BV - Aufgabenblatt 4

Aufgabe 2

① a) Zuerst Rotation um 180° gegen den Uhrzeigersinn: $T_R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

dann Translation um -1 in x-Richtung und +3 in y-Richtung: $T_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$T_G = T_T \times T_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Zuerst eine uniforme Skalierung um den Faktor 3: $T_S = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

dann eine Translation von -5 in x-Richtung und -3 in y-Richtung: $T_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$T_G = T_T \times T_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(T_G ist die gesamte Transformationsmatrix.)
(Wir benutzen das Koordinatensystem $\overset{y}{\uparrow}\!\rightarrow_x$)

2 a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x' = 0x - 1y - 1 \\ y' = 1x + 0y + 3 \end{matrix}$

↳ Zuerst Rotation um 90°, da dann $\cos(90°) = 0$ und $\sin(90°) = 1$, also

$T_R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dann Translation mit $T_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$T_T \times T_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x' = 1x + 0y + 1 \\ y' = 0x + 4y + 1 \end{matrix}$

⇒ Zuerst nicht uniforme Skalierung mit $T_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, dann Translation

mit $T_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$T_T \times T_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

3 a) Kommutativität bedeutet $a \times b = b \times a$.

Scherung × Translation

$$\begin{bmatrix} 1 & s_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s_x & (t_x + s_x \cdot t_y) \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

nicht gleich

Translation × Scherung

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & s_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s_x & t_x \\ 1 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Rotation mit unterschiedlichen Faktoren α und β

Schreibweise: $\sin(\beta) = s^\beta$
$\cos(\beta) = c^\beta$

$T_R^\alpha \times T_R^\beta$

$$\begin{bmatrix} c^\alpha & -s^\alpha & 0 \\ s^\alpha & c^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c^\beta & -s^\beta & 0 \\ s^\beta & c^\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c^\alpha \cdot c^\beta - s^\alpha \cdot s^\beta) & (-c^\alpha s^\beta - s^\alpha \cdot c^\beta) & 0 \\ (s^\alpha \cdot c^\beta + c^\alpha \cdot s^\beta) & (-s^\alpha \cdot s^\beta + c^\alpha \cdot c^\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ist gleich

$T_R^\beta \times T_R^\alpha$

$$\begin{bmatrix} c^\beta & -s^\beta & 0 \\ s^\beta & c^\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c^\alpha & -s^\alpha & 0 \\ s^\alpha & c^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c^\beta \cdot c^\alpha - s^\beta \cdot s^\alpha) & (-c^\beta \cdot s^\alpha - s^\beta \cdot c^\alpha) & 0 \\ (s^\beta \cdot c^\alpha + c^\beta \cdot s^\alpha) & (-s^\beta \cdot s^\alpha + c^\beta \cdot c^\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$