de euler functie

Veronderstel dat n een positief getal is waar met Φ(n) het aantal natuurlijke getallen uit N[1, n] die copriem zijn met n. Indien n=p een priemgetal is dan is Φ(p)=p-1

veronderstel dat n>= 2 een natuurlijk getal is met priemfactorontbinding n =p_1^{e1} p_2^{e2} ...p_k^{ek} waarbij p_1 ,p_2 ,...p_k onderling verschillende priemgetallen zijn en e_1,e_2, ... ,e_k ∊ N*. Dan is

$$\Phi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

bewijs

Voor elke j ∊ N[1,k], noem A_j de deelverzameling van N[1,n] die de veelvouden van p_j bevat. Dan geldt

$$\begin{aligned}\Phi(n) &= n - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| \\ &= n - \alpha_1 + \alpha_2 - \cdots + (-1)^k \alpha_k.\end{aligned}$$

Hierbij is α_i (veralgemeend inclusie-exclusie principe) de som van de kardinaalgetallen van al de mogelijke doorsneden die men kan vormen met i dergelijke verzamelingen (i ∊ N[1,k]). De doorsnede van i dergelijke verzamelingen, zoals

$$A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_i}, \qquad (1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_i \le k)$$

bevat de veelvouden in N[1,n] van P = p_{j1} p_{j2} ...p_{ji} en bevat bijgevolg de natuurlijke getallen

P, 2P, ..., (n/P)P

Deze doorsnede bevat bijgevolg n/P getallen,en α_i is de som van alle termen van de vorm n/P= n(1 / p_{j1}) (1 / p_{j2}) ...(1 / p_{ji})

waarbij 1<=j_1 < j_2 < ... <j_i <= k. Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned}\Phi(n) &= n - n\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_k}\right) + n\left(\frac{1}{p_1p_2}+\frac{1}{p_1p_3}+\cdots+\frac{1}{p_{k-1}p_k}\right) \\ &\qquad - \cdots + (-1)^k n\left(\frac{1}{p_1p_2\cdots p_k}\right) \qquad (6.2) \\ &= n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right). \qquad \square\end{aligned}$$