som en product van formele machtreeksen

De rekenregels voor de formele machtreeksen zijn dezelfde als deze voor de veeltermen en kunnen dus geschreven worden als

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k, \\ \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) x^k.\end{aligned}$$

het quotiënt van 2 formele machtreeksen
als

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad en \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

2 formele machtreeksen zijn in Q[[X]] of R[[x]], met $b_0 \neq 0$, dan bestaat er een unieke formele machreeks h(x) zodat f(x)= g(x) *h(x) m.a.w. h(x) = f(x)/ g(x) en noemen h(x) het quotiënt van f(x) en g(x)

$$h(x) = \frac{1}{b_0} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \tag{4.1}$$

waarbij de coëfficiënten c_k recursief gedefinieerd worden als $c_0 = a_0$ en

$$c_k = a_k - \frac{1}{b_0} \sum_{i=1}^{k} b_i c_{k-i} \quad voor\ alle\ k \geq 1.$$

bewijs
Uit de formule voor het berekenen van het product van machtreeksen vinden we dat

$$
\begin{aligned}
g(x) \cdot h(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} b_i \cdot \frac{1}{b_0} c_{k-i} \right) x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{b_0} \sum_{i=0}^{k} b_i c_{k-i} \right) x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(c_k + \frac{1}{b_0} \sum_{i=1}^{k} b_i c_{k-i} \right) x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = f(x).
\end{aligned}
$$

Dit quotient is uniek. Onderstel dat $h_1(x)$ en $h_2(x)$ 2 verschillende machtreeksen zijn waarvoor $f(x)= g(x) * h_1(x) = g(x) * h_2(x)$ dan geldt $g(x) * (h_1(x) - h_2(x)) = 0$.
Als $k \in N$ het kleinste natuurlijk getal is waarvoor de coëfficient c'_k van x^k in $h_1(x) - h_2(x)$ verschillend is van 0, dan zal de coëfficient x^k in $g(x) *(h_1(x) - h_2(x))$ gelijk zijn aan $b_0 c'_k \neq 0$, wat een tegenstrijdigheid is. Dit toont aan dat h(x) uniek is.

in de machtsreeks zullen we nooit substituties uitvoeren door machtreeksen met een constante term verschillend van 0