IV003 – úkol 1, příklad 1

Vypracovali: Henrich Lauko 410438
Martin Hanžl 410497

Funkce WeightedMedian($Array, n, w$)

vstup: pole $Array$ je dĺžky n, obsahuje dvojice (x_i, w_i)
výstup: optimálny prvek x_k

1 $median_x \leftarrow$ median($Array$) // *nájde median z hodnôt* $\{x_1, .., x_n\}$
2 $Array_{low} \leftarrow \emptyset$
3 $Array_{high} \leftarrow \emptyset$
4 $w_{low} \leftarrow 0$
5 **if** $n = 1$ **then**
6   **return** $Array[1]$
7 **fi**
8 **for** $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
9   **if** $Array[i] < median_x$ **then**
10         $w_{low} \leftarrow w_{low} + w_i$
11   Append $Array[i]$ to $Array_{low}$
12   **else**
13   Appent $Array[i]$ to $Array_{high}$
14   **fi**
15 **od**
16 **if** $w + w_{low} > \frac{1}{2}$ **then**
17   WeightedMedian($Array_{low}, |Array_{low}|, w$)
18 **else**
19   WeightedMedian($Array_{high}, |Array_{high}|, w_{low}$)
20 **fi**

Algoritmus využíva znalosť výpočtu mediánu v $\theta(n)$, dokázaneho na prednáške. Základna stratégia algoritmu je podobná binárnemu vyhľadávaniu: algoritmus spočíta medián a rekurzívne pokračuje na časti, kde sa nachádza vážený medián.

Inicilizácia algoritmu je WeightedMedian($Array, |Array|, 0$), kde $|Array|$ udáva počet prvkov poľa. V behu algoritmu, $Array$ je pole obsahujúce *median* pôvodneho vstupu a w je suma váh prvkov z celkového vstupu algoritmu, ktoré su menšie ako všetky prvky v poli $Array$. $Array_{low}$ obsahuje všetky prvky x_i menšie ako *median* z prvkov $Array$ a $Array_{high}$ obsahuje všetky prvky x_i väčšie alebo rovné ako *median* z prvkov $Array$, váha w_{low} je súčet váh všetkých prvkov z $Array_{low}$.

Korektnosť: Pre dokázanie korektnosti ukážeme, že vážený medián počiatočnej postupnosti(optimálny prvok x_k) je vždy v poli rekurzívneho volania a w je suma všetkých váh prvkov x_i menších ako všetky prvky v poli $Array$. Pre počiatočný stav podmienka triviálne platí. Pre dokázania, že podmienka platí v každom rekurzívnom volaní použijeme indukciu. Indukčný predpoklad bude, že naša kladená podmienka platí. Môžu nám nastať dva prípady:

1. $w + w_{low} > \frac{1}{2}$ Keďže x_k sa nachádza v $Array$ v 16. riadku algoritmu vieme, že x_k sa nachádza buďto v $Array_{low}$ alebo v $Array_{high}$. Vzhľadom na to, že váha všetkých x_i menších než prvky v $Array_{high}$ je väčšia než $\frac{1}{2}$, potom podľa definície vážený medián

Vypracovali: Henrich Lauko 410438
Martin Hanžl 410497

nemôže byť v poli $Array_{high}$, takže musí byť v poli $Array_{low}$. Pole $Array_{low}$ obsahuje všetky najmenšie prvky z pola $Array$, takže w sa nemení a splňuje podmienku.

2. $w + w_{low} \leq \frac{1}{2}$ potom na riadku 16. musí byť x_k v $Array_{high}$. Všetky prvky $Array_{high}$ sú väčšie ako všetky prvky v $Array_{low}$, takže celková váha všetkých prvkov menších ako prvky v $Array_{high}$ je $w + w_{low}$. Teda predpoklad je splnený.

Takže podľa indukcie je podmienka vždy pravdivá. Algoritmus vždy skončí, lebo pole $Array$ sa každým rekurzivním volaním zmenší. Keďže je algoritmus konečný aj parciálne korektný tak je aj korektný.

Analýza zložitosti: Algoritmus beží v čase $\theta(n)$. Výpočete *medianu* je v $\theta(n)$ a rozdelenie $Array$ do $Arrya_{low}$ a $Array_{high}$ tiež v $\theta(n)$. Teda zložitosť jedného rekurzívneho volania je $\theta(n) + \theta(n) = \theta(n)$. Každé rekurzívne volanie zmeší velkosť vstupu n na $\frac{n}{2}$. Rekurentná rovnica bude $T(n) = T(n/2) + \theta(n) = \theta(n)$.