

复旦大学技术科学类

2012-2013 学年第一学期《数学分析 B1》期终考试试卷

A 卷 共 6 页

课程代码: MATH120016.01-08 考试形式: ☐开卷 ☒闭卷 2013 年 1 月 11 日 8:30~10:30

(本试卷答卷时间为 120 分钟, 答案必须写在试卷上, 做在草稿纸上无效)

专业\_\_\_\_\_学号\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_成绩\_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

注意: 答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

一、严格表述题 (每题 3 分, 共 4 题, 共 12 分)

1. 函数极限  $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = A$  的定义。

2.  $\beta$  不是非空数集  $A$  的上确界。

3. 拉格朗日 (Lagrange) 中值定理。

(装订线内不要答题)

4. 函数  $y = f(x)$  在有限闭区间  $[a, b]$  上 Riemann 可积。

## 二、填空题（每题 4 分，共 5 题，共 20 分）

1. 已知  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + ax + b}{x - 3} = 1$ ，则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 1)\ln(1 + \sin(x^3))}{(e^x - 1)\cos x \tan^2 x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 假设隐函数方程  $y = 1 - xe^y$  所确定的函数是  $y = y(x)$ ，则其导数在点  $x = 0$  的值  $y'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4.  $y = \sin(x^2)$ ， $d^2y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5.  $\int \frac{x}{1 + \cos x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、判断简答题（判断下列命题是否正确，如果正确的，请回答“是”，并给予简要证明；如果错误的，请回答“否”，并给出反例。答“是或否”2 分，证明或举反例 4 分）（每题 6 分，共 5 题，共 30 分）

1. 假设  $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$ ，且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ，若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n}$  不存在，则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$  也不存在。

2. 假设函数  $f$  在有限闭区间  $[a, b]$  上连续, 而且  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , 但不恒等于 0, 那么,  $\int_a^b f(x) dx > 0$ 。

3. 无限区间  $(-\infty, +\infty)$  上的两个一致连续函数  $f(x)$  与  $g(x)$  的乘积必是区间  $(-\infty, +\infty)$  上的一致连续函数。

4. 假设函数  $f(x)$  在有限开区间  $(a, b)$  内可微, 且  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \infty$ , 则  $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x) = \infty$ 。

5. 假设  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 则  $\int_a^{+\infty} f^2(x) dx$  也收敛。

四、计算题（共 5 题，每题 5 分，共 25 分）

1. 求:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1 - \frac{x}{2}}{e^x \ln(1+x) - x}$

2. 求:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{n-1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{n}{n}})$

3. 假设  $y = x^4(12 \ln x - 7)$ ，请计算凸性区间（上凸或者下凸区间）及拐点。

4. 求不定积分  $\int x \ln^2 x dx$

5. 计算圆  $x^2 + (y - a)^2 = r^2 (0 < r < a)$  绕  $x$  轴旋转一圈所得旋转体的体积。

五、证明题（共两题，13 分）

1. 请用  $\varepsilon - \delta$  语言证明函数极限： $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2+1} = \frac{2}{5}$  （8 分）

2. 证明：假设  $f(x)$  在有限区间  $[a, b]$  上连续，且  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xf(x)dx = 0$ ，那么，至少存在两个不同的点  $\xi_1, \xi_2 \in (a, b)$ ，使得  $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$ 。（5 分）