eindige verzameling

Een verzameling X, zodanig dat er een natuurlijk getal n ∈ N is waarvan er een bijectie bestaat van de verzameling N[1, n] naar X. n wordt dan de kardinaliteit of orde van X genoemd en wordt genoteerd als:
|X|=n of [[X]] = n.

> elke verzameling die niet eindig is wordt een oneindige verzameling genoemd.

aftelbare en overaftelbare verzamelingen

Een oneindige verzameling X wordt aftelbaar genoemd als er een bijectie bestaat van N naar X. Indien dit niet het geval is, dan is X een niet-aftelbare of overaftelbare verzameling. Alle eindige verzamelingen zijn aftelbaar.

de verzameling van Z is aftelbaar

beschouw de afbeelding van N naar Z gedefineerd door

f(n)= n/2 als n even is
-(n+1)/2 als n oneven is

hieraan zien we dat de afbeelding inderdaad een bijectie is want de rij ziet er uit als (0, -1, 1, -2, 2, ...)

verzameling van Q is ook aftelbaar

Er bestaat terug een bijectie van N naar Q waarvan de rij van waarde er uitziet als:
(0, -1, 1, -2, -1/2, 1/2, 2, -3, -3/2, -2/3, -1/3, 1/3, 2/3, 3/2, 3,...)

om de plaats van a/b in de rij te bepalen, maken we gebruik van niveaus.
We nemen max(|a| / b) als niveau van a/b. binen elk niveau worden de getallen geranschikt van klein naar groot

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
niveau & & & & & & & & \\
0 & 0 & & & & & & & \\
1 & -1 & & 1 & & & & & \\
2 & -2 & -1/2 & & 1/2 & & 2 & & \\
3 & -3 & -3/2 & -2/3 & -1/3 & 1/3 & 2/3 & 3/2 & 3 \\
4 & -4 & -4/3 & -3/4 & -1/4 & 1/4 & 3/4 & 4/3 & 4 \\
\vdots & \vdots & & & & & & &
\end{array}
$$

aangezien er voor elk niveau een eindig aantal rationale getallen a/b bestaat volgt dat Q aftelbaar is.

de verzameling R is een niet aftelbare verzameling

We bewijzen dit door aan te tonen dat het interval [0, 1] van R een niet-aftelbare verzameling is, we gebruiken hiervoor cantor's diagonaalmethode.
veronderstel dat [0, 1] wel aftelbaar is dan zou de bijectie f van N naar [0, 1] er als volgt uitzien.

f(0) = 0, a_0 b_0 c_0 d_0...
f(1) = 0, a_1 b_1 c_1 d_1...
f(2) = 0, a_2 b_2 c_2 d_2...
f(3) = 0, a_3 b_3 c_3 d_3...

hierbij staan a,b,... voor één van de cijfers van 0 tot en met 9. getallen met een oneindige rij aan 0 of 9 kunnen op meerdere manieren geschreven worden, andere getallen zijn uniek.
We nemen een getal x tussen 0 en 1 dat niet in de lijst kan voorkomen.
x=0, x_1 x_2 x_3 x_4...

waarbij
x_i = a/b/c/...$_i$ + 1 als a/b/c/...$_i$ <= 7
1 als a/b/c/...$_i$ ∈ {8, 9}

omdat x_i nooit gelijk is aan 0 of 9 is de definitie van x altijd uniek. nu zal voor elke n ∈ N het getal x verschillend zijn van f(n) als beide getallen verschllen op de (n+1)ste plaats na de komma. bijgevolg is het interval [0, 1] en dus ook de verameling R niet aftelbaar zijn