multinomiaalgetallen

als n, n_1 , ... ,n_k positieve getallen zijn waarvoor $\sum_{i=1}^{k} n_i = n,\ dan\ is$

de herhallingspermutatie van $({}^{n}{}_{n1,\ n2,\ \dots,nk})$ = $\dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}.$

bewijs

als we n objecten inkleuren met een bepaalde kleur hebben we $({}_{n}^{n1})$ mogelijkheden voor de eerste kleur $({}_{n}^{n1\ -n2})$ voor de 2de kleer etc. Het totaal aantal kleuringen is dus gelijk aan het product van al deze mogelijkheden. hierbij is de som van alle n_i=n

$$
\begin{aligned}
&\binom{n}{n_1}\cdot\binom{n-n_1}{n_2}\cdot\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdot\dots\cdot\binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}}{n_k}\\
=\ &\frac{n!}{n_1!\cdot(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!\cdot(n-n_1-n_2)!}\cdot\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}\cdot\dots\cdot\frac{n_k!}{n_k!\cdot 0!}\\
=\ &\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\dots\cdot n_k!}.
\end{aligned}
$$

voor elke twee positieve natuurlijke getallen n en k geldt dat

$$\Big(\sum_{i=1}^{k} a_i\Big)^n = \sum \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k}.$$

bewijs

de coëfficiënt van de a_i in de ontwikkeling is het aantal keer dat we uit de n factoren (a1+a2+...+ak) de term a1 nemen uit n_1 van de factoren... Dit komt uiteindelijk neer op de definitie van de multinomiaalgetallen.