het aantal deelverzamelingen van een verzameling

Het binomium van Newton

Als n een positief getal is, dan geldt voor elke 2 reële getallen a en b, dat

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

bewijs
de eigenschap kan bewezen worden met de distributieve eigenschap, het product met n factoren (a + b)(a + b) ... (a + b). De coëfficient van $a^k b^{n-k}$ is gelijk aan het aantal combinaties van k uit de n elementen.

het veralgemeende inclusie-exclusie principe

Om de kardinaliteit van de unie van 2 verzamelingen te bepalen gebruiken we:
$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

indien we meer dan 2 verzamelingen bekijken moeten we rekening houden met de orde van de doorsneden tussen 2 van de verzamelingen in paar en de orde van de doorsnede van alle 3 verzamelingen.

De formules kunnen worden samengevat in het zeefprincipe.

$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - ... + (-1)^{n-1} \alpha_n$
waar α_k met $k \in \{1, 2, ..., n\}$ de som voor van de kardinaalgetallen van al de mogelijke doorsneden die men kan vormen met k dergelijke verzamelingen A_j

$$\alpha_k = \sum_{\substack{S \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |S|=k}} \left| \bigcap_{j \in S} A_j \right| = \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_k \\ 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n}} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

ofwel

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{\substack{S \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ S \neq \emptyset}} (-1)^{|S|-1} \left| \bigcap_{j \in S} A_j \right|.$$

we bewijzen dat elk element uit de unie slechts 1 maal wordt geteld in het rechterlid. veronderstel dat x tot t verzamelingen behoort. Dan zal x een bijdrage t leveren in α_1 = de

som van de kardinaliteiten van Ai.
In de som van α_2 zal de bijdrage 1 zijn dan en slechts dan als Ai en Aj zich onder de t verzamelingen bevinden die x bevatten. De bijdrage van x in het rechterlid is bijgevolg.

$$\binom{t}{1} - \binom{t}{2} + \cdots + (-1)^{t-1}\binom{t}{t}.$$

aangezien echter

$$\sum_{i=0}^{t}(-1)^i\binom{t}{i} = (1 + (-1))^t = 0$$

is de bijdrage van x tot het rechterlid 1.

permutaties zonder fixelementen (element dat op zichzelf wordt afgebeeld): wanorde

volgens het inclusie-exclusie principe is het totaal aantal wanordes d_n van N[1, n] gelijk aan
$d_n = n! - \alpha_1 + \alpha_2 - \ldots + (-1)^{n-1}\alpha_n$
waarbij α_i de som is van het aantal permutaties van N[1 ,n] die i gegeven elementen fixeren.
Het aantal permutaties van N[1, n] die deze i elementen (elementsgewijze) fixeren is het aantal permutaties op de n-i overige elementen (n - i)!. bijgevolg is

$$\alpha_i = \binom{n}{i} \cdot (n-i)! = \frac{n!}{i!},$$

zodat het totaal aantal wanordes gelijk is aan

$$d_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right)$$

Dit kunnen we op 2 manieren bewijzen.
eerste methode

$$
\begin{aligned}
d_n &= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right) + (-1)^n\frac{n!}{n!} \\
&= n \cdot (n-1)!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right) + (-1)^n \\
&= nd_{n-1} + (-1)^n
\end{aligned}
$$

voor alle n ∈ N \ {0, 1}

we kunnen deze formule ook herschrijven als n >= 3

d_n = (n - 1) (d_{n-1} + d_{n-2})

tweede methode

zie p 42