De gehele getallen

---

notaties voor de verzamelingen

natuurlijke getallen
N = {0, 1, 2, 3,...}
N*= {1, 2, 3,...} = N \ {0}

gehele getallen
Z = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}
Z^{-} = {..., -3, -2, -1, 0}
Z^{+} = {0, 1, 2, 3, ...}
Z^{-}* = {..., -3, -2, -1}
Z^{+}* = {1, 2, 3, ...}

N [a,b] = { a, a+1, a+2, ..., b-1, b} met a<b
N[a,b] = Ø met a>b

De optelling en de vermenigvuldiging

In de verzameling van de gehele getallen gelden de volgende axioma's voor de bewerkingen van de optelling en de vermenigvuldiging.

De optelling en vermenigvuldiging zijn -

- *inwendige bewerkingen:* a,b ∊ Z dan a+b ∊ Z en ab ∊ Z
- *commutatieve of abelse bewerkingen*: a + b = b + a en ab = ba
- *associatieve bewerkingen:* (a + b) + c = a + (b + c) en a(bc) = (ab)c
- het getal 0 is het *neutraal element* voor de optelling en 1 is het *neutraal element* voor de vermenigvuldiging
- *links- en rechtsdistributief* voor de vermenigvuldiging t.o.v. de optelling
- elk geheel getal a bezit een tegengesteld geheel getal -a zodat a + (-a) =0
- *de schrappingswet* als ab = ac en a ≠ 0 ⟶ b = c

De meeste rekenregels kunnen uit deze axioma's worden afgeleid
bv: a - b := a + (-b)

de ordening van de gehele getallen

Een relatie is een ***partiële orderelatie*** als ze reflexief, anti-symmetrisch en transitief is. H1 verzamelingen en relaties > equivalentierelaties
poset = partially ordered set

Een relatie is een ***totale orderelatie*** als dit een partiële orderelatie is voor alle elementen --> voor alle a,b geldt aRb of bRa

Strikte orderelaties zijn transitief en anti-reflexief

> 2 axiomas die gelden voor =<
>
> - voor alle a, b, c geldt als a <= b dan ook a+c <= b+c
> - voor alle a, b, c geldt als a <= b en c>=0 dan ook ac<=bc

het axioma van de goede ordening

Noem X een willekeurige deelverzameling van Z, dan is er een benedengrens b waarvoor geldt
b<=x, ∀x ∈ X, als de benedengrens element is van X dan wordt b het kleinste element genoemd. Als X een kleinste element heeft, is dit uniek.

> (axioma van de goede ordening)
> als X ≠ Ø een deelverzamelng is van Z en een benedengrens heeft, dan bezit X een kleinste element.

Het axioma van de goede ordening laat ons toe om recursieve definities op te stellen van bepaalde bewerkingen met de notaties

$$\sum a_i$$

$$= \ a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

$$\prod_{n=0}^{3} (n + x)$$

$$= (0 + x)(1 + x)(2 + x)(3 + x)$$