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 不一致连续。因为取 $x_n^{(1)}=n+\dfrac{1}{n}$，$x_n^{(2)}=n$ ，$n=1,2,3,\cdots$ ，这时，$\left|x_n^{(1)^2}-x_n^{(2)^2}\right|>2$ ，$n=1,2,3,\cdots$ 。

4．假设函数 $f(x)$ 在有限开区间 (a,b) 内可微，且 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\infty$ ，则 $\lim\limits_{x\to a+}f'(x)=\infty$ 。

否。反例：$f(x)=\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}$ ，$\forall x\in(0,1)$ 。这时，$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}$ ，$\forall x\in(0,1)$ ，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\infty$ ，令 $x_n=\dfrac{1}{(2n-1)\pi}$ ，$n=1,2,3,\cdots$ ，则 $f'(x_n)=0$ ，$n=1,2,3,\cdots$

5．假设 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f^2(x)dx$ 也收敛。

否。反例：$f(x)=\dfrac{\sin x}{x^{\frac{1}{2}}}$ ，$\forall x\in[1,+\infty]$ 。由广义积分的 Dirichlet 判别法可知 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^{\frac{1}{2}}}dx$ 收敛。同时，$\int_1^{+\infty}f^2(x)dx=\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin^2 x}{x}dx=\dfrac{1}{2}\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x}dx-\dfrac{1}{2}\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos 2x}{x}dx$ 。而 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x}dx$ 是发散的。由 Dirichlet 判别法，$\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos 2x}{x}dx$ 是收敛的。因此，

$\int_1^{+\infty}f^2(x)dx=\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin^2 x}{x}dx$ 发散

四、计算题（共 5 题，每题 5 分，共 25 分）

1．求：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1-\dfrac{x}{2}}{e^x\ln(1+x)-x}$

解：进行带 Peano 余项的 Taylor 公式展开：

$$\sqrt{x+1}=1+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\2\end{pmatrix}x^2+o(x^2)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$$

$$e^x\ln(1+x)=(1+x+o(x))(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2))=x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

因此，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1-\dfrac{x}{2}}{e^x\ln(1+x)-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{1}{8}x^2+o(x^2)}{\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)}=-\dfrac{1}{4}$

2．求：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\dfrac{n-1}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{n}{n}})$

解：由 Riemann 和式可知：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n-1}{n}}+\sqrt{1+\frac{n}{n}})=\int_0^1\sqrt{1+x}dx=\frac{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^1=\frac{4\sqrt{2}-3}{3}$$

3．假设 $y=x^4(12\ln x-7)$，请计算凸性区间（上凸或者下凸区间）及拐点。

解：$y''=144x^2\ln x$，$y''=0$ 的根是 $x=1$，当 $0<x<1$ 时，$y''(x)<0$，因此，$(0,1]$ 是上凸区间。当 $x>1$ 时，$y''(x)>0$，因此，$[1,+\infty)$ 是下凸区间。这样点 $(1,-7)$ 是拐点。

4．求不定积分 $\int x\ln^2 xdx$

解：$\int x\ln^2 xdx=\int\ln^2 xd(\dfrac{x^2}{2})=\dfrac{1}{2}x^2\ln^2 x-\int x\ln xdx=\dfrac{1}{2}x^2\ln^2 x-\int\ln xd(\dfrac{x^2}{2})=$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{2}\int x^2(\ln x)'dx=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{4}x^2+C$$

5．计算圆 $x^2+(y-a)^2=r^2(0<r<a)$ 绕 x 轴旋转一圈所得旋转体的体积。

解：形状像救生圈。用微元法，过点 x 与坐标平面 $o-xy$ 平行的平面去截这个立方体得到的是一个圆环，面积 $A(x)=\pi(a+\sqrt{r^2-x^2})^2-\pi(a-\sqrt{r^2-x^2})^2=4\pi a\sqrt{r^2-x^2}$，这样，此体积 $V=2\int_0^r A(x)dx=8\pi a\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}dx=2\pi^2ar^2$

（装订线内不要答题）

五、证明题（共两题，13 分）

1．请用$\varepsilon-\delta$语言证明函数极限：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{2}{5}$（8 分）

证：对于$\forall\varepsilon>0$，寻找$\delta>0$，当$0<|x-2|<\delta$时，要使得$\left|\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{2}{5}\right|<\varepsilon$，不妨先令$0<|x-2|<1$，这时，$1<x<3$，且$x\neq 2$，这样，$3<2x-1<5$，都$|2x-1|<5$，估计$\left|\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{2}{5}\right|<\left|\dfrac{(2x-1)(x-2)}{5(x^2+1)}\right|\le\dfrac{|(2x-1)(x-2)|}{5}\le|x-2|$，所以，令$\delta=\min(1,\varepsilon)>0$，则当$0<|x-2|<\delta$时，有$\left|\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{2}{5}\right|<\varepsilon$，证毕。

2．证明：假设$f(x)$在有限区间$[a,b]$上连续，且$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b xf(x)dx=0$，那么，至少存在两个不同的点$\xi_1$，$\xi_2\in(a,b)$，使得$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$。（5 分）

证：令$g(x)=\int_a^x f(t)dt$，这时，$g(a)=0$，$g(b)=\int_a^b f(t)dt=0$。令$h(x)=\int_a^x g(u)du$，

$h(b)=\int_a^b g(u)du=ug(u)\Big|_a^b-\int_a^b ud(g(u))=-\int_a^b ug'(u)du=-\int_a^b uf(u)du=0$，$h(a)=0$，

由 Rulle 定理，$\exists x_0\in(a,b)$，使得$h'(x_0)=g(x_0)=0$，即$g(a)=g(x_0)=g(b)=0$。在区间$[a,x_0]$与$[x_0,b]$上分别运用 Rulle 定理可得，$\exists\xi_1\in(a,x_0)$及$\exists\xi_2\in(x_0,b)$，使得$g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$，即$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$。证毕。